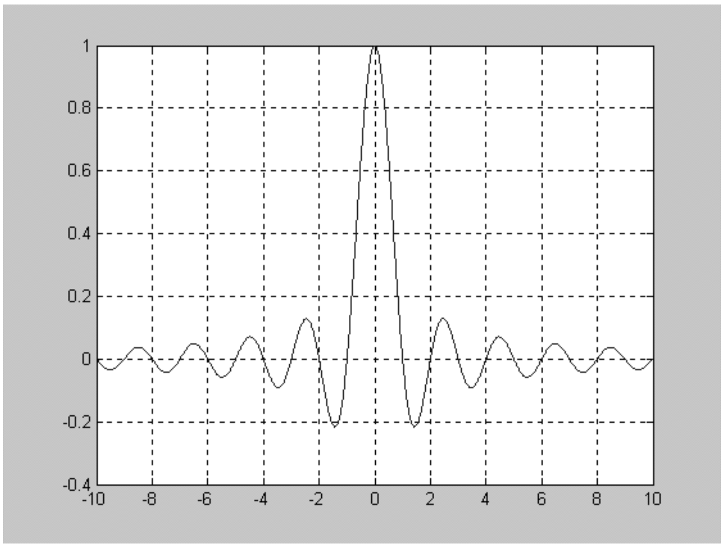
BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Mengapa Menggunakan Metode Numerik

Tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang permasalahan yang terlebih dahulu diperhatikan apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan biasa. Sebagai contoh perhatikan integral berikut ini

$$L = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

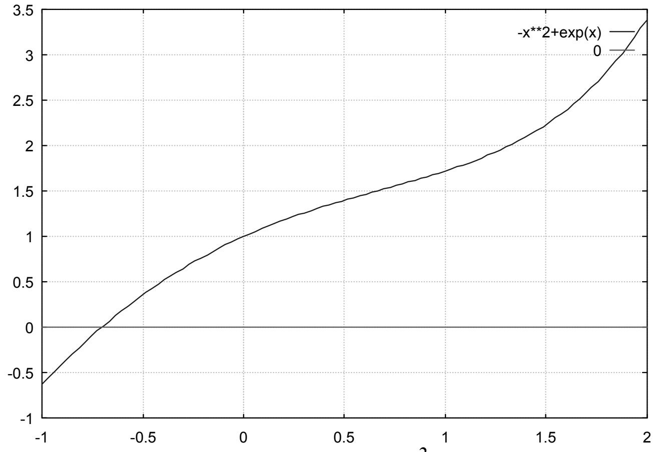
Integral di atas terlihat tidak terlalu panjang, tetapi untuk menyelesaikan integral tersebut bukan permasalahan yang mudah bahkan dapat dikatakan tidak mungkin. Tetapi bukan berarti integral tersebut tidak mempunyai penyelesaian, hanya saja menyelesaikan integral semacam itu sangat sulit dan kalaupun bisa memerlukan pengetahuan matematis yang tinggi dan waktu yang cukup lama. Padahal integral di atas adalah bentuk integral yang banyak digunakan dalam bidang teknik, khususnya pada analisa sinyal yang melibatkan sinyal frekwensi, filtering dan optimasi pola radiasi.



Gambar 1.1. Kurva y=sinc(x)

Dengan dasar inilah dapat dikatakan bahwa diperlukan suatu metode tertentu yang dapat digunakan untuk menghitung integral tersebut. Meskipun metode tersebut tidak dapat menghasilkan nilai yang *exact* (tepat), setidak-tidak sudah mendekati nilai yang diharapkan.

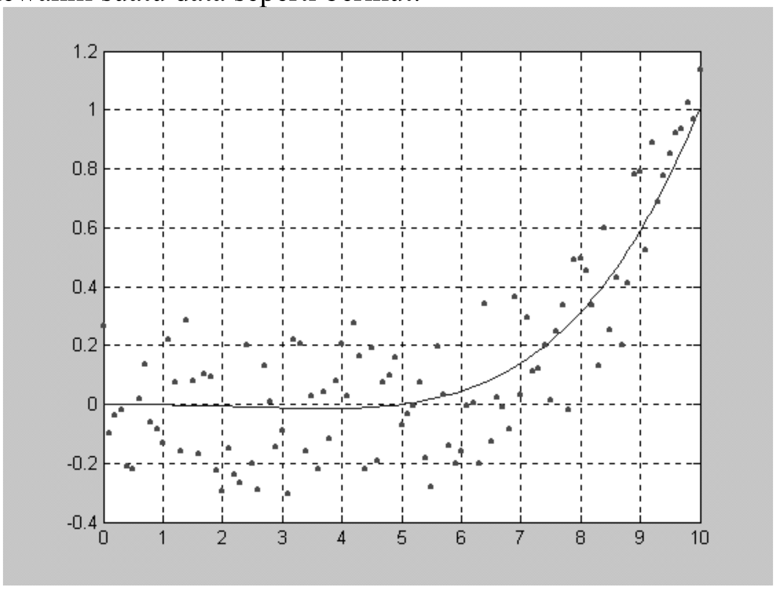
Pada persoalan lain, misalnya diketahui suatu kurva dari fungsi non-linier $y=x^2+exp(x)$ sebagai berikut :



Gambar 1.2. Kurva $y=x^2+exp(x)$

Perhatikan kurva $y=x^2+exp(x)$ memotong sumbu X di antara –1 dan –0.5, tetapi untuk menentukan akar persamaan (titik potong dengan sumbu X) tersebut dengan menggunakan metode manual dapat dikatakan tidak mungkin. Sehingga diperlukan metode-metode pendekatan untuk dapat memperoleh akar yang dapat dikatakan benar. Metode tersebut adalah metode numerik, yaitu metode yang menggunakan analisis-analisis pendekatan untuk menghasilkan nilai yang diharapkan.

Persoalan lain adalah bagaimana menentukan fungsi polynomial yang terbaik yang dapat mewakili suatu data seperti berikut:



Gambar 1.3. Kurva Pendekatan

Secara analitik, untuk memperoleh fungsi polynomial dari jumlah data yang kecil (<20) masih bisa dilakukan, tetapi untuk jumlah data yang besar sulit sekali dilakukan karena akan membutuhkan waktu yang sangat lama. Untuk itulah digunakan perhitungan komputer, dan pemakaian metode numeric mejadi penting artinya untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Selain adanya persoalan-persoalan di atas, seiring dengan perkembangan pemakaian komputer sebagai alat bantu dalam menyelesaikan persoalan, maka pemakaian metode analitik terkadang sulit diterjemahkan ke dalam algoritma yang dapat dimengerti oleh komputer. Sehingga metode numerik yang memang berangkat dari pemakaian alat bantu hitung merupakan alternatif yang baik dalam menyelesaian persoalan-persoalan perhittungan yang rumit. Telah banyak yang menawarkan program-program numerik ini sebagai alat bantu perhitungan.

Dalam penerapan matematis untuk menyelesaikan persoalan-persoalan perhitungan dan analisis, ada beberapa keadaan dan metode yang digunakan untuk menghasilkan penyelesaian yang baik adalah :

(1) Bila persoalan merupakan persoalan yang sederhana atau ada theorema analisa matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut, maka penyelesaian matematis (**metode analitik**) adalah penyelesaian exact yang harus digunakan. Penyelesaian ini menjadi acuan bagi pemakaian metode pendekatan.
(2) Bila persoalan sudah sangat sulit atau tidak mungkin diselesaiakan secara matematis (analitik) karena tidak ada theorema analisa matematik yang dapat digunakan, maka dapat digunakan **metode numerik**.
(3) Bila persoalan sudah merupakan persoalan yang mempunyai kompleksitas tinggi, sehingga metode numerikpun tidak dapat menyajikan penyelesaian dengan baik, maka dapat digunakan metode-metode **simulasi**.

1.2. Prinsip-Prinsip Metode Numerik

Seperti telah dibahas di atas, metode numeric digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Metode numeric ini berangkat dari pemikiran bahwa permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang dapat dipertanggung-jawabkan secara analitik. Metode numerik ini disajikan dalam bentuk algoritma-algoritma yang dapat dihitung secara cepat dan mudah.

Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis. Sehingga dasar pemikirannya tidak keluar jauh dari dasar pemikiran analitis, hanya saja pemakaian grafis dan teknik perhitungan yang mudah merupakan pertimbangan dalam pemakaian metode numerik. Mengingat bahwa algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah *iterasi* yaitu pengulangan proses perhitungan. Dengan kata lain perhitungan dalam metode numerik adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk terus-menerus diperoleh hasil yang main mendekati nilai penyelesaian exact. Perhatikan salah bentuk formulasi dalam metode numeric adalah:

$$x_n = x_{n-1} + \delta x_{n-1}$$

Terlihat bahwa hasil iterasi ke n adalah hasil iterasi ke n-1 (sebelumnya) dengan ditambah δx_{n-1} yang merupakan nilai perbaikan. Sehingga dapat dikatakan bahwa semakin banyak iterasi yang digunakan, maka nilainya semakin mendekati nilai exact atau semakin baik hasil yang diperoleh.

Dengan menggunakan metode pendekatan semacam ini, tentukan setiap nilai hasil perhitungan akan mempunyai *nilai error* (nilai kesalahan). Dalam analisa metode numeric, kesalahan ini menjadi penting artinya. Karena kesalahan dalam pemakaian algoritma pendekatan akan menyebabkan nilai kesalahan yang besar, tentunya ini tidak diharapkan. Sehingga pendekatan metode analitik selalu membahas tingkat kesalahan dan tingkat kecepatan proses yang akan terjadi.

Persoalan-persoalan yang biasa diangkat dalam metode numerik adalah persoalan-persoalan matematis yang penyelesaiannya sulit didapatkan dengan menggunakan metode analitik, antara lain:

- Menyelesaikan persamaan non linier
- Menyelesaikan persamaan simultan atau multi-variabel
- Menyelesaikan differensial dan integral
- Interpolasi dan Regresi
- Menyelesaikan persamaan differensial
- Masalah multi variable untuk menentukan nilai optimal yang tak bersyarat

Buku ini akan menjelaskan metode-metode tersebut dengan pendekatan algoritma dan pemrogramannya. Pada setiap akhir pembahasan akan diberikan contoh kasus yang diharapkan dapat membuka wawasan mahasiswa mengenai pemakaian metode numerik ini.

BAB 2

SISTEM BILANGAN DAN KESALAHAN

2.1. Penyajian Bilangan Bulat

Bilangan bulat yang sering digunakan adalah bilangan bulat dalam sistem bilangan desimal yang didefinisikan :

$$
\begin{aligned}
N &= \left(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0\right) \\
&= a_n a^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + ... + a_0 10^0
\end{aligned}
$$

Contoh :

$2673 = 2.10^3 + 6.10^2 + 7.10^1 + 3.10^0$

Bilangan bulat dengan bilangan dasar c didefinisikan dengan :

$$
\begin{aligned}
N &= \left(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0\right)_c \\
&= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{c-2} + ... + a_0 c^0
\end{aligned}
$$

Bilangan biner atau bilangan dasar 2, dapat didefinisikan seperti formulasi di atas dengan mengganti c dengan 2, sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
N &= \left(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0\right)_2 \\
&= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} + ... + a_0 2^0
\end{aligned}
$$

Contoh :

$(1101)_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^2$

Algoritma 2.1.

Bila diketahui koefisien-koefisien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dari polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$$

dan suatu bilangan β.Maka dapat dihitung $b_n, b_{n-1}, .., b_0$ dari β sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n \beta \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} \beta \\
&\text{..............................} \\
b_0 &= a_0 + b_1 \beta .
\end{aligned}
$$

Algoritma ini banyak digunakan untuk menghitung konversi bilangan secara cepat, karena dalam algoritma ini tidak terdapat pemakaian pangkat yang membuat kesalahan numerik menjadi lebih besar.

Contoh :
Bilangan biner $(1101)_2$ dapat dihitung dengan ;

$$b_3 = 1$$
$$b_2 = b_3 + a_3\beta = 1 + 1.2 = 3$$
$$b_1 = b_2 + a_2\beta = 0 + 3.2 = 6$$
$$b_0 = 1 + a_1\beta = 1 + 6.2 = 13$$

Jadi $(1101)_2 = 13$

Contoh :
Bilangan oktal $(721)_8$ dapat dihitung dengan :

$$b_2 = 7$$
$$b_1 = 2 + 7.8 = 2 + 5.6 = 58$$
$$b_0 = 1 + 58.8 = 1 + 464 = 465$$

Jadi $(721)_8 = 465$.

Contoh :

$$187 = (187)_{10} = 1.10^2 + 8.10^1 + 7.10^0$$
$$= (1)_2(1010)_2^2 + (1000)_2(1010)_2^1 + (111)_2$$

Dengan algoritma di atas :

$$b_2 = (1)_2$$
$$b_1 = (1000)_2 + (1)_2(1010)_2 = (1000)_2 + (1010)_2$$
$$= (10010)_2$$
$$b_0 = (111)_2 + (10010)_2(1010)_2$$
$$= (111)_2 + (10110100)_2 = (10111011)_2$$

Jadi $187 = (10111011)_2$

2.2. Penyajian Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan x antara 0 s/d 1 dalam sistem bilangan desimal didefinisikan :

$$x = (a_1a_2a_3...a_n) = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + ... + a_n 10^{-n}$$

Bilangan pecahan x secara umum dalam sistem bilangan dengan bilangan dasar k didefinisikan :

$$(a_1a_2a_3...a_n)_k = \sum_{i=1}^{n} a_i k^{-i}$$

Contoh :

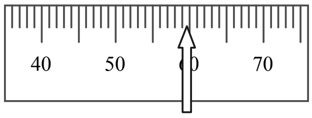
$$0,625 = 6.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3}$$

Contoh :

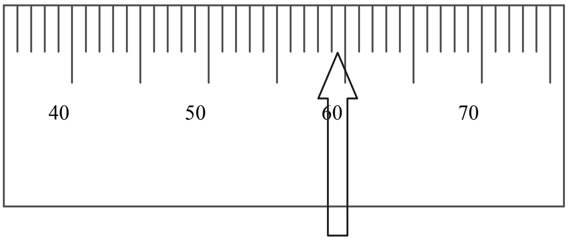
$$(0,101)_2 = 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.10^{-3}$$
$$= 0.5 + 0,125$$
$$= 0,625$$

2.3. Nilai Signifikan

Nilai signifikan adalah suatu nilai dimana jumlah angka ditentukan sebagai batas nilai tersebut diterima atau tidak. Sebagai contoh perhatikan nilai pada penggaris :



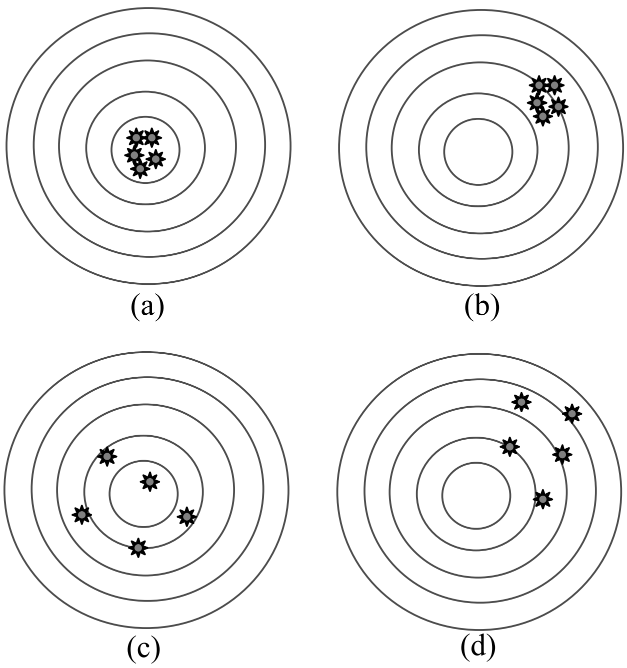
Nilai yang ditunjuk tidak tepat pada angka yang ditentukan karena selisih 1 strip, dalam kejadian ini bila dianggap nilai signifikan = 1 maka nilainya 59 atau 60.
Bila penggaris tersebut dilihat dengan skala lebih besar pada daerah yang ditunjuk oleh jarum :



Dari gambar ini, dengan nilai signifikan 10^{-1} (0,1) maka diperoleh nilainya 59 atau 59,5.

2.4. Akurasi Dan Presisi

Peerhatikan hasil tembakan yang dilakukan oleh 4 orang seperti gambar berikut :



Dari 4 gambar di atas, gambar (a) menunjukkan hasil yang akurat dan presisi.Gambar (b) menunjukkan hasil yang presisi tetapi tidak akurat. Gambar (c) menunjukkan hasil yang sebenarnya akurat teteapi tidak presisi. Dan gambar (d) menunjukkan hasil yang tidak akurat dan tidak presisi. Akurasi dalam hal ini sangat tergantung pada penembak, dan presisi tergantung pada senapan dan perlengkapannya.

Nilai presisi mengacu pada jumlah angka signifikan yang digunakan dan sebaran bacaan berulang pada alat ukur.Pemakaian alat ukur penggaris dan jangka sorong akan mempunyai perbedaan nilai presisi.Pemakaian jangka sorong mempunyai presisi yang lebih tinggi.

Nilai akurat atau akurasi mengacu pada dekatnya nilai pendekatan yang dihasilkan dengan nilai acuan atau nilai eksak.Misalkan nilai eksak diketahui ½, sedangkan hasil pendekatan adalah 0.500001 maka hasil ini dikatakan akurat bila torelansinya 10^{-4}.

Dari keadaan akurat dan presisi ini, akan muncul apa yang dinamakan kesalahan (error).Dalam analisa numerik, dimana penyelesaian dihitung menggunakan nilai-nilai pendekatan, error menjadi hal yang sangat penting dan diperhatikan.

2.5. Pendekatan Dan Kesalahan

Kesalahan di dalam metode numerik dibagi menjadi dua macam yaitu:

1. Kesalahan pembulatan (*round of error*)
2. Kesalahan pemotongan (*truncation error*)

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang disebabkan oleh pembulatan misalnya 0.4 menjadi 0 atau 0,5 menjadi 1.Sedangkan kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang ditimbulkan pada saat dilakukan pengurangan jumlah angka signifikan.

Kesalahan numerik adalah kesalahan yang timbul karena adanya proses pendekatan.Hubungan kesalahan dan penyelesaian adalah :

$$\hat{x} = x + e$$

dimana $\hat{x}$ adalah nilai yang sebenarnya (nilai eksak)

x adalah nilai pendekatan yang dihasilakan dari metode numerik

e adalah kesalahan numerik.

Kesalahan fraksional adalah prosentase antara kesalahandan nilai sebenarnya.

$$\in = \left(\frac{e}{\hat{x}} \right) x 100\%$$

Pda banyak permasalahan kesalahan fraksional di atas sulit atau tidak bisa dihitung, karena nilai eksaknya tidak diketahui.Sehingga kesalahan fraksional dihitung berdasarkan nilai pendekatan yang diperoleh:

$$\in = \left(\frac{e}{x} \right) \times 100\%$$

dimana e pada waktu ke n adalah selisih nilai pendekatan ke n dan ke n-1

$$\in = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right) \times 100\%$$

Perhitungan kesalahan semacam ini dilakukan untuk mencapai keadaan konvergensi pada suatu proses iterasi.

Definisi Konvergensi.

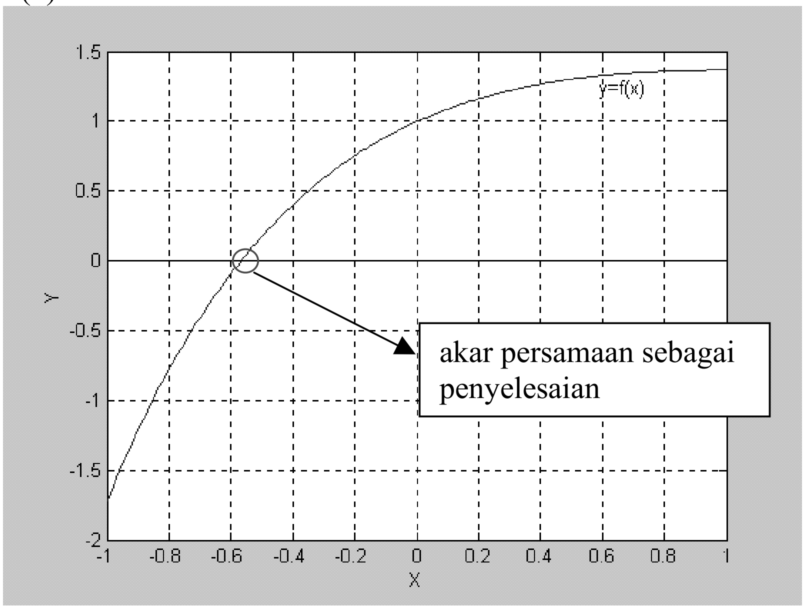
Suatu barisan $a_1, a_2,...$ dikatakan konvergen ke α jika dan hanya jika untuk semua e>0 terdapat bilangan bulat $\eta_0(\in)$. Sedemikian hingga untuk semua n$\geq \eta_0$ terdapat $|\alpha - \alpha_n| < \in$.

Dari definisi ini, dapat dikatakan bahwa penyelesaian dalam metode numerik dicari berdasarkan selisih hasil saat ini dengan hasil sebelumnya.Metode ini dapat menghindari jumlah iterasi yang sangat besar tetapi terkadang tidak akurat.

