Lehrstuhl für Betriebssysteme
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

IN0010, SoSe 2018

Übungsblatt 2

23. April – 27. April 2018

Hinweis: Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Lösung vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit

In der Vorlesung wurde die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für Funkverbindungen mit etwa $p_{e,1} = 10^{-4}$ sowie für Ethernet über Kupferkabel mit etwa $p_{e,2} = 10^{-8}$ angegeben. Wir nehmen an, dass Bitfehler unabhängig voneinander und gleichverteilt durch ein Rauschen mit über die Zeit konstanter Leistung auftreten. Die Kanaleigenschaften ändern sich über die Zeit hinweg also nicht. Weitere Störeinflüsse wie Interferenzen seien ausgeschlossen. Die Rahmenlänge betrage 1500 B.

a)* Bestimmen Sie für beide Übertragungsarten die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen fehlerfrei übertragen wird.

$$\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] = (1 - p_e)^{\ell \cdot 8}$$

Für kabelgebundene Verbindung ergibt sich damit eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 99,99 %, für kabellose Übertragung lediglich 30,12 %

Im Folgenden betrachten wir nur noch die kabellose Verbindung. Da die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit relativ hoch ist, sieht ein Protokoll auf der Sicherungsschicht Bestätigungen vor. Für korrekt übertragene Rahmen wird also eine Bestätigung verschickt. Bleibt eine Bestätigung aus, so nimmt der Sender an, dass die Übertragung nicht erfolgreich war. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass Bestätigungen nicht verloren gehen.

b)* Gibt es eine maximale Anzahl an Wiederholungen, bis ein bestimmter Rahmen garantiert korrekt übertragen wurde?

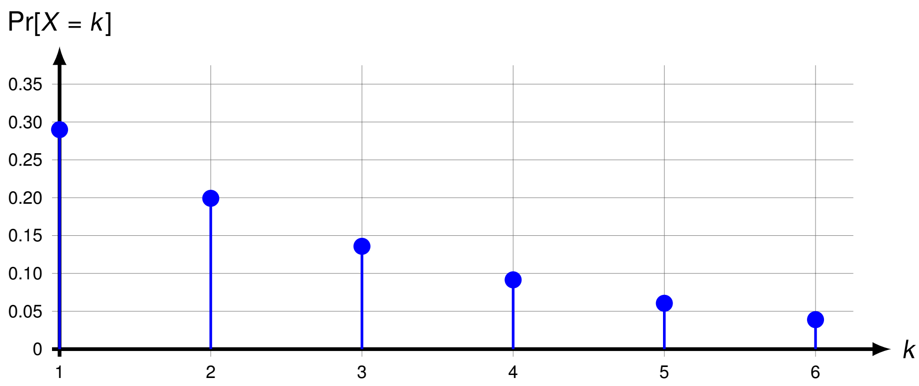
Nein. Die einzelnen Übertragungen sind unabhängig voneinander, d. h. es tritt auch bei jeder Wiederholung ein Rahmenfehler mit den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten auf. Es bleibt also stets ein Restrisiko.

c)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Rahmen genau k-mal übertragen werden muss.

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der notwendigen Übertragungen an. Mit $p_R = \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Pr[X = k] &= \Pr[\text{„Übertragung } (k-1)\text{-mal erfolglos“}] \cdot \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] \\ &= (1 - p_R)^{k-1} \cdot p_R\end{aligned}$$

d) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit aus c) für $k \in \{1, ..., 6\}$.



e) Angenommen das zuständige Protokoll auf der Sicherungsschicht bricht die Wiederholung ab, falls der dritte Sendeversuch erfolglos war. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen nicht übertragen werden kann?

Die Wahrscheinlichkeit entspricht der, dass die Übertragung drei mal in Folge fehlschlug ohne Rücksicht darauf, ob es beim 4. Mal funktioniert oder nicht. Dies ergibt

$$\Pr[X > 3] = 1 - \Pr[X \leq 3] = 1 - \sum_{k=1}^{3} \Pr[X = k] \approx 34\,\%$$

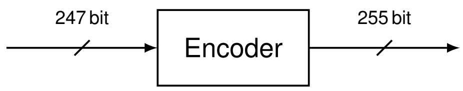
Alternative Lösung:

$$\Pr[X > 3] = (1 - p_R)^3 \approx 34\,\%$$

Achtung: Die alternative Lösung ist nur deswegen korrekt, da die X geometrisch verteilt ist und die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d. h. das Fehlschlagen der k-ten Übertragung beeinflusst nicht die $(k+1)$-te Übertragung. Wäre diese Unabhängigkeit nicht erfüllt, so würde die alternative Lösung ein falsches Ergebnis liefern!

