

# SMC-menetelmät

Laskennallinen tilastotiede - Harjoitustyö

Lasse Rintakumpu

30 April, 2021

## Sisällys

<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
1.1 Suodinongelma . . . . .	2
1.2 Historiaa . . . . .	2
<b>2 Bayesilainen suodin</b>	<b>3</b>
<b>3 Hiukkassuodin-algoritmi</b>	<b>3</b>
3.1 Parametrien valinta . . . . .	4
3.1.1 Otoksoon $N$ valinta . . . . .	5
3.1.2 Uudelleenotantamenetelmän valinta . . . . .	5
3.1.3 Ehdotusjakauman valinta . . . . .	6
3.2 Konvergenssituloksia . . . . .	7
3.3 Marginaalijakauma . . . . .	7
3.4 Aikakompleksisuus . . . . .	8
<b>4 Paikannusesimerkki</b>	<b>8</b>
4.1 Koeasetelma . . . . .	8
4.2 Datan kuvaus . . . . .	8
4.3 Malli . . . . .	9
4.4 Algoritmi . . . . .	9
4.5 Tulokset . . . . .	9
<b>5 Lopuksi</b>	<b>9</b>
<b>6 Lähteet</b>	<b>9</b>

## 1 Johdanto

SMC-menetelmät (Sequential Monte Carlo -menetelmät, tunnetaan myös nimellä hiukkassuotimet) ovat joukko 90-luvulta eteenpäin kehitettyjä Monte Carlo -algoritmeja, joiden avulla voidaan ratkaista ns. suodinongelma, kun ongelma on epälineaarinen ja/tai ongelmaan liittyvä kohina ei noudata normaalijakaumaa. Tämän tutkielman tavoitteena on esittää pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria sekä joitakin menetelmäperheeseen kuuluvia algoritmeja. Tutkielman esitykset seuraavat erityisesti Simo Särkän kirjaa *Bayesian Filtering and Smoothing* (2013) sekä Fredrik Gustafssonin artikkelia "Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications" (2010). SMC-menetelmille on lukuisia sovellutuksia esimerkiksi Bayesilaisessa tilastotieteessä, fysiikassa ja robotiikassa. Tämän tutkielman lopussa tarkastellaan hiukkassuotimen käyttöä paikannussovelluksessa.

## 1.1 Suodinongelma

Stokastisten prosessien teoriassa suodinongelmaksi kutsutaan tilannetta, jossa halutaan muodostaa paras mahdollinen estimaatti jonkin järjestelmän tilan arvoille, kun ainoastaan osa tiloista voidaan havaita ja/tai havaintoihin liittyy kohinaa. Tavoitteena on siis laskea jonkin Markov-prosessin posteriorijakauma kyseisten havaintojen perusteella. Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti epälineaarisen ns. Markovin piilomallin posteriorijakauman Bayesilaiseen ratkaisuun. Ongelmaa havainnollistaa kaavio (1).

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longrightarrow & \dots & \text{piilossa olevat tilat} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 Y_1 & & Y_2 & & Y_3 & & \dots & \text{havainnot}
 \end{array} \tag{1}$$

Ongelmassa tiedämme, miten havaitut muuttujat kytkeytyvät ”piilossa oleviin” muuttujiin sekä osaamme sanoa jotain tilamuuttujien todennäköisyyksistä. Oletamme lisäksi, että piilossa olevat tilat muodostavat Markovin ketjun. Kun aika-avaruus on diskreetti ja merkitsemme piilossa olevan prosessin tilaa ajanhetkellä  $k$   $x_k$  ja havaittua prosessia  $y_k$ , meillä on siis olemassa mallit

$$x_{k+1} = f(x_k, \nu_k) \tag{2}$$

$$y_k = h(x_k) + e_k. \tag{3}$$

Lisäksi tiedetään prosessin alkuhetken jakauma  $x_1 \sim p_{x_1}$ , tähän liittyvän kohinaprosessin jakauma  $\nu_k \sim p_{\nu_k}$  sekä malliin  $y_k$  liittyvä kohina  $e_k \sim p_{e_k}$ . Mallit voidaan yleisemmällä tasolla esittää myös muodossa

$$x_{k+1} \sim p(x_{k+1}|x_k) \tag{4}$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k). \tag{5}$$

