Ampliación de Señales y Sistemas

Tema 5: Transformada Z

La presentación contiene material del OCW del MIT (6.003 Signals and Systems S10, F11), de A. Guerrero, de A. Wilsky y de Antonio G. Marqués.

Ubicándonos

Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo.

Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia.

Tema 3: Muestreo.

Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier.

Tema 5: Transformada Z.

- **5.1. Definición y ejemplos.**
- **5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.**
- **5.3. TZ inversa.**
- **5.4 Propiedades de la TZ.**
- **5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.**
- **5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.**
- **5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).**

Tema 6: Introducción al diseño de filtros discretos.

Comentarios:

- Generalización de la TF (la TF es un caso específico de la TZ).
- Analíticamente son más sencillas que la TF.
- Es necesario indicar los valores de z para los que la TZ existe en cada caso.
- Muy útil para analizar y diseñar SDEDs y, por ende, filtros.
- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.

- 5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.

- 5.3. TZ inversa.

- 5.4. Propiedades de la TZ.

- 5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.

- 5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.

- 5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).

Comentarios:

- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

Definición de la TZ

La TZ de x[n] se representa por X(z) y matemáticamente se define como:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{TZ}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$\boxed{z \in C}$$

¡OJO!: La TZ toma valores complejos y devuelve valores complejos

En sistemas LTI, la TZ de la respuesta al impulso del sistema, H(z), es la función de transferencia del sistema y se obtiene a partir de los valores de h[n]:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = \underbrace{z^n}_{\substack{\text{Eigenfunction} \\ \text{for DT LTI}}} \longrightarrow y[n] = H(z) z^n$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

suponiendo que converge

Definición de la TZ

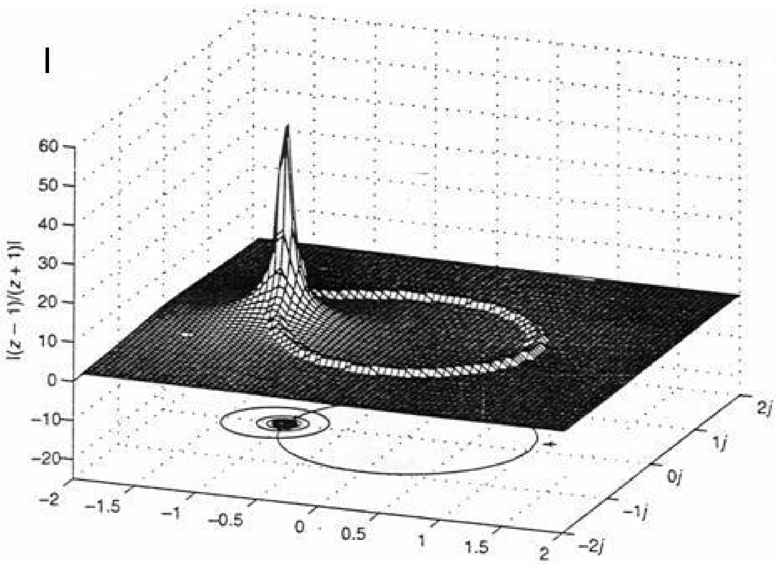
Aparece un sumatorio infinito en la definición de X(z) → ¿converge?

Suponiendo que la suma da un valor finito ➔ No es nada evidente porque hay infinitos sumandos y z^{-n} puede ser muy grande (infinito) → Por lo tanto, su convergencia depende de los valores de ***z.***

¡¡Importante!!: Es necesario indicar **SIEMPRE** los valores de z para los que X(z) converge. Es lo que se llama la región de convergencia (ROC) de la TZ.

Definición de la TZ

Es una herramienta muy potente para diseñar y analizar sistemas discretos.



Se utiliza para …

- obtención de expresiones entrada-salida,
- simplificación de estructuras,
- implementación de estructuras,
- resolucion de ecuaciones en diferencias,
- hacer de puente entre el diseño analógico y digital.

Ubicándonos

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- **5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.**
- 5.3. TZ inversa.
- 5.4. Propiedades de la TZ.
- 5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.
- 5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.
- 5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).

Comentarios:

- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

ROC y relación entre la TZ y la TF en DT

$$z = re^{j\Omega}, \quad r = |z|, \;\; \Omega = \angle z$$

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\Omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\Omega n}$$

$$= TF\{x[n]r^{-n}\}$$

Caso particular: si |z|=1 $\Rightarrow$ $X(z) = X(e^{j\Omega})$

$$ROC: \left\{ z = re^{j\Omega} \; donde \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

— sólo depende de $r = |z|$

ROC: conjunto de valores de z para los que $X(z)$ Converge (X(z) toma valores finitos)

Si la circunferencia unidad (r = 1) está dentro de la ROC
$\Rightarrow$ TF en DT, $X(e^{j\Omega})$, existe.

ROC y relación entre la TZ y la TF en DT

Ejemplo de un TZ en 3D. Se representa $20*\log_{10} |G(z)|$

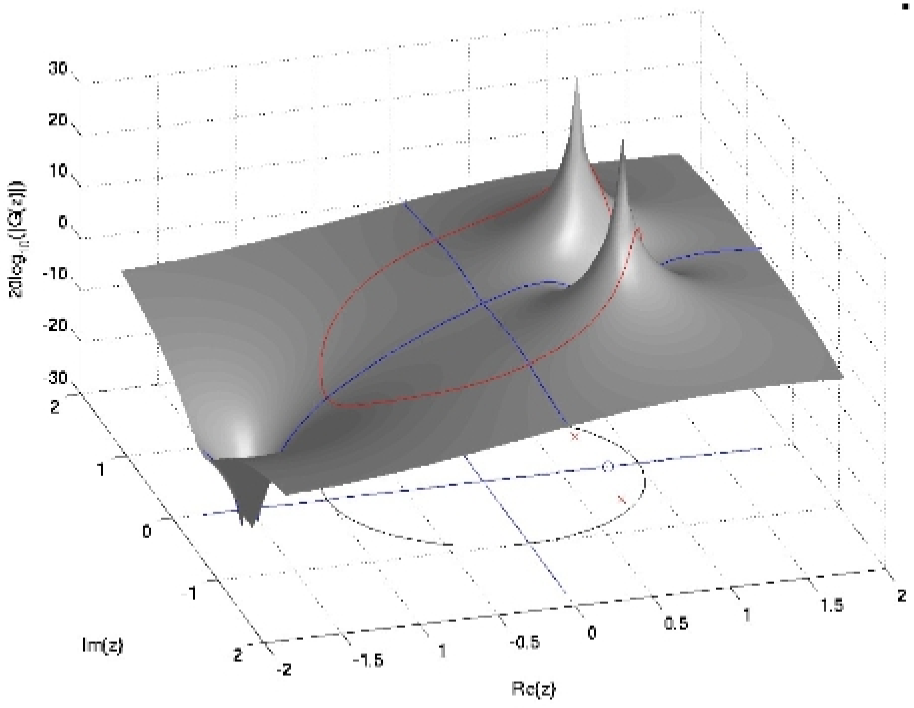


Imagen de Dan Ellis

Obervar su proyección sobre el plano Z → eso es la ROC.

