Ampliación de Señales y Sistemas

Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo

Antonio G. Marqués

La presentación contiene material del OCW del MIT (6.003 Signals and Systems S10, F11), así como material de A. Guerrero y A. Wilsky

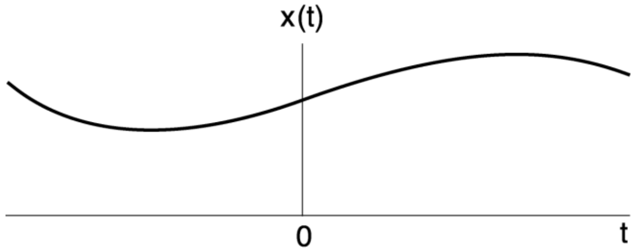
Ubicándonos

- <u>Tema 1</u>: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
  - 1.1 Revisión de señales y sistemas en tiempo continuo
  - 1.2 Señales en tiempo discreto
  - 1.3 Sistemas en tiempo discreto
  - 1.4 Convolución suma
- <u>Tema 2</u>: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia
- <u>Tema 3</u>: Muestreo
- <u>Tema 4</u>: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier
- <u>Tema 5</u>: Transformada Z
- <u>Tema 6</u>: Introducción al diseño de filtros discretos

- Comentarios:
  - Las señales discretas son más fáciles de manejar que las señales continuas, aunque para cuentas con “papel y lápiz” puede ser más difícil porque hay que usar sumatorios en lugar de integrales
  - La delta de Kronecker en cero vale uno, mientras que la de Dirac vale infinito
  - Hay un número finito de exponenciales discretas con periodo N
  - Para dibujar una señal compleja hacen falta dos gráficas en 2D (módulo y fase)
  - Trabajo previo: repaso de la fórmula de la serie geométrica y de la serie aritmética

1.1 Revisión de señales y sistemas en tiempo continuo

- ¿Qué es una señal?
  - Es un modelo matemático para representar una magnitud que varía en el tiempo.
  - Hay varios tipos de señales. E.j.: radio, voltajes, temperatura, ...



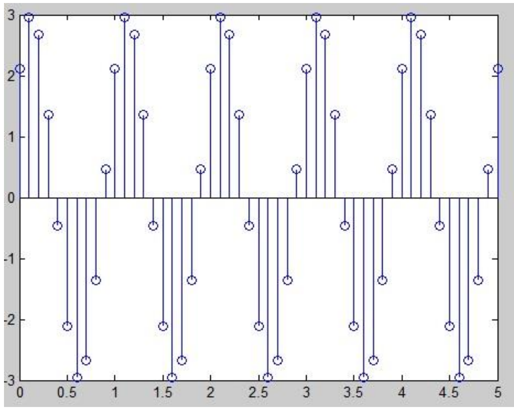
Señales en tiempo continuo (CT): *x*(*t*), *t* — valores continuos

$$x(t) = sin(\pi t)$$

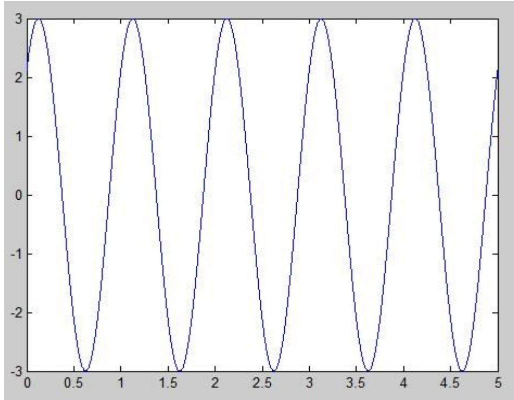
- Unidimensionales vs. Multidimensionales
  - Señal unidimensional: aquella en la que la magnitud dependa sólo de una variable.
  - Un caso muy habitual es que dicha variable represente el tiempo $x \equiv t$
  - Otras variables unidimensionales: $x \equiv R$ (coordenada radial), $x \equiv w$ (frecuencia)…
  - Señales multidimensionales: E.j. una imagen aérea (horizontal y vertical)

1.1 Revisión de señales y sistemas en tiempo continuo

- Señales continuas vs. Señales discretas
  - Continuas: definidas para cualquier valor de tiempo en el intervalo continuo.
    - E.g: voz.
  - Discretas: definidas sólo para ciertos valores de tiempo.
    - E.g: precio de cierre de una acción



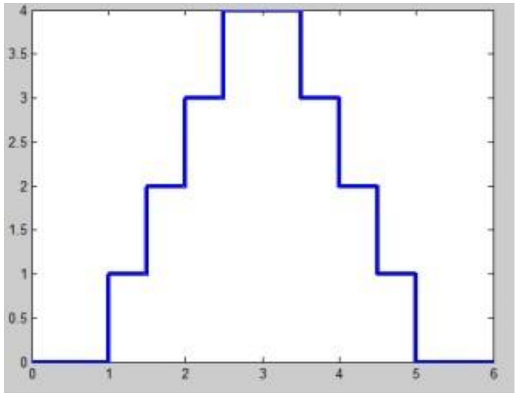
Señal discreta



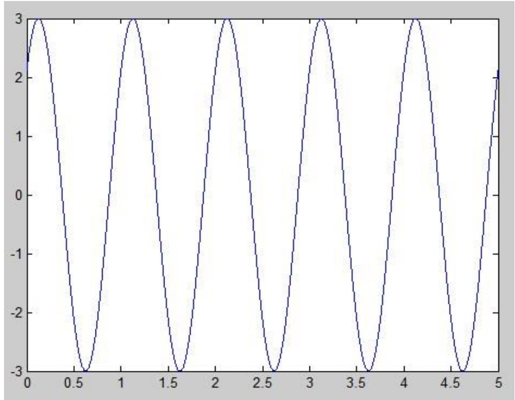
Señal continua

1.1 Revisión de señales y sistemas en tiempo continuo

- Señales digitales vs. Señales analógicas
  - Las señales digitales son aquellas en las cuales su amplitud sólo puede tomar ciertos valores finitos dentro de un intervalo de tiempo.
  - Las señales analógicas son aquellas en las cuales su amplitud puede tomar diferentes valores infinitos dentro de un intervalo de tiempo.



Señal digital



Señal analógica

Operaciones con señales

- ¿Qué se le puede hacer a una señal?
  - Cualquier operación/transformación (matemática) que se nos ocurra.
- Hay una serie de operaciones que son importantes (porque tienen un significado físico, porque son fáciles de analizar, porque son útiles para el diseño, ...). Entre ellas destacan:
  - Cambio de nivel: $CT: Ax(t)$
  - Desplazamiento: $CT: x(t - t_0)$
  - Abatimiento: $CT: x(-t)$
  - Cambio de escala: $CT: x(at)$ (compresión vs. expansión)
  - Y más, como por ejemplo: conjugación, derivación/integración (CT) ...

Señales de interés

- Reales vs. complejas
  - Si todos los valores de la señal {x(t)} son reales se dice que la señal es real, en otro caso se dice que se trata de una señal compleja. Una señal compleja {x(t)} puede escribirse como:

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$$

siendo $x_r(t), x_i(t)$ las partes reales e imaginarias de la señal $x(t)$

Ej. Señal real:

$$x(t) = cos(0.25t)$$

Ej. Señal compleja:

$$y(t) = e^{j0.3t} = cos(0.3t) + jsin(0.3t)$$

$$y_r(t) = cos(0.3t); y_i(t) = sin(0.3t)$$

- Pares vs. Impares
  - Señal conjugada simétrica: $x(t) = x^*(-t)$

    x(0) es un número real. Si x(t) es REAL se dice que se trata de una señal PAR.
  - Señal conjugada antisimétrica: $x(t) = -x^*(-t)$

    x(0) es un número imaginario puro. Si x(t) es real se dice que se trata de una señal IMPAR, en este caso x(0)=0.

Señales de interés

- Hermítica vs. Antihermítica
  - Una señal x(t) es hermítica si cumple:

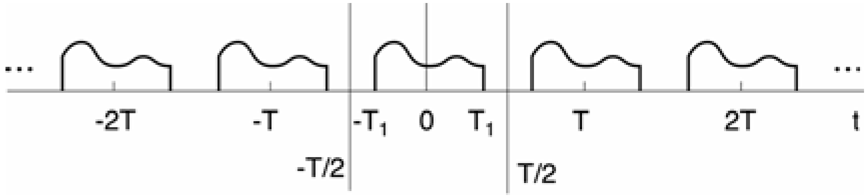
$$x(t) = x^*(-t)\ \forall t$$

  - Una señal x(t) es antihermítica si cumple:

$$x(t) = -x^*(-t) \forall t$$

- Periódicas

$$CT:\ \exists\, T > 0 \mid x(t) = x(t+T),\ \forall t$$



T es el periodo fundamental, la señal también se repite cada 2T, 3T, …

Pregunta: si se suman dos señales periódicas con el mismo periodo ¿tenemos una señal periódica? ¿y si se multiplican?

Señales de interés

- Exponenciales complejas (CE)

Exp. real

$$x(t) = ce^{st} = re^{j\theta}e^{\sigma t}e^{jw_0 t} = re^{\sigma t}e^{j(w_0 t+\theta)}$$

Amplitud

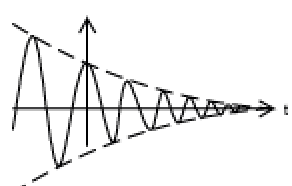
Exp. compleja

$$\boxed{\begin{array}{l} c = re^{j\theta} \\ s = \sigma + jw_0 \end{array}} \qquad w_0 = 2\pi f$$

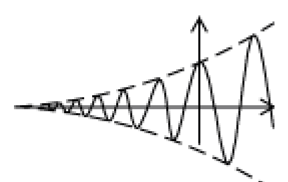
$$Aplicando\ Euler:\ \ e^{jw_0 t} = cos(w_0 t) + jsin(w_0 t)$$

$$\Re_e\{x(t)\} = re^{\sigma t}cos(w_0 t + \theta)$$

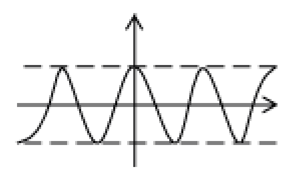
¿por qué son importantes?



σ<0



σ>0

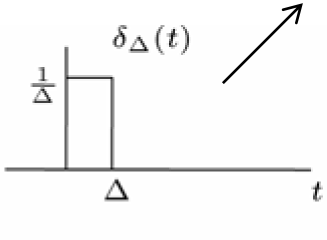


σ=0

Otras señales de interés: delta y escalón

- Delta (de dirac) o impulso: $\delta(t)$
  - La función delta de dirac esta dada por: $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$

tiene área unidad



  - Propiedades:

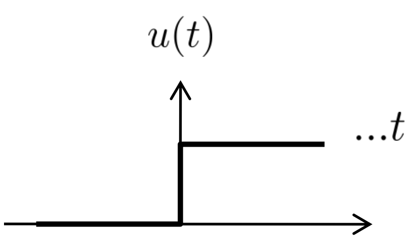
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

  - **Nota: puesto que la delta de Dirac en t=0 vale infinito, estrictamente no es una función, sino lo que se conoce como una función generalizada (o distribución)*

- Escalón unitario: *u*(*t*): escalón unitario en CT
  - La función escalón unitario se define como la integral de la función impulso desde el infinito negativo hasta el tiempo t. La integral de la función impulso es 0 si el tiempo t es menor que 0, y 1 si el tiempo t es mayor que 0.

