



**TURUN
YLIOPISTO**

HIUKASSUODIN- JA HIUKASSILOITINALGORITMIT SEKÄ NIIDEN
SOVELTAMINEN AOA-MENETELMÄÄN PERUSTUVASSA
BLUETOOTH-SISÄTILAPAUKANNUKSESSA

Lasse Rintakumpu

Pro gradu -tutkielma
Lokakuu 2024

Tarkastajat:

Ohjaajan titteli (Prof./Dos./FT) ja nimi

Toisen tarkastajan titteli (Prof./Dos./FT) ja nimi

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LASSE RINTAKUMPU: Hiukassuodin- ja hiukassiloitinalgoritmit sekä niiden soveltaminen AoA-menetelmään perustuvassa Bluetooth-sisätilapaikannuksessa
Pro gradu -tutkielma, X s.
Tilastotiede
Lokakuu 2024

Tutkielmassa esitetään hiukassuodin- ja hiukassiloitinalgoritmien teoria Bayesilaisessa tilastotieteellisessä viitekehyksessä. Lisäksi tutkielmassa käsitellään hiukassuotimien varianssin estimointia.

Empiirisenä esimerkkinä tutkielmassa tarkastellaan hiukassuodin- ja hiukassiloitinalgoritmien käyttöä AoA-teknologiaan perustuvassa Bluetooth-sisätilapaikannusratkaisussa.

Asiasanat: SMC-menetelmät, Monte Carlo -menetelmät, sekventiaalinen Monte Carlo, suodinongelma, hiukassuodin, hiukassiloitin, SIR-algoritmi, sisätilapaikannus, BLE, AoA, triangulaatio, Bayesilainen päättely

Sisällys

1	Johdanto	3
1.1	Notaatioista	4
1.2	Suodinongelma	4
1.3	Suodin- ja siloitteluongelmien historiaa	7
1.4	Monte Carlo -menetelmistä	9
1.4.1	Monte Carlo -approksimaatio	9
1.4.2	Tärkeytysotanta	10
1.5	Bayesilainen suodin	11
1.6	Kalman-suotimen ja hiukassuotimen yhteydestä ja eroista	12
2	Hiukassuotimet	15
2.1	SIR-algoritmi	15
2.1.1	Parametrien valinta	17
2.1.2	Konvergenssituloksia	20
2.1.3	Marginaalijakauma	21
2.1.4	Aikakompleksisuus	21
2.2	Saapasremmisuodin	21
2.3	Varianssin estimoinnista	22
3	Hiukkassilottimet	25
3.1	Bayesilainen siloitin	25
3.2	Offline-algoritmit	26
3.2.1	SIR-siloitin	26
3.2.2	BS-PS-siloitin	27
3.2.3	Uudelleenpainottava hiukkassiloitin	27
3.3	Online-algoritmit	28
3.3.1	Kiinteän viipeen siloitin	28
3.3.2	Mukautuvan viipeen siloitin	29
4	Hiukassuodin ja -siloitin sisätilapaikannuksessa	31
4.1	Sisätilapaikannuksesta	31
4.2	Teknologian kuvaus	32
4.2.1	AoA-menetelmistä	35
4.2.2	Kalibraatiosta	36
4.3	Datan kuvaus	36
4.3.1	Karttaprojektioista	38

4.3.2	Muunnettu data	39
4.4	Sisätilapaikannusalgoritmi	40
4.4.1	Ongelman kuvaus	40
4.4.2	Uskottavuusmallit	42
4.4.3	Datan valinta	43
4.4.4	Dynaaminen malli	43
4.4.5	Siloittelumalli	46
4.4.6	WB-sisätilapaikannusalgoritmi	47
4.5	Empiirinen esimerkki	49
4.5.1	Koeasetelma	49
4.5.2	Parametrien valinta	51
4.5.3	Tulokset	52
5	Lopuksi	57
6	Liitteet (followed by # A chapter')	59

Luku 1

Johdanto

Hiukassuotimet ovat joukko Monte Carlo -algoritmeja, joiden avulla voidaan ratkaista ns. suodinongelma, kun ongelma on epälineaarinen ja/tai ongelmaan liittyvä kohina ei noudata normaalijakaumaa. Hiukassuotimille on lukuisia sovellutuksia esimerkiksi Bayesilaisessa tilastotieteessä, fysiikassa ja robotiikassa.

Tämän tutkielman tavoitteena on esittää pääpiirteittään hiukassuotimien sekä näihin läheisesti liittyvien hiukassiloittimien teoria. Lisäksi tutkielmassa käsitellään joitakin menetelmäperheeseen kuuluvia algoritmeja ja sovelletaan näitä sisätilapaikannukseen.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa kuvataan yleisellä tasolla sekä suodinongelma että sen ratkaisujen historiaa ja esitetään joitakin Monte Carlo -menetelmiin liittyviä yleisiä tuloksia sekä Bayesilainen viitekehys suodinongelmalle. Toisessa luvussa kuvataan kaksi hiukassuodinalgoritmia, saapasremmisuodin sekä SIR-algoritmi ja perehdytään hiukassuotimen varianssin estimointiin. Kolmannessa luvussa tarkastellaan siloitteluongelmaa ja esitetään hiukassiloitinalgoritmeja tämän ongelman ratkaisemiseksi. Neljäs luku keskittyy hiukassuotimen käyttöön empiirisessä AoA/Bluetooth-teknologiaan perustuvassa sisätilapaikannussovelluksessa. Tässä luvussa esitetään myös hiukassuodinalgoritmit radiosignaalin tulokulman arviointiin sekä radiovastaanottimen kalibrointiin. Lisäksi käsitellään lyhyesti sisätilapaikannuksessa hyödynnettävää karttasovitusalgoritmia.

Hiukassuodin- sekä hiukassiloitinalgoritmien osalta tutkielman esitykset seuraavat erityisesti Simo Särkän kirjaa *Bayesian Filtering and Smoothing* (2013) [26], Fredrik Gustafssonin artikkelia “Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications” (2010) [13] sekä Olivier Cappén, Simon J. Godsillin ja Eric Moulines’n artikkelia “An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo” (2007) [3]. Hiukassuotimien varianssin estimointi seuraa erityisesti Nick Whitleyn ja Anthony Leen artikkelia “Variance estimation in the particle filter” (2018) [16] sekä Randal Doucin ja Jimmy Olssonin artikkelia “Numerically stable online estimation of variance in particle filters” (2019) [23].

Taulukko 1.1: Symbolit ja notaatiot

Merkintä	Selitys
$\delta(x)$	Diracin deltafunktio
$\mathbb{E}[x]$	x :n odotusarvo
k	Aika-askel, skalaari, $k = 1, \dots, T$
$\log(x)$	Luonnollinen logaritmifunktio
$p(x), q(x)$	x :n tiheysfunktioita
$\hat{p}(x), \hat{q}(x)$	x : tiheysfunktion estimaatteja
N	Hiukassuotimen käyttämä partikkelien lukumäärä / otoskoko
$\mathcal{O}(\cdot)$	Algoritmin asymptoottisen suoritustajan Ordo-notaatio, suoritustajan mielessä pahin mahdollinen tapaus
x_k^i	Hiukassuotimen hiukkaset sisältävä vektori, alaindeksi k määrittää aika-askeleen, yläindeksi $i = 1, \dots, N$ partikkelin
X_t	Dynaaminen prosessi
\hat{X}_t	Dynaamisen prosessin estimaatti
y_k	Havainnot sisältävä vektori, k määrittää aika-askeleen
w_k^i	Hiukassuotimen painovektori

1.1 Notaatioista

Tässä tutkielmassa käytetään seuraavia yleisiä notaatioita. Vektoreita merkitään pienellä kursivoidulla kirjaimella, esimerkiksi z (kirjaimet p ja q on kuitenkin varattu todennäköisyysjakaumien tiheysfunktioille). Hiukassuotimen hiukkaset sisältäviä vektoreita merkitään x_k^i , missä alaindeksi viittaa ajanhetkeen $k, k = \{1, \dots, T\}$ ja yläindeksi partikkeliin i , missä $i = \{1, \dots, N\}$. Ajanhetkien $k, k = \{1, \dots, T\}$ havainnot sisältäviä vektoreita merkitään $\{y_1, \dots, y_k\}$. Lähtökohtaisesti kaikki tutkielmassa esitetyt muuttujat ovat ylä- ja alaindeksejä lukuunottamatta vektoreita. Skalaareihin pyritään viittaamaan isoilla kursivoiduilla kirjaimilla, esimerkiksi Z . Milloin tämä ei ole mahdollista, selviää muuttujan skalaariarvoisuus asiayhtedestä. Matriiseja merkitään isolla lihavoidulla kirjaimella, esimerkiksi \mathbf{X} ja funktiota merkitään pienellä kursivoidulla kirjaimella $f(\cdot)$. Prosesseihin viitataan alaindeksoidulla isolla kirjaimella, esimerkiksi X_k . Taulukossa 1.1 esitetään tarkemmin tutkielman keskeisimmät merkinnät. Taulukossa 1.2 esitetään puolestaan tutkielmassa käytetyt lyhenteet.

1.2 Suodinongelma

Stokastisten prosessien teoriassa suodinongelmaksi kutsutaan tilannetta, jossa halutaan muodostaa keskineliövirheen mielessä paras mahdollinen estimaatti jonkin järjestelmän tilan arvoille, kun ainoastaan osa tiloista voidaan havaita ja/tai havaintoihin liittyy kohinaa. Tavoitteena on toisin sanoen laskea jonkin prosessin posteriorijakauma kyseisten havaintojen perusteella. Ongelmaa havainnollistaa kaavio

Taulukko 1.2: Lyhenteet

Lyhenne	Selitys
ALvar	Adaptive-Lag variance
AoA	Angle-of-Arrival
BLE	Bluetooth Low Energy
BS-PS	Backwards simulation particle smoother
CLT	Central limit theorem
CR	Lithium Rechargeable
CSI	Channel State Information
EKF	Extended Kalman filter
GFSK	Gaussian frequency-shift keying
GIS	Geographic information system
GPS	Global Positioning System
IMU	Inertial measurement unit
IoT	Internet of Things
IQ, I/Q	In-phase / Quadrature
Lidar	Light detection and ranging
LPDDR	Low-Power Double Data Rate
MAC	Medium access control address
MC	Monte Carlo
MUSIC, MuSiC	MULTiple SInal Classification
OD	Olsson and Douc
OSCU	On-site computing unit
PCB	Printed circuit board
PKF	Position Kalman filter
RSS(I)	Received signal strength (indicator)
RTSS	Rauch-Turn-Striebel smoother
SIR	Sequential Importance Resampling
SIS	Sequential Importance Sampling
SLF	Statistically linearized Kalman filter
SMC	Sequential Monte Carlo
SNR	Signal-to-noise ratio
TDoA	Time Difference of Arrival
ToA	Time of Arrival
ToTal	Three object Triangulation algorithm
UKF	Unscented Kalman filter
WB	Walkbase
WGS	World Geodetic System

(1.1).

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & \longrightarrow & x_2 & \longrightarrow & x_3 & \longrightarrow & \dots & \text{piilossa olevat tilat} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 y_1 & & y_2 & & y_3 & & \dots & \text{havainnot}
 \end{array} \tag{1.1}$$

Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti epälineaarisen, ns. Markovin piilomallin posteriorijakauman Bayesilaiseen ratkaisuun. Ongelmassa tiedetään, miten havaitut muuttujat y_k kytkeytyvät “piilossa oleviin” tilamuuttujiin x_k sekä osataan sanoa jotain tilamuuttujien todennäköisyyksistä. Oletetaan myös, että piilossa oleville tiloille X_k pätee Markov-ominaisuus, jolloin kutakin hetkeä seuraava tila x_{k+1} riippuu menneistä tiloista $x_{1:k}$ ainoastaan tilan x_k välityksellä. Lisäksi havaittu tila y_k riippuu tiloista x_k ainoastaan jonkin x_k :n funktion kautta. Kun aika-avaruus on diskreetti ja ajanhetkellä $k = \{1, \dots, t\}$ piilossa olevan prosessin tilaa merkitään x_k ja havaittua prosessia y_k , saadaan mallit

$$x_{k+1} = f(x_k, \nu_k), \tag{1.2}$$

$$y_k = h(x_k) + e_k. \tag{1.3}$$

Lisäksi tiedetään prosessin alkuhetken jakauma $x_0 \sim p_{x_0}$, tähän liittyvän kohinaprosessin jakauma $\nu_k \sim p_{\nu_k}$ sekä malliin y_k liittyvä kohina $e_k \sim p_{e_k}$. Koska hiukassuodinalgoritmit pyrkivät ratkaisemaan juurikin epälineaarisen, ei-Gaussisen suodinongelman, voivat funktiot $f(\cdot)$ ja $h(\cdot)$ olla epälineaarisia eikä kohinan tarvitse olla normaalijakautunutta.

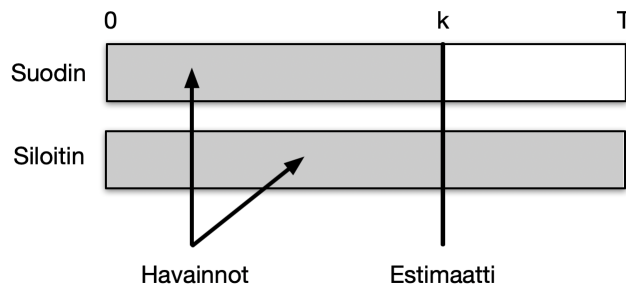
Mallit voidaan esittää myös yleisemmässä jakaumamuodossa

$$x_{k+1} \sim p(x_{k+1}|x_k), \tag{1.4}$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k). \tag{1.5}$$

Tutkielman teoriaosassa käytetään ensisijaisesti yhtälöiden (1.4) ja (1.5) muotoilua. Empiirisessä osassa palataan yhtälöiden (1.2) ja (1.3) muotoiluun.

Suodinongelmaa lähellä on myös ns. siloitteluongelma (*smoothing problem*), jossa ollaan kiinnostuneita prosessin x_k posteriorijakaumasta $p(x_k|y_k)$ jokaisena ajanhetkenä $\{1, \dots, k\}$ ei ainoastaan haluttuna ajanhetkenä k . Hiukassuodinalgoritmit näyttävät ratkaisevan siloitteluongelman ilmaiseksi, mutta tähän liittyy kuitenkin joidenkin mallien kohdalla mahdollista epätarkkuutta, joten tarvittaessa tasoitusuongelma pitää ratkaista erikseen. Tähän ongelmaan palataan tutkielman luvussa 3. Kuva 1.1 selittää suodin- ja siloitteluongelmien eron. Kuva mukailee Särkkää (2013) [26].



Kuva 1.1: Suodin- ja siloitteluongelma

1.3 Suodin- ja siloitteluongelmien historiaa

Tämä alaluku esittää pääpiirteittään suodinongelmalle esitettyjen ratkaisujen historian. Lineaarisen suodinongelman osalta alaluku noudattaa Dan Crisanin artikkelia “The stochastic filtering problem: a brief historical account” (2014) [5] sekä Mohinder S. Grewalin ja Angus P. Andrewsinkin artikkelia “Applications of Kalman Filtering in Aerospace 1960 to the Present” (2010) [11]. Hiukassuotimien osalta lähteenä toimii Cappé & al (2007) [3].

Suodinongelma nousi esille insinööritieteiden sekä sotateollisuuden käytännön ongelmista 2. maailmansodan aikana, vaikkakin suodinongelman diskreetin ajan ratkaisut juontavat jo Andrei N. Kolmogorovin 30-luvun artikkeleihin. Jatkuvan ajan tilanteessa ensimmäisen optimaalisen, kohinan sallivan suotimen esitti matemaatikko, kybernetiikan kehittäjä Norbert Wiener. Wiener-suotimenä tunnettua ratkaisuaan varten Wiener muotoili seuraavat kolme ominaisuutta, jotka prosessin X_t estimaatin \hat{X}_t pitää toteuttaa.

1. *Kausaliteetti*: X_t tulee estimoida käyttäen arvoja Y_s , missä $s \leq t$.
2. *Optimaalisuus*: X_t :n estimaatin \hat{X}_t tulee minimoida keskineliövirhe $\mathbb{E}[(X - \hat{X}_t)^2]$.
3. *On-line-estimointi*: Estimaatin \hat{X}_t tulee olla saatavissa minä hyvänsä ajanhetkenä t .

Wiener sovelsi ratkaisussaan stationaaristen prosessien spektriteoriaa. Tulokset julkaistiin salaisina Yhdysvaltojen asevoimien tutkimuksesta vastanneen National Defense Research Committeeen (NDRC) raportissa vuonna 1942. Tutkimus tunnettiin sodan aikana lempinimellä “Keltainen vaara” sekä painopaperinsa värin että vaikeaselkoisuutensa vuoksi. Myöhemmin Wiener esitti tuloksensa julkisesti kirjassaan *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series* (1949). Wienerin alkuperäiset kolme peruseriaatetta pätevät edelleen kaikille suodinongelman ratkaisuille, myös hiukassuotimille.

Kenties tärkein ja varmasti tunnetuin lineaariseen suodinongelman ratkaisu on Kalman-suodin. Suotimen kehittivät R.E. Kalman ja R.S. Bucy 1950- ja 60-lukujen

taitteessa Yhdysvaltain kylmän sodan kilpavarustelutarpeisiin perustetussa Research Institute for Advanced Studies -tutkimuslaitoksessa (RIAS). Kalman-suodin on suodinongelman diskreetin ajan ratkaisu, kun taas Kalman-Bucy-suodin on jatkuvan ajan ratkaisu. Kohinan ollessa normaalijakautunutta on Kalman-suodin Wiener-suotimen tavoin lineaarisen suodinongelman optimaalinen ratkaisu. Wiener-suotimella ja Kalman-suotimella on kuitenkin erilaiset oletukset, minkä vuoksi erityisesti säätö- ja paikannussovelluksissa Kalman-suotimen käyttö on luontevampaa. Suotimien oletuksia ja oletusten välisiä eroja ei käsitellä tässä tutkielmassa, mutta alaluvussa 1.6 käsitellään Kalman-suotimen formaalia yhteyttä hiukassuotimiin.

Kalman-suodinta voidaan soveltaa myös epälineaarisisessa tapauksessa, kunhan suodinongelman funktiot $f(\cdot)$ ja $h(\cdot)$ ovat derivoituvia ja niihin liittyvä kohina oletetaan normaalijakautuneeksi. Tätä ratkaisua kutsutaan laajennetuksi Kalman-suotimeksi (extended Kalman filter, EKF). Suodin kehitettiin 60-luvulla NASA:n Apollo-ohjelman tarpeisiin, vaikkakin itse avaruusalusten laitteistot hyödynsivät lentoratojen laskennassa Kalman-suotimen perusversiota. Laajennetun Kalman-suotimen toimintaperiaate perustuu epälineaaristen funktioiden linearisointiin Taylorin kehitelmän avulla kulloisenkin estimaatin ympärillä. Laajennettu Kalman-suodin on erityisesti paikannussovellusten *de facto* -suodinstandardi, mutta suodin ei kuitenkaan ole epälineaarisen ongelman optimaalinen estimaattori.

Kalman-suotimesta on lisäksi olemassa lukuisia muita epälineaarisiiin ongelmiin soveltuvia laajennuksia, muun muassa paikkaratkaisun Kalman-suodin (*position Kalman filter*, PKF), hajustamaton Kalman-suodin (*unscented Kalman filter*, UKF) sekä tilastollisesti linearisoitu Kalman-suodin (*statistically linearized Kalman filter*, SLF). Kuitenkin jos prosessin X_t mallia ei tunneta tarkasti tai kohinaa ei voida olettaa normaalijakautuneeksi, ovat hiukassuotimet eli sekventiaaliset Monte Carlo -menetelmät Kalman-suotimen johdannaisia parempia ratkaisuja. Vaikka tila-avaruuden dimensioiden kasvaessa kasvaa myös hiukassuotimien vaatima laskentateho, ovat hiukassuotimet aina sitä parempia mitä epälineaarisempia mallit ovat ja mitä kauempana normaalijakaumasta kohina on. Viimeisten vuosikymmenten aikana myös laskennan teho on kasvanut merkittävästi samalla kun laskennan hinta on vastaavasti romahtanut, mikä puoltaa Monte Carlo -menetelmien käyttöä entistä useammissa ongelmissa.

