

SMC-menetelmät

Laskennallinen tilastotiede - Harjoitustyö

Lasse Rintakumpu

09 May, 2021

Sisällys

1	Johdanto	2
1.1	Suodinongelma	2
1.2	Historiaa	3
2	Monte Carlo -menetelmistä	4
2.1	Monte Carlo -approksimaatio	4
2.2	Tärkeytysotanta	5
3	Bayesilainen suodin	6
4	SIR-algoritmi	6
4.1	Parametrien valinta	8
4.1.1	Otoskoon N valinta	8
4.1.2	Uudelleenotantamenetelmän valinta	8
4.1.3	Ehdotusjakauman valinta	9
4.2	Konvergenssituloksia	10
4.3	Marginaalijakauma	10
4.4	Aikakompleksisuus	10
5	Lopuksi	11
6	Paikannusesimerkki	11
6.1	Koeasetelma	11
6.2	Datan kuvaus	13
6.3	Ongelman kuvaus	15
6.4	Algoritmi	15
6.5	Tulokset	15
7	Lopuksi	16

1 Johdanto

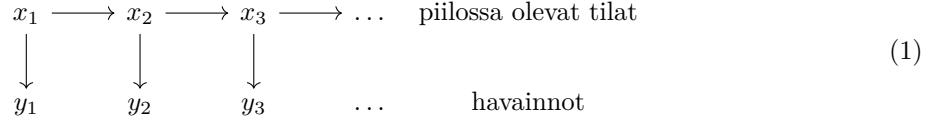
SMC-menetelmät (sequential Monte Carlo -menetelmät) ovat joukko Monte Carlo -algoritmeja, joiden avulla voidaan ratkaista ns. suodinongelma, kun ongelma on epälineaarinen ja/tai ongelmaan liittyvä kohina ei noudata normaalijakaumaa. SMC-menetelmille on lukuisia sovellutuksia esimerkiksi Bayesilaisessa tilastotieteessä, fysiikassa ja robotiikassa.

Tämän tutkielman tavoitteena on esittää pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria sekä joitakin menetelmäperheeseen kuuluvia algoritmeja. Tutkielman ensimmäisessä alaluvussa kuvataan yleisellä tasolla sekä suodinongelma että sen ratkaisujen historiaa. Toisessa alaluvussa käsitellään joitakin Monte Carlo -menetelmiin liittyviä yleisiä tuloksia. Kolmannessa alaluvussa esitellään Bayesilainen viitekehys suodinongelmalle, jonka pohjalta neljännessä alaluvussa kuvataan SIR-algoritmina tunnettu SMC-menetelmä. Tutkielman lopussa tarkastellaan menetelmien käyttöä paikannussovelluksessa.

Tutkielman esitykset seuraavat erityisesti Simo Särkän kirjaa *Bayesian Filtering and Smoothing* (2013), Fredrik Gustafssonin artikkelia “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010) sekä Olivier Cappén, Simon J. Godsill ja Eric Moulines’n artikkelia “An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo” (2007).

1.1 Suodinongelma

Stokastisten prosessien teoriassa suodinongelmaksi kutsutaan tilannetta, jossa halutaan muodostaa keskineliövirheen mielessä paras mahdollinen estimaatti jonkin järjestelmän tilan arvoille, kun ainoastaan osa tiloista voidaan havaita ja/tai havaintoihin liittyv kohinaa. Tavoitteena on toisin sanoen laskea jonkin prosessin posteriorijakauma kyseisten havaintojen perusteella. Ongelmaa havainnollistaa kaavio (1).



Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti epälineaarisen ns. Markovin piilomallin posteriorijakauman Bayesilaiseen ratkaisumiin. Ongelmassa tiedetään, miten havaitut muuttujat y_k kytkeytyvät “piilossa oleviin” muuttuijiin x_k sekä osataan sanoa jotain tilamuuttujien todennäköisyksistä. Oletetaan myös, että piilossa oleville tiloille X_k pätee Markov-ominaisuus, jolloin kutakin hetkeä seuraava tila x_{k+1} riippuu menneistä tiloista $x_{1:k}$ ainoastaan tilan x_k välityksellä. Lisäksi havaittu tila y_k riippuu tiloista x_k ainoastaan jonkin x_k :n funktion kautta. Kun aika-avaruus on diskreetti ja merkitään ajanhetkellä $k = 1, \dots, t$ piilossa olevan prosessin tilaa x_k ja havaittua prosessia y_k , saadaan mallit

$$x_{k+1} = f(x_k, \nu_k) \tag{2}$$

$$y_k = h(x_k) + e_k. \tag{3}$$

Lisäksi tiedetään prosessin alkuperäisen jakauman $x_1 \sim p_{x_1}$, tähän liittyvän kohinaprosessin jakauman $\nu_k \sim p_{\nu_k}$ sekä malliin y_k liittyv kohina $e_k \sim p_{e_k}$. Koska SMC-algoritmit pyrkivät ratkaisemaan juurikin epälineaarisen, ei-Gaussisen suodinongelman, voivat funktiot $f(\cdot)$ ja $h(\cdot)$ olla tässä epälineaarisia eikä kohinan tarvitse olla normaalijakautunutta.

Mallit voidaan esittää myös yleisemmässä jakaumamuodossa

$$x_{k+1} \sim p(x_{k+1}|x_k), \tag{4}$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k). \tag{5}$$

Tutkielman teoriaosassa käytetään ensisijaisesti yhtälöiden (4) ja (5) muotoilua. Empiirisessä osassa palataan yhtälöiden (2) ja (3) muotoiluun.

Suodinongelmaa lähellä on myös ns. tasoitusongelma (smoothing problem), jossa ollaan kiinnostuneita prosessin x_k posteriorijakaumasta $p(x_k|y_k)$ jokaisena ajanhetkenä $1, \dots, k$ ei ainostaan haluttuna ajanhetkenä k . Tämä tutkielma keskittyy yksin suodinongelman ratkaisemiseen, mutta huomioitavaa on, että SMC-algoritmit näyttävät ratkaisevan tasoitusongelman ilmaiseksi. Tähän liittyy kuitenkin joidenkin mallien kohdalla mahdollista epätarkkuutta, joten tarvittaessa tasoitusongelma pitää ratkaista erikseen.

1.2 Historiaa

Tämä alaluku esittää pääpiirteittään suodinongelmalle esitettyjen ratkaisujen historian. Lineaarisen suodinongelman osalta alaluku noudattaa Dan Crisanin artikkelia “The stochastic filtering problem: a brief historical account” (2014) sekä Mohinder S. Grewalin ja Angus P. Andrewsin artikkelia “Applications of Kalman Filtering in Aerospace 1960 to the Present” (2010). SMC-menetelmien osalta läheenä toimii Cappé & al (2007).

