Ampliación de Señales y Sistemas

Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia

Antonio G. Marqués

La presentación contiene material del OCW del MIT (6.003 Signals and Systems S10, F11), así como material de A. Guerrero y A. Wilsky

Ubicándonos

- Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
- Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia
  - 2.1 Desarrollo en serie de Fourier de señales discretas
  - 2.2 Transformada de Fourier de señales discretas
- Tema 3: Muestreo
- Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier
- Tema 5: Transformada Z
- Tema 6: Introducción al diseño de filtros discretos

Comentarios:

- Parecido al DSF y TF de señales continuas, pero aquí la TF solo toma valores de –pi a pi y el DSF solo tiene N coeficientes
- Resumen: el DSF y la TF nos dan una representación alternativa de la señal, entre otras cosas esa representación nos permite entender mejor lo que ocurre cuando una señal discreta se procesa con un sistema lineal e invariante
- Trabajo previo: repaso de la TF continua, convolución discreta de una exponencial compleja con una señal h[n] genérica

2.1 El desarrollo en Series de Fourier de señales discretas

- En este apartado vamos a ver cosas como:
  - Repaso de exponenciales complejas en tiempo discreto.
  - Ecuación de síntesis.
  - Ecuación de análisis.

La exponencial compleja en DT

- La exponencial compleja en DT es una señal definida como:

$$x[n] = e^{j\Omega n}$$

- A diferencia de CT, la exponencial compleja en DT <u>no es siempre periódica</u>.

- Si es periódica de periodo N:

$$x[n+N] = e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n}e^{j\Omega N} = x[n]e^{j\Omega N} = x[n]$$

  - Esto obliga a que $e^{j\Omega N} = 1$ y por tanto, su frecuencia angular debe satisfacer:

$$\Omega N = 2\pi k \rightarrow \Omega = 2\pi \frac{k}{N}$$

  - Solo las frecuencias que satisfagan eso serán periódicas con periodo N, pero… ¿cuántas hay? ➔ Siguiente trasparencia

La exponencial compleja en DT

- No hay un número infinito de exponenciales complejas distintas de periodo N. ¿Intuición? ➔ Evaluemos la exponencial para $k' = k + N$

$$e^{j2\pi\frac{k'}{N}n} = e^{j2\pi\frac{k+N}{N}n} = e^{j2\pi\frac{k}{N}n}e^{j2\pi\frac{N}{N}n} = e^{j2\pi\frac{k}{N}n}e^{j2\pi n} = e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$

  - Es decir, las exponenciales complejas de frecuencias

    $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ y $\Omega_{k+N} = \frac{2\pi}{N}(k+N)$ son idénticas

  - También lo son si sumamos 2N, 3N ➔ Ejemplo: $e^{j2\pi\frac{7}{15}n} = e^{j2\pi\frac{37}{15}n}$

- En concreto, sólo hay N exponenciales complejas de periodo N. Es decir, sólo hay N frecuencias armónicamente relacionadas.

$$x[n+N] = x[n] \xrightarrow{x[n]=e^{j\Omega n}} e^{j\Omega N} = 1$$

Tantas como raíces N-ésimas de 1

Ecuación de síntesis del DSF de señales periódicas discretas

- Sea $x[n]$ una señal periódica discreta de periodo N
  - *Cualquier* $x[n]$ de periodo N se puede descomponer en una suma de N exponenciales complejas armónicamente relacionadas, es decir, de frecuencias múltiplo de la frecuencia fundamental:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

(<N> ≡ suma sobre cualesquiera N valores de k consecutivos)

  - A los coeficientes a_k se les conoce con el nombre de coeficientes del DSF de $x[n]$ y son números complejos.
  - Dada una señal periódica en tiempo discreto $x[n]$, ¿cómo podemos obtener los coeficientes de su DSF?

¿Cómo obtener los coeficientes del DSF?

- Opción 1: Resolviendo el siguiente sistema de N ecuaciones y N incógnitas (los coeficientes)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow$$

$$x[0] = \sum_{k=<N>} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0}$$

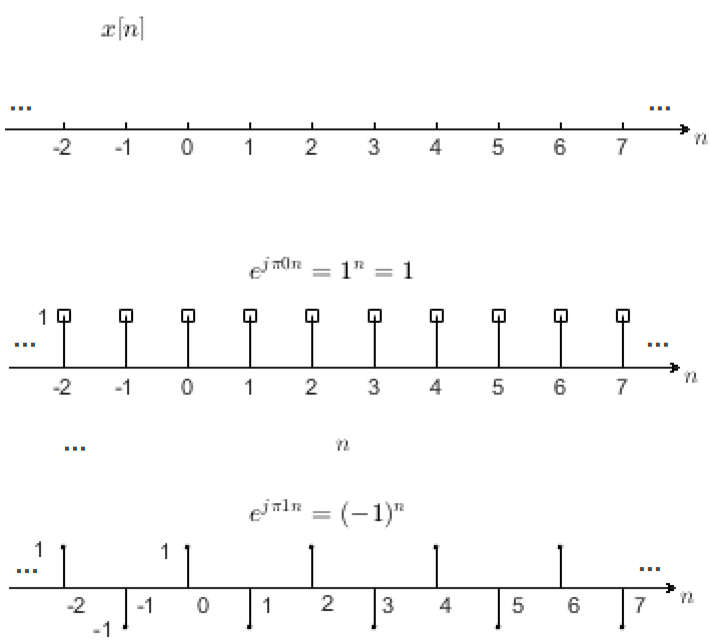
$$x[2] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 2}$$

$$\cdots = \cdots$$

$$x[N-1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 (N-1)}$$

Ejemplo para obtener el DSF

- Ejemplo de la opción 1: Ver los coeficientes como las variables de sistema lineal de N ecuaciones y N incógnitas
  - Supongamos que N=2 ➔ $\Omega_0=2\pi/N=\pi$ ➔ $x[n] = \sum_{k=0}^{1} a_k e^{j\pi k n}, \qquad n = 0,1$
  - Consideremos una señal x[n] cualquiera de periodo 2 y despejemos a_0 y a_1 (ejercicio)



  - Si N es muy grande, hacer esto puede ser complicado… ➔ ¿Alternativa?

¿Cómo obtener los coeficientes del DSF?

- Opción 2: Aplicando la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas.
  - Sabemos que en una serie geométrica finita

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

  - Tomando $\alpha = e^{jk\Omega_0}$ y operando llegamos a la expresión que utilizaremos en la transparencia siguiente:

$$\sum_{n=<N>} e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{jk\Omega_0})^n = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{jk2\pi/N})^n$$

$$= \begin{cases} N & , k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \frac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{j2\pi/N}} = 0 & , resto \end{cases}$$

Se podría escribir como Nδ[k]

¿Cómo obtener los coeficientes del DSF?

- Partamos de $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$

1. Multipliquemos $x[n]$ por $e^{-jm\Omega_0 n}$ y hagamos el sumatorio en n

$$\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jm\Omega_0 n} = \sum_{n=<N>} \left(\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}\right) e^{-jm\Omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=<N>} a_k \underbrace{\left(\sum_{n=<N>} e^{j(k-m)\Omega_0 n}\right)}_{= N\delta[k-m] - ortogonalidad} = \sum_{k=<N>} a_k N\delta[k-m] = N a_m$$

2. Despejamos y obtenemos la ecuación de análisis del DSF en tiempo discreto (equivalente a resolver el sistema de ecuaciones de la opc. 1 de forma “inteligente”)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Ecuaciones de las SF en TD

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. síntesis

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. análisis

- Nota: Conviene pensar en a_k como una señal definida para todos los valores enteros *k*. Por lo tanto:
  - $a_{k+N} = a_k$ — Propiedad especial de los Coef. de Fourier: periódicos, con periodo *N*.
  - Sólo necesitamos *N* valores consecutivos de a_k en la ec. síntesis. (Puesto que *x*[*n*] es periódica, se especifica para *N* valores, tanto en tiempo como en frecuencia)