ROC y relación entre la TZ y la TF en DT

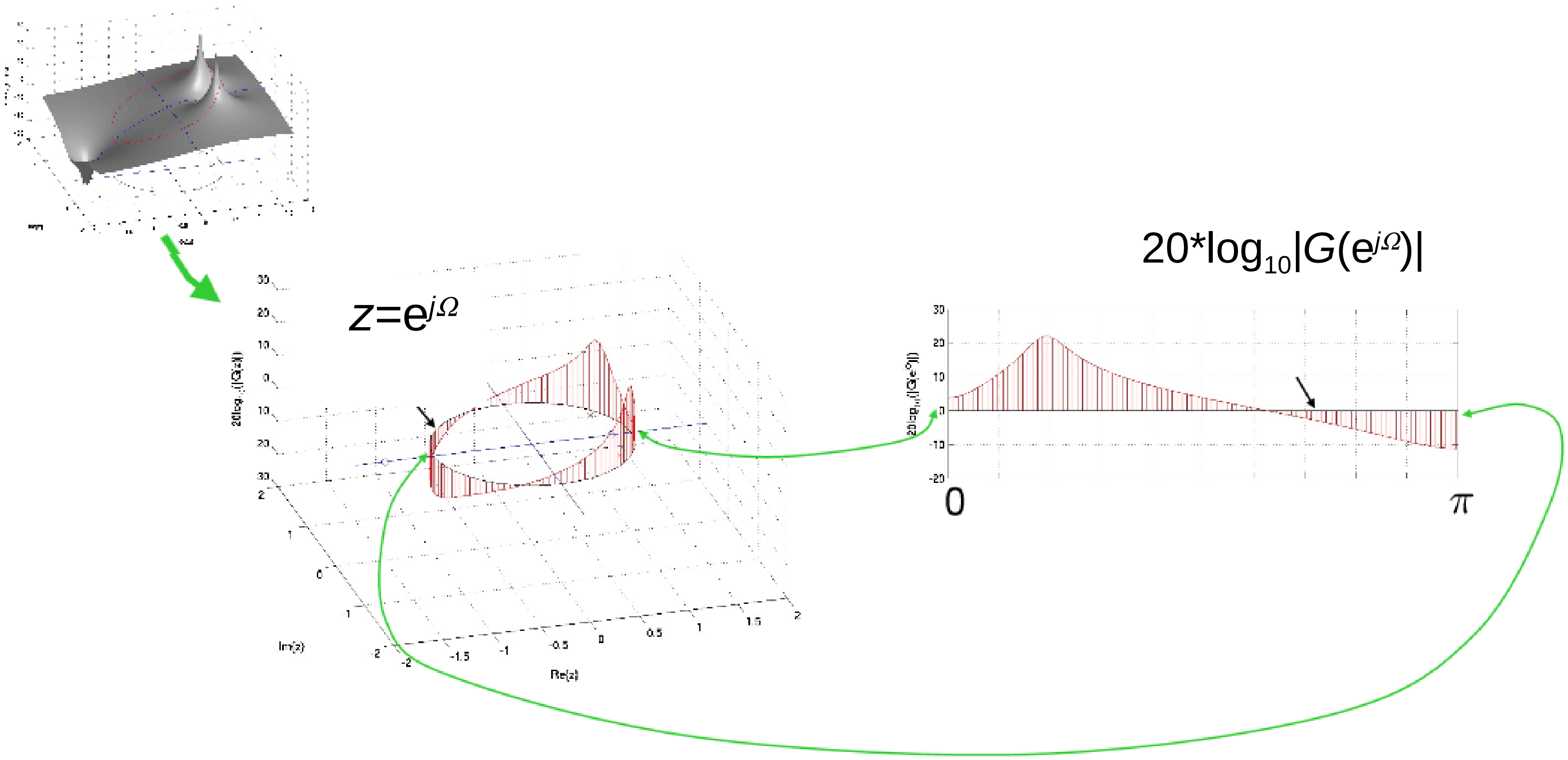


Imagen de Dan Ellis

Ejemplo 1

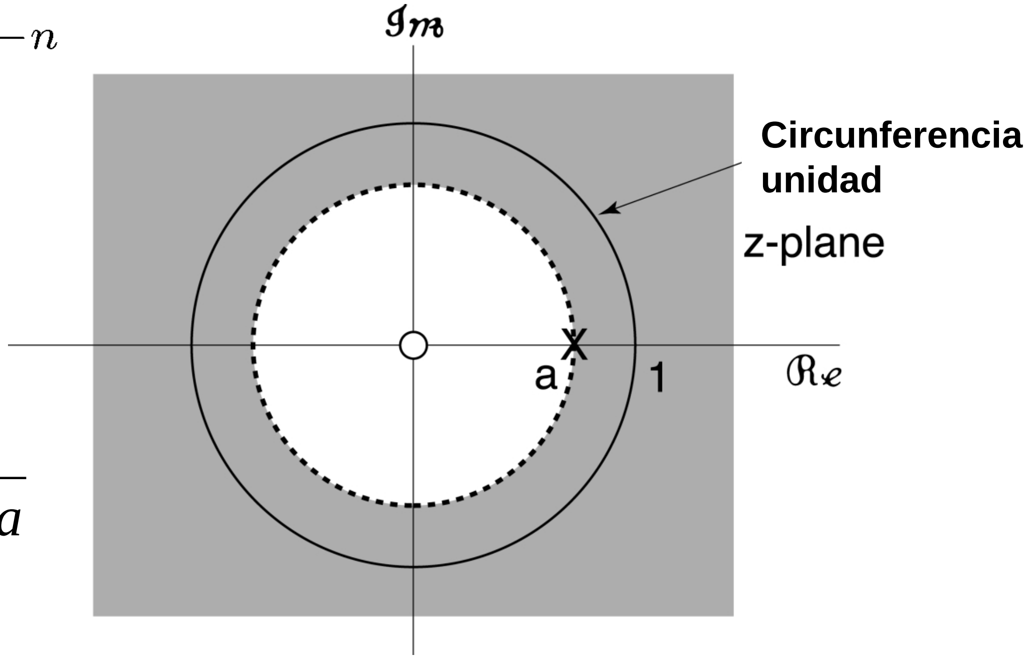
$$x[n]=a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Si $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow , |z| > |a|$



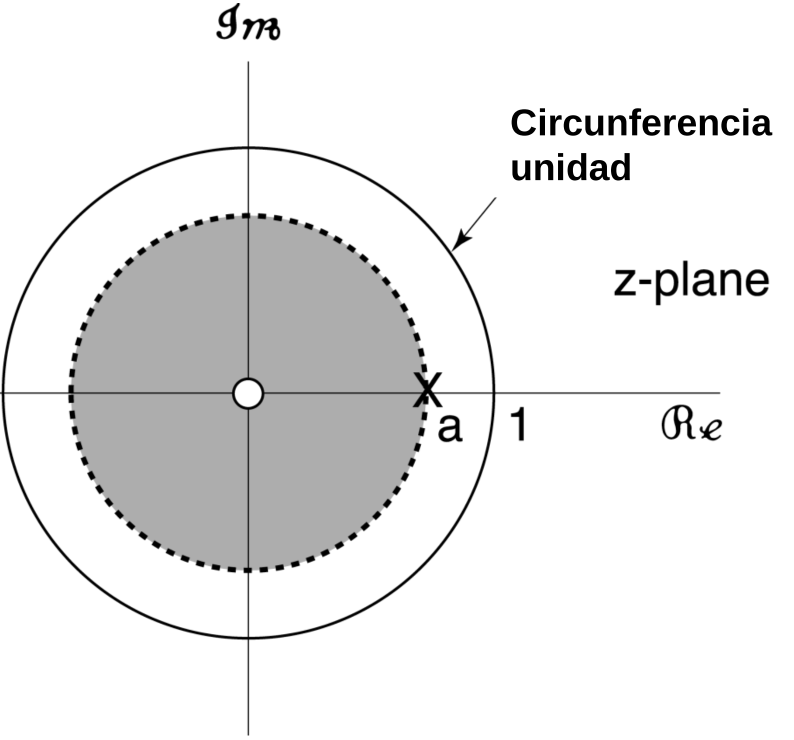
Es decir, la ROC, |*z*| > |*a*|,
es exterior al círculo de radio |*a*|

Podéis comprobar que X(a/2)=∞, utilizando la ec. de análisis

Ejemplo 2:

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{-a^n u[-n-1] z^{-n}\} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \\
&= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{a^{-1} z}{a^{-1} z - 1} \\
&= \frac{z}{z-a},
\end{aligned}$$



Si $|a^{-1} z| < 1, \Rightarrow |z| < |a|$

La misma $X(z)$ que en el Ejemplo 1, pero con diferente ROC.

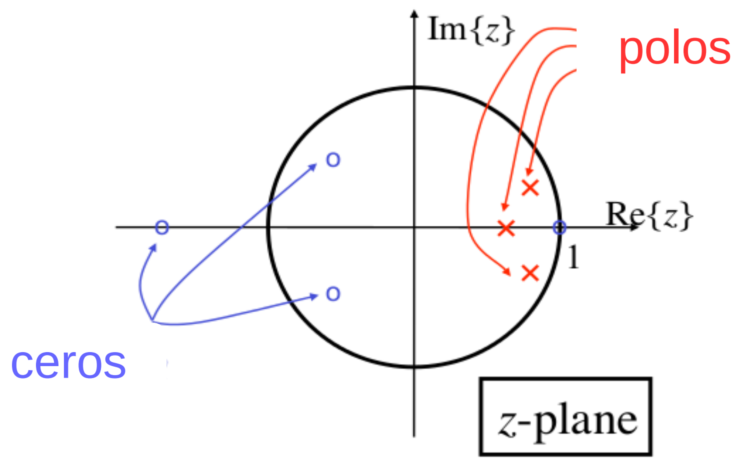
TZ de $x[n]$: expresión analítica de $X(z)$ + ROC

Transformadas Z racionales

Nos interesan porque la mayor parte de las TZ de interés son racionales

$x[n]$ = combinación lineal de exponenciales

$$\Downarrow$$



$X(z)$ es racional

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$ Polinomios en z

caracterizada por sus polos y sus ceros:

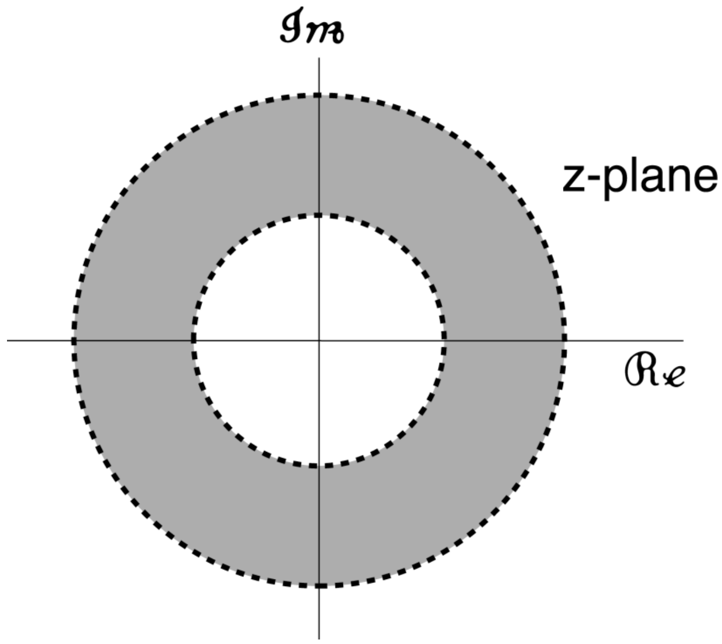
o: ceros: valores de z donde se anula $N(z)$

x: polos: valores de z donde se anula $D(z)$

Conclusión: para señales que son combinaciones lineales de exponenciales en DT, las TZ son racionales

Propiedades de las ROCs de la TZ

(1) La ROC de $X(z)$ es un anillo en el plano-z centrado en el origen.



