

# SMC-menetelmät

Laskennallinen tilastotiede - Harjoitustyö

Lasse Rintakumpu

02 May, 2021

## Sisällys

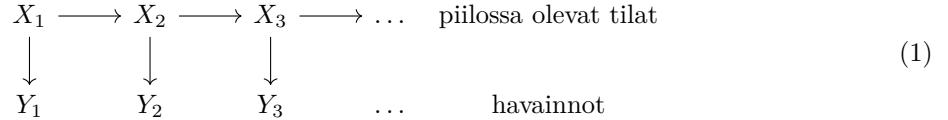
<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
1.1 Suodinongelma . . . . .	2
1.2 Historiaa . . . . .	2
<b>2 Bayesilainen suodin</b>	<b>3</b>
<b>3 Hiukassuodin-algoritmi</b>	<b>3</b>
3.1 Parametrien valinta . . . . .	4
3.1.1 Otoskoon $N$ valinta . . . . .	5
3.1.2 Uudelleenottamisen menetelmän valinta . . . . .	5
3.1.3 Ehdotusjakauman valinta . . . . .	6
3.2 Konvergenssituloksia . . . . .	7
3.3 Marginaalijakauma . . . . .	7
3.4 Aikakompleksisuus . . . . .	8
<b>4 Paikannusesimerkki</b>	<b>8</b>
4.1 Koeasetelma . . . . .	8
4.2 Datan kuvaus . . . . .	11
4.3 Malli . . . . .	12
4.4 Algoritmi . . . . .	12
4.5 Tulokset . . . . .	12
<b>5 Lopuksi</b>	<b>12</b>
<b>6 Lähteet</b>	<b>12</b>

## 1 Johdanto

SMC-menetelmät (Sequential Monte Carlo -menetelmät, tunnetaan myös nimellä hiukassuotimet) ovat joukko 90-luvulta eteenpäin kehitettyjä Monte Carlo -algoritmeja, joiden avulla voidaan ratkaista ns. suodinongelma, kun ongelma on epälineaarinen ja/tai ongelmaan liittyvä kohina ei noudata normaalijakaumaa. Tämän tutkielman tavoitteena on esittää pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria sekä joitakin menetelmäperheeseen kuuluvia algoritmeja. Tutkielman esitykset seuraavat erityisesti Simo Särkän kirjaa *Bayesian Filtering and Smoothing* (2013) sekä Fredrik Gustafssonin artikkelia “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010). SMC-menetelmille on lukuisia sovellutuksia esimerkiksi Bayesilaisessa tilastotieteessä, fysiikassa ja robotiikassa. Tämän tutkielman lopussa tarkastellaan hiukassuotimen käyttöä paikannusovelluksessa.

## 1.1 Suodinongelma

Stokastisten prosessien teoriassa suodinongelmaksi kutsutaan tilannetta, jossa halutaan muodostaa paras mahdollinen estimaatti jonkin järjestelmän tilan arvoille, kun ainoastaan osa tiloista voidaan havaita ja/tai havaintoihin liittyy kohinaa. Tavoitteena on siis laskea jonkin Markov-prosessin posteriorijakauma kyseisten havaintojen perusteella. Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti epälineaarisen ns. Markovin piilomallin posteriorijakauman Bayesilaiseen ratkaisuun. Ongelmaa havainnollistaa kaavio (1).



Ongelmassa tiedämme, miten havaitut muuttujat kytkeytyvät "piilossa oleviin" muuttuijiin sekä osaamme sanoa jotain tilamuuttujien todennäköisyysistä. Oletamme lisäksi, että piilossa olevat tilat muodostavat Markovin ketjun. Kun aika-avaruus on diskreetti ja merkitsemme piilossa olevan prosessin tilaa ajanhetkellä  $k$   $x_k$  ja havaittua prosessia  $y_k$ , meillä on siis olemassa mallit

$$x_{k+1} = f(x_k, \nu_k) \quad (2)$$

$$y_k = h(x_k) + e_k. \quad (3)$$

Lisäksi tiedetään prosessin alkuperäisen jakauman  $x_1 \sim p_{x_1}$ , tähän liittyvä kohinprosessin jakauman  $\nu_k \sim p_{\nu_k}$  sekä malliin  $y_k$  liittyvä kohina  $e_k \sim p_{e_k}$ . Mallit voidaan yleisemmällä tasolla esittää myös muodossa

$$x_{k+1} \sim p(x_{k+1}|x_k) \quad (4)$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k). \quad (5)$$

Tutkielman teoriaosassa käytetään ensisijaisesti yhtälöiden (4) ja (5) muotoilua. Empiirisessä osassa palataan yhtälöiden (2) ja (3) muotoiluun.