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$



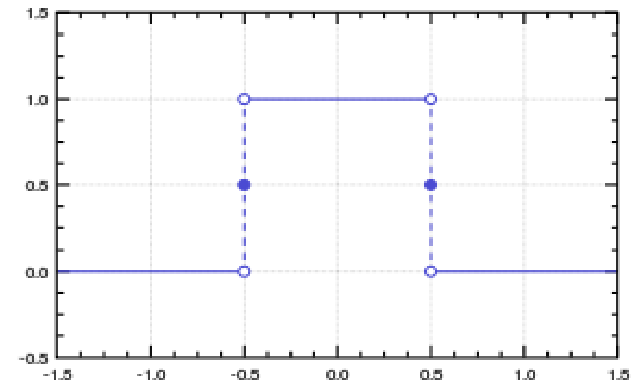
Otras señales de interés: puslo y sinc

- Pulso: $p(t)$

$$p(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < 1/2 \\ 0, & \text{si } |t| > 1/2 \end{cases}$$

  - Si no tiene área unidad: $p_T(t) = p(t/T)$

$$p_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < T/2 \\ 0, & \text{si } |t| > T/2 \end{cases}$$



El valor en t=0.5 y t=-0.5 no es muy relevante

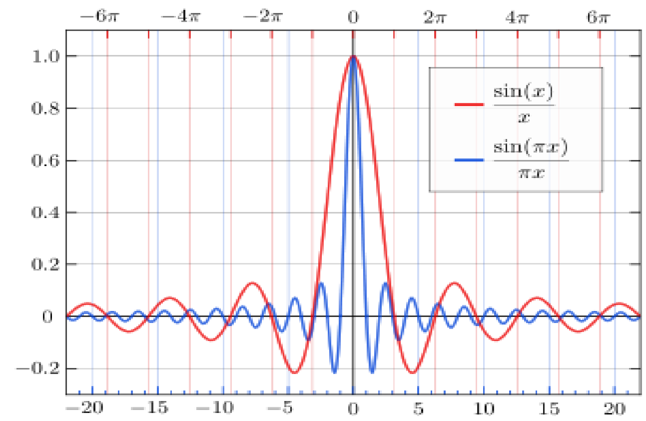
- Seno cardinal: $sinc(t)$

$$sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

  - Si no tiene área unidad:

$$sinc_T(t) = sinc(t/T) = \frac{sinc(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

* Nota: Los ceros están en los múltiplos de T



Los ceros están en los múltiplos de 1

Características de las señales

- Valor medio: se calcula de forma distinta dependiendo de si la señal es periódica, definida en un intervalo, etc.
- Valor de pico o valor máximo
- Energía:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Potencia media:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

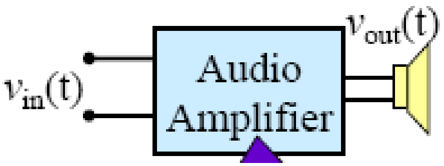
La potencia puede verse como la densidad de energía por cada unidad de tiempo.

- Recuérdese:
  - Hay señales definidas en potencia y señales definidas en energía
    - Si la energía es finita la potencia es...
    - Si la potencia es finita la energía es...
    - Si las señales son periódicas...

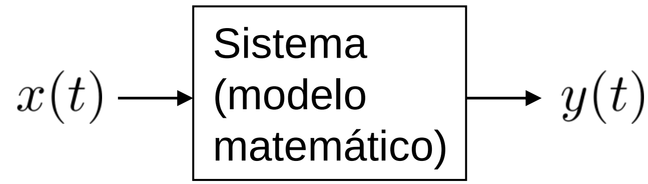
Sistemas continuos: modelos

- ¿Qué es un sistema? Algo que transforma una señal en otra (operador de señales)

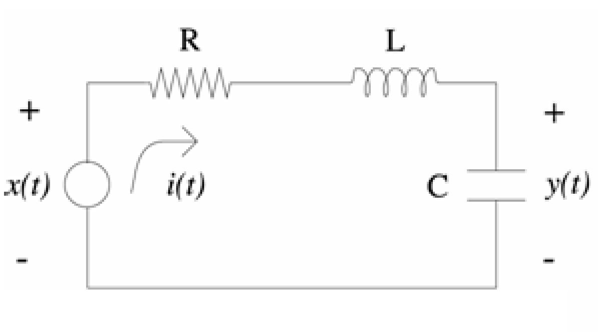
Modelo físico



Modelo de sistema



- Ejemplo 1 (CT): circuito RLC, sistema descrito por una ec. diferencial



$$R \;\; i(t) + L\frac{d_i(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

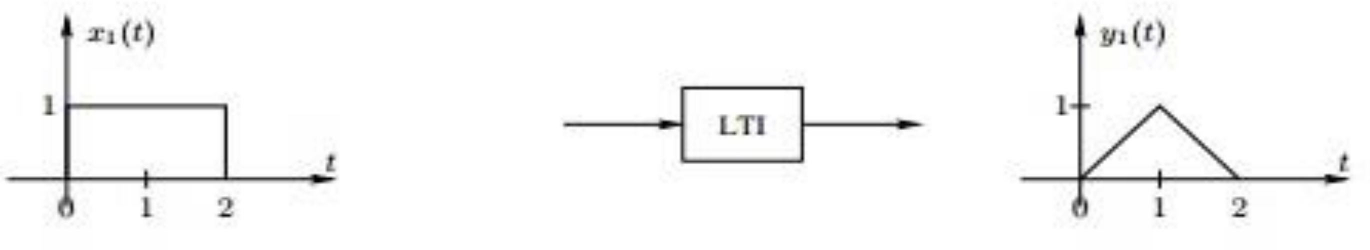
$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

*Nota: sistemas físicos muy diferentes se pueden modelar de forma muy similar

Propiedades de los sistemas
(Causalidad, linealidad, invarianza temporal, etc.)

- ¿Por qué?
  - Importantes implicaciones físicas/prácticas
  - Nos permiten analizar y comprender mejor su estructura y su funcionamiento
  - Determinados modelos pueden ser más adecuados para sistemas que cumplan ciertas propiedades (p.e. respuesta al impulso para sistemas lineales)



Recuérdese: Modelado + Análisis + Diseño + Implementación

Causalidad

- Un sistema es causal si la salida no anticipa valores futuros de la entrada. Es decir, la salida en un instante de tiempo sólo depende de los valores de la entrada hasta ese instante

- **TODOS** los sistemas físicos en tiempo real son causales, porque el tiempo sólo se mueve “hacia adelante”

- Los sistmas que transforma señales que varían en el espacio pueden ser no causales (podemos movernos de arriba a abajo y de izquierda a derecha)

- Sistemas que procesan señales temporales grabadas (no en tiempo real) pueden ser no causales

Causalidad

- Matemáticamente (CT): Un sistema $x(t) \rightarrow y(t)$ es <u>causal</u> si:

$$
\begin{aligned}
cuando: \quad & x_1(t) \rightarrow y_1(t) \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t) \\
y: \quad & x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \leq t_0 \\
entonces: \quad & y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \leq t_0
\end{aligned}
$$

  – Es decir que si dos señales distintas son iguales hasta un cierto instante t0, la salida a esas dos señales será la misma hasta al menos el instante t0

- <u>Anticausal</u>: la salida SÓLO depende del futuro de la entrada
- <u>No causal</u>: la salida depende tanto de valores pasados como futuros de la entrada

*Nota: Para sistemas lineales e invariantes (LTI) hay una manera más sencilla de comprobarlo, en las transparencias finales de esta parte se mostrará cómo

¿Son causales?

- Ejercicio:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t+1) \\
y(t) &= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \\
y(t) &= x(t) - x(t+0.5) \\
y(t) &= t^2(x(t) - x(t+0.5))
\end{aligned}
$$

Invarianza Temporal (IT)

- Informalmente, un sistema es invariante en el tiempo si su comportamiento no depende del instante de tiempo en que está.
  - Matemáticamente : un sistema $x(t) \to y(t)$ es IT si para cualquier entrada $x(t)$ y cualquier desplazamiento temporal t_0

$$si: \quad x(t) \to y(t)$$
$$entonces: \quad x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$

Ejercicio: ¿Son IT?

$$y(t) = sin(x(t))$$
$$y(t) = t \cdot x(t)$$

Ahora podemos deducir algo !!!

- Si la entrada a un sistema IT es periódica, entonces la salida también será periódica y con el mismo periodo

Por ejemplo:

$$supongamos: \quad x(t+T) = x(t)$$

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

Entonces por IT:

$$x(t+T) \rightarrow y(t+T)$$

Las entradas son iguales

Por tanto, las salidas serán iguales $i.e., y(t) = y(t+T)$

Linealidad

- Muchos sistemas son no lineales: Por ejemplo, muchos elementos de los circuitos (diodos...), los modelos econométricos, la dinámica de los aviones, etc.

- En esta asignatura nos centraremos en los <u>SISTEMAS LINEALES</u>

- ¿Por qué?
  - Modelan de manera precisa muchos sistemas
  - Nos permiten examinar perturbaciones de “pequeña señal” cerca del punto de operación
  - Son más tratables analíticamente, lo que nos proporciona las bases y las herramientas necesarias para comprender y entender mejor su funcionamiento
  - Sistemas más complejos (o realistas) pueden modelarse a partir de bloques interconectados formados (en parte) por sistemas lineales

Linealidad

- Poseen la propiedad de superposición (linealidad) ⇒ si la entrada a un sistema lineal se puede representar como combinación lineal de un conjunto de señales básicas (diccionarios o bases de señales), la salida será la misma combinación lineal de las respuestas del sistema a esas señales básicas.
- Un sistema (CT) es lineal si cumple la propiedad de superposición:

$$Si: \quad x_1(t) \to y_1(t) \quad y \quad x_2(t) \to y_2(t)$$
$$entonces: \quad ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$$

  - Para sistemas lineales: entrada cero $\to$ salida cero

Ejercicio: Estudiar la linealidad de los sistemas:

$$y(t) = Ax(t)$$
$$y(t) = tx(t)$$
$$y(t) = x^2(t)$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$
$$y(t) = sin(x(t))$$

Sin memoria

- Un sistema no tiene memoria si la salida sólo depende del valor de la entrada en el mismo instante de tiempo.

- Matemáticamente si: $$x_1(t_0) = x_2(t_0) \rightarrow y_1(t_0) = y_2(t_0)$$

Ejercicio: Estudiar si los siguientes sistemas son con o sin memoria:

$$y(t) = x(t)$$
$$y(t) = x(t-1)$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$
$$y(t) = 2(x(t) - x^2(t))^2$$

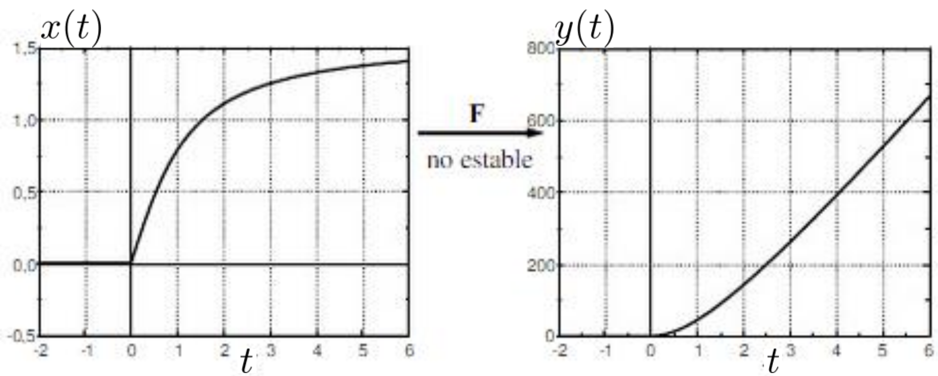
Estabilidad

- Un sistema es estable si entradas acotadas producen salidas acotadas.

$$\forall t, \quad |x(t)| < B_x \quad (B_x \in \Re^+) \Longrightarrow \forall t, \quad |y(t)| < B_y \quad (B_y \in \Re^+)$$

- Ejemplo:

Sea un sistema tal que: $x(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$



Resulta fácil comprobar que este sistema no es estable, dado que existen gran cantidad de señales de entrada acotadas que dan lugar a señales de salida no acotadas.

Ejercicio: Estudiar la estabilidad del siguiente sistema:

$$y(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau) d\tau$$

Invertibilidad

- Un sistema es invertible si:

T{} denota una transformación genérica

$$\exists T^{-1} | \ \ y(t) = T\{x(t)\} \Longrightarrow x(t) = T^{-1}\{y(t)\}$$

- Una consecuencia inmediata es que si dos entradas distintas producen la misma salida, el sistema no es invertible

Ejercicio: Estudiar si los siguientes sistemas son invertibles:

$$y(t) = 0$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$
$$y(t) = x^2(t)$$
$$y(t) = 2x(t)$$

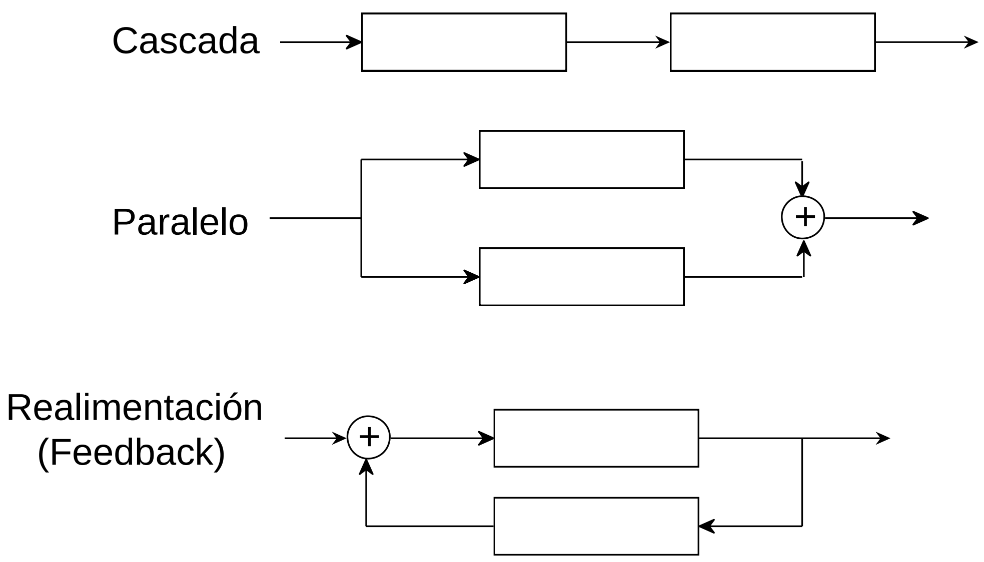
- Observaciones:

