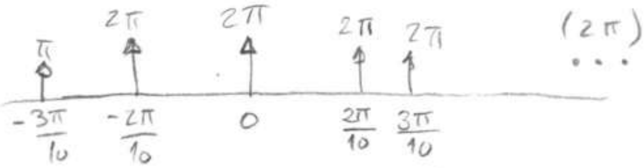
SOLUCIÓN EXAMEN ASS | 12-I-15 | URJC

Ejercicio 1



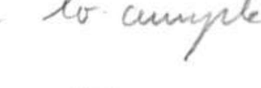
a) ¿Periódica?

Si $x[n]$ periódica $\Rightarrow$ $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{+j\frac{2\pi}{N}k \cdot n}$

$$\Updownarrow$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

El dibujo anterior lo cumple con $N=20$ ($N=10$ no sirve porque tenemos $3\pi/10 = 6\pi/20$)



b) $\langle x[n] \rangle = a_0 = 1$

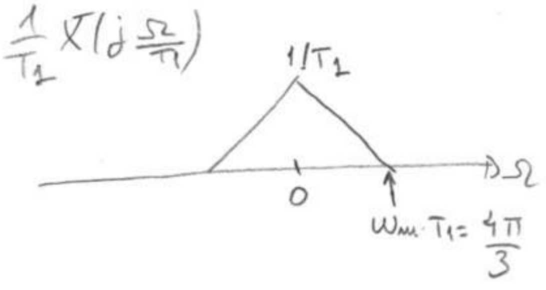
c) $y[n] = x[n] * z[n] \Rightarrow Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot Z(e^{j\Omega})$

. $Y(e^{j\Omega})$ toma valores $\neq 0$ en $\Omega = \pm\frac{\pi}{10}$ donde $X(e^{j\Omega})$ valía cero $\Rightarrow \nexists\ Z(e^{j\Omega})$ que satisfaga esto

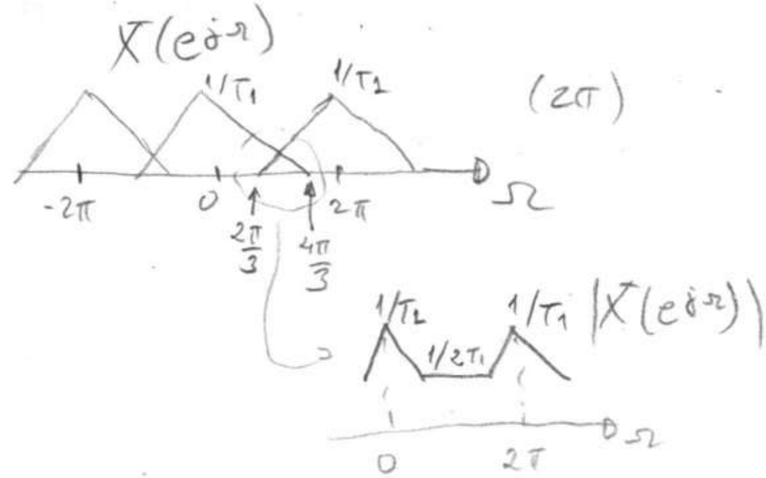
Ejercicio 2

a) $\nexists$ solap. si $\omega_s > 2 \cdot \omega_m \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1} > 2\omega_m \Rightarrow \pi > \omega_m \cdot T_1$

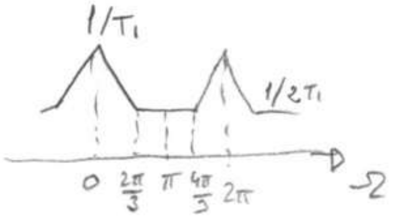
En este caso $T_1 = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\omega_m}$ luego $\omega_m \cdot T_1 = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow \exists$ aliasing

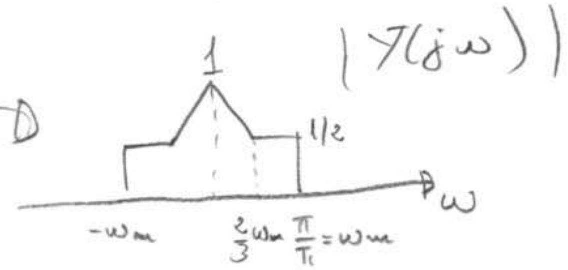


$\Rightarrow$



b) $|Y(e^{j\Omega})| = |H(e^{j\Omega}) \cdot X(e^{j\Omega})| = \overbrace{|H(e^{j\Omega})|}^{1} \cdot |X(e^{j\Omega})| = |X(e^{j\Omega})|$

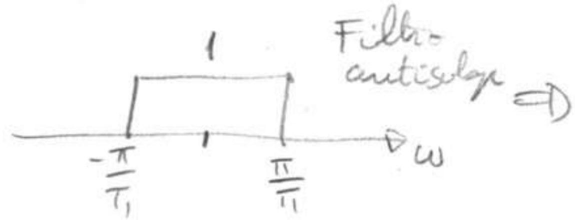




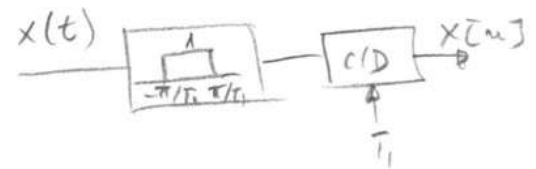
c) $|Y(j\omega)|$ es par $\Rightarrow y(t)$ real