Ejemplo 1: Suma de sinusoides

$$x[n] = 1 + \sin(\tfrac{\pi}{8}n) + 3\cos(\tfrac{\pi}{8}n) + \cos(\tfrac{\pi}{4}n - \tfrac{\pi}{2})$$

- Suma de señales periódicas: ¿periódica con periodo?
- Coeficientes a_k? ➔ No hace falta ni utilizar la fórmula de análisis, expandimos directamente en términos de exponenciales complejas

$$1 + \frac{1}{2j}[e^{j(\frac{\pi}{8}n)} - e^{-j(\frac{\pi}{8}n)}] + \frac{3}{2}[e^{j(\frac{\pi}{8}n)} + e^{-j(\frac{\pi}{8}n)}]$$
$$+\frac{1}{2}[e^{j(\frac{\pi}{8}2n-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{\pi}{8}2n-\frac{\pi}{2})}]$$

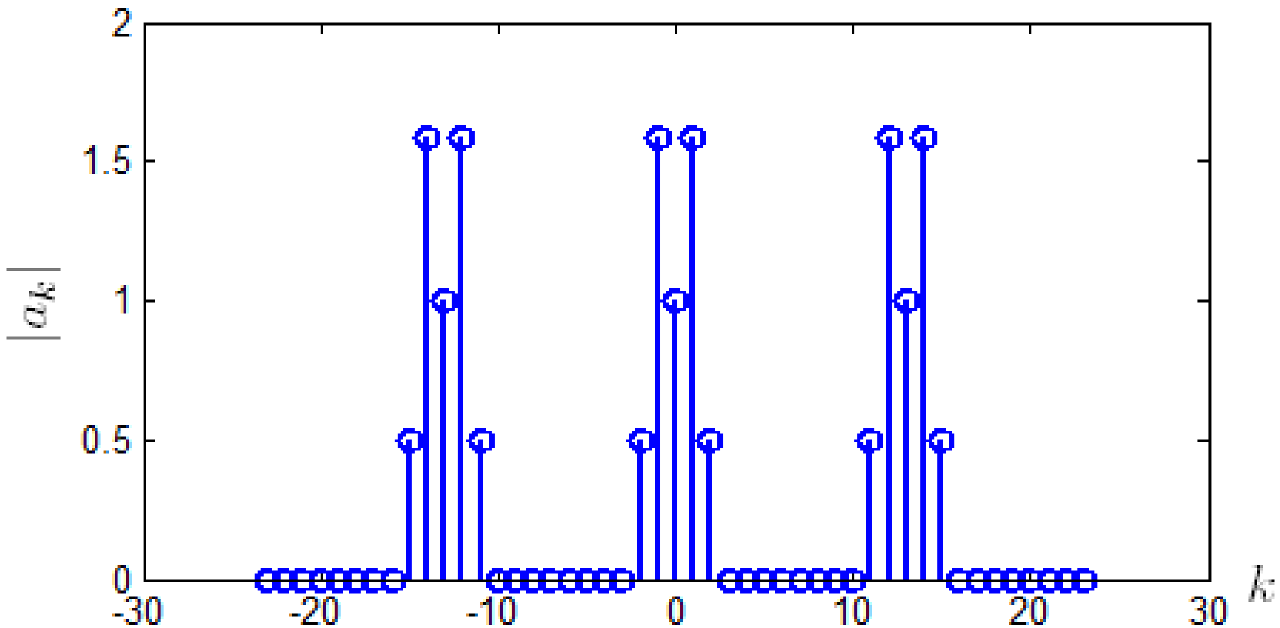
- Obtenemos

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j}$$
$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{1}{2} = \frac{1}{2j}$$
$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = j\frac{1}{2} = -\frac{1}{2j}$$

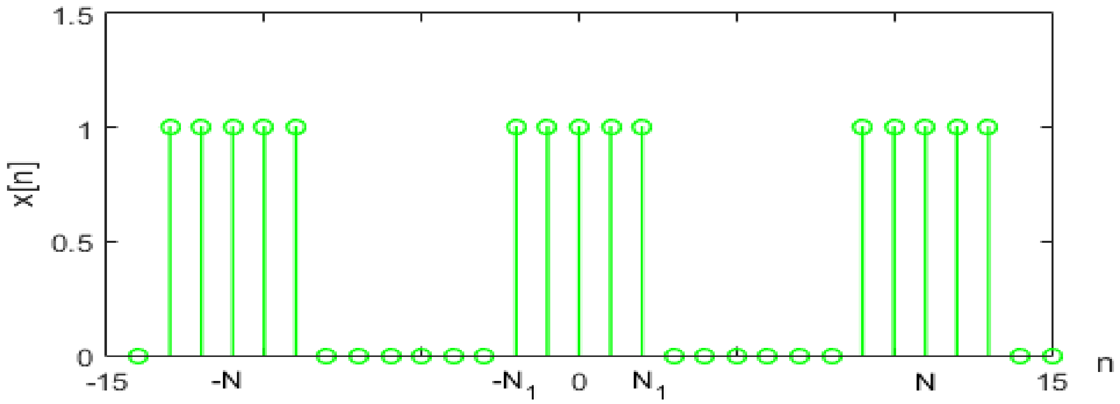
Ejemplo 1: Suma de 4 sinusoides

- Representación del <u>módulo</u> de los coeficientes



- ¿Por qué representamos el módulo?
- ¿Por qué nos salen 5 coeficientes?
- ¿Por qué tiene periodo 16?

Ejemplo 2: onda cuadrada en DT (1/3)



Para k múltiplo de N (p.e. k=0):

$$a_0 = a_{-N} = a_{6N} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] \cdot 1 = \frac{2N_1+1}{N}$$

Aquí si utilizamos la fórmula de análisis

Para k≠múltiplo de N:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega_0 (m-N_1)}$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk\Omega_0 N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} (e^{-jk\Omega_0})^m = \frac{1}{N} e^{jk\Omega_0 N_1} \frac{1-e^{-jk\Omega_0(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\Omega_0}}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin[k(N_1+1/2)\Omega_0]}{\sin(k\Omega_0/2)} = \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$

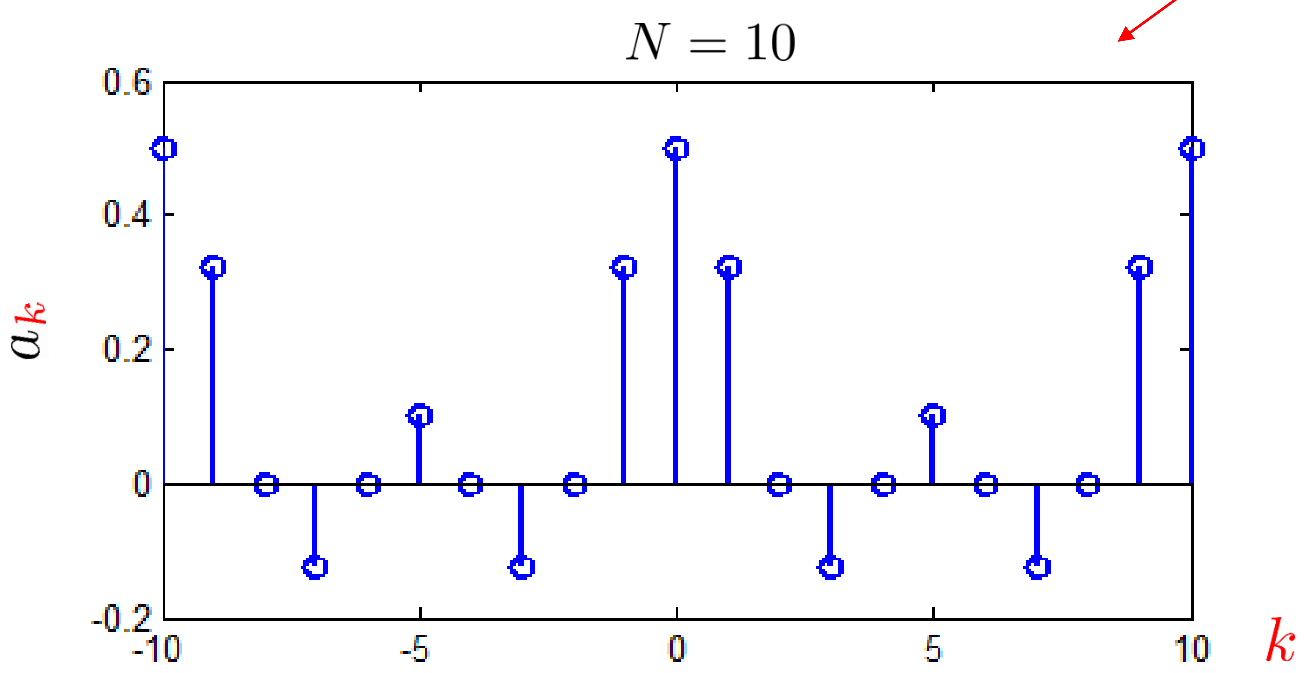
Ejemplo 2: onda cuadrada en DT (2/3)