Nämä määritetyjen mallien avulla SMC-menetelmät estimoivat sekventiaalisesti tilojen  $X_k$  arvot minä hyvänsä ajan hetkellä  $k$ , kun ainoastaan prosessi  $Y_1, \dots, Y_k$  tunnetaan. Estimaatit saadaan posteriorijakaumasta  $p(x_k|y_1, y_2, \dots, y_k)$ , jonka approksimaatio muodostetaan Bayesilaisittain havaintojen pohjalta. Kuten mainittua, ei SMC-perheen algoritmeja käytettäessä mallin  $y_k = h(x_k) + e_k$  tarvitse olla lineaarinen eikä kohinaprosessien noudataa normaalijakaumaa. SMC-menetelmissä stokastisen prosessin posteriorijakauman esittämiseen käytettyjä otoksia kutsutaan myös partikkeleiksi. Suodinongelmaa lähellä on myös ns. tasoitusongelma (smoothing problem), jossa ollaan kiinnostuneita prosessin  $x_k$  posteriorijakaumasta  $p(x_k|y_k)$  jokaisena ajanhetkenä  $1, \dots, k$  ei ainoastaan haluttuna ajanhetkenä  $k$ . Tämä tutkielma keskittyy yksin suodinongelman ratkaisemiseen, mutta SMC-algoritmin marginalisointia koskevassa luvussa viitataan myös tasoitusongelman ratkaisuun.

## 1.2 Historiaa

Lineaarisen suodinongelman ratkaisu on tunnettu ... Epälineaariselle ei-Gaussilaiselle mallille ... Muita vaihtoehtoja ovat EKF, UKF, QKF.

It should be stressed that both EKF and UKF approximate the model and propagate Gaussian distributions representative of the posterior while the PMF uses the original model and approximates the posterior over a grid. The particle filter (PF) also provides a numerical approximation to the nonlinear filtering problem similar to the PMF but uses an adaptive stochastic grid that automatically selects relevant grid points in the state space, and in contrast to the PMF, the standard PF has linear complexity in the number of grid points. The first traces of the PF date back to the 1950s [11, 12], and the control community made some attempts in the 1970s [13, 14]. However, the PF era started with the seminal paper [15], and the independent developments in [16, 17]. Here, an important step was introduced.

The timing for proposing a general solution to the nonlinear filtering problem was perfect in that the computer development enabled the use of computationally complex algorithms in quite realistic problems. Since the paper [ 15] the research has steadily intensified; see the article collection [ 18] , the surveys [ 19-22] , and the monograph [23]. Fig. I illustrates how the number of papers increases exponentially each year, and the same appears to be true for applied papers. The PFs may be a serious alternative for real-time applications classically approached by the (E)KF. The more nonlinear model, or the more non-Gaussian noise, the more potential PFs have, especially in applications where computational power is rather cheap, and the sampling rate is moderate

Monte Carlo -ratkaisuja (esim. Princeton)

Ensimmäisen epälineaarisen suodinongelman Bayesilaisen/MC-ratkaisun esittivät Gordon, Salmond ja Smith artikkelissaan “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation” (1993). Gordonin, Salmondin ja Smithin ratkaisu eroaa notaatioltaan hieman tässä tutkielmanmassa esitetystä, mutta on ollenaisesti sama. Suurin ero tämän tutkielman SMC-algoritmin sekä alkuperäisen SMC-algoritmin välillä on XXX MITEN XXX. Artikkelissa ratkaisu kului nimellä “bootstrap filter”, saapasremmisiin. MIKSI Termiä hiukkassuodin käytti ensimmäisen kerran Del Moral artikkelissa “Nonlinear Filtering: Interacting Particle Resolution” (1996), SMC-menetelmät termiä Liu ja Chen artikkelissa “Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems” (1998). Tässä tutkielmanmassa pyritään korostamaan suotimien yhteyttä Monte Carlo -algoritmeihin ja käytetään siksi termiä SMC-menetelmät. Poikkeuksen tähän tekee varsinainen esitetty algoritmi, jota kutsutaan tutkielmanmassa hiukkassuodin-algoritmiksi.

## 2 Bayesilainen suodin

Ennen SMC-algoritmia käydään läpi algoritmeissa käytetty yleinen Bayesilainen posteriorijakauman laskenta. Esitys noudattaa Fredrik Gustafssonin artikkelia “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010). Bayesilainen ratkaisu tilavektorin posteriorijakaumalle  $p(x_k|y_{1:k})$  saadaan seuraavalla rekursiolla (käydään läpi jokaiselle ajanjätkelle  $k = 1, \dots, t$ ). Lasketaan ensin

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \quad (6)$$

joka saadaan suoraan Bayesin kaavasta  $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$ . Normalisointivakio lasketaan integraalina

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k, \quad (7)$$

joka saadaan kokonaistodennäköisyyskaavasta  $P(A) = \mathbb{E}[P(A|X)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x)f_X(x) dx$ . Merkintä  $\mathbb{R}^{n_x}$  vastaa tässä piilossa olevien muuttujien dimensioita  $n$ .

Lopuksi lasketaan päivityssaskel ajalle, joka saadaan edelleen kokonaistodennäköisyydellä

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k}) dx_k. \quad (8)$$

Rekursion avulla voidaan laskea  $p(x_k|y_{1:k})$  käymällä rekursio läpi  $k$  kertaa.

## 3 Hiukkassuodin-algoritmi

Tässä luvussa esitetään hiukkassuodin-SMC-algoritmi Bayesilaisen, epälineaarisen suodinongelman ratkaisemiseksi. Algoritmi on numeerinen toteutus luvussa 2. kuvatusta Bayesilaisesta suotimesta. Esitetty algoritmi

perustuu Fredrik Gustafssonin artikkeliin “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010).