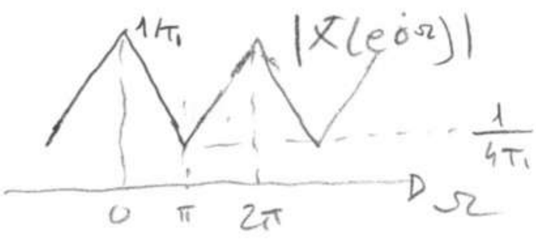
(Razonable puesto que $x(t)$ es real y $h(t)$ es equivalente a un desplazamiento)

d) Sí   Si C/D a T_1 segundos $\Rightarrow$



$\Rightarrow$





Ejercicio 3

$x[n]=0 \quad n>2$

$$X_8[k]=\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{2} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

$$X_4[k]=\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}=\sum_{n=0}^{2} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}kn}$$

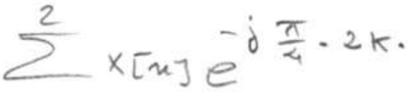
$$X_2[k]=\sum_{n=0}^{1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{2}kn}\neq\sum_{n=0}^{2} x[n]e^{-j\pi kn}$$

a) CIERTO $\quad X_4[k]=X_8[2\cdot k]=\sum_{n=0}^{2} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}\cdot 2k\cdot n}$

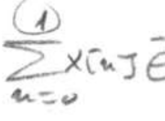
b) FALSO $\quad X_4[2\cdot k]=\sum_{n=0}^{2} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}2kn}=\sum_{n=0}^{2} x[n]e^{-j\pi kn}\neq\sum_{n=0}^{1} x[n]e^{-j\pi kn}$

c) $y_8[n]=x[n]\ (8)\ x[n]=x[n]*x[n]=(3\delta[n]+\delta[n-2])*(3\delta[n]+\delta[n-2])$

$=9\delta[n]+6\delta[n-2]+\delta[n-4]$



d) $y_2[n]=x[n]\ (2)\ x[n]=(3\delta[n])\ (2)\ (3\delta[n])=9\delta[n]$



Ejercicio 4

Muestrear a 1 MHz $\Rightarrow$ Intervalo $(-\pi,\pi)$ corresponde a $(-10^6\pi, 10^6\pi)$

DFT de long N $\Rightarrow$ Muestrea $(-\pi,\pi)$ en N valores $\Rightarrow$ corresponde a muestrear $(-10^6\pi, 10^6\pi)$ rad/seg en N valores $\Rightarrow$ -0'5 MHz a 0'5 MHz en N valores $\Rightarrow$ $\Delta f=\frac{0'5\,MHz-(-0'5\,MHz)}{N}=\frac{1000}{N}\,KHz$

a) Si se fija $N=100 \Rightarrow \Delta f=\frac{1000}{100}\,KHz=10\,KHz$, pero esto no garantiza que 2 deltas separadas en frec. 10 KHz no se distinguen debido al enventanado implícito que conlleva la DFT $\Rightarrow$ Resolución $2\times10\,KHz=20\,KHz$//

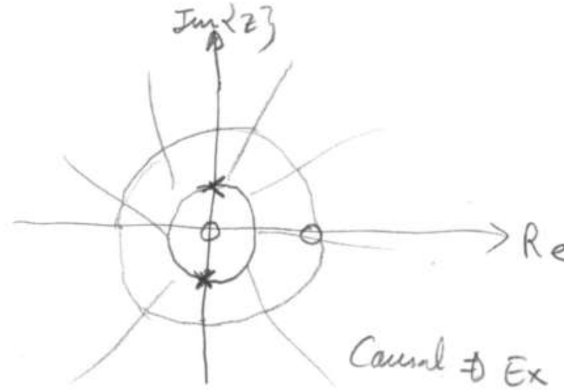
b) Si se fija $\boxed{N=200} \Rightarrow \Delta f=5\,KHz$ que, tras enventanar, supone $2\times5\,KHz=10\,KHz$

Ejercicio 5

a) Forma directa II $\Rightarrow H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{4} z^{-2}} = \dfrac{z(z-1)}{z^2 + \frac{1}{4}}$

Ceros: $z(z-1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, $c_2 = 1$

Polos $z^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} j$, $p_2 = -\frac{1}{2} j$



Causal $\Rightarrow$ Ex $|z| = \frac{1}{2}$

La ROC contiene $|z|=1$ $\Rightarrow$ Estable ROC: $|z| > 1/2$

b) $x[n] \rightarrow \boxed{\dfrac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}} \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow y[n] \quad \equiv \quad x[n] \rightarrow \boxed{H_{eq}(z)} \rightarrow y[n]$ (RI se convol, R.Freq se multiplic.)

$H_{eq}(z) = \dfrac{z^{-1} - z^{-2}}{1 + \frac{1}{4} z^{-2}} = \dfrac{z-1}{z^2 + 1/4}$
- Ceros: desaparece $\cancel{c_1 = 0}$
- Polos: se queda igual
- ROC (depende de los polos) $\Rightarrow$ Se queda igual

c) $x[n] = 2 = 2 \cdot \underbrace{1^n}_{\text{Autofunción}} \Rightarrow \boxed{y[n] = 2 \cdot H_{eq}(z)\big|_{z=1} \cdot 1^n = 2 \cdot \frac{0}{1+1/4} 1^n = 0}$

d) Por linealidad la salida si $x[n] = 2 + \delta[n]$ es la salida para $\underbrace{x[n] = 2}_{\text{Salida} = 0}$ más la salida para $\underbrace{x[n] = \delta[n]}_{\text{¿Salida?} \Rightarrow \text{Respuesta al impulso } h_{eq}[n]}$.

¿Respuesta al impulso de $H_{eq}(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} \cdot (z^{-1} - z^{-2})$?

De la ayuda sacamos que si hacemos $r = \frac{1}{2}$ y $\Omega_0 = \pi/2$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) u[n] \overset{TZ}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} \Rightarrow$

$$\boxed{h_{eq}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right) u[n-2]}$$