(2) La ROC **no** puede contener polos.

¿Por qué? ➔Un polo es un cero del denominador ➔ Si el denominador se anula, la TZ vale …

Propiedades de las ROCs de la TZ

(3) Si $x[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es todo el plano-z excepto posiblemente z = 0 y/o z = ∞.

¿Por qué?

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

Ejemplos:

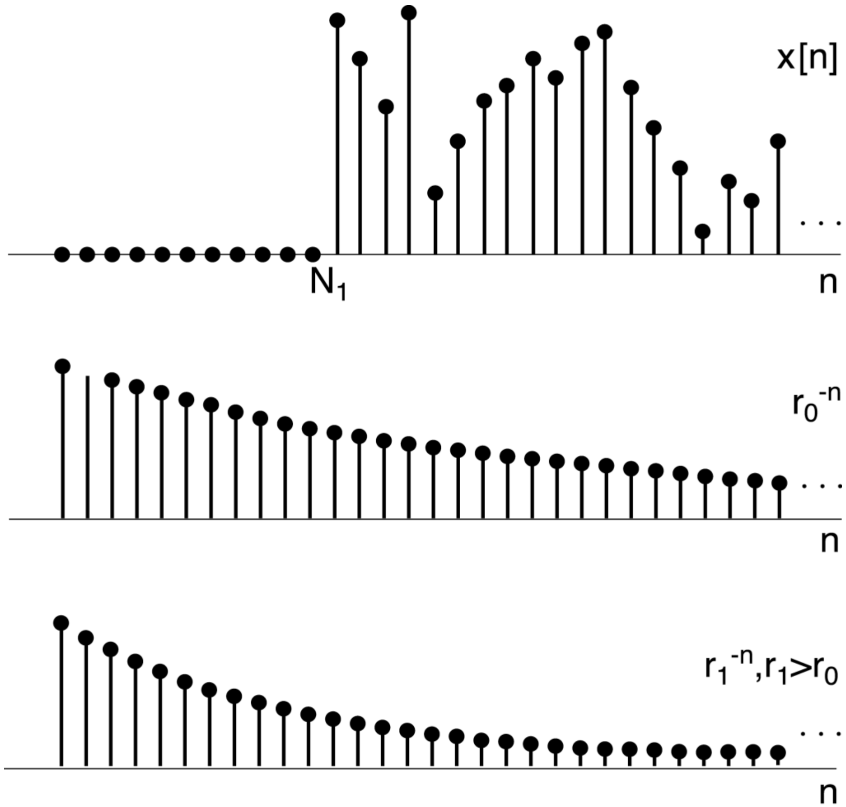
$$\delta[n] \overset{\mathrm{TZ}}{\leftrightarrow} 1, \qquad ROC\!: \ todo\ z$$

$$\delta[n-1] \overset{\mathrm{TZ}}{\leftrightarrow} z^{-1}, \qquad ROC\!: \ z \neq 0$$

$$\delta[n+1] \overset{\mathrm{TZ}}{\leftrightarrow} z, \qquad ROC\!: \ z \neq \infty$$

Propiedades de las ROCs de la TZ

(4) Si $x[n]$ es una secuencia a derechas, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z con $|z| > r_o$ también están en la ROC.



$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_1^{-n}$$

Converge más rápido que:

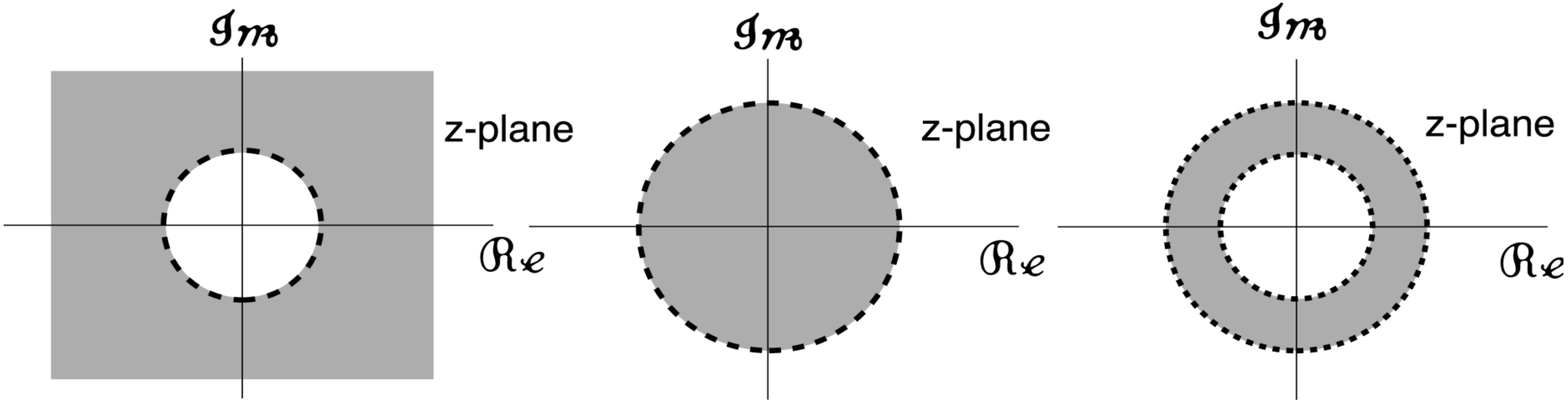
$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_0^{-n}$$

Propiedades de las ROCs de la TZ

(5) Si $x[n]$ es una secuencia a izquierdas, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z con $0 < |z| < r_o$ también están en la ROC.

(6) Si $x[n]$ es bilateral, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces la ROC es una anillo en el plano-z que incluye a la circunferencia con $|z| = r_o$.

¿A qué tipo de señales corresponden las siguientes ROCs?

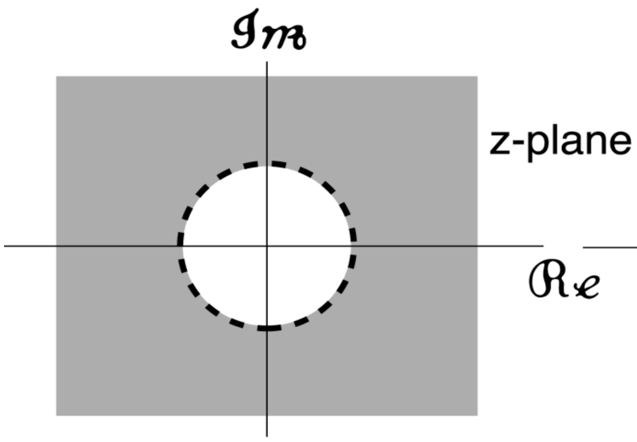


Propiedades de las ROCs de la TZ

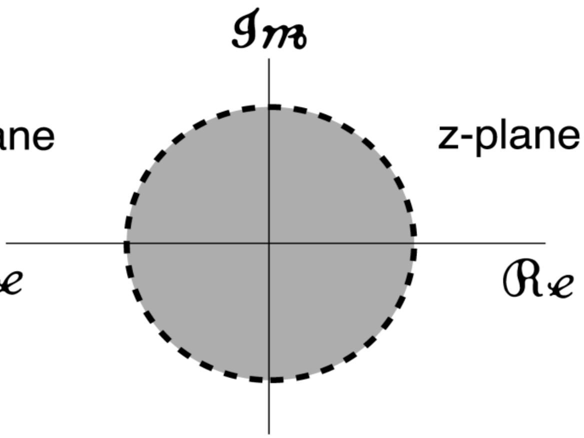
(5) Si $x[n]$ es una secuencia a izquierdas, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z con $0 < |z| < r_o$ también están en la ROC.

(6) Si $x[n]$ es bilateral, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces la ROC es una anillo en el plano-z que incluye a la circunferencia con $|z| = r_o$.