Tutkielman teoriaosassa käytetään ensisijaisesti yhtälöiden (4) ja (5) muotoilua. Empiirisessä osassa palataan yhtälöiden (2) ja (3) muotoiluun.

Näin määritettyjen mallien avulla SMC-menetelmät estimoivat sekventiaalisesti tilojen  $X_k$  arvot minä hyvänsä ajan hetkellä  $k$ , kun ainoastaan prosessi  $Y_1, \dots, Y_k$  tunnetaan. Estimaatit saadaan posteriorijakaumasta  $p(x_k|y_1, y_2, \dots, y_k)$ , jonka approksimaatio muodostetaan Bayesilaisittain havaintojen pohjalta. Kuten mainittua, ei SMC-perheen algoritmeja käytettäessä mallin  $y_k = h(x_k) + e_k$  tarvitse olla lineaarinen eikä kohinaprosessien noudattaa normaali jakaumaa. SMC-menetelmissä stokastisen prosessin posteriorijakauman esittämiseen käytettyjä otoksia kutsutaan myös partikkeleiksi. Suodinongelmaa lähellä on myös ns. tasoitusongelma (smoothing problem), jossa ollaan kiinnostuneita prosessin  $x_k$  posteriorijakaumasta  $p(x_k|y_k)$  jokaisena ajanhetkenä  $1, \dots, k$  ei ainoastaan haluttuna ajanhetkenä  $k$ . Tämä tutkielma keskittyy yksin suodinongelman ratkaisemiseen, mutta SMC-algoritmin marginalisointia koskevassa luvussa viitataan myös tasoitusongelman ratkaisuun.

## 1.2 Historiaa

Lineaarisen suodinongelman ratkaisu on tunnettu ... Epälineaarille ei-Gaussilaiselle mallille ... Muita vaihtoehtoja ovat EKF, UKF, QKF.

It should be stressed that both EKF and UKF approximate the model and propagate Gaussian distributions representative of the posterior while the PMF uses the original model and approximates the posterior over a grid. The particle filter (PF) also provides a numerical approximation to the nonlinear filtering problem similar to the PMF but uses an adaptive stochastic grid that automatically selects relevant grid points in the state space, and in contrast to the PMF, the standard PF has linear complexity in the number of grid points. The first traces of the PF date back to the 1950s [11, 12], and the control community made some attempts in the 1970s [13, 14]. However, the PF era started with the seminal paper [15], and the independent developments in [16, 17]. Here, an important resampling step was introduced.

The timing for proposing a general solution to the nonlinear filtering problem was perfect in that the computer development enabled the use of computationally complex algorithms in quite realistic problems. Since the paper [15] the research has steadily intensified; see the article collection [18], the surveys [19-22], and the monograph [23]. Fig. 1 illustrates how the number of papers increases exponentially each year, and the same appears to be true for applied papers. The PFs may be a serious alternative for real-time applications classically approached by the (E)KF. The more nonlinear model, or the more non-Gaussian noise, the more potential PFs have, especially in applications where computational power is rather cheap, and the sampling rate is moderate

Monte Carlo -ratkaisuja (esim. Princeton)