Joitakin suodinongelman rekursiivisia Monte Carlo -ratkaisuja löytyy jo 1950–70-luvuilta, erityisesti säätöteoriaan piiristä. Olennainen nykyalgoritmeihin periytynyt oivallus varhaisissa suodinalgoritmeissa oli tärkeytsotannan käyttö halutun jakaumaestimaatin laskennassa. Tärkeytsotanta-algoritmiin voidaan turvautua, kun emme pysty suoraan tekemään havaintoja jostakin jakaumasta p ja teemme sen sijaan havaintoja jakaumasta q , jota painotamme niin, että tuloksena saadaan jakauman p harhaton estimaatti. Algoritmi on kuvattu tarkemmin tutkielman luvussa 2.

Tärkeytsotantaa käyttävä suodinongelman ratkaiseva SIS-algoritmi (*sequential importance sampling*) ei kuitenkaan vielä 70-luvulla löytänyt suurta käytännön suosiota. Osin tämä johtui puutteellisesta laskentatehosta, mutta algoritmi kärsi myös otosten ehtymisenä (*sample impoverishment*) tunnetusta ongelmasta. Monissa ongelmissa SIS-algoritmia käytettäessä suuri osa painoista päättyy vain tietyille partikkeleille, jolloin vastaavasti suuri osa partikkeleista ei enää estimoi haluttua

jakaumaa. Tähän ongelmaan palataan myöhemmin.

Merkittävän ratkaisun ehtymisongelmaan esittivät Gordon, Salmond ja Smith artikkelissaan “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation” (1993). [10] Artikkelin ratkaisu kulki nimellä *bootstrap filter*, saapasremmisuodin. Saapasremmisuodin vältti ehtymisen uudellenotannalla, jossa matalapainoiset partikkelit korvattiin otoksilla korkeapainoisemmista partikkeleista. Ratkaisussa painot eivät myöskään riippuneet partikkelien aiemmista poluista vaan ainoastaan havaintojen uskottavuusfunktioista. Vastaavaa ratkaisua käytetään tämän tutkielman uudemmasa SIR-algoritmissa (*sampling importance resampling*), jossa myös uudelleenotantaan sovelletaan tärkeytsotantaa.

Sekventiaalisissa Monte Carlo -menetelmissä stokastisen prosessin posteriorijakauman esittämiseen käytettyjä otoksia kutsutaan myös partikkeleiksi tai hiukkasiksi ja menetelmiä siten hiukkassuotimiksi. Erityisesti myöhemmin esitettävää SIR-algoritmia kutsutaan usein hiukkassuotimeksi. Termiä hiukkassuodin käytti ensimmäisen kerran Del Moral artikkelissa “Nonlinear Filtering: Interacting Particle Resolution” (1996) [19], SMC-menetelmät termiä Liu ja Chen artikkelissa “Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems” (1998) [17]. Tässä tutkielmassa käytetään yleisemmin käytettyä termiä hiukkassuotimet.

1.4 Monte Carlo -menetelmistä

Tässä alaluvussa kuvataan lyhyesti hiukkassuotimissa käytettävien Monte Carlo -menetelmien peruseriaate todennäköisyysjakauman estimoinnissa. Lisäksi esitetään tärkeytsotanta-algoritmi (*importance sampling*), jonka tarkoituksena on estimoida harhattomasti jakaumaa $p(x|y_{1:k})$, josta emme voi suoraan tehdä otoksia, mutta jota voimme approksimoida toisella jakaumalla q . Esitykset noudattavat Särkkää (2013) [26].

1.4.1 Monte Carlo -approksimaatio

Bayesilaisessa päätelyssä ollaan yleisesti kiinnostuttu laskemaan johonkin posterioritiheysjakaumaan p liittyvää odotusarvoa

$$\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] = \int g(x)p(x|y_{1:k})dx, \quad (1.6)$$

missä g on tila-avaruuden mielivaltainen funktio ja $p(x|y_{1:t})$ on havaintoihin $\{y_1, \dots, y_k\}$ liittyvä x :n posterioritiheysjakauma. Odotusarvo on laskettavissa suljetussa muodossa vain harvoissa tapauksissa, suodinongelman kohdalla silloin, kun kyseessä on lineaarinen ja Gaussinen malli. Odotusarvoa voidaan kuitenkin approksimoida niin sanoituilla Monte Carlo -menetelmillä. Menetelmien peruseriaate on tehdä riippumattomia otoksia estimoitavasta jakaumasta ja laskea haluttu odotusarvo otosten avulla. Jos tehdään N otosta jakaumasta $x^i \sim p(x|y_{1:t})$, missä $i = \{1, \dots, N\}$ saadaan näiden otosten avulla laskettua odotusarvon estimaatti

$$\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x^i). \quad (1.7)$$

Monte Carlo -estimaatti konvergoi keskeisen raja-arvolauseen nojalla ja sen estimointivirheen voidaan osoittaa olevan luokkaa $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$ riippumatta tilamuuttujan x dimensiosta. Hiukassuotimet hyödyntävät Monte Carlo -estimointia sekventiaalisesti, jolloin estimaatti lasketaan rekursiivisesti kullekin ajanhetkelle $k = \{1, \dots, t\}$. Tähän palataan luvuissa 3 ja 4.

1.4.2 Tärkeytysotanta

Tilanteessa, jossa Monte Carlo -otoksia ei voida tehdä suoraan jakaumasta p , voidaan hyödyntää jakaumaa p approksimoivaa tärkeytys- tai ehdotusjakaumaa $q(x|y_{1:k})$ sekä ns. tärkeytysotantaa. Oletetaan, että tunnetaan priorijakauma $p(x)$ ja on olemassa havaintomalli $p(y_{1:k}|x)$ sekä valittu ehdotusjakauma $q(x|y_{1:k})$, josta voidaan tehdä otoksia. Ehdotusjakaumalta edellytetään lisäksi, että sen kantaja on suurempi tai yhtä suuri kuin jakauman $p(x|y_{1:k})$ ja että se saa nollasta poikkeavia arvoja kaikkialla missä $p(x|y_{1:k})$ saa nollasta poikkeavia arvoja. Kirjoitetaan halutun posteriorijakauman odotusarvo integraalina

$$\int g(x)p(x|y_{1:k})dx = \int g(x)\frac{p(x|y_{1:k})}{q(x|y_{1:k})}q(x|y_{1:k})dx, \quad (1.8)$$

jolle voidaan muodostaa Monte Carlo -approksimaatio tekemällä N otosta jakaumasta $x^i \sim q(x|y_{1:k})$.

Muodostetaan näin odotusarvo

$$\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(x^i|y_{1:k})}{q(x^i|y_{1:k})} g(x^i) = \sum_{i=1}^N w^i g(x^i), \quad (1.9)$$

missä $g(x)$ on jokin estimoinnissa hyödyllinen, mielivaltainen funktio. Tutkielmassa käytetty notaatio x_k^i viittaa ajanhetken k partikkeliin i , missä $i = \{1, \dots, N\}$. Tärkeytysotantaa kuvaa nyt algoritmi (1). Kun posteriorijakauman estimaatti muodostetaan kyseisellä algoritmilla voidaan tulos kirjoittaa

$$\hat{p}(x|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w^i \delta(x - x^i), \quad (1.10)$$

missä $\delta(x)$ on Diracin deltafunktio.

Algoritmi 1: Tärkeytysotanta

```
begin
  for  $i = 1, 2, \dots, N$  do
    begin
      Otetaan  $N$  otosta ehdotusjakaumasta  $x^i \sim q(x|y_{1:k})$ .
    begin
      Lasketaan normalisoimattomat painot  $w_*^i = p(y_{1:k}|x^i)p(x^i)/q(x^i|y_{1:k})$ .
      ja normalisoidut painot  $w^i = w_*^i / \sum_{j=1}^N w_*^j$ .
    begin
      Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio
       $\mathbb{E}[g(x)|y_{1:k}] \simeq \sum_{i=1}^N w^i g(x^i)$ .
```

1.5 Bayesilainen suodin

Suodinongelmassa ollaan kiinnostuttu tilavektorin posteriorijakauman $p(x_k|y_{1:k})$ estimoinnista. Tässä alaluvussa käydään läpi yleinen rekursiivinen, Bayesilainen posteriorijakauman laskenta. Tällaista suodinongelman ratkaisua kutsutaan myös Bayesilaiseksi suotimeksi. Koska epälineaarisessa, ei-normaalijakautuneessa tilanteessa rekursiota ei voida laskea analyttisesti, pitää estimoinnissa käyttää numeerisia menetelmiä. SMC-menetelmissä tämä tarkoittaa jakauman sekventiaalista Monte Carlo -approksimointia, jonka toteutus esitetään alaluvun 4 algoritmissa. Molemmat esitykset noudattavat Gustafssonia (2010).

Bayesilainen ratkaisu tilavektorin posteriorijakauman estimaatille $\hat{p}(x_k|y_{1:k})$ saadaan seuraavalla rekursiolla (käydään läpi jokaiselle ajanhetkelle $k = \{1, \dots, t\}$). Lasketaan ensin

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \quad (1.11)$$

joka saadaan suoraan Bayesin kaavasta $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$. Normalisointivakio lasketaan integraalina

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k, \quad (1.12)$$

joka saadaan kokonaistodennäköisyyskaavasta $P(A) = \mathbb{E}[P(A|X)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x)f_X(x) dx$. Merkintä \mathbb{R}^{n_x} vastaa tässä piilossa olevan tilavektorin dimensiota n .

Lopuksi lasketaan päivitysaskel ajalle, joka saadaan edelleen kokonaistodennäköisyydellä

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k}) dx_k. \quad (1.13)$$

Rekursio avulla voimme laskea jakauman $p(x_k|y_{1:k})$ estimaatti käymällä rekursion läpi k kertaa.

1.6 Kalman-suotimen ja hiukassuotimen yhteydestä ja eroista

Tässä alaluvussa käsitellään lyhyesti Kalman-suotimen yhteyttä hiukassuotimeen edellä esitetyn teorian valossa. Esitys noudattaa Särkkää (2013). [26] Merkitään kuten edellä dynaamista mallia x_k ja havaintomallia y_k ja oletetaan toisin kuin edellä, että nämä ovat lineaarisia ja noudattavat normaalijakaumaa. Koska mallit ovat lineaarisia, voidaan ne nyt kirjoittaa muotoon

$$x_k = \mathbf{A}_{k-1}x_{k-1} + q_{k-1}, \quad (1.14)$$

$$y_k = \mathbf{H}_k x_k + r_k \quad (1.15)$$

missä \mathbf{A}_{k-1} on dynaamisen mallin tilasiirtymään kuvaava matriisi ja \mathbf{H}_k on havaintojen mallimatriisi. Normaalisuusoletuksesta puolestaan seuraa, että sekä mallin että prosessin kohinavektorit noudattavat normaalijakaumia $q_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_{k-1})$ ja $r_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$, missä \mathbf{Q}_{k-1} ja \mathbf{R}_k ovat kovarianssimatriiseja. Lisäksi oletetaan, että prosessin priorijakauma on normaali eli $x_0 \sim \mathcal{N}(m_0, \mathbf{P}_0)$. Mallit voidaan nyt kirjoittaa tiheysfunktio muodossa

$$p(x_k | x_{k-1}) = \mathcal{N}(x_k | \mathbf{A}_{k-1}x_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (1.16)$$

$$p(y_k | x_k) = \mathcal{N}(y_k | \mathbf{H}_k x_k, \mathbf{R}_k), \quad (1.17)$$

joista voidaan edelleen johtaa suodinongelman mallit

$$p(x_k | y_{1:k-1}) = \mathcal{N}(x_k | m_k^*, \mathbf{P}_k^*) \quad (1.18)$$

$$p(x_k | y_{1:k}) = \mathcal{N}(x_k | m_k, \mathbf{P}_k) \quad (1.19)$$

$$p(y_k | y_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k | \mathbf{H}_k m_k^*, \mathbf{S}_k) \quad (1.20)$$

ja ongelma ratkaista näin algoritmilla 2.

Algoritmi 2: Kalman-suodin

Result: Posteriorijakauman $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ estimaatti.

Data: Havainnot y_k . Priorijakauman x_0 keskiarvovektori m_0 ja kovarianssimatriisi \mathbf{P}_0 .

```
begin
  for  $k = \{1, 2, \dots, t\}$  do
    begin
      Ennusteaskel.
       $m_k^* = \mathbf{A}_{k-1}m_{k-1}$ 
      if  $k < t$  then
        begin
          Päivitysaskel.
           $v_k = y_k - \mathbf{H}_k m_k^*$ 
           $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^* \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k$ 
           $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^* \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1}$ 
           $m_k = m_k^* + \mathbf{K}_k v_k$ 
           $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^* - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^\top$ 
        end
      end
    end
  end
```

Esitetty algoritmi on ns. Kalman-suodin, joka selkeästi toimii suodinongelman ratkaisuna, kun mallit ovat haluttua lineaarista normaalimuotoa. Jos tämä oletus ei täyty, on Kalman-suotimesta kehitetty useita versioita, joissa ei-lineaarinen malli voidaan linearisoida tiettyjen ehtojen vallitessa.

Tämän alaluvun tarkoituksena oli esittää, että Kalman-suotimessa ongelma on samaa muotoa kuin hiukassuotimessa, joten linearisoituja Kalman-suotimia ei tässä käsitellä. Hiukassuodin myös ratkaisee ongelman mille hyvänsä epälineaarille mallille.

Luku 2

Hiukassuotimet

2.1 SIR-algoritmi

Tässä alaluvussa esitetään SMC-menetelmiin kuuluva SIR-algoritmi, epälineaarisen suodinongelman ratkaisemiseksi. Algoritmi on numeerinen toteutus luvussa 1.5 kuvatussa Bayesilaisesta suotimesta. Esitetty algoritmi perustuu Gustafssoniin (2010). Ilman uudelleenotantavaihetta kyseessä olisi SIS-algoritmi.

Algoritmi alustetaan jakaumasta $x_1^i \sim p_{x_0}$ generoiduilla N kappaleella partikkeleita. Jokaiselle partikkelille annetaan alustuksessa sama paino $w_{1|0}^i = 1/N$. Algoritmi suoritetaan jokaiselle partikkelille $i = \{1, 2, \dots, N\}$ jokaisella ajanhetkellä $k = \{1, 2, \dots, t\}$.

Seuraava toistetaan jokaiselle ajanhetkelle $k = \{1, 2, \dots, t\}$. Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa päivitetään painot yhtälön (2.1) mukaan.

$$w_{k|k}^i = \frac{1}{c_k} w_{k|k-1}^i p(y_k | x_k^i). \quad (2.1)$$

Tämä vastaa yllä esitetyn Bayes-suotimen päivitysvaihetta (1.11). Normalisointipaino c_k lasketaan puolestaan yhtälöstä (2.2), mikä vastaa Bayes-suotimen normalisointivaiheen laskemista (1.12) ja asettaa painojen summaksi $\sum_{i=1}^N w_{k|k}^i = 1$.

$$c_k = \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i p(y_k | x_k^i). \quad (2.2)$$

Seuraavassa vaiheessa estimoidaan p laskemalla tiheyden $p(x_{1:k} | y_{1:k})$ Monte Carlo -estimaatti yhtälön (2.3) perusteella

$$\hat{p}(x_{1:k} | y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i). \quad (2.3)$$

Tämän jälkeen suoritetaan valinnainen uudelleenotanta. Uudelleenotanta voidaan tehdä jokaisella askeleella tai efektiivisen otoskoon perusteella alla kuvatun

kynnysarvoehdon $\hat{N}_{eff} < N_{th}$ täytessä, jolloin uudelleenotantaa kutsutaan adaptiiviseksi uudelleenotannaksi. Tällaista uudelleenotantaa hyödynnetään esitetyssä algoritmissa (3). Lopuksi päivitetään aika (jos $k < t$), luodaan uudet ennusteet partikkeleille ehdotusjakaumasta (2.4)

$$x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1}) \quad (2.4)$$

ja päivitetään partikkelien painot tärkeytysotannalla (2.5), sen mukaan kuinka todennäköisiä partikkelien ennusteet ovat

$$w_{k+1|k}^i = w_{k|k}^i \frac{p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})}. \quad (2.5)$$

Vaiheet 2.4 ja 2.5 vastaavat Bayes-suotimen aikapäivitystä (1.13).

Alla käsitellään algoritmiin liittyvän uudelleenotantamenetelmän, partikkelien määrän ja ehdotusjakauman valinta. Lopuksi esitetään algoritmin konvergenssia, marginaalijakaumaa sekä aikakompleksisuutta koskevia tuloksia.

Algoritmi 3: SIR

Result: Posteriorijakauman $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ estimaatti.

Data: Havainnot y_k . Generoitu $x_1^i \sim p_{x_0}$ missä $i = \{1, \dots, N\}$ ja jokainen partikkeli saa saman painon $w_{1|0}^i = 1/N$.

```
begin
  for  $k = \{1, 2, \dots, T\}$  do
    for  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  do
      begin
        Päivitetään painot  $w_{k|k}$ .
      begin
        Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio
         $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i)$ .
      begin
        Lasketaan efektiivinen otoskoko  $\hat{N}_{eff}$ .
      if  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  then
        begin
          Otetaan uudet  $N$  otosta palauttaen joukosta  $\{x_{1:k}^i\}_{i=1}^N$ , missä
          otoksen  $i$  todennäköisyys on  $w_{k|k}^i$ .
        begin
          Asetetaan painot  $w_{k|k}^i = 1/N$ .
        if  $k < T$  then
          begin
            Aikapäivitys.
            Luodaan ennusteet partikkeleille ehdotusjakaumasta
             $x_{k+1}^i \sim q(x_{k+1}|x_k^i, y_{k+1})$ ,
            päivitetään partikkelien painot tärkeytysotannalla.
```

2.1.1 Parametrien valinta

Ennen algoritmin suorittamista valitaan ehdotusjakauma $q(x_{k+1}|x_{1:k}, y_{k+1})$, uudelleenotantamenetelmä sekä partikkelien määrä N . Ehdotusjakauman ja uudelleenotantamenetelmän valinnassa tärkeimpänä päämääränä on välttää otosten ehtymistä, kun taas partikkelien määrä säätelee kompromissia algoritmin suorituskyvyn ja tarkkuuden välillä.

2.1.1.1 Otoksoon N valinta

Yleispätevää sääntöä otoskoon/partikkelien lukumäärän N valinnalle on vaikeaa antaa, sillä vaadittava estimointitarkkuus riippuu usein käsillä olevasta ongelmasta. Gordon & al. (1993) esittävät kuitenkin kolme tekijää, jotka vaikuttavat partikkelien lukumäärän valintaan

- tila-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä n_x ,

- b. tyypillinen päällekkäisyys priorin ja uskottavuuden välillä
- c. sekä tarvittava aika-askelten lukumäärä.

Ensimmäisen tekijän vaikutus on selvä. Mitä useammassa ulottuvuudessa otantaa tarvitsee tehdä, sen korkeammaksi on N asetettava, jotta jokainen ulottuvuus pystytään kattamaan. Tekijät (b) ja (c) puolestaan seuraavat uudelleenotannasta. Jos se osa tila-avaruutta, jossa uskottavuus $p(y_k|x_k)$ saa merkittäviä arvoja on pieni verrattuna siihen osaan, jossa priorijakauma $p(x_k|y_{1:k-1})$ saa merkittäviä arvoja, suuri osa partikkeleista saa pieniä painoja eikä näin valikoidu uudelleenotantaan.