Algoritmi alustetaan jakaumasta  $x_1^i \sim p_{x_0}$  generoidulla  $N$ -kappaleella partikkeleita. Jokaiselle partikkeille annetaan alustuksessa sama paino  $w_{1|0}^i = 1/N$ . Algoritmi suoritetaan jokaiselle partikkelille  $i = 1, 2, \dots, N$  jokaisella ajanhetkellä  $k = 1, 2, \dots, t$ . Algoritmin kuvauksessa käytetään notaatiota  $x_k^i$ , joka tarkoittaa, että tila  $x_k$  käy ajanhetkellä  $k$  gridin pisteessä  $x^i$ . Notaatiota tarvitaan, koska SMC-algoritmin läpikäymä gridi muuttuu ajan funktiona. SYÖTE

Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa päivitetään painot yhtälön 9 mukaan.

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i) \quad (9)$$

Normalisointipaino  $c_k$  lasketaan puolestaan yhtälöstä (10). VASTAAVUUS BAYES-suotimeen.

$$c_k = \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (10)$$

Seuraavassa vaiheessa estimoidaan  $p$  laskemalla tiheyden  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$  MC-estimaatti yhtälön (11) perusteella

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i) \quad (11)$$

missä  $\delta(x)$  on Diracin deltafunktio.

Seuraavassa vaiheessa suoritetaan valinnainen uudelleenotanta. Kun uudelleenotanta tehdään jokaisella algoritmin iteraatiolla, on kyseessä SIS-algoritmi. Kun uudelleenotanta tehdään esimerkiksi efektiivisen otoskoon perusteella alla kuvatun kynnysarvoehdon  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  täyttessä, on kyseessä SIR-algoritmi. Tämä algoritmi on esitetty algoritmissa (1). Uudelleenotantaa tarkastellaan lähemmin alaluvussa 3.1.2. Lopuksi päivitetään aika (jos  $k < t$ ) ja luodaan uudet ennusteet partikkeille ehdotusjakaumasta (12)

$$x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1}) \quad (12)$$

ja päivitetään partikkelen painot tärkeytysotannalla (13), sen mukaan kuinka todennäköisiä partikkelen ennusteet ovat

$$w_{k+1|k}^i = w_{k|k}^i \frac{p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})}. \quad (13)$$

Alla käsitellään algoritmiin liittyvän uudelleenontamamenetelmän, partikkelen määrä / otoskoon ja ehdotusjakauman valinta. Lopuksi esitetään algoritmin konvergenssia, marginaalijakaumaa sekä aikakompleksisuutta koskevia tuloksia.

### 3.1 Parametrien valinta

Ennen algoritmin suorittamista valitaan ehdotusjakauma  $q(x_{k+1}|x_{1:k}, y_{k+1})$ , uudelleenontamamenetelmä sekä partikkelen määrä  $N$ . Ehdotusjakauman ja uudelleenontamamenetelmän valinnassa tärkeimpänä päämääräänä on välttää otosten ehtymistä, kun taas partikkelen määrä säätelee kompromissia algoritmin suorituskyvyn ja tarkkuuden välillä.

---

**Algorithm 1:** Hiukassuodin

---

**Result:** Posteriorijakauman  $p(x_{1:k}|y_{1:k})$  estimaatti.  
**Data:** Havainnot  $y_k$ . Generoitut  $x_1^i \sim p_{x_0}$  missä  $i = 1, \dots, N$  ja jokainen partikkeli saa saman painon  $w_{1|0}^i = 1/N$ .

**begin**

```
for k = 1, 2, ..., t do
    for i = 1, 2, ..., N do
        begin
            | Päivitetään painot  $w_{k|k}$ .
        begin
            | Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio.
        begin
            | Lasketaan efektiivinen otoskoko  $\hat{N}_{eff}$ .
        if  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  then
            begin
                | Otetaan uudet  $N$  otosta palauttaen joukosta  $\{x_{1:k}^i\}_{i=1}^N$ , missä otoksen  $i$  todennäköisyys
                | on  $w_{k|k}^i$ .
        if  $k < t$  then
            begin
                | Aikapäivitys.
                | Luodaan ennusteet partikkeillel ehdotusjakaumasta  $x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1})$ ,
                | päivitetään partikkelienv painot tärkeytysotannalla.
```

---

### 3.1.1 Otoskoon $N$ valinta

Yleispätevää säätöä otoskoon/partikkelienv lukumäärään  $N$  valinnalle on vaikeaa antaa, sillä vaadittava estimointitarkkuus riippuu usein kässillä olevasta ongelmasta. Gordon &al. (1993) esittävät kuitenkin kolme tekijää, jotka vaikuttavat partikkelienv lukumäärään valintaan

- tila-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä  $n_x$ ,
- tyypillinen päälekäisyys priorin ja uskottavuuden välillä
- sekä tarvittava aika-askeleiden lukumäärä.

Ensimmäisen tekijän vaikutus on selvä. Mitä useammassa ulottuvuudessa otantaa tarvitsee tehdä, sen korkeammaksi on  $N$  asettettava, jotta jokainen ulottuvuus pystytään kattamaan. Tekijät (b) ja (c) puolestaan seuraavat uudelleenotannasta. Jos se osa tila-avaruutta, jossa uskottavuus  $p(y_k|x_k)$  saa merkittäviä arvoja on pieni verrattuna siihen osaan, jossa priorijakauma  $p(x_k|y_{1:k-1})$  saa merkittäviä arvoja, suuri osa partikkeista saa pieniä painoja eivätkä näin valikoidu uudelleenotantaan.