Aufgabe 2 Kanalkodierung

In der vorherigen Aufgabe haben wir gesehen, dass die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bei schlechter Kanalqualität zum Problem werden kann. Für den Funkkanal mit einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_e = 10^{-4}$ betrug die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Rahmen der Länge 1500 B nur etwa 30 %. Um der hohen Bitfehlerrate zu begegnen, kommt nun ein Blockcode auf Schicht 1 zum Einsatz:



Dieser ermöglicht es dem Decoder auf der Empfängerseite in einem Kanalwort der Länge $n = 255$ bit *einen beliebigen* Bitfehler zu korrigieren. Treten zwei oder mehr Bitfehler auf, so ist die Entscheidung des Decoders falsch und die gesamte Information des Kanalworts verloren.

a)* Bestimmen Sie die Coderate.

$$R = \frac{k}{n} = \frac{247}{255} \approx 0.97$$

b)* Was sagt die Coderate aus?

Die Coderate drückt das Verhältnis zwischen der Größe eines Nutzdatenblocks und der Größe eines durch Redundanz gesicherten Nutzdatenblocks (Kanalwort) aus. Je kleiner R, desto mehr Redundanz wurde hinzugefügt. Für $R = 247/255$ trägt also jedes Kanalwort der Länge 255 bit insgesamt 8 bit an Redundanz sowie 247 bit Information.

c)* Da der Rahmen größer ist als ein Block von 247 bit, muss dieser in mehrere Blöcke zerlegt werden. Bestimmen Sie die Anzahl N der Kanalwörter, die übertragen werden müssen.

Jedes Kanalwort der Länge 255 bit trägt 247 bit Nutzdaten. Es ergibt sich also:

$$N = \left\lceil \frac{1500 \cdot 8}{247} \right\rceil = 49.$$

d) Bestimmen Sie den prozentualen Overhead, der durch Padding im letzten Kanalwort erzeugt wird.

$$\gamma = \frac{103}{1500 \cdot 8 + 103} \approx 0{,}85\,\%.$$

e)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb des Kanalworts zwei oder mehr Fehler auftreten. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Bitfehler in einem Kanalwort der Länge n angibt.

$$\begin{aligned} p_{e,Codewort} &= \Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X \leq 1] = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} \cdot p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} \\ &= 1 - \left(1 \cdot p_e^0 \cdot (1 - p_e)^{255} + 255 \cdot p_e^1 \cdot (1 - p_e)^{254}\right) \\ &\approx 1 - \left(0,9748 + 255 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9748\right) \\ &\approx 3.18 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

f) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen korrekt übertragen wird – also keines der Kanalwörter, die den Rahmen ausmachen, fehlerhaft übertragen wird.

Damit der Rahmen korrekt übertragen wird, müssen alle Kanalwörter korrekt übertragen werden. Es ergibt sich mit den Ergebnissen der vorhergehenden Teilaufgaben also:

$$\Pr[\text{„Kein Fehler im Rahmen“}] = (1 - p_{e,Codewort})^N \approx 98{,}50\,\%$$

g) Zusammen mit der Lösung auf Teilaufgabe e) beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen korrekt übertragenen Rahmen damit etwa 98,5 %. Beurteilen Sie dieses Ergebnis bezüglich der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich übertragenen Rahmen (30 %). Bedenken Sie dabei auch die durch R bedingte Verringerung der Übertragungsrate sowie die Alternative, defekte Rahmen zu wiederholen (vgl. Aufgabe 1e)).

Im Vergleich zu der ursprünglichen Erfolgswahrscheinlichkeit bei der Übertragung eines Rahmens von nur etwa 30 % hat sich die Situation nun erheblich gebessert. Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich übertragenen Rahmen hat sich auf 98,5 % erhöht, was mehreren Zehnerpotenzen in der Bitfehlerrate entspricht. Natürlich muss man noch den Overhead durch Padding (insgesamt 103 bit im letzten Block) und Kanalkodierung berücksichtigen. Damit ergibt sich eine Effizienz von

$$\begin{aligned} \eta &= R \cdot \Pr[\text{„Kein Fehler im Rahmen“}] \cdot (1 - \gamma) \\ &= 0,97 \cdot 0,985 \cdot \left(1 - \frac{103}{1500 \cdot 8 + 103}\right) \approx 0,95. \end{aligned}$$

