BAB III - TRANSFORMASI LAPLACE

Penggunaan Metode Transformasi

Penggunaan Metode Transformasi pada Sistem Kontinyu

Matematika muncul dalam upaya menjelaskan gejala alam/fisika secara simbolik dan konsisten. Misalnya, rumus Newton F=ma muncul untuk menjelaskan bahwa benda yang jatuh akan bergerak semakin lama semakin cepat.

Di bidang analisis sistem, nama Fourier sangat terkenal. Dalam upaya menjelaskan gerakan mekanis yang periodis pada pegas, Fourier membuat rumusan yang disebut transformasi Fourier. Gerakan mekanis dalam hal ini disebut sinyal dan Fourier menyatakan bahwa setiap sinyal yang periodis dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier sinyal-sinyal sinusoidal.

Pada pembahasan tentang konvolusi, kita diperkenalkan dan berhasil membuktikan bahwa setiap sinyal kontinyu sembarang dapat dinyatakan sebagai integral impuls-impuls. Dengan kata lain, setiap sinyal sembarang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier impuls-impuls atau:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Para ahli mengembangkan apa yang telah diperoleh Fourier. Hasilnya adalah rumusan yang menyatakan bahwa banyak sekali sinyal (tidak harus periodis) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier sinyal-sinyal sinusoidal:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Ingat bahwa $e^{j\omega t}$ berbentuk sinusoidal dengan frekuensi ω. Dalam rumusan di atas, H(jω) merupakan faktor pengali/faktor bobot yang disebut transformasi Fourier dari h(t). H(jω) dapat dihitung dengan rumus:

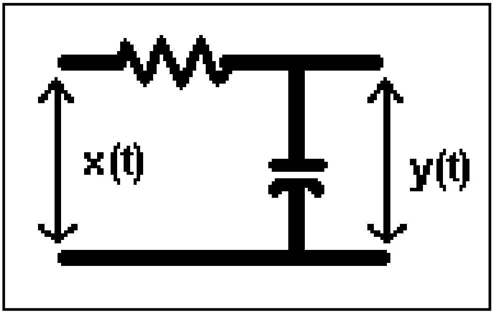
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

Lalu apa yang dapat diperoleh jika kita bisa menyatakan sebuah sinyal sebagai kombinasi linier sinyal-sinyal sinusoidal? Jika sebuah sistem linier mempunyai respon impuls h(t) dengan transformasi Fouriernya H(jw) dan sistem itu diberi masukan $x(t)=e^{j\omega t}$, maka keluaran sistem adalah y(t)= h(t)*x(t), atau

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= e^{j\omega t}H(j\omega) \end{aligned}$$

Ternyata keluaran sistem terhadap masukan $x(t)=e^{jwt}$ adalah sama dengan e^{jwt} dikalikan dengan H(jw) yaitu transformasi Fourier dari respon impuls!

Contoh. Rangkaian RC seperti pada gambar dengan R=1kohm, C=1uF mempunyai respon impuls $h(t)=e^{-1000t}u(t)$. Transformasi Fourier dari h(t) adalah H(jw)=1/(jw+1000). Jika diberi masukan $x(t)=e^{j2t}$, yaitu sinyal sinusoidal dengan frekuensi w=2, maka keluarannya adalah $y(t)=e^{j2t}H(j2)=e^{j2t}/(j2+1000)$.



Pada contoh di atas, masukan berupa fungsi e^{j2t} menghasilkan keluaran berupa fungsi e^{j2t} dikalikan konstanta 1/(j2+1000). Dalam matematika, fungsi seperti ini disebut *eigenfunction* dan konstantanya disebut *eigenvalue*.

Jika sinyal masukan dapat dinyatakan dalam bentuk transformasi Fourier yaitu X(jw), maka keluarannya adalah X(jw) dikalikan dengan H(jw) atau Y(jw) = X(jw)H(jw). Contoh. Jika rangkaian RC pada contoh di atas diberi masukan x(t)=u(t) yang mempunyai transformasi Fourier X(jw)=1/jw maka keluaran sistem adalah Y(jw) = X(jw)H(jw) = 1/(jw(jw+1000)). Sinyal keluaran adalah y(t) = invers transformasi Fourier dari Y(jw), yaitu $y(t)=(1-e^{-1000t})u(t)$.

Bagaimana mengetahui atau menghitung transformasi Fourier dan invers transformasi Fourier? Haruslah ada ketrampilan matematis yang tinggi untuk memahami cara mendapatkannya. Dari perkuliahan Metode Transformasi diketahui bahwa berbagai sinyal dasar telah dihitung transformasinya dan ditabelkan. Untuk sinyal-sinyal dasar, seperti u(t), transformasi dan invers transformasi dapat diketahui dengan melihat tabel. Untuk mencari transformasi sinyal yang bukan sinyal dasar teknisi harus mengetahui beberapa sifat operasi transformasi dan beberapa teknik untuk menguraikan sinyal menjadi penjumlahan sinyal-sinyal dasar. Tabel transformasi, sifat operasi transformasi dan beberapa teknik mencari transformasi lebih lanjut dapat dilihat di berbagai buku teks.