Anticausal	$\Rightarrow$	con memoria
Sin memoria	$\Rightarrow$	causal

Interconexión de sistemas

- Un concepto importante es la interconexión de sistemas.
  - Para construir sistemas más complejos uniendo subsistemas más simples
  - Para modificar la respuesta de un sistema

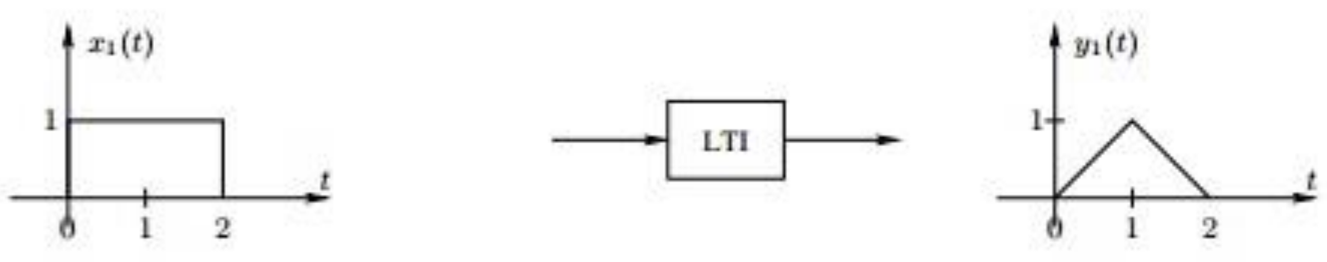
- Diagrama de bloques:



$$Representa \quad con \quad bloques: \quad y(t) = (2x(t) - x^2(t))^2$$

Sistemas LTI

- Nos centraremos en sistemas LTI
  - Muchos sistemas reales son LTI
  - Si conocemos la respuesta de un sistema LTI a algunas entradas, vamos a conocer la respuesta a otras muchas entradas
  - Calcular la salida de sistemas LTI es “sencillo”
  - Entender lo que hacen los sistemas LTI es “sencillo” (incluida su interconexión)
  - Diseñar sistemas LTI es “sencillo”
  - Entender lo que pasa cuando se interconectan sistemas LTI es “sencillo”
- Ventajas matemáticas que resultan clave:
  - La salida de un sistema LTI puede calcularse a través de una convolución
  - Las exponenciales son autofunciones de los sistemas LTI



SLTI en CT: convolución integral

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{CT LTI}} \longrightarrow y(t)$$

h(*t*) es la respuesta al impulso:

$$\boxed{\delta(t) \rightarrow h(t)}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Convolución integral}}$$

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

h(*t*) caracteriza completamente a todo sistema LTI en CT

Cálculo de convoluciones

- Convolución: operación matemática útil en muchos ámbitos
  - Procesamiento de señal y comunicaciones: salida de un sistema LTI
  - Estadística: cálculo de pdfs
- ¿Cómo se calcula una convolución?
  - Convolución con deltas ➔ Fácil (obtengo la señal que no es una delta)
  - Convolución con exponenciales ➔ Fácil (obtengo una exponencial)
  - Convolución con otras señales ➔ Difícil (numérica o analítica)

$$y(t) = x(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

  - Cuatro pasos:

$$h(\tau) \xrightarrow[\text{Invertir}]{} h(-\tau) \xrightarrow[\text{Desplazar}]{} h(t-\tau)$$

$$\xrightarrow[\text{Multiplicar}]{} x(\tau)h(t-\tau) \xrightarrow[\text{Integrar}]{} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

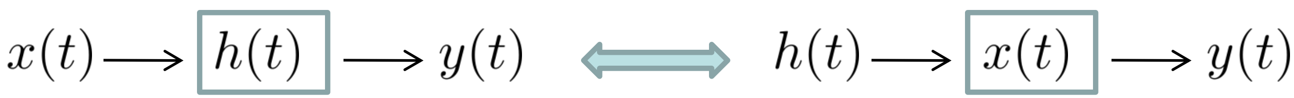
Propiedades y ejemplos de la convolución

- El elemento neutro de la convolución es la delta (impulso unitario): $\delta(t)$

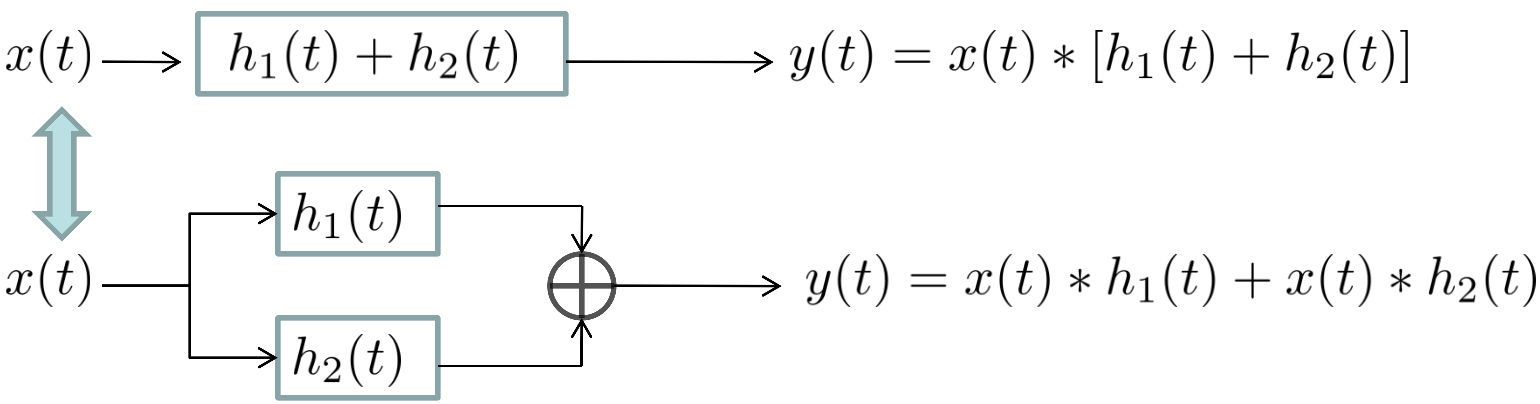
$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- Conmutativa:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



- Distributiva:



Propiedades y ejemplos de la convolución

- Asociativa:

$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \Longleftrightarrow y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

$$y(t) = x(t) * [h_2(t) * h_1(t)] \Longleftrightarrow y(t) = [x(t) * h_2(t)] * h_1(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t) \Longleftrightarrow x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Respuesta al escalón:

$$s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$$

*Nota: Las equivalencias se cumplen cuando los pasos intermedios dan resultados finitos. Por tanto, la convolución continua tiene estructura de grupo conmutativo.

Propiedades de los sistemas LTI → se traducen en propiedades sobre *h*(*t*)

- Causalidad:

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

- Estabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \rightarrow h(t) \quad es \quad absolutamente \quad integrable$$

- Sin memoria:

$$h(t) = 0, \quad \forall t \neq 0 \rightarrow y(t) = cte.x(t)$$

- Invertibilidad:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

Las exponenciales como autofunciones de los LTI

- ¿Qué es una autofunción?

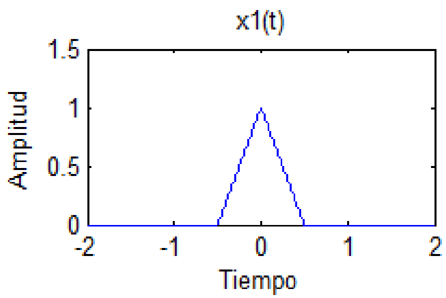
$$\underbrace{\phi_k(t)}_{\text{autofunción}} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema genérico}} \longrightarrow \underbrace{\lambda_k}_{\text{autovalor}}\ \underbrace{\phi_k(t)}_{\text{autofunción}}$$

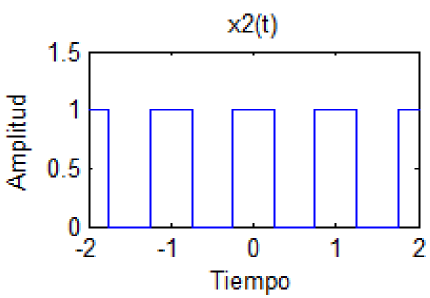
  - Autofunción $\rightarrow$ misma función a la salida con un factor de "ganancia"
  - De la propiedad de superposición de los sistemas LTI:

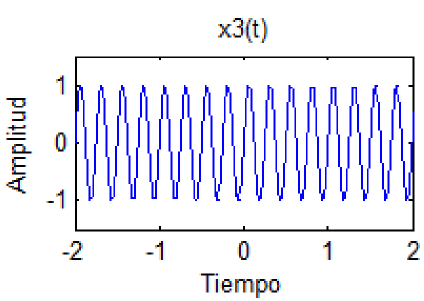
$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = \sum_k \lambda_k a_k \phi_k(t)$$

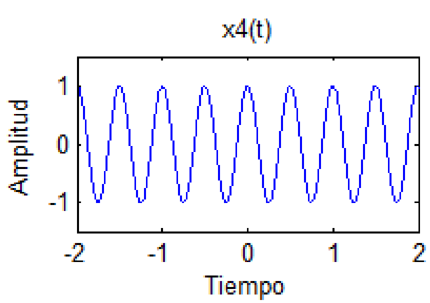
  - Para encontrar la respuesta del sistema LTI, tenemos que determinar λ_k

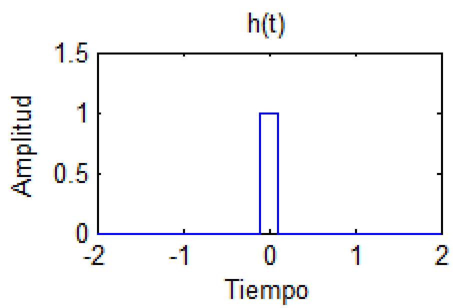
Ejemplo de SLTI (CT)

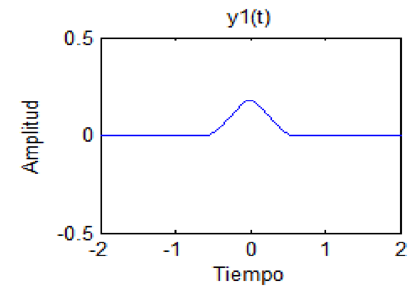


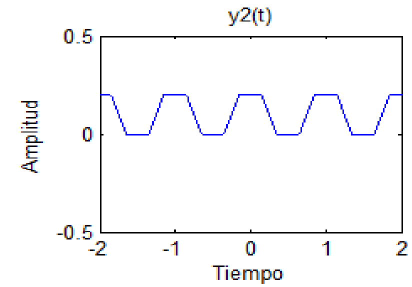


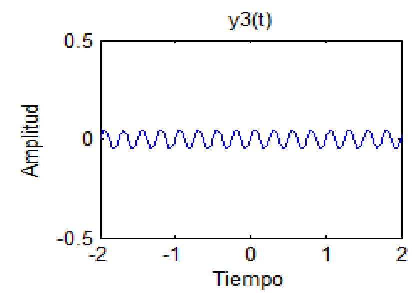


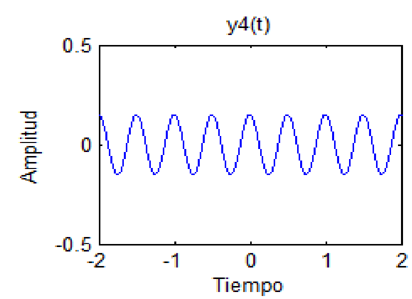












Código Matlab del ejemplo: señales de entrada

```
%Señal x1(t)
fs = 10000; t = -2:1/fs:2; w = 1;
x1 = tripuls(t,w);
figure; plot(t,x1); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('x1(t)'); ylim([0
    1.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal x2(t)
t= -6:1/fs:6; w2 = 0.5; d= -10:w2*2:10;
x2=pulstran(t,d,'rectpuls',w2);
figure; plot(t,x2); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('x2(t)'); ylim([0
    1.5]);  xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal x3(t)
t = -6:1/fs:6;
x3 = sin(t*2*4*pi);
figure; plot(t, x3); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('x3(t)'); ylim([-1.5
    1.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal x4(t)
t = -6:1/fs:6;
x4 = cos(t*4*pi);
figure; plot(t,x4); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('x4(t)'); ylim([-1.5
    1.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);
```

Código matlab del ejemplo: RI y señales de salida

```
%Señal h(t)
t= -2:1/fs:2; w3 = 0.1;
h = 0*(t<=-w3) + 1*(t>-w3).*(t<w3) + 0*(t>w3);
figure; plot(t,h); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('h(t)'); ylim([0 1]);
    xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal y1(t)
y1 = (1/fs)*conv(x1, h); th = -4:1/fs:4;
figure; plot (th, y1); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('y1(t)'); ylim([-0.5
    0.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal y2(t)
y2 = (1/fs)*conv(x2, h); th = -8:1/fs:8;
figure; plot (th, y2); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('y2(t)'); ylim([-0.5
    0.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal y3(t)
y3 = (1/fs)*conv(x3, h); th = -8:1/fs:8;
figure; plot(th, y3); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('y3(t)'); ylim([-0.5
    0.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);

%Señal y4(t)
y4 = (1/fs)*conv(x4, h); th = -8:1/fs:8;
figure; plot(th, y4); xlabel('Tiempo'); ylabel('Amplitud'); title('y4(t)'); ylim([-0.5
    0.5]); xlim([-2 2]); axis([xlim ylim]);
```

Exponenciales como autofunciones de sistemas LTI

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = [\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s\tau}d\tau]e^{st} = H(s)e^{st}$$

autovalor

autofunción

¿Cómo podemos <u>probar</u> que las exponenciales son autofunciones? ➔ Convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \qquad H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

- En general, si $x(t)$ es una combinación lineal de exp. complejas:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k H(s_k) a_k e^{s_k t}$$

Exponenciales (y exponenciales complejas)

- ¿Por qué son importantes?
  - Son una herramienta útil para analizar, diseñar y comprender mejor las señales y los sistemas.