Yleisesti ottaen  $N$  kannattaa asettaa sellaiseksi, että se paitsi tuottaa riittävän tarkan estimaatin, on se käytettävissä olevan laskentatehon sekä vaadittavan laskentanopeuden kannalta järkevä. Tähän palataan tutkielman lopuksi empiirisessä paikannusesimerkissä.

### 3.1.2 Uudelleenotantamenetelmän valinta

Ilman uudelleenotantaa on todennäköistä, että algoritmi alkaa kärsiä otosten ehtymisestä. Toisin sanoen kaikki painot alkavat keskityä vain muutamalle partikkeliille. Uudelleenotanta tarjoaa osittaisen ratkaisun tähän ongelmaan, mutta hävittää samalla informaatiota ja siten lisää satunnaisotantaan liittyvää epävarmuutta. Yleisesti ottaen kannattaa uudelleenotanta aloittaa vasta siinä vaiheessa algoritmin suorittamista, kun siitä on otosten ehtymisen kannalta hyötyä.

Jos alla esitetyssä algoritmissa uudelleenotanta suoritetaan jokaisella algoritmin läpikäynnillä on kyseessä ns. SIR-algoritmi (sequential importance sampling). Vaihtoehtona on hyödyntää tärkeytysotantaa ja

suorittaa uudelleenotanta ainoastaan, kun otoskoon ehtymisen mittarina käytettävä efektiivinen otoskoko painuu jonkin kynnysarvon alapuolelle. Tätä kutsutaan SIS-algoritmiksi (sequential importance sampling).

Efektiivinen otoskoko saadaan laskettua variaatiokertoimesta  $c_\nu$  kaavalla

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + c_\nu^2(w_{k|k}^i)} = \frac{N}{1 + \frac{\text{Var}(w_{k|k}^i)}{(\mathbb{E}[w_{k|k}^i])^2}} = \frac{N}{1 + N^2\text{Var}(w_{k|k}^i)}. \quad (14)$$

Nämä laskettu efektiivinen otoskoko maksimoituu ( $N_{eff} = N$ ), kun kaikille painoille pätee  $w_{k|k}^i = 1/N$  ja minimoituu ( $N_{eff} = 1$ ), kun  $w_{k|k}^i = 1$  todennäköisyydellä  $1/N$  ja  $w_{k|k}^i = 0$  todennäköisyydellä  $(N-1)/N$ . Tästä saadaan effektiiviselle otoskolle laskennallinen approksimaatio

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_i (w_{k|k}^i)^2}. \quad (15)$$

Sekä määritelmälle (14) että (15) pätee  $1 \leq \hat{N}_{eff} \leq N$ . Yläraja saavutetaan, kun jokaisen partikkelin paino on sama. Alarajalle puolestaan päädytään, kun kaikki paino päätyy yksittäiselle partikkellelle. Tästä saadaan määriteltyä algoritmile SIS-uudelleenotantaehto  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$ . Gustafsson (2010) esittää uudelleenotannan kynnysarvoksi esimerkiksi  $\hat{N}_{th} = 2N/3$ .

Uudelleenotanta ei muuta approksimoitavan jakauma  $p$  odotusarvoa, mutta se lisää jakauman Monte Carlo -varianssia. On kuitenkin olemassa uudelleenotantamenetelmiä, jotka pyrkivät minimoimaan tämän varianssin lisäyksen. Varianssitarkastelu jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle.

### 3.1.3 Ehdotusjakauman valinta

Yksinkertaisin valinta ehdotusjakaumalle on  $q(x_{1:k}|y_{1:k})$  eli toisin sanoen jokaisella algoritmin suorituskerralla käydään läpi koko polku  $1 : k$ . Tämä ei kuitenkaan ole tarkoituksemukaista, erityisesti jos kyseessä on reaalialkainen sovellus. Kirjoitetaan tämä ehdotusjakauma nyt muodossa

$$q(x_{1:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})q(x_{1:k-1}|y_{1:k}). \quad (16)$$

Jos yhtälöstä (16) poimitaan ehdotusjakaumaksi ainoastaan termi  $q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})$  saadaan tämän avulla muodostettua hyvä approksimaatio arvoille  $x_k$ . Tämä on suodinongelman kannalta riittävä, koska olemme kiinnostuneita ainoastaan posteriorijakaumasta ajanhettellä  $k$  (tasoitusongelmassa tarvitsisimme koko polun  $x_{1:k}$ ). Alla tarkastellaan edelleen Gustafsonia (2010) seuraten kahta ehdotusjakauman valintatapaa, prioritantaa (prior sampling) sekä uskottavuusotantaa (likelihood sampling).