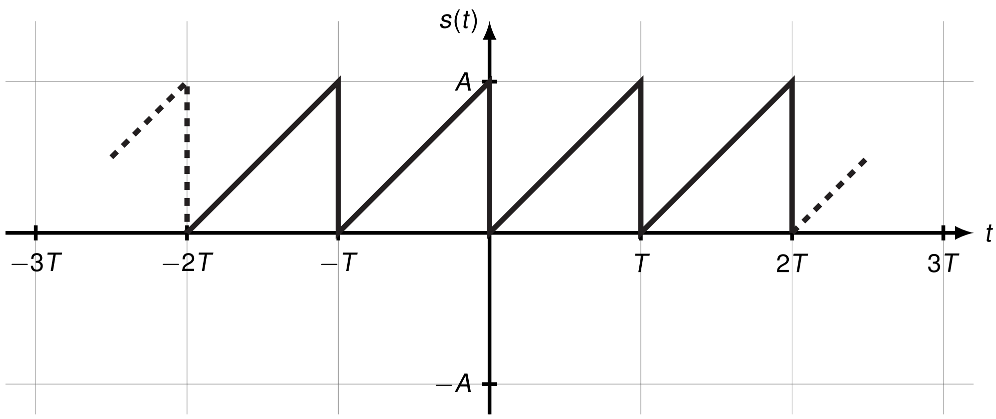
Mit der Methode aus Aufgabe 1e) müsste ein Rahmen 11 – 12 mal wiederholt werden, um eine ähnliche Erfolgswahrscheinlichkeit wie mit Kanalkodierung zu erreichen. Die mehrfache Übertragung desselben Rahmens reduziert natürlich die Nettodatenrate auf dem Kanal deutlich (muss ein Rahmen im Mittel zweimal übertragen werden, so halbiert sich die Nettodatenrate).

Fazit: Kanalkodierung ermöglicht überraschende Verbesserungen und ist bei unzuverlässigen Verbindungen unerlässlich. Erreicht wird dies im Fall von Blockcodes durch zwei Tricks:

- Der eigentliche Rahmen wird in kleinere Blöcke unterteilt – für jeden der Blöcke ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bereits bedeutend geringer als für den Rahmen im Ganzen. ABER: Da **alle** Codewörter korrekt übertragen werden müssen, gewinnt man zunächst noch nichts.
- Erst dadurch, dass pro Codewort an einer beliebigen Stelle ein Bitfehler auftreten darf, wird die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bedeutend reduziert.

Aufgabe 3 **Fourierreihe**

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$$s(t) = \frac{t}{T} \cdot A \quad \text{für} \quad t \in [0, T]$$

Hinweis: Siehe Geradengleichung $y = mx + t$ (Schulstoff).

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right). \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \;\text{ und }\; b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt. \tag{2}$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Der Gleichanteil entsteht ausschließlich durch a_0, denn alle anderen Koeffizienten bestimmen die Amplitude einer Sinus- oder Kosinusschwingung.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

Prof. Dr. Uwe Baumgarten
baumgaru@tum.de
Dr.-Ing. Stephan Günther, Johannes Naab
grnvs@net.in.tum.de

Aus Formel (2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot\cos(k\omega t)\,dt \overset{k=0}{=} \frac{2}{T}\int_0^T \frac{t}{T}\cdot A\,dt \\ &= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{T}\int_0^T t\,dt = \frac{2A}{T^2}\cdot\frac{T^2}{2} = A \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $s(t)$ besitzt einen Gleichanteil. Dieser beträgt $a_0 = A$.

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

Ja: Das Signal $s(t)$ nimmt ausschließlich Werte größer Null an. Es kann daher nicht gleichanteilsfrei sein. Aus der Steigung der einzelnen Sägezähne lässt sich leicht erahnen, dass der zeitliche Mittelwert des Signals bei $A/2$ liegen muss.