Yleisesti ottaen N kannattaa asettaa sellaiseksi, että se paitsi tuottaa riittävän tarkan estimaatin, on se käytettävissä olevan laskentatehon sekä vaadittavan laskentanopeuden kannalta järkevää. Tähän palataan tutkielman lopuksi empiirisessä paikannusesimerkissä.

2.1.1.2 Uudelleenotantamenetelmän valinta

Ilman uudelleenotantaa on mahdollista, että algoritmi alkaa kärsiä SIS-algoritmile ominaisesta otosten ehtymisestä. Toisin sanoen kaikki painot alkavat keskittyä vain muutamalle partikkelille eikä algoritmi enää approksimoi tehokkaasti haluttua jakaumaa. Uudelleenotanta tarjoaa osittaisen ratkaisun tähän ongelmaan, mutta hävittää samalla informaatiota ja siten lisää satunnaisotantaan liittyvää epävarmuutta. Yleisesti ottaen uudelleenotanta kannattaa aloittaa vasta siinä vaiheessa algoritmin suorittamista, kun siitä on otosten ehtymisen kannalta hyötyä, esimerkiksi efektiivisen otoskoon pudottua jonkin kynnysarvon alapuolelle (adaptiivinen uudelleenotanta). Efektiivinen otoskoko saadaan laskettua variaatiokertoimesta c_ν kaavalla

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + c_\nu^2(w_{k|k}^i)} = \frac{N}{1 + \frac{\text{Var}(w_{k|k}^i)}{(\mathbb{E}[w_{k|k}^i])^2}} = \frac{N}{1 + N^2 \text{Var}(w_{k|k}^i)}. \quad (2.6)$$

Näin laskettu efektiivinen otoskoko maksimoituu ($N_{eff} = N$), kun kaikille painoille pätee $w_{k|k}^i = 1/N$ ja minimoituu ($N_{eff} = 1$), kun $w_{k|k}^i = 1$ todennäköisyydellä $1/N$ ja $w_{k|k}^i = 0$ todennäköisyydellä $(N-1)/N$. Normalisoitujen painojen avulla saadaan efektiiviselle otoskoolle ajanhetkellä k laskennallinen approksimaatio

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_{k|k}^i)^2}. \quad (2.7)$$

Sekä määritelmälle (2.6) että (2.7) pätee $1 \leq \hat{N}_{eff} \leq N$. Yläraja saavutetaan, kun jokaisen partikkelin paino on sama. Alarajalle päädytään, kun kaikki paino keskittyy yksittäiselle partikkelille. Tästä saadaan määriteltyä algoritmille SIR-uudelleenotantaehto $\hat{N}_{eff} < N_{th}$. Gustafsson (2010) [13] esittää uudelleenotannan kynnysarvoksi esimerkiksi $\hat{N}_{th} = 2N/3$.

Uudelleenotanta ei muuta approksimoitavan jakauma p odotusarvoa, mutta se lisää jakauman Monte Carlo -varianssia. On kuitenkin olemassa esimerkiksi osittamiseen perustuvia uudelleenotantamenetelmiä, jotka pyrkivät minimoimaan varianssin lisäyksen. Varianssin pienennysmenetelmät jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle.

2.1.1.3 Ehdotusjakauman valinta

Yksinkertaisin muoto ehdotusjakaumalle on $q(x_{1:k}|y_{1:k})$ eli jokaisella algoritmin suorituskerralla käydään läpi koko aikapolku $1:k$. Tämä ei kuitenkaan ole tarkoituksenmukaista, erityisesti jos kyseessä on reaaliaikainen sovellutus. Kirjoitetaan ehdotusjakauma muodossa

$$q(x_{1:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})q(x_{1:k-1}|y_{1:k}). \quad (2.8)$$

Jos yhtälöstä (2.8) poimitaan ehdotusjakaumaksi ainoastaan termi $q(x_k|x_{1:k-1}, y_{1:k})$ voidaan tämä kirjoittaa edelleen Markov-ominaisuuden nojalla muotoon $q(x_k|x_{k-1}, y_k)$. Tämä on suodinongelman kannalta riittävää, koska olemme kiinnostuneita posteriorijakaumasta ja arvosta x ainoastaan ajanhetkellä k (tasoitusongelmassa tarvitsisimme koko polun $x_{1:k}$). Alla tarkastellaan edelleen Gustafssonia (2010) [13] seuraten kahta ehdotusjakauman valintatapaa, prioriotantaa (*prior sampling*) sekä uskottavuusotantaa (*likelihood sampling*).

Ennen ehdotusjakauman tarkastelua määritellään mallille signaali-kohinasuhde uskottavuuden maksimin ja priorin maksimin välisenä suhteena

$$\text{SNR} \propto \frac{\max_{x_k} p(y_k|x_k)}{\max_{x_k} p(x_k|x_{k-1})}. \quad (2.9)$$

Yhdistetään lisäksi ehdotusjakaumia varten yhtälöt (2.1) ja (2.2), jolloin saadaan painojen päivitys muotoon

$$w_{k|k}^i \propto w_{k-1|k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k|x_{k-1}^{k-1})}{q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)}. \quad (2.10)$$

Kun suhde (2.9) on matala, on prioriotanta luonnollinen valinta. Tässä käytetään ehdotusjakaumana tilavektorin ehdollista prioria eli

$$q(x_k|x_{1:k-1}, y_k) = p(x_k|x_{k-1}^i). \quad (2.11)$$

Yhtälön (2.11) perusteella saadaan edelleen prioriotannan painoiksi

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_k^i) = w_{k-1|k-1}^i p(y_k|x_{k-1}^i). \quad (2.12)$$

Kun signaali-kohinasuhde on kohtalainen tai korkea, on parempi käyttää ehdotusjakaumana skaalattua uskottavuusfunktioita (2.14). Tarkastellaan ensin tekijöihin jakoa

$$p(x_k|x_{k-1}^i, y_k) = p(y_k|x_k) \frac{p(x_k|x_{k-1}^i)}{p(y_k|x_{k-1}^i)}. \quad (2.13)$$

Kun SNR on korkea ja uskottavuusfunktio on integroitava pätee $p(x_k|x_{k-1}^i, y_k) \propto p(y_k|x_k)$, jolloin voidaan asettaa (2.14)

$$q(x_k|x_{k-1}^i, y_k) \propto p(y_k|x_k). \quad (2.14)$$

Yhtälön (2.14) perusteella saadaan edelleen uskottavuusotannan painoiksi (2.15).

$$w_{k|k}^i = w_{k-1|k-1}^i p(x_k^i|x_{k-1}^i). \quad (2.15)$$

2.1.2 Konvergenssituloksia

Alla esitetään kaksi SIR-algoritmiin liittyvää konvergenssitulosta. Se, kuinka hyvin esitetyllä algoritmilla arvioitu posterioritiheys $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$ approksimoi todellista tiheysfunktioita $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ sekä mikä on approksimaation keskineliövirhe. Tulokset 1–2 noudattavat Crisanin ja Doucet’n artikkeleita “Convergence of Sequential Monte Carlo Methods” (2000) [6] ja “A Survey of Convergence Results on Particle Filtering Methods for Practitioners” (2002) [7], tulos 3 Chopinin artikkelia “Central limit theorem for sequential Monte Carlo methods and its application to Bayesian inference” (2004) [4].

Konvergenssitulos 1: Kun $N \rightarrow \infty$ algoritmille pätee $\forall k$ tulos (2.16).

$$\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) \xrightarrow{a.s.} p(x_{1:k}|y_{1:k}). \quad (2.16)$$

Konvergenssitulos 2: Keskineliövirheelle pätee asymptoottinen konvergenssi (2.17).

$$\mathbb{E}(\hat{g}(x_k) - \mathbb{E}(g(x_k)))^2 \leq \frac{p_k \|g(x_k)\|}{N}, \quad (2.17)$$

missä g on mikä hyvänsä piilossa olevan tila-avaruuden rajoitettu Borel-mitallinen funktio ($g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$), $\|g(\cdot)\|$ kyseisen funktion supremum-normi ja p_k jokin äärellinen vakio, jolle pätee ajanhetkestä k riippumatta $p_k = p < \infty$.

Konvergenssitulos 3: Keskeinen raja-arvolause (2.18).

$$\text{Kun } N \rightarrow \infty : \sqrt{N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{g}(x_k^i) - \mathbb{E}(g(x_k^i)) \right\} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2 < \infty), \quad (2.18)$$

missä g on jälleen mikä hyvänsä piilossa olevan tila-avaruuden rajoitettu Borel-mitallinen funktio ($g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$). Konvergenssituloksia ei tämän tutkielman puitteissa todisteta.

2.1.3 Marginaalijakauma

Edellä kuvattu algoritmi 3 tuottaa approksimaation koko prosessin posteriorijakaumalle $p(x_{1:k}|y_{1:k})$. Jos halutaan tietää ainoastaan posteriorijakauman $p(x_k|y_{1:k})$ estimaatti, voidaan käyttää yksinkertaisesti viimeisestä tilasta x_k laskettua estimaattia

$$\hat{p}(x_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_k - x_k^i). \quad (2.19)$$

Toinen, tarkempi vaihtoehto on käyttää laskennassa tärkeytyspainoa

$$w_{k+1|k}^i = \frac{\sum_{j=1}^N w_{k|k}^j p(x_{k+1}^i|x_k^j)}{q(x_{k+1}^i|x_k^i, y_{k+1})} \quad (2.20)$$

painon (2.5) sijaan. Tällöin jokaisella aikapäivitysaskeleella lasketaan painot kaikkien mahdollisten tila-aika-avaruuspolkujen yli. Samoin kuin uudelleenotanta tämä pienentää painojen varianssia.

2.1.4 Aikakompleksisuus

Algoritmin perusmuodon aikakompleksisuus on $\mathcal{O}(N)$. Uudelleenotantamenetelmän tai ehdotusjakauman valinta ei suoraan vaikuta aikakompleksisuuteen. Sen sijaan marginalisointi tärkeytyspainolla (2.20) lisää algoritmin aikakompleksisuutta $\mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N^2)$, koska jokaisen partikkelin kohdalla painot lasketaan jokaisen tila-aika-avaruuspolun yli. On selvää, että erityisesti isoilla otoskoon N arvoilla ei yllä esitetty marginalisointi enää ole mielekäästä.

Tällaisia tilanteita varten algoritmista on olemassa $\mathcal{O}(N \log(N))$ -versioita, jotka perustuvat esimerkiksi N:n kappaleen oppimiseen (*N-body learning*). Näiden algoritmien käsittely jää tämän tutkielman ulkopuolelle, mutta katsauksen algoritmeista ovat esittäneet esimerkiksi Klaas & al. artikkelissa “Toward Practical N^2 Monte Carlo: the Marginal Particle Filter” (2012).

2.2 Saapasremmisuodin

Saapasremmisuodin 4 eli *bootstrap filter* on SIR-algoritmin muunnos, jossa tärkeytysotannon (kts. 1) käytetään dynaamista mallia $p(x_k|x_{k-1})$.

Algoritmi 4: Saapasremmisuodin

Result: Posteriorijakauman $p(x_{1:k}|y_{1:k})$ estimaatti.

Data: Havainnot y_k . Generoitu $x_1^i \sim p_{x_0}$ missä $i = \{1, \dots, N\}$ ja jokainen partikkeli saa saman painon $w_{1|0}^i = 1/N$.

```
begin
  for  $k = \{1, 2, \dots, t\}$  do
    for  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  do
      begin
        Luodaan uudet estimaatit dynaamisesta mallista  $x_k^i \sim p(x_k|x_{k-1}^i)$ .;
      begin
        Päivitetään hiukkasten painot  $w_k^i$  uskottavuusfunktion  $p(y_k|x_k^i)$ 
        mukaan.
      begin
        Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio
         $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i)$ .
      if  $k < t$  then
        begin
          Aikapäivitys. Suoritetaan uudelleenotanta kuten SIR-algoritmissa
          3.
        end
      end
    end
  end
```

Saapasremmisuodin on edellä esitettyä SIR-algoritmia yksinkertaisempi toteuttaa, mutta epäinformatiivisen tärkeytsjakauman vuoksi algoritmi saattaa vaatia SIR-algoritmia suuremman määrän hiukkasia. Saapasremmisuodin esitetään tässä sen historiallisen tärkeyden vuoksi, sillä kyseessä oli ensimmäinen uudelleenotataa hyödyntävä hiukassuodinalgoritmi. Suotimen käytännön toteutukseen palataan luvussa 4.

2.3 Varianssin estimoinnista

Hiukassuotimen varianssin estimoinnissa ollaan kiinnostuneita jakaumaestimaatin $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$ varianssin estimoinnista. Yksinkertaisin tapa estimoida hiukassuodinalgoritmin varianssia on ajaa algoritmi $M > 1$ kertaa. Koska ajot ovat toisistaan riippumattomia, voidaan estimaatin varianssi laskea kullekin ajanhetkelle k näiden ajojen k -hetken estimaattien otosvarianssina:

$$\hat{\sigma}_{MC}^2 = \text{Var}_{MC}(\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (x_k^i - \bar{x}_k)^2, \quad (2.21)$$

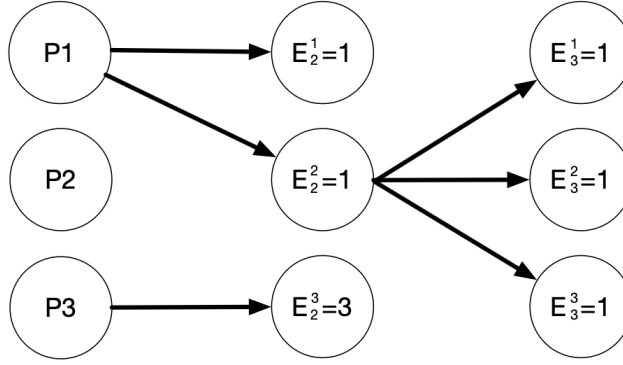
missä x_k^i on k :nen ajanhetken piste-estimaatti ajolle $i = 1, \dots, M$ ja \bar{x}_k piste-estimaattien aritmeettinen keskiarvo laskettuna kaikkien M ajojen yli. Tällaisen Monte Carlo -varienssin estimointi on kuitenkin laskennallisesti tehotonta. Monissa käytännön sovelluksissa jo yhden hiukassuodinalgoritmin ajaminen vaatii runsaasti laskentatehoa, jolloin Monte Carlo -varienssin laskeminen ei ole mahdollista. Varians-

sia ei voi myöskään laskea analyttisesti, mutta koska keskeisen raja-arvolauseen 2.18 nojalla tiedetään, että asymptoottinen varianssi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\hat{g}(x_k^i)), \quad (2.22)$$

on olemassa, on sen estimointiin kehitetty lähivuosina joitakin menetelmiä. Alla käsitellään Leen ja Whitleyn (2018) ehdottamaa varianssin estimointitapaa. [16]

Ajetaan SIR-algoritmi kuten esitetty algoritmissa 3, mutta merkitään kullakin algoritmin suorituskerralla $k = 1, \dots, T$ ja jokaisen partikkelin $n = 1, \dots, N$ kohdalla indeksillä E_k^n kunkin partikkelin kantaisää eli toisin sanoen sitä partikkelia, josta kyseinen partikkeli on uudelleenotantojen kalta polveutunut ajanhetkestä $k = 1$ lähtien. Kaavio 2.1 havainnollistaa partikkelien polveutumista.



Kuva 2.1: Esimerkki Eeva-indekseistä, kun $T = 3$ ja $N = 3$.

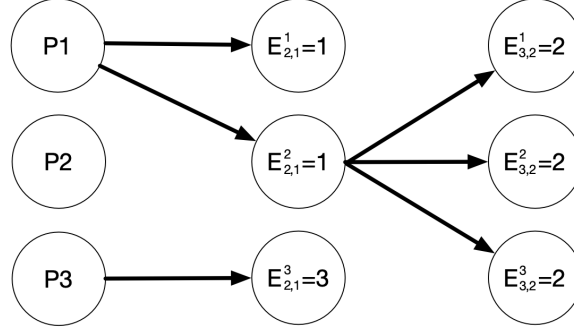
Varianssiestimaatti voidaan laskea näiden, Leen ja Whitleyn Eeva-indekseiksi nimeämien indeksien perusteella seuraavasti:

$$\hat{\sigma}_{CLT}^2 = \frac{1}{N^2} \left[\left(\sum_{i=1}^N \gamma(x_k^i) \right)^2 - \left(\frac{N}{N-1} \right)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j: E_n^j=i} \gamma(x_k^i) \gamma(x_k^j) \right) \right], \quad (2.23)$$

missä $\gamma : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu, \mathcal{X}_n -mitallinen funktio. SIR-algoritmin kohdalla jakaumaestimaatti $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k})$. Kyseessä on harhaton ja konsistentti asymptoottisen varianssin estimaatti. Tarkemmin $N\hat{\sigma}_{CLT}^2$ konvergoi asymptoottiseen varianssiin 2.22. Tätä ei tutkielman puitteissa todisteta.

Yllä esitetty varianssiestimaatti kärsii kuitenkin epätarkkuudesta, sillä kun $k \rightarrow \infty$ polveutuvat kaikki hiukkaset lopulta samasta kantaisästä eli indeksit E_k^i, \dots, E_k^N ovat kaikki yhtäsuuria. Tämän vuoksi on mielekästä johtaa indeksit ainoastaan tietystä aiemmasta ajanhetkestä alkaen. Olsson ja Douc (2019) [23] ehdottavat tähän tarkoitukseen Henok-indeksiä $E_{k,m}^n$, jossa m merkitsee ajanhetken $m < k$ partikkelia, josta kyseinen partikkeli polveutuu. Partikkelien kantaisien sukupolvi määritetään

viipeellä λ niin, että $m = k - \lambda$. Kaavio 2.2 havainnollistaa partikkelien polveutumista, kun $\lambda = 1$.



Kuva 2.2: Esimerkki Henok-indekseistä, kun $T = 3$, $N = 3$ ja $\lambda = 1$.

Nyt varianssi saadaan muotoon

$$\hat{\sigma}_{OD}^2 = \frac{1}{N^2} \left[\left(\sum_{i=1}^N \gamma(x_k^i) \right)^2 - \left(\frac{N}{N-1} \right)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j: E_{n,k(\lambda)}^j = i} \gamma(x_k^i) \gamma(x_k^j) \right) \right], \quad (2.24)$$

missä $k(\lambda) := k - \lambda$. Viive λ on varianssiestimaatin suunnitteluparametri. Pienillä viipeillä estimaatti on harhainen, mutta harha laskee viipeen kasvaessa. Olsson ja Douc suosittavat viipeen ylärajaksi arvoa $\lambda = 20$, jolloin estimaattorin harha on käytännössä kokonaan hävitetty. Tämän jälkeen estimaatti voi myös alkaa kärsiä samasta epätarkkuudesta kuin Eeva-indekseihin perustuva CLT-estimaatti.