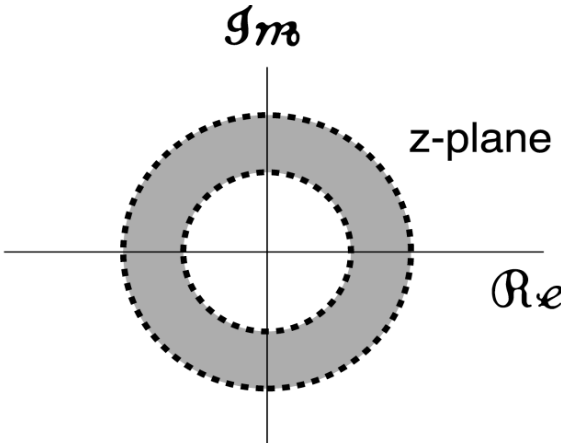
¿A qué tipo de señales corresponden las siguientes ROCs?



sec. a derechas



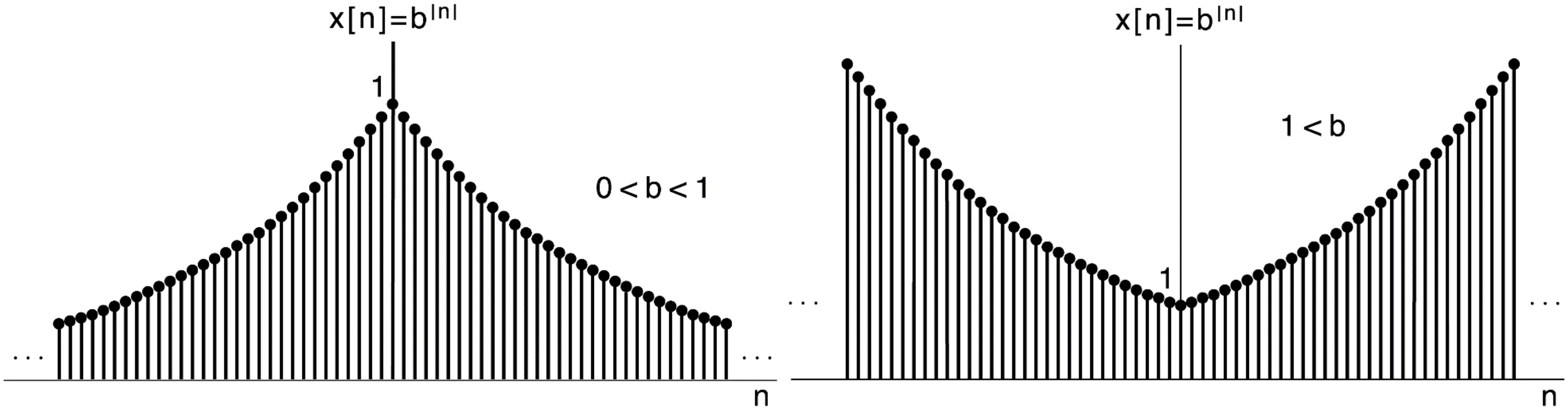
sec. a izquierdas



sec. bilateral

Propiedades de las ROCs de la TZ

Ejemplo 1: $x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$



$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

De las tablas:

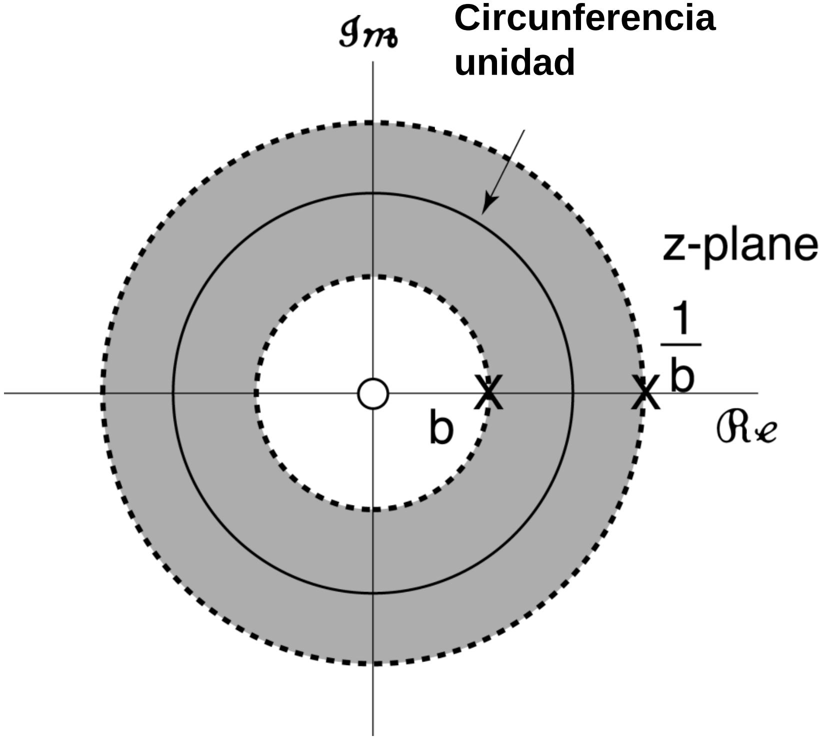
$$b^n u[n] \overset{\text{TZ}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \overset{\text{TZ}}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{1 - b^{-1} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

Propiedades de las ROCs de la TZ

Ejemplo 1 (cont.) :

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad , \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$



La ROC *no* existe si $b > 1$ ⇒ *No* hay TZ para $b^{|n|}$.

Propiedades de las ROCs de la TZ

(7) Si $X(z)$ es racional, entonces su ROC está delimitada por los polos o se extendiende al ∞.

Combinando la propiedad (7) con (4) y (5):

(8) Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ es a derechas, entonces la ROC se extiende desde el polo más externo (el de mayor módulo) hasta el ∞ (incluyéndolo o no). Si además, $x[n]$ es causal, la ROC incluye al ∞.

(9) Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ es a izquierdas, entonces la ROC se extiende desde el polo más interno (el de menor módulo) hasta el origen (incluyéndolo o no). Si además, $x[n]$ es anticausal, la ROC incluye al origen, es decir, a $z = 0$.

Ubicándonos

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.
- **5.3. TZ inversa.**
- 5.4. Propiedades de la TZ.
- 5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.
- 5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.
- 5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).

Comentarios:

- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

TZ inversa

$$X(z) = X(re^{j\Omega}) = TF\{x[n]r^{-n}\}, \quad z = re^{j\Omega} \in ROC$$

$$\Downarrow$$

$$x[n]r^{-n} = TF^{-1}\{X(re^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\Omega})\underbrace{r^n e^{j\Omega n}}_{z^n}d\Omega$$

Para r fijo:

$$z = re^{j\Omega} \Rightarrow dz = jre^{j\Omega}d\Omega \Rightarrow d\Omega = \frac{1}{j}z^{-1}dz$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Para trabajar con esta expresión, se necesitan herramientas matemáticas más avanzadas → NO la usaremos

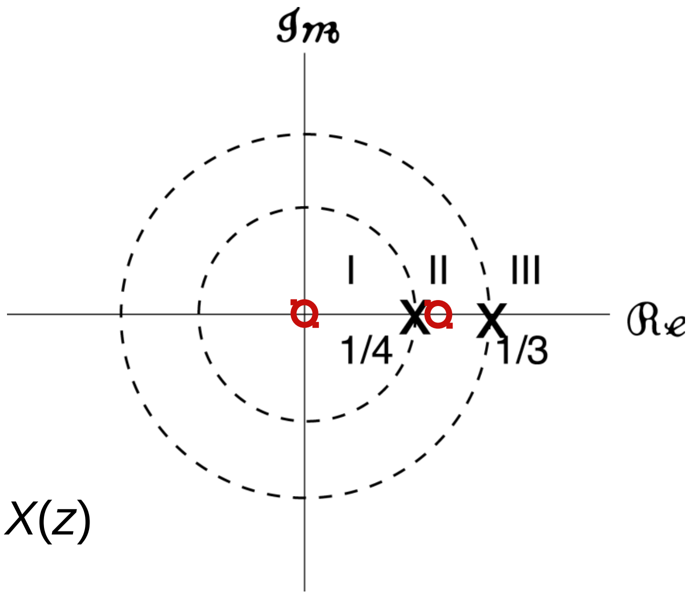
Otras formas de calcular TZ inversas:

a) si TZ es racional → usar expansión en fracciones simples: *Ejemplo*

$$X(z) = \frac{3z^2 - \frac{5}{6}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})} = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Expandiendo en fracciones simples: $A = 1$, $B = 2$

$$\begin{array}{ccccc} X(z) & = & \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} & + & \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ x[n] & = & x_1[n] & + & x_2[n] \end{array}$$



Nota:

1) Para calcular polos y ceros, expresa $X(z)$ como una función de z.

2) Para calcular TZ inversas, expresa $X(z)$ como una función de z^{-1} y usa expansión en fracciones simples.

ROC III: $|z| > \frac{1}{3}$ - sec. a derechas

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ROC II: $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ - sec. bilateral

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

ROC I: $|z| < \frac{1}{4}$ - sec. a izquierdas

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

b) Si TZ no es racional → por identificación de coeficientes en series de potencias

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

x[*n*] son los coeficientes de z^{-n}

Ejemplo: $$X(z) = 3z^3 - z + 2z^{-4}$$

$$x[-3] = 3$$

$$x[-1] = -1$$

$$x[4] = 2$$

$x[n] = 0$, para el resto de valores de *n*

Ubicándonos

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.
- 5.3. TZ inversa.
- **5.4. Propiedades de la TZ.**
- 5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.
- 5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.
- 5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).