Ennen ehdotusjakauman tarkastelua määritellään mallille signaali-kohinasuhde uskottavuuden maksimin ja priorin maksimin välisenä suhteena

$$\text{SNR} \propto \frac{\max_{x_k} p(y_k|x_k)}{\max_{x_k} p(x_k|x_{k-1})}. \quad (17)$$

Yhdistetään lisäksi ehdotusjakaumia varten yhtälöt (9) ja (10), jolloin saadaan painojen päivitys muotoon (18).

$$w_{k|k}^i \propto w_{k-1|k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k|x^{k-1})}{q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)} \quad (18)$$

Kun suhde (17) on matala, on prioritanta luonnollinen valinta. Tässä käytetään ehdotusjakauman tilavektorin ehdollista prioria eli

$$q(x_k|x_{1:k-1}, y_k) = p(x_k|x_{k-1}^i). \quad (19)$$

Yhtälön (19) perusteella saadaan edelleen prioriotannan painoiksi (20)

$$w_{k|k}^i = w_{k|k-1}^i p(y_k|x_k^i) = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (20)$$

Kun taas signaali-kohinasuhde on kohtalainen tai korkea, on parempi käyttää ehdotusjakaumana skaalattua uskottavuusfunktiota (22). Tarkastellaan ensin tekijöihin jakoa (ref{uskottavuusotanta-factorization}).

$$p(x_k|x_{k-1}^i, y_k) = p(y_k|x_k) \frac{p(x_k|x_{k-1}^i)}{p(y_k|x_{k-1}^i)} \quad (21)$$

Kun SNR on korkea ja uskottavuusfunktio on integroituva pätee  $p(x_k|x_{1:k-1}, y_k) \propto p(y_k|x_k)$ , jolloin voidaan asettaa (22)

$$q(x_k|x_{1:k-1}, y_k) \propto p(y_k|x_k). \quad (22)$$

Yhtälön (22) perusteella saadaan edelleen uskottavuusotannan painoiksi (23).

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(x_k^i|x_{k-1}^i). \quad (23)$$

### 3.2 Konvergenssituloksia

Alla esitetään kaksi algoritmiin liittyvä konvergenssitulosta, se kuinka hyvin esitetyllä SMC-algoritilla arvioitu posterioriiteheys  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$  approksimoi todellista tiheysfunktiota  $p(x_{1:k}|y_{1:k})$  sekä mikä on approksimaation keskineliövirhe. Tulokset noudattavat Crisanin ja Doucet'n artikkeleita "Convergence of Sequential Monte Carlo Methods" (2000) ja "A Survey of Convergence Results on Particle Filtering Methods for Practitioners" (2002).

*Konvergenssitulos 1:* Kun  $N \rightarrow \infty$  algoritmile pätee  $\forall k$  tulos  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) \xrightarrow{a.s.} p(x_{1:k}|y_{1:k})$ .

*Konvergenssitulos 2:* Keskineliövirheelle pätee asymptoottinen konvergenssi (24).

$$\mathbb{E}(\hat{g}(x_k) - \mathbb{E}(g(x_k)))^2 \leq \frac{p_k \|g(x_k)\|}{N}. \quad (24)$$

Missä  $g$  on mikä hyvänsä piilossa olevan tila-avaruuden rajoitettu Borel-mitallinen funktio ( $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$ ),  $\|g(\cdot)\|$  kyseisen funktion supremum-normi ja  $p_k$  jokin äärellinen vakio, jolle pätee ajanhetkestä  $k$  riippumatta  $p_k = p < \infty$ . Konvergenssituloksia ei tämän tutkielman puitteissa todisteta.

### 3.3 Marginaalijakauma

Edellä kuvattu algoritmi 1 tuottaa approksimaation koko prosessin posteriorijakaumalle  $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ . Jos halutaan tietää ainoastaan posteriorijakauman  $p(x_k|y_{1:k})$  estimaatti, voidaan käyttää ainoastaan viimeisestä tilasta  $x_k^i$  laskettua estimaattia

$$\hat{p}(x_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_k - x_k^i). \quad (25)$$

Toinen vaihtoehto on käyttää laskennassa tärkeytyspainoa

$$w_{k+1|k}^i = \frac{\sum_{j=1}^N w_{k|k}^j p(x_{k+1}^i | x_k^j)}{q(x_{k+1}^i | x_k^i, y_{k+1})} \quad (26)$$

yllä esitetyn sijaan. Tällöin jokaisessa aikapäivitysaskeleessa lasketaan painot kaikkien mahdollisten tila-aika-avaruuuspolkujen yli. Samoin kuin uudelleenotanta tämä pienentää painojen varianssia.

### 3.4 Aikakompleksisuus

Algoritmin perusmuodon aikakompleksisuus on  $\mathcal{O}(N)$ . Uudelleenotantamenetelmän tai ehdotusjakauman valinta ei suoraan vaikuta aikakompleksisuuteen. Sen sijaan marginalisointi edellä esitettyllä tärkeytyspainolla lisää algoritmin aikakompleksisuutta  $\mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N^2)$ , koska jokaisen partikkelin kohdalla painot lasketaan jokaisen tila-aika-avaruuuspolun yli. On selvää, että erityisesti isoilla otoskoon  $N$  arvoilla ei yllä esitetty marginalisointi enää ole mielekästä.

Tällaisia tilanteita varten SMC-algoritmita on olemassa  $\mathcal{O}(N \log(N))$ -versioita, jotka perustuvat N:n kappaleen oppimiseen (N-body learning). Näiden algoritmien käsittely jää tämän tutkielman ulkopuolelle, mutta katsaus algoritmeista on esitettävä esimerkiksi Klaas & al. artikkelissa “Toward Practical  $N^2$  Monte Carlo: the Marginal Particle Filter” (2012).