Mastrototaro ja Olsson (2023) [18] laajentavat tätä estimaattia edelleen niin, että viive λ valitaan mukautuvasti. Mastrototaron ja Olssonin ALvar-estimaatti (*Adaptive-Lag variance*) lasketaan, kuten OD-varianssi edellä 2.24, mutta kunkin algoritmin ajokerran jälkeen asetetaan seuraavan ajanhetken λ seuraavasti:

$$\lambda_{k+1} \leftarrow \arg \max_{\lambda \in [0, \lambda_k + 1]} \hat{\sigma}_{k+1, \lambda}^2(\gamma_{k+1}), \quad (2.25)$$

Tämä perustuu havaintoon, jonka mukaan ehtyneille Henok-indekseille on olemassa $\lambda' \in [0, \lambda - 1]$, joka täyttää ehdon $\hat{\sigma}_{k+1, \lambda}^2(\gamma_{k+1}) < \hat{\sigma}_{k+1, \lambda'}^2(\gamma_{k+1})$, koska myös ehtyneiden indeksien kantaisät ovat ehtyneitä. Nyt indeksi λ_{n+1} voidaan valita rekursiivisesti niin, että se tuottaa suurimman varianssiestimaatin, joka on kuitenkin rajoitettu ylhäältä arvoon $\lambda_n + 1$. Tämä indeksi ei ole koskaan ehtynyt, joten se on myös parhaan varianssiestimaatin tuottava valinta.

Esitettyjä varianssiestimaatteja voidaan hyödyntää paitsi algoritmien ja parametrivalintojen vertailussa myös mukautuvan viipeen hiukkassiloittimen viipeen valinnassa (kts. luku 3). Varianssiestimaattia hyödynnetään myös luvun 4 empiirisen esimerkin uskottavuusfunktioiden parametrien estimoinnissa.

Luku 3

Hiukkassiloittimet

Tässä luvussa käsitellään suodinongelmaan läheisesti liittyvän hiukkassiloittimen ratkaisemista ns. hiukkassiloitinalgoritmien avulla. Kuten hiukkassuotimien kohdalla, myös tässä luvussa esitetään ongelma ensin yleisessä Bayesilaisessa muodossa, jonka jälkeen siirrytään käsittelemään hiukkasmenetelmiin pohjautuvia siloitinalgoritmeja. Luvussa käsiteltävät algoritmit jaetaan kahteen pääkategoriaan, offline-algoritmeihin, joita sovelletaan hiukkassuodinalgoritmin ajon jälkeen sekä online-algoritmeihin, jotka suoritetaan yhdessä hiukkassuodinalgoritmin kanssa.

Siloitinongelman esittely seuraa Särkkää (2013) [26]. Algoritmien käsittely pohjautuu SIR- ja BS-PS-siloittimien osalta Särkkään (2013) [26] sekä SIR-siloittimen osalta Genshiro Kitagawan artikkeliin “Monte carlo filter and smoother for non-gaussian nonlinear state space models” (1996) [15]. Kiinteän viipeen siloitin seuraa niin ikään Kitagawaa (1996). Uudelleenpainottava siloitin perustuu Doucet & al. artikkeliin “On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering” (2000) [9]. Mukautuvan viipeen siloitin seuraa puolestaan Alenlövin ja Olssonin artikkelia “Particle-Based Adaptive-Lag Online Marginal Smoothing in General State-Space Models” (2019) [1].

3.1 Bayesilainen siloitin

Bayesilaisen siloittimen tarkoitus on laskea tilan x_k marginaaliposteriorijakauma $p(x_k|y_{1:T})$ ajanhetkellä k , kun käytössä on havaintoja ajanhetkeen T asti, missä $T > k$. Ero Bayesilaiseen suotimeen (kts. alaluku 1.5) on siinä, että suodinongelmassa havaintoja on saatavilla ainoastaan ajanhetkeen k asti, kun taas siloitinongelmassa myös tulevat havainnot ovat saatavilla. Ajassa taaksepäin etenevät rekursiiviset yhtälöt ongelman ratkaisemiseksi voidaan esittää muodossa

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k}) dx_k. \quad (3.1)$$

$$p(x_k|y_{1:T}) = p(x_k|y_{1:k}) \int \frac{p(x_{k+1}|x_k)p(x_{k+1}|y_{1:T})}{p(x_{k+1}|y_{1:k})} dx_{k+1}. \quad (3.2)$$

,

missä $p(x_k|y_{1:k})$ on suodintiheys ajanhetkellä k ja $p(x_{k+1}|y_{1:k})$ prediktiivinen jakauma ajanhetkelle $k+1$. Kuten suodinongelman kohdalla, voidaan ongelma ratkaista suljetussa muodossa, kun mallit ovat lineaarisia. Tällöin kyseessä on Rauch-Turn-Striebel-siloitin (RTSS), josta käytetään myös nimitystä Kalman-siloitin. Samoin, kuten Kalman-suotimen kohdalla, ongelma voidaan tiettyjen ehtojen vallitessa linearisoida. Näitä linearisoituja suodattimia ei käsitellä tässä tutkielmassa. hiukkassuotimen tavoin hiukkassiloitin ratkaisee ongelman mille hyvänsä epälineaarille mallille.

3.2 Offline-algoritmit

Offline-siloittimet estimoivat siloitintihyettä ajanhetkellä $k < T$, kun havaintodata on käytössä koko ajanjaksolta $1 \dots T$. Alla esitetyt algoritmit siis olettavat, että kaikki mahdollinen tuleva data on jo niiden käytössä. Ohessa käsitellään lyhyesti muutamia ehdotettua offline-hiukkassiloitinalgoritmia.

3.2.1 SIR-siloitin

Kuten aiemmin mainittua, näyttävät hiukkassuodinalgoritmit, erityisesti SIR-algoritmi [3], ratkaisevan siloiteluongelman ilmaiseksi, kunhan tallennamme ajanhetkellä k koko otoshistorian $x_{0:k}^i$. Tällöin voimme estimoida täyttä siloitteposteriorijakaumaa seuraavasti:

$$p(x_{0:T}|y_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N w_T^i \delta(x_{0:T} - x_{0:T}^i). \quad (3.3)$$

Nyt ajanhetken k siloitinjakauma saadaan laskettua

$$p(x_k|y_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N w_T^i \delta(x_k - x_k^i), \quad (3.4)$$

missä x_k^i on $x_{0:T}^i$:n k :s elementti. Koska uudelleenotanta hävittää otoshistorian, pitää uudelleenotanta suorittaa koko otoshistoriasta $x_{0:k}^i = (x_{0:k-1}^i, x_k^i)$ pelkän ajanhetken k otoksen x_k^i sijaan. Koska nyt koko otoshistoria pitää tallentaa, vaatii SIR-siloitin NkT muistia pelkän N sijaan. Vastaavasti myös uudelleenotannan aikakompleksisuus kasvaa. [15]

SIR-siloittimen suurin ongelma on kuitenkin sen tuottamien estimaattien hyvyys. Kun ajanhetkien määrä kasvaa, johtaa koko otoshistorian uudelleenotanta kaiken painon kasautumiseen historian tietyille otoksille, jolloin SIR-siloittimen tuottamat estimaatit eivät enää estimoi haluttua (siloittelu)posteriorijakaumaa. [15]

3.2.2 BS-PS-siloitin

Backward-simulation particle smoother (BS-PS) eli taaksepäin simuloiva hiukkassiloitin estimoi paremmin hiukkassuotimen tulosten perusteella siloitinjakaumaa. Tässä algoritmossa hiukkasten historia simuloidaan ajanhetkestä T taaksepäin ajanhetkeen 0:

Algoritmi 5: Taaksepäin simuloiva hiukkassiloitin

Result: Posteriorisiloitinjakauman $p(x_k|y_{1:T})$ estimaatti.

Data: Suodinjakaumia edustavat hiukkaset ja näihin liittyvät painot w_k^i, x_k^i , missä $i = 1, \dots, N$ ja $k = 1, \dots, T$

```

begin
  begin
    Valitaan  $\tilde{x}_T = x_T^i$ 
  for  $k = \{T-1, \dots, 0\}$  do
    begin
      Lasketaan uudet painot
       $w_{k|k+1}^i \propto w_k^i p(\tilde{x}_{k+1}|x_k^i)$ 
    begin
      Valitaan  $\tilde{x}_k = x_k^i$  todennäköisyydellä  $w_{k|k+1}^i$ .
    end
  end
end

```

Nyt siloittelujakaumaa voidaan estimoida seuraavasti:

$$p(x_{0:T}|y_{1:T}) \approx \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \delta(x_{0:T} - \tilde{x}_{0:T}^i), \quad (3.5)$$

missä $S, j = 1, \dots, S$ on algoritmin 5 toistokertojen määrä. Koska $\tilde{x}_{0:T}^j$ pitää sisällään kaikki otospolut, saadaan marginaalijakauma ajanhetkellä k yhtälöstä 3.5 yksinkertaisesti valitsemalla sen k :net elementit. Sekä algoritmin aikakompleksisuus että muistivaade on $\mathcal{O}(STN)$.

3.2.3 Uudelleenpainottava hiukkassiloitin

Uudelleenpainottavassa hiukkassiloittimessa (tunnetaan myös nimellä marginaalihiukkassiloitin, kts. mm. Doucet, Godsill & ja Andrieu [9]) siloitinjakaumaa estimoidaan käyttämällä SIR-hiukkassuodattamista (3) saatuja hiukkasia, mutta ne painotetaan uudelleen käyttäen dataa ajanhetkestä T alkaen, edeten ajassa taaksepäin.

Algoritmi 6: Uudelleenpainottava hiukkassiloitin

Result: Posteriorisiloitinjakauman $p(x_k|y_{1:T})$ estimaatti.

Data: Suodinjakaumia edustavat hiukkaset ja näihin liittyvät painot w_k^i, x_k^i , missä $i = 1, \dots, N$ ja $k = 1, \dots, T$

```
begin
  begin
    Asetetaan  $w_{T|T}^i = w_T^i$ , jokaiselle  $i = 1, \dots, N$ ;
  for  $k = \{T-1, \dots, 0\}$  do
    begin
      Lasketaan uudet painot
       $w_{k|T}^i = \sum_j w_{k+1|T}^j \frac{w_k^i p(x_{k+1}^j | x_k^i)}{\sum_l w_k^l p(x_{k+1}^l | x_k^i)}$ 
    end
  end
end
```

jolloin halutun siloitinjakauma estimaatti ajanhetkellä k saadaan painotettuna keskiarvona $p(x_k|y_{1:T}) \approx \sum_i w_{k|T}^i \delta(x_k - x_k^i)$. Algoritmin aikakompleksisuus on $\mathcal{O}(N^2)$.

3.3 Online-algoritmit

Yllä esitetyt offline-suodinongelmat ratkaisevat suodinongelman niin, että kaikki data ajanhetkeen asti T on saatavilla. Käytännössä siloitin siis ajetaan suodin algoritmin jälkeen. Käytännön sovelluksissa tämä ei ole aina mahdollista, jos siloitteijakauman pitää olla saatavilla reaaliaikaisesti. Online-siloittimet ratkaisevat nyt siloitinongelman niin, että saatavilla on dataa ajanhetkeen $k + L \leq T$ asti, missä L on dataan lisätty L :n ajanhetken viive. Online-algoritmit voidaan edelleen jakaa kiinteään viipeen siloittimiin (*fixed-lag smoother*) ja mukautuvan viipeen siloittimiin (*adaptive-lag smoother*). Nimensä mukaisesta kiinteään viipeen siloitinalgoritmeissa viive L valitaan suunnitteluparametrina, kun taas mukautuvan viipeen siloitimet pyrkivät valitsemaan parhaan tai optimaalisen viipeen johonkin kriteeriin perustuen.

3.3.1 Kiinteän viipeen siloitin

Yksinkertaisin tapa toteuttaa kiinteän viipeen siloitin on yksinkertaisesti käyttää SIR-siloitinta niin, että maksimiajanhetki T korvataan valitulla viipeellä $k + L \leq T$. [15]. Nyt yhtälön 3.3 jakauma saadaan muotoon

$$p(x_{0:(k+L)}|y_{1:(k+L)}) \approx \sum_{i=1}^N w_{k+L}^i \delta(x_{0:(k+L)} - x_{0:(k+L)}^i), \quad (3.6)$$

ja nykyisen ajanhatken k siloitinjakauma lasketaan tästä jakaumasta kuten SIR-siloittimessa (kts. yhtälö 3.4). Kiinteän viipeen siloitin myös välttää SIR-siloittimen approksimaatio-ongelmat. Kun viipeelle L pätee $k + L \ll T$ parantaa viipeen pidettäminen tiettyyn pisteeseen asti jakauman approksimaatiota. Kitagawa (1996) suosittelee 10–20 aika-askeleen viivettä ja esittää 50 aika-askelta viipeen ylärajaksi.

[15]. Paremman estimaatin vastapainona pidemmän viipeen valinta lisää myös viivettä, joka dataa tuottavaan järjestelmään pitää lisätä. Siloittimien tulokset ovat saatavilla vasta L ajanhetken jälkeen, mikä ei aina ole käytännössä mahdollista tai haluttua. Pidempi viive myös lisää algoritmin muistivaatimuksia, joskin muistivaatimukset pysyvät aina pienempinä kuin SIR-siloittimessa.

Kiinteän viipeen siloitinta (viipeellä $L = 1$) voidaan hyödyntää myös predikttiivisenä siloittimena, jossa siloittelujakaumaa $p(x_{0:(k+1)}|y_{1:(k+1)})$ käytetään suodinjakauman $p(x_{1:(k)}|y_{1:k})$ laskennassa. [21] Ydinajatuksena on muokata SIR-algoritmia 3 niin, että ajanhetken k painoja w_k^i painotetaan edelleen seuraavan ajanhetkestä $k + 1$ lasketuilla painoilla ja näin painottaa jo nykyhetkessä niitä hiukkasia, joiden uskottavuus on seuraavalla ajanhetkellä suurempi. Tämä predikttiivinen siloitin voidaan toteuttaa lisäämällä SIR-algoritmiin painotusvaiheen jälkeen seuraava ala-algoritmi:

Algoritmi 7: Predikttiivinen siloiti (viive=1)

Result: Predikttiivisellä siloittimella lasketut painot painotettu \tilde{w}_k^i .

Data: Viipeen $L = 1$ avulla saadut havainnot y_{k+1} . Partikkelit x_k^i ja niitä vastaavat painot w_k^i

```

begin
  for  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  do
    begin
      Luodaan simuloidut hiukkaset  $\tilde{x}_{k+1}^i$  ehdotusjakaumsta  $q(\tilde{x}_{k+1}|x_k^i, y_{k+1})$ 
    end
    begin
      Lasketaan simuloiduille hiukkasille painot  $\tilde{w}_{k+1}^i$ 
    end
    begin
      Päivitetään nykyiset painot  $\tilde{w}_k^i = w_k^i \tilde{w}_{k+1}^i$ 
    end
  end
  Korvataan nykyiset painot  $w_k$  siloitetuilla painoilla  $\tilde{w}_k^i$ ;

```

Kun hiukkasten määrä N pysyy samana, lisää predikttiivinen siloitin suodinjakauman laskemisen tarkkuutta. Vastaavasti predikttiivinen siloitin mahdollistaa saman suodinjakauman estimaatin tarkkuuden kuin SIR-algoritmi pienemmällä määrällä hiukkasia, kuitenkin vain tuplaten uskottavuusfunktioita laskettaessa vaadittavan laskentatehon ja muistitarpeen.

3.3.2 Mukautuvan viipeen siloitin

Yllä esitetyssä kiinteän viipeen siloittimessa on valittu viive L suunnitteluparametri. Valittu viive on aina kompromissi: liian suuri viive kasvattaa siloitinjakauman estimoinnin epätarkkuutta ja hidastaa laskentaa, kun taas liian pieni viive saattaa johtaa niin ikään epätarkkuuteen. Lisäksi valittu viive ei välttämättä johda jokaisella aika-askeleella optimaaliseen tai edes hyvään laskentatulokseen. Mukautuvan viipeen siloittimet yrittävät ratkaista tämän ongelman mukauttamalla kunakin ajanhetkenä valittua viivettä johonkin kriteeriin perustuen. Erään version mukautuvan viipeen siloittimesta esittävät Johan Alenlöv ja Jimmy Olsson artikkelissa “Particle-Based

Adaptive-Lag Online Marginal Smoothing in General State-Space Models” (2019) [1]. Siloitin hyödyntää hiukkassuotimen varianssiestimaattia viipeen valinnassa.

Yksinkertainen versio siloittimesta on esitetty algoritmissa 8. Perusidea on viivästyttää siloitinjakauman luomista hetkellä k , kunnes tarjolla on viipeet $S = 1, \dots, s$, joiden varianssi

$$\sigma_{s|t}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{w_t^i}{\Omega_t} \left\{ \tilde{x}_{s|t} - \sum_{j=1}^N \frac{w_t^j}{\Omega_t} \tilde{x}_{s|t} \right\}^2, \quad (3.7)$$

pysyy tietyn valitun rajan ϵ yläpuolella, missä $\tilde{x}_{s|t}$ on kyseiselle viipeellä laskettu marginaalisiloitinjakauman painovektori (kts. algoritmi 6). Kun tämä ehto ei enää täyty, käytetään suurimmalle kriteerille $\sigma_{s|t}^2 < \epsilon$ täyttämälle viipeelle laskettuja painoja siloitinjakauman estimointiin kaikilla $t' \geq t$. Varianssin estimoinnista katso alaluku 2.3.

Algoritmi 8: Mukautuvan viipeen siloitin

Result: Siloitteijakauman estimaatti viipeellä s , tarkemmin $\sum_i^N w_t^i \tilde{x}_{s|t}^i \Omega_t$.

Data: Olkoon S joukko kullakin viipeellä s laskettuja painoja $\tilde{x}_{s|t}^i$. Alustetaan

$S \leftarrow \emptyset$

begin

for $t = \{1, 2, \dots, T\}$ **do**

begin

 Ajetaan SIR-algoritmi 3 ajanhetkenä t

begin

 Jokaiselle $s \in S$ lasketaan painovektori kuten algoritmissa 6.

begin

$S \leftarrow S \cup \{s\}$ Jokaiselle $s \in S$ lasketaan painovektori kuten algoritmissa 6.

begin

 Jokaiselle s lasketaan varianssi $\sigma_{s|t}^2$ kuten yhtälössä 3.7. Jos $\sigma_{s|t}^2 < \epsilon$ poistetaan s joukosta S ja käytetään siloitinjakauman estimaattia $\sum_i^N w_t^i \tilde{x}_{s|t}^i \Omega_t$ kaikille ajanhetkille $t' \geq t$.

Myös tähän siloittimeen liittyy suunnitteluparametrien valinta. Vaikka itse viivettä L ei valita, pitää parametri ϵ . Pienempi ϵ tuottaa suurempia viipeitä ja täten parempia estimaatteja, mutta on myös laskennallisesti sekä muistinkin käytöltään raskaampi. Alenlöv ja Olsson ehdottavat ϵ -arvoja väliltä $(.5, 10^{-3})$.

Luku 4

Hiukassuodin ja -siloitin sisätilapaikannuksessa

Sisätilapaikannus tarkoittaa nimensä mukaisesti ihmisten tai esineiden automaattista paikantamista sisätiloissa. Koska GPS-järjestelmät toimivat sisätiloissa huonosti tai eivät lainkaan, tarvitaan rakennusympäristöihin muita paikannusratkaisuja. Tässä luvussa käydään ensin läpi sisätilapaikannuksen yleisiä periaatteita sekä joitakin ehdotettuja ratkaisuja. Lisäksi mainitaan joitakin hiukassuodinalgoritmin käyttötapoja sisätilapaikannuksessa. Tämän jälkeen keskitytään Walkbase-ohjelmistoyrityksen sisätilapaikannusteknologian ympärille kehitettyyn algoritmiin, jonka tarkkuutta ja tehokkuutta testataan koeympäristössä.

4.1 Sisätilapaikannuksesta

Sisätilapaikannus tarkoittaa tekniikoita ja menetelmiä, joilla paikannetaan ihmisiä, laitteita tai esineitä sisätiloissa, joissa perinteinen GPS-signaali ei ole riittävä tai saatavilla. Sisätilapaikannuksessa hyödynnetään useita erilaisia teknologioita, kuten radiotaajuuksia, magneettikenttiä, ultraääntä ja optisia menetelmiä. Kattava esitys sisätilapaikannukseen käytettävistä teknologioista löytyy George Ogunatalan & al. artikkelista “Indoor location identification technologies for real-time IoT-based applications: An inclusive survey” (2018) [22], johon myös tämä alaluku perustuu.