Comentarios:

- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

Propiedades de la TZ

(1) Desplazamiento temporal: $x[n-n_0] \stackrel{\text{TZ}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z),$

La ROC no cambia, excepto por posible adición o eliminación del origen o del infinito

si $n_o > 0 \Rightarrow$ puede que la ROC no contenga $z = 0$

si $n_o < 0 \Rightarrow$ puede que la ROC no contenga $z = \infty$

(2) Diferenciación en dominio-*z:* $nx[n] \stackrel{\text{TZ}}{\longleftrightarrow} -z\dfrac{dX(z)}{dz},$ la ROC no cambia

Derivación:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ \frac{dX(z)}{dz} &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n-1} \\ -z\frac{dX(z)}{dx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \end{aligned}$$

(3) Escalado en el dominio-*z*:

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{\text{TZ}} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = |z_0|\, ROC_x$$

(4) Teorema del valor principal:

si x[n] es causal (x[n]=0, n < 0), entonces x[0] = $\lim_{z\to\infty} X(z)$

(5) Otras: linealidad, expansión temporal, conjugación, etc.

PROPIEDADES DE LA TZ

Propiedad de Convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Y(*z*) = *H*(*z*)*X*(*z*) ,

→ la ROC es al menos la intersección de las ROCs de *H*(*z*) y *X*(*z*),
→ puede ser más grande si hay cancelación de polos/ceros. *P.e.*

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z-a}, \quad |z| > a \\ X(z) &= z-a, \quad z \neq \infty \\ Y(z) &= 1 \quad \text{ROC all } z \end{aligned}$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}}$$

— Función (de transferencia) del sistema

PROPIEDADES DE LA TZ

TABLE 10.1 PROPERTIES OF THE z-TRANSFORM

Section	Property	Signal	z-Transform	ROC
		$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
10.5.1	Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.2	Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, except for the possible addition or deletion of the origin
10.5.3	Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
		$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
		$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Scaled version of R (i.e., $\|a\|R$ = the set of points $\{\|a\|z\}$ for z in R)
10.5.4	Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., R^{-1} = the set of points z^{-1}, where z is in R)
10.5.5	Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
10.5.6	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
10.5.7	Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.7	First difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $\|z\| > 0$
10.5.7	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	At least the intersection of R and $\|z\| > 1$
10.5.8	Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9	Initial Value Theorem If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$			

Agunos pares de TZ más comunes

$$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1 \quad , \quad \text{All } z$$

$$\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad , \quad |z|>1 \qquad , \qquad -\mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1} \quad , \quad |z|<1$$

$$\alpha^n \mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad , \quad |z|>|\alpha| \qquad , \qquad -\alpha^n \mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad , \quad |z|<|\alpha|$$

$$n\,\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \quad , \quad |z|>1 \qquad , \qquad -n\,\mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \quad , \quad |z|<1$$

$$n\alpha^n \mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2} \quad , \quad |z|>|\alpha| \qquad , \qquad -n\alpha^n \mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2} \quad , \quad |z|<|\alpha|$$

$$\sin(\Omega_0 n)\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\sin(\Omega_0)}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} \quad , \quad |z|>1 \qquad , \qquad -\sin(\Omega_0 n)\mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\sin(\Omega_0)}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} \quad , \quad |z|<1$$

$$\cos(\Omega_0 n)\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\left[z-\cos(\Omega_0)\right]}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} \quad , \quad |z|>1 \qquad , \qquad -\cos(\Omega_0 n)\mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} = \frac{z\left[z-\cos(\Omega_0)\right]}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} \quad , \quad |z|<1$$

$$\alpha^n \sin(\Omega_0 n)\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\alpha\sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha z\cos(\Omega_0)+\alpha^2} \quad , \quad |z|>|\alpha| \quad , \quad -\alpha^n \sin(\Omega_0 n)\mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\alpha\sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha z\cos(\Omega_0)+\alpha^2} \quad , \quad |z|<|\alpha|$$

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\left[z-\alpha\cos(\Omega_0)\right]}{z^2-2\alpha z\cos(\Omega_0)+\alpha^2} \quad , \quad |z|>|\alpha| \quad , \quad -\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\mathrm{u}[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z\left[z-\alpha\cos(\Omega_0)\right]}{z^2-2\alpha z\cos(\Omega_0)+\alpha^2} \quad , \quad |z|<|\alpha|$$

$$\alpha^{|n|} \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\alpha^{-1}} \quad , \quad |\alpha|<|z|<\left|\alpha^{-1}\right|$$

$$\mathrm{u}[n-n_0]-\mathrm{u}[n-n_1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1}\left(z^{-n_0}-z^{-n_1}\right) = \frac{z^{n_1-n_0-1}+z^{n_1-n_0-2}+\cdots+z+1}{z^{n_1-1}} \quad , \quad |z|>0$$

Ubicándonos

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.
- 5.3. TZ inversa.
- 5.4. Propiedades de la TZ.
- **5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.**
- 5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.
- 5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).

Comentarios:

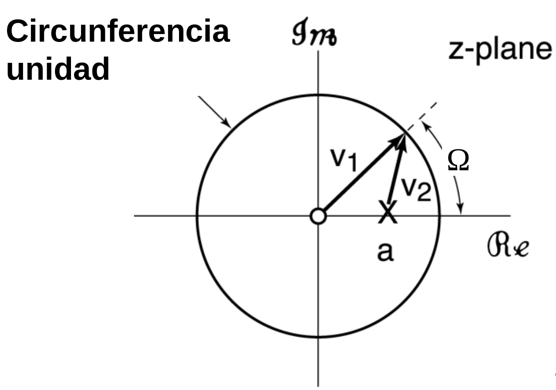
- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

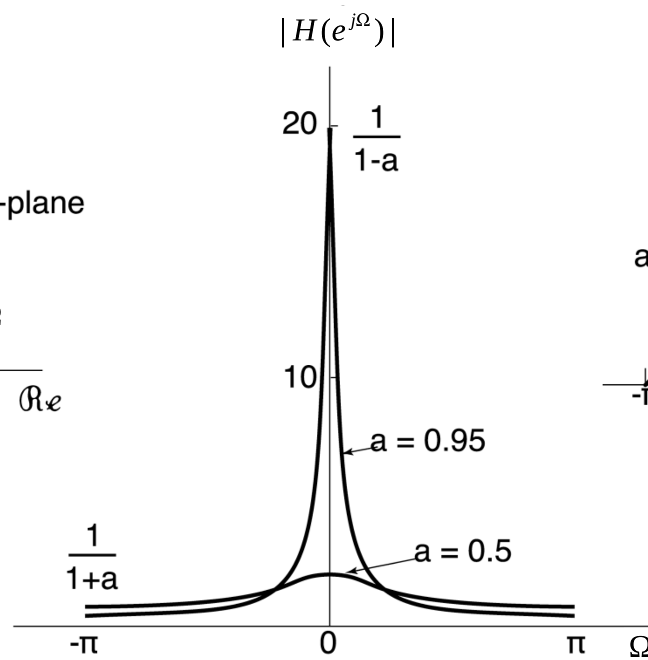
Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros

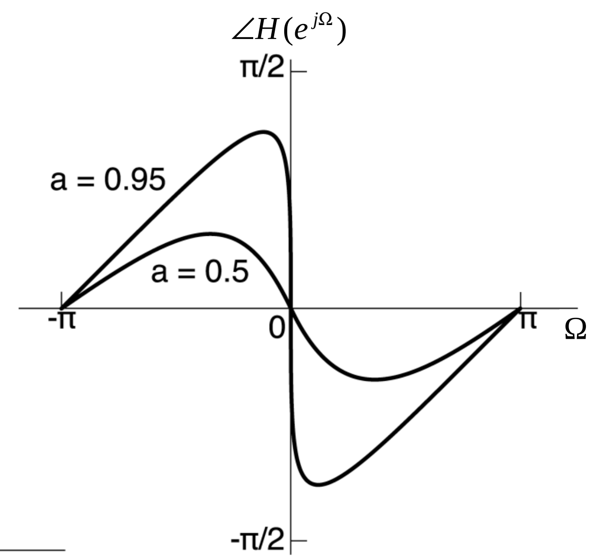
Sistema de primer orden
— un polo *real*

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$h[n] = a^n u[n] \quad , \quad |a| < 1$$







$$H(e^{j\Omega}) = \frac{v_1}{v_2},$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{1}{|v_2|} = \frac{1}{|e^{j\Omega} - a|}$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \angle v_1 - \angle v_2 = \Omega - \angle v_2$$

EVALUACIÓN DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA A PARTIR DEL DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

Considere la siguiente función de transferencia de un sistema:

$$\mathrm{H}(z) = \frac{z}{z^2 - z/2 + 5/16} = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

$$p_1 = \frac{1+j2}{4} \;,\; p_2 = \frac{1-j2}{4}$$

$$\left|\mathrm{H}\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \frac{\left|e^{j\Omega}\right|}{\left|e^{j\Omega}-p_1\right|\left|e^{j\Omega}-p_2\right|}$$