BAB 3
PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

3.1. Permasalahan Persamaan Non Linier

Penyelesaian persamaan non linier adalah penentuan akar-akar persamaan non linier.Dimana akar sebuah persamaan f(x) =0 adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai f(x) sama dengan nol. Dengan kata lain akar persamaan f(x) adalah titik potong antara kurva f(x) dan sumbu X.



Gambar 3.1. Penyelesaian persamaan non linier

Penyelesaian persamaan linier $mx + c = 0$ dimana m dan c adalah konstanta, dapat dihitung dengan :

$$mx + c = 0$$

$$x = -\frac{c}{m}$$

Penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dihitung dengan menggunakan rumus ABC.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

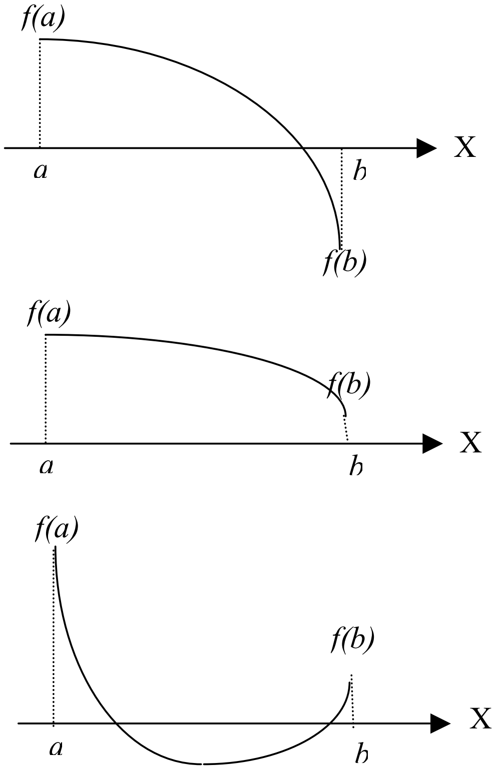
Beberapa persamaan polynomial yang sederhana dapat diselesaikan theorema sisa.Sehingga tidak memerlukan metode numeric dalam menyelesaikannya, karena metode analitik dapat dilakukan.Tetapi bagaimana menyelesaikan persamaan

$$x - e^{-x} = 0$$

Tampaknya sederhana, tetapi untuk menyelesaikan persamaan non linier merupakan metode pencarian akar secara berulang-ulang.

Theorema 3.1.
Suatu range *x=[a,b]* mempunyai akar bila *f(a) dan f(b)* berlawanan tanda atau memenuhi *f(a).f(b)<0*

Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



Karena *f(a).f(b)<0* maka pada range x=[a,b] terdapat akar.

Karena *f(a).f(b)>0* maka pada range x=[a,b] tidak dapat dikatakan terdapat akar.

Gambar 3. Penentuan akar persamaan

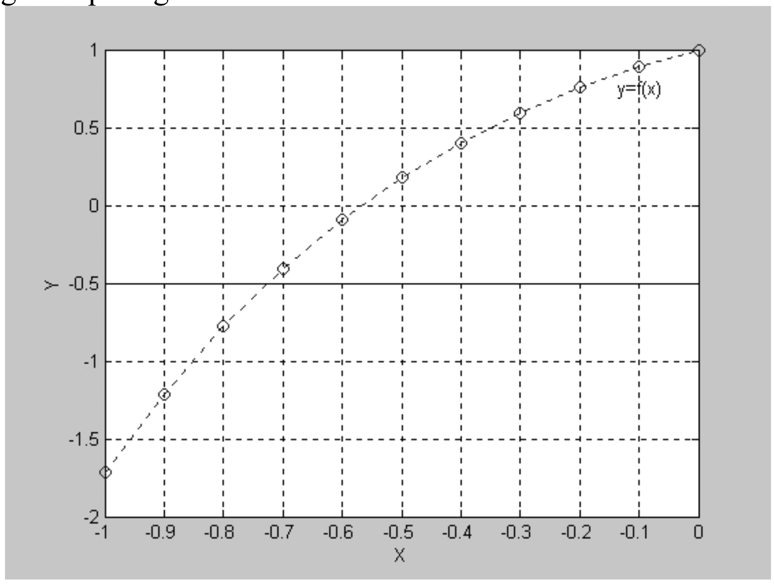
Secara sederhana, untuk menyelesaikan persamaan non linier dapat dilakukan dengan menggunakan metode table atau pembagian area.Dimana untuk x = $[a,b]$ atau x di antara *a* dan *b* dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai *f(x)* sehingga diperoleh tabel :

X	f(x)
x_0=a	f(a)
x_1	f(x_1)
x_2	f(x_2)
x_3	f(x_3)
……	……
x_n=b	f(b)

Dari tabel ini, bila ditemukan $f(x_k)=0$ atau mendekati nol maka dikatakan bahwa x_k adalah penyelesaian persamaan $f(x_k)=0$.Bila tidak ada $f(x_k)$ yang sama dengan nol, maka dicari nilai $f(x_k)$ dan $f(x_{k+1})$ yang berlawanan tanda, bila tidak ditemukan maka dikatakan tidak mempunyai akar untuk x = $[a,b]$, dan bila ditemukan maka ada 2 pendapat untuk menentukan akar persamaan, yaitu :

1. Akar persamaan ditentukan oleh nilai mana yang lebih dekat, bila $|f(x_k)| \leq |f(x_{k+1})|$ maka akarnya x_k, dan bila $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ maka akarnya x_{k+1}.
2. Akarnya perlu di cari lagi, dengan range x = $[x_k, x_{k+1}]$.

Secara grafis, metode table ini dapat dijelaskan untuk x = $[a,b]$, fungsi *f(x)* dibagi menjadi N bagian seperti gambar berikut :



Gambar 3.3. Metode Tabel

Gambar di atas menjelaskan bahwa penyelesaian diperoleh dengan membagi x = $[a,b]$ sebanyak-banyaknya hingga diperoleh suatu garis yang melalui akar persamaan dan nilai x dari garis tersebut adalah penyelesaian dari persamaan F(x) = 0.

Contoh 3.1:

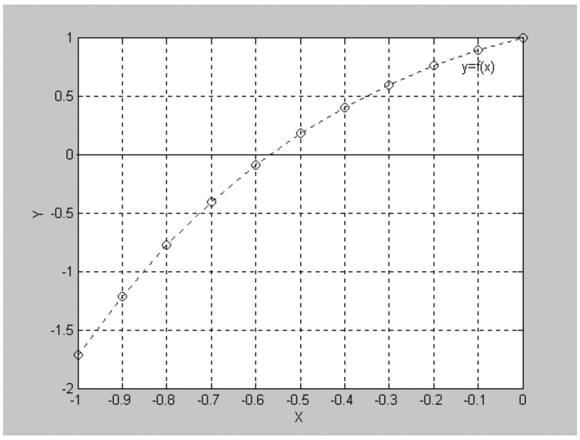
Selesaikan persamaan : $x+e^x = 0$ dengan range x = $[-1,0]$

Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range x = $[-1,0]$ dibagi menjadi 10 bagian sehingga diperoleh :

X	f(x)
-1,0	-0,63212
-0,9	-0,49343
-0,8	-0,35067
-0,7	-0,20341
-0,6	-0,05119
-0,5	0,10653
-0,4	0,27032
-0,3	0,44082
-0,2	0,61873
-0,1	0,80484
0,0	1,00000

Dari table diperoleh penyelesaian berada di antara –0,6 dan –0,5 dengan nilai f(x) masing-masing -0,0512 dan 0,1065, sehingga dapat diambil keputusan penyelesaiannya di x = 0,6.Bila pada range x = $[-0{,}6, -0{,}5]$ dibagi 10 maka diperoleh f(x) terdekat dengan nol pada x = -0,57 dengan F(x) = 0,00447

Contoh 3. 2:
Selesaikan persamaan $xe^{-x} + 1 = 0$.
Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, hal pertama yang harus dilakukan adalah menaksir range yang tepat, dengan cara menggambarkan.



Dari gambar di atas terlihat bahwa akar persamaan berada pada range $[-0.6, -0.5]$.Dari range ini dibuat table dengan membagi range menjadi 10 bagian sehingga diperoleh :

x	f(x)
-0,60	-0,09327
-0,59	-0,06435
-0,58	-0,03590
-0,57	-0,00791
-0,56	0,01962
-0,55	0,04671
-0,54	0,07336
-0,53	0,09957
-0,52	0,12535
-0,51	0,15070
-0,50	0,17564

Dari table tersebut dapat dikatakan bahwa akar persamaan berada antara –0,57 dan –0,56, atau dengan menggunakan selisih terkecil maka dapat dikatakan bahwa akar persamaan terletak di x = -0,57 dengan F(x) = -0,00791.

Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, karena itu metode ini tidak digunakan dalam penyelesaian persamaan non linier, Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

Algoritma Metode Tabel :

(1) Defisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah}dan batas atas x_{atas}.

(3) Tentukan jumlah pembagian N

(4) Hitung step pembagi h

$$H = \frac{x_{atas} - x_{bawah}}{N}$$

(5) Untuk i = 0 s/d N, hitung

$x_i = x_{bawah} + i.h$

$y_i = f(x_i)$

(6) Untuk I = 0 s/d N dicari k dimana

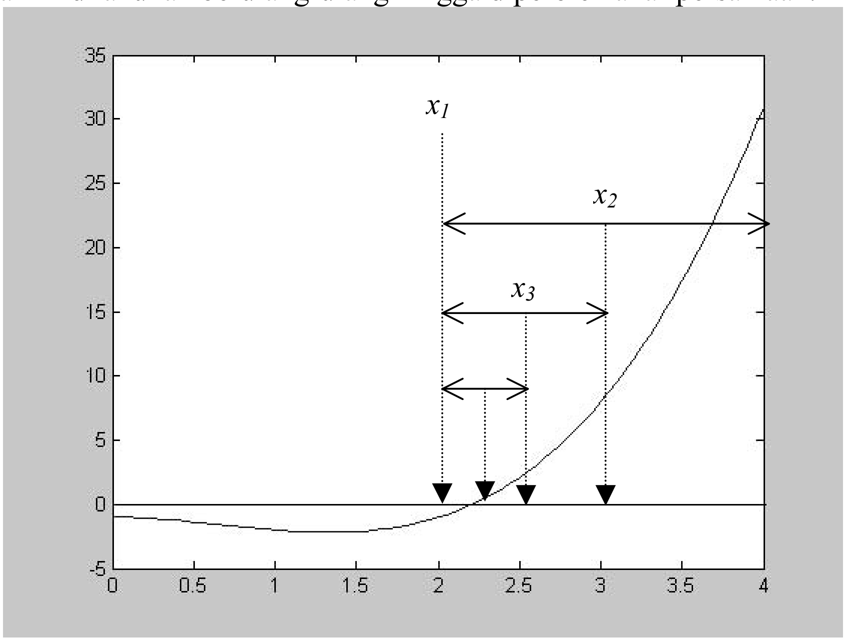
*. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian

*. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :

- Bila $|f(x_k)| <|f(x_{k+1})$ maka x_k adalah penyelesaian
- Bila tidak x_{k+1}adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1}.

3.2. Metode Biseksi.

Ide awal metode ini adalah metode table, dimana area dibagi menjadi N bagian.Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang.Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.



Gambar 3.4. Metode Biseksi

Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (*a*) dan batas atas (*b*).Kemudian dihitung nilai tengah :

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a)\ .\ f(b) < 0$$

Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

Contoh 3. 3:

Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1 = 0$, dengan menggunakan range x=$\left[-1{,}0\right]$, maka diperoleh tabel biseksi sebagai berikut :

iterasi	a	B	x	f(x)	f(a)	Keterangan
1	-1	0	-0,5	0,175639	-1,71828	berlawanan tanda
2	-1	-0,5	-0,75	-0,58775	-1,71828	
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,16765	-0,58775	
4	-0,625	-0,5	-0,5625	0,012782	-0,16765	berlawanan tanda
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,07514	-0,16765	
6	-0,59375	-0,5625	-0,57813	-0,03062	-0,07514	
7	-0,57813	-0,5625	-0,57031	-0,00878	-0,03062	
8	-0,57031	-0,5625	-0,56641	0,002035	-0,00878	berlawanan tanda
9	-0,57031	-0,56641	-0,56836	-0,00336	-0,00878	
10	-0,56836	-0,56641	-0,56738	-0,00066	-0,00336	

Dimana x = $\dfrac{a+b}{2}$

Pada iterasi ke 10 diperoleh x = -0.56738 dan f(x) = -0.00066

Untuk menghentikan iterasi, dapat dilakukan dengan menggunakan toleransi error atau iterasi maksimum.

Catatan : Dengan menggunakan metode biseksi dengan tolerasi error 0.001 dibutuhkan 10 iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errorny) maka semakin bear jumlah iterasi yang dibutuhkan.

Algoritma Metode Biseksi

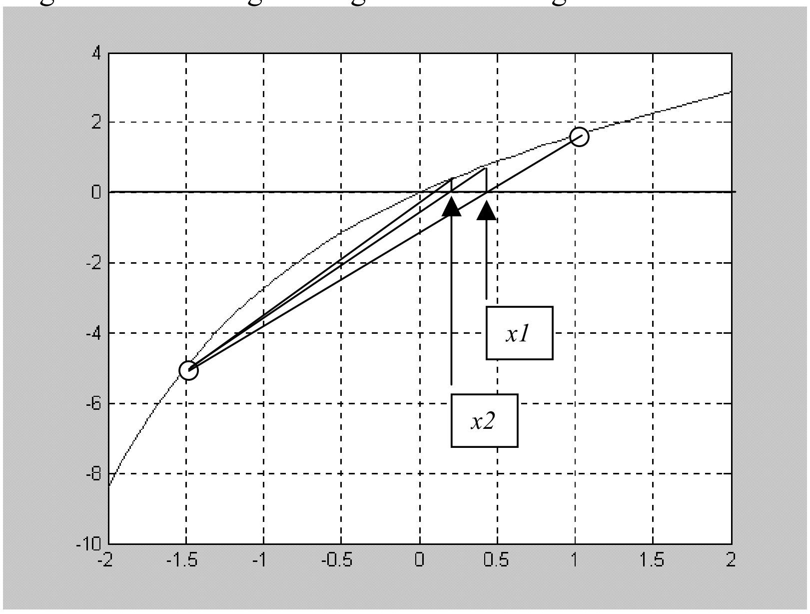
(1) Definisikan fungsi *f(x)* yang akan dicari akarnya
(2) Tentukan nilai *a* dan *b*
(3) Tentukan torelansi e dan iterasi maksimum *N*
(4) Hitung *f(a)* dan *f(b)*
(5) Jika *f(a).f(b)>0* maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan
(6) Hitung x= $\dfrac{a+b}{2}$
(7) Hitung *f(x)*
(8) Bila *f(x).f(a)<0* maka *b=x* dan *f(b)=f(x)*, bila tidak *a=x* dan *f(a)=f(x)*
(9) Jika |b-a|<e atau iterasi>iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x, dan bila tidak, ulangi langkah 6.

3.3. Metode Regula Falsi

Metode regula falsi adalah metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range. Seperti halnya metode biseksi, metode ini bekerja secara iterasi dengan melakukan update range.Titik pendekatan yang digunakan oleh metode regula-falsi adalah :

$$X = \frac{f(b).a - f(a).b}{f(b) - f(a)}$$

Dengan kata lain titik pendekatan x adalah nilai rata-rata range berdasarkan F(x).Metode regula falsi secara grafis digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.5. Metode Regula Falsi

Contoh 3. 4:

Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1=0$ pada range $x=[-1,0]$, dengan metode regula-falsi diperoleh :

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
1	-1	0	-0,36788	0,468536	-1,71828	1
2	-1	-0,36788	0,074805	1,069413	-1,71828	0,468536
3	-1	0,074805	-0,42973	0,339579	-1,71828	1,069413
4	-1	-0,42973	0,1938	1,159657	-1,71828	0,339579
5	-1	0,1938	-0,51866	0,128778	-1,71828	1,159657
6	-1	-0,51866	0,412775	1,273179	-1,71828	0,128778
7	-1	0,412775	-0,6627	-0,28565	-1,71828	1,273179
8	-0,6627	0,412775	-0,6169	-0,14323	-0,28565	1,273179
9	-0,6169	0,412775	-0,59626	-0,0824	-0,14323	1,273179
10	-0,59626	0,412775	-0,58511	-0,05037	-0,0824	1,273179
11	-0,58511	0,412775	-0,57855	-0,03181	-0,05037	1,273179
12	-0,57855	0,412775	-0,57451	-0,02047	-0,03181	1,273179
13	-0,57451	0,412775	-0,57195	-0,01333	-0,02047	1,273179
14	-0,57195	0,412775	-0,5703	-0,00874	-0,01333	1,273179

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
15	-0,5703	0,412775	-0,56922	-0,00576	-0,00874	1,273179
16	-0,56922	0,412775	-0,56852	-0,00381	-0,00576	1,273179
17	-0,56852	0,412775	-0,56806	-0,00252	-0,00381	1,273179
18	-0,56806	0,412775	-0,56775	-0,00167	-0,00252	1,273179
19	-0,56775	0,412775	-0,56755	-0,00111	-0,00167	1,273179
20	-0,56755	0,412775	-0,56741	-0,00074	-0,00111	1,273179

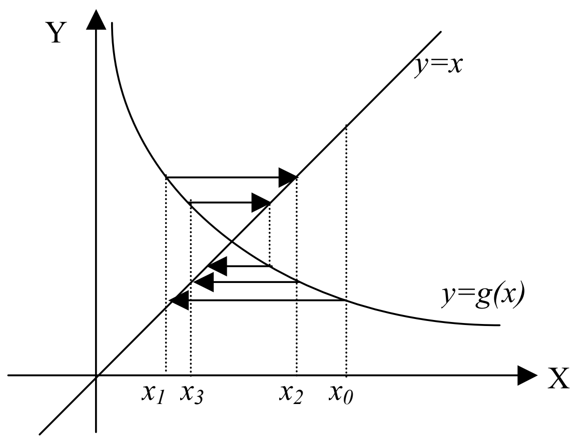
Akar persamaan diperoleh di x=-0.56741 dengan kesalahan =0,00074

Algoritma Metode Regula Falsi

1. definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung Fa = f(a) dan Fb = f(b)
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau error > e
   - x = $\dfrac{Fb.a - Fa.b}{Fb - Fa}$
   - Hitung Fx = f(x)
   - Hitung error = |Fx|
   - Jika Fx.Fa <0 maka b = x dan Fb = Fx jika tidak a = x dan Fa = Fx.
6. Akar persamaan adalah x.

3.4. Metode Iterasi Sederhana.

Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : x = g(x). Sebagai contoh untuk menyelesaikan persamaan x – e^x = 0 maka persamaan di ubah menjadi : x = e^x atau g(x) = e^x.
g(x) inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana ini.Metode iterasi sederhana secara grafis dapat dijelaskan sebagai berikut :



Gambar 3.6. Metode Iterasi Sederhana

Contoh 3. 5:

Selesaikan x +e^x = 0, maka persamaan diubah menjadi x = e^x atau g(x) = e^x.
Ambil titik awal di x_0 = -1 , maka
Iterasi 1 : x = -e^{-1}= -0.3679 → F(x) = 0,3243
Iterasi 2 : x = $e^{-0,3679}$ = -0,6922
F(x) = -0,19173
Iterasi 3 : x = -$e^{-0,6922}$ = -0,50047
F(x) = 0,10577
Iterasi 4 : x = -$e^{-0,50047}$ = -0,60624
F(x) = -0,06085
Iterasi 5 = x = -$e^{-0,60624}$ = -0,5454
F(x) = 0,034217
Pada iterasi ke 10 diperoleh x = -0,56843 dan F(x) = 0,034217.

Algoritma Metode Iterasi Sederhana

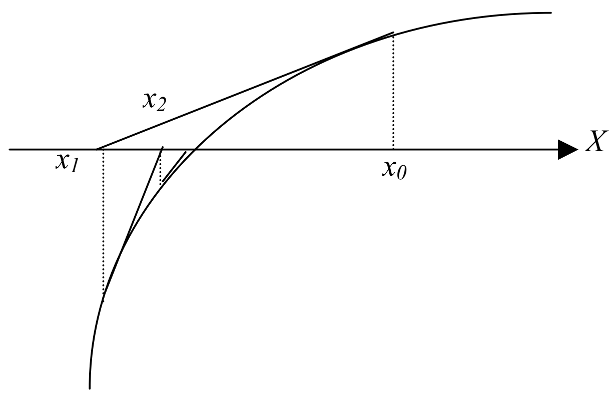
1. Definisikan F(x) dan g(x)
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan pendekatan awal x$[0]$
4. Untuk iterasi = 1 s/d n atau F(x$[iterasi]$) $\geq e$
   $X_i = g(x_{i-1})$
   Hitung $F(x_i)$
5. Akar adalah x terakhir yang diperoleh.

3.5. Metode Newton Raphson

Metode newton raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut.Titik pendekatan ke n+1 dituliskan dengan :

$$X_{n+1} = x_n + \frac{F(x_n)}{F^1(x_n)}$$

Metode newton raphson dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar.3.6 Metode Newton Raphson.