Ensimmäisen epälineaarisen suodinongelman Bayesilaisen/MC-ratkaisun esittivät Gordon, Salmond ja Smith artikkelissaan “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation” (1993). Gordonin, Salmondin ja Smithin ratkaisu eroaa notaatioltaan hieman tässä tutkielmassa esitetystä, mutta on olennaisesti sama. Suurin ero tämän tutkielman SMC-algoritmin sekä alkuperäisen SMC-algoritmin välillä on XXX MITEN XXX. Artikkelissa ratkaisu kulki nimellä “bootstrap filter”, saapasremmissuodin. MIKSI Termiä hiukkassuodin käytti ensimmäisen kerran Del Moral artikkelissa “Nonlinear Filtering: Interacting Particle Resolution” (1996), SMC-menetelmät termiä Liu ja Chen artikkelissa “Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems” (1998). Tässä tutkielmassa pyritään korostamaan suotimien yhteyttä Monte Carlo -algoritmeihin ja käytetään siksi termiä SMC-menetelmät. Poikkeuksen tähän tekee varsinainen esitetty algoritmi, jota kutsutaan tutkielmassa hiukkassuodin-algoritmiksi.

## 2 Bayesilainen suodin

Ennen SMC-algoritmia käydään läpi algoritmeissa käytetty yleinen Bayesilainen posteriorijakauman laskenta. Esitys noudattaa Fredrik Gustafssonin artikkelia “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010). Bayesilainen ratkaisu tilavektorin posteriorijakaumalle  $p(x_k|y_{1:k})$  saadaan seuraavalla rekursiolla (käydään läpi jokaiselle ajanhetkelle  $k = 1, \dots, t$ ). Lasketaan ensin

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \quad (6)$$

joka saadaan suoraan Bayesin kaavasta  $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$ . Normalisointivakio lasketaan integraalina

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k, \quad (7)$$

joka saadaan kokonaistodennäköisyyskaavasta  $P(A) = \mathbb{E}[P(A|X)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x)f_X(x) dx$ . Merkintä  $\mathbb{R}^{n_x}$  vastaa tässä piilossa olevien muuttujien dimensiota  $n$ .

Lopuksi lasketaan päivitysaskel ajalle, joka saadaan edelleen kokonaistodennäköisyydellä

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k}) dx_k. \quad (8)$$

Rekursio avulla voidaan laskea  $p(x_k|y_{1:k})$  käymällä rekursio läpi  $k$  kertaa.

## 3 Hiukkassuodin-algoritmi

Täsä luvussa esitetään hiukkassuodin-SMC-algoritmi Bayesilaisen, epälineaarisen suodinongelman ratkaisemiseksi. Algoritmi on numeerinen toteutus luvussa 2. kuvatussa Bayesilaisesta suotimesta. Esitetty algoritmi

perustuu Fredrik Gustafssonin artikkeliin “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010).

Algoritmi alustetaan jakaumasta  $x_1^i \sim p_{x_0}$  generoiduilla  $N$ -kappaleella partikkeleita. Jokaiselle partikkelille annetaan alustuksessa sama paino  $w_{1|0}^i = 1/N$ . Algoritmi suoritetaan jokaiselle partikkelille  $i = 1, 2, \dots, N$  jokaisella ajanhetkellä  $k = 1, 2, \dots, t$ . Algoritmin kuvauksessa käytetään notaatiota  $x_k^i$ , joka tarkoittaa, että tila  $x_k$  käy ajanhetkellä  $k$  gridin pisteessä  $x^i$ . Notaatiota tarvitaan, koska SMC-algoritmin läpikäymä gridi muuttuu ajan funktiona. SYÖTE

Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa päivitetään painot yhtälön 9 mukaan.

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i) \quad (9)$$

Normalisointipaino  $c_k$  lasketaan puolestaan yhtälöstä (10). VASTAAVUUS BAYES-suotimeen.

$$c_k = \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (10)$$

Seuraavassa vaiheessa estimoidaan  $p$  laskemalla tiheyden  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$  MC-estimaatti yhtälön (11) perusteella

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i) \quad (11)$$

missä  $\delta(x)$  on Diracin deltafunktio.