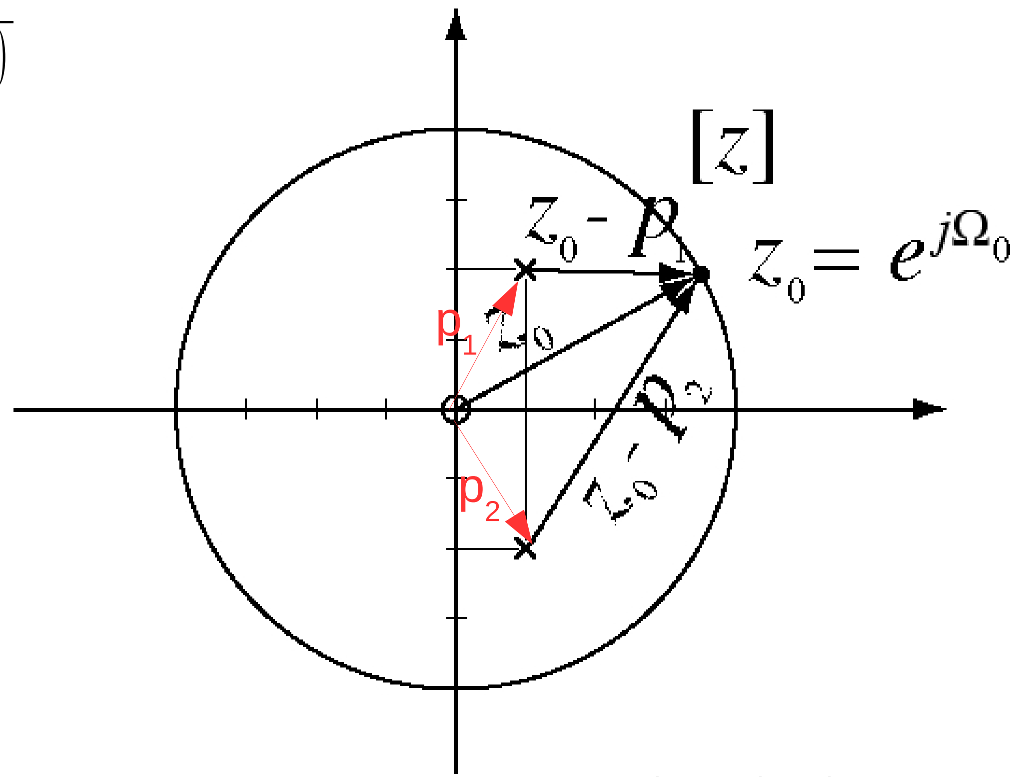


Imagen de Dr. Robert Akl

EVALUACIÓN DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA A PARTIR DEL DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

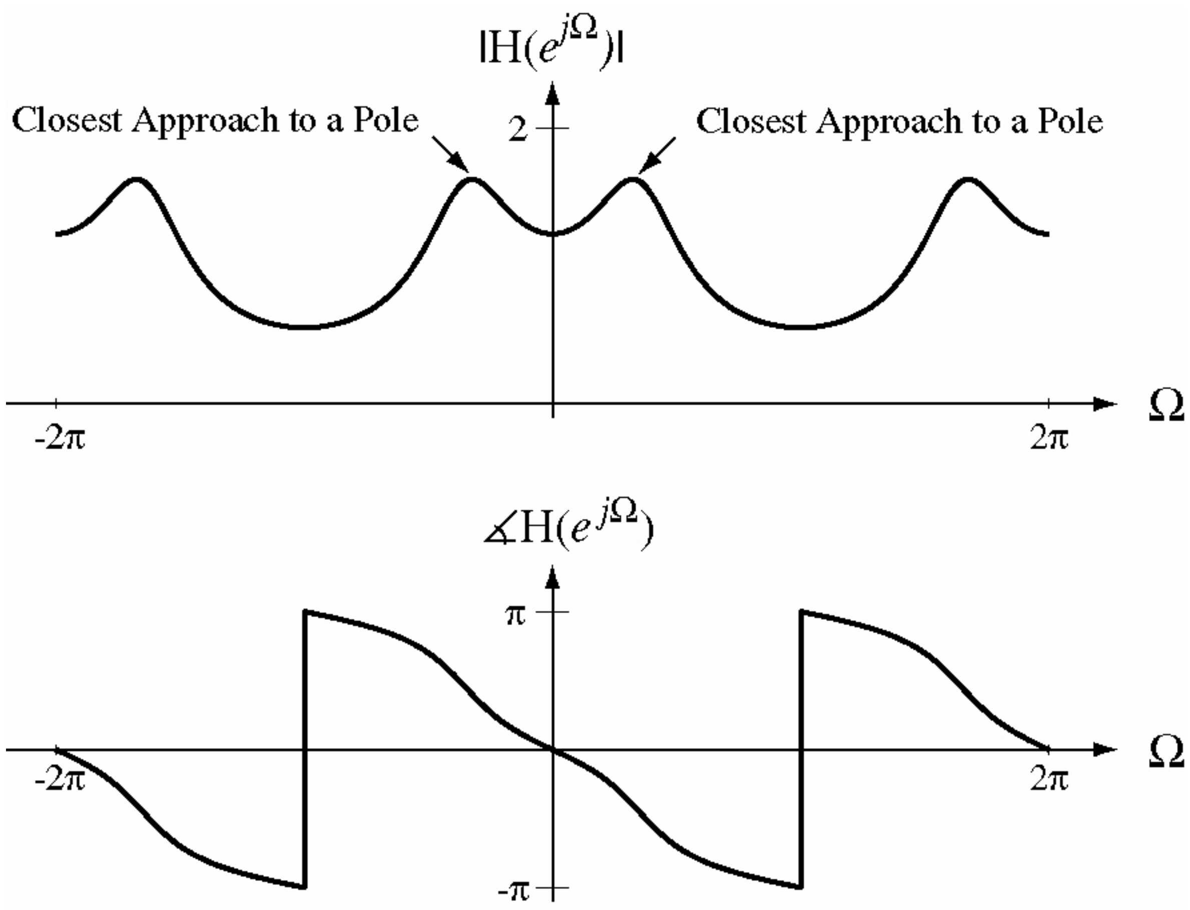


Imagen de Dr. Robert Akl

Ubicándonos

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.
- 5.3. TZ inversa.
- 5.4. Propiedades de la TZ.
- 5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.
- **5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.**
- 5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDEDs).

Comentarios:

- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

Los SLTIs quedan totalmente caracterizados por su *h*[*n*] ➔ Los SLTIs quedan totalmente caracterizados por su *H*(*z*) ➔ Analizando *H*(*z*), su ROC y sus diagramas de polos y ceros podremos analizar tanto el comportamiento como <u>las propiedades</u> del SLTI asociado.

1) Causalidad: *h*[*n*] es una sec. a derechas ⇒ la ROC es el exterior de una circunferencia *posiblemente* incluyendo *z* = ∞:

$$H(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Si $N_1 < 0$, entonces el término $h[N_1]z^{-N_1} \longrightarrow \infty$ en $z = \infty$

$\Rightarrow$ La ROC es el exterior a una circunferencia, pero *sin* incluir el ∞

Causal $\Leftrightarrow N_1 \geq 0$

$\Downarrow$

Un SLTI en DT con función de transferencia *H*(*z*) es causal ⇔ la ROC de *H*(*z*) es el exterior a una circunferencia *incluyendo* *z* = ∞.

Causalidad para sistemas con funciones de transferencia racionales

$$H(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$\Downarrow$ Si M ≤ N, no hay polos en el ∞

Un SLTI en DT con función de transferencia *H*(*z*) racional es causal

$\Leftrightarrow$ (a) la ROC es el exterior de la circunferencia dada por el polo más externo

(b) si podemos escribir *H(z)* como el cociente de polinomios en *z*

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

entonces: grado *N*(*z*) ≤ grado *D*(*z*)

2) Estabilidad:

SLTI es estable $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow$ ROC de $H(z)$ incluye a la circunferencia unidad, $|z| = 1$

$\Rightarrow$ la respuesta en frecuencia $H(e^{j\Omega})$ (TF en DT de $h[n]$) existe.

3) Causalidad y estabilidad:

Un SLTI causal con función de transferencia racional es estable $\Leftrightarrow$ todos los polos están dentro del círculo unidad, es decir, tienen magnitudes < 1.

Un SLTI anticausal con función de transferencia racional es estable $\Leftrightarrow$ todos los polos están fuera del círculo unidad, es decir, tienen magnitudes > 1.

Tema 5: Transformada Z.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. Región de convergencia (ROC) y propiedades de la ROC.
- 5.3. TZ inversa.
- 5.4. Propiedades de la TZ.
- 5.5. Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.
- 5.6. Análisis y caracterización de los SLTIs usando TZ.
- **5.7. SLTIs descritos por ecuaciones en diferencias (SDED).**

Comentarios:

- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4.

SLTIs DESCRITOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIA (SDED)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ → **No** da información sobre la ROC

Usando las propiedades:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$ → racional

ROC: Depende de si h[n] es una sec. a izquierdas, a derechas o bilateral.