Optisessa paikannuksessa käytetään kameroita tai muita optisia/valoon perustuvia sensoreita, kuten esimerkiksi Lidar-valotutkia, halutun kohteen sijainnin määrittämiseen. Magneettikenttiin perustuvat paikannusratkaisut perustuvat rakennusten sisäisten metallirakenteiden maapallon magneettikenttään luomiin paikallisiin muutoksiin. Näitä muutoksia voidaan käyttää vertailutietona paikannuksessa, mittaamalla ympäröivän magneettikentän vahvuutta ja vertaamalla sitä ennalta tallennettuihin karttoihin. Ultraäänipohjainen paikannus puolestaan hyödyntää ääniaaltojen kulkuaikaa lähettimen ja vastaanottimen välillä.

Yleinen valinta sisätilapaikannuksessa ovat erilaiset Bluetooth-standardiin tai muuhun radioteknologiaan (kuten esimerkiksi millimetriaaltoihin) perustuvat lähetin-vastaanotinratkaisut, joissa hyödynnetään laitteiden välisiä signaaleja etäisyyden tai kulman mittaamiseen. Radioteknologiaan perustuvilla järjestelmillä voidaan

kotuullisin kustannuksin saavuttaa jopa senttimetritason paikannustarkkuus tietyissä sovelluksissa. Radioteknologiat ovat myös yksityisyyden näkökulmasta helpompia järjestelmiä toteuttaa kuin esimerkiksi kameroiden avulla tapahtuvaan paikannukseen perustuvat järjestelmät.

4.2 Teknologian kuvaus

Turkulainen teknologia- ja analytiikkayritys Walkbase käyttää Bluetooth/BLE-sisätilapaikannusta asiakkaiden käyttäytymistä koskevan datan keräämiseen erityisesti ruokakaupoissa sekä tavarataloissa. Tyypillisessä asennusskenaariossa lähettimet (tagit) kiinnitetään ostoskärryihin ja paikantimet kiinnitetään liiketilan kattoripustuksiin.

Walkbase on kehittänyt sisätilapaikannukseen oman laitteisto- ja ohjelmistoratkaisunsa, jonka tavoitteena on tarjota kaikissa ympäristöissä 95% varmuudella alle metrin paikannustarkkuus. Koska tagit kiinnitetään tunnetulle korkeudelle ostoskärryihin, riittää paikannusvirhettä laskiessa tarkastella ainoastaan leveys- ja pituusasteita. Kun tagin todellinen sijainti $P_k = (P_{\text{lon}_k}, P_{\text{lat}_k})$ tiedetään aika-askeleella k , voidaan sijaintiestimaatin $\hat{x}_k = (\hat{x}_{\text{lon}_k}, \hat{x}_{\text{lat}_k})$ Merkitään tätä paikannusvirhettä yksittäisen sijainnin kohdalla

$$\epsilon_{\text{pos}_k} = d(P_k, \hat{x}_k) = \sqrt{(P_{\text{lon}_k} - \hat{x}_{\text{lon}_k})^2 + (P_{\text{lat}_k} - \hat{x}_{\text{lat}_k})^2}, \quad (4.1)$$

eli käytetään paikannusvirheenä yksinkertaisesti euklidista etäisyyttä. Tämä antaa paikannusvirheen suoraan metreinä alaluvussa 4.3.1 suoritettavan lineaarisen interpolaation vuoksi. Haluttu, alle metrin paikannustarkkuus saavutetaan, kun missä hyvänsä testiasetelmassa kaikkien asetelmaan liittyvien paikannusvirheiden 95. persentiili on $\leq 1\text{m}$.

Walkbasen paikannusratkaisu koostuu kolmesta eri laitteistokomponentista, AT-2-Bluetooth-lähetin-vastaanottomista, jotka kiinnitetään ostoskärryihin, XR-2-Bluetooth-lähetin-vastaanottomista, jotka kiinnitetään tilan kattoripustuksiin sekä OSCU-laskentayksiköstä, joka luo paikkadataa XR-2.1-vastaanotinten perusteella ja lähettää paikkadatan edelleen palvelinkeskukseen.

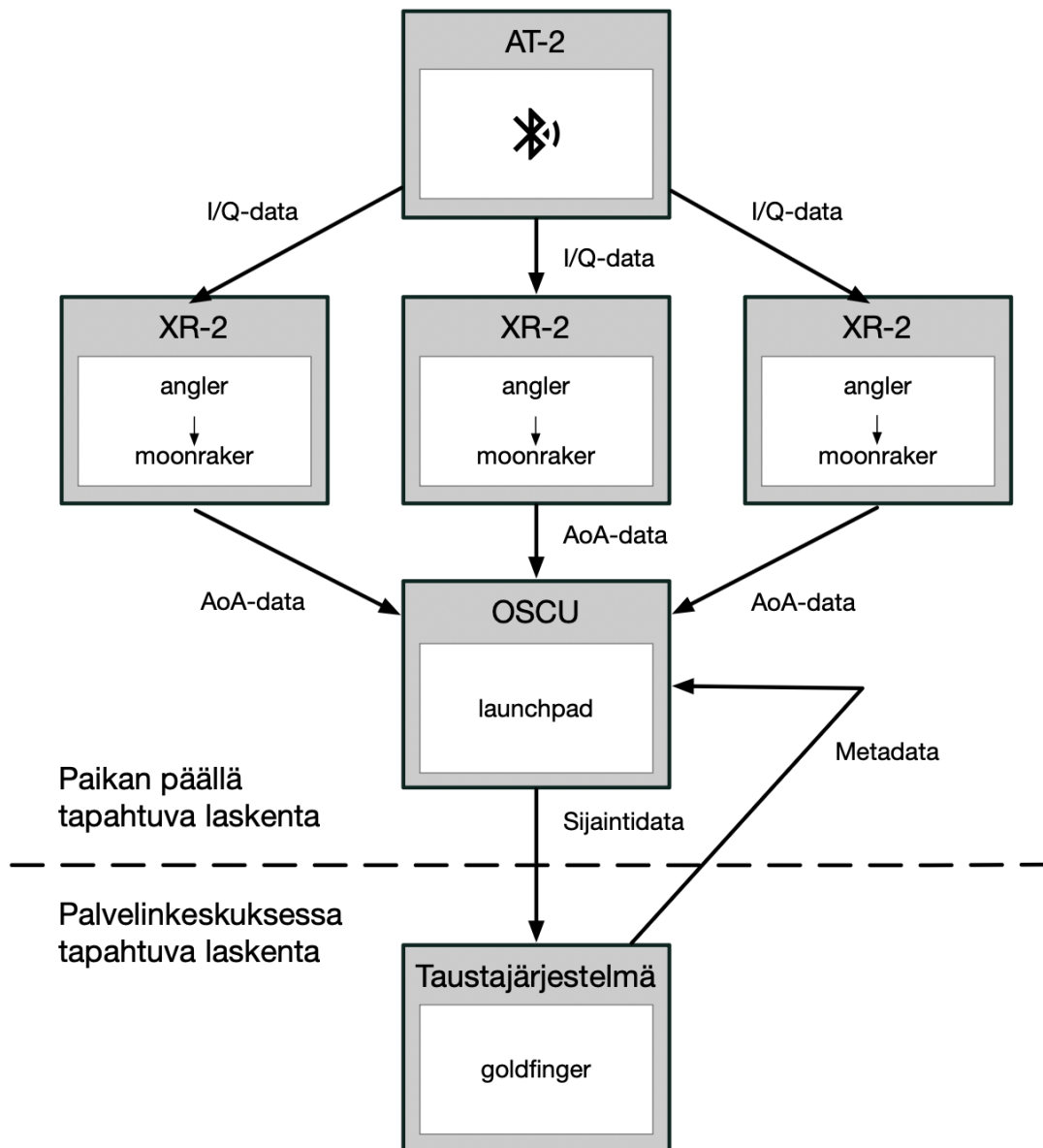
AT-2 on Bluetooth 5.1 (BLE) -standardin mukaan toimiva lähetin-vastaanotin, joka toimii 2.4Ghz taajuusalueella. Walkbasen suunnitteleman laitteen PCB-kehäantenni kykenee lähettämään GFSK-moduloitua dataa 2Mbps nopeudella. Laite saa virtansa yhdestä CR-2477-paristosta.

XR-2.1 on Bluetooth 5.1 (BLE) -standardin mukaan toimiva lähetin-vastaanotin, joka toimii 2.4Ghz taajuusalueella. Walkbasen suunnitteleman laitteen PCB-kehäantenni kykenee lähettämään GFSK-moduloitua dataa 2Mbps nopeudella. Laite saa virtansa ethernet-lähiverkosta 802.3af-standardin mukaisesti. Laitteen vaatima laskenta tapahtuu Raspberry Pi Compute Module 4 -piirilevytietokoneella. Lisäksi laite sisältää inertiamittausyksikön, jota voidaan käyttää asennetun laitteen kallistumis- ja nyökkäämiskulman (*roll* ja *pitch*) arvioimiseen.

OSCU-laskentayksikkönä käytetään Ubuntu-käyttöjärjestelmällä toimivaa tietokonetta, jonka spesifikaatiot **TODO**. Koska OSCU-laskentayksikön laskentateho on rajallista, on paikannusalgoritmin aikakompleksisuus yksi käytettävän algoritmin ydinkriteereistä. Tähän palataan myöhemmin koeasetelman kuvauksessa **TODO linkki**.

Tarvittavasta laskennasta vastaava ohjelmistojärjestelmä koostuu puolestaan neljästä ohjelmistokomponentista. C-ohjelmointikielellä toteutettu *angler* laskee AT-2-tagin lähettämän I/Q-datan perusteella signaalien tulokulman, Go-ohjelmointikielellä toteutettu *moonraker* lähettää tulokulmadatan paikallisverkon yli OSCU-laskentayksikölle, jossa Go-ohjelmointikielellä toteutettu *launchpad* luo siitä sijaintidataa, jonka se lähettää edelleen palvelinkeskuksen taustajärjestelmään.

Taustajärjestelmässä Go-ohjelmointikielellä *goldfinger* prosessoi sijaintidatan Walkbasen analytiikka-alustan käyttämään muotoon. *Goldfinger* myös vastaa siitä, että kaikki *launchpad*-sovelluksen vaatima metadata on sen käytössä. Kaavio 4.1 kuvaa järjestelmän laitteisto- ja ohjelmistoarkkitehtuurit.

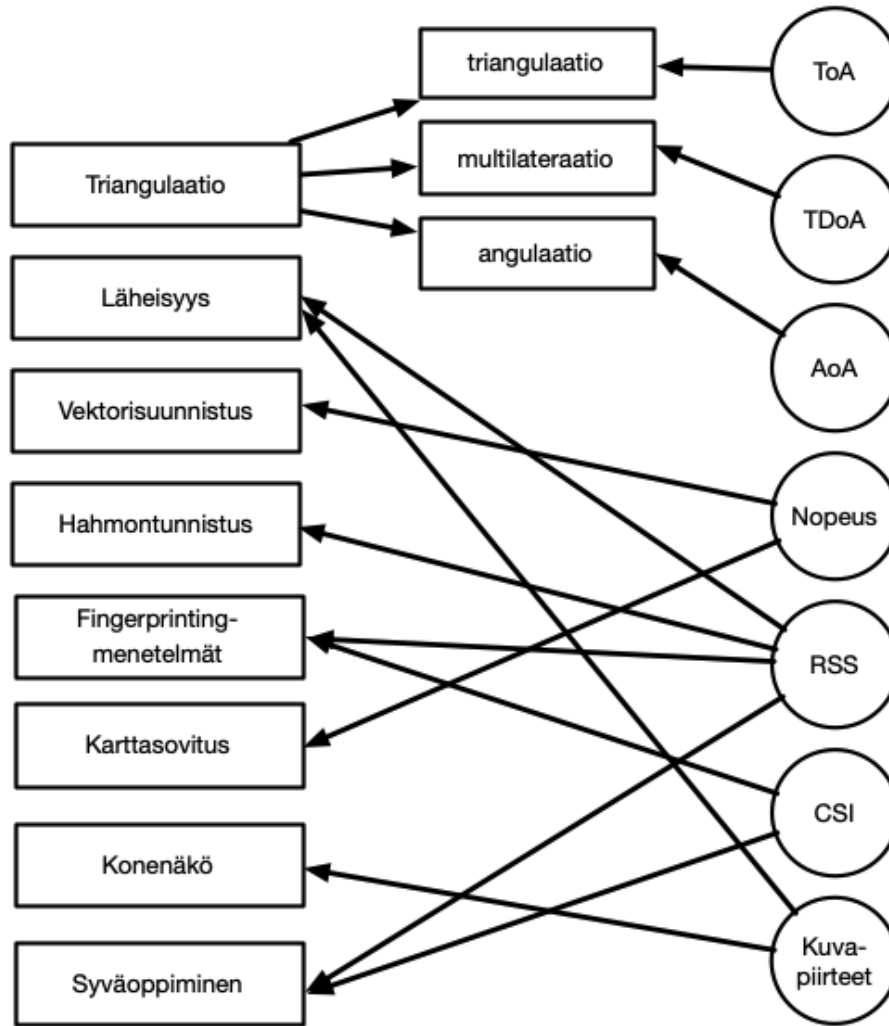


Kuva 4.1: Järjestelmäarkkitehtuuri

Tässä luvussa keskitytään *launchpad*-sovelluksen hyödyntämään paikannus-
 algoritmiin, mutta sitä ennen käsitellään lyhyesti tulokulman laskentamenetelmät
 sekä *angler*-sovelluksen toiminta. Tekijänoikeussyistä tutkielmassa ei hyödynnetä
 Go-ohjelmointikielellä toteutettua ohjelmakoodia. Sen sijaan algoritmi on toteutettu
 R-ohjelmointikielellä.

4.2.1 AoA-menetelmistä

Riippuen käytetystä teknologiasta ja teknologian tuottamasta datasta, voidaan sisätilapaikannuksessa soveltaa lukuisia eri paikannustekniikkoja ja -algoritmeja. Oguntalaa (2018) [22] mukailevassa kaaviossa 4.2 on esitetty pääpiirteittäin sisätilapaikannusmenetelmät käytetyn datan (kaaviossa oikealla) mukaan jaoteltuna.



Kuva 4.2: Paikannusmenetelmien luokittelu

Walkbasen toteuttama paikannusratkaisu perustuu AoA-menetelmään. Tämä on paikannusteknologia, joissa lähettimen ja vastaanottimen välinen kulma estimoidaan signaalin saapumiskulman perusteella. Tässä estimoinnissa hyödynnetään signaalin vaihe-eroja, kun sama signaali vastaanotetaan usealla eri antennilla.

Walkbase hyödyntää radiosignaalien tulokulman estimoinnissa MUSIC-algoritmia (*Multiple Signal Classification*), joka arvioi tulokulmia analysoimalla signaalien autokorrelaatiomatriisia ja etsimällä sen ominaisvektoreita. Esitys MUSIC-algoritmista löytyy esimerkiksi Monson H. Hayesin kirjasta *Statistical*

Digital Signal Processing and Modeling (1996) [14]. Marco Guniam & al (2023) [12] puolestaan esittävät artikkelissa “Analysis and Design of a MuSiC-Based Angle of Arrival Positioning System” tapoja optimoida MUSIC-algoritmia soveltumaan monimutkaisiin, heijastuksia sisältäviin sisätilaympäristöihin.

angler-sovellus hyödyntää MUSIC-algoritmin ohella omaa hiukassuodinalgoritmiin signaalispektrin analysointiin sekä tulokulmien estimointiin. MUSIC-algoritmia tai *angler*-sovelluksen hiukassuodinalgoritmia ei käsitellä tarkemmin tämän tutkielman puitteissa.

4.2.2 Kalibraatiosta

Koska *angler*-sovellus laskee suuntimakulman aina antennielementin määrätystä reunasta nähden, on tärkeää, että laitteen asemointi karttapohjoiseen nähden on tiedossa. Koska laitteen tarkan kulman arvioiminen asennusympäristössä on haastavaa eikä laite sisällä kompassia, sovelletaan kunkin laitteen kalibraatioon omaa SIR-algoritmiaan, jonka on mahdollista huomioon myös laitteen IMU-intertiamittausyksiköstä saatavat kallistumis- ja nyökkäämiskulmat.

Jos IMU-dataa hyödynnetään, tuottaa kalibraatioalgoritmi jokaiselle XR-2-laitteelle rotaatiomatriisin R_l . Muussa tapauksessa kalibraatioalgoritmi tuottaa jokaiselle laitteelle atsimuuttiakulman kohdistuksen η . Kalibraatioalgoritmia ei käsitellä tämän tutkielman puitteissa. Paikannusongelman yksinkertaistamiseksi myöskään IMU-yksikön tuottamaa dataa ei sisällytetä kalibraatioon ja jokaisen XR-2-laitteen oletetaan olevan lattiaan nähden vaakatasossa. Atsimuuttikulman kalibraatiokohdistuksesta lisää luvussa 4.3 alla.

4.3 Datan kuvaus

Koeasetelmaa varten AT-2-tagin on asetettu lähettämään IQ-dataotoksia 6hz taajuudella, joka vastaa järjestelmän tuotantokäyttöä. Parempi sijaintitarkkuus saavutetaan korkeammalla taajuudella, mutta käytettyjen tagien akun kesto ei salli 6hz korkeampaa taajuutta.

angler-sovellus koostaa jokaisesta aika-askeleen k dataotoksesta atsimuutti- eli suuntimakulman θ_k ja korkeuskulman γ_k , jotka noudattavat seuraavia jakaumia:

$$\theta_k \sim \text{von Mises}(\mu_{\theta_k}, \kappa_k), \quad (4.2)$$

$$\gamma_k \sim \mathcal{N}_{\text{katkaistu}}(\mu_{\gamma_k}, \sigma_k^2). \quad (4.3)$$

Nämä on kuvattu tarkemmin alaluvussa 4.4.2. Jokaisen XR-2-laitteen *angler*-sovellus laskee näiden perusteella sekvenssinumeron, jonka perusteella samasta AT-2-tagin lähettämästä IQ-dataoksesta lasketut usean eri vastaanottimen laskemat tulokulmat voidaan yhdistää samaan IQ-dataotokseen. XR-2-laitteen lähettämä tulokulmadata on kuvattu alla.

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
id	havainnon yksilöivä tunniste	317,092
ts	havainnon aikaleima	2024-04-08 21:38:20.998+00
locator_mac	XR-2-laitteen MAC-osoite	2c:e3:10:00:07:a6
asset_tag_mac	AT-2-tagin MAC-osoite	2c:e3:10:00:63:89
sequence_nr	kulmadatan IQ-dataotokseen yhdistävä juokseva numerointi	2,066
azimuth_location	atsimuuttikulman θ jaukauman sijaintiparametri μ_θ (rad)	0.39
azimuth_scale	atsimuuttikulman θ jaukauman skaalaparametri κ	80.98
elevation_location	korkeuskulman γ jaukauman sijaintiparametri μ_γ (rad)	0.13
elevation_scale	korkeuskulman γ jaukauman skaalaparametri σ^2	0.012
quality_sndr	signaali-kohinasuhde	22.0
rss	signaalin vahvuus (dBm)	-81
distance	arvioitu etäisyys lähettimeen (m)	18.6

Taulukko 4.1: Tulokulmamuuttujat

Etäisyys on estimoitu signaalin vahvuudesta käyttäen propagaatiomallia. Etäisyyttä tai signaalin vahvuutta ei käytetä paikantamiseen, joten tämän mallin käsittely jätetään tutkielman ulkopuolelle. Munoz (2009) luku 2 sisältää yleiskatsauksen propagaatiomalleista. [20]

launchpad-sovelluksessa tulokulmadataan yhdistetään XR-2-laitteen MAC-osoitteen perusteella lisäksi tarvittavaa, XR-2-laitteita koskevaa metadataa. Näihin kuuluvat laitteen korkeus, laitteen suuntimakulma ja karttakoordinaatit. Metadata on kuvattu taulukossa 4.2.