Seuraavassa vaiheessa suoritetaan valinnainen uudelleenotanta. Kun uudelleenotanta tehdään jokaisella algoritmin iteraatiolla, on kyseessä SIS-algoritmi. Kun uudelleenotanta tehdään esimerkiksi efektiivisen otoskoon perusteella alla kuvatus kynnyksarvoehdon  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  täyttyessä, on kyseessä SIR-algoritmi. Tämä algoritmi on esitetty algoritmissa (1). Uudelleenotantaa tarkastellaan lähemmin alaluvussa 3.1.2. Lopuksi päivitetään aika (jos  $k < t$ ) ja luodaan uudet ennusteet partikkeleille ehdotusjakaumasta (12)

$$x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1}) \quad (12)$$

ja päivitetään partikkelien painot tärkeytysotannalla (13), sen mukaan kuinka todennäköisiä partikkelien ennusteet ovat

$$w_{k+1|k}^i = w_{k|k}^i \frac{p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})}. \quad (13)$$

Alla käsitellään algoritmiin liittyvän uudelleenotantamenetelmän, partikkelien määrän / otoskoon ja ehdotusjakauman valinta. Lopuksi esiteetään algoritmin konvergenssia, marginaalijakaumaa sekä aikakompleksisuutta koskevia tuloksia.

### 3.1 Parametrien valinta

Ennen algoritmin suorittamista valitaan ehdotusjakauma  $q(x_{k+1}|x_{1:k}, y_{k+1})$ , uudelleenotantamenetelmä sekä partikkelien määrä  $N$ . Ehdotusjakauman ja uudelleenotantamenetelmän valinnassa tärkeimpänä päämääränä on välttää otosten ehtymistä, kun taas partikkelien määrä säätelee kompromissia algoritmin suorituskvyn ja tarkkuuden välillä.

---

**Algorithm 1:** Hiukassuodin

---

**Data:** Generoidaan  $x_1^i \sim p_{x_0}$  missä  $i = 1, \dots, N$  ja jokainen partikkeli saa saman painon  $w_{1|0}^i = 1/N$ .

**Result:** Posteriorijakauma  $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ .

**begin**

**for**  $k = 1, 2, \dots, t$  **do**

**for**  $i = 1, 2, \dots, N$  **do**

**begin**

                Päivitetään painot  $w_{k|k}$ .

**begin**

                Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio.

**begin**

                Lasketaan efektiivinen otoskoko  $\hat{N}_{eff}$ .

**if**  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  **then**

**begin**

                    Otetaan uudet  $N$  otosta palauttaen joukosta  $\{x_{1:k}^i\}_{i=1}^N$ , missä otoksen  $i$  todennäköisyys on  $w_{k|k}^i$ .

**if**  $k < t$  **then**

**begin**

                    Aikapäivitys.

                    Luodaan ennusteet partikkeleille ehdotusjakaumasta  $x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1})$ , päivitetään partikkelien painot tärkeytysotannalla.

---

### 3.1.1 Otoksoon $N$ valinta

Yleispätevää sääntöä otoksoon/partikkelien lukumäärän  $N$  valinnalle on vaikeaa antaa, sillä vaadittava estimointitarkkuus riippuu usein käsillä olevasta ongelmasta. Gordon & al. (1993) esittävät kuitenkin kolme tekijää, jotka vaikuttavat partikkelien lukumäärän valintaan

- tila-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä  $n_x$ ,
- tyypillinen päällekkäisyys priorin ja uskottavuuden välillä
- sekä tarvittava aika-askeleiden lukumäärä.

Ensimmäisen tekijän vaikutus on selvä. Mitä useammassa ulottuvuudessa otantaa tarvitsee tehdä, sen korkeammaksi on  $N$  asetettava, jotta jokainen ulottuvuus pystytään kattamaan. Tekijät (b) ja (c) puolestaan seuraavat uudelleenotannasta. Jos se osa tila-avaruutta, jossa uskottavuus  $p(y_k|x_k)$  saa merkittäviä arvoja on pieni verrattuna siihen osaan, jossa priorijakauma  $p(x_k|y_{1:k-1})$  saa merkittäviä arvoja, suuri osa partikkeleista saa pieniä painoja eivätkä näin valikoidu uudelleenotantaan.