Transformasi Fourier dari respon impuls sebuah sistem disebut juga *respon frekuensi* H(jw)= transformasi Fourier dari h(t)= respon frekuensi. Respon frekuensi memperlihatkan bagaimana sistem mengubah amplitudo dan fase sinyal masukan periodis yang berfrekuensi. Respon frekuensi seringkali digambarkan dalam bentuk grafik yaitu grafik magnitudo dan grafik fase. Lebih lanjut tentang penggambaran respon frekuensi secara grafis akan dibahas pada bab tentang *Bode Plot*.

Transformasi Fourier banyak dipakai di bidang komunikasi. Sebuah contoh kecil adalah grafik respon frekuensi pita kaset tergambar di sampul kaset sebagai penjelasan mutu pita kaset (pada pita kaset kosong yang dijual di toko-toko).

Di samping transformasi Fourier, untuk sinyal kontinyu sering digunakan transformasi Laplace. Dalam transformasi Laplace, sebuah sinyal sembarang dinyatakan sebagai kombinasi linier sinyal-sinyal eksponensial kompleks e^{st} dengan s=r+jw=bilangan kompleks atau

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a}^{b} H(s)e^{st}ds$$

dan konstanta H(s) dihitung dengan rumusan

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

Sangat banyak kesamaan cara penggunaan transformasi Fourier dan Laplace. Contoh. Persoalan dengan rangkaian RC di atas dapat diselesaikan juga dengan transformasi Laplace. Transformasi Laplace dari u(t) adalah 1/s, sedangkan transformasi Laplace dari $h(t)=e^{-1000t}u(t)$ adalah H(s)=1/(s+1000) sehingga respon sistem terhadap masukan u(t) adalah Y(s)=1/s(s+1000).

Dalam analisis dan desain sistem dengan transformasi Laplace dikenal istilah *transfer function* atau fungsi alih. Transfer function adalah perbandingan Laplace sinyal keluaran dan Laplace sinyal masukan. Dalam contoh rangkaian RC di atas, transfer function rangkaian adalah Y(s)/X(s) = 1/(s+1000). Perhatikan bahwa dalam contoh itu Y(s)/X(s)= H(s). Perhatikan juga bahwa transfer function adalah transformasi Laplace dari respon impuls. Transformasi Laplace biasa digunakan di bidang teknik kontrol, pemrosesan sinyal dan berbagai bidang lain. Implementasi sistem linier dengan rangkaian op-amp akan dikaitkan dengan transfer function yang tidak lain adalah transformasi Laplace dari respon impuls. Realisasi sistem linier kontinyu dapat pula dikaitkan dengan bentuk transformasi Laplace. Kedua topik terakhir ini akan dibahas di bab-bab yang akan datang.

Beberapa atribut/properti sistem linier dapat dikenali dari transfer functionnya.

1. Sistem linier tanpa memori mempunyai transfer function berupa konstanta, misalnya H(s)=5.
2. Sistem invers dari sistem yang diketahui transfer function lebih mudah diketahui. Jika $H_I(s)$ adalah sistem invers, maka $H(s)H_I(s)=1$. Contoh: Diketahui H(s)=1/(s+1000). Sistem inversnya adalah $H_I(s)= 1/H(s)= s+1000$.
3. Stabilitas sistem linier dapat diuji dari transfer function. Lebih lanjut akan dibahas lagi di bab tentang Pole-Zero plot.

Penggunaan Metode Transformasi pada Sistem Diskret

Operasi konvolusi berlaku juga untuk sistem linier diskret yang disebut penjumlahan konvolusi:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

dengan x[n] masukan, y[n] keluaran dan h[n] respon impuls. Rumusan konvolusi ini diperoleh dari kenyataan bahwa setiap sinyal diskret sembarang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan sinyal-sinyal impuls. Dengan kata lain setiap sinyal diskret sembarang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier impuls-impuls atau

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Untuk sistem diskret, dikembangkan juga bentuk transformasi. Banyak sekali sinyal diskret dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier sinyal eksponensial kompleks z^k atau

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^k \, dz$$

Dalam rumusan ini, k adalah bilangan bulat, z adalah bilangan kompleks, dan integral dilakukan dalam sebuah lingkaran/kontur tertutup. H(z) merupakan faktor pengali/bobot yang disebut transformasi Z dari h(t) dan dapat dihitung dengan rumusan

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Bagaimanakah jika masukan sistem linier diskret berupa sinyal $x[n]=z^n$? Mengikuti rumusan konvolusi, keluaran sistem adalah:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n} z^{-k} \\ &= z^{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \\ &= z^{n} H(z) \end{aligned}$$

Ternyata keluaran sistem terhadap masukan $x[n]=z^n$ sama dengan z^n dikalikan dengan H(z) yaitu transformasi Z dari respon impuls h[n]. Jadi z^n adalah eigenfunction pada sistem linier diskret dengan eigenvalue H(z).