- Los coeficientes se pueden expresar como

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$

  - N=10 (esta página), N=20 y N=40 (página siguiente)

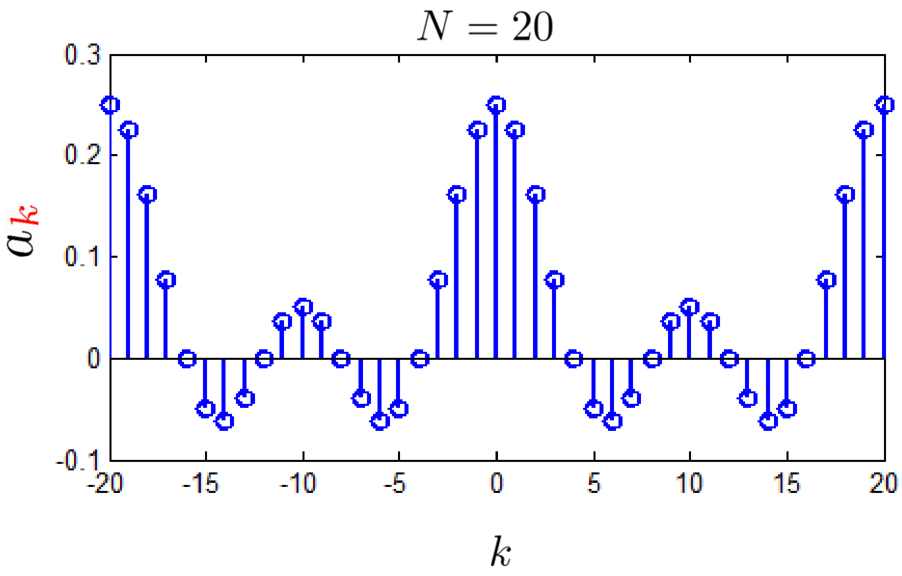
¿Dónde está el primer cero?

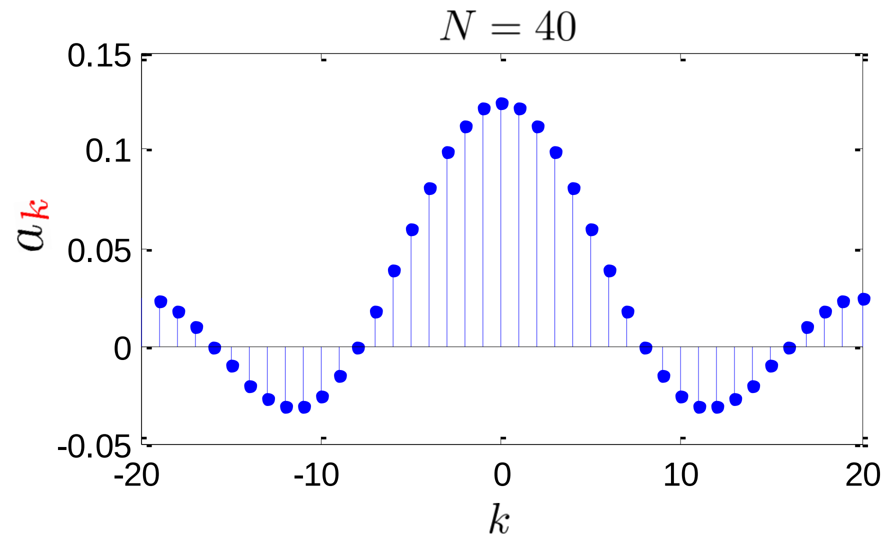


¿Cuál es la amplitud para k=0?

Ejemplo 2: onda cuadrada en DT (3/3)

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$





Convergencia de las Series de Fourier en DT

- Recordemos que las fórmulas de análisis y síntesis eran

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow \qquad \text{Ec. síntesis}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \rightarrow \qquad \text{Ec. análisis}$$

- ¡TODAS las series son finitas! → no hay problemas de convergencia
  - En ambos casos estamos sumando un número finito de términos (N)
  - Cada uno de esos términos está acotado (p.e., x[n] vale como mucho x_{max})
  - La suma como mucho vale $x_{max} \cdot N$ → La suma está acotada → Los coeficientes están acotados

Propiedades de las SF en DT

- Linealidad:

$$Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k$$

- Desplazamiento temporal:

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$$

- Abatimiento:

$$x[-n] \longleftrightarrow a_{-k}$$

- Escalado temporal:

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{n múltiplo de m} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow \frac{1}{m} a_k$$

Si yo sé que el DSF de la señal $x[n]$ es a_k…

¿Puedo saber cuál es el DSF de señales relacionadas con $x[n]$ sin tener que usar la fórmula de análisis?

Pensar en la expresión… ¿Cuántos coeficientes tiene el DSF de $x[n]$? ¿Cuántos el de $x_{(m)}[n]$?

Propiedades de las SF en DT

- Multiplicación:

$$x[n]y[n] \longleftrightarrow d_k = \sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$$

¡Cuidado! Esta es una convolución especial (conv. periódica) ➔ Volverá a pasar lo mismo con la TF, entonces haremos ejemplos

- Relación de Parseval:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \mid x[n] \mid^2 = \sum_{k=<N>} \mid a_k \mid^2$$

- Otra propiedad …

$$x[n] \longleftrightarrow a_k$$

$$e^{jM\Omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow b_k = ?$$

Efectos de los SLTI sobre el DSF

- Sabemos que …

¿Por qué esto era así?
➔ Hay que saberlo

$$e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n}$$

donde

$$H(e^{j\Omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega_0 n}$$

- ¿Se ha entendido? ¿Qué pasa si la entrada de un sistema LTI es una constante?

$$x[n] = c$$

Efectos de los SLTI sobre el DSF

- Si tenemos una combinación lineal de exp. complejas …

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} H(e^{j\Omega_0 k}) a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(e^{jk\Omega_0})}_{\text{Ganancia}} a_k$$

- Concluyendo
  - El sistema LTI modifica cada uno de los coef del DSF de la señal de entrada, multiplicándolo por el valor de la respuesta en frecuencia del sistema a la frecuencia correspondiente.
  - Para calcular el DSF a la salida no hace falta hacer la convolución de x[n] con h[n] y luego usar la formula de análisis. Podemos usar directamente la propiedad que acabamos de demostrar.
  - $H(e^{j\Omega})$ es periódica, con periodo 2π.

2.2 Transformada de Fourier (TF) de señales discretas

- Vamos a ver:

  - TF de señales aperiódicas discretas definidas en energía.
  - TF de señales periódicas discretas.
  - Propiedades de la TF.
  - Respuesta en frecuencia de SLTI descritos por ecuaciones en diferencias.