- ¿Por qué?
  - En el mundo real, muchas señales son exponenciales (e.g., ondas).
  - Es fácil entender qué le hace un sistema LTI a una exponencial.
  - Forman una base para las señales (funciones) ➔ "Traducción": cualquier señal de interés se puede expresar como una suma ponderada de exponenciales.

- Principalmente nos centraremos en exponenciales "complejas" de módulo unidad

$$e^{st}, \quad si \quad s = jw \rightarrow e^{jwt} \rightarrow cos(wt) + jsin(wt)$$

¿Cómo puedo representar una señal como "suma" de exponenciales complejas?

- Si son periódicas: Desarrollo en Serie de Fourier (DSF)
- Si no son periódicas: Transformada de Fourier (TF)
- Ecuaciones de análisis y síntesis (para la TF)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw \rightarrow \text{Ecuación de síntesis}$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jtw}dt \longrightarrow \text{Ecuación de análisis}$$

- Se puede aplicar no solo al estudio de señales sino también al estudio de sistemas ¿cómo? Calculando la TF de la respuesta al impulso de un sistema ➔ Respuesta en frecuencia

Para futuros temas (y para el examen)

- Es **imprescindible** que se sepa:
  - La expresión analítica de exponenciales, deltas, pulsos, escalones y sincs
  - Dibujar exponenciales, deltas, pulsos, escalones y sincs
  - Qué se obtiene al multiplicar una delta por una señal cualquiera
  - Qué se obtiene al convolucionar una delta por una señal cualquiera
  - Qué se obtiene al convolucionar una exponencial por una señal cualquiera

- Y para Fourier:
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Transformada de exponenciales, deltas, pulsos, escalones y sincs

Ubicándonos

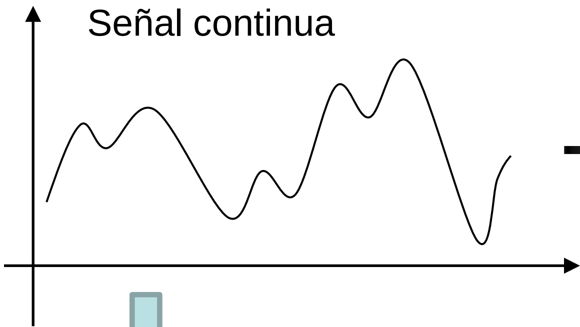
- Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
  - 1.1 Revisión de señales y sistemas en tiempo continuo.
  - 1.2 Señales en tiempo discreto.
  - 1.3 Sistemas en tiempo discreto.
  - 1.4 Convolución suma.

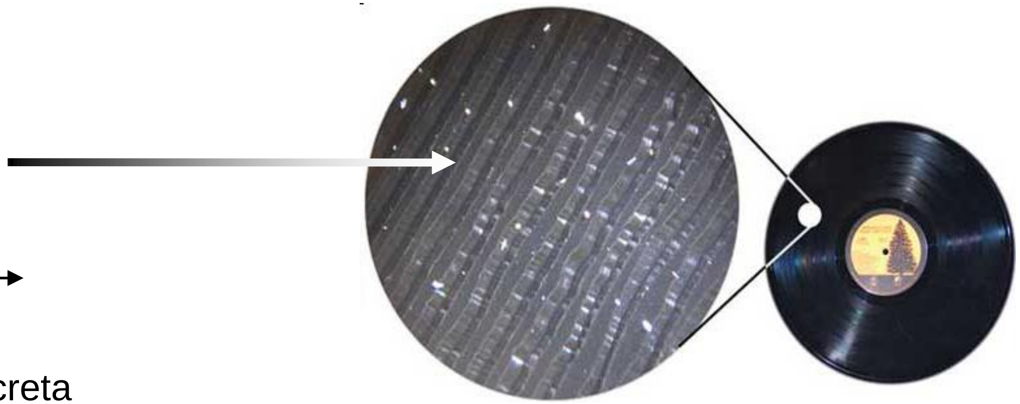
- Vamos a ver cosas como:
  - Semejanzas/diferencias entre señales continuas y discretas.
  - Señales: clases de señales, operaciones, señales de interés.
  - Sistemas: propiedades, interconexión, sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (SLTI).

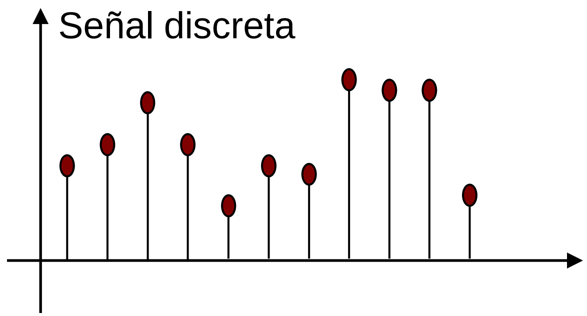
1.2 Señales en tiempo discreto

- En este apartado vamos a ver cosas como:
  - Señales discretas (vs señales continuas y señales digitales)
  - Clases de señales
  - Señales de interés
  - Operaciones

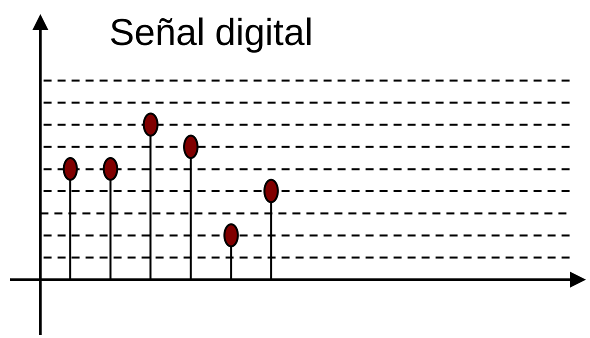
Almacenamiento analógico y digital



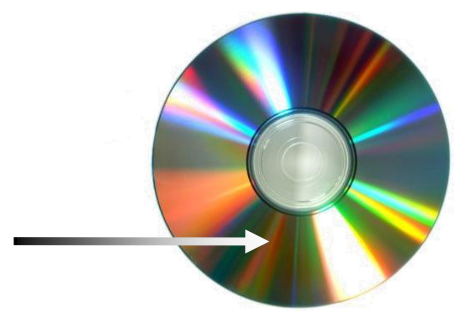




Muestreo: cantidad de veces que medimos el valor de la señal en un periodo de tiempo.



Cuantificación: el número de amplitudes que utilizamos para guardar una medida de una señal



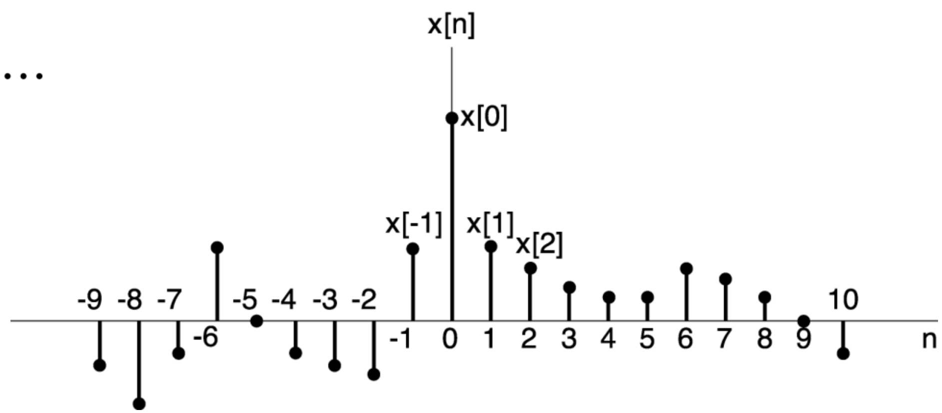
Definición matemática de señal en DT

- Una señal es una relación entre dos variables: una variable independiente (*tiempo*) y una variable dependiente (*amplitud*)

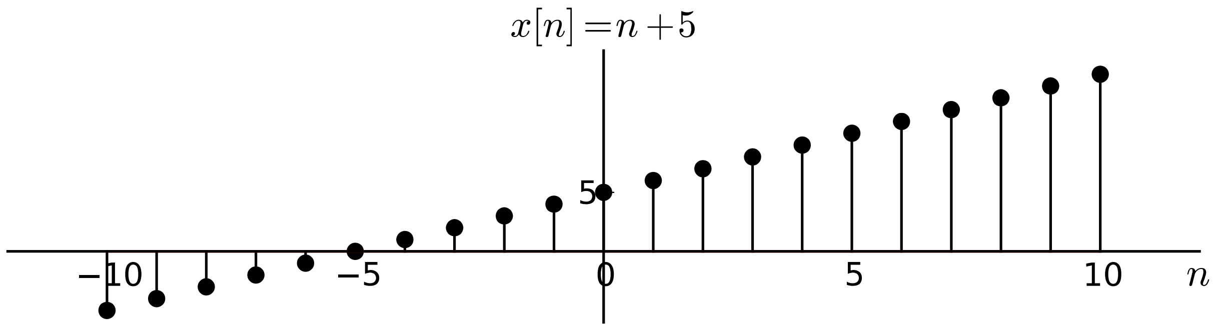
- En las señales en DT:
  - La variable independiente (n) toma valores <u>enteros</u>, es decir, discretos
  - La variable dependiente (x, y, z…) toma valores reales, es decir, continuos

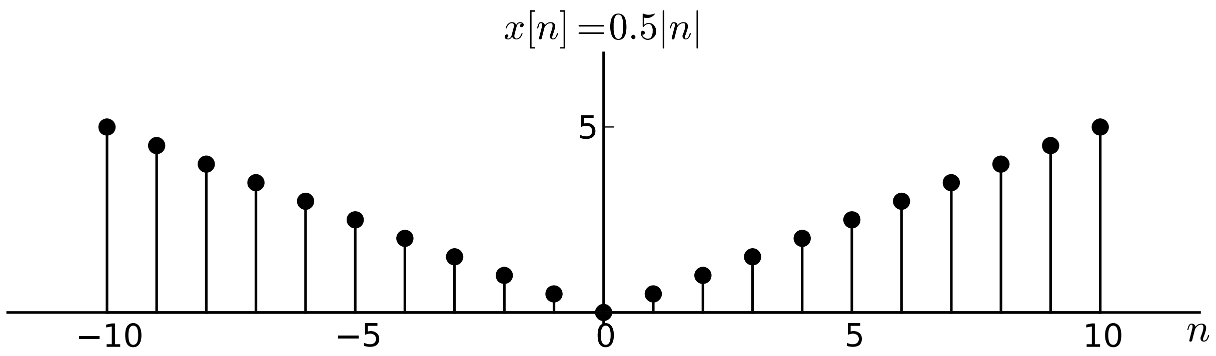
- Las señales en DT también se denominan *secuencias* y se denotan mediante:

$$x[n], y[n], z[n]...$$



Ejemplos:





Parámetros básicos

- Se definen el área, el valor medio, la energía y la potencia media de una señal en DT *x*[*n*] mediante las siguientes operaciones:

$$A_x = \sum_{n-\infty}^{\infty} x[n]$$
$$= \ldots + x[-1] + x[0] + x[1] + \ldots$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$
$$= \ldots + |x[-1]|^2 + |x[0]|^2 + |x[1]|^2 \ldots$$

$$\bar{x} = \langle x[n] \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$$

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

*Nota: Hemos considerado el módulo al cuadrado de x[n]; por tanto, esta definición se aplica tanto a señales reales como a señales complejas

Parámetros básicos

- Si definimos la energía de una señal sobre un intervalo finito $-N \leq n \leq N$ como:

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Entonces podemos expresar la energía E de la señal como:

$$E = \lim_{N \to \infty} E_N$$

- Y la potencia media de la señal x[n] como:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

- Claramente, si *E* es finita, *P=0*. Por otra parte, si *E* es infinita, la potencia media *P* puede ser tanto finita como infinita. Si *P* es finita (y distinta de cero), la señal se denomina señal definida en potencia. Si *P=0* es cero la señal se denomina señal definida en energía.