Yleisesti ottaen  $N$  kannattaa asettaa sellaiseksi, että se paitsi tuottaa riittävän tarkan estimaatin, on se käytettävissä olevan laskentatehon sekä vaadittavan laskentanopeuden kannalta järkevää. Tähän palataan tutkielman lopuksi empiirisessä paikannusesimerkissä.

### 3.1.2 Uudelleenotantamenetelmän valinta

Ilman uudelleenotantaa on todennäköistä, että algoritmi alkaa kärsiä otosten ehtymisestä. Toisin sanoen kaikki painot alkavat keskittyä vain muutamalle partikkelille. Uudelleenotanta tarjoaa osittaisen ratkaisun tähän ongelmaan, mutta hävittää samalla informaatiota ja siten lisää satunnaisotantaan liittyvää epävarmuutta. Yleisesti ottaen kannattaa uudelleenotanta aloittaa vasta siinä vaiheessa algoritmin suorittamista, kun siitä on otosten ehtymisen kannalta hyötyä.

Jos alla esitetyssä algoritmissa uudelleenotanta suoritetaan jokaisella algoritmin läpikäynnillä on kyseessä ns. SIR-algoritmi (sequential importance resampling). Vaihtoehtona on hyödyntää tärkeytysotantaa ja suorittaa uudelleenotanta ainoastaan, kun otoksoon ehtymisen mittarina käytettävä efektiivinen otoskoko

painuu jonkin kynnysarvon alapuolelle. Tätä kutsutaan SIS-algoritmiksi (sequential importance sampling).

Efektiivinen otoskoko saadaan laskettua variaatiokertoimesta  $c_\nu$  kaavalla

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + c_\nu^2(w_{k|k}^i)} = \frac{N}{1 + \frac{\text{Var}(w_{k|k}^i)}{(\mathbb{E}[w_{k|k}^i])^2}} = \frac{N}{1 + N^2 \text{Var}(w_{k|k}^i)}. \quad (14)$$

Näin laskettu efektiivinen otoskoko maksimoituu ( $N_{eff} = N$ ), kun kaikille painoille pätee  $w_{k|k}^i = 1/N$  ja minimoituu ( $N_{eff} = 1$ ), kun  $w_{k|k}^i = 1$  todennäköisyydellä  $1/N$  ja  $w_{k|k}^i = 0$  todennäköisyydellä  $(N-1)/N$ . Tästä saadaan efektiiviselle otoskoolle laskennallinen approksimaatio

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_i (w_{k|k}^i)^2}. \quad (15)$$

Sekä määritelmälle (14) että (15) pätee  $1 \leq \hat{N}_{eff} \leq N$ . Yläraja saavutetaan, kun jokaisen partikkelin paino on sama. Alarajalle puolestaan päädytään, kun kaikki paino päättyy yksittäiselle partikkelille. Tästä saadaan määriteltyä algoritmille SIS-uudelleenotantaehto  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$ . Gustafsson (2010) esittää uudelleenotannan kynnysarvoksi esimerkiksi  $\hat{N}_{th} = 2N/3$ .

Uudelleenotanta ei muuta approksimoitavan jakauma  $p$  odotusarvoa, mutta se lisää jakauman Monte Carlo -varianssia. On kuitenkin olemassa uudelleenotantamenetelmiä, jotka pyrkivät minimoimaan tämän varianssin lisäyksen. Varianssitarkastelu jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle.