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
locator_mac	XR-2-laitteen MAC-osoite	b8:27:eb:66:0d:2a
lat	vastaanottimen sijainti (leveyspiiri)	60.448265
lon	vastaanottimen sijainti (pituuspiirit)	22.294823
direction	suuntimakulma η (astetta)	34
height	vastaanottimen korkeus (m)	2.22

Taulukko 4.2: Metadata

Atsimuuttikulma ϕ lasketaan aina vastaanottimen tietyltä sivulta, joten se vastaa napapohjoista ainoastaan siinä tapauksessa, että vastaanottimen kyseinen sivu on asetettu kohtisuoraan napapohjoiseen nähden. Käytännössä vastaanottimien asettaminen tiettyyn kulmaan ei ole aina mahdollista eikä vaihe-erojen mittaamisen

kannalta edes suotavaa. Tämän vuoksi jokaiselle vastaanottimelle on tietokantaan tallennettu oma suuntimakulma η . Toisin kuin tulokulmadatan kulmat, on tämä tallennettu tietokantaan asteina. Kokeessa käytetään napapohjoisesta laskettuja kulmia Φ , jotka lasketaan jokaiselle havainnolle havainnon vastaanottimen suuntimakulman avulla

$$\Phi = (\theta + \eta \times \frac{\pi}{180^\circ}) \mod 2\pi. \quad (4.4)$$

Suuntimakulma Φ kertoo vastaanottimen ja lähettimen välisen kulman. Lisäksi saatavilla on PostGIS-muotoon tallennettua polygonidataa, joka vastaa koeympäristön pohjapiirrustusta sekä koeympäristössä esiintyviä liikkumisen estäviä kohteita, kuten hyllyjä tai pöytiä. Näitä hyödynnetään sekä sijaintialgoritmin alustuksessa että karttasovitusalgoritmissa (kts. alaluku 4.4.4.2)

Havaintomuuttujien ohella koetilanteesta on tallennettu testipolku, jota pitkin AT-2-tagia liikutetaan koetilanteessa. Testipolkudata pitää sisällään karttaan piirretyn janan pääte- ja sisäpisteet. Tallennettu sijainti perustuu koeympäristön lattiaan pohjapiirrustusten sekä laser-mittausten avulla tehtyihin merkintöihin. Näin saadut testimuuttujat on kuvattu taulukossa (4.3).

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
path_lat	polkupisteen sijainti (leveyspiiri)	60.44819
path_lon	polkupisteen sijainti (pituuspiiri)	22.29493

Taulukko 4.3: Testimuuttujat

Testimuuttujia käytetään paikannusalgoritmien paikannusvirheen laskemisessa.

4.3.1 Karttaprojektioista

Kaikki yllä esitetyssä datassa esiintyvät sijaintikoordinaatit on tallennettu tietokantaan WGS 84 -tasokoordinaattijärjestelmässä. Koska hiukassuotimiin perustuvaa paikannusalgoritmia sovellettaessa on monin paikoin tarve syöttää parametreja metrijärjestelmässä. Tästä syystä leveys- ja pituusasteisiin perustuvat koordinaatit muunnetaan laskentaa varten metreiksi ja metreinä esitetyt sijaintitulokset muutetaan tulosten esittämistä varten takaisin WGS 84 -koordinaattijärjestelmään.

Muunnos tapahtuu lineaarisella interpolaatiolla. Määritellään ensin kerrospolygonin rajaosalue. Koska kaikki käytetyt koordinaatit ovat tämän rajaosalueen sisällä, voidaan tätä rajaosaluetta käyttää konversiossa metreiksi. Rajaosalue koostuu neljästä kulmapisteestä. Poimitaan näistä pisteistä minimi ja maksimi sekä pituus- että leveyskoordinaateille. Näin saadaan neljä arvoa $B_{lonlat} = \{lon_{min}, lon_{max}, lat_{min}, lat_{max}\}$. Määritellään rajaosalueen sivujen pituus metreinä geodeettisen etäisyyden avulla, jolloin saadaan kaksi metreissä laskettua etäisyyttä $D_m = d_{lon}, d_{lat}$. Käytetään näitä kulmapisteitä sekä metreinä laskettuja etäisyyksiä interpoloimaan koordinaatit WGS 84 -koordinaattijärjestelmästä metreissä esitetyille arvoalueille $[0, \max(x_m)]$ ja $[0, \max(y_m)]$ seuraavasti:

$$x_m = f(x_{\text{lon}}; B_{\text{lonlat}}, D_m) = \frac{x_{\text{lon}} - \text{lon}_{\text{min}}}{\text{lon}_{\text{max}} - \text{lon}_{\text{min}}} \times d_{\text{lon}} \quad (4.5)$$

$$y_m = f(y_{\text{lat}}; B_{\text{lonlat}}, D_m) = \frac{y_{\text{lat}} - \text{lat}_{\text{min}}}{\text{lat}_{\text{max}} - \text{lat}_{\text{min}}} \times d_{\text{lat}}, \quad (4.6)$$

missä x_m vastaa leveyskoordinaatteja metreissä ja y_m pituuskoordinaatteja metreissä. Vastaavasti käännös takaisin WGS 84 -koordinaattijärjestelmään tapahtuu vastaavasti:

$$x_{\text{lon}} = f(x_m; B_{\text{lonlat}}, D_m) = \frac{x_m}{d_{\text{lon}}} \times (\text{lon}_{\text{max}} - \text{lon}_{\text{min}}) + \text{lon}_{\text{min}} \quad (4.7)$$

$$y_{\text{lat}} = f(y_m; B_{\text{lonlat}}, D_m) = \frac{y_m}{d_{\text{lat}}} \times (\text{lat}_{\text{max}} - \text{lat}_{\text{min}}) + \text{lat}_{\text{min}}. \quad (4.8)$$

4.3.2 Muunnettu data

Kun dataan on tehty yllä esitetyt konversiot ja metadata on liitetty jokaisen aika-askeleen k dataan, saadaan data lopulliseen, empiirisessä esimerkissä käytettävä muotoon, jossa jokaisen aika-askeleen kohdalla k on käytettävissä seuraava data:

Muuttuja	Kuvaus	Esimerkkiarvo
id	havainnon yksilöivä tunniste	317,092
ts	havainnon aikaleima	2024-04-08 21:38:20.998+00
locator_mac	XR-2-laitteen MAC-osoite	2c:e3:10:00:07:a6
asset_tag_mac	AT-2-tagin MAC-osoite	2c:e3:10:00:63:89
sequence_nr	kulmadatan IQ-dataotokseen yhdistävä juokseva numerointi	2,066
azimuth_location_mdf	atsimuuttikulman θ	
azimuth_scale	jaukauman muunnettu sijaintiparametri Φ (rad)	0.39
elevation_location	atsimuuttikulman θ	
elevation_scale	jaukauman skaalaparametri κ	80.98
quality_snr	korkeuskulman γ	
rss	jaukauman sijaintiparametri μ_γ (rad)	0.13
distance	korkeuskulman γ	
x_m	jaukauman skaalaparametri σ^2	0.012
y_m	signaali-kohinasuhde	22.0
height	signaalin vahvuus (dBm)	-81
	arvioitu etäisyys lähettimeen (m)	18.6
	vastaanottimen sijainti (x -koordinaatti, metreinä)	1.24
	vastaanottimen sijainti (y -koordinaatti, metreinä)	0.78
	vastaanottimen korkeus (m)	2.22

Taulukko 4.4: Muunnettu data

4.4 Sisätilapaikannusalgorithmi

4.4.1 Ongelman kuvaus

Tarkoituksena on estimoida liikkuvan AT-2-tagin sijaintia. Merkitään tätä estimoitavaa tilasarjaa $x_{1:k} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Lisäksi merkitään x_0 testilaitteen lähtösijaintia. Jokainen tilasarjan havainto koostuu suuntimakulmasta sekä pituus- että leveyskoordinaateista (x_k^x, x_k^y) . Määritellään tilalle liikkuvan AT-2-tagin kulkua kuvaava vektorisuunnistukseen (*dead reckoning*) perustuva malli (4.9)

$$x_{k+1} = f(x_k, \nu_k) = x_k + D_k \begin{bmatrix} \cos \psi_k \\ \sin \psi_k \end{bmatrix} + \nu_k, \quad (4.9)$$

missä D_k on AT-2-tagin aika-askeleella k kulkema matka ja ψ_k AT-2-tagin suuntimakulma kyseisenä aika-askeleena. ν_k on kohinaa, joka syntyy mittausvirheestä ja jolle

voidaan olettaa $\sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$. Jos laite on paikallaan, yksinkertaistuu malli muotoon $x_{k+1} = f(x_k) = \text{id}(x_k) = x_k$, missä $\text{id}(\cdot)$ on identiteettifunktio.

Vastaavasti $y_{1:k} = \{y_1, \dots, y_k\}$ kuvaa AT-2-tagin ja XR-2-laitteiden välillä laskettuja kulmahavaintoja. Näin ollen jokainen havainto koostuu (maksimissaan) paikantimien määrää vastaavasta määrästä kulmia. Havainnot lasketaan sekunnin tarkkuudella, mutta todellinen havaintotarkkuus on tiheämpi.

Lisäksi tunnetaan sensoreihin $\{s^1, \dots, s^4\}$ liittyvät pituus- ja leveyskoordinaatit (λ, ϕ) , jotka on muutettu alaluvussa 4.3.1 esitetyllä interpolaatiolla metreiksi.

$$u = \begin{bmatrix} \lambda^1 & \phi^1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda^4 & \phi^4 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Määritellään havainnoille malli

$$y_k = h(x_k, u) + e_k = \text{atan2}\left(\begin{bmatrix} \phi^1 - x_k^y \\ \vdots \\ \phi^4 - x_k^y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda^1 - x_k^x \\ \vdots \\ \lambda^4 - x_k^x \end{bmatrix}\right) + e_k, \quad (4.11)$$

missä

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{jos } > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{jos } < 0 \text{ ja } y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{jos } > 0 \text{ ja } < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{jos } x = 0 \text{ ja } > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{jos } x = 0 \text{ ja } < 0, \\ \text{ei määritelty} & \text{jos } x = 0 \text{ ja } y = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

ja kohina noudattaa moniulotteista normaali jakaumaa $e_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Kovarianssimatriisin estimaattina käytetään kunakin aika-askeleella k antennikohtaisista havainnoista estimoituja otosvariansseja $\text{diag}(\hat{\sigma}_k^1, \dots, \hat{\sigma}_k^4)^2 = \text{diag}(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (s_i^1 - \bar{s})^2, \dots, \sum_{i=1}^n (s_i^4 - \bar{s})^2)$. Määrittelemätön atan2 -tapaus, jossa $x = 0$ ja $y = 0$ on käytetyllä mittaustarkkuudella käytännössä mahdoton. Jos tapaus halutaan välttää, voidaan nolla-arvot tarpeen vaatiessa korvata joillakin hyvin lähellä nollaa olevalla arvolla. Saadaan uskottavuusfunktioiksi

$$p(y_k | x_k) \propto \prod_{j=1}^4 \exp \left\{ -\frac{\|h(x_k^j, u) - y_k^j\|^2}{2(\hat{\sigma}_i^j)^2} \right\}, \quad (4.13)$$

missä $j = \{1, l \dots, n\}$ vastaa nyt kutakin XR-2-laitetta. Kumpikaan funktiosta $h(\cdot)$ ja $f(\cdot)$ ei ole lineaarinen, joten SIR-algoritmi on sopiva valinta ongelman ratkaisemiseksi. Koetuloksia arvioidaan ensisijaisesti paikannusvirheen avulla. Paikannusvirhe e_k lasketaan jokaisen aika-askeleen k posteriorijakaumaestimaatista \hat{p}_k painotettuna keskiarvona

$$\epsilon_k = d(P_k, \sum_{i=1}^N w_i^k x_k^i), \quad (4.14)$$

missä w_i^k on ajanketken k partikkelien normalisoitu paino ja $d(x_k^i, y_k)$ partikkelien ja testilaitteen todellisen sijainnin P_k välisen etäisyyden laskeva funktio 4.1.

4.4.2 Uskottavuusmallit

Jokainen yhtä tulokulmaa vastaava *angler*-sovelluksen tuottama havaintodatarivi pitää sisällään neljä parametrimuuttujaa, `azimuth_location_mdf`, `azimuth_scale`, `elevation_location` ja `elevation_scale`. Koska *angler*-sovellus on kirjoitettu varta vasten tuottamaan dataa hiukassuodinpaikannusalgoritmia varten, ovat nämä suoraan hiukassuotimen uskottavuusmallin parametreja.

Angler-sovelluksessa XR-2-laitteen ja AT-2-tagin välinen atsimuuttikulma simuloidaan von Mises -jakaumasta, jolloin muuttujat `azimuth_location_mdf` ja `azimuth_scale` vastaavat tämän jakauman sijainti- ja skaalaparametreja μ ja κ ja näistä edellistä voidaan pitää itse atsimuuttikulman estimaattina. Määritellään siis jokaiselle hiukassuotimen aikahetkelle k sekä XR-2-laitteelle l seuraava atsimuuttikulman uskottavuusmalli:

$$L_{\theta_{k,l}}(y_{k,l}|x_{k,l}; \mu_{k,l}, \kappa_{k,l}) = \frac{e^{\kappa_{k,l} \cos(x_{k,l} - \mu_{k,l})}}{2\pi I_0(\kappa_{k,l})}, \quad (4.15)$$

missä I_0 on 0:s ensimmäisen lajin Bessel-funktio ja $x_{k,l}$ on jokaisen hiukkasen $n = 1, \dots, N$ sekä XR-2-laitteen l välinen suuntimakulma.

Vastaavasti *angler*-sovelluksessa XR-2-laitteen ja AT-2-tagin välinen korkeuskulma simuloidaan katkaistusta normaalijakaumasta, jolle $a = 0$ ja $b = 2\pi$. Nyt muuttujat `elevation_location` ja `elevation_scale` vastaavat tämän jakauman sijainti- ja skaalaparametreja μ ja σ^2 ja näistä edellistä voidaan pitää itse korkeuskulman estimaattina. Määritellään jokaiselle hiukassuotimen aikahetkelle k sekä XR-2-laitteelle l seuraava korkeuskulman uskottavuusmalli:

$$L_{\gamma_{k,l}}(y_{k,l}|x_{k,l}; \mu_{k,l}, \sigma_{k,l}^2, a = 0, b = 2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_{k,l} - \mu_{k,l})^2}{2\sigma^2}\right) / \sqrt{\sigma^2} Z_{k,l}, \quad (4.16)$$

missä $Z_{k,l} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{b - \mu_{k,l}}{\sqrt{\sigma^2}})) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{a - \mu_{k,l}}{\sqrt{\sigma^2}}))$ ja $x_{k,l}$ on jokaisen hiukkasen $n = 1, \dots, N$ sekä XR-2-laitteen l välinen korkeuskulma.

Uskottavuusmallit 4.15 ja 4.16 kertomalla saadaan yhdistetty uskottavuusmalli hiukkassuotimen aikahetkelle k sekä XR-2-laitteelle l

$$L_{k,l} = L_{\theta_{k,l}} \times L_{\gamma_{k,l}}, \quad (4.17)$$

josta voidaan edelleen laskea jokaisen hiukkasen uskottavuus aika-askeleella k

$$L_k = \prod_i^L L_{k,i}. \quad (4.18)$$

Koska yllä esitettyjen mallien uskottavuudet ovat käytännössä erittäin pieniä, käytetään numeerisista syistä itse algoritmissa logaritmoituja uskottavuusmalleja, jolloin $l_{k,l} = \log(L_{\theta_{k,l}}) + \log(L_{\gamma_{k,l}})$ ja $l_k = \sum_i^L l_{k,i}$.

4.4.3 Datan valinta

Koska Walkbasen paikannusjärjestelmä toimii monimutkaisessa, heijastuksia sisältävässä radioympäristössä, suoritetaan jokaisella aika-askeleella k vielä ylimääräinen datan valinta. Valinnan tarkoituksena on jättää mahdollisia heijastuksia sisältävät tai muuten selkeästi virheelliset tulokulmat paikannusdatan ulkopuolelle.

Yksinkertaisin tapa valita käytettävät kulmat on asettaa alaraja signaalin vahvuudelle, jolloin ainoastaan tiettyä kynnys-dBm-arvoa suuremman signaalivahvuuden omaavat tulokulmat valitaan paikannukseen. Datan valinta suoritetaan kunkin aika-askeleen alussa ja tyypillisiä kynnysarvoja ovat esimerkiksi -100dBm , -90dBm ja -80dBm . Datan valintaan palataan parametrien valinnan yhteydessä alaluvussa 4.5.2.

4.4.4 Dynaaminen malli

Dynaamisen mallin tehtävänä on liikuttaa hiukkasia aika-askeleiden k ja $k+1$ välillä. Dynaaminen malli perustuu vektorisuunnistusmalliin 4.9. Vastaavaa mallia hyödyntää muun muassa Solin (2016) [25]. Koska AT-2-tag ei sisällä luotettavaa IMU-yksikköä, ei tagi kuitenkaan tuota nopeus- tai suuntadataa. Tästä syystä vektorisuunnistusmallin nopeutta ilmaiseva skalaarimuuttuja $D_k = 0$, jolloin malli yksinkertaistuu satunnaiskävelymalliksi

$$x_{k+1} = x_k + v_k, \quad (4.19)$$

missä v_k on kohinaa. Kohina luodaan jokaiselle aika-askeleelle seuraavasti. Ensin luodaan etäisyysvektori d_k katkaistusta normaalijakaumasta, jonka sijaintiparametri on 0 ja missä keskihajonta q ja katkaisukohdat q_{min} sekä q_{max} ovat paikannusalgoritmin suunnitteluparametreja:

$$d_k \sim \mathcal{N}_{\text{katkaistu}}(\mu = 0, \sigma = q, a = q_{min}, b = q_{max}). \quad (4.20)$$

Tämän jälkeen luodaan suuntavektori p tasajakaumasta

$$p_k \sim \mathcal{U}(0, 2\pi), \quad (4.21)$$

ja lopulta kohinavektori

$$v_k = (\cos(p_k) \times d_k, \sin(p_k) \times d_k), \quad (4.22)$$

missä vektorin ensimmäinen elementti vastaa sijaintien leveysasteiden kohinaa ja toinen elementti pituusasteiden kohinaa.

4.4.4.1 Paikallaanolon havaitseminen

Paristonsäästyösyistä AT-2-tagit lähettää dataa ainoastaan liikkueessaan. Jos laite ei ole 10 sekunnin aikana havainnut IMU-yksikön perusteella kiihtyvyyttä, lopettaa laite datan lähettämisen. Laite on tällöin valmiusmoodissa. Tätä tietoa voidaan hyödyntää poistamalla dynaamisesta mallista kohina, kun laitteen tiedetään olevan paikallaan. Koska hiukkassilottimen (kts. luku 3) vuoksi tarvitsemme paikannusalgoritmiin viipeen, voimme hyödyntää tätä viivettä myös paikallaolon tehokkaampaan havaitsemiseen.