Lisäksi algoritmin aikakompleksisuuteen vaikuttavat seuraavat seikat. T. SUORITUSKYKY. BATCH VS ONLINE. Kun halutaan on-line-estimointia, siinä missä off-line-estimointiin.

## 4 Paikannusesimerkki

Sisätilapaikannus \*\*\* on BLAHBLAHBLAH. Koska GPS ei toimi sisätiloissa, tarvitaan muita paikannusratkaisuja. Radiosignaaleihin perustuvat paikannusratkaisut ovat BLAHBLAH. Eräs mahdollinen XXX, jossa käytetään tulokulmaa paikantamaan. Walkbase käyttää sisätilapaikannusta erityisesti ruokakaupoissa sekä tavarataloissa asiakkaiden käyttäytymistä koskevan keräämiseen. Tyypillinen .. XXX ostoskärryihin ja -koreihin XXX keräämään tärkeää paikannusdataa asiakkaiden XXX. Markkinoilla on XXX on Walkbase kehittänyt oman laitteistoratkaisunsa. SKENAARIOISSA TARVITAAN Tavoitteena on alle metrin paikannusvirhe.

Esimerkissä käytetään SMC-algoritmia Bluetooth-paikannussovelluksessa paikannustarkkuuden parantamiseen. Paikannukseen käytettävä data kerätään toimistoympäristössä liikkuvien BLE-lähettimien sekä kattoon sijoitettujen vastaanottimien avulla. Havainnot koostuvat vastaanottimien lähettimien signaalien perusteella laskemista, BLE5.1-standardin mukaisista signaalilin tulokulmista eli AoA-havainnoista (angle of arrival). Paikannukseen käytetään triangulaatio-algoritmia. Lopuksi esimerkissä analysoidaan ja vertaillaan algoritmin eri versioiden suorituskykyä sekä suorituskyvyn että paikannustarkkuuden näkökulmasta.

### 4.1 Koeasetelma

Paikannusesimerkissä lähettimenä toimi 25 Bluetooth-paikannustagista koostuva Walkbase Foculator -testilaite (kuva 1), vastaanottimena toimistoympäristöön asennettut seitsemän Walkbase XR-2 -vastaanotinta (kuva 2). Jokainen vastaanotin sisältää kahdeksan antennia, joiden vastaanottamien lähetinsignaalien perusteella vastaanottimet laskevat signaalilin tulokulman suhteessa vastaanottimeen. Tarkka tulokulmien laskemiseen käytetty algoritmi on paikantimen antennit toimittaneen Silicon Laboratories, Inc. -yrityksen liikesalaisuus, mutta \*\*\*perusperiaate on. AoA relies on a single-antenna transmit beacon with continuous tone extension appended to a Bluetooth packet transmission and a locator receiver device to measure the arrival angle of the signal using an array of antennas. Each antenna in the array sees phase differences due to different line of sight distances to the beacon device. The antennas in the array are switched during continuous tone extension, resulting in IQ samples with phase information for each antenna. This IQ-data is fed to an angle estimator algorithm. In this AoA use case, the receiving device tracks arrival angles for individual transmit beacon objects.

Esteettömässä ympäristössä XXX kulman virhe on hyvin pieni ja paikannusongelma voidaan ratkaista suoraan jollakin triangulaatio-algoritilla. Eräänä XXX ToTal-algoritmia. Tässäkin tilanteessa voi paikannusta parantaa suodattimen käytöllä, mutta jo triangulaatioä-algoritmin perusversio tuottaa halutun tarkkuuden. Toimistoympäristö on kuitenkin haastava, sillä erityisesti näyttöruudut sekä heijastavat että estäävät radiosignaaleja. Silicon Labs lupaa omalle AoA-järjestelmälle vastaavassa toimisympäristössä (seitsemällä paikantimella) kulmavirheen välillä  $\pm 3.7 - 5.7$ . Tämä ei kuitenkaan riitä johdonmukaisesti haluttuun alle metrin paikannustarkkuuteen, joten AoA-paikannus toimistoympäristössä tarjoaa hyvän motivaation SMC-menetelmien käyttämiseen.

