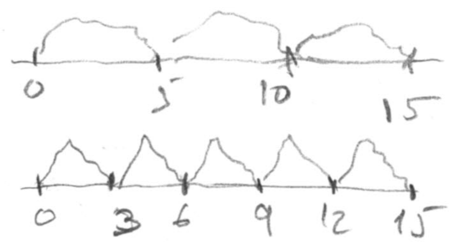
SOLUCIÓN EXAMEN ASS 15-XII-2014 URJC

Ejercicio 1

$$x[n] = \underbrace{\cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}_{x_1[n]} + \underbrace{\sin\left[\frac{2\pi}{5}n\right]}_{x_2[n]}$$

a) $x_2[n]$ se repite cada 5 muestras

$x_1[n]$ " " " 3 muestras



La suma se repetirá cada $5 \cdot 3 = 15$ muestras

$x[n]$ periódica con periodo 15

b) $$a_k = \frac{1}{15}\sum_{n=-7}^{7} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{15}kn} \qquad k=-7,\dots,7$$

$$x[n] = \sum_{k=-7}^{7} a_k \cdot e^{+j\frac{2\pi}{15}k\cdot n} \qquad n=-7,\dots,7$$

¿Qué opción es más sencilla para nuestra señal? ⇒ La segunda

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = \frac{1}{2}e^{+j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{1}{2j}e^{+j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{5}n} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_5} e^{j\frac{2\pi}{15}\cdot 5n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-5}} e^{-j\frac{2\pi}{5}\cdot 5n} + \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_3} e^{+j\frac{2\pi}{15}3n} + \underbrace{\frac{-1}{2j}}_{a_{-3}} e^{-j\frac{2\pi}{15}3n} \Rightarrow a_k = \begin{cases} 1/2 & k=-5 \\ -1/2j & k=-3 \\ 1/2j & k=3 \\ 1/2 & k=5 \\ 0 & \end{cases}$$

c) $|X(e^{j\Omega})|$ (Periód. 2π)

$\measuredangle X(e^{j\Omega})$

Cualquier fase que sea Φ en $\Omega = \pm\frac{2\pi}{3}$

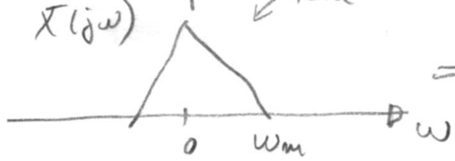
$\pi/2$ en $\Omega = -2\pi/5$

y $-\pi/2$ en $\Omega = 2\pi/5$

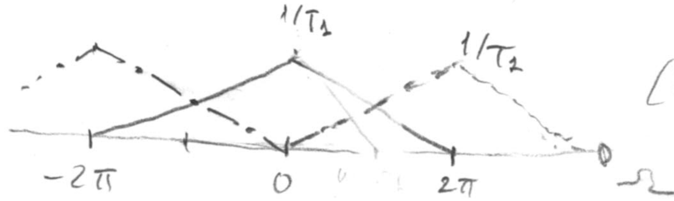
es correcta

Ejercicio 2

a) $X(j\omega)$ — La TF es Real



$\Longrightarrow$ $X(e^{j\Omega})$ — La TF es real



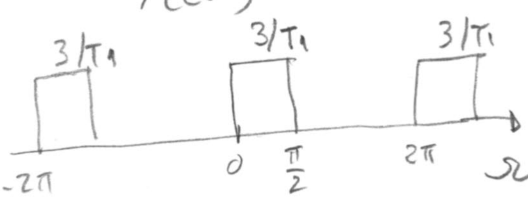
(Per 2π)

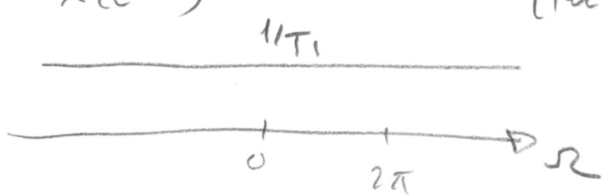
Las réplicas se solapan $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Las señales se suman

|||

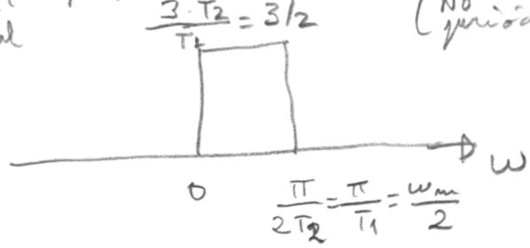
La TF es real $\rightarrow$ $Y(e^{j\Omega})$ (Per 2π) $\Leftarrow$ $X(e^{j\Omega})$ (Per)





$\Downarrow$

La TF es real $Y(j\omega)$ (No periódica)



b) $x(t)$: Su TF es real y par $\Rightarrow$ $x(t)$ es real y par

$y(t)$: El módulo de su TF no es par $\Rightarrow$ $y(t)$ es compleja

IMP: Que la TF sea o no real no está relacionado con que la señal en el tiempo sea real.

En nuestro ejemplo, el filtro $H(e^{j\Omega})$ en el dominio del tiempo tiene una $h[n]$ compleja y por eso al conv. transforma una señal real en una compleja

Ejercicio 3

a) Cierta:

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= x(n \cdot T_1) \\ v[n] &= x[N \cdot n] \end{aligned}\right] \Rightarrow v[n] = x[N \cdot n] = x(N \cdot n \cdot T_1) = \underbrace{x(N \cdot T_1 \cdot n)}_{\substack{\text{Esto es } x(t) \\ \text{muestreada a } N \cdot T_1}}$$

Nota: Si $\exists$ solapamiento, existirá tanto si lo hacemos en 2 pasos (C/D a T_1 $\oplus$ diezmador a N) como en 1 paso (C/D a NT_1)

b) Falsa:

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{\uparrow L}$$

El interpolador ideal es un "inserta ceros" más un "rellena ceros" ideal (sinc $\equiv$ Filtro paso bajo).