Jos yksikään XR-2-laite ei ole havainnut tagia yhdenkään sekuntiin kuuluvan 20 aika-askeleen aikana, voimme olettaa laitteen olevan valmiusmoodissa ja siten myös paikoillaan. Huomattavaa on kuitenkin, että päinvastainen ei päde. Paikoillaan oleva laite ei välttämättä ole valmiusmoodissa, sillä valmiusmoodiin siirtyminen kestää 10 sekuntia. Tähän oletukseen perustuen voidaan havaita paikallaolon ja vaimentaa dynaamista mallia algoritmin 9 avulla. Algoritmi ajetaan jokaisella aika-askeleella k ennen hiukkasten siirtoa dynaamisen mallin avulla.

Algoritmi 9: Paikallaanolon havaitsemisalgoritmi

Result: Positiivinen kokonaislukumuuttuja m , joka osoittaa kuinka moneksi aikahetkeksi dynaamista mallia tulee vaimentaa. Jos $m = 0$ mallia ei vaimenneta.;

Data: Tagin tulokulmadata $n + 1$ aika-askeleelle (nykyinen aika-askel + n aika-askelta tulevaisuuteen). n tulee asettaa niin, että paikallaan oleva tagi ehtii valmiustilaan. Jos saatavilla, edellinen muuttujan m arvo. Algoritmin ensimmäisellä ajokerralla asetetaan $m = 0$;

```
begin
  begin
    Jos  $m > 0$ , asetetaan  $m = f(m) = m - 1$  ja pysäytetään algoritmi. Jos
     $m = 0$  jatketaan algoritmin suorittamista.;
  for  $l = \{k + 1, \dots, k + n\}$  do
    begin
      Merkitään  $o_l$  kulmahavaintojen määrää aika-askeleella  $l$ ;
      if  $o_l = 0$  ja  $m = 0$  then
        begin
          Asetetaan  $m = l - k$ ;
        end
      else
        if  $o_l = 0$ ,  $m > 0$  ja  $m + 1 = l - k$  then
          begin
            Asetetaan  $m = l - k$ ;
          end
    end
  end
end
```

Yllä esitetty algoritmi etsii ensin ensimmäisen aika-askeleen, jonka aikana ei ole tallennettu lainkaan kulmahavaintoja ja asettaa muuttujan m arvon vastaamaan tätä aika-askelta. Jos algoritmi löytää useita peräkkäisiä aika-askeleita, joiden aikana ei ole tallennettu lainkaan kulmahavaintoja, valitsee sen näistä suurimman. Koska koe-esimerkissä AT-2-laite lähettää dataa 20hz taajuudella ja valmiustila aktivoituu 10 sekunnin kohdalla, valitaan alla $n = 200$.

Jos paikallaanolon havaitsemisalgoritmin nojalla dynaamista mallia päädytään vaimentamaan (so. $m > 0$), asetetaan dynaamisen mallin keskihajonta-arvo $q_{\text{vaimennettu}} = \frac{q}{10}$. Dynaamista mallia ei siis täysin poisteta käytöstä, jotta paikannus-algoritmi pystyy tehokkaammin hyödyntämään myös vaimennettujen aika-askeleiden dataa ja sijaintiestimaatti konvergoi mahdollisimman lähelle todellista sijaintia, johon tagi on pysähtynyt.

4.4.4.2 Karttasovitusalgoritmi

Dynaamista mallia sovellettaessa, voimme myös höydyntää saatavilla olevaa sisätilan karttadataa. Määritellään kaksi polygonityyppiä, lattiapolygoni F sekä estepolygonit $E = \{E_1, \dots, E_n\}$. Lattiapolygonit määrittävät alueen, jonka sisällä hiukassuodinalgoritmin hiukkasten pitää pysyä. Lattiapolygoneja on vain yksi. Vastaavasti estepolygonien joukko määrittää lattiapolygonien sisällä alueet, joiden sisälle hiukassuodinalgoritmin hiukkaset eivät voi siirtyä ja joiden läpi tagi ei voi kulkea.

Käytännössä estepolygonit kuvaavat tilan seiniä sekä tiedossa olevia esteitä, kuten hyllyjä, pöytiä ja niin edelleen.

Tarkastellaan siis ensin jokaisen $i = 1, \dots, N$ hiukkasen kohdalla, siirtääkö dynaaminen malli hiukkasen polygonin F ulkopuolelle tai jonkin polygoneista E sisäpuolelle ja asetetaan näitä hiukkasia vastaava paino nolnaan.

$$w_{k+1}^i = \begin{cases} w_{k+1}^i & \text{jos } x_{k+1}^i \in F, \\ 0 & \text{jos } x_{k+1}^i \notin F \vee x_{k+1}^i \in E, \end{cases} \quad (4.23)$$

jonka jälkeen tarkastellaan jokaisen jäljellä olevan ($w_{k+1}^i \neq 0$) mallin siirtämän hiukkasen polkua $x_{k+1}^i - x_k^i$. Jos tämä polku ylittää yhden tai useamman estepolygonin E asetetaan kyseiselle hiukkaselle rangaistus seuraavasti:

$$w_{k+1}^i = \begin{cases} \zeta \times w_{k+1}^i & \text{jos } x_{k+1}^i \text{ ylittää estepolygonin,} \\ w_{k+1}^i & \text{muulloin} \end{cases}, \quad (4.24)$$

jossa rangaistus ζ on algoritmin suunnitteluparametri. Vastaavaa toteutusta ovat hyödyntäneet muun muassa Davidson & al (2010) [8], jotka ehdottavat rangaistusrangastusta $\zeta = \frac{1}{1000}$. Rangaistuksen valintaan palataan parametrien valinnan yhteydessä alaluvussa 4.5.2.

Koska erityisesti 4.23 asettaa hiukkasten painoja nolnaan, eivät karttasovite- tut hiukkaset välttämättä enää estimoi suodinjakaumaa tehokkaasti. Bojja & al [2] ehdottavat suoritettavaksi uudelleenotantaa karttasovituksen jälkeen. Uudelleno- tanta suoritetaan seuraavasti. Merkitään nollapainoisten hiukkasten lukumäärää N_0 . Nyt otetaan uudet N_0 otosta palauttaen joukosta $\{x_{1:k}^i\}_{i=1}^N$, missä otoksen i todennäköisyys on $w_{k|k}^i$. Korvataan nollapainoiset hiukkaset näin saadulla otoksella.

4.4.5 Siloittelumalli

Koska haluttu sisätilapaikkansuunnittelualgoritmi on online-algoritmi, käytetään siloitteluun algoritmissa 7 esitettyä prediktivistä siloitinta. Koska alaluvussa 4.5 esitettävä em- piirisessä esimerkissä on tästä huolimatta kaikki data on algoritmin saatavilla, ei viivettä tarvitse lisätä algoritmiin. Siloittelu saavutetaan yksinkertaisesti päivittä- mällä aika-askeleella $k < T$ painot seuraavan lauseen mukaan

$$w_k = w_k^i \bar{w}_{k+1}^i, \quad \text{missä } \bar{w}_{k+1}^i = \frac{\sum_{j=1}^N w_k^j p(x_{k+1}^i | x_k^j)}{q(x_{k+1}^i | x_k^i, y_{k+1})} \quad (4.25)$$

Partikkelien siirtämiseen käytetty satunnaiskulkumalli ei ole siloittelualgoritmien kannalta optimaalinen, joten empiirisessä esimerkissä alla hyödynnetään koetarkoi- tuksessa vain tätä yksinkertaista siloittelumallia.

4.4.6 WB-sisätilapaikannusalgoritmi

Alla esitetään SIR-algoritmiin ja yllä esitettyihin algoritmeihin perustuva sisätilapaikannusalgoritmi kokonaisuudessaan. Algoritmin priorijakaumana p_{x_0} käytettiin kahta toisistaan riippumatonta otosta tasajakaumista, joista toinen vastasi leveys- ja toinen pituusasteita. Jakaumien alkupisteet valittiin niin, että ne vastasivat pienimpiä paikantimien leveys- ja pituusasteista. Vastaavasti päätepisteet valittiin niin, että ne vastasivat suurimpia paikantimien leveys- ja pituusasteita.

$$p_{x_{0_{\text{lon}}}} \sim \mathcal{U}(\min \lambda, \max \lambda), \quad (4.26)$$

$$p_{x_{0_{\text{lat}}}} \sim \mathcal{U}(\min \phi, \max \phi). \quad (4.27)$$

Koska järjestelmän on tarkoitus toimia ainoastaan paikantimien muodostaman suorakaiteen sisäpuolella, ovat valitut jakaumien päätepisteet riittävät. Kummastakin jakaumasta otettiin \sqrt{N} otosta, jolloin N partikkelia x_0^i saatiin näiden otosten permutaatioina. Suunnitteluparametrien valinnasta kts. alaluku [4.5.2](#) alla.

Algoritmi 10: WB-sisätilapaikannusalgoritmi

Result: Tagin sijaintiestimaatti \hat{x} kullekin aika-askeleelle $k = 1, \dots, T$;

Data: Taulukossa 4.4 esitetty data y_k kullekin aika-askeleelle $k = 1, \dots, T$
alaluvussa 4.4.4.2 esitetty polygonimetadata;

```
begin
  begin
    Luodaan priorijakauma  $p_{x_0}$  otantana jakaumista 4.26, asetetaan painot
     $w_0 = 1/N$ .;
  for  $k = \{1, \dots, T\}$  do
    begin
      Ajetaan paikallaanolon havaitsemisalgoritmi 9. Jos havaitaan
      paikallaanolo, päivitetään kohina-arvo  $q_k = \frac{q}{10}$ , muussa tapauksessa
       $q_k = q$ ;
    begin
      Sovitetaan partikkeleihin dynaaminen malli 4.19  $x_{k+1} = x_k + v_k$ ,
      missä  $v_k$  on luotu alaluvussa 4.4.4 esitetyllä menetelmällä sekä
      kohina-arvolla  $q_k$ ;
    begin
      Jos karttasovitusalgoritmi on käytössä, päivitetään painot  $w_k$ 
      alaluvun 4.4.4.2 karttasovitusalgoritmile ja rangaistusarvolla  $zeta$ ;
    for  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  do
      begin
        Päivitetään painot  $w_{k|k}$  alaluvun 4.4.2 uskottavuusmalleilla.
      begin
        Estimoidaan  $p$  laskemalla tiheydelle approksimaatio
         $\hat{p}(x_{1:k}|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i \delta(x_{1:k} - x_{1:k}^i)$ .
      if  $k < T$  then
        begin
          Päivitetään paino  $w_k^i$  prediktiivisellä siloittimella  $w_k^i = w_k^i \bar{w}_{k+1}^i$ .
        begin
          Luodaan sijaintiestimaatti  $\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N w_i^k x_k^i$ . Estimaatti lasketaan
          erikseen pituus- ja leveyskoordinaateille.
        begin
          Lasketaan efektiivinen otoskoko  $\hat{N}_{eff}$ .
        if  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$  then
          begin
            Otetaan uudet  $N$  otosta palauttaen joukosta  $\{x_{1:k}^i\}_{i=1}^N$ , missä
            otoksen  $i$  todennäköisyys on  $w_{k|k}^i$ .
          begin
            Asetetaan painot  $w_{k|k}^i = 1/N$ .
```

Yllä esitetyn algoritmin suoritusnopeus on perusmuodossaan luokkaa $(O)(N)$

Taulukko 4.5: WB-sisätilapaikannusalgoritmin suunnitteluparametrit

Parametri	Selitys
q	Dynaamisen mallin kohina-arvo
<code>map_matching</code>	Käytetäänkö karttasovitusalgoritmia, T/F
N	Hiukkasten määrä, kokonaisluku
P	Jos karttasovitusalgoritmi on käytössä, rangaistusparametri P , liukuluku
<code>resampling</code>	Adaptiivisen uudelleenotannat kynnsarvo, liukuluku
<code>rss_i_threshold</code>	Datan valinnassa käytettävä signaalin vahvuuden kynnsarvo, kokonaisluku

ja prediktiivisen siloittimen kanssa $(O)(2N)$. Taulukossa 4.5 on esitetty algoritmin suunnitteluparametrit, joiden valintaan palataan empiirisessä esimerkissä alla.

Koeasetelmassa käytetty algoritmin 10 toteutus on ohjelmoitu R-kielellä. Algoritmin toteutus on pääosin vektorisoitu ja tehokas. For-silmukkaa on käytetty ainoastaan aika-askeleiden läpikäyntiin. Koska tämän silmukan muuntaminen vektorisoituun muotoon ei ole mahdollista, voidaan toteutusta pitää näiltä osin hyvin optimoituna. Kaikki algoritmin datan käsittely on toteutettu suorituskäytännön erinomaisella `data.table`-kirjastolla..

Koska algoritmin tuottamat uskottavuudet sekä painot ovat pieniä, on laskentatarkkuusongelmien välttämiseksi toteutuksessa käytetty logaritmoituja painoja ja uskottavuusfunktioita. Tämä ei vaikuta itse algoritmin toimintaan, mutta estää numeeristen ongelmien syntymisen. Tilanteessa, jossa tietyn paikantimen ja kaikkien partikkelien välinen uskottavuus on nolla, päätyvät kaikki painot nolliksi eikä sijaintiestimaattia voida luoda. Tällaisessa tilanteessa uskottavuusfunktion R-toteutus kutsuu itseään rekursiivisesti uudelleen niin, että kyseinen paikannin on tiputettu havainnoista. Alaluvussa 4.4.3 esitetyn datan valinnan lisäksi tämä auttaa poistamaan mahdolliset heijastukset tulokulmadatasta.

Paikannusvirheen laskemisessa on etäisyysfunktiona $d(\cdot)$ käytetty `raster`-kirjaston `pointDistance()`-funktioita. Koodissa on korostettu tiiviyn sijaan luettavuutta ja koodi on kommentoitu kattavasti. Algoritmin R-koodi löytyy <https://github.com/rintakumpu/progradu>, mistä löytyy myös asetelmassa käytetty data csv-muodossa sekä empiirisen esimerkin muun koodin sisältävä R Markdown-notebook.

4.5 Empiirinen esimerkki

4.5.1 Koeasetelma

Koetta varten käytettiin yhden minuutin aikana kertyneitä havaintoja. Havaintoja on datassa yhteensä $N_{obs} = 15018$ kappaletta. Havaintojen aikaleimat on tallennettu

sekunnin tuhannesosan tarkkuudella.

Esimerkissä käytetään SMC-algoritmia Bluetooth-paikannussovelluksessa lähettimen sijainnin laskemiseen. Paikannukseen käytettävä data kerättiin toimistoympäristössä Bluetooth Low Energy (BLE) -lähettimen sekä kattoon sijoitettujen vastaanottimien avulla. Havainnot koostuvat vastaanottimien lähettimien signaalien perusteella laskemista, BLE5.1-standardin mukaisista signaalin tulokulmista eli AoA-havainnoista (angle of arrival). Lopuksi esimerkissä analysoidaan ja vertaillaan algoritmin eri versioiden suorituskykyä sekä suorituskyvyn että paikannustarkkuuden näkökulmasta. Vertailuarvona käytetään perinteistä triangulaatio-algoritmia.

Paikannusesimerkissä lähettimenä toimi 25 Bluetooth-paikannustagista koostuva Walkbase Foculator -testilaite (kuva 4.3), vastaanottimena toimistoympäristöön asennetut neljä Walkbase XR-2 -vastaanotinta (kuva 4.4). Jokainen vastaanotin sisältää kuusitoista antennia, joiden vastaanottamien lähetinsignaalien perusteella vastaanottimet laskevat signaalin tulokulman suhteessa vastaanottimeen. Tarkka tulokulmien laskemiseen käytetty algoritmi on paikantimen antennit toimittaneen Silicon Laboratories, Inc. -yrityksen liikesalaisuus, mutta peruseriaate on arvioida tulokulma mittaamalla eri antenneiden välistä vaihe-eroa ns. IQ-signaalin avulla.

Esteettömässä ympäristössä koeasetelmassa käytetyn järjestelmän kulmavirhe on hyvin pieni ja paikannusongelma voidaan ratkaista riittävällä tarkkuudella suoraan triangulaatio-algoritmeilla. Tässäkin tilanteessa voi paikannusta parantaa suodattimen käytöllä, mutta jo triangulaatio-algoritmin perusversio tuottaa halutun tarkkuuden. Toimistoympäristö on kuitenkin haastava, sillä erityisesti näyttöruudut sekä heijastavat että estävät radiosignaaleja. Silicon Labs lupaa omalle AoA-järjestelmälleen vastaavassa toimistoympäristössä (seitsemällä paikantimella) kulmavirheen välillä $3.7^\circ - 5.7^\circ$. Tämä ei kuitenkaan riitä johdonmukaisesti haluttuun alle metrin paikannustarkkuuteen, joten AoA-paikannus toimistoympäristössä tarjoaa hyvän motivaation SMC-menetelmien käytölle.

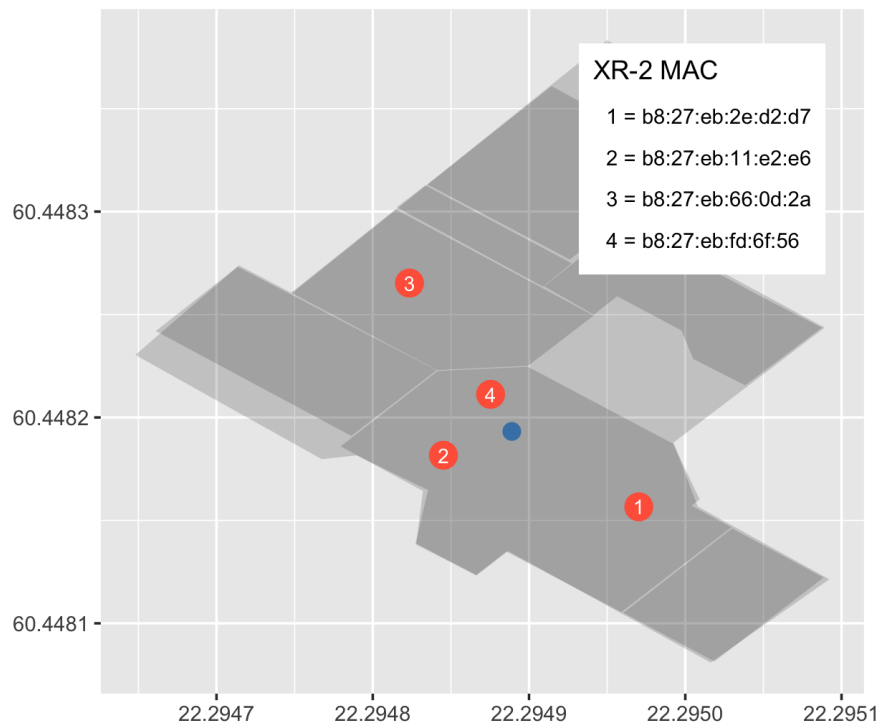


Kuva 4.3: Walkbase Foculator



Kuva 4.4: Walkbase XR-2

Data on kuvattu tarkemmin alaluvussa 5.2. Koeympäristön pohjapiirustus on esitetty kuvassa 4.5. Piirustuksessa XR-2-paikantimet on kuvattu punaisilla numeroiduilla ympyröillä. Foculator-testilaitteen sijainti on kuvattu sinisellä ympyrällä. Toimistoympäristön pohjapiirustus on kuvattu harmaalla niin, että piirustuksesta erottuvat toimiston väliseinät.



Kuva 4.5: Koeasetelman pohjapiirustus

Toimisto valittiin testiympäristöksi, koska siellä testaaminen on helpompaa ja halvempaa kuin aidossa kauppaympäristössä. Lisäksi toimistossa hyvin toimiva järjestelmä todennäköisesti toimii sellaisenaan vähemmän esteisessä kauppaympäristössä.