Clasificación general de señales DT

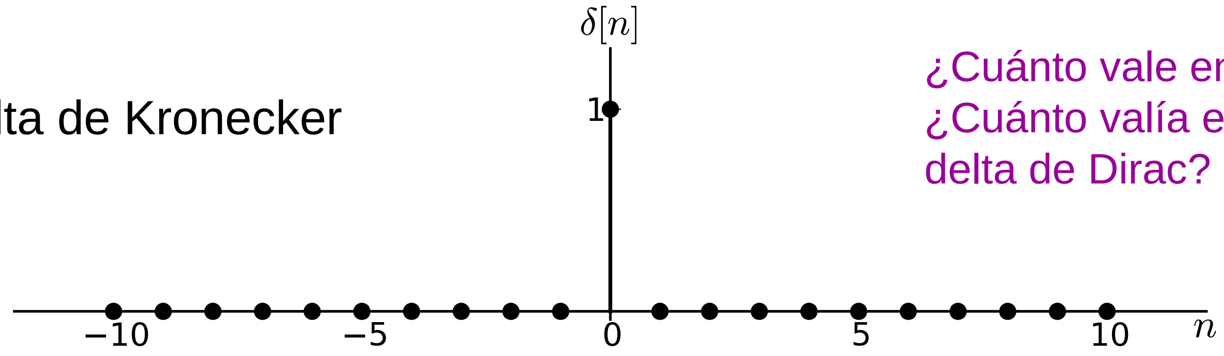
- Las señales en DT se clasifican en:
  - Señales definidas en energía: $E_x > 0, P_x = 0$
  - Señales definidas en potencia: $E_x = \infty, P_x < \infty$
  - Señales de potencia media infinita: $E_x = \infty, P_x = \infty$

- Cada familia de señales tiene propiedades matemáticas distintas

- Las señales con las que trabajaremos son las definidas en energía y en potencia

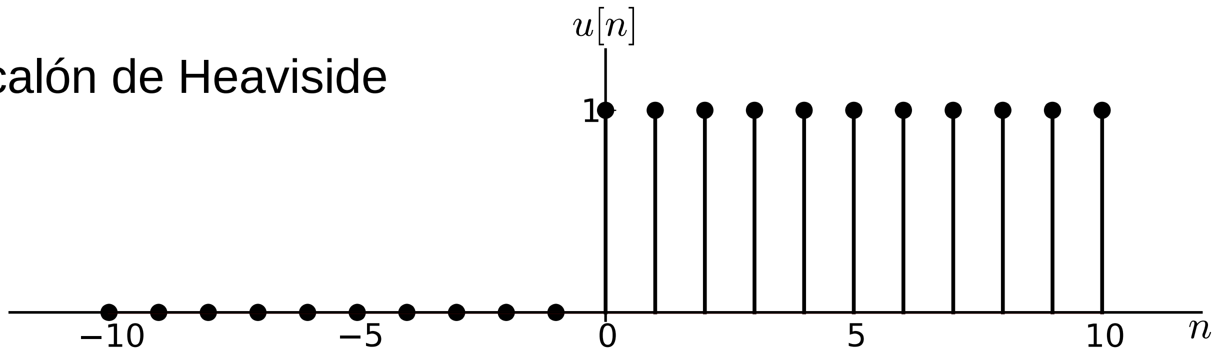
Señales básicas I: delta y escalón

Delta de Kronecker



¿Cuánto vale en cero?
¿Cuánto valía en cero la delta de Dirac?

Escalón de Heaviside



Señales básicas II: Sinusoides

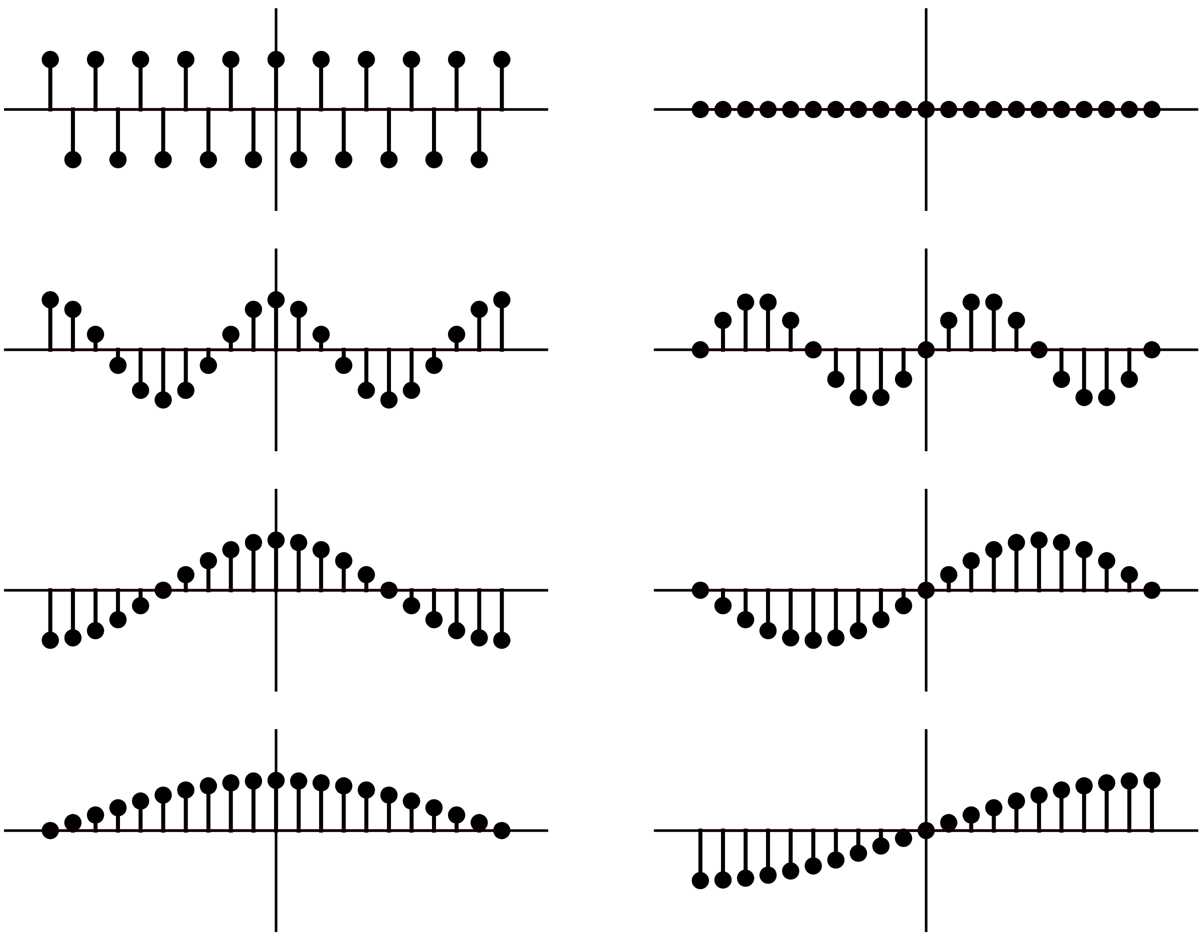
$$x[n] = cos(\Omega_0 n) \qquad x[n] = sin(\Omega_0 n)$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{2}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{10}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{20}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{40}$$



Señales básicas II: Sinusoides

- A diferencia de las señales seno y coseno en CT, estas señales en DT tienen las siguientes propiedades:

  - Las señales sinusoidales producidas por las frecuencias angulares

    $$\Omega_0, \quad \Omega_1 = \Omega_0 + 2\pi$$

    son idénticas.

  - Las señales sinusoidales son periódicas si y sólo si su frecuencia angular se puede expresar como:

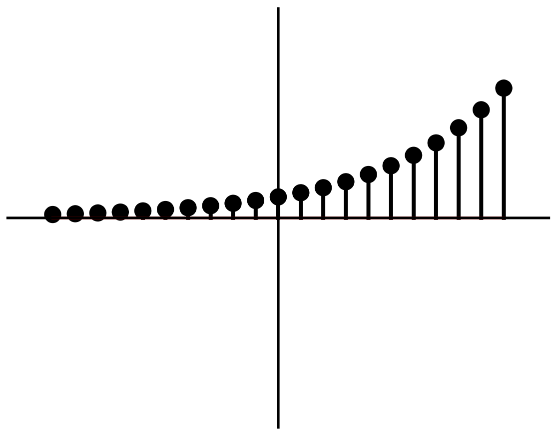
    $$\Omega_0 = 2\pi \frac{m}{N} \qquad \qquad \cos(3n) \Rightarrow \text{No periódica}$$

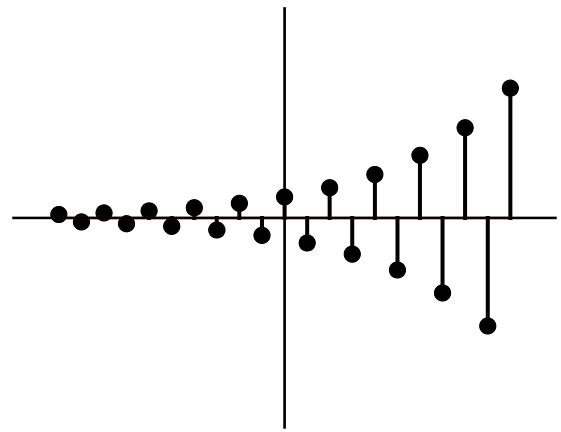
    donde *m* y *N* son enteros sin factores en común. El periodo de estas señales sinusoidales es *N* y su frecuencia angular Ω_0/N fundamental