Contoh 3. 6:
Selesaikan persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$
$f(x) = x - e^{-x} \rightarrow f'(x) = 1 + e^{-x}$
$f(x_0) = 0 - e^{-0} = -1$
$f^1(x_0) = 1 + e^{-0} = 2$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^1(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0{,}5$$
$f(x_1) = -0{,}106631$ dan $f^1(x_1) = 1{,}60653$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^1(x_1)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}106531}{1{,}60653} = 0{,}566311$$
$f(x_2) = -0{,}00130451$ dan $f^1(x_2) = 1{,}56762$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^1(x_2)} = 0{,}566311 - \frac{-0{,}00130451}{1{,}56762} = 0{,}567143$$
$f(x_3) = -1{,}96.10^{-7}$. Suatu bilangan yang sangat kecil.
Sehingga akar persamaan x = 0,567143.

Algoritma Metode Newton Raphson

1. Definisikan fungsi f(x) dan $f^1(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f^1(x_0)$
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau $|f(x_i)| \geq e$
   $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^1(x_i)}$$
   Hitung $f(x_i)$ dan $f^1(x_i)$
6. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

Contoh 3. 7:
Hasil penyelesaian persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$ dan toleransi error 0.00001 adalah:

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714
Akar terletak di x = 0.567143			

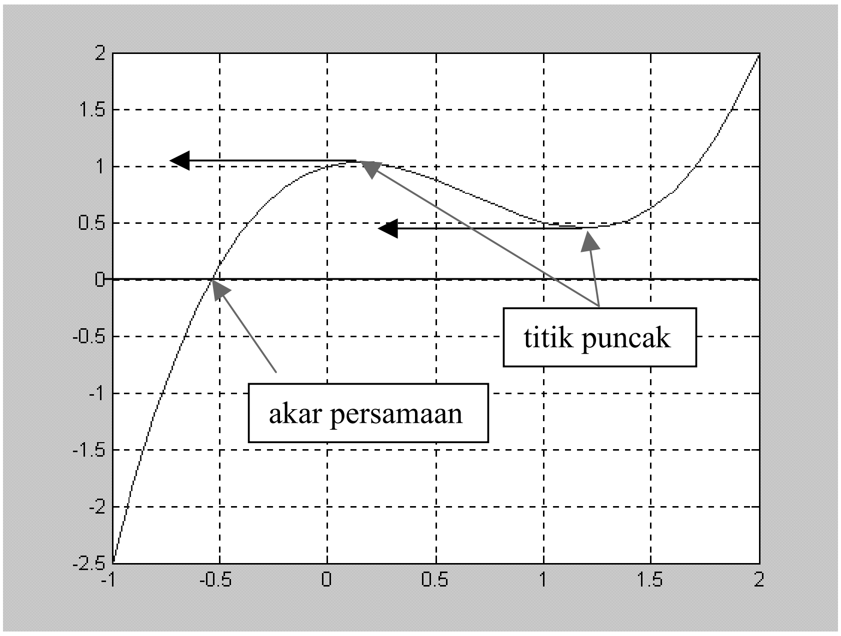
Contoh 3. 8:
Hasil penyelesaian persamaan $x + e^{-x} \cos x - 2 = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 1$ dan perhatikan bahwa :
$f(x) = x + e^{-x} \cos x - 2$
$f'(x) = 1 - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

Pada program diatas, tuliskan fungsi-fungsi ini pada definisi fungsi: f(x) pada fungsi dan f'(x) pada turunan.
Hasilnya adalah:

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	1	-0.801234	0.491674
1	2.6296	0.566743	1.02753
2	2.07805	0.0172411	0.951394
3	2.05993	3.62703e-005	0.947372
4	2.05989	1.64926e-010	0.947364
Akar terletak di x = 2.05989			

Permasalahan pada pemakaian metode newton raphson adalah :

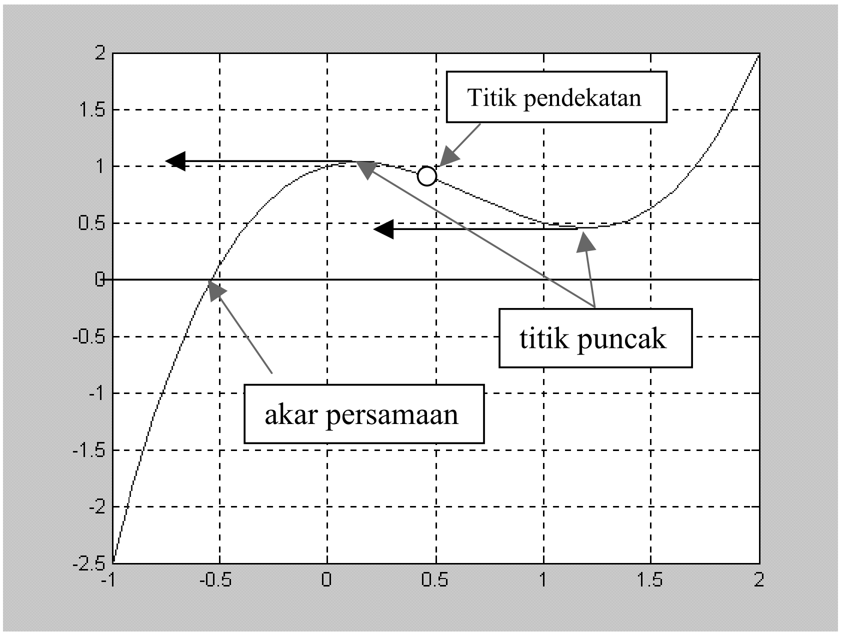
1. Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F^1(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F^1(x)}$ sama dengan nol, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 3.7. Pendekatan pada titik puncak

Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.

2. Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.



Gambar 3.8. Titik pendekatan berada diantara 2 titik puncak

Bila titik pendekatan berada pada dua tiitik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*). Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.

Untuk dapat menyelesaikan kedua permasalahan pada metode newton raphson ini, maka metode newton raphson perlu dimodifikasi dengan :

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit, $x_i = x_i \pm \delta$ dimana δ adalah konstanta yang ditentukan dengan demikian $F^1(x_i) \neq 0$ dan metode newton raphson tetap dapat berjalan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode newton raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode newton raphson.

Contoh 3. 9:
Selesaikan persamaan :

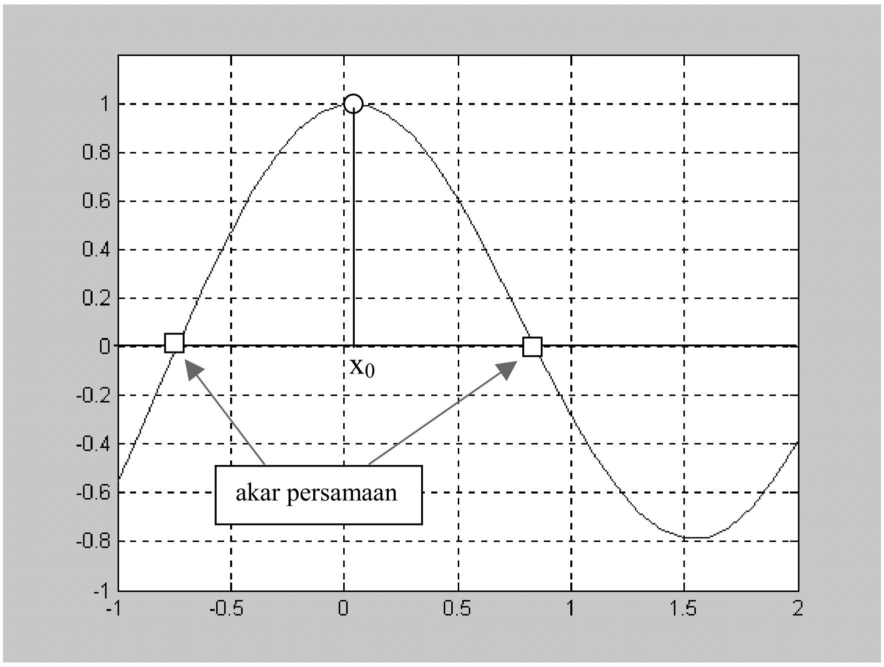
$x \cdot e^{-x} + \cos(2x) = 0$

Bila menggunakan titik pendekatan awal $x_0 = 0,176281$

$f(x) = x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$

$f^1(x) = (1-x)\, e^{-x} - 2 \sin(2x)$

Sehingga $F(x_0) = 1,086282$ dan $F^1(x_0) = -0,000015$
Perhatikan grafik dari fungsi ini:



Gambar 3.9. Grafik $y=x.e^{-x}+cos(2x)$

Iterasi menggunakan metode Newton Raphson adalah sebagai berikut:

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2

Akar yang ditemukan adalah x=71365, padahal dalam range 0 sampai dengan 1 terdapat akar di sekitar 0.5 s/d 1.

Untuk menghindari ini sebaikan digunakan grafik atau tabel sehingga dapat diperoleh pendekatan awal yang baik.

Bila digunakan pendekatan awal x_0=0.5 maka dengan iterasi dari metode Newton Raphson diperoleh:

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

Akar yang ditemukan adalah x=0.973692.

Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. ambil range nilai x = $[a,b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan torelansi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :
   $F(x_k) \cdot F(x_{k+1})<0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
6. Bila $F\left(abs\left(F^1(x_0)\right)\right) < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)
   $x_0 = x_0 + dx$
   hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
7. Untuk iterasi I= 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$
   $x_1 = x_{i-1} - \dfrac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$
   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_i)$
   bila $|F^1(x_i)| < e$ maka
   $x_i = x_i + dx$
   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_0)$

8.Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

Dengan menggunakan algoritma newton raphson yang dimodifikasikan diharapkan akar yang diperoleh sesuai dengan harapan dan bila terdapat lebih dari satu akar dalam range ditunjuk, akan ditampilkan semuanya.

Contoh 3. 10:
Hasil dari penyelesaian persamaan x * exp(-x) + cos(2x) = 0 pada range [0,5] adalah sebagai berikut :

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	0.5	0.843568	-1.37968
1	1.11142	-0.24106	-1.62635
2	0.963203	0.0194632	-1.86083
3	0.973662	5.6107e-005	-1.84995
4	0.973692	4.98195e-010	-1.84991
Akar terletak di x = 0.973692			

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	2	-0.382973	1.37827
1	2.27787	0.0774688	1.84452
2	2.23587	0.000671812	1.81025
3	2.23549	6.74538e-008	1.80989
Akar terletak di x = 2.23549			

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	3.5	0.859593	-1.38947
1	4.11865	-0.307004	-1.90559
2	3.95754	0.0145632	-2.05279
3	3.96464	7.5622e-006	-2.05059
Akar terletak di x = 3.96464			

3.6. Metode Secant

Metode secant merupakan perbaikan dari metode regula-falsi dan newton raphson dimana kemiringan dua titik dinyatakan sacara diskrit, dengan mengambil bentuk garis lurus yang melalui satu titik.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dimana m diperoleh dari:

$$m_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Bila y = F(x), n_y dan x_n diketahui maka titik ke n+1 adalah :

$$y_{n+1} - y_n = m_n(x_{n+1} - x_n)$$

Bila titik x_{n+1} dianggap akar persamaan maka :

$$y_{n+1} = 0$$

sehingga diperoleh :

$$-y_n = m_n(x^{n+1} - x_n)$$

$$\frac{m_n x_n - y_n}{m_n} = x_{n+1}$$

atau :

$$x_{n+1} = x_n - y_n \cdot \frac{1}{m_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - y_n \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

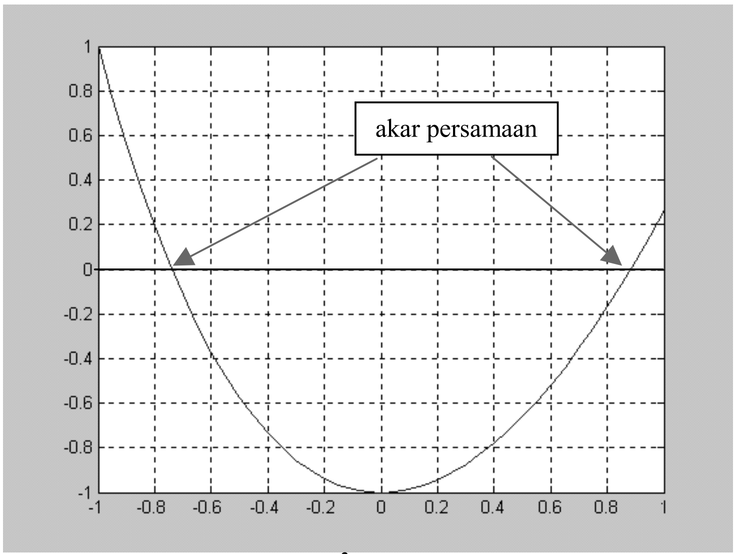
Persamaan ini yang menjadi dasar pada proses pendekatan dimana nilai pendekatannya adalah : $\delta_n = -y_n \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$

Sehingga untuk menggunakan metode secant ini diperlukan dua titik pendekatan x_0 dan x_1. Kedua titik pendekatan ini diambil pada titik-titik yang dekat agar konvergensinya dapat dijamin.

Contoh 3. 11:

Selesaikan persamaan : $x^2 - (x + 1)\, e^{-x} = 0$

Untuk dapat menyelesaikan persamaan ini terlebih dahulu digambarkan grafik atau digunakan metode tabel untuk mengetahui range atau 2 nilai pendekatan awal yang baik.



Gambar 3.9. Fungsi $y=x^2-(x+1).e^{-x}$ untuk range [-1,1]

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa akar terletak pada range x = $[08,0,9]$, maka ambil x_0 = 0,8 dan x_1 = 0,9 maka dapat dihitung

$y_0 = F(x_0) = -0{,}16879$

$y_1 = F(x_1) = 0{,}037518$

Iterasi Metode Secant adalah sebagai berikut :

Iterasi 1 : $x_2 = x_1 - y_1 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0{,}881815$

$y_2 = 0{,}00153$

Iterasi 2 : $x_3 = x_2 - y_2 \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0{,}882528$

$y_3 = 1{,}3.10^{-5}$

Iterasi 3 : $x_4 = x_3 - y_3 \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0{,}882534$

$y_4 = 4{,}91.e^{-9}$

Diperoleh akar x = 0,882534

Algoritma Metode Secant :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. Definisikan torelansi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Masukkan dua nilai pendekatan awal yang di antaranya terdapat akar yaitu x_0 dan x_1, sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendakatannya adalah titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
4. Hitung $F(x_0)$ dan $F(x_1)$ sebagai y_0 dan y_1

5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

hitung $y_{i+1} = F(x_{i+1})$

6. Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

Contoh 3. 12:

Hasil untuk penyelesaian persamaan : $x^2 - (x + 1)\, e^{-x} = 0$ dengan pendekatan awal di 0.8 dan 0.9, dan toleransi error 0.00001 adalah sebagai berikut:

Iterasi	x	f(x)
1	0.881815	-0.00153183
2	0.882528	-1.27506e-005
3	0.882534	4.41217e-009
Akar persamaan di x = 0.882534		

3.7. Contoh Kasus Penyelesaian Persamaan Non Linier

Penyelesaian persamaan non linier terkadang muncul sebagai permasalahan yang terpisah, tetapi terkadang pula muncul sebagai satu kesatuan atau satu rantai dari penyelesaian permasalahan dimana penyelesaian persamaan non linier justru menjadi kunci dalam perhitungannya. Beberapa contoh permasalahan dimana memerlukan penyelesaian persamaan non linier sebagai kuncinya adalah sebagai berikut:

- Penentuan nilai maksimal dan minimal fungsi non linier
- Perhitungan nilai konstanta pada matrik dan determinan, yang biasanya muncul dalam permsalahan sistem linier, bisa digunakan untuk menghitung nilai eigen
- Penentuan titik potong beberapa fungsi non linier, yang banyak digunakan untuk keperluan perhitungan-perhitungan secara grafis.

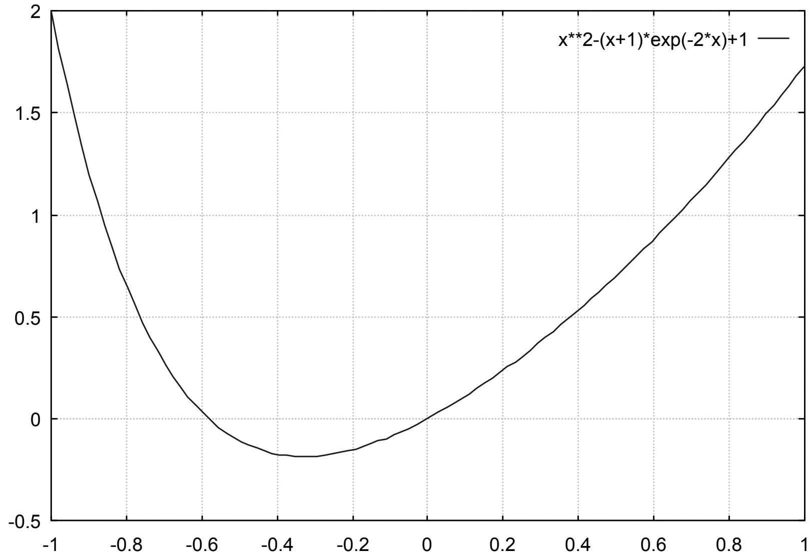
Dan masih banyak lagi yang lainnya dan tidak mungkin dapat dibahas semua dalam satu buku yang singkat ini.

3.7.1. Penentuan Nilai Maksimal dan Minimal Fungsi Non Linier

Penentuan nilai maksimal dan minimal pada fungsi non linier sebenarnya merupakan permasalahan penyelesaian persamaan non-linier. Pada penyelesaian persamaan non linier dengan fungsi f(x), maka dicari x yang memenuhi f(x)=0. Sedangkan pada penentuan nilai maksimal dan minimal dari fungsi f(x), yang dicari adalah nilai x yang memenuhi f'(x)=0.

Jadi sebelum menggunakan metode numerik untuk menentukan nilai maksimal dan nilai minimal pada fungsi f(x), maka terlebih dahulu dihitung g(x)=f'(x). Nilai fungsi g(x) inilah yang menjadi fungsi acuan untuk menentukan nilai x dimana g(x)=0. tetapi pemakaian metode numerik di sini tidak dapat menunjukkan apakah nilai yang dihasilkan adalah nilai maksimal atau nilai minimal, karena sifat maksimal dan minimal ditentukan oleh f''(x). Sehingga untuk menyajikan apakah titik yang diperoleh adalah titik maksimal atau titik minimal, maka perlu dihitung g'(x).

Contoh 3. 13:
Tentukan nilai minimal dari $f(x) = x^2-(x+1)e^{-2x}+1$



Dari gambar di atas nilai minimal terletak antara –0.4 dan –0.2

Untuk menentukan nilai minimal terlebih dahulu dihitung g(x)=f'(x)

$$g(x) = 2x - e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = 2x+ (2x+1)e^{-2x}$$

Jadi permasalahannya menjadi menyelesaikan persamaan :

$$2x+ (2x+1)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan metode Secant diperoleh :

```
Pendekatan awal di x0=-0.4 dan x1=-0.2
Toleransi error = 1e-005
Iterasi     x          f(x)
1           -0.316495  0.0581765
2           -0.332006  -0.0113328
3           -0.329477  0.000208218
4           -0.329523  7.28621e-007
Akar persamaan di x = -0.329523
```

Jadi nilai minimal fungsi f(x) terletak di x=-0.329523

3.7.2. Penentuan Nilai Eigen Pada Matrik

Nilai eigen pada suatu matrik A, merupakan nilai-nilai yang menyajikan karakteristik kestabilan matrik. Nilai eigen ini dapat dihitung menggunakan :

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

dimana I adalah matrik identitas dan λ adalah nilai eigen dari matrik A.
Bila matrik A mempunyai ukuran nxn maka akan terdapat n nilai λ yang disajikan dalam bentuk persamaan polinomial pangkat n sebagai berikut :

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + .. + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Untuk menentukan nilai λ merupakan permasalahan penyelesaian persamaan non linier.