Dataa kerättiin sekä liikkuvalla että paikallaan olevalla testilaitteella. Paikallaan oleva testilaite asetettiin pöydälle 1.5 metrin korkeudelle. Liikkuvassa tapauksessa testilaite kiinnitettiin robottiin, joka oli ohjelmoitu seuraamaan haluttua liikerataa vastaavia lattiamerkintöjä ennalta määrättyllä vakionopeudella. Yksinkertaisuuden vuoksi tässä tutkielmassa tarkastellaan ainoastaan ongelmaa, jossa testilaite on paikoillaan. Esitetyt mallit soveltuvat kuitenkin myös liikkuvalla laitteella. Data kerättiin yöaikaan, jolloin toimiston käyttöaste oli alhainen. Tällä minimoitiin radiosignaalien tielle osuvien ihmisten vaikutus signaaleihin. Maan pinnan kaarevuus on otettu huomioon koeasetelmassa pisteiden välisiä etäisyyksiä laskettaessa.

4.5.2 Parametrien valinta

Paikannus suoritettiin yhteensä 17 kertaa. Ensimmäisessä vaiheessa tarkasteltiin partikkulien määrän N vaikutusta paikannuskeskivirheeseen ilman uudelleenotantaa sekä priori- että uskottavuusotannalla. Seuraavassa vaiheessa valittiin ehdotusjakuma edellisen vaiheen tulosten perusteella ja tarkasteltiin tilannetta sekä adaptiivisella että jokaisella iteraatiolla suoritettavalla uudelleenotannalla.

Kaikkien tulosten vertailukohtana käytettiin Pierlot & al. artikkelissa “A New Three Object Triangulation Algorithm Based on the Power Center of Three Circles” (2011) esittämää ToTal-triangulaatioalgoritmia. [24] Triangulaatio-algoritmia ei kä-

sitellä tässä tarkemmin, mutta se on esitetty algoritmissa 11. Algoritmia varten valittiin kunakin aika-askeleella k ne kolme paikanninta ja kulmahavaintoa, joiden RSSI-arvo oli korkein.

Algoritmi ajettiin RStudio versiossa 2023.09.0+463 R-ohjelmointikielen versioilla 4.2.0. Tietokoneena käytettiin vuoden 2021 mallia olevaa MacBook Pro -kannettavaa, jossa oli Apple M1 Pro -prosessori sekä 32 gigatavua LPDDR5 -muistia. Suoritusnopeuden mittaamiseen käytettiin `microbenchmark`-kirjastoa. Jokainen algoritmi toistettiin kymmenen kertaa ja suoritusnopeus laskettiin näiden toistojen aritmeettisena keskiarvona.

Algoritmi 11: ToTal (Three object Triangulation algorithm)

Result: Testilaitteen sijaintiestimaatti (x_R, y_R) .

Data: Kolmen paikantimen koordinaatit (x_i, y_i) , $i = \{1, 2, 3\}$ ja näitä vastaavat vastakkaiset kulmahavainnot $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3$.

begin

 Lasketaan muokatut koordinaatit
 $x'_1 = x_1 - x_2, \quad y'_1 = y_1 - y_2, \quad x'_3 = x_3 - x_2, \quad y'_3 = y_3 - y_2.$

begin

 Lasketaan kotangentit
 $T_{12} = \cot(\Phi'_2 - \Phi'_1), \quad T_{23} = \cot(\Phi'_3 - \Phi'_2), \quad T_{31} = \frac{1 - T_{12}T_{23}}{T_{12} + T_{23}}.$

begin

 Lasketaan muokatut ympyröiden keskipisteet (x'_{ij}, y'_{ij})
 $x'_{12} = x'_1 + T_{12}y'_1, \quad y'_{12} = y'_1 - T_{12}x'_1$
 $x'_{23} = x'_3 - T_{23}y'_3, \quad y'_{23} = y'_3 + T_{23}x'_3$
 $x'_{31} = (x'_3 + x'_1) + T_{31}(y'_3 - y'_1), \quad y'_{31} = (y'_3 + y'_1) - T_{31}(x'_3 - x'_1).$

begin

 Lasketaan $k'_{31} = x'_1x'_3 + y'_1y'_3 + T_{31}(x'_1y'_3 - x'_3y'_1).$

begin

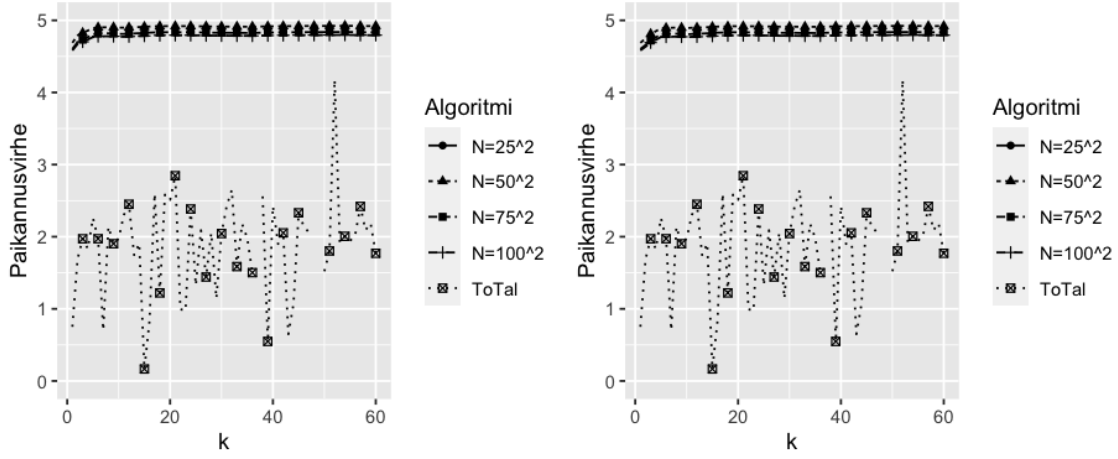
 Lasketaan nimittäjä D (jos $D = 0$ palautetaan virhe).
 $D = (x'_{12} - x'_{23})(y'_{23} - y'_{31}) - (y'_{12} - y'_{23})(x'_{23} - x'_{31}).$

begin

 Lasketaan ja palautetaan sijaintiestimaatti (x_R, y_R) .
 $x_R = x_2 + \frac{k'_{31}(y'_{12} - y'_{23})}{D} \quad y_R = y_2 + \frac{k'_{31}(x'_{23} - x'_{12})}{D}.$

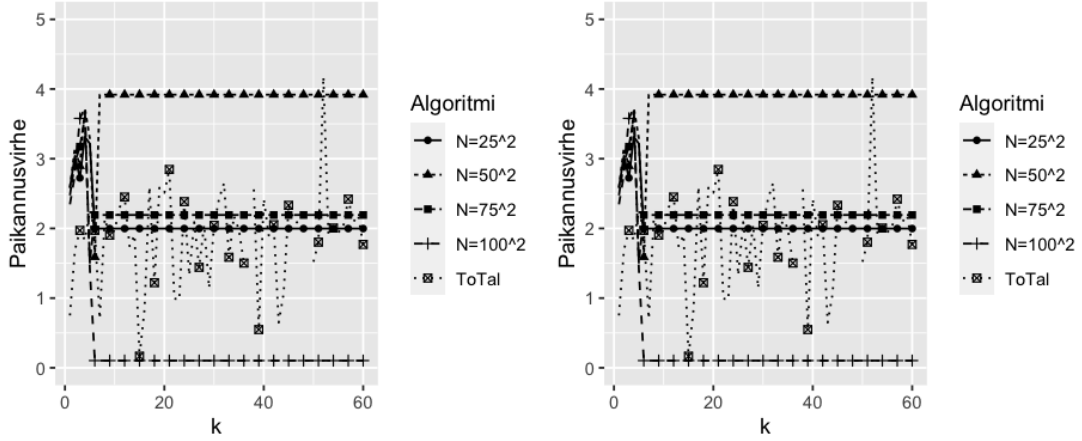
4.5.3 Tulokset

Ensimmäisessä vaiheessa paikannus suoritettiin ilman uudelleenotantaa sekä priorittä uskottavuusotannalla (SIS) partikkelien määrän ollessa $N = \{25^2, 50^2, 75^2, 100^2\}$. Tulokset on esitetty kuvassa 4.6 sekä osana taulukkoa 4.6. Kuten tuloksista huomataan, ei ehdotusjakauman valinnalla ole juurikaan vaikutusta algoritmin toimivuuteen paikannusvirheen suhteen. Partikkelien määrän kasvattaminen ei myöskään automaattisesti paranna paikannustarkkuutta. Tämä viittaa siihen, että koeasetelma on herkkä priorijakauman valinnalle. Tuloksista huomataan lisäksi, että algoritmin aikakompleksisuus on luokkaa $\mathcal{O}(N)$, kuten tukielman teoriaosassa todettiin.



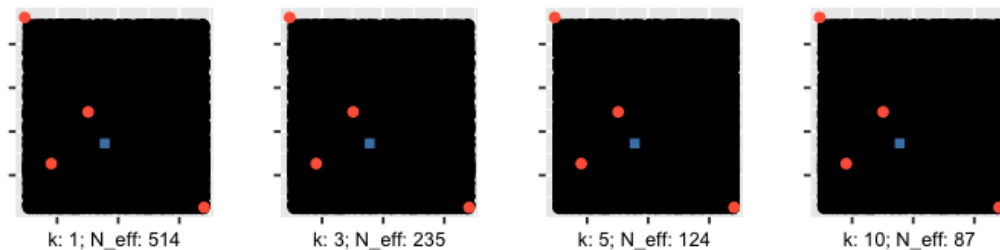
Kuva 4.6: Priori- ja uskottavuusotanta. Ei uudelleenotantaa.

Koska ehdotusjakaumalla ei juurikaan ollut vaikutusta tuloksiin, valittiin seuraavaan vaiheeseen muodoltaan yksinkertaisempi uskottavuusotantaa käyttäen vertailtiin nyt joka iteraatiolla suoritettavaa uudelleenotantaa (bootstrap) sekä adaptiivista uudelleenotantaa, joka suoritettiin aina, kun efektiivinen otoskoko $N_{eff} < 2N/3$. Tulokset on esitetty kuvassa 4.7 sekä osana taulukkoa 4.6. Uudeelleenotantamenetelmän valinta ei vaikuta tuloksiin paikannusvirheen suhteen, mutta kuten oletettua, on adaptiivinen uudelleenotanta nopeampi. Nyt myös partikkelien määrän lisääminen parantaa selkeämmin paikkannustarkkuutta ja $N = 100^2$ partikkelilla saavutetaan jo haluttu alle metrin paikkannustarkkuus.

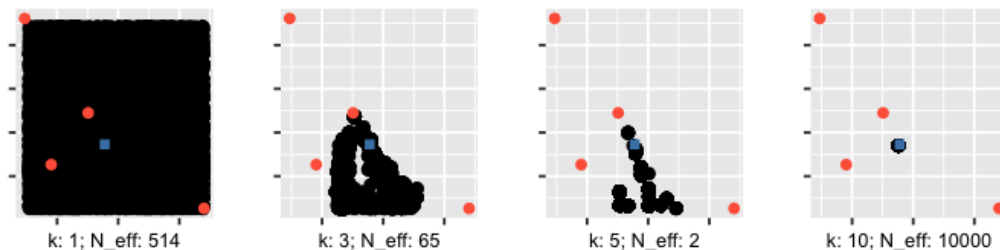


Kuva 4.7: Jokaisen iteraation uudelleenotanta / adaptiivinen uudellenotanta.

Kuvissa 4.8 ja 4.9 esitetään partikkelien jakauma sijainnin suhteen kartalla ajanhetkinä $k = \{1, 3, 5, 10\}$. Punaiset ympyrät kuvaavat vastaanottimia, sininen neliö testilaitteen todellista sijaintia ja mustat ympyrät partikkelien sijainteja. Molemmat kuvat esittävät uskottaavusotannalla saatuja tuloksia, kun $N = 100^2$. Edellisessä kuvassa 4.8 ei ole käytetty uudelleenotantaa. Vaikka partikkelien painoja ei kuvassa olekaan otettu huomioon, on kuvasta helppo huomata otoskoon ehtymisen ongelma. Jälkimmäisessä kuvassa 4.9 on käytetty adaptiivista uudelleenotantaa, joka on suoritettu aika-askelilla 1–6. Tämä ratkaisee otoskoon ehtymisen ja aika-askeleella 10 kaikki partikkelit approksimoivat haluttua sijaintia.



Kuva 4.8: Partikkelikartta. Ei uudelleenotantaa.



Kuva 4.9: Partikkelikartta. Adaptiivinen uudelleenotanta.

Algoritmi	N	Paikannusvirheen ka. (m)	Keston ka. (s)
ToTal	-	2.15	0.001
SIS/Priori	25^2	5.31	7.91
SIS/Priori	50^2	4.91	19.81
SIS/Priori	75^2	4.82	46.02
SIS/Priori	100^2	4.78	81.83
SIS/Uskottavuus	25^2	5.31	7.42
SIS/Uskottavuus	50^2	4.90	19.85
SIS/Uskottavuus	75^2	4.82	45.94
SIS/Uskottavuus	100^2	4.78	82.02
Bootstrap/Uskottavuus	25^2	2.08	8.64
Bootstrap/Uskottavuus	50^2	3.81	21.55
Bootstrap/Uskottavuus	75^2	2.24	45.88
Bootstrap/Uskottavuus	100^2	0.33	82.24
SIR/Uskottavuus	25^2	2.08	7.30
SIR/Uskottavuus	50^2	3.81	18.59
SIR/Uskottavuus	75^2	2.24	42.11
SIR/Uskottavuus	100^2	0.33	79.64

Taulukko 4.6: Paikannusvirheet sekä suoritusajat

Tuloksista huomataan, että uskottavuusotannalla ja uudelleenotannalla SMC-menetelmät tuottavat esitetyssä koeasetelmassa halutun tarkkuuden. Tarvittavalla määrällä partikkeleita tässä käytetyt SMC-algoritmit ovat kuitenkin aivan liian hitaita tuotantokäyttöön. Vaikka algoritmit pystyvät tuottamaan hitaimmillaankin noin sijainnin sekunnissa, pitää käytännön toteutuksessa sijainteja laskea joka sekunti sadoista paikantimista. Todennäköisesti yksinkertaisin tapa saavuttaa haluttu alle metrin paikannustarkkuus nopeammalla laskennalla on lisätä triangulaatio-paikannukseen jokin laskennallisesti kevyempi suodin, esimerkiksi EKF-suodin.

Luku 5

Lopuksi

Tässä tutkielmassa on esitetty pääpiirteittäin SMC-menetelmien teoria Bayesilaisessa tilastotieteellisessä viitekehyksessä. Lisäksi tutkielmassa on käyty läpi uudelleentantaa efektiivisen otoskoon perusteella hyödyntävä SIR-suodinalgoritmi. Lopuksi tutkielmassa on tarkasteltu SIR-algoritmin parametrien valintaan, suorituskyykyyn sekä konvergenssiin liittyviä tuloksia.

Tutkielmassa on lisäksi tarkasteltu miten eri valinnat vaikuttavat algoritmin suorituskyykyyn yksinkertaisen mutta kattavan ja todelliseen ongelmaan sekä dataan perustuvan paikannusesimerkin avulla.

Luku 6

Liitteet (followed by # A chapter‘)

Konvergenssituloksen ?? nojalla kyseinen varianssi $\sigma^2 \rightarrow \lim 0$, kun $N \rightarrow \inf$.

Lähteet

- [1] Johan Alenlöv and Jimmy Olsson. Particle-based adaptive-lag online marginal smoothing in general state-space models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 67(21), 2019.
- [2] Jayaprasad Bojja, Jussi Collin, Simo Särkkä, and Jarmo Takala. Pedestrian localization in moving platforms using dead reckoning, particle filtering and map matching. pages 1116–1120, 2015. doi: 10.1109/ICASSP.2015.7178143.
- [3] Olivier Cappé, Simon J. Godsill, and Eric Moulines. An overview of existing methods and recent advances in sequential monte carlo. *Proceedings of the IEEE*, 95(5):899–924, 2007.
- [4] Nicolas Chopin. Central limit theorem for sequential monte carlo methods and its application to bayesian inference. *The Annals of Statistics*, 32(6):2385–2411, 2004.
- [5] Dan Crisan. The stochastic filtering problem: A brief historical account. *Journal of Applied Probability*, 51A:13–22, 2014.
- [6] Dan Crisan and Arnaud Doucet. Convergence of sequential monte carlo methods. URL https://www.stats.ox.ac.uk/~doucet/crisain_doucet_convergenceofSMC2000.pdf.
- [7] Dan Crisan and Arnaud Doucet. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(3):736–746, 2002.
- [8] Pavel Davidsonl, Jussi Collin, and Jarmo Takala. Application of particle filters for indoor positioning using floor plans. pages 1–4, 2010. doi: 10.1109/UPINLB S.2010.5653830.
- [9] Arnaud Doucet, Simon Godsill, and Christophe Andrieu. On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3):197–208, 2000.
- [10] N.J. Gordon, D.H. Salmond, and A.F.M Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings F (Radar Signal Process)*, 140(2):107–113, 1993.
- [11] Mohinder S. Grewal and Angus P. Andrews. Applications of kalman filtering in aerospace 1960 to the present. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(3):69–78, 2010.

- [12] Marco Gunia, Adrian Zinke, and Niko Joram. Analysis and design of a music-based angle of arrival positioning system. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 19(3):66, 1–41.
- [13] Fredrik Gustafsson. Particle filter theory and practice with positioning applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 25(7):53–82, 2010.
- [14] Monson H. Hayes. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [15] Genshiro Kitagawa. Monte carlo filter and smoother for non-gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(1): 1–25, 1996.
- [16] Anthony Lee and Nick Whiteley. Variance estimation in the particle filter. *Biometrika*, 105(3):609–625, 2018.
- [17] J. Liu and R. Chen. Sequential monte carlo methods for dynamic systems. *Journal of the American Statistical Association*, 93(443):1032–1044, 1998.
- [18] Alessandro Mastrototaro and Jimmy Olsson. Adaptive online variance estimation in particle filters: the alvar estimator. *Statistics and Computing*, 33(77), 2022.
- [19] Pierre Del Moral. Nonlinear filtering: Interacting particle resolution. *Markov Processes and Related Fields*, 2(4):555–580.
- [20] D. Munoz, R. Enriquez-Caldera, and C. Vargas. *Position Location Techniques and Applications*. Elsevier, 2009.
- [21] Samuel Nyobe, Fabien F. Campillo, and Serge Moto. The one step fixed-lag particle smoother as a strategy to improve the prediction step of particle filtering. *hal-03464987*, 2021. URL <https://inria.hal.science/hal-03464987v2/file/papier.pdf>.
- [22] George Oguntala, Raed Abd-Alhameed, Stephen Jones, James Noras, Mohammad Patwary, and Jonathan Rodriguez. Indoor location identification technologies for real-time iot-based applications: An inclusive survey. *Computer Science Review*, 30:55–79, 2018. ISSN 1574-0137. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2018.09.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1574013718301163>.
- [23] Jimmy Olsson and Randal Douc. Numerically stable online estimation of variance in particle filters. *Bernoulli*, 25(2):1504–1535, 2019.
- [24] V. Pierlot, M. Urbin-Choffray, and M. Van Droogenbroeck. A new three object triangulation algorithm based on the power center of three circles. *Research and Education in Robotics - EUROBOT 2011*, page 248–262.
- [25] Arno Solin, Simo Särkkä, Juho Kannala, and Esa Rahtu. Terrain navigation in the magnetic landscape: Particle filtering for indoor positioning. *2016 European Navigation Conference (ENC)*, pages 1–9, 2016. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:23211261>.

- [26] Simo Särkkä. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press, 2013. URL https://users.aalto.fi/~ssarkka/pub/cup_book_online_20131111.pdf.