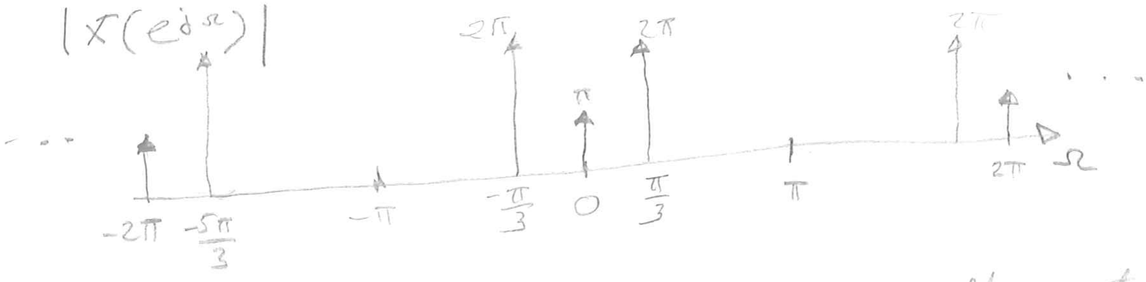
ASS - Ex. Parcial 29/10/15 - Modelos A y B - SOLUCIÓN CONJUNTA

## Ejercicio 1

$$X(e^{j\Omega}) = j2\pi\,\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{3}\right) + \pi\,\delta(\Omega) - j2\pi\,\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{3}\right)$$ periódica $2\pi$

$|X(e^{j\Omega})|$




a.1) ⊛ TF deltas $\Rightarrow$ $x[n]$ periódica, las deltas están en los múltiplos de $\frac{2\pi}{N}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\frac{2\pi}{N}\cdot 0 = 0\\ \frac{2\pi}{N}\cdot 1 = \frac{\pi}{3}\end{array}\right\}$ $N=6$

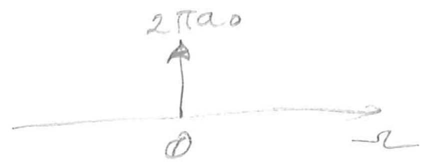
⊛ El módulo de la TF es par $\Rightarrow$ $x[n]$ es real

a.2) ⊛ $X_{agr} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \equiv X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=0}$ ya que $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\underbrace{e^{-j\Omega n}}_{\text{si } \Omega=0 \Rightarrow 1}$

$\boxed{X_{agr} = X(e^{j0}) = \pi\cdot\delta(0) = \infty}$ (Lógico ya que la señal es periódica)

⊛ ¿Valor medio? Si $x[n]$ es periódica es el valor del coef. $k=0$ del DSF.

Puesto que sabemos que




podemos deducir que $2\pi a_0 = \pi \Rightarrow \boxed{a_0 = 1/2}$

$\boxed{\bar{x} = x_{medio} = a_0 = 1/2}$

b) Hay varias formas de hacerlo:

OPC 1 $\quad \exists$ 3 coef del DSF no nulos

$$a_0 = 1/2 \qquad a_1 = -j \quad y \quad a_{-1} = j$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-3}^{2} a_k e^{+j\frac{2\pi}{6}kn}} = \frac{1}{2}\cdot 1 + j\left(e^{-j\frac{2\pi}{6}n} - e^{+j\frac{2\pi}{6}n}\right) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} + j\left[(-j)\sin\left(\frac{2\pi}{6}n\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{6}n\right)\right] = \frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{2\pi}{6}n\right) = \frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}$$

OPC 2 $\quad$ Directamente haciendo TF inversas de deltas

$$x[n] = j e^{-j\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{2} e^{j0n} - j e^{+j\frac{\pi}{3}n} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

c) Modelo A

Resp. del sist. a la frec. $-\frac{\pi}{3}$

Resp. del sist. a la frec. 0

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = H\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot j\, e^{-j\frac{\pi}{3}n} + H(0)\frac{1}{2} + H\left(\tfrac{\pi}{3}\right)(-j)\cdot e^{+j\frac{\pi}{3}n}$$

Al ser LTI las exp. son autofunciones

Con la tabla sabemos que

$H\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$ (fila 1) $\quad$ y $\quad H\left(+\frac{\pi}{3}\right) = 0$ (fila 1)