Contoh 3. 14:
Tentukan nilai eigen dari :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan :

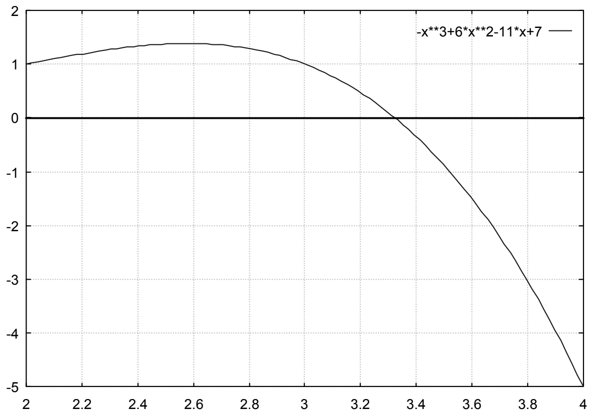
$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau bisa dituliskan dengan :

$$(2-\lambda)\{(3-\lambda)(1-\lambda)\} + 1 = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 7 = 0$$

Secara grafis bisa digambarkan :



Terlihat akar persamaan terletak pada x antara 3.2 dan 3.4

Dengan menggunakan metode secant diperoleh:

```
Pendekatan awal di x0 = 3.2 dan x1 = 3.4
Toleransi error = 1e-005
Iterasi     x          f(x)
1           3.31569    0.0381934
2           3.32411    0.00258307
3           3.32472    -2.18963e-005
4           3.32472    1.23711e-008
Akar persamaan di x = 3.32472
```

3.7.3. Menghitung Nilai Akar

Perhitungan nilai akar a dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan $f(x)=x^2-a$. Ini dapat dilakukan dengan menghitung penyelesaian dari persamaan :

$$x^2 - a = 0$$

Contoh 3. 15:
Menghitung akar 3 dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan :

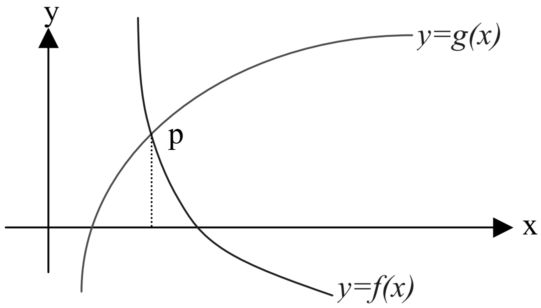
$$x^2 - 3 = 0$$

Dengan menggunakan metode secant diperoleh :

```
Pendekatan awal di x0 = 1 dan x1 = 2
Toleransi error = 1e-005
Iterasi    x          f(x)
1          1.66667    -0.222222
2          1.72727    -0.0165289
3          1.73214    0.000318878
4          1.73205    -4.40416e-007
Akar persamaan di x = 1.73205
```

3.7.3. Menghitung Titik Potong 2 Buah Kurva

Perhatikan dua buah kurva *y=f(x)* dan *y=g(x)* yang berpotongan di titik *p* seperti gambar berikut :



Untuk menentukan titik potong dua buah kurva di atas secara numerik maka pertama kali yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi dari persamaan dimana titik ptong didefinisikan dengan :

$$f(x) = g(x)$$

atau

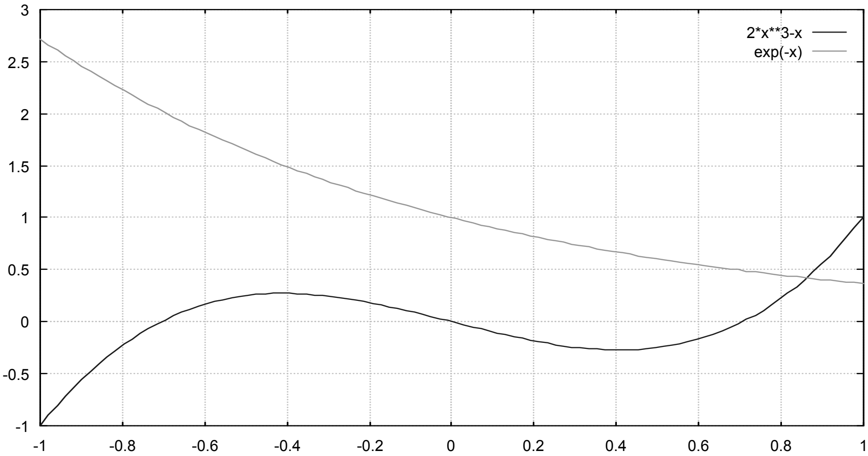
$$f(x) – g(x) = 0$$

Maka fungsi persamaannya adalah f(x)-g(x).

Contoh 3. 16:

Tentukan titik potong $y=2x^3-x$ dan $y=e^{-x}$

Perhatikan gambar kedua kurva tesebut sebgai berikut:



Dari gambar di atas terlihat akar terletak di antara 0.8 dan 1.

Dengan menggunakan metode Secant, terlebih dahulu disusun fungsi dari persamaannya adalah sebagai berikut:

$$y=2x^3-x - e^{-x}$$

Pemakaian metode secant dengan titik pendekatan awal 0,8 dan 1 adalah sebagai berikut:

```
Pendekatan awal di x0 = 0.8 dan x1 = 1
Toleransi error = 1e-005
i  x         f(x)
1  0.852558  -0.0395088
2  0.861231  -0.00628888
3  0.862873  8.36952e-005
4  0.862852  -1.73417e-007
Akar persamaan di x = 0.862852
```

3.8. TUGAS

(1) Hitung nilai akar 27 dan akar 50

(2) Hitung nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

(3) Tentukan nilai puncak pada kurva $y=x^2+e^{-2x}\sin(x)$ pada range x=[0,10]

(4) Gunakan metode newton raphson, regula falsi dan secant untuk menghitung akar 10. Perhatikan kesalahan dan jumlah iterasinya dan ambil kesimpulan.

(5) Tentukan titik potong lingkaran dengan titik pusat (1,0) dan jari-jari 2 dengan kurva $y=x^2$

(6) Tentukan titik potong antara $y=x.e^{-x}$ dan $y=x^2$ dengan menggunakan metode secant dan newton raphson. Bandingkan jumlah iterasi dan kesalahannya.

(7) Tentukan titik puncak dari $y=x.e^{-2x}$.

Bab 4
Penyelesaian Persamaan Linier Simultan

4.1. Persamaan Linier Simultan

Persamaan linier simultan adalah suatu bentuk persamaan-persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variabel bebas. Bentuk persamaan linier simultan dengan m persamaan dan n variabel bebas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

dimana:

a_{ij} untuk i=1 s/d m dan j=1 s/d n adalah koefisien atau persamaan simultan

x_i untuk i=1 s/d n adalah variabel bebas pada persamaan simultan

Penyelesaian persamaan linier simultan adalah penentuan nilai x_i untuk semua i=1 s/d n yang memenuhi semua persamaan yang diberikan.

Permasalahan persamaan linier simultan merupakan permasalahan yang banyak muncul ketika berhubungan dengan permasalahan *multi-variabel* dimana setiap persamaan merupakan bentuk persamaan linier atau dengan kata lain setiap variabel berpangkat paling besar satu. Persamaan linier simultan di atas dapat dinyatakan sebagai bentuk matrik yaitu :

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

atau dapat dituliskan:

A x = B

Dimana: $A\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} danB = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$

Matrik **A** dinamakan dengan Matrik Koefisien dari persamaan linier simultan, atau ada yang menamakan dengan matrik Jacobian. Vektor **x** dinamakan dengan vektor variabel (atau vektor keadaan) dan vektor **B** dinamakan dengan vektor konstanta.

Augmented Matrix (matrik perluasan) dari persamaan linier simultan adalah matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan menambahkan vector B pada kolom terakhirnya, dan dituliskan:

Augmented (A) = [A B]

Sehingga secara detail, augmented matrik dari persamaan linier simultan dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh permasalahan multi variabel adalah sebagai berikut :

Contoh permasalahan 1:

Seorang pembuat boneka ingin membuat dua macam boneka yaitu boneka A dan boneka B. Kedua boneka tersebut dibuat dengan menggunakan dua macam bahan yaitu potongan kain dan kancing. Boneka A membutuhkan 10 potongan kain dan 6 kancing, sedangkan boneka B membutuhkan 8 potongan kain dan 8 kancing. **Permasalahannya adalah berapa buah boneka A dan boneka B yang dapat dibuat dari 82 potongan kain dan 62 kancing ?**

Permasalahan ini dapat dimodelkan dengan menyatakan :

x = jumlah boneka A

y = jumlah boneka B

Untuk setiap bahan dapat dinyatakan bahwa:

Potongan kain → 10 untuk boneka A + 8 untuk boneka B = 82

Kancing → 6 untuk boneka A + 8 untuk boneka B = 62

Atau dapat dituliskan dengan :

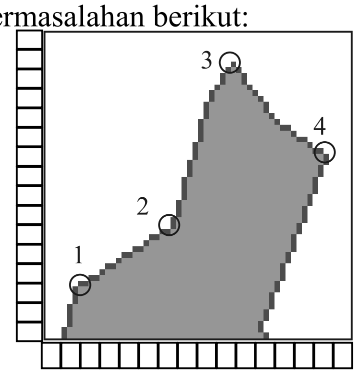
$$10x + 8y = 82$$
$$6x + 8y = 62$$

Penyelesaian dari permasalahan di atas adalah penentuan nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan di atas.

Contoh permasalahan 2:

Perhatikan potongan peta yang sudah diperbesar (*zoom*) sebagai berikut :

Sebagai contoh perhatikan permasalahan berikut:



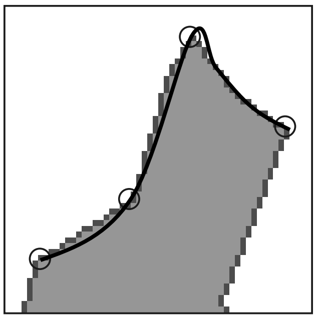
Perhatikan bahwa pada ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan dengan lebih halus.
Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

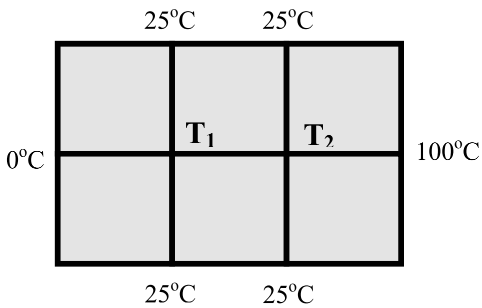
Titik 1 → 3 = 8 a + 4 b + 2 c + d
Titik 2 → 6 = 343 a + 49 b + 7 c + d
Titik 3 → 14 = 512 a + 64 b + 8 c + d
Titik 4 → 10 = 1728 a + 144 b + 12 c + d

Nilai a, b, c dan d adalah penyelesaian dari permasalahan di atas. Setelah nilai a, b, c dan d diperoleh maka persamaan polinomialnya didapatkan dan dengan menggunakan step x yang lebih kecil dapat digambarkan grafiknya dengan lebih halus.
Contoh hasilnya adalah sebagai berikut :



Permasalahan ini merupakan permasalahan **kurva fitting**, yang digunakan untuk menentukan persamaan polinomial yang paling sesuai untuk menyatakan fungsi dari data.

Contoh permasalahan 3 :
Diketahui panas beberapa titik pada plat baja yaitu pada sisi luar. Bila ditentukan bahwa aliran panas bergerak secara laminar dan panas pada sebuah titik adalah rata-rata panans dari 4 titik tetangganya, maka dapat dihitung panas pada titik T_1 dan T_2 sebagai berikut:



Persamaan panas pada titik T_1 dan T_2 dapat dihitung dengan:

$$T_1 = \tfrac{1}{4}(25 + 0 + 25 + T_2)$$
$$T_2 = \tfrac{1}{4}(25 + T_1 + 25 + 100)$$

Persamaan linier simultan dari permasalahan di atas adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 50 \\ -T_1 + 4T_2 &= 150 \end{aligned}}$$

Penyelesaian permasalahan di atas adalah nilai T_1 dan T_2 yang memenuhi kedua persamaan di atas.

Theorema 4.1.
Suatu persamaan linier simultan mempunyai penyelesaian tunggal bila memenuhi syarat-syarat sebagai berikut.

(1) Ukuran persamaan linier simultan bujursangkar, dimana jumlah persamaan sama dengan jumlah variable bebas.
(2) Persamaan linier simultan non-homogen dimana minimal ada satu nilai vector konstanta B tidak nol atau ada $b_n \neq 0$.
(3) Determinan dari matrik koefisien persamaan linier simultan tidak sama dengan nol.

Untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan persamaan linier simultan dapat dilakukan dengan menggunakan metode-metode analitik seperti pemakaian metode grafis, aturan Crammer, atau invers matrik. Metode-metode tersebut dapat dilakukan dengan mudah bila jumlah variabel dan jumlah persamaannya di bawah 4, tetapi bila ukurannya besar maka metode-metode di atsa menjadi sulit dilakukan, sehingga pemakaian metode numerik menjadi suatu alternatif yang banyak digunakan. Metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan linier simultan antara lain:

(1) Metode Eliminasi Gauss
(2) Metode Eliminasi Gauss-Jordan
(3) Metode Iterasi Gauss-Seidel

4.2. Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas. Cara eliminasi ini sudah banyak dikenal. Untuk menggunakan metode eliminasi Gauss ini, terlebih dahulu bentuk matrik diubah menjadi augmented matrik sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode eliminasi gauss, adalah suatu metode dimana bentuk matrik di atas, pada biagan kiri diubah menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \dots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \dots - c_{1n}x_n\right)$$

Operasi Baris Elementer (OBE) merupakan suatu operasional pengubahan nilai elemen matrik berdasarkan barisnya, tanpa mengubah matriknya. OBE pada baris ke-i+k dengan dasar baris ke i dapat dituliskan dengan :

$$a_{i+k,j} = a_{i+k,j} - c.a_{i,j}$$

dimana c adalah konstanta pengali yang diambil dari perbandingan nilai dari elemen $a_{i,i}$ dan $a_{i+k,i}$

Contoh 4.1:
Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Jawab:
Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{matrix} \\ B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh penyelesaian:

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A

(3) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n, perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :

Bila ya :

pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

Bila tidak : lanjutkan

(4) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

Lakukan operasi baris elementer:

- Hitung $c = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$
- Untuk kolom k dimana k=1 s/d n+1
  hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

(5) Hitung akar, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - a_{i,n}x_n\right)$$

dimana nilai i+k≤n

<u>*Catatan:*</u>

Metode eliminasi gauss ini sebenarnya merupakan metode elimniasi yang sering digunakan dalam perhitungan manual, hanya saja tekniknya menggunakan model penulisan persamaan bukan menggunakan augmented matrik.

4.3. Metode Eliminasi Gauss Jordan

Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \ldots, x_n = d_n$$

Teknik yang digunakan dalam metode eliminasi Gauss-Jordan ini sama seperti metode eliminasi Gauss yaitu menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer). Hanya perhitungan penyelesaian secara langsung diperoleh dari nilai pada kolom terakhir dari setiap baris.

Contoh 4.2 :

Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

<u>Jawab:</u>

Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan linier simultan tersebut adalah:

$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A

(4) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n

(a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :

Bila ya :

pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

Bila tidak : lanjutkan

(b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana k=1 s/d n+1, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$

(6) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

Lakukan operasi baris elementer: untuk kolom k dimana k=1 s/d n

Hitung $c = a_{j,i}$

Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

(7) Penyelesaian, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$x_i = a_{i,n+1}$

4.4. Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode interasi Gauss-Seidel adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah. Bila diketahui persamaan linier simultan:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & ... & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & ... & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & ... & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & ... & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Berikan nilai awal dari setiap x_i (i=1 s/d n) kemudian persamaan linier simultan diatas dituliskan menjadi:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - .... - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{2^2}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - .... - a_{2n}x_n\right)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - .... - a_{nn-1}x_{n-1}\right)$$

Dengan menghitung nilai-nilai x_i (i=1 s/d n) menggunakan persamaan-persamaan di atas secara terus-menerus hingga nilai untuk setiap x_i (i=1 s/d n) sudah sama dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya maka diperoleh penyelesaian dari persamaan linier simultan tersebut. Atau dengan kata lain proses iterasi dihentikan bila selisih nilai x_i (i=1 s/d n) dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai tolerasi error yang ditentukan.

Catatan:

Hati-hati dalam menyusun sistem persamaan linier ketika menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel ini. Perhatikan setiap koefisien dari masing-masing x_i pada semua persamaan di diagonal utama (a_{ii}). Letakkan nilai-nilai terbesar dari koefisien untuk setiap x_i pada diagonal utama. Masalah ini adalah '**masalah pivoting**' yang harus benar-

benar diperhatikan, karena penyusun yang salah akan menyebabkan iterasi menjadi divergen dan tidak diperoleh hasil yang benar.

Contoh 4.3:

Selesaikan sistem persamaan linier:

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

Jawab:

Berikan nilai awal : $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$

Susun persamaan menjadi:

$$x_1 = 5 - x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2x_1)$$

iterasi 1 :

$$x_1 = 5 - 0 = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.5) = 1$$

iterasi 2 :

$$x_1 = 5 - 1 = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.4) = \frac{3}{2}$$

iterasi 3 :

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

iterasi 4 :

$$x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

iterasi 5 :

$$x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{25}{8}\right) = \frac{31}{16}$$

iterasi 6 :

$$x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32}$$

iterasi 7 :

$$x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{97}{32}\right) = \frac{127}{64}$$

Nilai interasi ke-7 sudah tidak berbeda jauh dengan nilai interasi ke-6 maka proses dihentikan dan diperoleh penyelesaian:

$$x_1 = \frac{97}{32} \text{ dan } x_2 = \frac{127}{64}$$

Algoritma Metode Iterasi Gauss-Seidel adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan matrik **A**, dan vektor **B** beserta ukurannya *n*
(2) Tentukan batas maksimum iterasi *max_iter*
(3) Tentukan toleransi error ε
(4) Tentukan nilai awal dari x_i, untuk i=1 s/d n
(5) Simpan x_i dalam s_i, untuk i=1 s/d n
(6) Untuk i=1 s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j\right)$$

$$e_i = \left| x_i - s_i \right|$$

(7) iterasi ← iterasi+1
(8) Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i < \varepsilon$ untuk i=1 s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah x_i untuk i=1 s/d n. Bila tidak maka ulangi langkah (5)

4.5. Contoh Penyelesaian Permasalahan Persamaan Linier Simultan

```
Contoh Kasus 1:
Permasalahan penentuan produk berdasarkan persediaan bahan
```

Mr.X membuat 2 macam boneka A dan B. Boneka A memerlukan bahan 10 blok B1 dan 2 blok B2, sedangkan boneka B memerlukan bahan 5 blok B1 dan 6 blok B2. Berapa jumlah boneka yang dapat dihasilkan bila tersedia 80 blok bahan B1 dan 36 blok bahan B2.

Model Sistem Persamaan Linier :

Variabel yang dicari adalah jumlah boneka, anggap:

x_1 adalah jumlah boneka A
x_2 adalah jumlah boneka B

Perhatikan dari pemakaian bahan :

B1: 10 bahan untuk boneka A + 5 bahan untuk boneka B = 80
B2: 2 bahan untuk boneka A + 6 bahan untuk boneka B = 36
Diperoleh model sistem persamaan linier

$$10\, x_1 + 5\, x_2 = 80$$
$$2\, x_1 + 6\, x_2 = 36$$

Penyelesaian dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

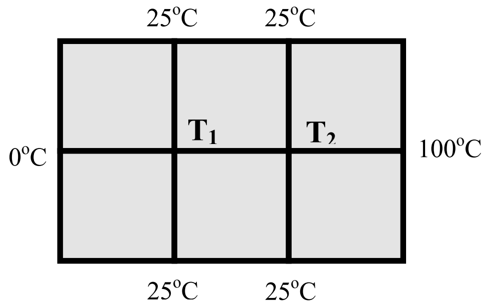
Augemented Matrik	10	5	80

	2	6	36
B1 <-- B1/10	1	0,5	8
	2	6	36
B2 <-- B2 - 2 B1	1	0,5	8
	0	5	20
B2 <-- B2/5	1	0,5	8
	0	1	4
B1 <-- B1 - 0,5 B2	1	0	6
	0	1	4

Diperoleh $x_1 = 6$ dan $x_2 = 4$, artinya bahan yang tersedia dapat dibuat 6 boneka A dan 4 boneka B.