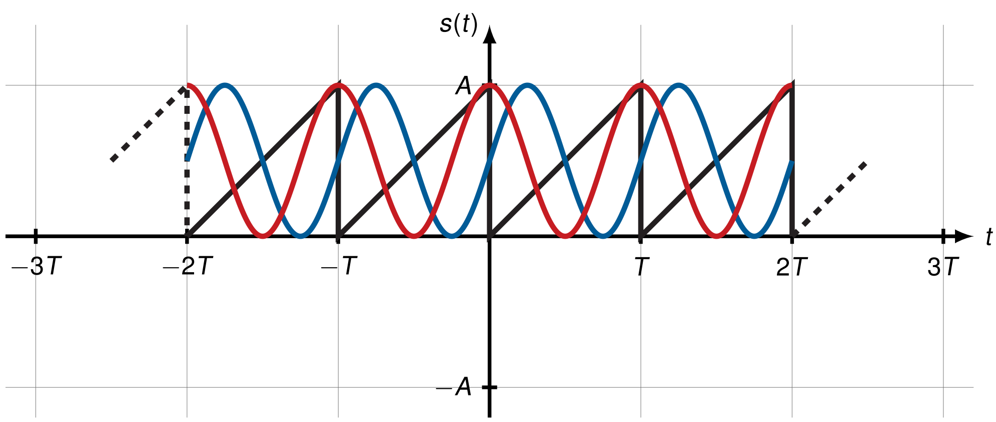
e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

Intuitiv
Der Sägezahn $s(t)$ ist in Phase mit einer Sinus-Schwingung: Zu Vielfachen der Periodendauer T besitzt $s(t)$ Nulldurchgänge (den Gleichanteil einmal abgezogen). Dies entspricht genau dem Verhalten einer Sinusschwingung. Falls Sie das nicht sehen, stellen Sie sich den abrupten Pegelwechsel an Vielfachen von T leicht abgeschrägt vor.

Ein kosinus-förmiges Signal hingegen hätte an diesen Stellen stets den Wert ± 1. Da dies allerdings nicht der Form des Sägezahns entspricht, müssen die Kosinus-Anteile entfernt werden. Dies wird durch $a_k = 0, \forall k > 0$ erreicht.

Mathematisch
Da $\sin(x) = -\sin(-x)$ handelt es sich hierbei um eine ungerade (also punktsymmetrische) Funktion. Das Signal $s(t)$ ist, wenn man den Gleichanteil abzieht, ebenfalls punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (andernfalls ist der Symmetriepunkt lediglich entlang der Ordinate verschoben). Der Kosinus hingegen ist eine gerade bzw. achsensymmetrische Funktion, weswegen er nicht zu $s(t)$ beisteuern kann.

Anschaulich
In der untenstehenden Abbildung sind $s(t)$, $\cos(2\pi t)$ und $\sin(2\pi t)$ eingezeichnet. Man sieht, dass der Sinus bei Vielfachen von π das Signal $s(t)$ genau in seinen Mittelwerten kreuzt, während der Kosinus Extremwerte ungleich $s(k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ annimmt.



Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Hinweise: $\int_0^1 t\sin(ct)\,dt = \dfrac{\sin(c) - c\cdot\cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

Der Hinweis erspart uns eine partielle Integration. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(k\omega t)\,dt = 2A\int_0^1 t\sin(k\omega t)\,dt \\ &= 2A\cdot\frac{\sin(k\omega) - k\omega\cos(k\omega)}{k^2\omega^2} \overset{\omega=2\pi}{=} -\frac{A}{k\pi} \end{aligned}$$

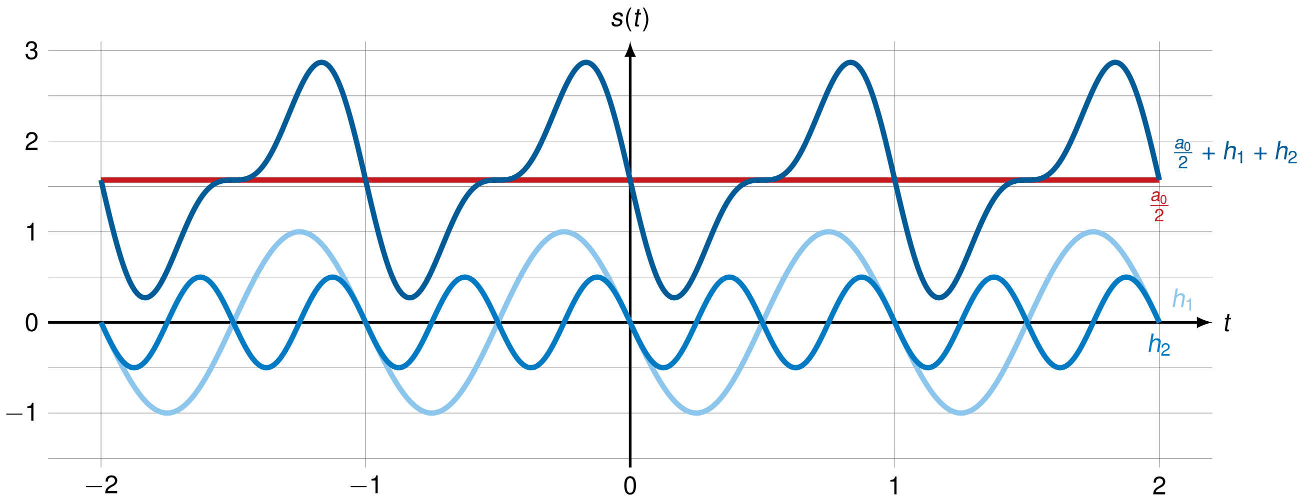
g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