$H(0) = \frac{1}{-3}$

Por lo que $\quad \boxed{y[n] = \frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-1}{6}}$

Modelo B

Aunque no nos dan $h[n]$ nos dicen que


Como el sistema es LTI eso es equivalente a que nos digan que


Así que en realidad sí sabemos la Resp. al Imp. que es $h[n] = 2\,\delta[n-3]$

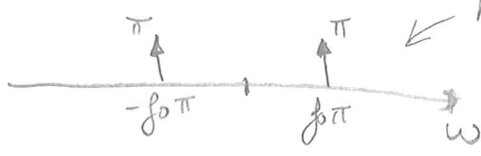
Por tanto la salida para $x[n] = \frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ es

$$\boxed{y[n] = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi}{3}(n-3)\right) = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi}{3}n - \pi\right) = = 1 - 4\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}$$

**Ejercicio 2**

$X(j\omega)$

$x(t) = \cos(f_0 \pi t) \Rightarrow$

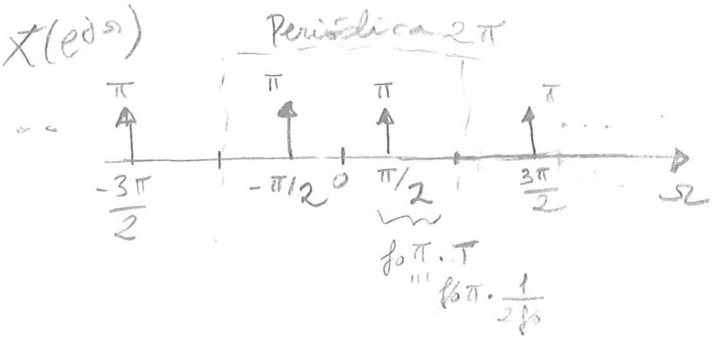



Ancho de Banda $\omega_M = f_0 \pi$

$x[n] = x(n \cdot T)$ muestreamos a tasa $T$ y nos dicen que $T = \frac{1}{2f_0}$

a) Freq muestreo $\frac{2\pi}{T} = 4\pi f_0 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 4\omega_M$, por lo que $\nexists$ solapamiento!

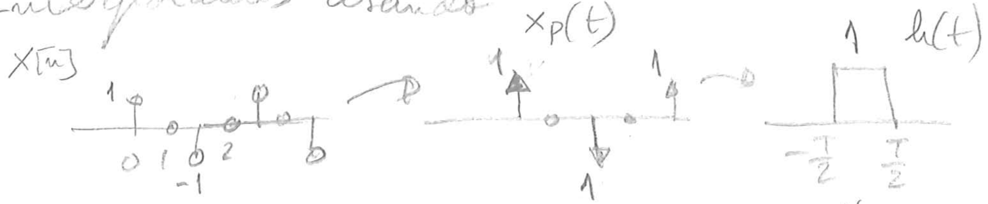
b) $X(e^{j\Omega})$



¿Por qué no cambia la amplitud?

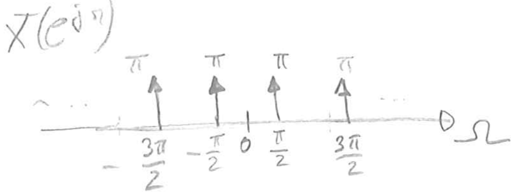
- Al muestrear modificamos la amplitud $\times \frac{1}{T}$
- No obstante una delta es  , por lo que al expandirla por un factor T estamos haciendo su área T veces más grande $\Rightarrow$ La amplitud de la delta se modifica por $\times$ T
- Los 2 efectos se cancelan y obtenemos la misma amplitud. $\Rightarrow$ Lógico porque si $x(t) = 1$ y la muestreamos tenemos $x[n] = 1$ y en ambos casos tanto $X(j\omega)$ como $X(e^{j\Omega})$ son una delta de la misma amplitud ($2\pi$).