### 3.1.3 Ehdotusjakauman valinta

Yksinkertaisin valinta ehdotusjakaumalle on  $q(x_{1:k}|y_{1:k})$  eli toisin sanoen jokaisella algoritmin suorituskerralla käydään läpi koko polku  $1 : k$ . Tämä ei kuitenkaan ole tarkoituksenmukaista, erityisesti jos kyseessä on reaaliaikainen sovellutus. Kirjoitetaan tämä ehdotusjakauma nyt muodossa

$$q(x_{1:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})q(x_{1:k-1}|y_{1:k}). \quad (16)$$

Jos yhtälöstä (16) poimitaan ehdotusjakaumaksi ainoastaan termi  $q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})$  saadaan tämän avulla muodostettua hyvä approksimaatio arvoille  $x_k$ . Tämä on suodinongelman kannalta riittävää, koska olemme kiinnostuneita ainoastaan posteriorijakaumasta ajanhetkellä  $k$  (tasoituserongelmassa tarvitsisimme koko polun  $x_{1:k}$ ). Alla tarkastellaan edelleen Gustafssonin (2010) seuraten kahta ehdotusjakauman valintatapaa, prioriotantaa (prior sampling) sekä uskottavuusotantaa (likelihood sampling).

Ennen ehdotusjakauman tarkastelua määritellään mallille signaali-kohinasuhde uskottavuuden maksimin ja priorin maksimin välisenä suhteena

$$\text{SNR} \propto \frac{\max_{x_k} p(y_k|x_k)}{\max_{x_k} p(x_k|x_{k-1})}. \quad (17)$$

Yhdistetään lisäksi ehdotusjakaumia varten yhtälöt (9) ja (10), jolloin saadaan painojen päivitys muotoon (18).

$$w_{k|k}^i \propto w_{k-1|k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k|x_{k-1}^{k-1})}{q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)} \quad (18)$$

Kun suhde (17) on matala, on prioriotanta luonnollinen valinta. Tässä käytetään ehdotusjakauman tilavektorin ehdollista prioria eli

$$q(x_k|x_{1:k-1}, y_k) = p(x_k|x_{k-1}^i). \quad (19)$$

Yhtälön (19) perusteella saadaan edelleen prioriotannan painoiksi (20)

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_k^i) = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (20)$$

Kun taas signaali-kohinasuhde on kohtalainen tai korkea, on parempi käyttää ehdotusjakaumana skaalattua uskottavuusfunktioita (22). Tarkastellaan ensin tekijöihin jakoa ( $\{\text{uskottavuusotanta-factorization}\}$ ).

$$p(x_k|x_{k-1}^i, y_k) = p(y_k|x_k) \frac{p(x_k|x_{k-1}^i)}{p(y_k|x_{k-1}^i)} \quad (21)$$

Kun SNR on korkea ja uskottavuusfunktio on integroitava pätee  $p(x_k|x_{1:k-1}, y_k) \propto p(y_k|x_k)$ , jolloin voidaan asettaa (22)

$$q(x_k|x_{1:k-1}, y_k) \propto p(y_k|x_k). \quad (22)$$

Yhtälön (22) perusteella saadaan edelleen uskottavuusotannan painoiksi (23).

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(x_k^i|x_{k-1}^i). \quad (23)$$

### 3.2 Konvergenssituloksia

Alla esitetään kaksi algoritmiin liittyvää konvergenssitulosta, se kuinka hyvin esitetyllä SMC-algoritmeilla arvioitu posterioritiheys  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$  approksimoi todellista tiheysfunktioita  $p(x_{1:k}|y_{1:k})$  sekä mikä on approksimaation keskineliövirhe. Tulokset noudattavat Crisanin ja Doucet'n artikkelia "Convergence of Sequential Monte Carlo Methods" (2000).

*Konvergenssitulos 1:* Kun  $N \rightarrow \infty$  algoritmille pätee  $\forall k$  tulos  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) \xrightarrow{a.s.} p(x_{1:k}|y_{1:k})$ .

*Konvergenssitulos 2:* MSE-konvergenssi.

Konvergenssituloksia ei tämän tutkielman puitteissa todisteta.