Für $A = \pi$ erhalten wir:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6,\; b_1 = -1,\; b_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die ersten beiden Harmonischen lauten

$$h_1(t) = b_1\sin(2\pi t) = -\sin(2\pi t), \quad \text{und} \quad h_2(t) = b_2\sin(4\pi t) = -\frac{1}{2}\sin(4\pi t).$$



Aufgabe 4 Quantisierung und Rauschen (Hausaufgabe)

In dieser Aufgabe soll eine Temperaturkurve digitalisiert und der Einfluss von Rauschen auf Signale untersucht werden. Hierfür sollen Temperaturen im Bereich von –40 °C bis 70 °C betrachtet werden. Die gemessenen Werte sollen linear abgebildet werden, wobei eine Schrittweite von höchstens 0,5 °C erreicht werden soll.

a)* Erklären Sie den Unterschied zwischen Abtastung und Quantisierung.

Abtastung ist die Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals im Zeitbereich ohne Runden.
Quantisierung ist die Diskretisierung eines Signals in Signalstufen, d.h. im Wertebereich mit Runden

b)* Wie viele Bit werden für die Digitalisierung eines einzelnen Temperaturwerts mindestens benötigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Bereich –40 °C bis 70 °C mit einer Auflösung von 0,5 °C werden 220 unterschiedliche Signalstufen benötigt.
7 bit erlauben lediglich $2^7 = 128$ Stufen.
Die nächsthöhere Anzahl sind 256 unterschiedliche Signalstufen; es werden daher 8 bit benötigt.
oder $\lceil \log_2(220)\text{bit} \rceil = 8\,\text{bit}$

c) Mit welcher Schrittweite kann aufgrund der verwendeten Bitanzahl laut Teilaufgabe b) nun die Temperatur bestimmt werden?

Für 110 °C auf 256 unterschiedlichen Signalstufen ergibt sich eine Genauigkeit von $\frac{110\,°\mathrm{C}}{256} \approx 0{,}43\,°\mathrm{C}$

d) Bestimmen Sie den maximalen Quantisierungsfehler bezüglich der berechneten Schrittweite aus Aufgabe c), unter der Annahme dass mathematisches Runden verwendet wird.

$0{,}43\,°\mathrm{C} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}215\,°\mathrm{C}$

Das verwendete Basisbandsignal verwendet für jede Temperaturstufe genau ein Symbol. Es soll eine Kanalkapazität von 10 kbit/s erreicht werden.

e) Bestimmen Sie die mindestens benötigte Bandbreite bei einem rauschfreien Kanal, wenn die angegebene Kanalkapazität erreicht werden soll.

$M = 2^N = 2^8 = 256$ Signalstufen
$C_H = 2 \cdot B \cdot \log_2(M)$
$10\,\mathrm{kbit/s} = 2 \cdot B \cdot 8$
$B = 625\,\mathrm{Hz}$

Nehmen Sie nun an, die Temperaturwerte werden mit einer Bandbreite von $B = 750\,\mathrm{Hz}$ übertragen.

f)* Auf welchen Wert würde die Kanalkapazität bei gleicher Bandbreite sinken, wenn ein Signal-Rausch-Abstand von 35 dB angesetzt werden würde?

$35 = 10 \cdot \log(X)$
$X = 3162{,}28$
$C_S = B \cdot \log_2(1 + \mathrm{SNR})$
$C_S = 750\,\mathrm{Hz} \cdot \log_2(3162{,}28 + 1) \approx 8720\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}$

g)* Begründen Sie, warum bei steigendem Signal-Rausch-Abstand die Kanalkapazität bei konstanter Bandbreite steigt.

Es sind mehr Symbole unterscheidbar, was zu einer höheren Kanalkapazität führt.