Contoh Kasus 2:
Permasalahan aliran panas pada plat baja

Diketahui panas beberapa titik pada plat baja yaitu pada sisi luar. Bila ditentukan bahwa aliran panas bergerak secara laminar dan panas pada sebuah titik adalah rata-rata panans dari 4 titik tetangganya, maka dapat dihitung panas pada titik T_1 dan T_2 sebagai berikut:



Persamaan panas pada titik T_1 dan T_2 dapat dihitung dengan:

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\left(25 + 0 + 25 + T_2\right)$$
$$T_2 = \tfrac{1}{4}\left(25 + T_1 + 25 + 100\right)$$

Sistem persamaan linier dari permasalahan di atas adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 50 \\ -T_1 + 4T_2 &= 150 \end{aligned}}$$

Penyelesaian dengan menggunakan iterasi Gauss-Seidel, terlebih dahulu ditentukan nilai pendekatan awal $T_1=0$ dan $T_2=0$ dan fungsi pengubahnya adalah :

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(50 + T_2\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(150 + T_1\right)$$

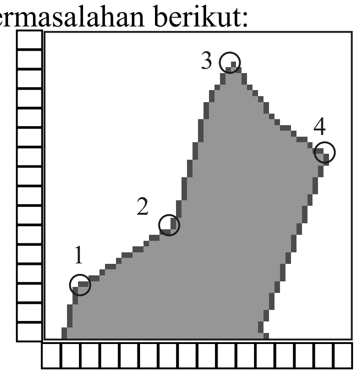
Diperoleh hasil perhitungan untuk toleransi error 0.0001 sebagai berikut:

Iterasi	x1	x2	e1	e2
0	0	0	-	-
1	12,5	40,625	12,5	40,625
2	22,65625	43,16406	10,15625	2,539063
3	23,29102	43,32275	0,634766	0,158691
4	23,33069	43,33267	0,039673	0,009918
5	23,33317	43,33329	0,00248	0,00062
6	23,33332	43,33333	0,000155	3,87E-05
7	23,33333	43,33333	9,69E-06	2,42E-06

Jadi temperatur pada T_1=23,3333 dan T_2=43,3333

Contoh Kasus 3:
Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

Perhatikan potongan peta yang sudah diperbesar (*zoom*) sebagai berikut :
Sebagai contoh perhatikan permasalahan berikut:



Perhatikan bahwa pada ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan dengan lebih halus.
Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

Titik 1 → 3 = 8 a + 4 b + 2 c + d
Titik 2 → 6 = 343 a + 49 b + 7 c + d
Titik 3 → 14 = 512 a + 64 b + 8 c + d
Titik 4 → 10 = 1728 a + 144 b + 12 c + d

Dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan diperoleh :

Augmented Matrik	------>	8	4	2	1	3
		343	49	7	1	6
		512	64	8	1	14
		1728	144	12	1	10
B1 = B1/8	------>	1	0,5	0,25	0,125	0,375

B2 = B2 - 343 B1		0	-122,5	-78,75	-41,88	-122,6
B3 = B3 - 512 B1		0	-192	-120	-63	-178
B4 = B4 - 1728 B1		0	-720	-420	-215	-638

B2 = B2/(-122,5)	------>	1	0	-0,071	-0,046	-0,126
B1 = B1 - 0,5 B2		0	1	0,6429	0,3418	1,001
B3 = B3 + 192 B2		0	0	3,4286	2,6327	14,196
B4 = B4 + 720 B2		0	0	42,857	31,122	82,735

B3 = B3/3,4286	------>	1	0	0	0,0089	0,1702
B1 = B1 + 0,071 B3		0	1	0	-0,152	-1,661
B2 = B2 - 0,6429 B3		0	0	1	0,7679	4,1405
B4 = B4 - 42,857 B3		0	0	0	-1,786	-94,71

B4 = B4/(-1,786)	------>	1	0	0	0	-0,303
B1 = B1 - 0,0089 B4		0	1	0	0	6,39
B2 = B2 + 0,152 B4		0	0	1	0	-36,59
B3 = B3 + 0,7679 B4		0	0	0	1	53,04

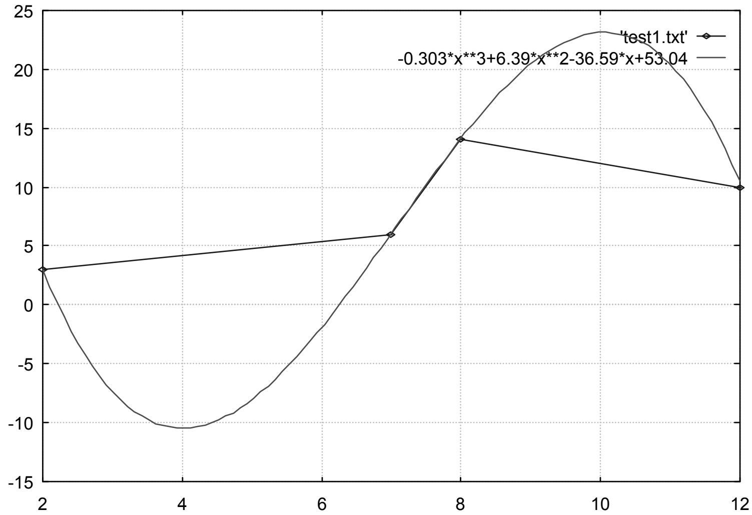
Dengan demikian diperoleh :

$a = -0{,}303$
$b = 6{,}39$
$c = -36{,}59$
$d = 53{,}04$

dan persamaan polinomial yang diperoleh :

$y = -0{,}303\, x^3 + 6{,}39\, x^2 - 36{,}59\, x + 53{,}04$

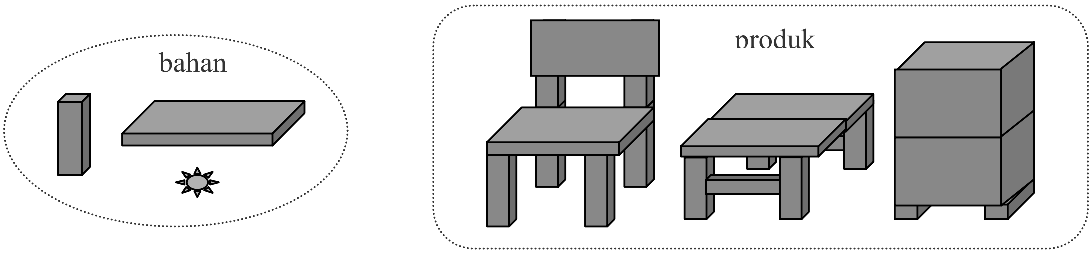
Hasil penghalusan kurva adalah sebagai berikut:



Hasilnya memang belum tampak bagus, hal ini disebabkan pengambilan titiknya yang terlalu jauh dan tingkat polinomial yang belum memenuhi syarat terbaiknya. Hanya saja kurva tersebut benar-benar melewati 4 titik yang ditentukan.

4.6. TUGAS

(1) Sebuah industri garmen membuat tiga macam produk yaitu kursi, meja dan lemari. Produk-produk tersebut membutuhkan tiga jenis bahan yaitu kayu papan, kayu ring dan paku penguat. Perhatikan contoh produknya sebagai berikut :



Spesifikasi produk:

- 1 kursi membutuhkan 2 kayu papan, 6 ring dan 10 paku.
- 1 meja membutuhkan 2 kayu papan, 6 ring dan 12 paku
- 1 lemari membutuhkan 10 kayu papan, 10 ring dan 20 paku

Berapa jumlah meja, kursi dan lemari yang dapat dibuat bila tersedia 108 kayu papan, 204 kayu ring dan 376 paku ?

(2) Seorang petani ingin menanam padi, jagung dan ketela di atas tanahnya seluas 12 hektare. Dengan ketentuan:

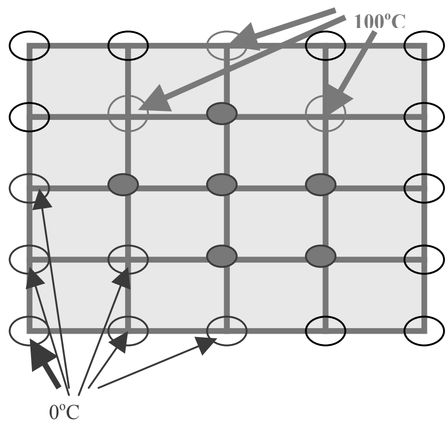
- Untuk setiap hektare padi membutuhkan 10 kg pupuk urea dan 6 kg pestisida.
- Untuk setiap hektare jagung membutuhkan 8 kg pupuk urea dan 4 kg pestisida
- Untuk setiap hektare ketela pohon membutuhkan 5 kg pupuk urea dan 3 kg pestisida

Berapa hektare padi, jagung dan ketela yang harus ditanam bila tersedia 97 kg pupuk uera dan 55 kg pestisida ?

(3) Temperatur Pada Plat Baja

- Plat diletakkan pada temperatur ruang 25^{o}C dengan komposisi seperti gambar di samping.
- Temperatur pada setiap titik dipengaruhi oleh 8 titik sekitarnya dari arah atas, bawah, kiri, kanan, dan diagonal.

Berapa temperatur pada titik hijau bila lingkaran hitam adalah temperatur ruang



BAB 5
DIFFERENSIASI NUMERIK

5.1. Permasalahan Differensiasi Numerik

Salah satu perhitungan kalkulus yang banyak digunakan adalah differensial, dimana differensial ini banyak digunakan untuk keperluan perhitungan geometrik.Dan perhitungan-perhitungan yang berhubungan dengan perubahan nilai per-satuan waktu atau jarak.Secara kalkulus, differensial didefinisikan sebagai perbandingan perubahan tinggi (selisih tinggi) dan perubahan jarak, dan dituliskan dengan :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{ax \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Hampir semua fungsi kontinu dapat dihitung nilai differensialnya secara mudah, sehingga dapat dikatakan metode numerik dianggap tidak perlu digunakan untuk keperluan perhitungan differensial ini.Masalahnya seiring dengan perkembangannya pemakaian komputer sebagai alat hitung dan pada banyak permasalahan differensial adalah salah satu bagian dari penyelesaian, sebagai contoh metode newton raphson memerlukan differensial sebagai pembagi nilai perbaikan errornya, sehingga metode newton raphson ini hanya bisa dilakukan bila nilai differensialnya bisa dihitung.

Contoh lainnya adalah penentuan titik puncak kurva y = f(x) yang dinamakan titik maksimal dan titik minimal, juga memerlukan titik differensial sebagai syarat apakah titik tersebut sebagai titik puncak.Dimana didefinisikan bahwa suatu titik dinamakan titik puncak bila differensial $\frac{dy}{dx}$ pada titik tersebut adalah 0.

Pada beberapa permasalahan, nilai differensial dapat dihitung secara manual.Misalkan diketahui $f(x) = xe^{-x} + \cos x$ maka differensialnya adalah $F^1(x) = (1-x)\, e^{-x} - \sin x$.Tetapi pada permasalahan lain nilai fungsi sulit diselesaikan secara manual.Terutama jika fungsinya hanya diketahui berupa nilai atau grafis. Misalkan menghitung puncak distribusi data yang berupa distribusi poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

Menghitung differensial ini tidak mudah, disinilah metode numerik dapat digunakan.
Hubungan antara nilai fungsi dan perubahan fungsi untuk setiap titiknya didefinisikan dengan :

$$y = f(X) + f^1(x).h(x)$$

dan $F^1(x)$ didefinisikan dengan :

$$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dari formulasi ini dapat diturunkan beberapa metode differensiasi numerik, antara lain :
*. Metode Selisih Maju
*. Metode Selisih Tengahan

5.2. Metode Selisih Maju

Metode selisih maju merupakan metode yang mengadopsi secara langsung definisi differensial, dan dituliskan :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil, karena metode ini mempunyai error sebesar :

$$E(f) = -\frac{1}{2} h f^{11}(x)$$

Contoh 5.1:

Hitung differensial $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

X	f(x)	f'(x)	eksak	error
0	1	-	1	-
0.05	1.04754	0.950833	0.902499	0.0483341
0.1	1.09033	0.855827	0.809984	0.0458431
0.15	1.12862	0.765792	0.722421	0.0433711
0.2	1.16266	0.680682	0.639754	0.040928
0.25	1.19268	0.600434	0.561911	0.0385228
0.3	1.21893	0.524967	0.488804	0.0361632
0.35	1.24164	0.454185	0.420329	0.0338562
0.4	1.26103	0.387978	0.356371	0.0316077
0.45	1.27735	0.326227	0.296804	0.0294228
0.5	1.29079	0.2688	0.241494	0.0273059
0.55	1.30156	0.21556	0.1903	0.0252606
0.6	1.30988	0.166361	0.143071	0.0232898
0.65	1.31594	0.121053	0.0996572	0.0213958
0.7	1.31991	0.0794806	0.0599004	0.0195802
0.75	1.32198	0.0414863	0.023642	0.0178443
0.8	1.32233	0.00691036	-0.009278	0.0161887
0.85	1.32111	-0.0244081	-0.0390218	0.0146137
0.9	1.31848	-0.0526302	-0.0657492	0.013119
0.95	1.31458	-0.0779162	-0.0896204	0.0117042
1	1.30956	-0.100425	-0.110794	0.0103684

```
Rata-rata error adalah 0.0737486
```

5.3. Metode Selisih Tengahan

Metode selisih tengahan merupakan metode pengambilan perubahan dari dua titik sekitar dari titik yang diukur.Perhatikan selisih maju pada titik x-h adalah :

$$f_1^1(x-h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Dan selisih maju pada titik x adalah :

$$f_2^1(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Metode selisih tengahan merupakan rata-rata dari dua selisih maju :

$$f^1(x) = \frac{f_1^1(x) + f_2^{1(x)}}{2}$$

Atau dituliskan :

$$f^{1}(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Kesalahan pada metode ini adalah :

$$E(f) = -\frac{h^2}{6} f^{111}(\eta)$$

Metode selisih tengahan ini yang banyak digunakan sebagai metode differensiasi numerik.

Contoh 5.2 :

Hitung differensial $f(x)=e^{-x}sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f′(x)	eksak	error
0	1	1.00083	1	0.000833125
0.05	1.04754	0.90333	0.902499	0.000831131
0.1	1.09033	0.810809	0.809984	0.000825373
0.15	1.12862	0.723237	0.722421	0.000816238
0.2	1.16266	0.640558	0.639754	0.000804089
0.25	1.19268	0.562701	0.561911	0.000789273
0.3	1.21893	0.489576	0.488804	0.000772113
0.35	1.24164	0.421082	0.420329	0.000752913
0.4	1.26103	0.357103	0.356371	0.00073196
0.45	1.27735	0.297514	0.296804	0.000709519
0.5	1.29079	0.24218	0.241494	0.000685839
0.55	1.30156	0.190961	0.1903	0.00066115
0.6	1.30988	0.143707	0.143071	0.000635667
0.65	1.31594	0.100267	0.0996572	0.000609585
0.7	1.31991	0.0604834	0.0599004	0.000583086
0.75	1.32198	0.0241983	0.023642	0.000556336
0.8	1.32233	-0.00874888	-0.00927837	0.000529485
0.85	1.32111	-0.0385191	-0.0390218	0.000502671
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.0657492	0.000476018
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.0896204	0.000449637
1	1.30956	-0.11037	-0.110794	0.000423628
Rata-rata error = 0.000665659				

5.4. Differensiasi Tingkat Tinggi

Defferensiasi tingkat tinggi merupakan proses pendefferensialan secara terus-menerus, hingga tingkatan yang ditentukan.

(1) Differensial tingkat 2 adalah :

$$f''(x) = f'\{f'(x)\}$$

(2) Differensial tingkat 3 adalah :

$$f^{(3)}(x) = f'\{f''(x)\}$$

(3) Differensial tingkat n adalah :

$$f^{(n)}(x) = f^{1}\{f^{n-1}(x)\}$$

Dapat dituliskan :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right\}$$

Untuk menghitung differensial tingkat tinggi ini dapat digunakan metode differensiasi yang merupakan pengembangan metode selisih tengahan yaitu :

Differensiasi tingkat 2

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(a+h)}{h^2}$$

Untuk menghitung differensial tingkat 2 ini maka diambil h yang kecil, karena error dari metode ini :

$$\mathrm{E}(f) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\eta)$$

Kesalahan ini dinamakan kesalahan diskritisasi.

Contoh 5.4:

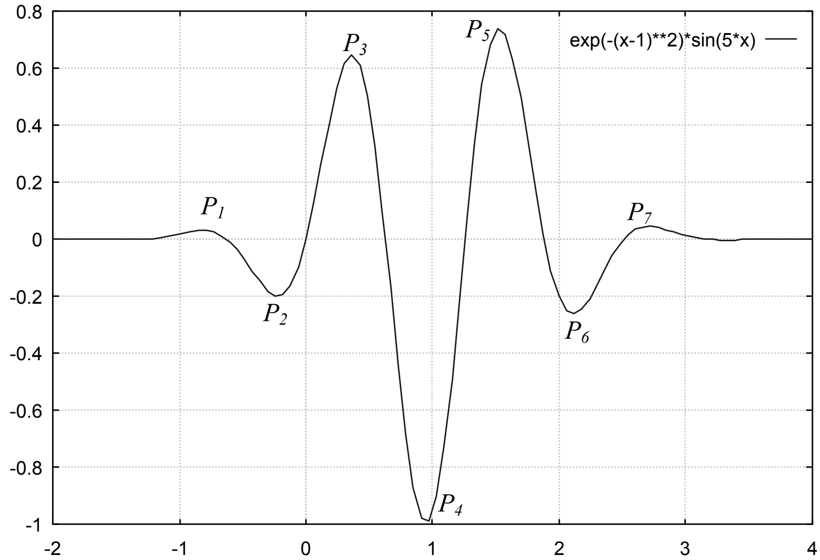
Hitung differensial kedua dari $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f″(x)	eksak	error
0	1	-2	-2	1.38889e-007
0.05	1.04754	-1.90012	-1.90008	3.94861e-005
0.1	1.09033	-1.80071	-1.80063	7.51525e-005
0.15	1.12862	-1.70219	-1.70209	0.000107067
0.2	1.16266	-1.60496	-1.60482	0.000135436
0.25	1.19268	-1.50934	-1.50918	0.000160461
0.3	1.21893	-1.41564	-1.41546	0.000182341
0.35	1.24164	-1.32413	-1.32393	0.000201271
0.4	1.26103	-1.23503	-1.23481	0.000217443
0.45	1.27735	-1.14853	-1.1483	0.000231042
0.5	1.29079	-1.0648	-1.06456	0.000242248
0.55	1.30156	-0.983979	-0.983728	0.000251235
0.6	1.30988	-0.906166	-0.905908	0.000258172
0.65	1.31594	-0.831448	-0.831184	0.000263221
0.7	1.31991	-0.759885	-0.759619	0.000266538
0.75	1.32198	-0.691519	-0.691251	0.000268271
0.8	1.32233	-0.62637	-0.626101	0.000268564
0.85	1.32111	-0.564441	-0.564173	0.000267551
0.9	1.31848	-0.505721	-0.505456	0.000265362
0.95	1.31458	-0.450184	-0.449921	0.00026212
1	1.30956	-0.39779	-0.397532	0.000257939
Rata-rata error = 0.000201003				

5.5. Pemakaian Differensiasi Untuk Menentukan Titik Puncak Kurva

Salah satu pemakaian differensial yang paling banyak dibicarakan adalah penentukan titik puncak kurva, dimana titik puncak (tertinggi atau terendah) diperoleh dengan memanfaatkan nilai differensial dari kurva pada setiap titik yang ditinjau.

Perhatikan kurva y = f(x) seperti gambar berikut :



Kurva tersebut mempunyai 7 titik puncak, yaitu $p_{1,}p_2,p_3,p_4,p_5,p_6$ dan p_7.Titik puncak p_1,p_3,p_5 dan p_7 dinamakan titik puncak maksimum.Titik puncak p_2,p_4 dan p_6 dinamakan titik puncak minimum.

Untuk menentukan titik puncak perhatikan definisi berikut :

Definisi 5.1.
Suatu titik a pada kurva y = f(x) dinamakan titik puncak bila dan hanya bila : $f^{l}(a) = 0$.
Definisi 5.2.
Sebuah titik puncak a dikatakan titik maksimum pada kurva y = f(x) bila : $f^{11}(a) < 0$.
Definisi 5.3.
Sebuah titik puncak a dikatakan titik minimum pada kurva y = F(x) bila : $f^{11}(a) > 0$.

Dari definisi-definisi di atas, maka untuk menentukan titik puncak kurva y = f(x) secara numerik adalah menentukan titik-titik dimana $f'(x) = 0$, kemudian dihitung apakah f'(x)>0 atau $f''(x)<0$ untuk menentukan apakah titik tersebut titik puncak maksimal atau titik puncak minimal.

Contoh 5.5.
Tentukan titik-titik puncak dari kurva $y = x^3\text{-}2x^2\text{-}x$ dengan mengambil range $[-1,1]$

x	f(x)	f'(x)	f"(x)
-1	-1.28736	3.75537	-2.93548
-0.95	-1.10326	3.60682	-3.00637
-0.9	-0.926673	3.45525	-3.05622
-0.85	-0.757731	3.30168	-3.08679
-0.8	-0.596505	3.14702	-3.09977
-0.75	-0.443029	2.9921	-3.09677

x	f(x)	f'(x)	f"(x)
-0.7	-0.297295	2.8377	-3.07932
-0.65	-0.159259	2.68449	-3.0489
-0.6	-0.0288457	2.5331	-3.00686
-0.55	0.0940508	2.38407	-2.95453
-0.5	0.209561	2.23787	-2.89312
-0.45	0.317838	2.09495	-2.8238
-0.4	0.419056	1.95567	-2.74764
-0.35	0.513405	1.82033	-2.66566
-0.3	0.601089	1.68922	-2.57881
-0.25	0.682327	1.56255	-2.48795
-0.2	0.757345	1.44051	-2.39391
-0.15	0.826378	1.32322	-2.29743
-0.1	0.889667	1.21081	-2.19921
-0.05	0.947458	1.10333	-2.09987
0	1	1.00083	-2
0.05	1.04754	0.90333	-1.90012
0.1	1.09033	0.810809	-1.80071
0.15	1.12862	0.723237	-1.70219
0.2	1.16266	0.640558	-1.60496
0.25	1.19268	0.562701	-1.50934
0.3	1.21893	0.489576	-1.41564
0.35	1.24164	0.421082	-1.32413
0.4	1.26103	0.357103	-1.23503
0.45	1.27735	0.297514	-1.14853
0.5	1.29079	0.24218	-1.0648
0.55	1.30156	0.190961	-0.983979
0.6	1.30988	0.143707	-0.906166
0.65	1.31594	0.100267	-0.831448
0.7	1.31991	0.0604834	-0.759885
0.75	**1.32198**	**0.0241983**	**-0.691519**
0.8	**1.32233**	**-0.008748**	**-0.62637**
0.85	1.32111	-0.038519	-0.564441
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.505721
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.450184
1	1.30956	-0.11037	-0.39779

Terlihat bahwa nilai puncak terjadi antara 0.75 dan 0.8, karena nilai f'(x) mendekati nol. Pada nilai tersebut terlihat nilai f"(x)<0 maka nilai puncak tersebut adalah nilai puncak maksimum.