Comenzaremos con la definición de la TF de señales discretas y de la TF inversa…

Definición de la TF en DT y de su inversa

- Sea $x[n]$ una secuencia aperiódica y definida en energía.
  - Su TF es una señal compleja que depende de la variable real
  - El par de la señal y su TF se denota como $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$

- Las ecuaciones de análisis y síntesis son:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec.análisis} \\ \text{- TF} \\ \text{- espectro de x[n]} \end{array} \right.$$

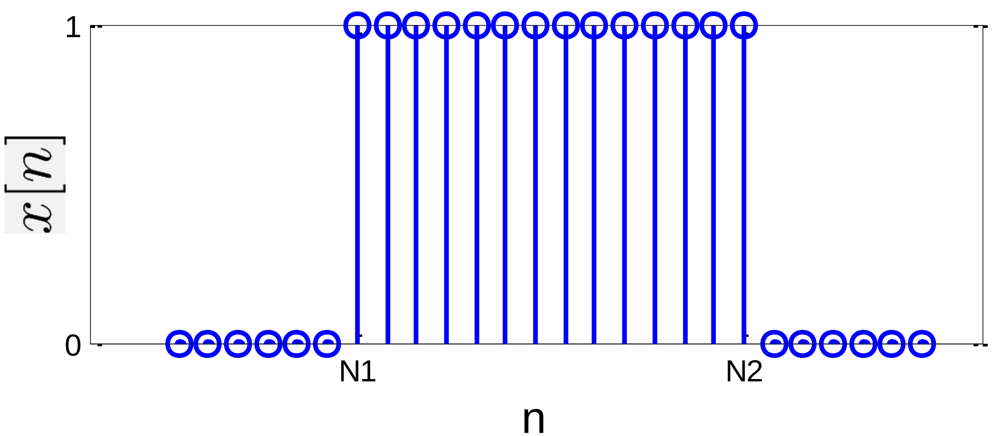
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec. síntesis} \\ \text{- TF. Inversa} \end{array} \right.$$

  - Propiedad fundamental: $X(e^{j\Omega})$ es siempre periódica en Ω, con periodo 2π
  - Las ecuaciones anteriores, que suponen que x[n] no es periódica, pueden deducirse a partir de las del DSF de señales periódicas.
  - Eso es lo que hacemos en las siguientes transparencias

La TF en DT a través del DSF

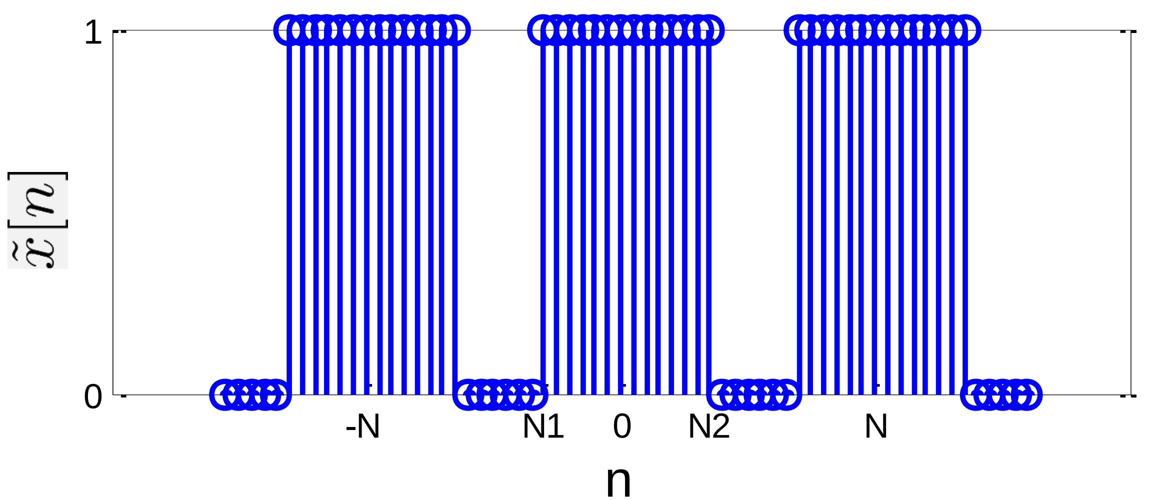
- Sea $x[n]$ una secuencia aperiódica y definida en energía. Por simplicidad, tendrá duración finita.

$$\tilde{x}[n] = x[n] \text{ para } |\, n \,| \leq N/2$$



La TF en DT a través del DSF

- Construimos una señal periódica, de periodo N, tal que:



$$\tilde{x}[n] = x[n] \text{ cuando } N \to \infty$$

La TF a través del DSF: ¿cómo se obtiene?

- Como $x[n]$ es periódica, podemos representarla como una SF:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \ , \ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x[n] = 0, \ \forall n \notin [-N_1, N_2]$$

- Comparemos estos coeficientes con la TF

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad \text{Periódica en } \Omega \text{ con período } 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

- DSF muy parecido a TF ➔ coef. proporcionales a muestras equiespaciadas de la TF

La TF a través del DSF: ¿cómo se obtiene?

- Lo único que nos queda ahora es convertir la suma en integral

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \underbrace{\frac{1}{N} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)} e^{jk\Omega_0 n} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 (*)$$

$$\text{Si } N \longrightarrow \infty : \tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$$

$$\Omega_0 \longrightarrow 0, \sum \Omega_0 \longrightarrow \int d\Omega, k\Omega_0 \longrightarrow \Omega$$

la suma en (*) es una integral

- Al trabajar en discreto, n es un número entero, por lo que la señal $e^{j\Omega n}$ *con respecto a la variable* Ω, es periódica con periodo 2π
  - $X(e^{j\Omega})$ es periódica, de periodo 2π
  - $X(e^{j\Omega})$ se puede ver como la envolvente de Na_k

- La periodicidad de la TF no debe sorprendernos puesto que…
  - Los a_k también eran periódicos (eso sí, con otro periodo)

Par de ecuaciones de la TF en DT

- Llegamos por tanto a las ecuaciones que pusimos al principio de esta sección. Son tan importantes que las repetimos.

- Par secuencia-TF:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$$

La TF es una señal continua.

Esta notación nos ayuda a recordar que la TF es periódica cada 2π

$$X(e^{j(\Omega_0+2\pi)}) = X(e^{j\Omega_0}e^{j2\pi}) = X(e^{j\Omega_0})$$

Cuando veamos la TZ, esta notación será muy útil.

- Ecuaciones de análisis y síntesis:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec.análisis} \\ \text{- TF} \\ \text{- espectro de x[n]} \end{array} \right.$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec. síntesis} \\ \text{- TF. Inversa} \end{array} \right.$$

Convergencia

- Ec. síntesis:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

  - Integramos sobre un intervalo finito → no hay problemas de convergencia
  - Si los valores de la TF son finitos, la integral (el área) es finita

- Ec. análisis:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

  - Tenemos una suma infinita, esto es "peligroso" porque aunque los valores de la secuencia sean finitos, sumamos infinitos términos, con lo cual la suma sí puede dar infinito
  - Conclusión, no todas las señales discretas tienen TF
  - Para poder garantizar que la TF existe, necesitamos exigir a la señal unas condiciones análogas a las que pedíamos en CT, por ejemplo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \text{ -Energía finita}$$

Ejemplos: deltas

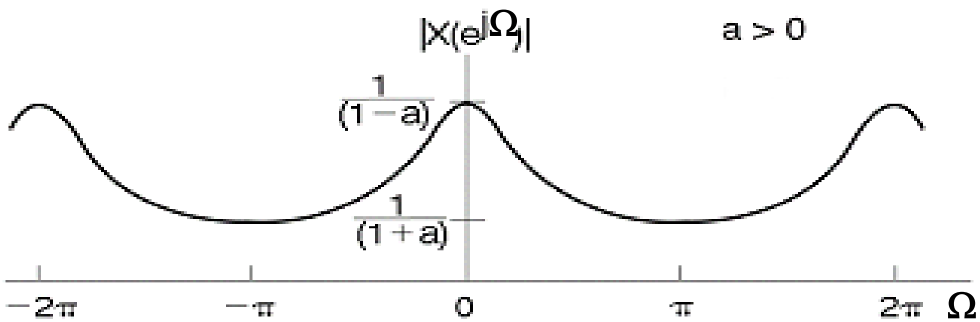
- $x[n] = \delta[n] \rightarrow X(e^{j\Omega}) = 1$

- $x[n] = \delta[n - n_0] \rightarrow X(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega n_0}$

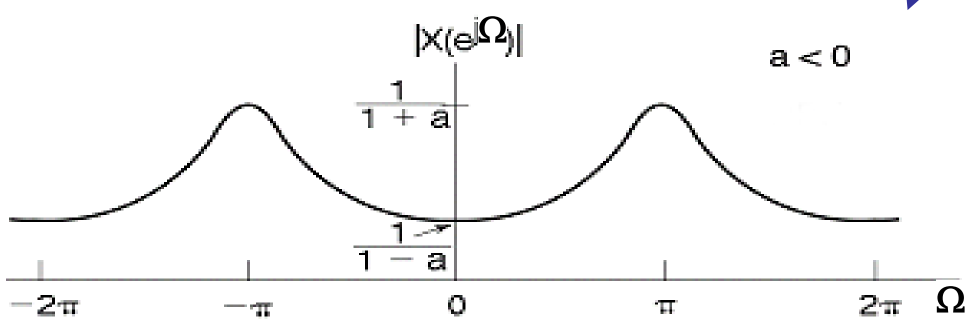
¿Qué responderíamos si nos piden nos piden dibujar módulo y fase?