Suodinongelma nousi esille insinöörityteteiden sekä sotateollisuuden käytännön ongelmista 2. maailmansodan aikana, vaikkakin suodinongelman diskreetin ajan ratkaisut juontavat jo Andrei N. Kolmogorovin 30-luvun artikkeleihin. Jatkuvan ajan tilanteessa ensimmäisen optimaalisen, kohinan sallivan suotiman esitti matemaatikko, kybernetiikan kehittäjä Norbert Wiener. Wiener-suotimena tunnettua ratkaisuaan varten Wiener muotoili seuraavat kolme ominaisuutta, jotka prosessin X estimaatin \hat{X}_t pitää toteuttaa.

1. *Kausaliteetti*: X_t tulee estimoida käyttäen arvoja Y_s , missä $s \leq t$.
2. *Optimaalisuus*: X_t :n estimaatin \hat{X}_t tulee minimoida keskineliövirhe $\mathbb{E}[(X - \hat{X}_t)^2]$.
3. *On-line -estimointi*: Estimaatin \hat{X}_t tulee olla saatavissa minä hyvänsä ajanhetkenä t .

Wiener sovelsi ratkaisussaan stationaariset prosessien spektriteoriaa. Tulokset julkaistiin salaisina Yhdysvaltojen asevoimien tutkimuksesta vastanneen National Defense Research Committeeen (NDRC) raportissa vuonna 1942. Tutkimus tunnettiin sodan aikana lempinimellä “Keltainen vaara” sekä painopaperinsa värin etä vaikeaselkoisuutensa vuoksi. Myöhemmin Wiener esitti tuloksensa julkisesti kirjassaan *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series* (1949). Wienerin alkuperäiset kolme perusperiaatetta pätevät edelleen kaikille suodinongelman ratkaisuille, myös SMC-menetelmiille.

Kenties tärkein ja varmasti tunnetuin lineaariseen suodinongelman ratkaisu on Kalman-suodin. Suotimen kehittivät R.E. Kalman ja R.S. Bucy 1950- ja 60-lukujen taitteessa Yhdysvaltain kylmän sodan kilpavarustelutarpeisiin perustetussa Research Institute for Advanced Studies -tutkimuslaitoksessa (RIAS). Kalman-suodin on suodinongelman diskreetin ajan ratkaisu, kun taas Kalman-Bucy-suodin on jatkuvan ajan ratkaisu. Kohinan ollessa normaalijakautunutta on Kalman-suodin Wiener-suotimen tavoin lineaarisen suodinongelman optimaalinen ratkaisu. Wiener-suotimella ja Kalman-suotimella on kuitenkin erilaiset oletukset, minkä vuoksi erityisesti sääätö- ja paikannusovelluksissa Kalman-suotimen käyttö on luontevampaa. Suotimien oletuksia ja oletusten välisiä eroja ei käsitellä tässä tutkielmassa, kuten ei käsitellä myöskään Kalman-suotimen formaalia yhteyttä SMC-menetelmiin.

Kalman-suodinta voidaan soveltaa myös epälineaarisessa tapauksessa, kunhan suodinongelman funktiot $f(\cdot)$ ja $h(\cdot)$ ovat derivoituvia ja niihin liittyvä kohina oletetaan normaalijakautuneeksi. Tätä rataisia u kutsutaan laajennetuksi Kalman-suotimeksi (extended Kalman filter, EKF). Suodin kehitettiin 60-luvulla NASA:n Apollo-ohjelman tarpeisiin, vaikkakin itse avaruusalusten laitteistot hyödynsivät lentoatojen laskennassa Kalman-suotimen perusversiota. Laajennetun Kalman-suotimen toimintaperiaate perustuu epälineaaristen funktioiden linearisointiin Taylorin kehitylmän avulla kulloisenkin estimaatin ympärillä. Laajennettu Kalman-suodin on erityisesti paikannusovellusten *de facto* -suodinstandardi, mutta suodin ei kuitenkaan ole epälineaarisen ongelman optimaalinen estimaattori.

Kalman-suotimesta on lisäksi olemassa lukuisia muita epälineaarisiin ongelmiin soveltuivia laajennuksia, muun muassa paikkaratkaisun Kalman-suodin (position Kalman filter, PKF), hajustamaton Kalman-suodin (unscented Kalman filter, UKF) ja tilastollisesti linearisoitu Kalman-suodin (statistically linearized Kalman filter, SLF). Kuitenkin jos prosessin X mallia ei tunneta tarkasti tai kohinaa ei voida olettaa normaalijakautuneeksi, ovat sekventiaaliset Monte Carlo -menetelmät Kalman-suotimen johdannaisia parempia ratkaisuja. Vaikka tila-avaruuden dimensioiden kasvaessa kasvaa myös SMC-menetelmien vaatima laskentateho, ovat

SMC-menetelmät aina sitä parempia mitä epälineaarisempia mallit ovat ja mitä kauempana normaalijakau-masta kohina on. Viimeisten vuosikymmenten aikana myös laskennan teho on kasvanut merkittävästi samalla kun laskennan hinta on vastaavasti romahtanut, mikä puolaa Monte Carlo -menetelmien käyttöä entistä useammissa ongelmissa.

Jotakin suodinongelman rekursiivisia Monte Carlo -ratkaisuja löytyy jo 1950–70-luvuilta, erityisesti säätioteoriaan piiristä. Olennainen nykyalgoritmeihin periytyneet oivallus varhaisissa suodinalgoritmeissa oli tärkeytysotannan käyttö halutun jakaumaestimaatin laskennassa. Tärkeytysotanta-algoritmiin voidaan turvautua, kun emme pysty suoraan tekemään havaintoja jostakin jakaumasta p ja teemme sen sijaan havaintoja jakaumasta q , joita painotamme niin, että tuloksena saadaan jakauman p harhaton estimaatti. Algoritmi on kuvattu tarkemmin tutkielman alaluvussa 2.

Tärkeytysantaa käyttävä suodinongelman ratkaiseva SIS-algoritmi (sequential importance sampling) ei kuitenkaan vielä 70-luvulla löytänyt suurta käytännön suosiota. Osin tämä johtui puutteellisesta laskentatehosta, mutta algoritmi kärsi myös otosten ehtymisenä (sample impoverishment) tunnetusta ongelmasta. Monissa ongelmissa SIS-algoritmia käytetään suuri osa painoista päätyy vain tietyille partikkeleille, jolloin vastaavasti suuri osa partikkeleista ei enää estimoi haluttua jakaumaa. Tähän ongelmaan palataan myöhemmin.

Merkittävä ratkaisun ehtymisongelmaan esittivät Gordon, Salmond ja Smith artikkelissaan “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation” (1993). Artikkelin ratkaisu kulki nimellä “bootstrap filter”, saapasremmisuodin. Saapasremmisuodin välitti ehtymisen uudelleenotannalla, jossa matalapainoiset partikkelit korvattiin otoksilla korkeapainoisemmista partikkeleista. Ratkaisussa painot eivät myöskään riipu partikkelien aiemmista poluista vaan ainoastaan havaintojen uskottavuusfunktiossa. Vastaavaa ratkaisua käytetään tämän tutkielman uudemmassa SIR-algoritmissa (sampling importance resampling), jossa myös uudelleenotantaan sovelletaan tärkeytysantaa.