Jika sinyal masukan dapat dinyatakan dalam bentuk transformasi Z yaitu X(z), maka sinyal keluaran adalah X(z) dikalikan dengan H(z) atau Y(z)=X(z)H(z).

Contoh. Sebuah filter digital mempunyai respon impuls h[n]=(d[n] + d[n-1])/2 yang transformasi Z-nya adalah $H(z)=(1+z^{-1})/2$. Filter tersebut diberi masukan $x[n]=0.8^n u[n]$ dengan transformasi Z-nya X(z)=z/(z-0.8). Keluaran filter adalah $Y(z) = z(1+z^{-1})/2(z-0.8) = (z+1)/2(z-0.8)$ yang invers transformasi Z-nya adalah $y[n]=(0.5)0.8^n u[n]+(1.25)0.8^n u[n-1]$.

Transformasi Z banyak dipakai dalam analisis dan desain pemroses sinyal digital seperti penapisan (*filtering*), identifikasi, estimasi sinyal, dan kontroler digital. Transfer function sistem linier diskret berbentuk transformasi Z dari respon impuls, yang juga merupakan perbandingan antara transformasi Z keluaran dengan transformasi Z masukan.

Transfer function sistem diskret = H(z) = Y(z)/X(z) = transformasi Z dari h[n]

Latihan 3.1.

Lihatlah lagi rangkaian RC seperti pada gambar. Misalkan nilai resistansi resistor = a kohm dan nilai kapasistansi kapasitor b uF (a=tiga digit terakhir, b=digit terakhir NIM). Misalkan rangkaian ini diberi nama "rangkaian RC".

1. Gambarlah lagi rangkaian tersebut.
2. Tentukan transfer function dari sistem jika masukan adalah x(t) dan keluaran y(t)
3. Sekarang tukarlah letak R dan C pada rangkaian tersebut. Misalkan rangkaian ini diberi nama "rangkaian CR". Gambarlah rangkaiannya dan tentukan transfer function rangkaian.
4. Ujilah apakah rangkaian RC merupakan sistem invers dari rangkaian CR.
5. Tentukan respon impuls rangkaian CR, tentukan pula respon frekuensi rangkaian CR.
6. Misalkan rangkaian CR diberi masukan unit step, tentukan keluarannya dan gambarlah dengan MatLab.
7. Misalkan rangkaian CR diberi masukan $e^{-t}u(t)$, tentukan keluarannya dan gambarlah dengan MatLab.

Latihan 3.2.

Sebuah sistem linier diskret mempunyai respon impuls $h[n] = (a/200)^n u[n]$ dengan a adalah tiga digit terakhir NIM. Sistem diberi masukan sebuah sinyal x[n]=u[n-b] dengan b adalah digit terakhir NIM. Tabel transformasi Z terlampir cukup untuk digunakan dalam menyelesaikan soal tugas ini.

8. Tentukan transfer function sistem.
9. Carilah y[n] dengan metode transformasi Z.

10. Gambarlah dengan MatLab sinyal h[n], sinyal x[n], dan sinyal y[n].

Pengertian Laplace Transform

Transformasi laplace sering dipergunakan untuk menganalisa sinyal dan sistem linier tak ubah waktu. Transformasi laplace mempunyai banyak karakteristik yang mempermudah analisa tersebut. Transformasi laplace juga sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial sistem. Dalam desain sistem transformasi laplace digunakan untuk menyatakan fungsi alih sistem. Berikut dibahas mengenai transformasi laplace dimulai dari rumusan transformasi laplace.

$$\lambda\{F(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}$$

dengan s adalah bilangan kompleks yaitu s=σ+jω. Penggunaan laplace transform akan lebih jelas dengan contoh sebagai berikut.

<u>Contoh soal</u>:

Diketahui suatu fungsi f(t) sebagai berikut:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; t<0 \\ A & ; t>0 \end{cases}$$

Carilah tranformasi laplace F(s) dari fungsi tersebut.