Ejemplo: exponencial real causal

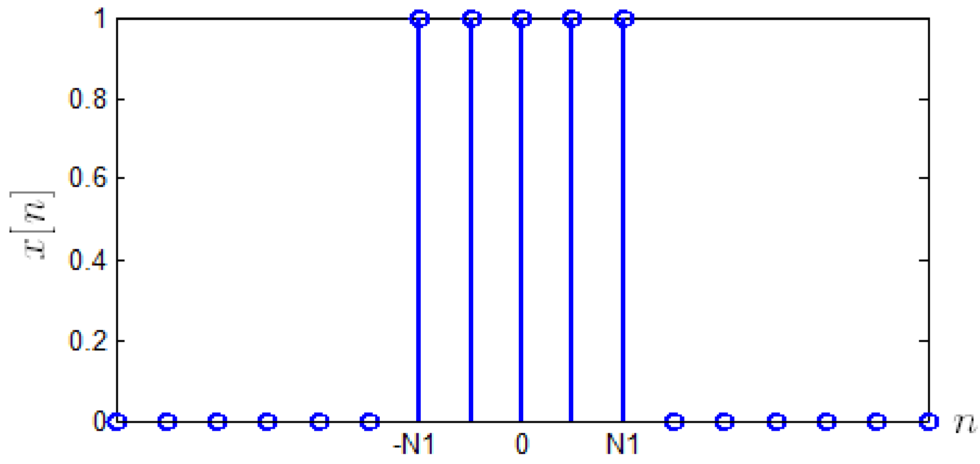
- $x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \qquad TF \rightarrow X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$



periódica, con periodo 2π



Ejemplo: pulso rectangular

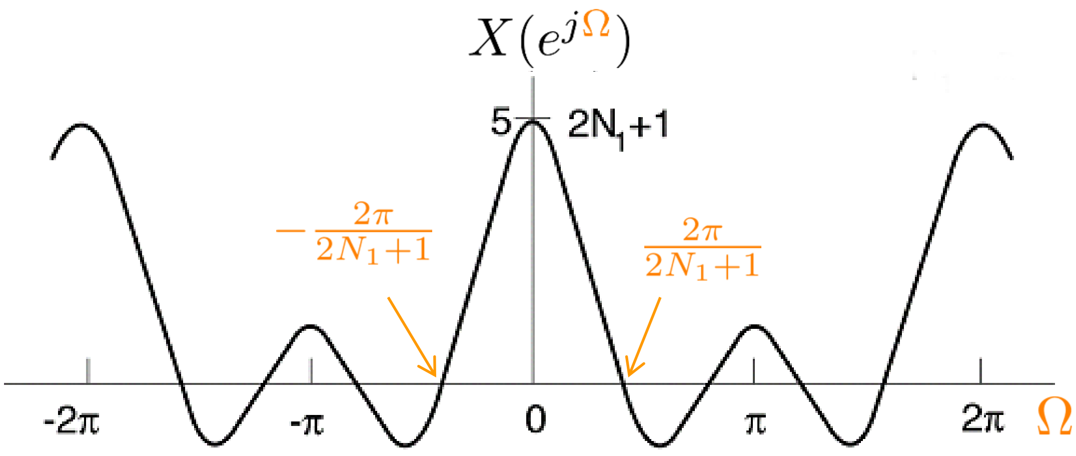


$$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \leq N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases}$$

$$TF$$

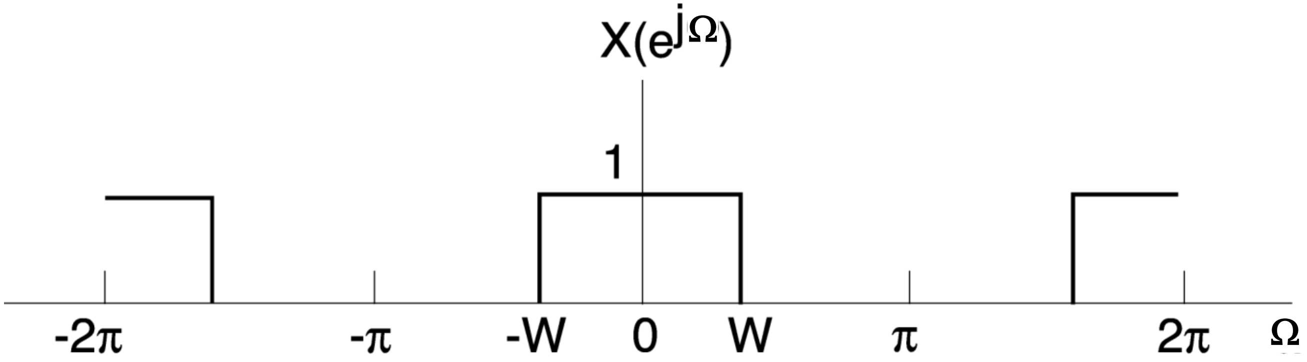
$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

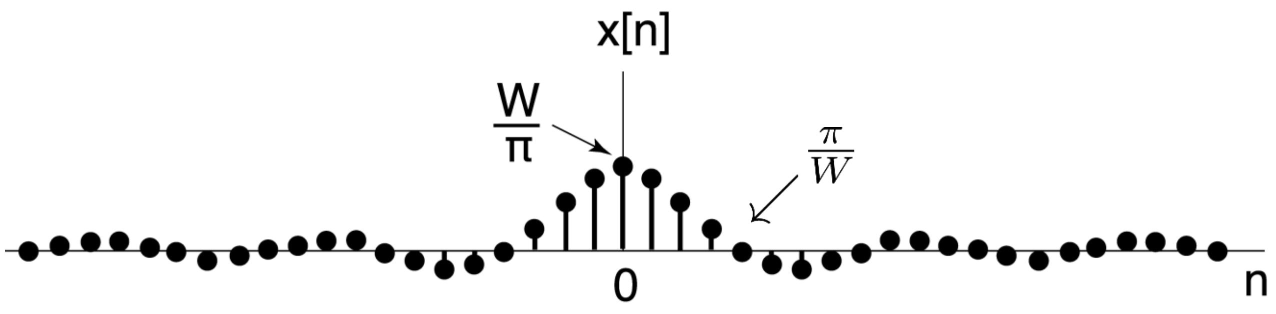


Periódica con periodo 2π

¿A qué señal corresponde esta TF?



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



TF de señales periódicas en DT

- Señal periódica: $x[n] = x[n+N]$ (energía infinita)

- Recordemos que en CT vimos que la TF de una exponencial era una delta, ¿qué pasa en DT?

$$x(t) = e^{j\omega_o t} \longleftrightarrow X(jw) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\Omega}) = ?$$

  - Será también un impulso (de área 2π) en $\Omega = \Omega_0$
  - Pero $X(e^{j\Omega})$ tiene que ser periódica con periodo 2π. Por tanto,

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$

  - Si calculamos la TF inversa de la expresión anterior … llegamos a:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)}_{X(e^{j\Omega})} e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

TF de señales periódicas en DT (cont.)