5.6. Tugas

1. Tentukan titik maksimal dan titik minimal dari fungsi :

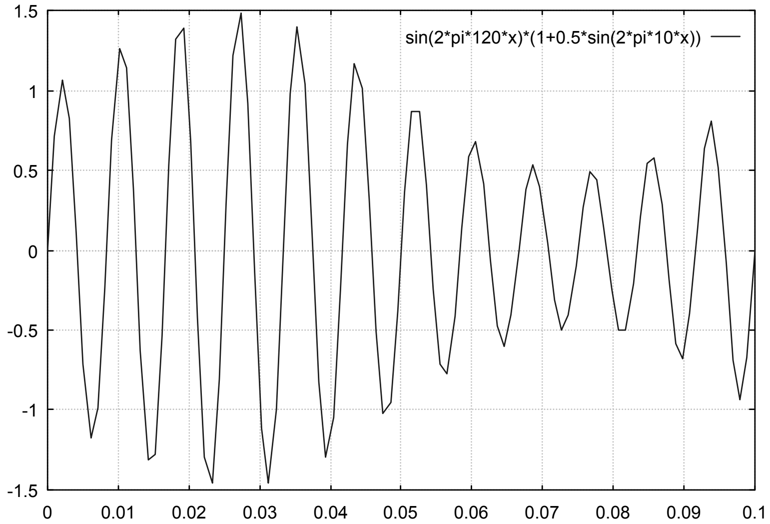
   $$f(x) = \frac{e^{-x}}{2+\sin(2x)}$$

   pada range [1,10] dengan h=0.1 dan h=0.01

2. Tentukan differensial pertama dari sinyal AM dengan frekwensi informasi 10 Hz dan frekwensi pembawa 120 Hz pada range [0,0.1] dengan h=0.001
   Fungsi sinyal AM dengan frekwensi informasi f dan frekwensi pembawa f_s adalah :

$$y(t) = \sin(2\pi f_s t)\{1 + a\sin(2\pi f t)\}$$

dimana a adalah konstanta modulasi, untuk soal ini a=0.5

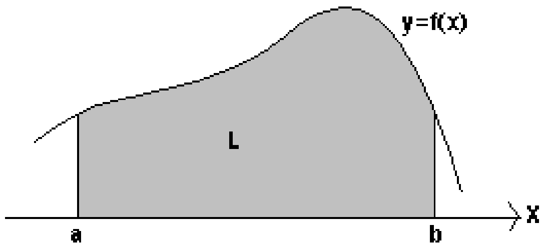


3. Tentukan titik-titik puncak pada sinyal AM di atas, bedakan antara titik puncak maksimal dan titik puncak minimal. Hitung berapa jumlah titik puncak maksimal dan titik puncak minimal.
   Untuk titik puncak maksimal, bandingkan hasilnya dengan fungsi :
   $$y(t) = 1 + 0.5\sin(2\pi f t)$$
   dimana f adalah frekwensi sinyal informasi

BAB 6
INTEGRASI NUMERIK

6.1. Permasalahan Integrasi

Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus, dalam banyak keperluan. Integral ini secara definitif digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh fungsi y = f(x) dan sumbu x. Perhatikan gambar berikut :



Luas daerah yang diarsir L dapat dihitung dengan :

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

Pada beberapa permasalahan perhitungan integral ini, dapat dihitung secara manual dengan mudah, sebagai contoh :

$$\int_0^1 \left(x^2 + e^x\right)dx$$

Secara manual dapat dihitung dengan :

$$\int_0^1 \left(x^2 + e^x\right)dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + e^x \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(1-0) + (e-1)$$

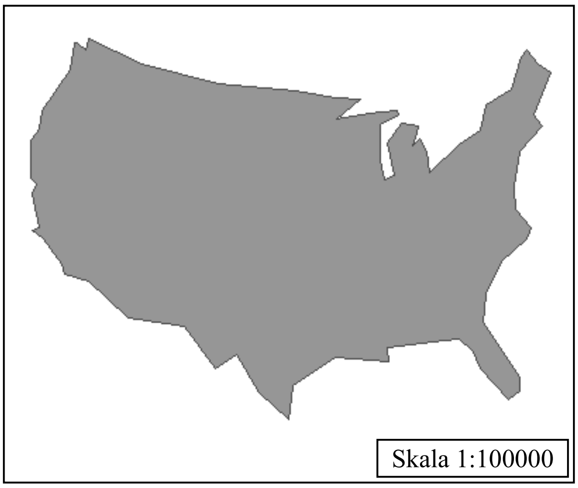
$$= \frac{1}{3} + e - 1 = e - \frac{2}{3}$$

Tetapi pada banyak permasalahan, integral sulit sekali dihitung bahkan dapat dikatakan tidak dapat dihitung secara manual, sebagai contoh :

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

Dalam hal ini, metode numerik dapat digunakan sebagai alternatif untuk menyelesaikan integral di atas.

Pada penerapannya, perhitungan integral ini digunakan untuk menghitung luas area pada peta, volume permukaan tanah, menghitung luas dan volume-volume benda putar dimana fungsi f(x) tidak ditulis, hanya digunakan gambar untuk menyajikan nilai f(x). Sebagai contoh, diketahui photo daerah sebagai berikut :



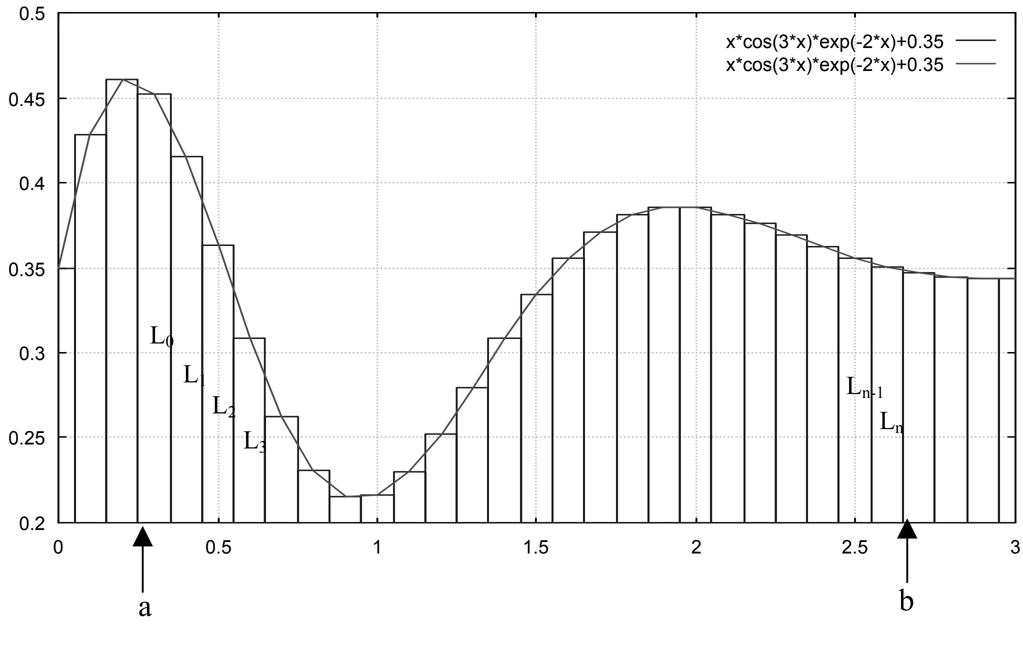
Untuk menghitung luas daerah yang diarsir L, perlu digunakan analisa numerik.Karena polanya disajikan dalam gambar dengan faktor skala tertentu.

6.2. Metode Integral Reimann

Metode integral Reimann ini merupakan metode integral yang digunakan dalam kalkulus, dan didefinisikan dengan :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Pada metode ini, luasan yang dibatasi oleh y = f(x) dan sumbu x dibagi menjadi N bagian pada range x = $[a,b]$ yang akan dihitung.Kemudian dihitung tinggi dari setiap 3 tep ke-I yaitu $f(x_i)$.L_i adalah luas setiap persegi panjang dimana L_i=$f(x_i)$. Δx_i



Luas keseluruhan adalah jumlah L_i dan dituliskan :

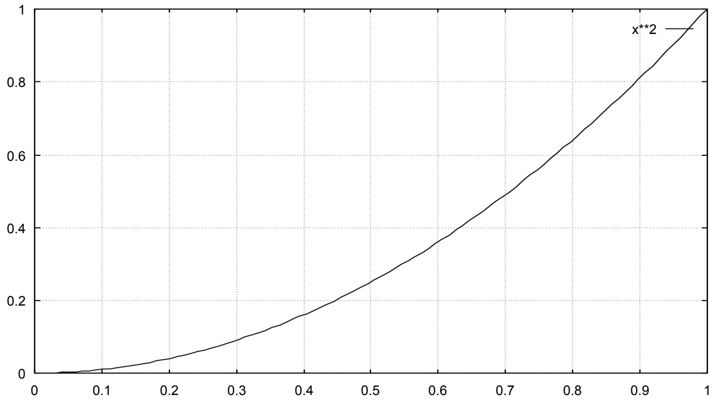
$$L = L_0 + L_1 + L_2 + .. + L_n$$
$$= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_n)\Delta x_3$$
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Bila diambil $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = L$ maka didapat metode integral reimam sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Contoh:

Hitung luas yang dibatasi y = x^2 dan sumbu x untuk range x = $[0,1]$



L = $\int_0^1 x^2 dx$

Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\int_{n=0}^{10} f(x_i)$$
$$= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00)$$
$$= (0.1)(3{,}85) = 0{,}385$$

Secara kalkulus :

$$L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \,|_0^1 = 0{,}3333.....$$

Terdapat kesalahan e = 0,385-0,333
= 0,052

Untuk mengurangi kesalahan dapat dilakukan dengan memperkecil nilai h atau memperbesar jumlah pembagi N.

Algoritma Metode Integral Reimann:

(1) Definisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan batas bawah dan batas ata integrasi

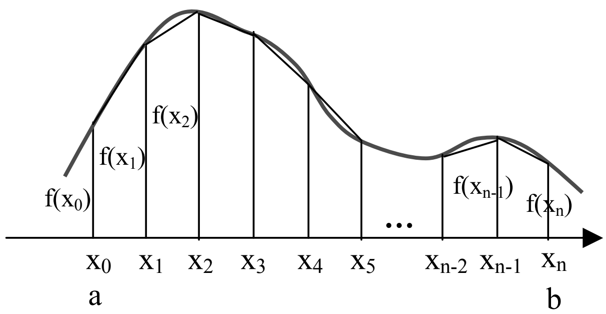
(3) Tentukan jumlah pembagi area N

(4) Hitung h=(b-a)/N

(5) Hitung $L = h.\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$

6.3. Metode Integrasi Trapezoida

Pada metode integral Reimann setiap daerah bagian dinyatakan sebagai empat persegi panjang dengan tinggi f(x_i) dan lebar Δx_i.Pada metode trapezoida ini setiap bagian dinyatakan sebagai trapezium seperti gambar berikut :



Luas trapezium ke-i (L_i) adalah :

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).\Delta x_i$$

atau

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right).\Delta x_i$$

Dan luas keseluruhan dihitung dengan menjumlahkan luas dari semua bagian trapezium.

$$L = \sum_{i=0}^{\eta-1} L_i$$

sehingga diperoleh :

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h\left(f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

Contoh:

Hitung $\int_0^1 2x^3 dx$ dengan step h=0.1

Dengan menggunakan tabel diperoleh:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	0	0,002	0,016	0,054	0,128	0,25	0,432	0,686	1,024	1,458	2

Dengan menggunakan tabel ini, dapat dihitung :

$$L = \frac{0,1}{2}\left\{0 + 2\left(0,002 + 0,016 + 0,054 + 0,128 + ... + 1,024 + 1,458\right) + 2\right\} = 0,505$$

Dengan menggunakan perhitungan kalkulus:

$$L = \int_0^1 2x^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = 0,5$$

Dengan h=0,1 terjadi kesalahan 0,005

Contoh:

Hitung $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{2+\sin(x)} dx$ dengan step h=0.1

Dengan menggunakan tabel diperoleh:

x	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
f(x)	0,500	0,431	0,372	0,323	0,281	0,245	0,214	0,188	0,165	0,146	0,129

Dari tabel di atas dapat dihitung :

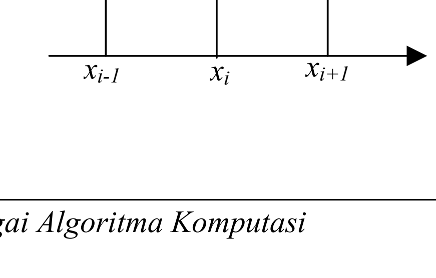
$$L = \frac{0.1}{2}\left(0.,5 + (2)(0,431) + (2)(0,372) + (2)(0,323) + ... + (2)(0,146) + 0,129\right) = 0,2679$$

Algoritma Metode Integrasi Trapezoida adalah:

(1) Definisikan y=f(x)
(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
(3) Tentukan jumlah pembagi n
(4) Hitung h=(b-a)/n
(5) Hitung $L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$

6.4. Metode Integrasi Simpson

Metode integrasi Simpson merupakan pengembangan metode integrasi trapezoida, hanya saja daerah pembaginya bukan berupa trapesium tetapi berupa dua buah trapesium dengan menggunakan pembobot berat di titik tengahnya seperti telihat pada gambar berikut ini. Atau dengan kata lain metode ini adalah metode rata-rata dengan pembobot kuadrat.



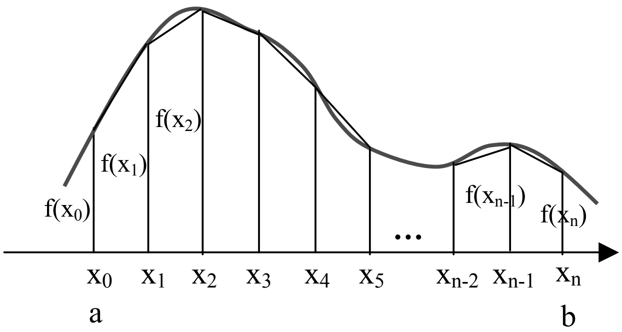
Bila menggunakan trapesium luas bangun di atas adalah :

$$L = \frac{h}{2}\left(f_{i-1} + f_i\right) + \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left(f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}\right)$$

Pemakaian aturan simpson dimana bobot f_i sebagai titik tengah dikalikan dengan 2 untuk menghitung luas bangun diatas dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 2f_i\right) + \frac{h}{3}\left(2f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right)$$

Perhatikan gambar berikut:



Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 2f_1\right) + \frac{h}{3}\left(2f_1 + f_2\right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + 2f_3\right) + \frac{h}{3}\left(2f_3 + f_4\right) + \ldots + \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 2f_{n-1}\right) + \frac{h}{3}\left(2f_{n-1} + f_n\right)$$

atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \sum_{i\ ganjil} f_i + 2 \sum_{i\ genap} f_i + f_n \right)$$

Contoh :

Hitung $\int_0^1 2x^3 dx$ dengan h=0.1

Dengan menggunakan tabel diperoleh :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	0	0,002	0,016	0,054	0,128	0,25	0,432	0,686	1,024	1,458	2

Dan aturan simpson dapat dituliskan dengan :

$$L = \frac{0,1}{3}\left(0 + (4)(0,002) + (2)(0,016) + (4)(0,054) + (2)(0,128) + \ldots + (2)(1,024) + (4)(1,458) + 2\right)$$

$$= \frac{0,1}{3}\left(15\right) = 0,5$$

Dibandingkan dengan hasil perhitungan kalkulus, maka kesalahannya sangat kecil.

<u>*Catatan:*</u>

- *Metode ini akan mendapatkan hasil yang baik bila diambil n genap.*
- *Metode ini sangat terkenal karena kesalahannya sangat kecil, sehingga menjadi alternatif yang baik dalam perhitungan integral dan penerapannya khususnya di bidang teknik.*

Algoritma Metode Integrasi Simpson adalah:

(1) Definisikan y=f(x)
(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
(3) Tentukan jumlah pembagi n
(4) Hitung h=(b-a)/n
(5) Hitung $L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 4 \sum_{i\ ganjil} f_i + 2 \sum_{i\ genap} f_i + f_n \right)$

6.5. Metode Integrasi Gauss

Metode integrasi Gauss merupakan metode yang tidak menggunakan pembagian area yang banyak, tetapi memanfaatkan titik berat dan pembobot integrasi. Metode ini secara komputasi memiliki banyak keuntungan karena mempunyai kecepatan yang tinggi hal ini ditunjukkan dengan jumlah pembaginya yang kecil dan dengan jumlah pembagi yang relatif kecil mempunyai kesalahan yang sama dengan metode lain dengan jumlah pembagi yang besar. Metode integrasi Gauss dapat dijelaskan sebagai berikut:

Untuk luas daerah ke i, mempunyai luas:

$$L_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Pertama yang harus dilakukan adalah mengubah range $x=[x_{i-1},x_i]=[a,b]$ pada integrasi di atas menjadi $u=[-1,1]$ dengan menggunakan:

$$u = \frac{2x-(b+a)}{b-a} \quad \text{atau} \quad x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

sehingga bentuk integral dapat dituliskan menjadi:

$$L_i = \int_{-1}^{1} g(u)du$$

dimana: $g(u) = \frac{1}{2}(b-a) f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$

Dari bentuk ini, dapat diambil sejumlah titik pendekatan yang digunakan sebagai titik acuan dalam integrasi kuadratur gauss sebagai berikut:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \sum_{i=1}^{n} A_i g(\mu_i)$$

untuk menentukan nilai μ_i dapat digunakan persamaan polinom Legendre:

$$P_0(u) = 1$$

$$P_1(u) = u$$

$$P_m(u) = \frac{1}{m}\left[(2m-1)uP_{m-1}(u) - (m-1)P_{m-2}(u)\right]$$

Dan untuk menentukan nilai Ai digunakan pembobot sebagai berikut:

$$A_i = \frac{2}{(1-\mu_i^2)\left[P_n^{'}(\mu_i)\right]^2}$$

Integrasi Kuadratur Gauss Dengan Pendekatan 2 Titik

Metode ini menggunakan formulasi integrasi:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = A_0 g(\mu_0) + A_1 g(\mu_1)$$

Untuk menghasilkan metode ini diambil n=2 pada persamaan polinom Legendre, sehingga diperoleh:

$$P_2(u) = \frac{1}{2}\left[(4-1)u.u - 1.1\right] = \frac{3u^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Akar-akar dari persamaan polinomial di atas adalah $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ jadi diperoleh:

$$\mu_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ dan } \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nilai A_0 dan A_1 dapat dicari dengan:

$$A_0 = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right).3} = 1 \quad \text{dan} \quad A_1 = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right).3} = 1$$

Sehingga model dari integrasi kuadratur gauss dengan pendekatan 2 titik dapat dituliskan dengan:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Contoh:

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Pertama yang harus dilakukan adalah menghitung u, dengan:

$$u = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)} = \frac{2x-1}{1} = 2x-1$$

atau $x = \frac{1}{2}(u+1)$

Dengan demikian diperoleh fungsi g(u):

$$g(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2 = \frac{1}{8}(u+1)^2$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

$$= 0.311004 + 0.022329$$

$$= 0.33333$$

Algoritma Metode Integrasi Gauss Dengan Pendekatan 2 Titik:

(1) Definisikan fungsi f(x)
(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
(3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

(4) Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a) f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

(5) Hitung:

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Integrasi Kuadratur Gauss Dengan Pendekatan 3 Titik

Metode ini menggunakan formulasi integrasi:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = A_0 g(\mu_0) + A_1 g(\mu_1) + A_2 g(\mu_2)$$

Untuk menentukan nilai μ_0, μ_1 dan μ_2 digunakan persamaan polinom Legendre dengan n=3:

$$P_3(u) = \frac{1}{3}\left[5.u.P_2(u) - 2P_1(u)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[5u.\frac{1}{2}(3u^2-1) - 2u\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{5}{2}u(3u^2-1) - 2u\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{15}{2}u^3 - \frac{9}{2}u\right] = \frac{1}{2}u\left(5u^2 - 3\right)$$

Diperoleh : $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = -\sqrt{\tfrac{3}{5}}$, dan $\mu_2 = \sqrt{\tfrac{3}{5}}$

Nilai A_0, A_1 dan A_2 dapat diperoleh dengan:

$$P_3'(u) = \frac{15}{2}u^2 - \frac{3}{2}$$

$$A_0 = \frac{2}{(1).\left[P_3'(0)\right]^2} = \frac{2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}$$

$$A_{12} = \frac{2}{\left(1-\frac{3}{5}\right)\left[P_3'\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]^2} = \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)(3)^2} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Sehingga diperoleh model integrasi kuadratur gauss dengan pendekatan tiga titik adalah sebagai berikut:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Contoh:

Hitung integral $L = \int_0^1 e^x dx$

Terlebih dahulu dilakukan pengubahan range:

$$u = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)} = \frac{2x-1}{1} = 2x-1$$

atau $x = \frac{1}{2}(u+1)$

Sehingga diperoleh :

$$g(u) = \frac{1}{2}(1-0)\left[e^{\frac{1}{2}(u+1)}\right] = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(u+1)}$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss dengan pendekatan tiga titik diperoleh:

$$\begin{aligned} L &= \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{8}g\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{5}{8}g\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) \\ &= 0.732765 + 0.310916 + 0.6746 \\ &= 1.718281 \end{aligned}$$

Dibandingkan dengan hasil analitik dengan pendekatan 10^{-6}, diperoleh 1.718282, hasil di atas merupakan hasil yang cukup baik.