SMC-menetelmissä stokastisen prosessin posteriorijakauman esittämiseen käytettyjä otoksia kutsutaan myös partikkeleiksi ja menetelmiä hiukkassuotimiksi. Erityisesti myöhemmin esitetään SIR-algoritmia kutsutaan usein hiukkassuotimeksi. Tässä tutkielmanmassa pyritään korostamaan suotimien yhteyttä Monte Carlo -algoritmeihin ja käytetään siksi yleisempää termiä SMC-menetelmät. Termiä hiukkassuodin käytti ensimmäisen kerran Del Moral artikkelissa “Nonlinear Filtering: Interacting Particle Resolution” (1996). SMC-menetelmät termiä Liu ja Chen artikkelissa “Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems” (1998).

2 Monte Carlo -menetelmistä

Tässä alaluvussa kuvataan lyhyesti SMC-menetelmissä käytettävien Monte Carlo -menetelmien perusperiaate todennäköisyysjakauman estimoinnissa. Lisäksi esitetään tärkeytysantanta-algoritmi (importance sampling), jonka tarkoituksesta on estimoida harhattomasti jakaumaa $p(x|y_{1:k})$, josta emme voi suoraan tehdä otoksia, mutta jota voimme approksimoida toisella jakaumalla q . Esitykset noudattavat Särkkää (2013).

2.1 Monte Carlo -approksimaatio

Bayesilaisessa päätelyssä ollaan yleisesti kiinnostuttu laskemaan johonkin posteriorijakaumaan p liittyvää odotusarvoa

$$\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] = \int g(x)p(x|y_{1:k})dx, \quad (6)$$

missä g on tila-avaruuden mielivaltainen funktio ja $p(x|y_{1:t})$ on havaintoihin y_1, \dots, y_k liittyvä x :n posterioriitehsjakauma. Odotusarvo on laskettavissa suljetussa muodossa vain harvoissa tapauksissa, suodinongelman kohdalla silloin, kun kyseessä on lineaarinen ja Gaussinen malli. Odotusarvoa voidaan kuitenkin approksimoida niin sanoituilla Monte Carlo -menetelmillä. Menetelmien perusperiaate on tehdä riippumattomia otoksia estimointavasta jakaumasta ja laskea haluttu odotusarvo otosten avulla. Jos teemme N otosta jakaumasta $x^i \sim p(x|y_{1:t})$, missä $i = 1, \dots, N$ saadaan näiden otosten avulla laskettua odotusarvon estimaatti

$$\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x^i). \quad (7)$$

Monte Carlo -estimaatti konvergoi keskeisen raja-arvolauseen nojalla ja sen estimointivirheen voidaan osoittaa olevan luokkaa $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ riippumatta tilamuuttujan x dimensiosta. SMC-menetelmät hyödyntävät Monte Carlo -estimointia sekventiaalisesti, jolloin estimaatti lasketaan rekursiivisesti kullekin ajanhetkelle $k = 1, \dots, t$. Tähän palataan alaluvuissa 3 ja 4.

2.2 Tärkeytysotanta

Tilanteessa, jossa Monte Carlo -otoksia ei voida tehdä suoraan jakaumasta p , voidaan hyödyntää jakaumaa p approksimoivaa tärkeytys- tai ehdotusjakaumaa $q(x|y_{1:k})$ sekä ns. tärkeytysotantaa. Oletetaan, että tunnetaan priorijakauma $p(x)$ ja on olemassa havaintomalli $p(y_{1:k}|x)$ sekä valittu ehdotusjakauma $q(x|y_{1:k})$, josta voidaan tehdä otoksia. Ehdotusjakaumalta edellytetään lisäksi, että sen kantaja on suurempi tai yhtä suuri kuin jakauman $p(x|y_{1:k})$ ja että se saa nollasta poikkeavia arvoja kaikkialla missä $p(x|y_{1:k})$ saa nollasta poikkeavia arvoja. Kirjoitetaan halutun posteriorijakauman odotusarvo integraalina

$$\int g(x)p(x|y_{1:k})dx = \int g(x) \frac{p(x|y_{1:k})}{q(x|y_{1:k})} q(x|y_{1:k})dx, \quad (8)$$

jolle voidaan muodostaa Monte Carlo -approksimaatio tekemällä N otosta jakaumasta $x^i \sim q(x|y_{1:k})$. Muodostetaan näin odotusarvo

$$\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(x^i|y_{1:k})}{q(x^i|y_{1:k})} g(x^i) = \sum_{i=1}^N w^i g(x^i), \quad (9)$$

missä $g(x)$ on jokin estimoinnissa hyödyllinen, mielivaltainen funktio. Tutkielman käytetty notaatio x_k^i viittaa ajanhetken k partikkeliin i , missä $i = 1, \dots, N$. Tärkeytysotantaa kuvaa nyt algoritmi (1). Kun posteriorijakauman estimaatti muodostetaan kyseisellä algoritmilla voidaan tulos kirjoittaa

$$\hat{p}(x|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w^i \delta(x - x^i), \quad (10)$$

missä $\delta(x)$ on Diracin deltafunktio.

Algoritmi 1: Tärkeytysotanta

```

begin
  for i = 1, 2, ..., N do
    begin
      Otetaan N otosta ehdotusjakaumasta x^i ~ q(x|y_{1:k}).
      begin
        Lasketaan normalisoimattomat painot w_*^i = p(y_{1:k}|x^i)p(x^i)/q(x^i|y_{1:k}).
        ja normalisoidut painot w^i = w_*^i / sum_{j=1}^N w_*^j.
      begin
        Estimoidaan p laskemalla tiheydelle approksimaatio E[g(x)|y_{1:k}] ~ sum_{i=1}^N w^i g(x^i).
      end
    end
  end
end

```

3 Bayesilainen suodin

Suodinongelmassa ollaan kiinnostuttu tilavektorin posteriorijakauman $p(x_k|y_{1:k})$ estimoinnista. Tässä alaluvussa käydään läpi epälineaarisen tilanteen yleinen rekursiivinen, Bayesilainen posteriorijakauman laskenta. Tällaista suodinongelman ratkaisua kutsutaan myös Bayesilaiseksi suotimeksi. Koska epälineaarisessa, ei-normaalijakautuneessa tilanteessa rekursiota ei voida laskea analyttisesti, pitää estimoinnissa käyttää numeerisia menetelmiä. SMC-menetelmässä tämä tarkoittaa jakauman sekventiaalista Monte Carlo -approksimointia, jonka toteutus esitetään alaluvun 4 algoritmissa. Molemmat esitykset noudattavat Gustafsonia (2010).

Bayesilainen ratkaisu tilavektorin posteriorijakauman estimaatiolle $\hat{p}(x_k|y_{1:k})$ saadaan seuraavalla rekursiolla (käydään läpi jokaiselle ajanjaksoille $k = 1, \dots, t$). Lasketaan ensin

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \quad (11)$$

joka saadaan suoraan Bayesin kaavasta $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$. Normalisointivakio lasketaan integraalina

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k, \quad (12)$$

joka saadaan kokonaistodennäköisyyskaavasta $P(A) = \mathbb{E}[P(A|X)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x) f_X(x) dx$. Merkintä R^{n_x} vastaa tässä piilossa olevan tilavektorin dimensioita n .