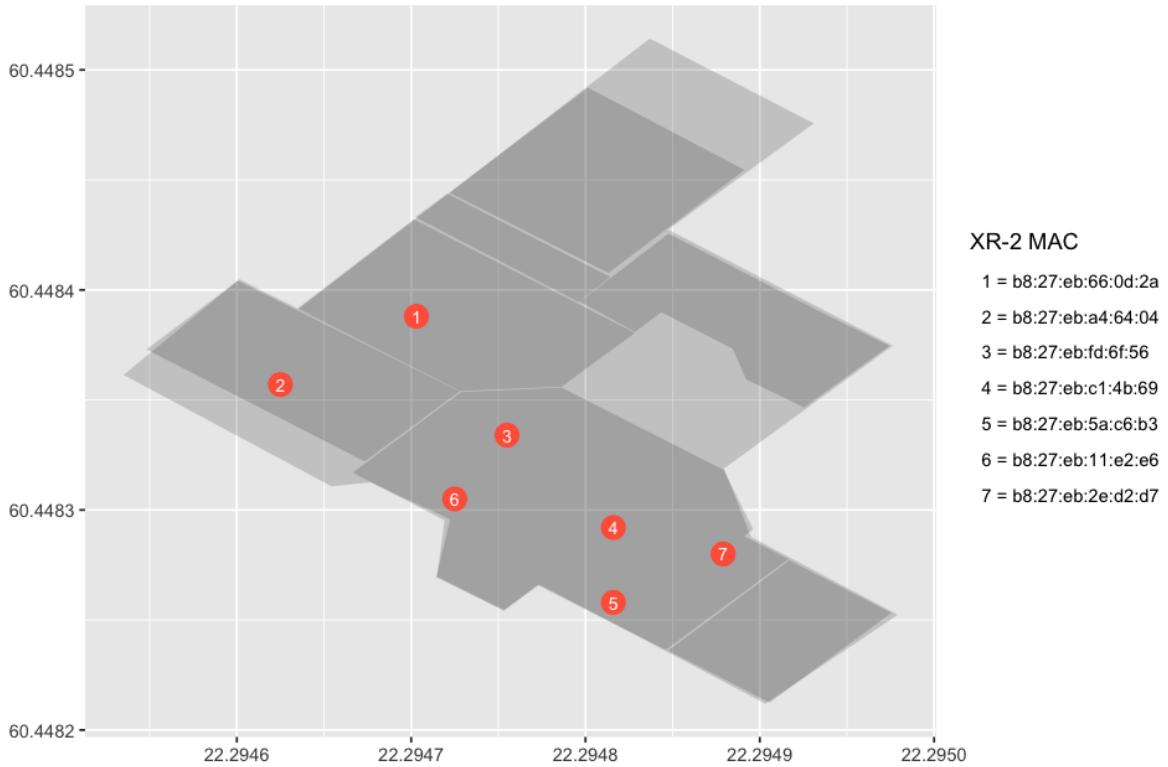


Kuva 1: Walkbase Foculator



Kuva 2: Walkbase XR-2

Data on kuvattu tarkemmin alaluvussa 4.2. Koeympäristön pohjapiirustus on esitetty kuvassa (3). Piirustuksessa XR-2-paikantimet on kuvattu punaisilla ympyröillä. Foculator-testilaitteen liikerata on kuvattu sinisellä viivalla. Toimistoympäristön pohjapiirustus on kuvattu harmaalla niin, että piirustuksesta erottuvat toimiston väliseinät.



Kuva 3: Koeasetelman pohjapiirustus

Ennen datan keräämistä testilaite asennettiin kiinni robottiin (kuva ??), joka oli ohjelmoitu ennalta seuraamaan haluttua liikerataa vastaavia lattiamerkintöjä ennalta määritellyllä nopeudella  $Xm/s$ . Kyseinen liikerata on merkitty koeympäristön pohjapiirustukseen sinisellä viivalla. Data kerättiin sinä aikana, kun robotti liikkui liikeradan lähtöpisteestä (piste A) liikeradan maalipisteesseen (piste B). Robotilta kului matkaan  $X$  sekuntia.



Kuva 4: Testirobotti

Data kerättiin yöäikana, jolloin toimiston käyttöaste oli minimissa. Tällä minimoitiin radiosignaalien tielle osuvien ihmisten vaikutus radiosignaaloihin.

## 4.2 Datan kuvaus

Riippuen päällä olevien paikannustagien lukumäärästä, tuottaa n. havainto sekunnissa. Havaintoja on  $N_{obs} = X$  kappaletta, joka kattaa  $Y$  minuuttia. Havaintojen aikaleimat on tallennettu sekunnin tuhannesosan tarkkuudella. Jokainen havainto koostuu taulukossa 1 havaintuista muuttujista.

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
ts	havainnon aikaleima	21:38:20.998+00
asset_tag_mac	lähettimen MAC-osoite	5c:02:72:67:f7:4c
locator_mac	vastaanottimen MAC-osoite	b8:27:eb:66:0d:2a
locator_lat	vastaanottimen sijainti (leveyspiiri)	60.448265
locator_lon	vastaanottimen sijainti (pituuspiirit)	22.294823
bearing	suuntimakulma $\eta$ (astetta)	34
height	vastaanottimen korkeus (m)	2.22
rssi	signaalin vahvuus (dBm)	-81
distance	arvioitu etäisyys lähettimeen (m)	13.5
azimuth_angle	atsimiuuttikulma $\phi$ (astetta)	102.7
converted_angle	napapohjoisesta laskettu kulma $\Phi$ (astetta)	34
opposite_angle	vastakkainen kulma (lähetin-vastaanotin) $\Phi'$ (radiaania)	3.735
elevation_angle	korkeuskulma (astetta)	11.9
quality_ant_phase_jitter	antennikohtainen jitter	(0.15,0.15,0.15,0.15, 0.14,0.16,0.29,0.34)
ss_jitter	antennikohtaisten jitter-arvojen neliösumma	0.3349
quality_ant_snr	antennikohtainen signaali-kohinasuhde	(24.76,37.48,40.75,36.37 28.5,28.2,16.15,11.27)
snr_jitter	antennikohtaisten signaali-kohinasuhteiden neliösumma	6996.473

Taulukko 1: Havaintomuuttujat

Etäisyys on estimoitu signaalin vahvuudesta käyttäen valmistajan omaa, tuntematonta propagaatiomallia. Etäisyyttä tai signaalin vahvuutta ei käytetä paikantamiseen, joten tämän mallin käsitteily jäätetään tutkielman ulkopuolelle. Munoz (2009) luku 2 sisältää yleiskatsauksen myös propagaatiomalleihin.