Señales básicas III: Exponencial real

$$x[n] = Ca^n$$

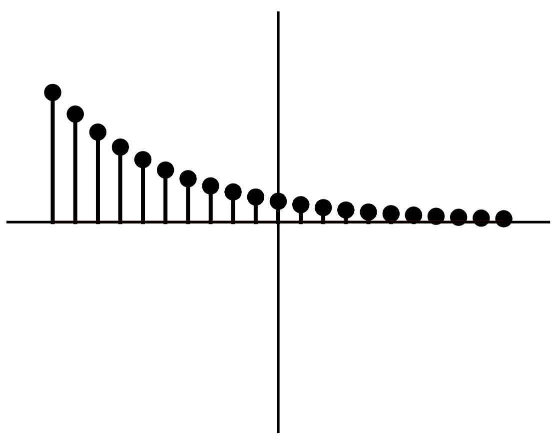
$a > 1$

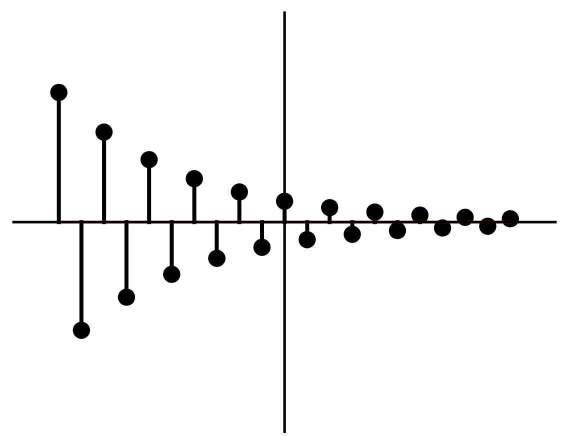




$a < -1$

$0 < a < 1$

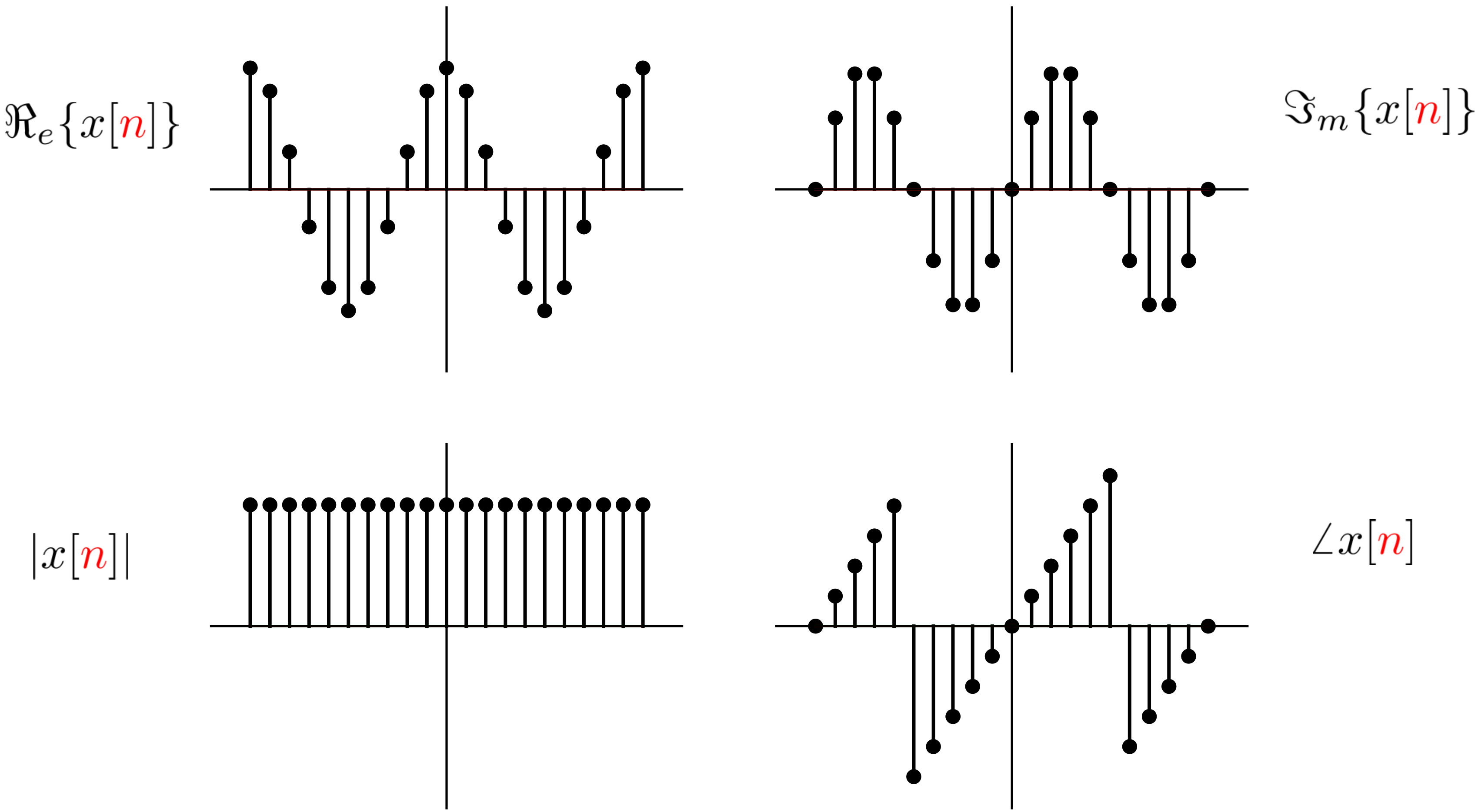




$-1 < a < 0$

Señales básicas IV: Exponencial compleja

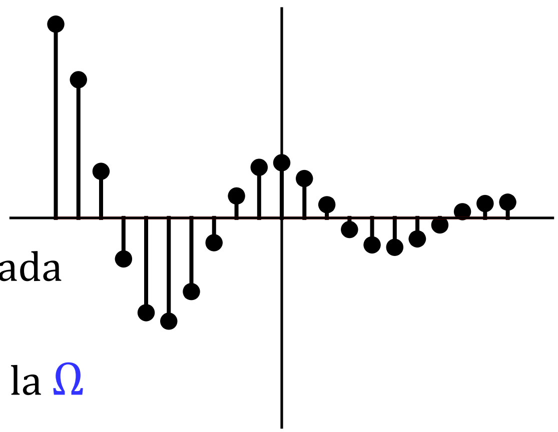
$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

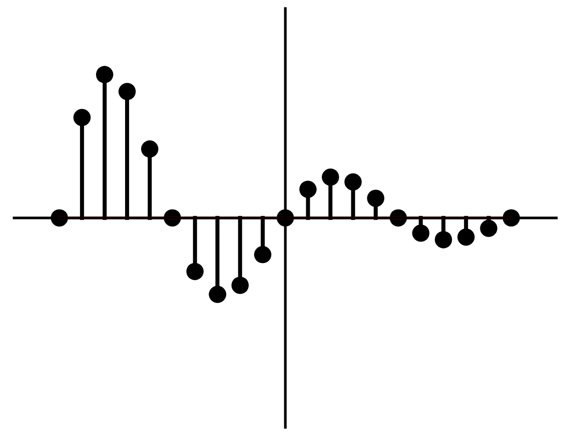


Señales básicas V: Expon. compleja amortiguada

$$x[n] = e^{(a+j\Omega)n} = e^{an}e^{j\Omega n}$$

$\Re_e\{x[n]\}$

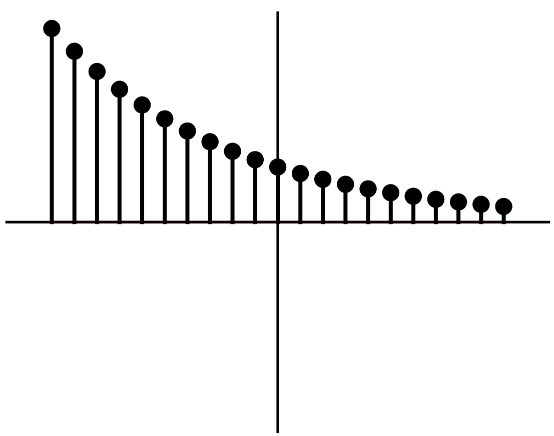


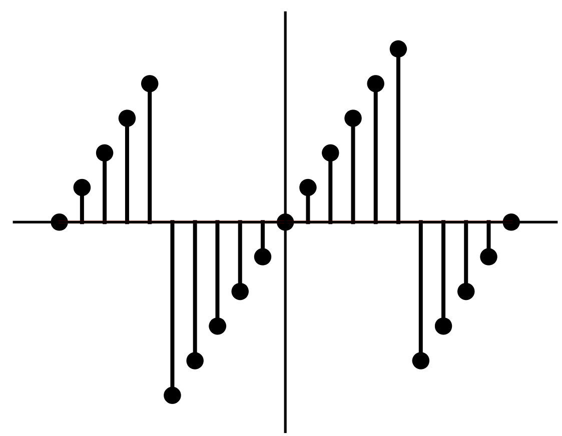


$\Im_m\{x[n]\}$

La caída viene dada por la a, las oscilaciones por la Ω

$|x[n]|$





$\angle x[n]$

Señales básicas VI: Otras señales

- Pulso: Suele tener una longitud (N) impar para que sea simétrico (par)

$$p_N[n] = u\left[n + \frac{N-1}{2}\right] - u\left[n - \frac{N-1}{2}\right] \qquad p_N[0] = 1$$

- Sinc: No cambia con respecto a la definición continua, para que sea intuitivo N tiene que tomar un valor entero

$$sinc_N[n] = sinc\left[\frac{n}{N}\right] = \frac{\sin[\pi n/N]}{\pi n/N} \qquad sinc_N[0] = 1$$

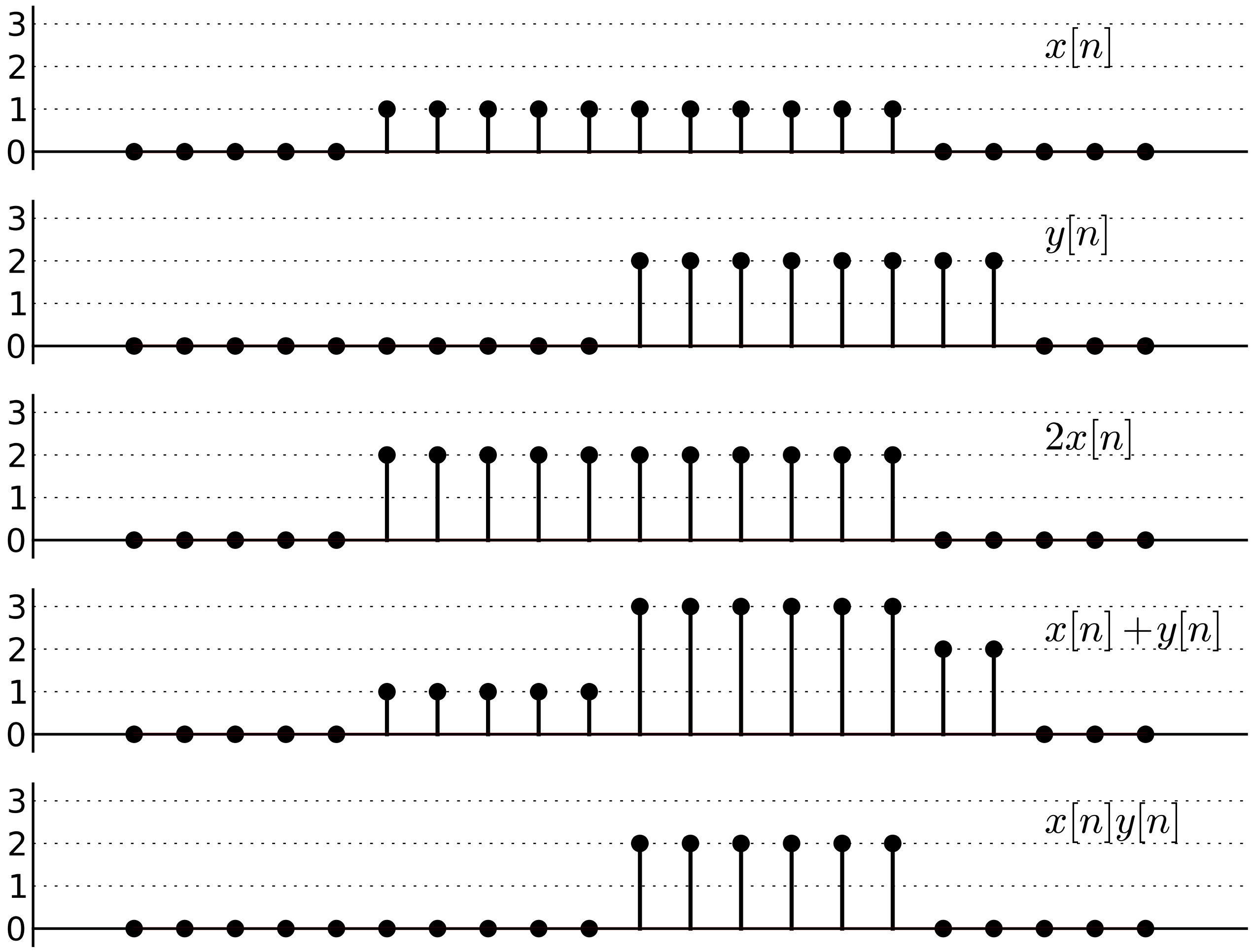
- Otras secuencias: triángulo, productos polinomio-exponencial $n^p \cdot b^n \cdot u[n]$, …

Operaciones básicas sobre la variable dependiente

- Escalado: $y[n] = K \cdot x[n]$
- Suma de señales: $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
- Producto de señales: $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$

*Nota: El escalado es una operación unaria, la suma y el producto binarias. No obstante, son operaciones binarias muy sencillas porque se realizan punto a punto (i.e., instante a instante)

Operaciones básicas sobre la variable dependiente



Operaciones básicas sobre la variable independiente

- Desplazamiento:

$$y[n] = x[n + n_0] \rightarrow \begin{cases} n_0 < 0 \rightarrow Desplazamiento \;\; a \;\; la \;\; derecha \\ n_0 > 0 \rightarrow Desplazamiento \;\; a \;\; la \;\; izquierda \end{cases}$$

  - El valor del desplazamiento n_0 deberá ser entero, lo que supondrá un desplazamiento de la sucesión de valores