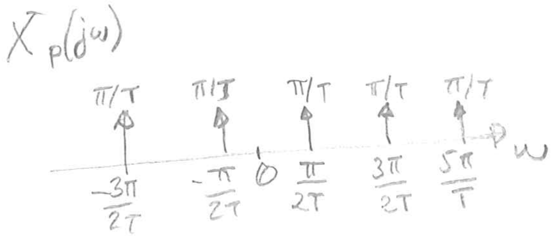
c) Interpolamos usando




$$H(j\omega) = \frac{1}{-\omega j}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{+j\omega\frac{T}{2}}\right) =$$
$$= \frac{\sin(\omega \cdot T/2)}{\omega}$$

En frecuencia




$$H(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2T}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2T}\cdot\frac{T}{2}\right)}{\pi/2T} = \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/2T} = T\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

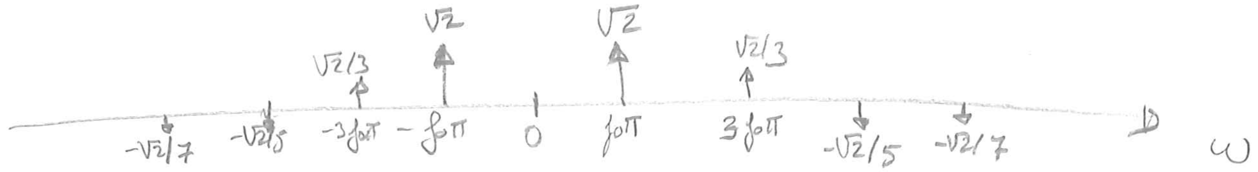
$$H(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{3\pi}{2T}} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2T}\frac{T}{2}\right)}{3\pi/2T} = \frac{T\sqrt{2}}{3\pi}$$

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{5\pi}{T}} = \frac{\sin(5\pi/4)}{5\pi/2T} = \frac{-T\sqrt{2}}{5\pi}$$

Es decir que tenemos

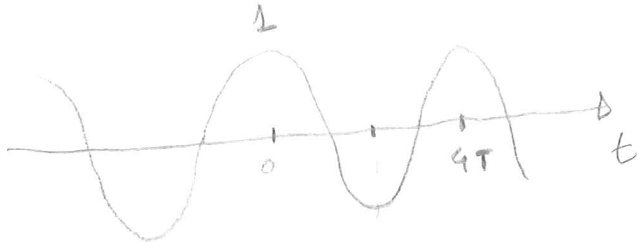
$X_r(j\omega)$

Modelo A




¿Qué está pasando en tiempo?

$x(t)$



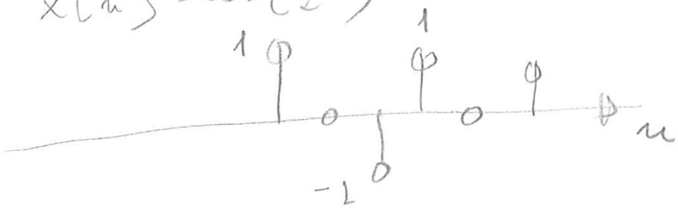

$\cos(f_0\pi t) \Rightarrow$ Periódica con periodo

$$T_0 = \frac{2\pi}{f_0 \cdot \pi} = \frac{2}{f_0}$$

Como $T = 2f_0 \Rightarrow$ Estamos muestreando cada $\frac{\text{Periodo}}{4}$

$\Downarrow$

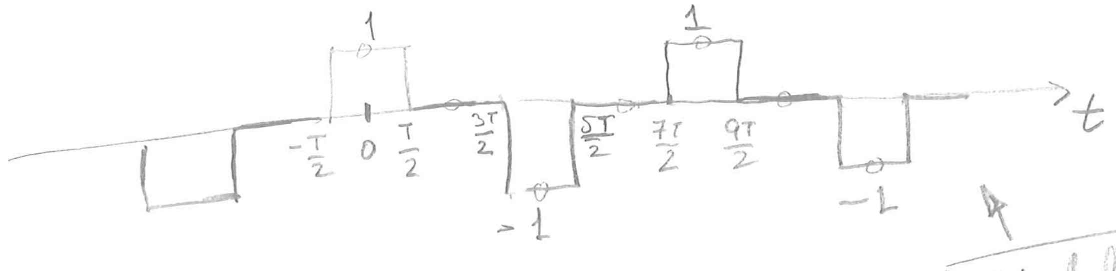
$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$




$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \dot{4} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ -1 & \text{si } n = \dot{4}+2 \end{cases}$$

Al interpolar

$x_r(t)$




Modelo B