Atsimiuuttikulma  $\phi$  lasketaan aina vastaanottimen tietyltä sivulta, joten se vastaa napapohjoista ainoastaan siinä tapauksessa, että vastaanottimen kyseinen sivu on asetettu kohtisuoraan napapohjoiseen nähdyn. Käytännön syistä tämä ei ole aina mahdollista eikä edes haluttavaa. Sen vuoksi jokaiselle vastaanottimelle on tietokantaan tallennettu oma suuntimakulma  $\eta$ . Triangulaatiossa alla käytetään napapohjoisesta laskettuja kulmia  $\Phi$ , jotka lasketaan jokaiselle havainnolle havainnon vastaanottimen suuntimakulman avulla

$$\Phi = (\phi + \eta + 360^\circ) \mod 360^\circ. \quad (27)$$

Suuntimakulma  $\Phi$  kertoo kuitenkin vastaanottimen ja lähetimen välisen kulman. Koske olemme kiinnostuneet paikantamaan lähetintä, lasketaan yhtälöllä (28) suuntimakulman perusteella edelleen lähetimen ja vastaanottimen välinen kulma  $\Phi'$ . Samalla asteissa oleva kulma muunnetaan radiaaneiksi paikannusta varten.

$$\Phi' = \frac{\pi}{180^\circ}(\Phi + 180^\circ \mod 360^\circ). \quad (28)$$

Lisäksi havainnot sisältävät antennikohtaiset jitter- ja SNR-arvot sekä näistä lasketut neliösummat. Havaintomuuttujien ohella koitelanteessa tallennettiin Foculator-testilaitteen todellinen sijainti sekunnin tarkkuudella. Tallennettu sijainti perustui koeympäristön lattiaan pohjapiirrustusten ja laser-mittausten avulla tehtyihin merkintöihin. Näin saadut testimuuttujat on kuvattu taulukossa (2).

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
foculator_ts	aikaleima	21:38:20+00
foculator_lat	testilaitteen sijainti (leveyspiiri)	60.44819
foculator_lon	testilaitteen sijainti (pituuspiiri)	22.29493

Taulukko 2: Testimuuttujat

Testimuuttuja käytetään alla SMC-paikannusalgoritmin paikannusvirheen laskemisessa.

### 4.3 Malli

Paikannus kerran sekunnissa.

### 4.4 Algoritmi

### 4.5 Tulokset

## 5 Lopuksi

Tässä tutkielmassa on esitetty pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria sekä XXX algoritmeja.

Tutkielmassa on lisäksi tarkasteltu miten eri valinnat vaikuttavat algoritmin suorituskykyyn yksinkertaisen mutta XXX esimerkin avulla. Ei oteta kantaa esimerkiksi JATKOKSYMYKSIÄ mahdollisuus laajentaa.

## 6 Lähteet

- Chen & Liu (1998): **Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems**. [http://stat.rutgers.edu/home/rongchen/publications/98JASA\\_SMC.pdf](http://stat.rutgers.edu/home/rongchen/publications/98JASA_SMC.pdf)
- Crisan & Doucet (2000): **Convergence of Sequential Monte Carlo Methods**. [http://www.stats.ox.ac.uk/~doucet/crisain\\_doucet\\_convergenceofSMC2000.pdf](http://www.stats.ox.ac.uk/~doucet/crisain_doucet_convergenceofSMC2000.pdf)
- Crisan & Doucet (2002): **A Survey of Convergence Results on Particle Filtering Methods for Practitioners**. [https://www.researchgate.net/publication/3318241\\_A\\_Survey\\_of\\_Convergence\\_Results\\_on\\_Particle\\_Filtering\\_Methods\\_for\\_Practitioners](https://www.researchgate.net/publication/3318241_A_Survey_of_Convergence_Results_on_Particle_Filtering_Methods_for_Practitioners)
- Dahlin & Schön (2019): **Getting Started with Particle Metropolis-Hastings for Inference in Nonlinear Dynamical Models**. <https://arxiv.org/pdf/1511.01707.pdf>.
- Munoz, Bouchereau Lara, Vargas & Enriquez-Caldera (2009): **Position Location Techniques and Applications**. Elsevier.
- Del Moral (1996): **Nonlinear Filtering: Interacting Particle Resolution**. <https://people.bordeaux.inria.fr/pierre.delmoral/delmoral96nonlinear.pdf>.
- Gordon, Salmond & Smith (1993): **Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation**. <http://www.irisa.fr/aspi/legland/ref/gordon93a.pdf>.
- Gustafsson (2010): **Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications**. <https://ieeexplore.ieee.org/document/5546308>.
- Klaas, De Freitas, Doucet (2012): **Toward Practical N2 Monte Carlo: the Marginal Particle Filter**. <https://arxiv.org/abs/1207.1396>
- Petris, Petrone & Campagnoli (2009): **Dynamic Linear Models with R**. Springer.
- Särkkä (2013): **Bayesian Filtering and Smoothing**. Cambridge University Press. [https://users.aalt.o.fi/~ssarkka/pub/cup\\_book\\_online\\_20131111.pdf](https://users.aalt.o.fi/~ssarkka/pub/cup_book_online_20131111.pdf).