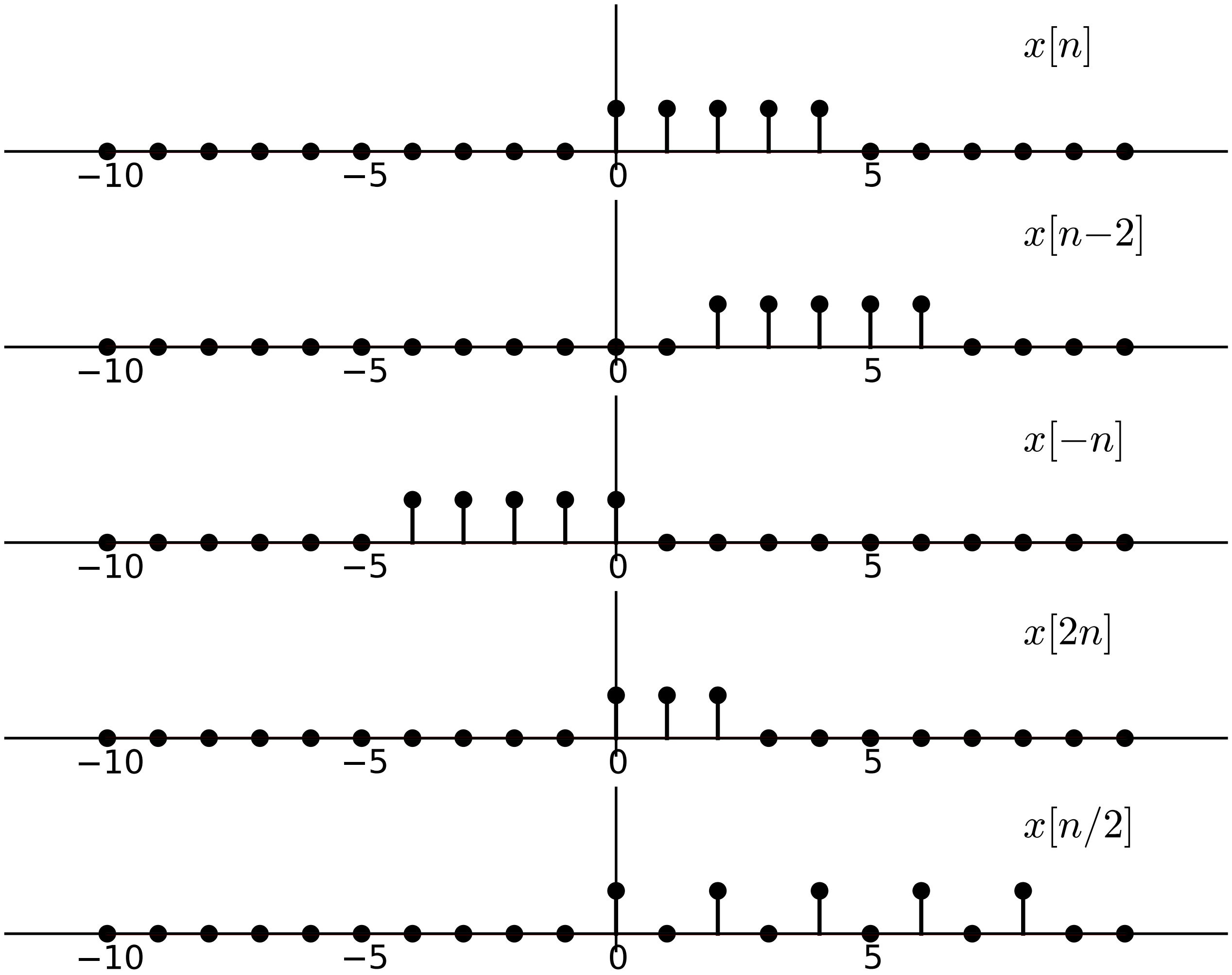
- Abatimiento: no es más que una simetría respecto al eje de ordenadas

$$y[n] = x[-n]$$

- Cambio de escala: se refieren a cambios respecto a la variable independiente (valores racionales, lo veremos en el tema de muestreo)

$$y[n] = x[an] \quad \begin{cases} \text{Expansión:} & 0 \leq a < 1 \\ \text{Compresión:} & a > 1 \end{cases}$$

Operaciones básicas sobre la variable independiente



Operaciones básicas sobre la variable independiente

- En DT, la operación de cambio de escala presenta las siguientes propiedades:
  - Durante una **compresión**, hay **pérdida de muestras**
  - Durante una **expansión**, hay que introducir **nuevas muestras**, generalmente ceros
  - Nota: En el tema de muestreo, veremos cómo realizar estas operaciones para no tener estos problemas (diezmado e interpolación de señales limitadas en banda)

Diferencia y suma

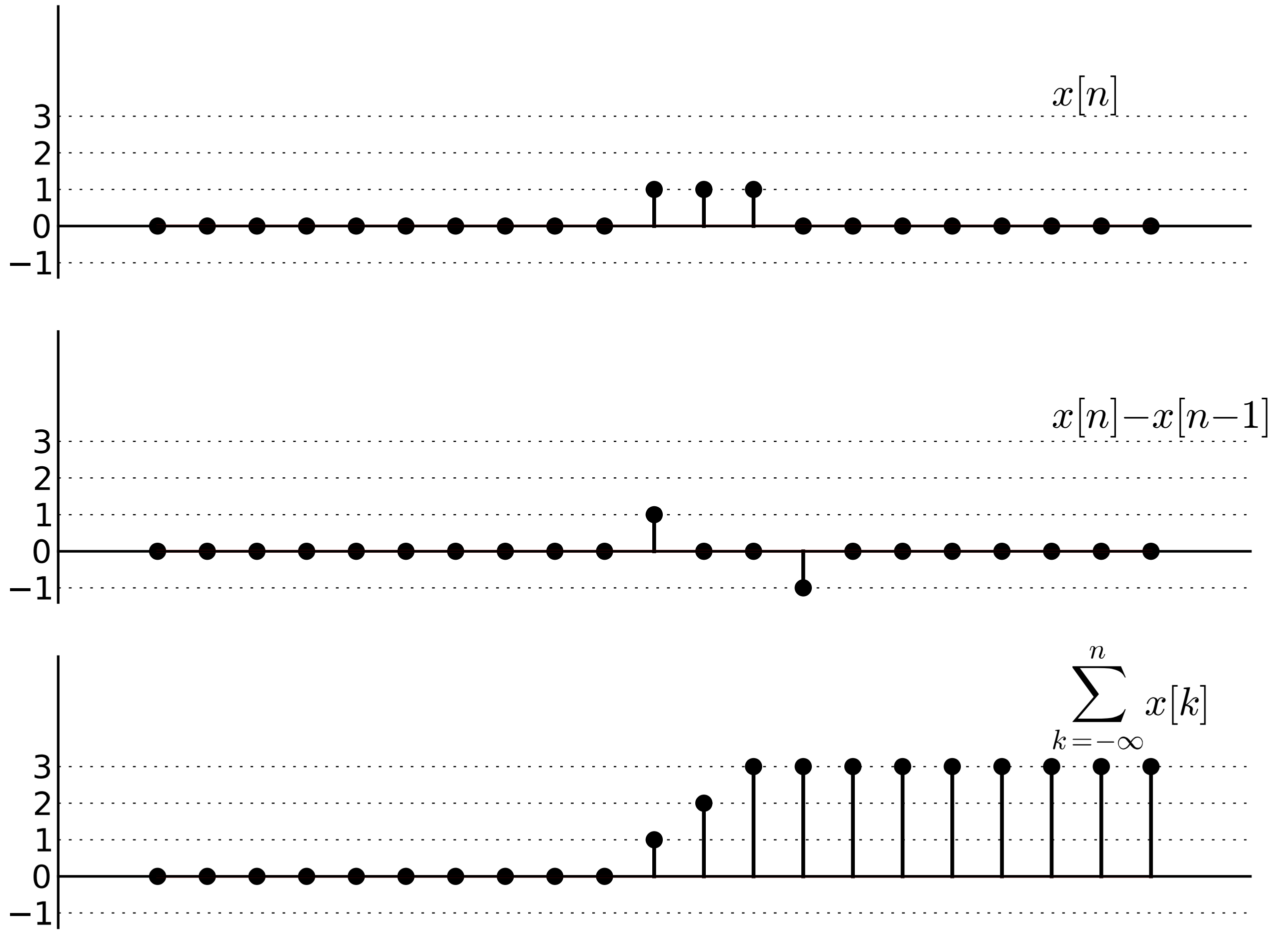
Señal original:

Señal diferencia:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Señal suma:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$



Propiedades básicas

- Paridad:
  - Una señal *x*[*n*] es par si: $x[n] = x[-n]$
  - Una señal *x*[*n*] es impar si: $x[n] = -x[-n]$
- Periodicidad
  - Una señal *x*[*n*] es periódica con periodo N si: $x[n] = x[n - N]$
- Descomposición en Deltas
  - Toda señal en DT *x*[*n*] puede expresarse como una suma de Deltas desplazadas:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

1.3 Sistemas en tiempo discreto

- En este apartado vamos a ver cosas como:
  - Sistemas discretos
  - Propiedades
  - Interconexión

Definición de sistema DT

- Un sistema es un mecanismo o proceso que transforma una señal. Matemáticamente y gráficamente se suele representar de las siguiente manera:

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{Sist. discreto}} \rightarrow y[n]$$

donde, como es habitual, $x[n]$ se usa para denotar la entrada (genérica) del sistema e $y[n]$ denota la correspondiente señal de salida

Propiedades básicas de sistema DT

- Memoria:
  - Un sistema no tiene memoria si su salida en cualquier tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese mismo tiempo
- Invertible
  - Observando la salida (desde n=-∞ hasta n=∞) sabemos cuál ha sido la entrada
- Causalidad:
  - La salida de un sistema causal depende sólo de los valores presentes y pasados de la entrada al mismo
  - Para que un sistema discreto sea causal, $y[n]$ no puede depender de $x[k]$ para $k>n$
- Estabilidad:
  - Un sistema es estable si cada entrada limitada (amplitud finita) produce una salida limitada (amplitud finita)

Si $x[n]<A_x$ para todo n, entonces $y[n]<A_y$ para todo n

Propiedades básicas de sistema DT

- **Invarianza temporal.**

$$
\begin{aligned}
Si: &\quad x[n] \to y[n] \\
Entonces: &\quad x[n-n_0] \to y[n-n_0]
\end{aligned}
$$

- **Linealidad**.

$$
\begin{aligned}
Si: &\quad x_1[n] \to y_1[n] \quad y \quad x_2[n] \to y_2[n] \\
Entonces: &\quad ax_1[n] + bx_2[n] \to ay_1[n] + by_2[n]
\end{aligned}
$$

- **Interconexión**:
  - cascada (serie), paralelo, retroalimentado

1.4 Sistemas LTI y convolución suma

- Vamos a ver cosas como:
  - Convolución suma definición y propiedades
  - La convolución suma como salida de sistemas LTI
  - Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Definición de SLTI en DT

- Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLTI) satisfacen las propiedades de linealidad e invarianza, esto es, dado un SLTI con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$:

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{SLTI}} \rightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} Si: &\quad x[n] \rightarrow y[n] \\ Entonces: &\quad x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Si: &\quad x_1[n] \rightarrow y_1[n] \quad y \quad x_2[n] \rightarrow y_2[n] \\ Entonces: &\quad ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

La respuesta al impulso de un SLTI en DT

- Dado un SLTI en DT, definimos su respuesta al impulso *h*[*n*] como la salida del sistema cuando la entrada es una Delta (*impulso*)

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{SLTI}} \longrightarrow h[n]$$