- Si representamos *x*[*n*] como una serie de Fourier (una suma de exp. complejas):

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Aplicando:

$$e^{jk\Omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi m)$$

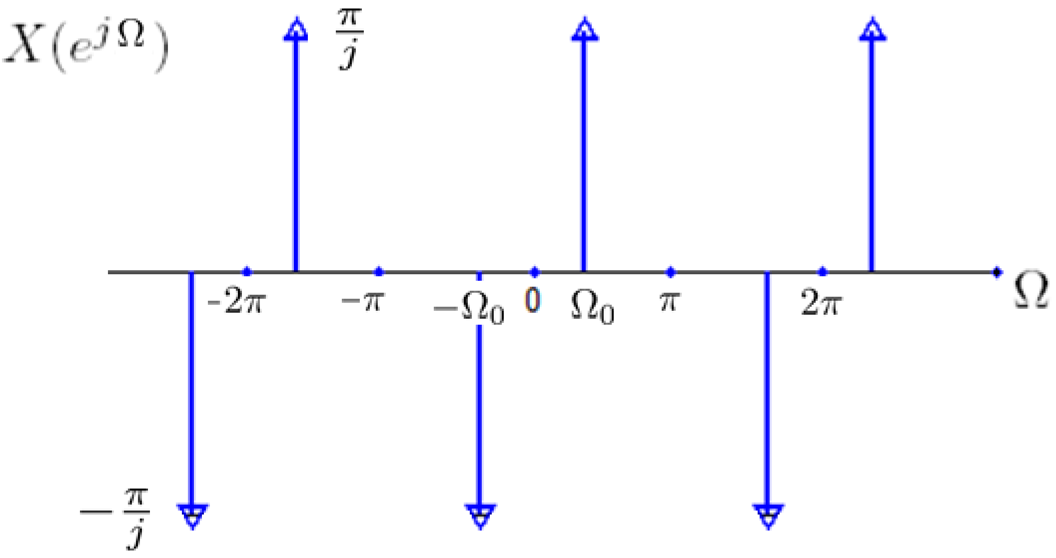
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=<N>} a_k [2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi m)]$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - k\Omega_0) = 2\pi \sum_{k=\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- La TF de una señal periódica se construye a partir de sus coef. de Fourier

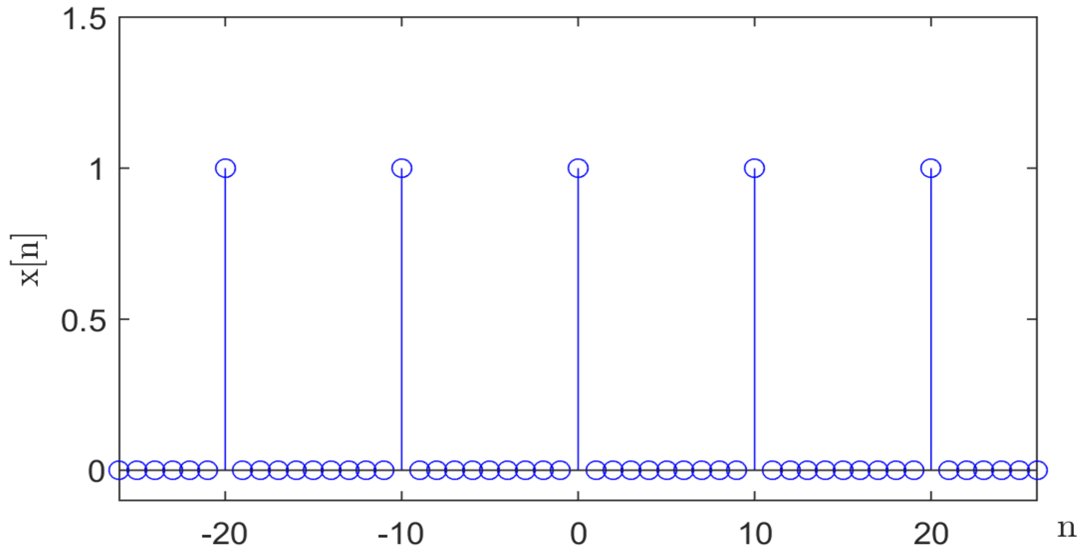
Ejemplo 1: sinusoide real

$$x[n] = \sin(\Omega_0 n) = \frac{1}{2j} e^{j\Omega_0 n} - \frac{1}{2j} e^{-j\Omega_0 n}$$



Ejemplo 2:Tren de impulsos periódico

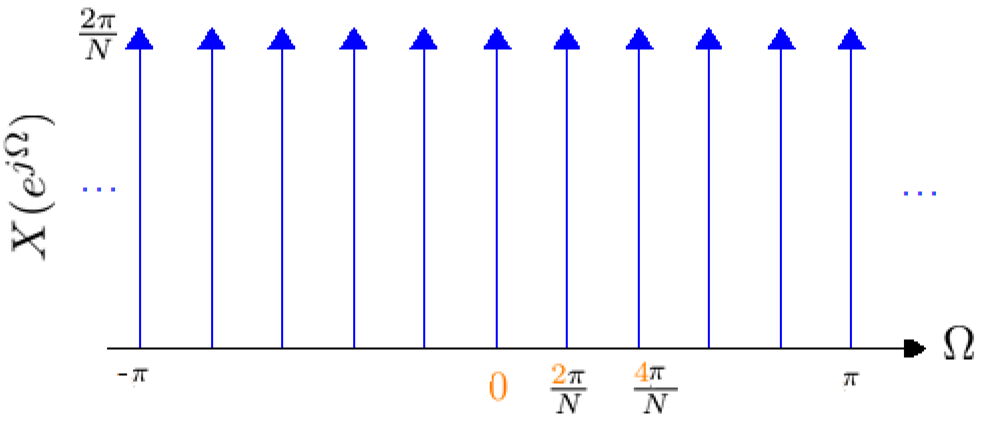
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\Omega_o n} = \frac{1}{N}$$

Ejemplo 2:Tren de impulsos periódico

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



¡Su TF es otro tren de impulsos periódico en el dominio de la frecuencia!

Propiedades de la TF en DT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \begin{cases} \text{- Ec.análisis} \\ \text{- TF} \end{cases}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \begin{cases} \text{- Ec. síntesis} \\ \text{- TF. Inversa} \end{cases}$$

- Periodicidad:

$$X(e^{j(\Omega+2\pi)}) = X(e^{j\Omega})$$

— Diferente del caso CT

- Linealidad:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega})$$

- Desplazamiento en tiempo:

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(e^{j\Omega})$$

Propiedades de la TF en DT

- Desplazamiento en frecuencia:

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$$

- Abatimiento:

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\Omega})$$

- Simetría conjugada:

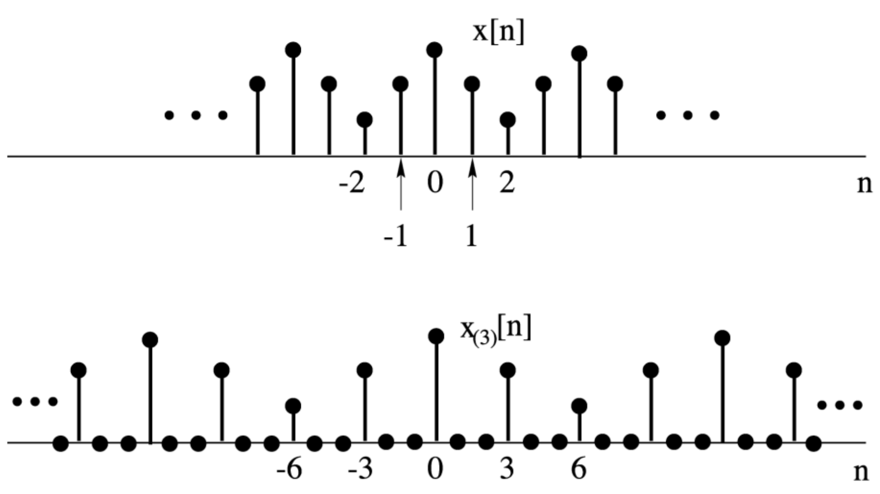
$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(e^{-j\Omega})$$

$$x[n] \text{ real} \Longrightarrow X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$$