Para caracterizar el sistema, además de *H*(*z*), necesitamos su ROC, es decir, necesitamos saber si el sistema es causal y/o estable.

Ejemplo 1:

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] - x[n-1] + 0.25x[n-2]$$

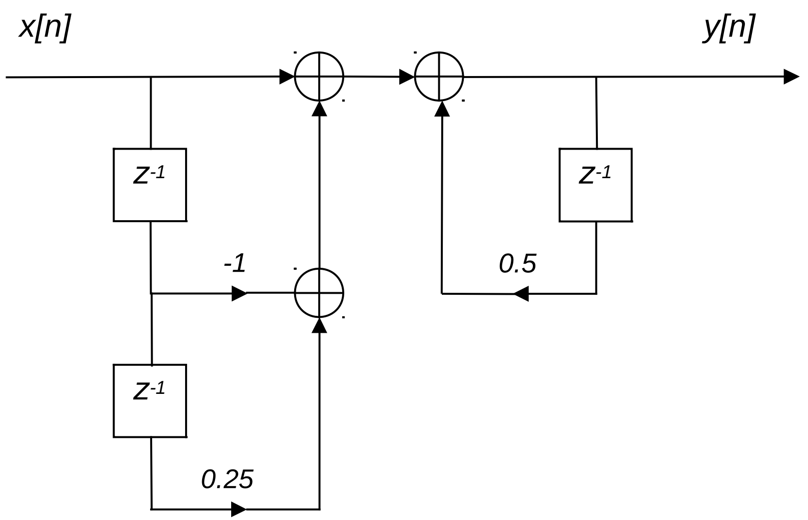
➔ Lo pasamos al dominio z:

$$Y(z) = 0.5Y(z)z^{-1} + X(z) - X(z)z^{-1} + 0.25X(z)z^{-2}$$

$$Y(z) - 0.5Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-1} + 0.25X(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left(1 - 0.5z^{-1}\right) = X(z)\left(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}\right) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}\right)}{\left(1 - 0.5z^{-1}\right)}$$

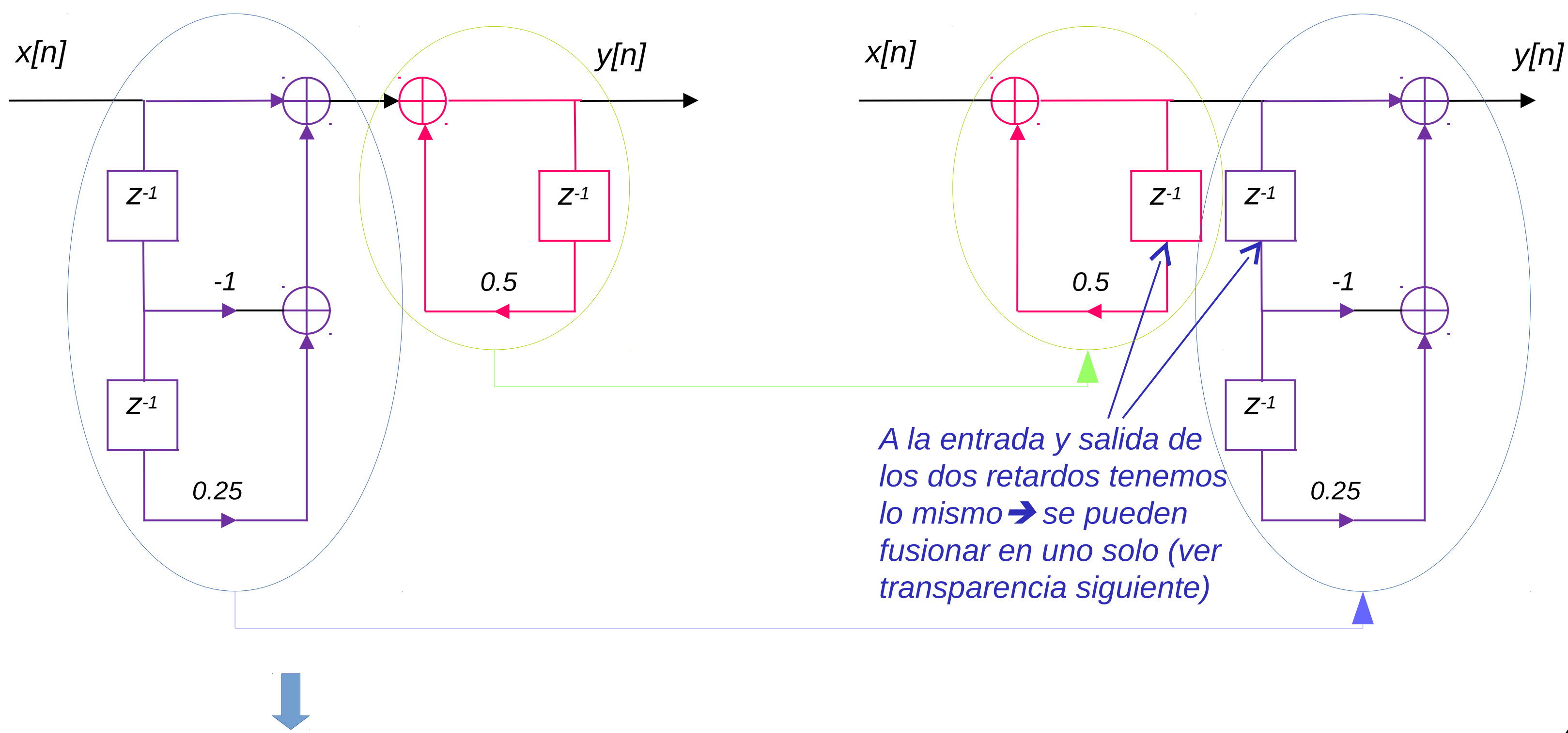
¿Diagrama de bloques?



Ejemplo 1:

Es un sistema, pero lo podemos ver como la conexión en cascada de dos

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}+0.25z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{1-z^{-1}+0.25z^{-2}}{1}\,\frac{1}{1-0.5z^{-1}}=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\,\frac{1-z^{-1}+0.25z^{-2}}{1}$$

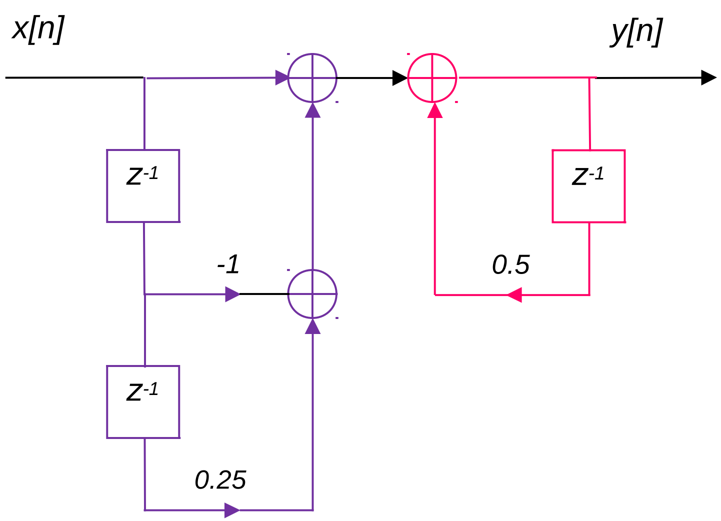


Forma Directa I

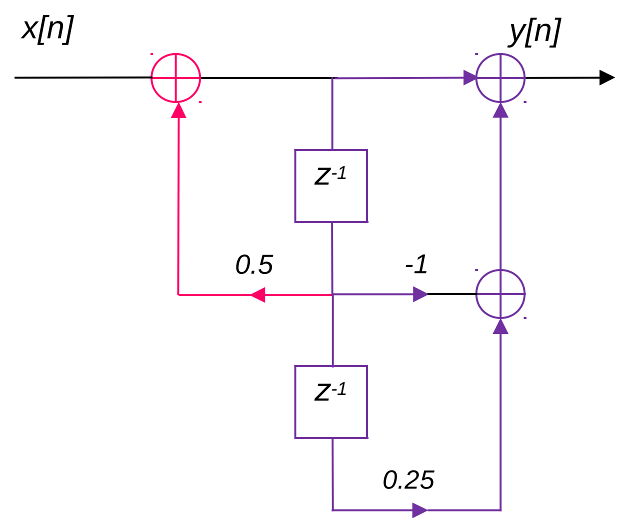
Ejemplo 1:

Es un sistema, pero lo podemos ver como la conexión en cascada de dos

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1} \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \frac{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1}$$