Lopuksi lasketaan päivitysaskel ajalle, joka saadaan edelleen kokonaistodennäköisyydellä

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k}) dx_k. \quad (13)$$

Rekursion avulla voimme laskea jakauman $p(x_k|y_{1:k})$ estimaatti käymällä rekursion läpi k kertaa.

4 SIR-algoritmi

Tässä alaluvussa esitetään SMC-menetelmiin kuuluva SIR-algoritmi Bayesilaisen, epälineaarisen suodinongelman ratkaisemiseksi. Algoritmi on numeerinen toteutus alaluvussa 3 kuvatusta Bayesilaisesta suotimesta. Esitetyt algoritmi perustuu Gustafsoniin (2010).

Algoritmi alustetaan jakaumasta $x_1^i \sim p_{x_0}$ generoiduilla N -kappaleella partikkeleita. Jokaiselle partikkeelle annetaan alustuksessa sama paino $w_{1|0}^i = 1/N$. Algoritmi suoritetaan jokaiselle partikkeliille $i = 1, 2, \dots, N$ jokaisella ajanjaksoilla $k = 1, 2, \dots, t$.

Seuraava toistetaan jokaiselle ajanjaksoille $k = 1, 2, \dots, t$. Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa päivitetään painot yhtälön 14 mukaan.

$$w_{k|k}^i = \frac{1}{c_k} w_{k|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (14)$$

Tämä vastaa yllä esitetyn Bayes-suotimen päivitysvaihetta (11). Normalisointipaino c_k lasketaan puolestaan yhtälöstä (15), mikä vastaa Bayes-suotimen normalisointivakion laskemista (12) ja asettaa painojen summaksi $\sum_{i=1}^N w_{k|k}^i = 1$.

$$c_k = \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (15)$$

Seuraavassa vaiheessa estimoidaan p laskemalla tiheyden $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ Monte Carlo -estimaatti yhtälön (16) perusteella

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i). \quad (16)$$

Tämän jälkeen suoritetaan valinnainen uudelleenotanta. Uudelleenotanta voidaan tehdä jokaisella askeleella tai efektiivisen otoskoon perusteella alla kuvatun kynnysarvoehdon $\hat{N}_{eff} < N_{th}$ täytessä, jolloin uudelleenotantaa kutsutaan adaptiiviseksi uudelleenotannaksi. Tällaista uudelleenotantaa hyödynnetään esitetyssä algoritmissa (2). Uudelleenotantaa tarkastellaan lähemmin alaluvussa 4.1.2. Lopuksi päivitetään aika (jos $k < t$) ja luodaan uudet ennusteet partikkeleille ehdotusjakaumasta (17)

$$x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1}) \quad (17)$$

ja päivitetään partikkeli painot tärkeytysotannalla (18), sen mukaan kuinka todennäköisiä partikkeliennusteet ovat

$$w_{k+1|k}^i = w_{k|k}^i \frac{p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})}. \quad (18)$$

Vaiheet 17 ja 18 vastaavat Bayes-suotimen aikapäivitystä (13).

Alla käsitellään algoritmiin liittyvän uudelleenontamamenetelmän, partikkeliennusteen määren ja ehdotusjakauman valinta. Lopuksi esitetään algoritmin konvergenssia, marginaalijakaumaa sekä aikakompleksisuutta koskevia tuloksia.

Algoritmi 2: SIR

Result: Posteriorijakauman $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ estimaatti.

Data: Havainnot y_k . Generoitu $x_1^i \sim p_{x_0}$ missä $i = 1, \dots, N$ ja jokainen partikkeli saa saman painon $w_{1|0}^i = 1/N$.

```

begin
  for k = 1, 2, ..., t do
    for i = 1, 2, ..., N do
      begin
        | Päivitetään painot  $w_{k|k}$ .
      begin
        | Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio  $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i)$ .
      begin
        | Lasketaan efektiivinen otoskoko  $\hat{N}_{eff}$ .
      if  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  then
        begin
          | Otetaan uudet  $N$  otosta palauttaen joukosta  $\{x_{1:k}^i\}_{i=1}^N$ , missä otoksen  $i$  todennäköisyys on
            |  $w_{k|k}^i$ .
      if  $k < t$  then
        begin
          | Aikapäivitys.
          | Luodaan ennusteet partikkeleille ehdotusjakaumasta  $x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1})$ ,
            | päivitetään partikkeliennusteen painot tärkeytysotannalla.

```

4.1 Parametrien valinta

Ennen algoritmin suorittamista valitaan ehdotusjakauma $q(x_{k+1}|x_{1:k}, y_{k+1})$, uudelleenotantamenetelmä sekä partikkeli määärä N . Ehdotusjakauman ja uudelleenotantamenetelmän valinnassa tärkeimpänä päämäääränä on välttää otosten ehtymistä, kun taas partikkeli määärä säätelee kompromissia algoritmin suorituskyvyn ja tarkkuuden välillä.

4.1.1 Otoskoon N valinta

Yleispätevää säätöä otoskoon/partikkeli lukumäärä N valinnalle on vaikeaa antaa, sillä vaadittava estimointitarkkuus riippuu usein kässillä olevasta ongelmasta. Gordon &al. (1993) esittävät kuitenkin kolme tekijää, jotka vaikuttavat partikkeli lukumäärä valintaan

- tila-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä n_x ,
- tyypillinen päälekäisyys priorin ja uskottavuuden välillä
- sekä tarvittava aika-askeleiden lukumäärä.

Ensimmäisen tekijän vaikutus on selvä. Mitä useammassa ulottuvuudessa otantaa tarvitsee tehdä, sen korkeammaksi on N asetettava, jotta jokainen ulottuvuus pystytään kattamaan. Tekijät (b) ja (c) puolestaan seuraavat uudelleenotannasta. Jos se osa tila-avaruutta, jossa uskottavuus $p(y_k|x_k)$ saa merkittäviä arvoja on pieni verrattuna siihen osaan, jossa priorijakauma $p(x_k|y_{1:k-1})$ saa merkittäviä arvoja, suuri osa partikkeleista saa pieniä painoja eikä näin valikoidu uudelleenotantaan.

Yleisesti ottaen N kannattaa asettaa sellaiseksi, että se paitsi tuottaa riittävän tarkan estimaatin, on se käytettävissä olevan laskentatehon sekä vaadittavan laskentanopeuden kannalta järkevä. Tähän palataan tutkielman lopuksi empiirisessä paikannusesimerkissä.