Propiedades de la TF en DT

- Expansión temporal
  - Recordemos que en CT: $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X(j(\frac{\omega}{a}))$
  - Pero en DT,
    - x[n/2] no tiene sentido, cuando n/2 no es un valor entero
    - X[2n] no es una versión comprimida de x[n], perdemos los valores impares
  - Si definimos la señal $x_{(k)}[n]$:
    - k un entero ≥ 1
    - $x_{(k)}[n]$ insertando (k -1) ceros entre valores sucesivos

La escala de tiempo en CT es infinitamente fina



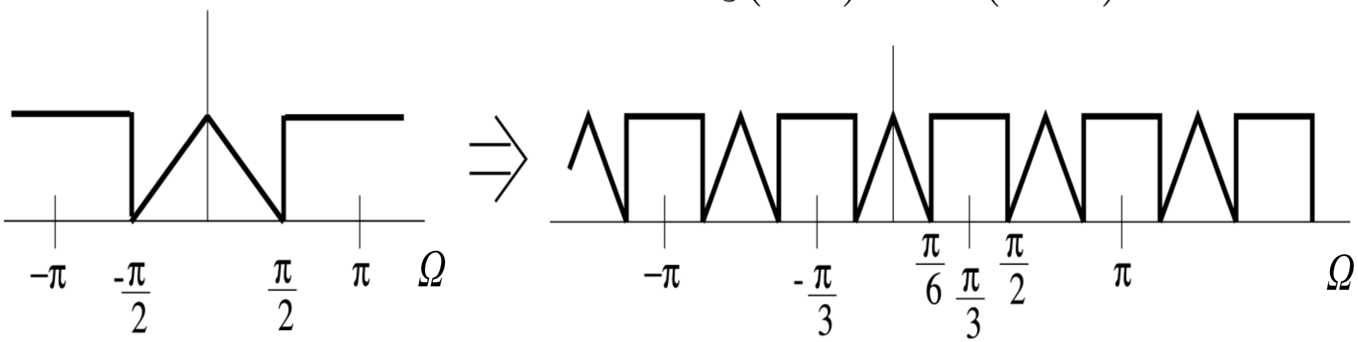
En este ejemplo, insertamos dos ceros (k=3)

Propiedades de la TF en DT

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} \mathrm{x}[\mathrm{n}/\mathrm{k}], & \text{si n es múltiplo entero de k} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_{(k)}[n] \longleftrightarrow X(e^{jk\Omega}) \longleftarrow \text{Periódica con periodo } \frac{2\pi}{|k|}$$

$$X(e^{j\Omega}) \qquad\qquad X_3(e^{j\Omega}) = X(e^{j3\Omega})$$



Expandir en tiempo → comprimir en frecuencia

Propiedades de la TF en DT

- Diferenciación en frecuencia

$$n x[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

- Relación de Parseval

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}_{} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega}_{}$$

Energía total en el dominio del tiempo

Propiedades de la TF en DT

- Convolución

$$y[n] = h[n] * x[n] \qquad\qquad Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

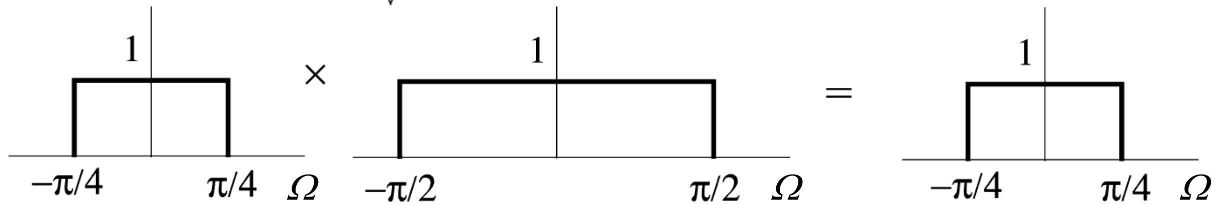
- Si h[n] es la respuesta al impulso de un SLIT ➔ H respuesta en frecuencia

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

- Ejemplo:

$$\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} * \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = ?$$

$$\Downarrow$$



Propiedades de la TF en DT

- Producto (modulación)

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\Omega}) \cdot X_2(e^{j\Omega-\theta})d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\Omega}) \otimes X_2(e^{j\Omega})$$

- ¿Cómo se realiza una convolución periódica?
  - Como una convolución aperiódica entre un periodo de una de las señales periódicas y la otra señal periódica.
  - Consideramos el intervalo que va de $-\pi$ a π:

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Omega}) X_2(e^{j(\Omega-\theta)})d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\Omega-\theta)})d\theta$$

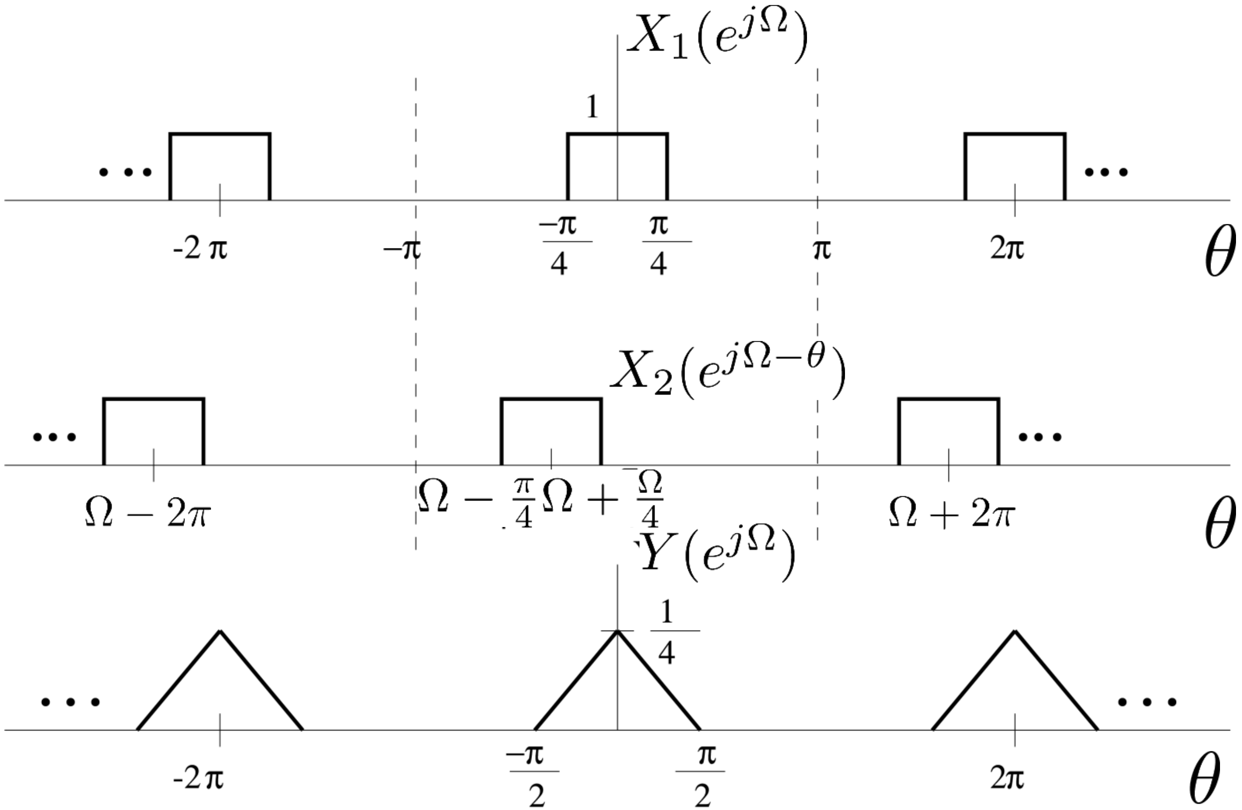
- Donde

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \begin{cases} X_1(e^{j\theta}), & |\theta| \leq \pi \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$y[n] = \left(\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\right)^2 = x_1[n] \cdot x_2[n], x_1[n] = x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\Omega}) \otimes X_2(e^{j\Omega})$$