Aquí solo tenemos la primera parte

c) Falsa:

No siempre son iguales.

- Al ser $L \geq N$, en el esquema II nunca perdemos info.
- No obstante, en el esquema I sí podemos perder info al diezmar (no se pierde si $\frac{2\pi}{NT_1} > 2B$ y sí se pierde en caso contrario).

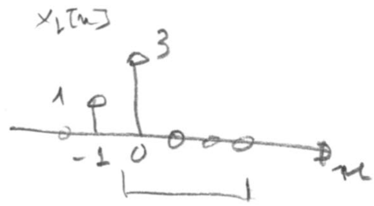
Ejercicio 4

$$\boxed{X_4[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot n} \qquad k = 0,1,2,3}$$

a)

$x_1[n] = \delta[n+1] + 3\,\delta[n]$

$x_1[n]$



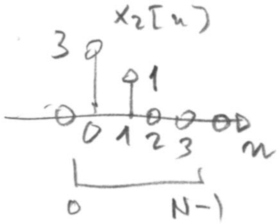
$\sum_{n=0}^{3} \ldots$

La DFT sólo considera el intervalo $0 \to N-1$

$$\boxed{X_{4,1}[n] = DFT_4\{x_1[n]\} = DFT_4\{3\,\delta[n]\} = 3} \qquad \underline{k = 0,1,2,3}$$

b) $\boxed{X_{4,2}[n]} = DFT_4\{x_2[n]\} = DFT_4\{3\,\delta[n] + \delta[n-1]\} =$

$x_2[n]$



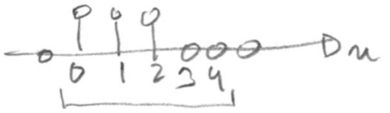
$= DFT_4\{3\,\delta[n]\} + DFT_4\{\delta[n-1]\} = 3 + e^{-j\frac{2\pi}{4}k} = \boxed{3 + (-j)^k}$

$\underline{k = 0,1,2,3}$

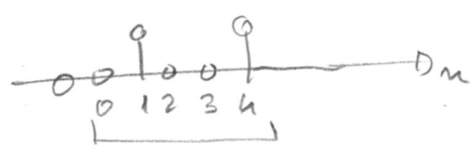
Ejercicio 5

$y[n] = x[n] \; (5) \; h[n]$

a) $x[n]$



$h[n]$



$\Rightarrow$

CONV. CIRCULAR

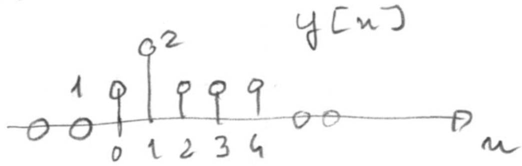
1. Enventanamos las entradas $\Rightarrow$ Se quedan igual
2. Conv. linealmente $z[n] = x[n] * h[n]$

3. Ext. periódicamente $\tilde{z}_5[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} z[n-5\cdot r]$

$\tilde{z}_5[n]$

4. Enventanamos

$y[n]$



b) Por definición / propiedades el esquema dibujado es equivalente a la conv. circular (no importa en qué interv. están def. las señales) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ SIEMPRE

Ejercicio 6

$$H(z) = \frac{1/8}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

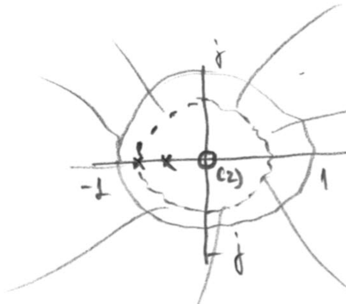
Corresponde a un LTI causal (ROC ext. circunf. polo más externo)

↑ Orden 2

a) $$H(z) = \frac{z^2}{z^2}\cdot H(z) = \frac{1/8 \cdot z^2}{(z+\frac{3}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

⇒ Cero doble en $z=0$

⇒ 1 Polo en $z=-3/4$ y otro en $z=-1/2$



Causal ⇒ ROC $|z| > |-3/4|$ ⇒ $|z| = 3/4$

Si es estable puesto que la circunf. unidad pertenece a la ROC (la TF existe)

b) Desc. en fracciones simples "trivial!!

$$H(z) = \frac{A}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})} + \frac{B}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 1/8 \\ \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = -1/4 \\ A = 3/8 \end{matrix}$$

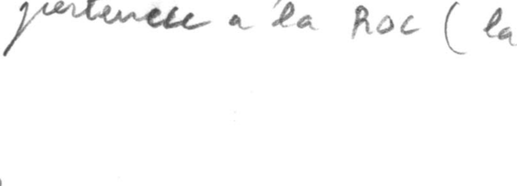
ROC $|z|>3/4$ — ROC $|z|>1/2$

$$h[n] = \frac{3}{8}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

c) $H(1) = \frac{1}{21}$ (Atenúa frecs. bajas)

$H(-1) = 1$ (Deja pasar frecs. altas)

$H(e^{j\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$



d) $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1/8}{1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] = \frac{1}{8}x[n] \Rightarrow$$