4.1.2 Uudelleenotantamenetelmän valinta

Ilman uudelleenotantaa on mahdollista, että algoritmi alkaa kärsiä SIS-algoritmile ominaisesta otosten ehtymisestä. Toisin sanoen kaikki painot alkavat keskittyä vain muutamalle partikkelille eikä algoritmi enää approksimoi tehokkaasti haluttua jakaumaa. Uudelleenotanta tarjoaa osittaisen ratkaisun tähän ongelmaan, mutta hävittää samalla informaatiota ja siten lisää satunnaisotantaan liittyvää epävarmuutta. Yleisesti ottaen uudelleenotanta kannattaa aloittaa vasta siinä vaiheessa algoritmin suorittamista, kun siitä on otosten ehtymisen kannalta hyötyä, esimerkiksi efektiivisen otoskoon laskettua jonkin kynnysarvon alapuolle (adaptiivinen uudelleenotanta). Efektiivinen otoskoko saadaan laskettua variaatiokertoimesta c_ν kaavalla

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + c_\nu^2(w_{k|k}^i)} = \frac{N}{1 + \frac{\text{Var}(w_{k|k}^i)}{(\mathbb{E}[w_{k|k}^i])^2}} = \frac{N}{1 + N^2 \text{Var}(w_{k|k}^i)}. \quad (19)$$

Nämä laskettu efektiivinen otoskoko maksimoituu ($N_{eff} = N$), kun kaikille painoille pätee $w_{k|k}^i = 1/N$ ja minimoituu ($N_{eff} = 1$), kun $w_{k|k}^i = 1$ todennäköisyydellä $1/N$ ja $w_{k|k}^i = 0$ todennäköisyydellä $(N-1)/N$. Normalisoitujen painojen avulla saadaan effektiiviselle otoskoolle ajanhetkellä k laskennallinen approksimaatio

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_{k|k}^i)^2}. \quad (20)$$

Sekä määritelmälle (19) että (20) pätee $1 \leq \hat{N}_{eff} \leq N$. Yläraja saavutetaan, kun jokaisen partikkelin paino on sama. Alarajalle puolestaan päädytään, kun kaikki paino keskittyy yksittäiselle partikkelille. Tästä saadaan määritelyä algoritmile SIR-uudelleenotantaehdot $\hat{N}_{eff} < N_{th}$. Gustafsson (2010) esittää uudelleenotannan kynnysarvoksi esimerkiksi $\hat{N}_{th} = 2N/3$.

Uudelleenotanta ei muuta approksimoitavan jakauman p odotusarvoa, mutta se lisää jakauman Monte Carlo -varianssia. On kuitenkin olemassa esimerkiksi osittamiseen perustuvia uudelleenotantamenetelmiä, jotka pyrkivät minimoimaan varianssin lisäyksen. Varianssin pienennysmenetelmät jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle.

4.1.3 Ehdotusjakauman valinta

Yksinkertaisin muoto ehdotusjakaumalle on $q(x_{1:k}|y_{1:k})$ eli jokaisella algoritmin suorituskerralla käydään läpi koko aikapolku $1 : k$. Tämä ei kuitenkaan ole tarkoitukseenmukaista, erityisesti jos kyseessä on reaalialainen sovellutus. Kirjoitetaan ehdotusjakauma muodossa

$$q(x_{1:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})q(x_{1:k-1}|y_{1:k}). \quad (21)$$

Jos yhtälöstä (21) poimitaan ehdotusjakaumaksi ainoastaan termi $q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})$ voidaan tämä kirjoittaa edelleen Markov-ominaisuuden nojalla muotoon $q(x_k|x_{k-1}, y_k)$. Tämä on suodinongelman kannalta riittävä, koska olemme kiinnostuneita posteriorijakaumasta ja arvosta x ainoastaan ajanhettellä k (tasotusongelmassa tarvitsisimme koko polun $x_{1:k}$). Alla tarkastellaan edelleen Gustafssonia (2010) seuraten kahta ehdotusjakauman valintatapaa, prioriotantaa (prior sampling) sekä uskottavuusotantaa (likelihood sampling).

Ennen ehdotusjakauman tarkastelua määritellään mallille signaali-kohinasuhde uskottavuuden maksimin ja priorin maksimin välisenä suhteena

$$\text{SNR} \propto \frac{\max_{x_k} p(y_k|x_k)}{\max_{x_k} p(x_k|x_{k-1})}. \quad (22)$$

Yhdistetään lisäksi ehdotusjakaumia varten yhtälöt (14) ja (15), jolloin saadaan painojen päivitys muotoon (23).

$$w_{k|k}^i \propto w_{k-1|k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k|x^{k-1})}{q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)} \quad (23)$$

Kun suhde (22) on matala, on prioriotanta luonnollinen valinta. Tässä käytetään ehdotusjakaumana tilavektorin ehdollista prioria eli

$$q(x_k|x_{1:k-1}, y_k) = p(x_k|x_{k-1}^i). \quad (24)$$

Yhtälön (24) perusteella saadaan edelleen prioriotannan painoiksi (25)

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_k^i) = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_k^i). \quad (25)$$

Kun signaali-kohinasuhde on kohtalainen tai korkea, on parempi käyttää ehdotusjakaumana skaalattua uskottavuusfunktiota (27). Tarkastellaan ensin tekijöihin jakoa (26).

$$p(x_k|x_{k-1}^i, y_k) = p(y_k|x_k) \frac{p(x_k|x_{k-1}^i)}{p(y_k|x_{k-1}^i)} \quad (26)$$

Kun SNR on korkea ja uskottavuusfunktio on integroituva pätee $p(x_k|x_{k-1}^i, y_k) \propto p(y_k|x_k)$, jolloin voidaan asettaa (27)

$$q(x_k|x_{k-1}^i, y_k) \propto p(y_k|x_k). \quad (27)$$

Yhtälön (27) perusteella saadaan edelleen uskottavuusotannan painoiksi (28).

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(x_k^i|x_{k-1}^i). \quad (28)$$

4.2 Konvergenssituloksia

Alla esitetään kaksi SIR-algoritmiin liittyvää konvergenssitulosta, se kuinka hyvin esitetyllä algoritilla arvioitu posterioriiteheys $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$ approksimoi todellista tiheysfunktiota $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ sekä mikä on approksimaation keskineliövirhe. Tulokset noudattavat Crisanin ja Doucet'n artikkeleita "Convergence of Sequential Monte Carlo Methods" (2000) ja "A Survey of Convergence Results on Particle Filtering Methods for Practitioners" (2002).

Konvergenssitulos 1: Kun $N \rightarrow \infty$ algoritmile pätee $\forall k$ tulos (29).

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) \xrightarrow{a.s.} p(x_{1:k}|y_{1:k}). \quad (29)$$

Konvergenssitulos 2: Keskineliövirheelle pätee asymptoottinen konvergenssi (30).

$$\mathbb{E}(\hat{g}(x_k) - \mathbb{E}(g(x_k)))^2 \leq \frac{p_k \|g(x_k)\|}{N}. \quad (30)$$

Missä g on mikä hyvänsä piilossa olevan tila-avaruuden rajoitettu Borel-mitallinen funktio ($g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$), $\|g(\cdot)\|$ kyseisen funktion supremum-normi ja p_k jokin äärellinen vakio, jolle pätee ajanhetkestä k riippumatta $p_k = p < \infty$. Konvergenssituloksia ei tämän tutkielman puitteissa todisteta.