Algoritma Metode Integrasi Gauss Dengan Pendekatan 3 Titik:

(1) Definisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)

(3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

(4) Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

(5) Hitung:

$$L = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Catatan:

Meskipun dalam beberapa hal integrasi kuadratur Gauss menunjukkan hasil yang lebih baik dari pada metode integrasi Simpson, tetapi dalam penerapannya metode integrasi Simpson lebih banyak digunakan dengan dasar pertimbangan kemudahan dari metode yang digunakan.

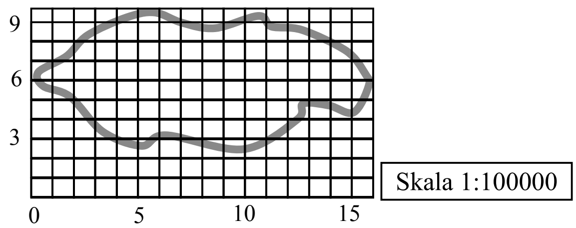
6.6. Beberapa Penerapan Integrasi Numerik

Seperti telah dijelaskan di depan, integral banyak digunakan untuk menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh fungsi-fungsi tertentu. Lebih jauh lagi dengan mengembangkan pengertian luas itu sendiri, integral dapat juga digunakan untuk menghitung luas kulit, dan menghitung volume dari benda putar. Selain dari itu integral sendiri merupakan formulasi dasar yang banyak ditemui dalam model matematik khususnya untuk bidang elektronika, seperti pada pengolahan sinyal digital integral ini ditemui untuk menghitung konvolusi yang banyak digunakan dalam konsep-konsep pengolahan sinyal dan filter sebagai berikut:

$$conv(h,x) = \int_0^T h(t)x(T-t)dt$$

6.6.1. Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar

Perhatikan gambar peta berikut ini:



Untuk menghitung luas integral di peta di atas, yang perlu dilakukan adalah menandai atau membuat garis grid pada setiap step satuan h yang dinyatakan dalam satu kotak. Bila satu kotak mewakili 1 mm, dengan skala yang tertera maka berarti panjangnya adalah 100.000 mm atau 100 m.

Pada gambar di atas, mulai sisi kiri dengan grid ke 0 dan sisi kanan grid ke n (dalam hal ini n=22). Tinggi pada setiap grid adalah sebagai berikut:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y(n)	0	1	2.5	4.5	6	7	6.5	6	6	6.5	6.5	6	5.5	3.5	3	3	0

Dari tabel di atas, luas area dapat dihitung dengan menggunakan 3 macam metode:

(1) Dengan menggunakan metode integrasi Reimann

$$L = h\sum_{i=0}^{16} y_i = 73.5$$

(2) Dengan menggunakan metode integrasi trapezoida

$$L = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_{16} + 2\sum_{i=1}^{15} y_i \right) = 73.5$$

(3) Dengan menggunakan metode integrasi Simpson

$$L = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{16} + 4\sum_{i=ganjil} y_i + 2\sum_{i=genap} y_i \right) = 74$$

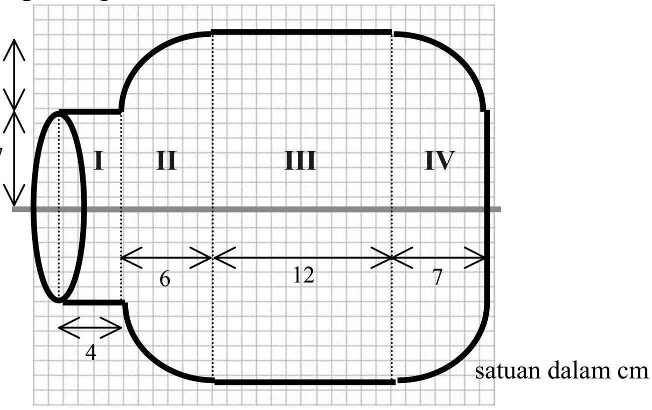
6.6.2. Menghitung Luas dan Volume Benda Putar

Untuk menghitung luas dan volume benda putar yang dibentuk oleh fungsi y=f(x) dapat digunakan rumus berikut:

Luas benda putar: $L_p = 2\pi \int_a^b f(x)dx$

Volume benda putar: $V_p = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Sebagai contoh : hitung luas permukaan dan volume dari benda berikut ini:



Ruang benda putar dapat dibedakan menjadi 4 bagian seperti gambar di atas, dimana bagian I dan III merupakan bentuk silinder yang tidak perlu dihitung dengan membagi-bagi kembali ruangnya, sedangkan bagian II dan IV perlu diperhitungkan kembali.

Bagian I: $L_I = 2\pi(4)(7) = 56\pi$

$V_I = \pi(4)(7)^2 = 196\pi$

Bagian II: $L_{II} = 2\pi(12)(12) = 288\pi$

$V_{II} = 2\pi(12)(12)^2 = 3456\pi$

Sedangkan untuk menghitung bagian II dan IV diperlukan pembagian area , misalkan dengan mengambil h=1 diperoleh:

n	0	1	2	3	4	5
y(n)	7	10	11	11.5	12	12

Pada bagian II dan IV: $L_{II} = L_{IV}$ dan $V_{II} = V_{IV}$

Dengan menggunakan integrasi trapezoida dapat diperoleh:

$$L_{II}(L_{IV}) = 2\pi \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i \right] = 108\pi$$

$$V_{II}(= V_{IV}) = \pi \frac{h}{2}\left[y_0^2 + y_5^2 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i^2 \right] = 1187.5\pi$$

Luas permukaan dari botol adalah:

$$\begin{aligned} L &= L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV} \\ &= 56\pi + 108\pi + 288\pi + 108\pi \\ &= 560\pi \\ &= 1758.4 \end{aligned}$$

Luas = 1758.4 cm^2

Volume botol adalah:

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV}$$
$$= 196\pi + 1187.5\pi + 3456\pi + 1187.5\pi$$
$$= 6024\pi$$

Volume = 18924.78 cm^3

6.7. Tugas

(1) Hitung integral : $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$ dengan menggunakan integral Reimann, trapezoida dan Simpson. Bandingkan hasilnya dengan jumlah pembagi (N) yang sama, ambil N=10, 20, 50, 100, 500 dan 1000. Lalu gambarkan hubungan N dan Luas yang dihasilkan

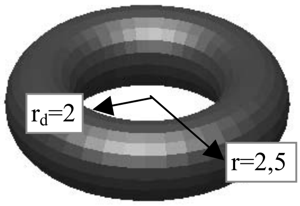
(2) Dengan menggunakan integral kuadratur Gauss dengan 2 titik pendekatan dan 3 titik pendekatan, hitung: $\int_0^1 e^{-(x-0.5)/2} dx$

Bandingkan hasilnya bila menggunakan integrasi Simpson dengan N=20 dan N=50.

(3) Hitung konvolusi dari $h(t) = e^{-x^2/2}$ dan $x(t) = 1 - e^{-t}$ untuk 0<t<1, dimana konvolusi didefinisikan:

$$conv(h, x) = \int_0^T h(t)x(T-t)dt$$

(4) Hitung luas permukaan dan volume dari benda putar yang berbentuk ban dengan ukuran jari-jari =2,5m dengan layout sebagai berikut:



(5) Ambillah peta Surabaya, dengan tetap memperhatikan skala yang digunakan, hitung luas wilayah Surabaya berdasarkan peta tersebut.

Bab 7
Penyelesaian Persamaan Differensial

Persamaan differensial merupakan persamaan yang menghubungkan suatu besaran dengan perubahannya. Persamaan differensial dinyatakan sebagai persamaan yang mengandung suatu besaran dan differensialnya, dan dituliskan dengan :

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}, t\right) = 0$$

Persamaan differensial mempunyai banyak ragam dan jenis mulai dari yang mudah diselesaikan hingga yang sulit diselesaikan, mulai dari yang sederhana sampai yang sangat kompleks. Salah satu persamaan differensial yang banyak digunakan dalam penerapannya adalah **Persamaan Differensial Linier**, yang dituliskan dengan:

$$a_n \frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + .. + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Persamaan differensial linier umumnya dapat diselesaikan dengan menggunakan cara analitik seperti pemakaian Transformasi Laplace, tetapi pada bentuk yang kompleks persamaan differensial linier ini menjadi sulit diselesaikan.

Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitung, ketika metode analitik sulit digunakan. Pada beberapa bentuk persamaan differensial, khususnya pada differensial non-linier, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan. Sebagai contoh perhatikan bentuk persamaan differensial yang sederhana berikut ini:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - y = 1$$

Persamaan diffrensial di atas tampaknya sederhana, tetapi untuk menyelesaikan persamaan diffrensial di atas bukanlah sesuatu yang mudah, bahkan dapat dikatakan dengan menggunakan cara analitik, tidak dapat ditemukan penyelesaian. Sehingga pemakaian metode-metode pendekatan dengan metode numerik menjadi suatu alternatif yang dapat digunakan.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, antara lain: metode Euler, metode pendekatan dengan deret Taylor, metode runge-kutta dan metode-metode prediktor-korektor seperti metode Adam Moulton. Hanya saja metode-metode pendekatan ini menyebabkan penyelesaian yang dihasilkan bukanlah penyelesaian umum dari persamaan differensial, tetapi penyelesaian khusus dengan nilai awal dan nilai batas yang ditentukan.

Permasalahan persamaan differensial ini merupakan permasalahan yang banyak ditemui ketika analisa yang dilakukan tergantung pada waktu dan nilainya mengalami perubahan-perubahan berdasarkan waktu. Hampir banyak model matematis di dalam ilmu teknik menggunakan pernyataan dalam persamaan differensial.

7.1. Metode Euler

Perhatikan bentuk persamaan differensial berikut:

$$y' = f(x, y)$$

Dengan menggunakan pendekatan nilai awal (x_0, y_0) maka nilai-nilai y berikutnya daat diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)$$

Contoh:

Diketahui persamaan differensial berikut:

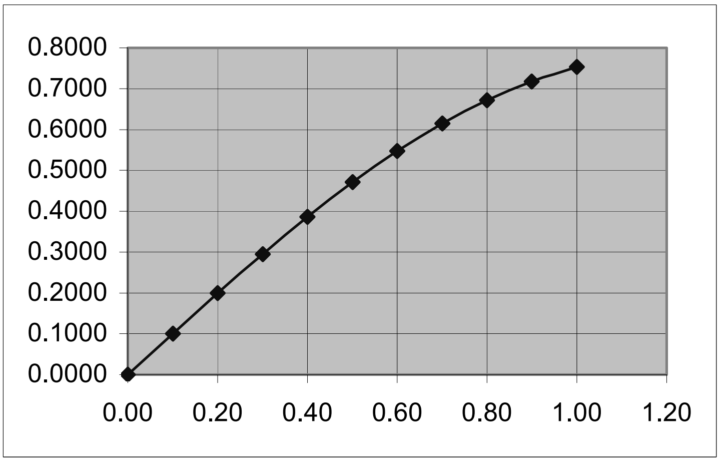
$$\frac{dy}{dx} + xy = 1$$

Maka :

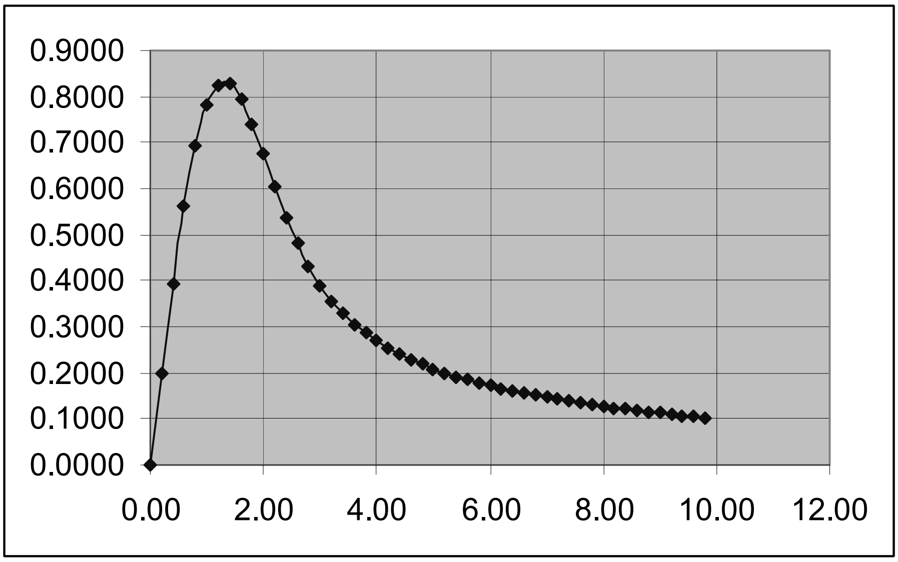
$$y' = 1 - xy \quad \text{atau} \quad f(x, y) = 1 - xy$$

Bila ditentukan nilai awalnya adalah (0,0) dan h=0.1 maka diperoleh :

n	x	y
0	0.00	0.0000
1	0.10	0.1000
2	0.20	0.1990
3	0.30	0.2950
4	0.40	0.3862
5	0.50	0.4707
6	0.60	0.5472
7	0.70	0.6144
8	0.80	0.6714
9	0.90	0.7176
10	1.00	0.7531



Bila ditingkatkan untuk x sampai dengan 10 kemudian diambil grafiknya, diperoleh :



7.2. Metode Taylor

Metode Taylor adalah suatu metode pendekatan yang menggunakan deret Taylor sebagai bentuk perbaikan nilai untuk nilai fungsi secara keseluruhan pada penyelesaian persamaan differensial. Perhatikan fungsi dari persamaan differensial berikut:

$$y' = f(x, y)$$

Dengan memberikan nilai pendekatan awal (x_0, y_0), penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!}y^{(k)}(x_0)$$

Contoh:

Diketahui persamaan differensial :

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

Maka : $y' = \sin x - y$ atau $f(x, y) = \sin x - y$

$$y'' = f'(x, y) = f_x + f_y y' = \cos x - (1)(\sin x - y)$$

$$= \cos x - \sin x + y$$

$$y^{(3)} = -\sin x - \cos x + (1)(\sin x - y)$$

$$= -\cos x - y$$

Dengan pendekatan awal (0,0) maka untuk x=1, nilai y dapat dihitung dengan:

$$y = 0 + (1 - 0)[\sin(0) - 0] + \frac{1}{2}[\cos(0) - \sin(0) + 0] + \frac{1}{6}[-\cos(0) - 0]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Catatan:

Pemakaian metode Taylor tidak banyak digemari karena diperlukan perhitungan yang cukup rumit dalam penyelesaiannya. Tetapi metode ini dapat menunjukkan hasil yang bagus pada beberapa permasalahan penyelesaian persamaan differensial.

7.3. Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan step demi step. Untuk fungsi dari persamaan differensial :

$$y' = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal (x_0, y_0), berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan :

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n) \quad \text{atau}$$

$$y_{n+1} = y_n + dy$$

dimana *dy* adalah nilai perubahan nilai fungsi setiap step

Metode Runge-Kutta 2:

Metode Runge-Kutta membuat step yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan tiap step menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling sederhana dari metode Runge Kutta ini adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian sehingga :

$$dy = \frac{h.f_1 + h.f_2}{2}$$

dimana f1 dan f2 adalah nilai fungsi step yang diambil dari bentuk fungsi persamaan differensial pada step tengahan.

Sehingga diperoleh formulasi dari Metode Runge-Kutta 2 sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dimana: $k_1 = h.f(x_n, y_n)$

$$k_2 = h.f(x_n + h, y_n + k_1)$$

Contoh:

Selesaikan persamaan differensial berikut:

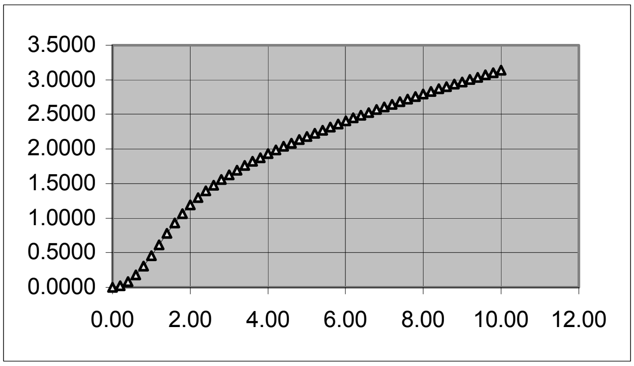
$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x$$

Fungsi persamaan differensial adalah : $y' = f(x,y) = x - y^2$

Dengan nilai pendekatan awal (0,0) diperoleh:

n	x	k1	k2	y
0	0.00	-	-	0.0000
1	0.10	0.0000	0.0100	0.0050
2	0.20	0.0100	0.0200	0.0200
3	0.30	0.0200	0.0298	0.0449
4	0.40	0.0298	0.0394	0.0795
5	0.50	0.0394	0.0486	0.1235
6	0.60	0.0485	0.0570	0.1762
7	0.70	0.0569	0.0646	0.2370
8	0.80	0.0644	0.0709	0.3046
9	0.90	0.0707	0.0759	0.3779
10	1.00	0.0757	0.0794	0.4555

Bila hasilnya diteruskan sampai x=10 dan digambarkan, akan diperoleh:



Metode Runge Kutta 4

Bila pada metode Runge-Kutta 2, nilai koefisien perbaikannya adalah 2 buah, maka pada metode ini menggunakan 4 nilai koefisien perbaikan yaitu k_1, k_2, k_3, k_4 yang diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

dimana : $k_1 = h.f(x_n, y_n)$

$$k_2 = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h.f\left(x_n + h, y_n + k_3\right)$$

Contoh:

Hitung penyelesaian persamaan differensial berikut:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = e^{-x}$$

Fungsi persamaan differensial: $f(x, y) = \sqrt{e^{-x} + y}$

Bila ditentukan pendekatan awal (0,0) dan step h=0.1, dengan menggunakan metode Euler 4 diperoleh:

n	x	k1	k2	k3	k4	y
0	0.00	-	-	-	-	0
1	0.10	0.10000	0.10006	0.10006	0.10024	0.10008
2	0.20	0.10025	0.10054	0.10055	0.10096	0.20065
3	0.30	0.10096	0.10149	0.10150	0.10213	0.30216
4	0.40	0.10213	0.10285	0.10287	0.10370	0.40504
5	0.50	0.10370	0.10462	0.10464	0.10565	0.50968
6	0.60	0.10565	0.10675	0.10677	0.10795	0.61646
7	0.70	0.10795	0.10920	0.10923	0.11056	0.72568
8	0.80	0.11056	0.11195	0.11198	0.11345	0.83766
9	0.90	0.11345	0.11497	0.11500	0.11659	0.95266
10	1.00	0.11659	0.11822	0.11826	0.11995	1.07091

7.4. Persamaan Differensial Tingkat Tinggi

Pada banyak penerapan, persamaan differensial yang digunakan adalah persamaan differensial tingkat tinggi, baik itu tingkat 2, 3 dan seterusnya. Sedangkan pembahasan di depan adalah penyelesaian persamaan differensial tingkat satu yang dinyatakan dengan fungsi :

$$y' = f(x, y)$$

Untuk menyelesaikan persamaan differensial tingkat tinggi, diperlukan pengembangan model persamaan differensial yang akan menghasilkan pengembangan bentuk metode

yang digunakan. Pada buku ini dibahas pemakaian metode Euler dan Runge Kutta untuk menyelesaikan persamaan differensial tingkat tinggi ini.
Perhatikan persamaan differensial tingkat n berikut ini:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = F(x)$$

Ubah variabel-variabel differensial dengan variabel-variabel index sebagai berikut:

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y_3 = y''$$
$$...........$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

Dengan mendifferensialkan setiap variabel di atas diperoleh:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$............$$
$$y_{n-1}' = y_n$$
$$y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Setiap differensial menyatakan suatu fungsi persamaan differensial tingkat satu, sehingga untuk menyelesaiakan persamaan differensial tingkat n diperlukan n fungsi persamaan differensial tingkat satu yang bekerja secara bersama-sama.