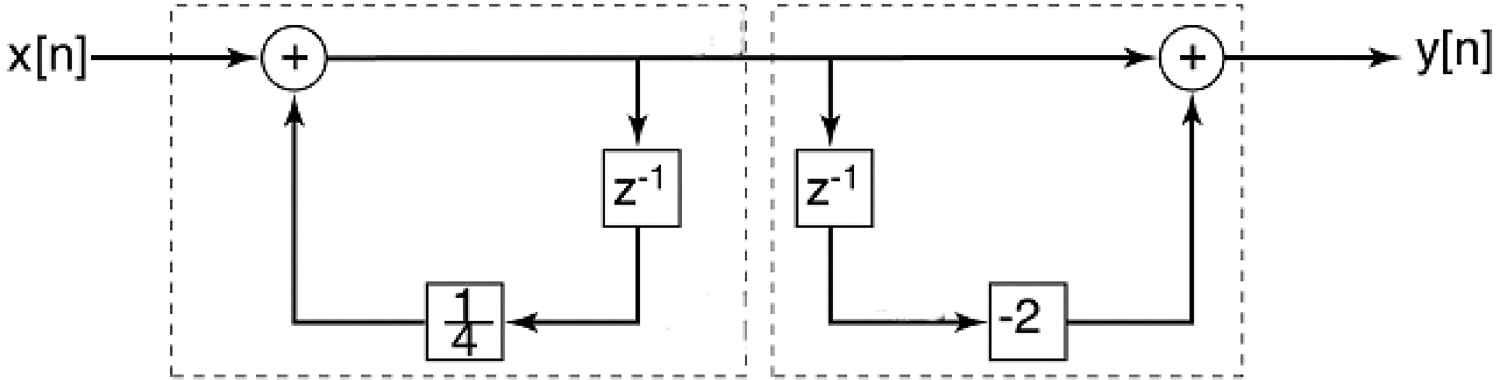
Forma Directa I

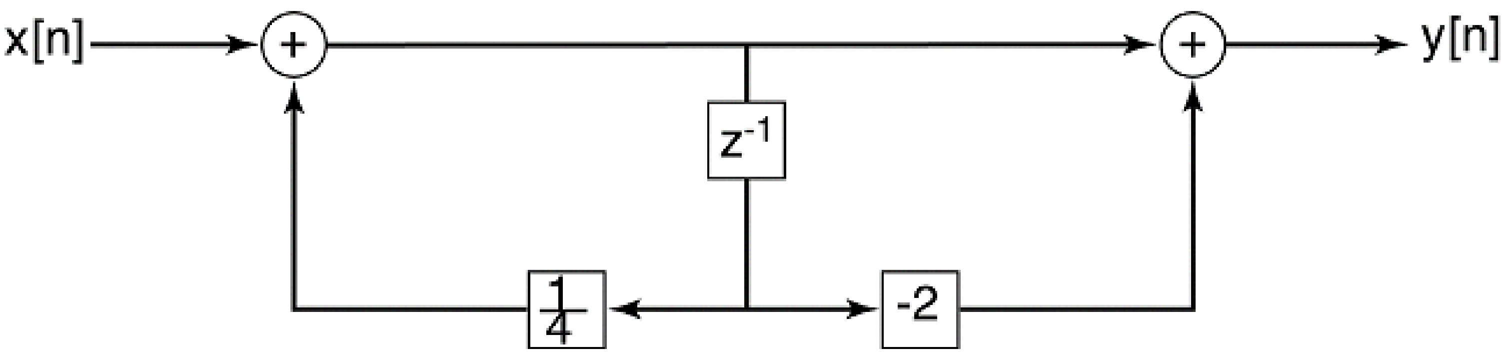


Forma Directa II

Ejemplo 2:

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)(1-2z^{-1}) \rightarrow$$ Cascada de dos sistemas





Respuestas al impulso de SDED

Caso A): La salida no depende de valores anteriores de sí misma ➔ Fácil

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Por definición: la RI es la salida cuando la entrada es δ[n] →

$$h[n] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2]$$

Si lo pasamos a z es igual de fácil

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2}$$

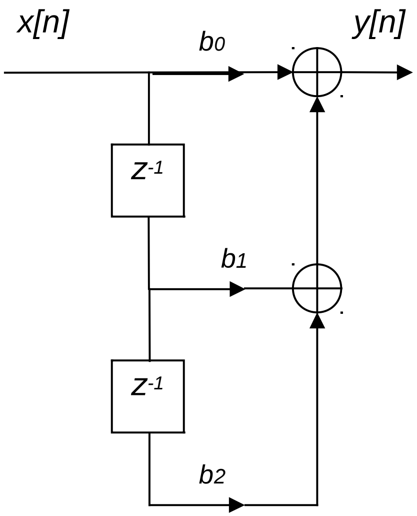
$$\Downarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

$$\Downarrow$$

TZ inversa

$$h[n] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2]$$



Evidentemente nos da lo mismo que si lo hacemos directamente en el dominio del tiempo

Respuestas al impulso de SDED

Caso B): La salida depende de la entrada y de la propia salida retardada un instante ➔ No muy difícil

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1]$$

RI: salida cuando la entrada es δ[n] → h[n]

Si x[n]=δ[n]:

Hasta n=0 x[n] es cero → y[n]=h[n]=0   n<0

En n=0, x[n]=1 → y[0]=x[0]+a_1y[-1]=1+0

En n=1, x[n]=0 → y[1]=x[1]+a_1y[0]=0+a_1·1=a_1

En n=2, x[n]=0 → y[2]=x[2]+a_1y[1]=0+a_1·a_1·1=$(a_1)^2$

…

En n=m, x[m]=0 → y[m]=x[m]+a_1y[m-1]=0+a_1·$(a_1)^{m-1}$=$(a_1)^m$

$$h[n] = (a_1)^n u[n]$$

Si lo pasamos a z es más fácil

$$Y(z) = X(z) + a_1 Y(z) z^{-1}$$

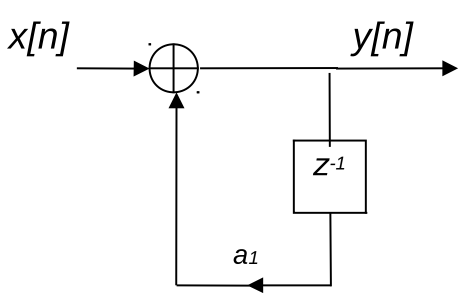
$$\Downarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$ TZ inversa

$$h[n] = (a_1)^n u[n]$$

Evidentemente nos da lo mismo que si lo hacemos directamente en el dominio del tiempo



Respuestas al impulso de SDED

Caso C): caso general, la salida depende de la entrada y de valores anteriores de sí misma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Obtener la RI en el dominio del tiempo es bastante complicado: ¿solución? → Nos vamos al dominio Z, obtenemos H(z) y luego hacemos la TZ inversa.

- Muy parecido a lo que se hace en tiempo continuo cuando tenemos ecuaciones diferenciales.

- Para hacer la TZ inversa hay que hacer descomposición en fracciones simples.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

⇓ Descomposición en frac.simples

$$H(z) = ... + C_1 z + C_0 + C_{-1} z^{-1} + C_{-2} z^{-2} + ... + \frac{D_1}{1 - d_1 z^{-1}} + \frac{D_2}{1 - d_2 z^{-1}} + ...$$

Ahora ya sabemos hacer la TZ inversa de cada uno de los sumandos: ⇓

$$h[n] = ... + C_1 \delta[n+1] + C_0 \delta[n] + C_{-1} \delta[n-1] + C_{-2} \delta[n-2] + ... + D_1 \cdot d_1^n du[n] + D_2 \cdot d_2^n du[n] + ...$$

Nota: hay que saber hacer descomposición en fracciones simples (Ruffini, polos dobles, etc.)

Recapitulando

La TZ permite analizar/diseñar señales y sistemas <u>discretos.</u>

La TZ es una generalización de la TF

- Es una función que toma valores complejos y devuelve valores complejos.
- Hay señales que no tienen TF pero sí tienen TZ.
- Nos permite analizar propiedades que la TF no permitía (estabilidad).
- La TF puede obtenerse evaluando la TZ en los valores $z=e^{j\Omega}$

Cálculo de la TZ

- Se hace a través de una serie (suma con infinitos términos).
- Hay casos en los que diverge → siempre debemos indicar su ROC (valores de z donde la TZ de la señal converge).
- La ROC es tan importante como la propia expresión analítica de la TZ.

Cálculo de la TZ inversa

- Expresión general: mucho más difícil que calcular la TZ directa (integrales sobre complejos) → no la usaremos.
- Nosotros sólo calcularemos TZ inversa de señales sencillas.
- La descomposición en FS ayuda a expresar una TZ como suma de TZ de señales sencillas.

Recapitulando

TZ racionales

- Son TZs que pueden expresar como una división de polinomios en z.
- Se corresponden a la TZ de SDEDs.
- Los ceros del numerador se llaman ceros y los ceros del denominador polos.
- Los <u>ceros y polos son fundamentales</u> para analizar la TZ.
- Para SDEDs. los ceros y polos son fundamentales para analizar las propiedades del SLIT.
- La TZ inversa de estas señales se hace a través de una descomposición en fracciones simples.

Representación de TZ

- Toma valores complejos y devuelve valores complejos ➔ Muy complicada.
- Gráfica en 4D (imposible!!) Gráficas en 3D para módulo y fase (difícil).
- Una representación sencilla es el diagrama de polos y ceros:

  Es una representación del módulo de la TZ en 2D, donde los valores de entrada que hacen que el módulo de la TZ sea cero se marcan con un círculo y los valores de entrada que hacen que módulo de la TZ sea infinito (polo) se marcan con una cruz.