4.3 Marginaalijakauma

Edellä kuvattu algoritmi 1 tuottaa approksimaation koko prosessin posteriorijakaumalle $p(x_{1:k}|y_{1:k})$. Jos halutaan tietää ainoastaan posteriorijakauman $p(x_k|y_{1:k})$ estimaatti, voidaan käyttää yksinkertaisesti viimeisestä tilasta x_k laskettua estimaattia

$$\hat{p}(x_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_k - x_k^i). \quad (31)$$

Toinen, tarkempi vaihtoehto on käyttää laskennassa tärkeytyspainoa

$$w_{k+1|k}^i = \frac{\sum_{j=1}^N w_{k|k}^j p(x_{k+1}^i|x_k^j)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})} \quad (32)$$

painon (18) sijaan. Tällöin jokaisessa aikapäivitysaskeleessa lasketaan painot kaikkien mahdollisten tila-aika-avaruuuspolkujen yli. Samoin kuin uudelleenotanta tämä pienentää painojen varianssia.

4.4 Aikakompleksisuus

Algoritmin perusmuodon aikakompleksisuus on $\mathcal{O}(N)$. Uudelleenotantamenetelmän tai ehdotusjakauman valinta ei suoraan vaikuta aikakompleksisuuteen. Sen sijaan marginalisointi tärkeytyspainolla (32) lisää algoritmin aikakompleksisuutta $\mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N^2)$, koska jokaisen partikkelin kohdalla painot lasketaan jokaisen tila-aika-avaruuuspolun yli. On selvää, että erityisesti isoilla otoskoona N arvoilla ei yllä esitetty marginalisointi enää ole mielekästä.

Tällaisia tilanteita varten algoritmista on olemassa $\mathcal{O}(N \log(N))$ -versioita, jotka perustuvat esimerkiksi N:n kappaleen oppimiseen (N-body learning). Näiden algoritmien käsitteily jää tämän tutkielman ulkopuolelle, mutta katsauksen algoritmeista ovat esittäneet esimerkiksi Klaas & al. artikkelissa "Toward Practical N^2 Monte Carlo: the Marginal Particle Filter" (2012). Tutkielman kahdessa ulottuuviudessa tapahtuvan paikannusesimerkin tapauksessa $\mathcal{O}(N^2)$ -aikakompleksisuus ei ole ongelma.

5 Lopuksi

Tässä tutkielmanmassa on esitetty pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria Bayesilaisessa tilastotieteellisessä viitekehyksessä. Lisäksi tutkielmanmassa on käytä läpi uudelleenotantaa efektiivisen otoskoon perusteella hyödyntävä SIR-suodinalgoritmi. Lopuksi tutkielmanmassa on tarkasteltu SIR-algoritmin parametrien valintaan, suorituskykyyn sekä konvergenssiin liittyviä tuloksia.

6 Paikannusesimerkki

Sisätilapaikannus *** on BLAHBLAHBLAH. Koska GPS ei toimi sisätiloissa, tarvitaan muita paikannusratkaisuja. Radiosignaaleihin perustuvat paikannusratkaisut ovat BLAHBLAH. Eräs mahdollinen XXX, jossa käytetään tulokulmaa paikantamaan. Walkbase käyttää sisätilapaikannusta erityisesti ruokakaupoissa sekä tavarataloissa asiakkaiden käyttäytymistä koskevan keräämiseen. Tyypillinen .. XXX ostoskärryihin ja -koreihin XXX keräämään tärkeää paikannusdataa asiakkaiden XXX. Markkinoilla on XXX on Walkbase kehittänyt oman laitteistoratkaisunsa. SKENAARIOISSA TARVITAAN Tavoitteena on alle metrin paikannusvirhe.

Esimerkissä käytetään SMC-algoritmia Bluetooth-paikannusovelluksessa paikannustarkkuuden parantamiseen. Paikannukseen käytettävä data kerätään toimistoympäristössä liikkuvien BLE-lähettimien sekä kattoon sijoitettujen vastaanottimien avulla. Havainnot koostuvat vastaanottimien lähettimien signaalien perusteella laskemista, BLE5.1-standardin mukaisista signaalilin tulokulmista eli AoA-havainnoista (angle of arrival). Paikannukseen käytetään triangulaatio-algoritmia. Lopuksi esimerkissä analysoidaan ja vertaillaan algoritmin eri versioiden suorituskykyä sekä suorituskyvyn että paikannustarkkuuden näkökulmasta.

6.1 Koeasetelma

Paikannusesimerkissä lähettimenä toimi 25 Bluetooth-paikannustagista koostuva Walkbase Foculator - testilaite (kuva 1), vastaanottimena toimistoympäristöön asennettut seitsemän Walkbase XR-2 -vastaanotinta (kuva 2). Jokainen vastaanotin sisältää kahdeksan antennia, joiden vastaanottamien lähetinsignaalien perusteella vastaanottimet laskevat signaalilin tulokulman suhteessa vastaanottimeen. Tarkka tulokulmien laskemiseen käytetty algoritmi on paikantimen antennit toimittaneen Silicon Laboratories, Inc. -yrityksen liikesalaisuus, mutta ***perusperiaate on.

AoA relies on a single-antenna transmit beacon with continuous tone extension appended to a Bluetooth packet transmission and a locator receiver device to measure the arrival angle of the signal using an array of antennas. Each antenna in the array sees phase differences due to different line of sight distances to the beacon device. The antennas in the array are switched during continuous tone extension, resulting in IQ samples with phase information for each antenna. This IQ-data is fed to an angle estimator algorithm. In this AoA use case, the receiving device tracks arrival angles for individual transmit beacon objects.