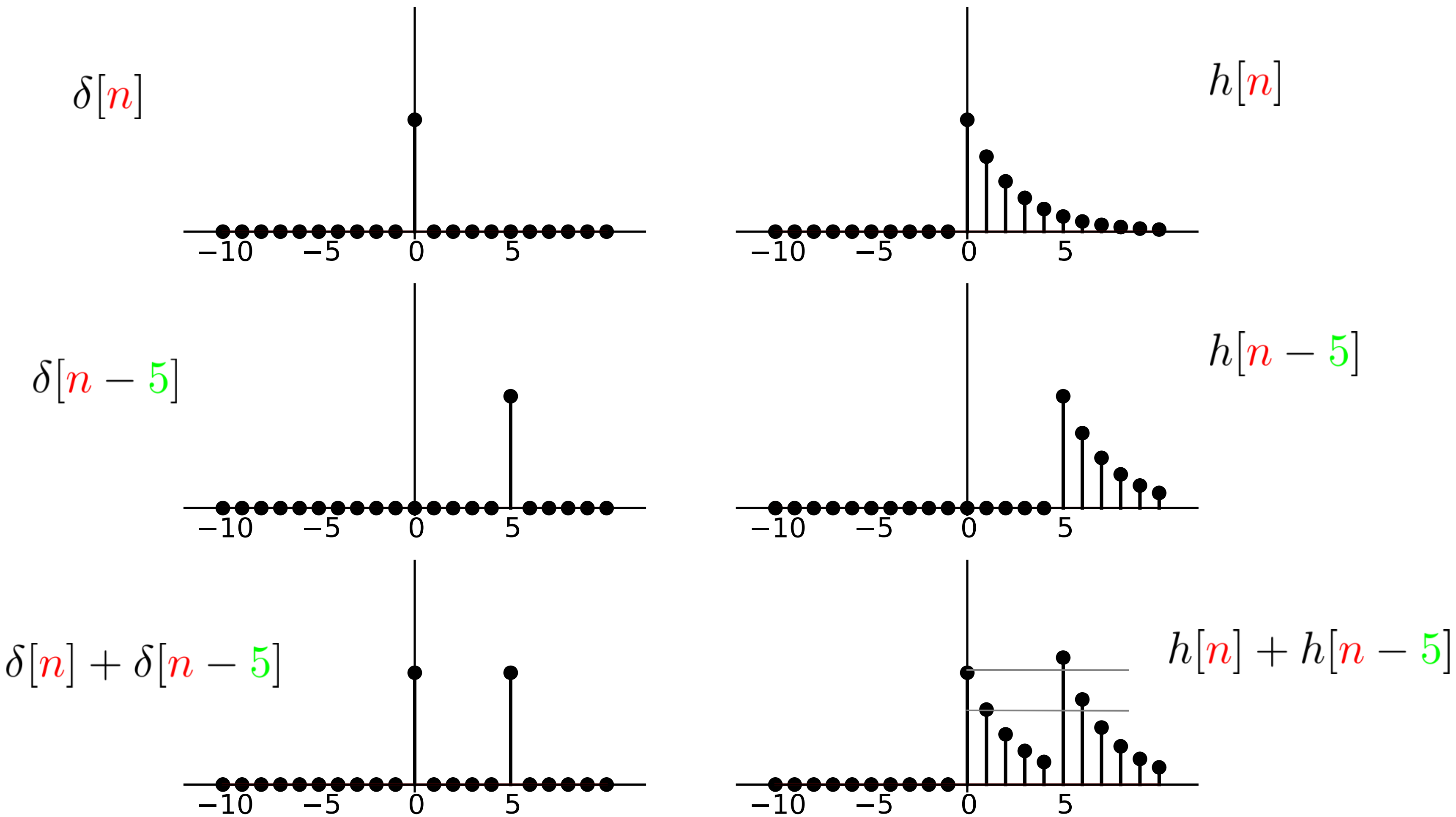
- Consecuencia 1: Por la propiedad de invarianza

$$\delta[n-n_0] \longrightarrow \boxed{\text{SLTI}} \longrightarrow h[n-n_0]$$

- Consecuencia 2: Por la propiedad de linealidad

$$\delta[n-n_0]+\delta[n-n_1] \longrightarrow \boxed{\text{SLTI}} \longrightarrow h[n-n_0]+h[n-n_1]$$

La respuesta al impulso de un SLTI en DT



*Nota: nótese que la altura no es igual.

La respuesta al impulso de un SLTI en DT

- En general, dado un SLTI en DT cuando a la entrada hay una suma de deltas, a la salida hay una suma de respuestas al impulso

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{SLTI}} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h[n-k]$$

- Debido a la propiedad de descomposición en suma de Deltas, la salida *y*[*n*] de un SLTI en DT cuando la entrada es *x*[*n*] es:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{SLTI}} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

La convolución

- Por tanto, la salida $y[n]$ de un SLTI en DT de respuesta al impulso $h[n]$ cuando la entrada es $x[n]$ se puede calcular como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Esta operación matemática es la convolución de señales en tiempo discreto:

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

- La salida de un SLTI en DT es, pues, la convolución de la entrada del sistema con la respuesta al impulso:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Cómo calcular una convolución

- Para cada instante de tiempo n:

1) Expresar en el dominio *k*: $h[k]$ $\quad$ $x[k]$

2) Abatir: $h[-k]$

3) Desplazar *n* unidades: $h[n-k]$

4) Multiplicar: $x[k]h[n-k]$

5) Sumar: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

Cómo calcular una convolución

Forma alternativa:
1) Expresamos una de las señales como una suma de deltas
2) Convolucionamos la otra señal con cada una de las deltas que hemos obtenido en 1)
3) Sumamos todas las señales que hemos obtenido en 2)

En el ejemplo de la derecha:

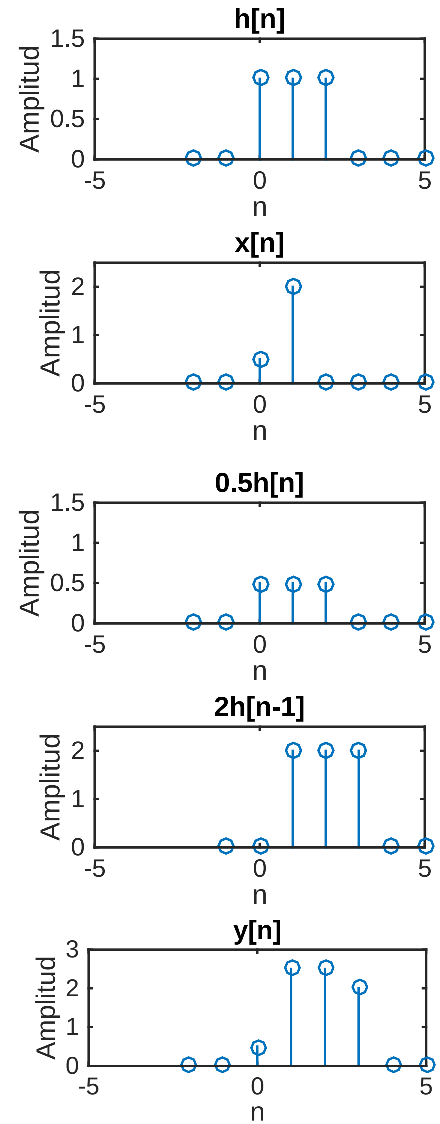
Expresamos la señal x[n] como la suma de dos deltas:

$$x[n] = {\color{blue}0.5}\delta[n] + {\color{red}2}\delta[n-{\color{red}1}]$$

Longitud de la convolución:

Inicio: suma de inicios (0+0=0)

Final: suma de finales (2+1=3)



Propiedades de los SLTI en DT

- La respuesta al impulso *h*[*n*] **caracteriza completamente** los SLTI en DT, ya que permite obtener la salida *y*[*n*] de dichos sistemas para cualquier entrada *x*[*n*]
- Analizando la respuesta al impulso *h*[*n*] podemos determinar las propiedades de un SLTI en DT:
  - Causalidad: $$h[n] = 0, \forall n < 0$$
  - Estabilidad: $$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$
  - Memoria: $$h[n] = 0, \forall n \neq 0$$
  - Invertibilidad: $$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

Propiedades de los SLTI en DT

- Las propiedades matemáticas de la convolución permiten determinar la salida de la interconexión de sistemas SLTI

  - Propiedad distributiva: aplicable a SLTI en paralelo

$$y[n] = x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

  - Propiedad asociativa: aplicable a SLTI en cascada

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] = x[n] * h_2[n] * h_1[n]$$

Propiedades de los SLTI en DT

- La salida y[n] de un SLTI cuando la entrada es una exponencial compleja es otra exponencial compleja con la misma frecuencia y, en general, distinta fase y amplitud

$$x[n] = Ae^{j(\Omega_0 n + \phi)} \rightarrow \boxed{\text{SLTI}} \rightarrow y[n]$$

División entre la amplitud de salida y la amplitud de entrada

$$y[n] = A'e^{j(\Omega_0 n + \phi')} = \frac{A'}{A} Ae^{(j\Omega_0 n + \phi)} e^{j(\phi' - \phi)} = \left(\frac{A'}{A} e^{j(\phi' - \phi)}\right) x[n]$$

- Por este motivo, las exponenciales (complejas) son *autofunciones* de los SLTI
- El factor de proporcionalidad que relaciona la entrada con la salida de un SLTI cuando a la entrada hay una exponencial compleja se denomina *autovalor* o *fasor* (respuesta a la frecuencia Ω_0)

$$\left(A_0 e^{j\phi_0}\right) = \left(\frac{A'}{A} e^{j(\phi' - \phi)}\right)$$

Propiedades de los SLTI en DT

- Finalmente, la salida de un SLTI cuando a la entrada hay una suma de exponenciales complejas de distintas frecuencias es la suma de dichas exponenciales complejas (con distinta fase y distinta amplitud)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{K} e^{j\Omega_k n} \rightarrow \boxed{\text{SLTI}} \rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{K} A_k e^{j\phi_k} \cdot e^{j(\Omega_k n)}$$

- Por tanto, a la salida de un SLTI **nunca** habrá una frecuencia que no esté a la entrada

Sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias

- Un tipo muy importante de sistemas discretos son los descritos por ecuaciones en diferencias SDED

- Definición: $y[n] = \sum_{p=1}^{P} a_p y[n-p] + \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$

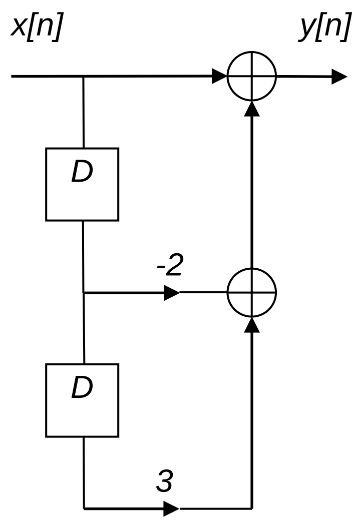
  - La salida es una suma ponderada de:
    - Valores presentes y pasados de la entrada (pesos dados por b_m)
    - Valores pasados de la salida (pesos dados por a_p)

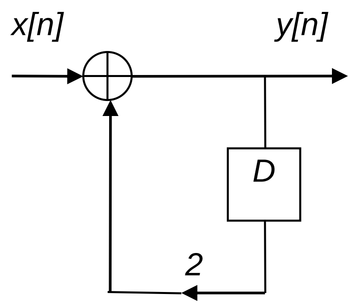
  - Cumplen linealidad e invarianza temporal ➔ Los SDED son sistemas LTI, es importante saber su respuesta al impulso y su respuesta en frecuencia

- Se pueden implementar fácilmente utilizando tres bloques:
  - Retardadores
  - Sumadores
  - Modificadores de amplitud (escaladores)

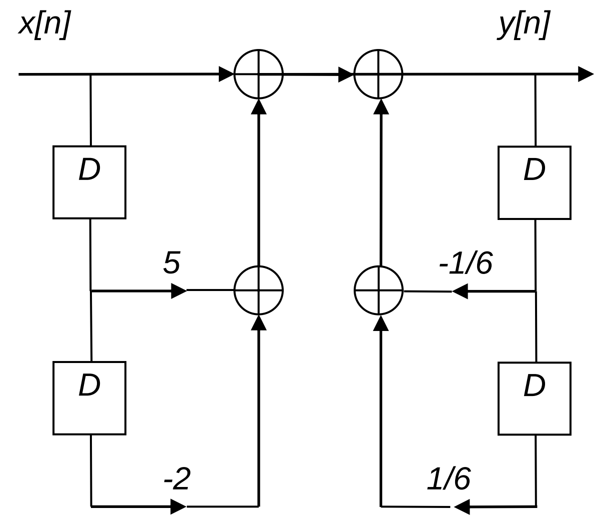
SDED: Representación bloques

- Ejemplos:





$$y[n] = x[n] + 2y[n-1]$$



$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-2]$$

- Estas estructuras son fundamentales para construir sistemas discretos en un ordenador (función filter en matlab)
- Son fáciles de implementar en el tiempo, son fáciles de analizar y diseñar en frecuencia
- Los veremos en detalle en los últimos temas de la asignatura

Resumen del tema

- Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
  - 1.1 Revisión de señales y sistemas en tiempo continuo
  - 1.2 Señales en tiempo discreto
  - 1.3 Sistemas en tiempo discreto
  - 1.4 Convolución suma

- Comentarios:
  - Las señales discretas son más fáciles de manejar que las señales continuas, aunque para cuentas con “papel y lápiz” puede ser más difícil porque hay que usar sumatorios en lugar de integrales
  - La delta de Kronecker vale uno, mientras que la de Dirac vale infinito
    - Cualquier señal se puede expresar como una suma de deltas de Kronecker
  - Hay un número finito de exponenciales discretas con periodo N

Resumen del tema

- Las propiedades de los sistemas discretos son análogas a las de los continuos

- Si un sistema es lineal e invariante, su análisis es mucho más sencillo
  - ❑ Basta con conocer la respuesta del sistema frente a la delta

- Las propiedades de un SLTI se pueden analizar a partir de la respuesta el impulso

- Si se conoce la respuesta a la delta, se puede calcular la salida con respecto a cualquier entrada expresando la entrada como una suma de deltas desplazas ➔ Esto es justamente lo que hace la convolución

- Calcular la convolución con una exponencial (o la salida de un SLTI para una exponencial) es muy sencillo
  - ❑ El resultado es la misma exponencial, solo cambia su amplitud
  - ❑ Expresar cualquier señal como una suma de exponenciales es útil
  - ❑ Saber cómo responde un sistema a cada una de las posibles exp. es útil