7.4.1. Penyelesaian Persamaan Differensial Tingkat 2 Dengan Metode Euler

Perhatikan persamaan differensial tingkat 2 berikut:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \right)$$

Ubah variabel: *y=y* dan *z=y'* sehingga diperoleh 2 persamaan differensial tingkat satu berikut:

$$y' = z$$
$$z' = F(x, y, z)$$

ini berarti diperoleh 2 fungsi masing-masing:

$$f(x, y, z) = z$$
$$g(x, y, z) = F(x, y, z)$$

Dengan menggunakan metode Euler diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n, z_n)$$
$$z_{n+1} = z_n + h.g(x_n, y_n, z_n)$$

Contoh:

Selesaiakan persamaan differensial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

Maka diperoleh dua fungsi f(x,y,z) dan g(x,y,z) berikut:

$$f(x,y,z) = z$$

$$g(x,y,z) = 1 - 2xy - 3z$$

Bila ditentukan pendekatan awal x_0=0, y_0=0, z_0=0 dan step h=0.2, maka dengan metode euler diperoleh:

n	x	y	z = y'
0	0.00	0.00000	0.00000
1	0.20	0.00000	0.20000
2	0.40	0.04000	0.28000
3	0.60	0.09600	0.30560
4	0.80	0.15712	0.29920
5	1.00	0.21696	0.26940
6	1.20	0.27084	0.22098
7	1.40	0.31504	0.15839
8	1.60	0.34671	0.08693
9	1.80	0.36410	0.01288
10	2.00	0.36668	-0.05700

7.4.2. Penyelesaian Persamaan Differensial Tingkat 2 Dengan Metode Runge-Kutta 2

Perhatikan persamaan differensial tingkat 2 berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Ubah variabel: *y=y* dan *z=y'* sehingga diperoleh 2 persamaan differensial tingkat satu berikut:

$$y' = z$$

$$z' = F(x,y,z)$$

ini berarti diperoleh 2 fungsi masing-masing:

$$f(x,y,z) = z$$

$$g(x,y,z) = F(x,y,z)$$

Dengan menggunakan metode Runge-Kutta 2 diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

dimana:

$$k_1 = h.f(x,y,z)$$

$$l_1 = h.g(x,y,z)$$

$$k_2 = h.f(x+h, y+k_1, z+l_1)$$

$$l_2 = h.g(x+h, y+k_1, z+l_1)$$

Contoh:
Selesaiakan persamaan differensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

Maka diperoleh dua fungsi f(x,y,z) dan g(x,y,z) berikut:

$$f(x,y,z) = z$$

$$g(x,y,z) = 1 - 2xy - 3z$$

Bila ditentukan pendekatan awal x_0=0, y_0=0, z_0=0 dan step h=0.2, maka dengan metode euler diperoleh:

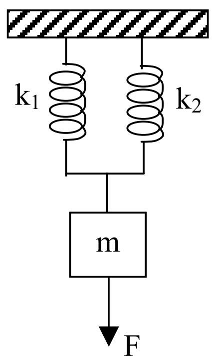
n	x	k1	l1	k2	l2	y	z = y'
0	0.00	-	-	-	-	0	0
1	0.20	0.00000	0.20000	0.04000	0.08000	0.020000	0.14000
2	0.40	0.02800	0.11440	0.05088	0.03968	0.059440	0.21704
3	0.60	0.04341	0.06027	0.05546	0.00893	0.108875	0.25164
4	0.80	0.05033	0.02289	0.05491	-0.01566	0.161491	0.25525
5	1.00	0.05105	-0.00483	0.05008	-0.03527	0.212059	0.23520
6	1.20	0.04704	-0.02595	0.04185	-0.04992	0.256505	0.19727
7	1.40	0.03945	-0.04148	0.03116	-0.05921	0.291810	0.14692
8	1.60	0.02938	-0.05157	0.01907	-0.06278	0.316038	0.08975
9	1.80	0.01795	-0.05611	0.00673	-0.06065	0.328377	0.03137
10	2.00	0.00627	-0.05525	-0.00478	-0.05339	0.329125	-0.02295

7.5. Beberapa Penerapan Persamaan Differensial

Pada sub bab ini akan dibahas beberapa penerapan persamaan differensial pada sistem mekanis dan sistem listrik, serta penyelesaiannya secara numerik.

7.5.1. Penerapan Persamaan Differensial Pada Sistem Mekanis

Perhatikan gambar sistem pegas berikut ini:



Model matematik untuk sistem pegas di atas adalah:

$$F + m\frac{d^2x}{dt^2} = (k_1 + k_2)x$$

dimana x adalah besarnya simpangan.

Bila F ditentukan, misalnya 10 N, maka diperoleh persamaan differensial tingkat 2 sebagai berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}\left[(k_1 + k_2)x - 10\right]$$

Dengan menggunakan pengubahan variabel y=y dan z=y' diperoleh dua fungsi persamaan differensial yaitu:

$$f(x,y,z) = z$$

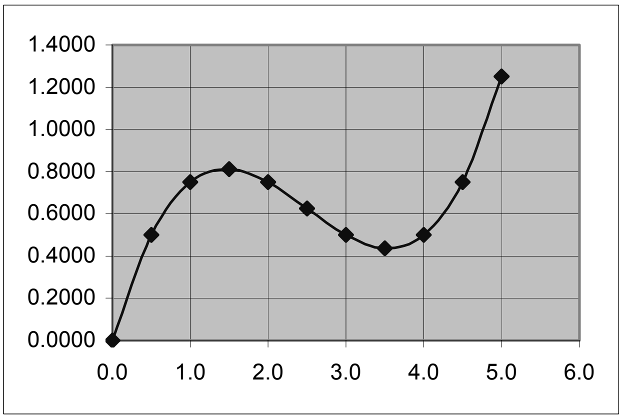
$$g(x,y,z) = \frac{1}{m}\left[(k_1 + k_2)x - 10\right]$$

Bila ditentukan m=10, k_1=2 dan k_2 = 5 diperoleh:

$$g(x,y,z) = \frac{1}{2}x - 1$$

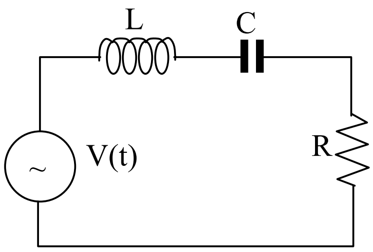
Dengan step h = 0.5, pendekatan awal (0,0) dengan y'=1, metode Euler akan menghasilkan :

n	x	y	z
0	0.0	0.0000	1.0000
1	0.5	0.5000	0.5000
2	1.0	0.7500	0.1250
3	1.5	0.8125	-0.1250
4	2.0	0.7500	-0.2500
5	2.5	0.6250	-0.2500
6	3.0	0.5000	-0.1250
7	3.5	0.4375	0.1250
8	4.0	0.5000	0.5000
9	4.5	0.7500	1.0000
10	5.0	1.2500	1.6250



7.5.2. Penerapan Persamaan Differensial Pada Sistem Listrik

Perhatikan gambar rangkaian listrik berikut ini:



Model matematis untuk rangkaian listrik di atas adalah:

$$C\frac{dV}{dt} + \frac{1}{R}V + L\int_0^t V(u)du = E$$

Bentuk persamaan di atas adalah persamaan differensial integral, persamaan tersebut dapat diubah menjadi persamaan differensial tingkat 2 sebagai berikut:

$$C\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}+LV=E'$$

Karena E’ berupa konstanta maka dapat dituliskan sebagai E saja.

Bila nilai-nilai L, R, C, dan E ditentukan, misalkan $C=10^{-5}$, R=10K, $L=10^{-4}$ dan E=1 maka diperoleh persamaan differensial tingkat 2:

$$\frac{d^2V}{dt^2}+10\frac{dV}{dt}+10V=1$$

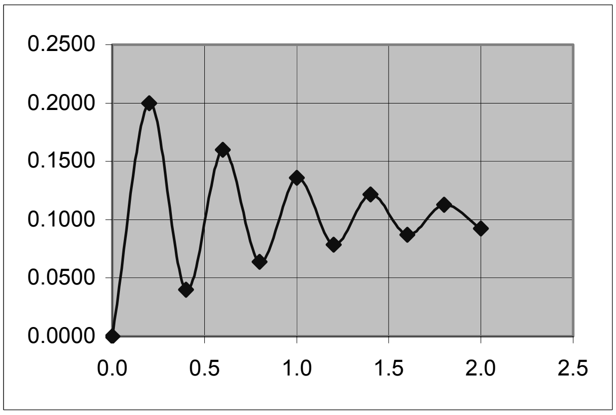
dengan mengambil variabel x=t, y=V dan z=V’ diperoleh dua fungsi :

$$f(x,y,z)=z$$

$$g(x,y,z)=1-10y-10z$$

Dengan menentukan pendekatan awal t=0, V(0)=0, V’(0)=1 dan h=0.2, dan dengan menggunakan metode Euler diperoleh penyelesaian:

n	x	y	z
0	0.0	0.0000	1.0000
1	0.2	0.2000	-0.8000
2	0.4	0.0400	0.6000
3	0.6	0.1600	-0.4800
4	0.8	0.0640	0.3600
5	1.0	0.1360	-0.2880
6	1.2	0.0784	0.2160
7	1.4	0.1216	-0.1728
8	1.6	0.0870	0.1296
9	1.8	0.1130	-0.1037
10	2.0	0.0922	0.0778



7.6. Tugas

(1) Selesaikan persamaan differensial berikut:

$$\frac{dy}{dx}+2y=0$$

menggunakan metode Euler, Runge-Kutta 2 dan Runge-Kutta 4 dengan h=0.1 dan titik pendekatan awal (0,1).

Persamaan differensial di atas secara analitik mempunyai penyelesaian umum:

$$y=e^{-2x}$$

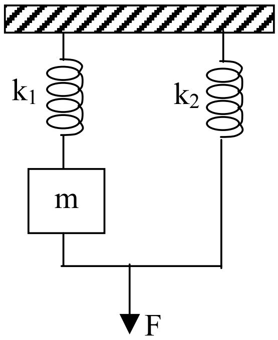
Bandingkan hasil ketiga metode dengan nilai penyelesaian umumnya.

(2) Selesaikan persamaan differensial berikut:

$$\frac{dy}{dx}=(1-xy)e^{-x}$$

menggunakan metode Euler, Runge-Kutta 2 dan Runge-Kutta 4 dengan h=0.2 dan titik pendekatan awal (0,0).

(3) Perhatikan sistem mekanis berikut ini:



Model matematis dari sistem di atas adalah:

$$F = \left(k_1 - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) x + k_2 x$$

Bila ditentukan nilai F=10, m=10, k1=2 dan k2=3, dan titik pendekatan awal (0,0) dan x'(0)=1. Tentukan penyelesaian persamaan differensial di atas.

BAB 8
Interpolasi Linier, Kuadratik, Polinomial, dan Lagrange

Tujuan :

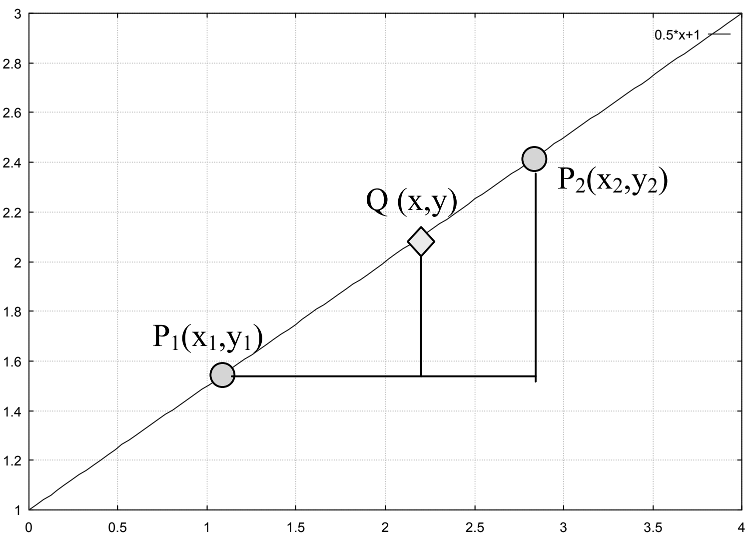
Mempelajari berbagai metode Interpolasi yang ada untuk menentukan titik-titik antara dari n buah titik dengan menggunakan suatu fungsi pendekatan tertentu. Metode Interpolasi yang dipelajari :

1. Interpolasi Linier
2. Interpolasi Kuadratik
3. Interpolasi Polinomial
4. Interpolasi Lagrange

Dasar Teori :

Interpolasi Linier

Menentukan titik-titik antara dari 2 buah titik dengan menggunakan garis lurus.



Gambar 22.1. Kurva untuk interpolasi linier

Persamaan garis lurus yang melalui 2 titik $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ dapat dituliskan dengan:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Sehingga diperoleh persamaan dari interpolasi linier sebagai berikut:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) + y_1$$

Algoritma Interpolasi Linier :

(1) Tentukan dua titik P1 dan P2 dengan koordinatnya masing-masing (x1,y1) dan (x2,y2)

(2) Tentukan nilai x dari titik yang akan dicari

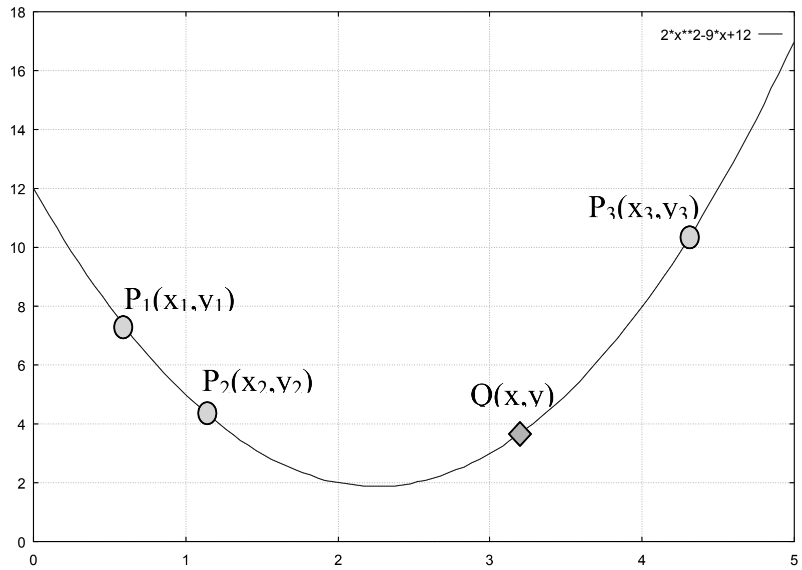
(3) Hitung nilai y dengan :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) + y_1$$

(4) Tampilkan nilai titik yang baru Q(x,y)

Interpolasi Kuadratik

Interpolasi Kuadratik digunakan untuk mencari titik-titik antara dari 3 buah titik $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ dan $P_3(x_3,y_3)$ dengan menggunakan pendekatan fungsi kuadrat.



Gambar 22.2. Kurva untuk interpolasi kuadratik

Untuk memperoleh titik Q(x,y) digunakan interpolasi kuadratik sebagai berikut:

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Algoritma Interpolasi Kuadratik:

(1) Tentukan 3 titik input $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ dan $P_3(x_3,y_3)$

(2) Tentukan nilai x dari titik yang akan dicari

(3) Hitung nilai y dari titik yang dicari menggunakan rumus dari interpolasi kuadratik:

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

(4) Tampilkan nilai x dan y

Interpolasi Polinomial

Interpolasi polynomial digunakan untuk mencari titik-titik antara dari n buah titik $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, …, $P_N(x_N,y_N)$ dengan menggunakan pendekatan fungsi polynomial pangkat n-1:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1}$$

Masukkan nilai dari setiap titik ke dalam persamaan polynomial di atas dan diperoleh persamaan simultan dengan n persamaan dan n variable bebas:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + ... + a_{n-1} x_2^{n-1} \\
y_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + ... + a_{n-1} x_3^{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + ... + a_{n-1} x_n^{n-1}
\end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan simultan di atas adalah nilai-nilai a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_n yang merupakan nilai-nilai koefisien dari fungsi pendekatan polynomial yang akan digunakan.

Dengan memasukkan nilai x dari titik yang dicari pada fungsi polinomialnya, akan diperoleh nilai y dari titik tersebut.

Algoritma Interpolasi Polynomial :

(1) Menentukan jumlah titik N yang diketahui.

(2) Memasukkan titik-titik yang diketahui $P_i = (x_i, y_i)$ untuk i=1,2,3,…,N

(3) Menyusun augmented matrik dari titik-titik yang diketahui sebagai berikut:

$$J = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} & y_1 \\
1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} & y_2 \\
1 & x_3 & x_3^2 & ... & x_3^{n-1} & y_3 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... \\
1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} & y_n
\end{array}\right]$$

(4) Menyelesaikan persamaan simultan dengan augmented matrik di atas dengan menggunakan metode eliminasi gauss/Jordan.

(5) Menyusun koefisien fungsi polynomial berdasarkan penyelesaian persamaan simultan di atas.

$$a = \{a_i | a_i = J(i,n), 0 \le i \le n-1\}$$

(6) Memasukkan nilai x dari titik yang diketahui

(7) Menghitung nilai y dari fungsi polynomial yang dihasilkan

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i$$

(8) Menampilkan titik (x,y)

Interpolasi Lagrange

Interpolasi polynomial digunakan untuk mencari titik-titik antara dari n buah titik $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, …, $P_N(x_N,y_N)$ dengan menggunakan pendekatan fungsi polynomial yang disusun dalam kombinasi deret dan didefinisikan dengan:

$$y = \sum_{i=1}^{N} y_i \prod_{j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Algoritma Interpolasi Lagrange :

(1) Tentukan jumlah titik (N) yang diketahui

(2) Tentukan titik-titik $P_i(x_i,y_i)$ yang diketahui dengan i=1,2,3,…,N

(3) Tentukan x dari titik yang dicari

(4) Hitung nilai y dari titik yang dicari dengan formulasi interpolasi lagrange

$$y = \sum_{i=1}^{N} y_i \prod_{j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

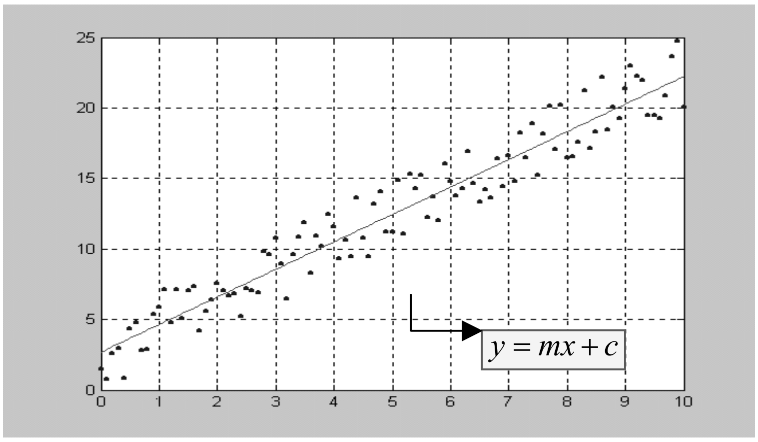
(5) Tampilkan nilai (x,y)

BAB 9
Regresi Linier, Regresi Eksponensial dan Regresi Polinomial

Regresi adalah sebuah teknik untuk memperoleh persamaan kurva pendekatan dari titik-titik data

Regresi Linier

Regresi linier digunakan menentukan fungsi linier (garis lurus) yang paling sesuai dengan kumpulan titik data (x_n,y_n) yang diketahui.



Gambar 23.1. Sebaran data dengan kurva linier

Dalam regresi linier ini yang dicari adalah nilai m dan c dari fungsi linier *y=mx+c*, dengan:

$$m = \frac{N\sum_{n=1}^{N} x_n y_n - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} y_n\right)}{N\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)^2}$$

$$c = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N} - m\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n}{N} = \bar{y} - m\bar{x}$$

Algoritma Regresi Linier

(1) Tentukan N titik data yang diketahui dalam (x_i,y_i) untuk i=1,2,3,…,N
(2) Hitung nilai m dan c dengan menggunakan formulasi dari regresi linier di atas
(3) Tampilkan fungsi linier
(4) Hitung fungsi linier tersebut dalam range x dan step dx tertentu
(5) Tampilkan hasil tabel (x_n,y_n) dari hasil fungsi linier tersebut.

Regresi Eksponensial

Regresi eksponensial digunakan menentukan fungsi eksponensial yang paling sesuai dengan kumpulan titik data (x_n,y_n) yang diketahui. Regresi eksponensial ini merupakan pengembangan dari regresi linier dengan memanfaatkan fungsi logaritma.

Perhatikan :

$$y = e^{-ax+b}$$

dengan melogaritmakan persamaan di atas akan diperoleh:

$$\ln y = \ln\left(e^{ax+b}\right)$$

$$\ln y = ax + b$$

atau dapat dituliskan bahwa:

$z = ax + b$ dimana $z = \ln y$

Dengan demikian dapat digunakan regresi linier dalam menentukan fungsi eksponensial yang paling sesuai dengan data.

Algoritma Regresi Eksponensial

(1) Tentukan N titik data yang diketahui dalam (x_i,y_i) untuk i=1,2,3,…,N
(2) Ubah nilai y menjadi z dengan z = ln y
(3) Hitung nilai a dan b dengan menggunakan formulasi dari regresi linier di atas
(4) Tampilkan fungsi eksponensial $y = e^{-ax+b}$
(5) Hitung fungsi eksponensial tersebut dalam range x dan step dx tertentu
(6) Tampilkan hasil tabel (x_n,y_n) dari hasil fungsi eksponensial tersebut.

Regresi Polinomial

Regresi polinomial digunakan menentukan fungsi polynomial yang paling sesuai dengan kumpulan titik data (x_n,y_n) yang diketahui.

Fungsi pendekatan :

$$y = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + ... + a_n x^n$$

Regresi polinomial tingkat n dikembangkan dari model matrik normal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & ... & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ ... \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^n y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-2} y_i \\ ... \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

Hasil dari model matrik normal di atas adalah nilai-nilai $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

Algoritma Regresi Polinomial

(1) Tentukan N titik data yang diketahui dalam (x_i,y_i) untuk i=1,2,3,…,N

(2) Hitung nilai-nilai yang berhubungan dengan jumlahan data untuk mengisi matrik normal

(3) Hitung nilai koefisien-koefisien $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ dengan menggunakan eliminasi gauss/jordan

(4) Tampilkan fungsi polinomial $y = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + ... + a_n x^n$

(5) Hitung fungsi polinomial tersebut dalam range x dan step dx tertentu

(6) Tampilkan hasil tabel (x_n,y_n) dari hasil fungsi polinomial tersebut.