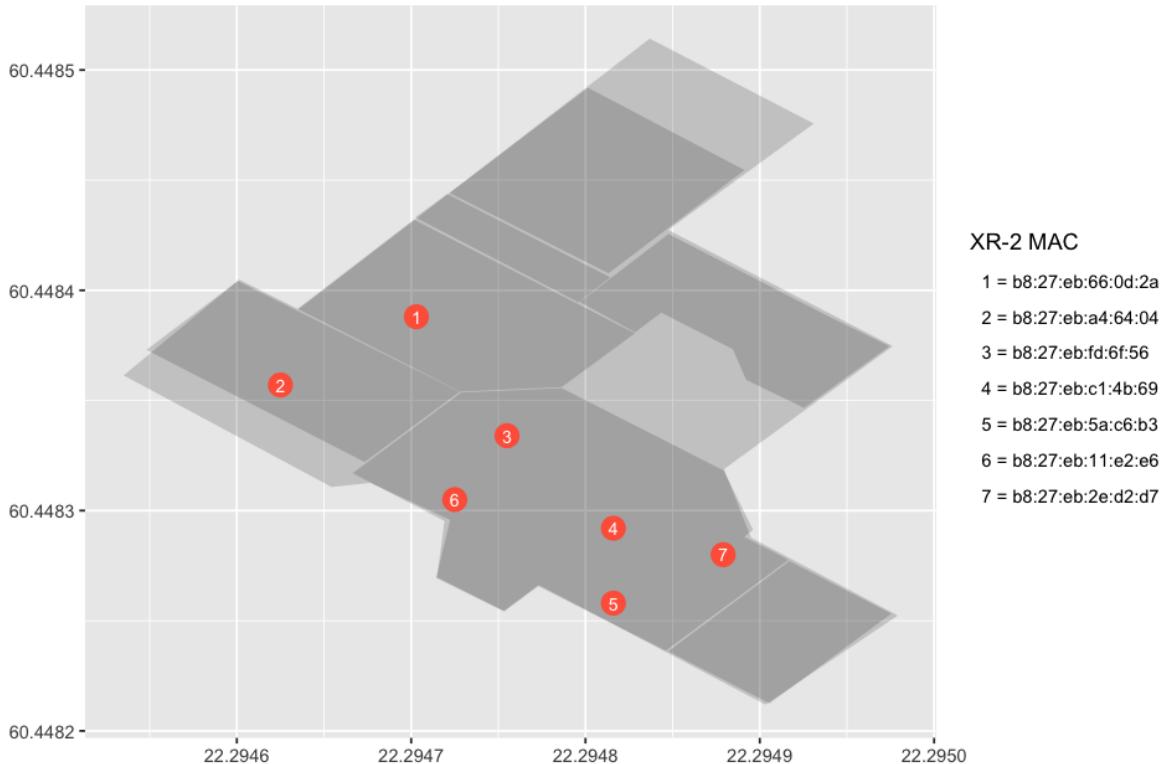
Esteettömässä ympäristössä XXX kulman virhe on hyvin pieni ja paikannusongelma voidaan ratkaista suoraan jollakin triangulaatio-algoritmillä. Eräänä XXX ToTal-algoritmia. Tässäkin tilanteessa voi paikannusta parantaa suodattimen käytöllä, mutta jo triangulaatio-algoritmin perusversio tuottaa halutun tarkkuuden. Toimistoympäristö on kuitenkin haastava, sillä erityisesti näyttöruumut sekä heijastavat etä estävät radiosignaaleja. Silicon Labs lupaa omalle AoA-järjestelmälle vastaavassa toimisympäristössä (seitsenällä paikantimella) kulmavirheen välillä $\pm 3.7 - 5.7$. Tämä ei kuitenkaan riitä johdonmukaisesti haluttuun alle metrin paikannustarkkuuteen, joten AoA-paikannus toimistoympäristössä tarjoaa hyvän motivaation SMC-menetelmien käyttämiseen.





Kuva 2: Walkbase XR-2

Data on kuvattu tarkemmin alaluvussa 5.2. Koeympäristön pohjapiirustus on esitetty kuvassa (3). Piirustuksessa XR-2-paikantimet on kuvattu punaisilla ympyröillä. Foculator-testilaitteen liikerata on kuvattu sinisellä viivalla. Toimistoymäristön pohjapiirustus on kuvattu harmaalla niin, että piirustuksesta erottuvat toimiston väliseinät.



Kuva 3: Koeasetelman pohjapiirustus

Ennen datan keräämistä testilaite asennettiin kiinni robottiin (kuva 4) 1.5 metrin korkeudelle. Robotti oli ohjelmoitu ennalta seuraamaan haluttua liikerataa vastaavia lattiamerkintöjä ennalta määritetyllä nopeudella Xm/s . Kyseinen liikerata on merkitty koeympäristön pohjapiirustukseen sinisellä katkovivallalla. Data kerättiin sinä aikana, kun robotti liikkui liikeradan lähtöpisteestä (piste A) liikeradan maalipisteeseen (piste B). Robotilta kului matkaan Y sekuntia. Sekä korkeus että nopeus valittiin niin, että ne ap XXX TÄ-

GILLÄ MERKITYN ostoskärryjen liikkumista kauppaympäristössä. HUOMIO: Testaaminen vaikeammassa ympäristössä.



Kuva 4: Testirobotti

Data kerättiin yöaikana, jolloin toimiston käyttöaste oli minimissa. Tällä minimoitiin radiosignaalien tielle osuvien ihmisten vaikutus signaaleihin.

6.2 Datan kuvaus

Riippuen päällä olevien paikannustagien lukumäärästä, tuottaa n. havainto sekunnissa. Havaintoja on $N_{obs} = X$ kappaletta, joka kattaa Y minuuttia. Havaintojen aikaleimat on tallennettu sekunnin tuhannesosan tarkkuudella. Jokainen havainto koostuu taulukossa 1 kuvatuista muuttujista.

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
ts	havainnon aikaleima	21:38:20.998+00
asset_tag_mac	lähettimen MAC-osoite	5c:02:72:67:f7:4c
locator_mac	vastaanottimen MAC-osoite	b8:27:eb:66:0d:2a
locator_lat	vastaanottimen sijainti (leveyspiiri)	60.448265
locator_lon	vastaanottimen sijainti (pituuspiirit)	22.294823
bearing	suuntimakulma η (astetta)	34
height	vastaanottimen korkeus (m)	2.22
rssi	signaalin vahvuus (dBm)	-81
distance	arvioitu etäisyys lähettimeen (m)	13.5
azimuth_angle	atsimuutikulma ϕ (astetta)	102.7
converted_angle	napapohjoisesta laskettu kulma Φ (astetta)	34
opposite_angle	vastakkainen kulma (lähetin-vastaanotin) Φ' (radiaania)	3.735
elevation_angle	korkeuskulma (astetta)	11.9
quality_ant_phase_jitter	antennikohtainen jitter	(0.15,0.15,0.15,0.15, 0.14,0.16,0.29,0.34)
ss_jitter	antennikohtaisten jitter-arvojen neliösumma	0.3349
quality_ant_snr	antennikohtainen signaali-kohinasuhde	(24.76,37.48,40.75,36.37 28.5,28.2,16.15,11.27)
snr_jitter	antennikohtaisten signaali-kohinasuhteiden neliösumma	6996.473

Taulukko 1: Havaintomuuttujat

Etäisyys on estimoitu signaalin vahvuudesta käyttäen valmistajan omaa, tuntematonta propagaatiomallia. Etäisyyttä tai signaalin vahvuutta ei käytetä paikantamiseen, joten tämän mallin käsitteily jätetään tutkielman ulkopuolelle. Munoz (2009) luku 2 sisältää yleiskatsauksen myös propagaatiomalleihin.