Dualidad: Simetría en la TF*

- TF en CT: tiempo y frecuencia son continuas

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-jr\tau}d\tau$$

- Suponer que $f(\bullet)$ y $g(\bullet)$ son dos funciones relacionadas por

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-jr\tau}d\tau$$

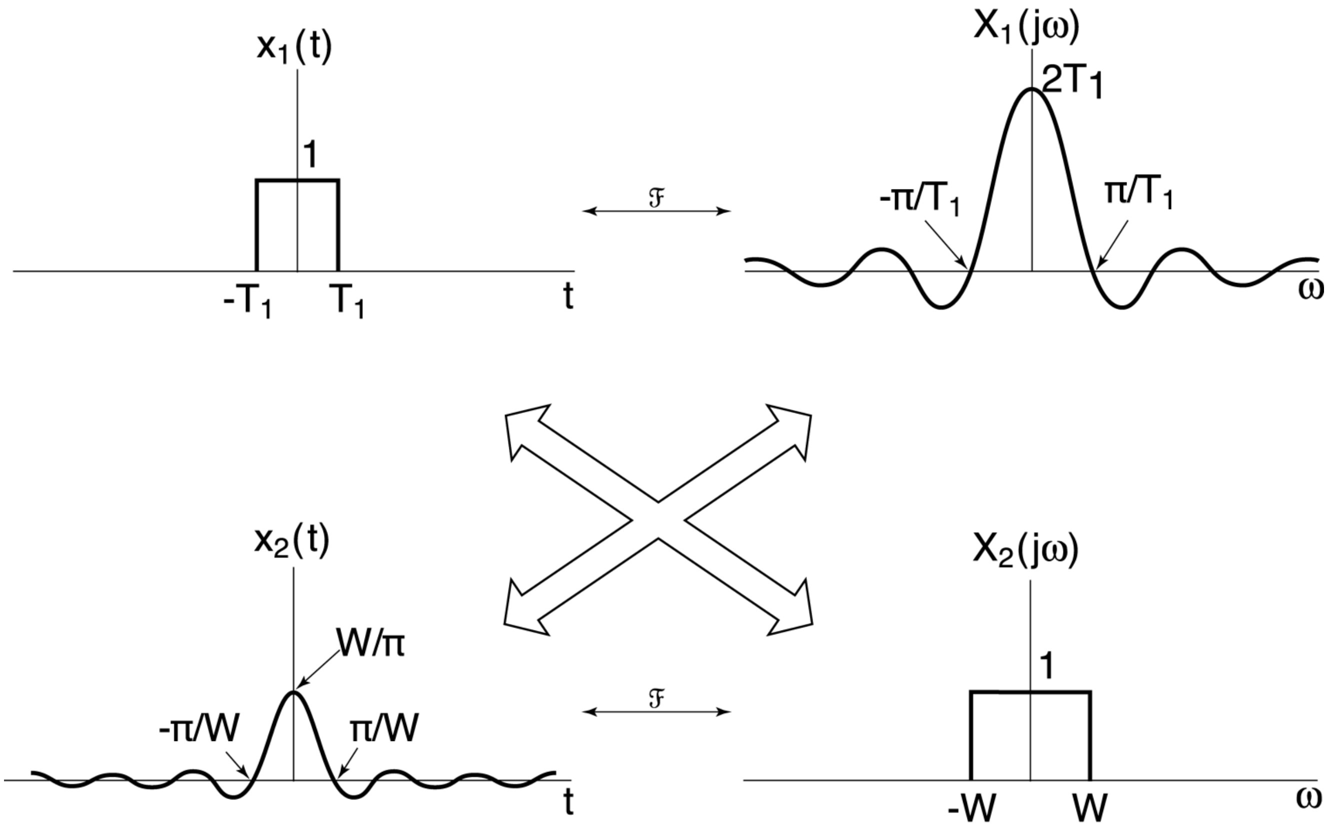
  - Entonces

$$\text{si } \tau = t \text{ y } r = \omega : x_1(t) = g(t) \longleftrightarrow X_1(j\omega) = f(\omega)$$

$$\text{si } \tau = \omega \text{ y } r = -t : x_2(t) = \frac{1}{2\pi} f(-t) \longleftrightarrow X_2(j\omega) = g(\omega)$$

Ejemplo de dualidad en CT*

- Pulso cuadrado en ambos dominios (tiempo y frecuencia)



Dualidad de las SF en DT*

- Discreta y periódica en tiempo $\leftrightarrow$ periódica y discreta en frecuencia

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} = x[n+N], \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega_0 n = a_{k+N}}$$

- Supóngase que $f[\bullet]$ y $g[\bullet]$ son dos funciones relacionadas por

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=<N>} g[r] e^{-jr\Omega_0 m}$$

Entonces $\Longrightarrow g[r] = \sum_{m=<N>} f[m] e^{jr\Omega_0 m}$

$$\text{si } m = n \text{ y } r = -k : x_1(n) = f(n) \longleftrightarrow a_k = \frac{1}{n} g[-k]$$

$$\text{si } r = n \text{ y } m = k : x_2(n) = g(n) \longleftrightarrow a_k = f[k]$$

Dualidad entre SF en CT y TF en DT*

- SF en CT:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t} = x(t+T),\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

  – Periódica en tiempo -> Discreta en frecuencia

- TF en DT:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X(e^{j(\Omega+2\pi)})$$

  – Discreta en tiempo -> Periódica en frecuencia

Dualidad entre SF en CT y TF en DT*

- Sea $f(\bullet)$ una señal en CT y $g[\bullet]$ una secuencia, relacionadas por:

$$f(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m] e^{jm\tau} = f(\tau + 2\pi)$$

  - Entonces

$$x(t) = f(t) \longleftrightarrow a_k = g[k], \text{ periódica con periodo } 2\pi$$

$$x[n] = g[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega}) = f(-\Omega)$$

Respuesta en frecuencia de sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias

- Podemos determinar $H(e^{j\Omega})$:
  - Usando que las exp. complejas son las autofunciones de los SLTI

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  - Usando las propiedades de linealidad, convolución y desplazamiento

$$x[n-k] \longleftrightarrow e^{-j\Omega k} X(e^{j\Omega})$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(e^{j\Omega})$$

Respuesta en frecuencia de sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \underbrace{\left[\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}\right]}_{H(e^{j\Omega})} X(e^{j\Omega})$$

- Conclusiones: la respuesta en frecuencia de un SLTI descrito por una ecuación en diferencias es …
  - … una función racional de $e^{-j\Omega}$ → usar DFS para obtener $h[n]$
  - … periódica, con periodo 2π
- Cuando veamos Transformada Z (que es una generalización de la TF que se ve en los últimos temas) esto será más fácil

Resumen

- Hemos visto el DSF y la TF de señales discretas
  - El DSF y la TF nos dan una representación alternativa de la señal, entre otras cosas esa representación nos permite entender mejor lo que ocurre cuando una señal discreta se procesa con un sistema lineal e invariante
  - El DSF se utiliza para señales periódicas
  - La TF se utiliza para señales no periódicas de energía finita
  - La TF se puede extender para considerar también señales periódicas
  - En continuo, cualquier valor de frecuencia da lugar a una señal periódica, en discreto no

- DSF:
  - Si tenemos una señal periódica de periodo N, su DSF es periódico de periodo N
  - Para calcular los N coeficientes nos basta con saber los N valores de la señal en un periodo
  - Si multiplicamos en el tiempo, los coeficientes se tienen que calcular utilizando una convolución periódica

Resumen

- TF:
  - La TF de una señal discreta real es una señal continua y compleja
  - La TF es periódica con periodo 2π, así que habitualmente la representaremos solo en el intervalo de –π a π
  - La TF de una señal periódica de periodo N, son N deltas en el intervalo (- π, π], las deltas está en las posiciones $2\pi k/N$ (con $-N/2<k\leq N/2$) y su amplitud es 2π por el coeficiente del DSF correspondiente
  - Cuando multiplicamos dos señales, la TF del producto es la convolución periódica de las TF de cada una de las dos señales