### 3.3 Marginaalijakauma

Edellä kuvattu algoritmi 1 tuottaa approksimaation koko prosessin posteriorijakaumalle  $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ . Jos halutaan tietää ainoastaan posteriorijakauman  $p(x_k|y_{1:k})$  estimaatti, voidaan käyttää ainoastaan viimeisestä tilasta  $x_k^i$  laskettua estimaattia

$$\hat{p}(x_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_k - x_k^i). \quad (24)$$

Toinen vaihtoehto on käyttää laskennassa tärkeytspainoa

$$w_{k+1|k}^i = \frac{\sum_{j=1}^N w_{k|k}^j p(x_{k+1}^i|x_k^j)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})} \quad (25)$$

yllä esitetyn sijaan. Tällöin jokaisessa aikapäivitysaskeleessa lasketaan painot kaikkien mahdollisten tila-aika-avaruuspolkujen yli. Samoin kuin uudelleenotanta tämä pienentää painojen varianssia.

### 3.4 Aikakompleksisuus

T. SUORITUSKYKY. Algoritmin perusmuodon aikakompleksisuus on  $\mathcal{O}(N)$ . Uudelleenotantamenetelmän tai ehdotusjakauman valinta ei suoraan vaikuta aikakompleksisuuteen. Sen sijaan marginalisointi edellä esitetyllä tärkeytyspainolla lisää algoritmin aikakompleksisuutta  $\mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N^2)$ , koska jokaisen partikkelin kohdalla painot lasketaan jokaisen tila-aika-avaruuspolun yli. On selvää, että erityisesti isoilla otoskoon  $N$  arvoilla ei yllä esitetty marginalisointi enää ole mielekäästä. Tällaisia tilanteita varten esitetään alla vielä  $\mathcal{O}(N \log(N))$  versio marginaalihiukkassuotimesta. Esitys noudattaa Klaas & al. artikkelia “Toward Practical  $N^2$  Monte Carlo: the Marginal Particle Filter” (2012). Algoritmin tehokkaaseen toteutukseen R-kielellä palataan luvussa [Paikannusesimerkki](#).

BATCH VS ONLINE.

## 4 Paikannusesimerkki

Esimerkissä käytetään SMC-algoritmia Bluetooth-paikannussovelluksessa paikannustarkkuuden parantamiseen. Paikannukseen käytettävä data kerätään toimistoympäristössä liikkuvien BLE-lähettimien sekä kattoon sijoitettujen vastaanottimien avulla. Havainnot koostuvat vastaanottimien lähettimien signaalien perusteella laskemista, BLE5.1-standardin mukaisista signaalien tulokulmista eli AoA-havainnoista (angle of arrival). Paikannukseen käytetään triangulaatio-algoritmia. Lopuksi esimerkissä analysoidaan ja vertaillaan algoritmin eri versioiden suorituskykyä sekä suorituskyvyn että paikannustarkkuuden näkökulmasta.

### 4.1 Koeasetelma

Lähettimenä toimii Lähettimenä toimi 25 Bluetooth-paikannustagista koostuva Walkbase Foculator -testilaitte (kuvat 1 ja 2).

KARTTA, jossa sensorit.

TRAJECTORY. jotka MITÄ. The sensor is being built around the BLE5.1 angle of arrival (AoA) specifications, enabling it to produce sub meter positioning results.

Esimerkkidatana käytetään AoA-havaintoja seitsemän vastaanottimen sekä XXX lähettimen välillä. Dataa kerättiin. Data kerättiin yöaikaan, jolloin toimiston käyttöaste oli minimissä. Tällä minimoitiin radiosignaalin tielle osuvien ihmisten vaikutus tuloksiin.

### 4.2 Datan kuvaus

Riippuen päällä olevien paikannustagien lukumäärästä, tuottaa  $n$  havainto sekunnissa. Havaintoja on  $N_{obs} =$  kappaletta. Jokainen havainto koostuu taulukossa [1](#) kuvatuista muuttujista.



Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
ts	havainnon aikaleima	21:38:20.998+00
asset_tag_mac	lähettimen MAC-osoite	5c:02:72:67:f7:4c
locator_mac	vastaanottimen MAC-osoite	b8:27:eb:66:0d:2a
bearing	suuntimakulma $\eta$ (astetta)	34
rss	signaalin vahvuus (dBm)	-81
azimuth_angle	atsimuuttikulma $\phi$ (astetta)	102.7
converted_angle	napapohjoisesta laskettu kulma $\Phi$ (astetta)	34
elevation_angle	korkeuskulma (astetta)	11.9
quality_ant_phase_jitter	antennikohtainen jitter	(0.15,0.15,0.15,0.15, 0.14,0.16,0.29,0.34)
ss_jitter	jitter-arvojen neliösumma	0.3349
quality_ant_snr	antennikohtainen signaali-kohinasuhde	(24.76,37.48,40.75,36.37 28.5,28.2,16.15,11.27)
snr_jitter	signaali-kohinasuhteiden neliösumma	6996.473

Taulukko 1: Havaintomuuttujat

Atsimuuttikulma  $\phi$  lasketaan aina vastaanottimen tietyltä sivulta, joten se vastaa napapohjoista ainoastaan siinä tapauksessa, että vastaanottimen kyseinen sivu on asetettu kohtisuoraan napapohjoiseen nähden. Käytännön syistä tämä ei ole aina mahdollista eikä edes haluttavaa. Sen vuoksi jokaiselle vastaanottimelle on tietokantaan tallennettu oma suuntimakulma  $\eta$ . Triangulaatiossa alla käytetään napapohjoisesta laskettuja kulmia  $\Phi$ , jotka lasketaan jokaiselle havainnolle havainnon vastaanottimen suuntimakulman avulla

$$\Phi = (\phi + \eta + 360) \% 360. \quad (26)$$

### 4.3 Malli

### 4.4 Algoritmi

### 4.5 Tulokset

## 5 Lopuksi

Tässä tutkielmassa on esitetty pääpiirteittäin . . . ja lisäksi tarkasteltu miten eri valinnat vaikuttavat algoritmin suoritussykyyn yksinkertaisen mutta XXX esimerkin avulla. Ei oteta kantaa esimerkiksi JATKOKYSYMYKSIÄ mahdollisuus laajentaa.

## 6 Lähteet

- Chen & Liu (1998): **Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems**. [http://stat.rutgers.edu/home/rongchen/publications/98JASA\\_SMC.pdf](http://stat.rutgers.edu/home/rongchen/publications/98JASA_SMC.pdf)
- Dahlin & Schön (2019): **Getting Started with Particle Metropolis-Hastings for Inference in Nonlinear Dynamical Models**. <https://arxiv.org/pdf/1511.01707.pdf>.
- Del Moral (1996): **Nonlinear Filtering: Interacting Particle Resolution**. <https://people.bordeaux.inria.fr/pierre.delmoral/delmoral96nonlinear.pdf>.
- Gordon, Salmond & Smith (1993): **Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation**. <http://www.irisa.fr/aspi/legland/ref/gordon93a.pdf>.
- Gustafsson (2010): **Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications**. <https://ieeexplore.ieee.org/document/5546308>.
- Klaas, De Freitas, Doucet (2012): **Toward Practical N2 Monte Carlo: the Marginal Particle Filter**. <https://arxiv.org/abs/1207.1396>
- Petris, Petrone & Campagnoli (2009): **Dynamic Linear Models with R**. Springer.

- Särkkä (2013): **Bayesian Filtering and Smoothing**. Cambridge University Press. [https://users.aalto.fi/~ssarkka/pub/cup\\_book\\_online\\_20131111.pdf](https://users.aalto.fi/~ssarkka/pub/cup_book_online_20131111.pdf).