Atsimuutikulma ϕ lasketaan aina vastaanottimen tietyltä sivulta, joten se vastaa napapohjoista ainoastaan siinä tapauksessa, että vastaanottimen kyseinen sivu on asetettu kohtisuoraan napapohjoiseen nähdien. Käytännön syistä tämä ei ole aina mahdollista eikä edes haluttavaa. Sen vuoksi jokaiselle vastaanottimelle on tietokantaan tallennettu oma suuntimakulma η . Triangulaatiossa alla käytetään napapohjoisesta laskettuja kulmia Φ , jotka lasketaan jokaiselle havainnolle havainnon vastaanottimen suuntimakulman avulla

$$\Phi = (\phi + \eta + 360^\circ) \mod 360^\circ. \quad (33)$$

Suuntimakulma Φ kertoo kuitenkin vastaanottimen ja lähettimen välisen kulman. Koske olemme kiinnostuneet paikantamaan lähetintä, lasketaan yhtälöllä (34) suuntimakulman perusteella edelleen lähettimen ja vastaanottimen välinen kulma Φ' . Samalla asteissa oleva kulma muunnetaan radiaaneiksi paikkannusta varten.

$$\Phi' = \frac{\pi}{180^\circ}(\Phi + 180^\circ \mod 360^\circ). \quad (34)$$

Lisäksi havainnot sisältävät antennikohtaiset jitter- ja SNR-arvot sekä näistä lasketut neliösummat. Havaintomuuttujien ohella koitelanteessa tallennettiin Foculator-testilaitteen todellinen sijainti sekunnin tarkkuudella. Tallennettu sijainti perustui koeympäristön lattiaan pohjapiirrustusten ja laser-mittausten avulla tehtyihin merkintöihin. Näin saadut testimuuttujat on kuvattu taulukossa (2).

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
foculator_ts	aikaleima	21:38:20+00
foculator_lat	testilaitteen sijainti (leveyspiiri)	60.44819
foculator_lon	testilaitteen sijainti (pituuspiiri)	22.29493

Taulukko 2: Testimuuttujat

Testimuuttuja käytetään alla SMC-paikannusalgoritmin paikannusvirheen laskemisessa.

6.3 Ongelman kuvaus

Tarkoituksesta on estimoida testilaitteen/robotin sijainti sekunnin tarkkuudella. Merkitään estimointitavaa tilasarjaa $x_{1:k} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Lisäksi merkitään x_o testilaitteen lähtösjaintia. Jokainen tilasarjan havainto koostuu sekä pituus- että leveyskoordinaateista. Määritellään tilalle robotin kulkua kuvaava Markov-malli (35):

$$x_{k+1} = f(x_k, \nu_k) = x_k + D_k \begin{bmatrix} \cos \psi_k \\ \sin \psi_k \end{bmatrix} + \nu_k \quad (35)$$

missä D_k on testilaitteen/robotin ajanhetkenä k kulkema matka ja ψ_k robotin atsimuutti/suuntimakulma kyseisenä ajanhetkenä. ν_k on kohinaa, NORMAALIOLETUS. Vastaavasti $y_{1:k} = \{y_1, \dots, y_k\}$ kuvaa paikantiemien ja lähettimien välillä laskettuja MUUTTUJAT.

$$y_k = h(x_k) + e_k = \text{MULTIANGULAATIONMALLI} \quad (36)$$

MALLIN VALINTA.

6.4 Algoritmi

Koeasetelmassa käytetty SMC-algoritmi on toteuttu koetta varten alusta asti R-kielellä. Daten käsitteilyn koodi käyttää R:n tidyverse-kirjastoa. MUUT KÄYTETYT KIRJASTOT. Algoritmin koodi löytyy tutkielman liitteestä 1.

Algoritmin toteutuksessa on otettu huomioon seuraavat suorituskykyyn liittyvät pullonkaulat.

6.5 Tulokset

Koe toistettiin 6 kertaa. Ensimmäisessä vaiheessa testilaite pidettiin paikallaan ja kerättyn dataan sovellettiin kolmea eri algoritmia. Ensin paikannus suoritettiin pelkän ToTal-algoritmin avulla. Tätä puhtaaseen triangulaatioon perustuva paikannusta käytetään vertailuarvona

SIR-algoritmin kohdalla partikkelienvaihto- ja -lukumääräksi valittiin $N = 1000$. SIR-algoritmin kohdalla käytettiin NEFF.

Vertailuarvoina käytettiin puhtaaseen triangulaatioon (TOTAL) perustuvaan XXX. Paikannusten keskipisteet on esitetty taulukossa (3). Parhaimman suorituskyvyn PAIKANNUSMIELESSÄ algoritmi valittiin lisätarkasteluun SMC-algoritmien parametrivalintaan KOSKIEN.

Lisäksi algoritmin aikakompleksisuuteen vaikuttavat seuraavat seikat. T. SUORITUSKYKY. BATCH VS ONLINE. Kun halutaan on-line-estimointia, siinä missä off-line-estimointia.

Koeasetelma	Algoritmi	Keskimääräinen paikannusvirhe ϵ	Sijaintien lukumäärä k
Testilaite paikoillaan	ToTaL		
Testilaite paikoillaan	SIR		
Testilaite paikoillaan	SIR (N-eff)		
Liikkuva testilaite	ToTaL		
Liikkuva testilaite	SIR		
Liikkuva testilaite	SIR (N-eff)		

Taulukko 3: Paikannusvirheet

7 Lopuksi

Tässä tutkielmanmassa on esitetty pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria Bayesilaisessa/tilastotieteellisessä viitekehyksessä. Lisäksi tutkielmanmassa on käyty läpi uudelleenotantaa adaptiivisesti efektiivisen otoskoon perusteella hyödyntävä SIR-suodinalgoritmi. Tutkielmanmassa on myös käyty lävitse joitain algoritmien parametrien valintaan, suorituskykyyn sekä konvergenssiin liittyviä tuloksia.

Tutkielmanmassa on lisäksi tarkasteltu miten eri valinnat vaikuttavat algoritmin suorituskykyyn yksinkertaisen mutta kattavan ja todelliseen ongelmaan sekä dataan perustuvan paikannusesimerkin avulla. Jatkossa tutkielmaa olisi mahdollista laajentaa esimerkiksi JATKOKYSYMYKSIÄ.

Viitteet

- [1] Crisan, D. 2014. The stochastic filtering problem: A brief historical account. *Journal of Applied Probability*, Vol 51(A), 13–22.
- [2] Crisan, D., Doucet, A. 2000. *Convergence of Sequential Monte Carlo Methods*.
- [3] Crisan, D., Doucet A. 2002. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol 50, No 3, 736–746.
- [4] Davidson, P., Collin J., Takala J. 2010, Application of particle filters for indoor positioning using floor plans. *2010 Ubiquitous Positioning Indoor Navigation and Location Based Service*, 1–4.
- [5] Del Moral, . 1997. Nonlinear filtering: Interacting particle resolution. *Markov Processes and Related Fields*, Vol 2, No 4, 555–580.
- [6] Gordon, N.J., Salmond, D.H., Smith A.F.M. 1993. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proc. F, Radar Signal Process*, Vol 140, No 2, 107–113.
- [7] Grewal, M.S., Andrews, A.P. 2010. Applications of Kalman Filtering in Aerospace 1960 to the Present [Historical Perspectives]. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol 30, No 3, 69–78.
- [8] Gustafsson, F. 2010. Particle filter theory and practice with positioning applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, Vol 25, No 7, 53–82.
- [9] Liu, J., Chen, R. 1998. Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems. *Journal of the American Statistical Association*, Vol 93, No 443, 1032–1044.
- [10] Munoz, D., Enriquez-Caldera, R., Vargas, C., Bouchereau Lara, F. 2009. *Position Location Techniques and Applications*. Elsevier.
- [11] Särkkä, S. 2013. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press.

Liite 1: SMC-paikannusalgoritmin R-koodi