Penyelesaian:

Dari rumusan transformasi laplace, nilai F(s) dapat dicari sebagai berikut:

$$\lambda\{F(t)\} = \int_0^\infty A e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{A}{-s} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{A}{-s} e^{-\infty} - \frac{A}{-s} e^{-0}$$

$$= \frac{A}{s}$$

Dari penyelesain tersebut dapat dilihat bahwa untuk A=1 berarti f (t) = u (t) maka F (s) = $\frac{1}{s}$. Jadi untuk fungsi undak dapat diperlihatkan bahwa hasil transformasi laplace adalah nilai dari fungsi tersebut dibagi dengan s. Untuk lebih memantapkan penggunaan rumusan transformasi laplace disajikan contoh transformasi laplace dari fungsi lereng.

Tabel 3.1 Tabel Transformasi Laplace

No	*f(t)*	F(s)
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{s}$
3	*T*	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)}$	$\frac{1}{s^n}$

5	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	Sin wt	$\frac{w}{s^2+w^2}$
10	Cos wt	$\frac{s}{s^2+w^2}$
11	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
12	$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
13	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
14	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$

Contoh soal:

Diketahui suatu fungsi sebagai berikut:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ At & ; t \geq 0 \end{cases}$$

Carilah F(s).

Penyelesaian:

$$\lambda\{f(t)\} = \int_0^\infty At\, e^{-st}\, dt$$

$$= At\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s}\, dt$$

$$= \frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{A}{s^2}$$

dari penyelesaian tersebut dapat dilihat bahwa hasil transformasi laplace untuk fungsi lereng adalah gradient fungsi lereng dibagi dengan s. Dengan beberapa contoh tersebut dapat dilihat bahwa transformasi laplace mengubah fungsi-fungsi umum dalam t seperti fungsi undak, fungsi lereng, fungsi sinus dan fungsi-fungsi lain menjadi fungsi-fungsi aljabar variabel kompleks s.

Penggunaan integral untuk mencari transformasi laplace dari suatu fungsi sering menjadi pekerjaan yang kurang menyenangkan. Untuk lebih mempermudah proses transformasi pada Tabel 3.1, disajikan tabel transformasi laplace.

Karakteristik Transformasi Laplace

Transformasi Laplace mempunyai beberapa sifat penting yang berguna untuk analisa sinyal dan sistem linier tak ubah waktu. Sifat-sifat Transformasi Laplace antara lain adalah sebagai berikut:

1) $£\left[A f(t)\right] = A F(s)$

2) $£\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$

3) $£_{\pm}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$

4) $£_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0\pm) - f^{(1)}(0\pm)$

5) $£_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k-1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0\pm)$

6) $£_{\pm}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}}{s}$

7) $£_{\pm}\left[\Lambda \int f(t)\,dt^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\Lambda \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$

8) $£\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

9) $\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{s \to 0} F(s)\ jika \int_0^{\infty} f(t)\,d(t)\ ada$

10) $£\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$

11) $£\left[f(t-\alpha)\,u(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha s} F(s)\quad \alpha \geq 0$

12) $£\left[t^2 f(t)\right] = \dfrac{d^2}{ds^2} F(s)$

13) $£\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$

14) $£\left[t f(t)\right] = -\dfrac{d}{ds} F(s)$

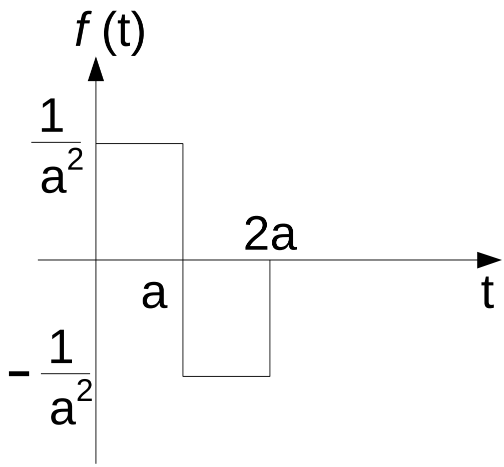
15) $£\left[\dfrac{1}{t} f(t)\right] = \int_0^{\infty} F(s)\, d(s)$

16) $£\left[f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right] = a F(as)$

Penggunaan sifat-sifat tersebut dalam membantu transformasi sinyal atau sistem diaplikasikan dalam contoh berikut:

Contoh soal:

Carilah transformasi Laplace dari gambar sinyal berikut ini:



Penyelesaian:

Persamaan dari sinyal diatas adalah:

$$f(t) = \frac{1}{a^2}\left[u(t) - u(t-a)\right] - \frac{1}{a^2}\left[u(t-a) - u(t-2a)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}u(t) - \frac{2}{a^2}u(t-a) + \frac{1}{a^2}u(t-2a)$$

F (s) = £ f (t)

$$= \frac{1}{a^2}\lambda\left[u(t)\right] - \frac{2}{a^2}\lambda\left[u(t-a)\right] + \frac{1}{a^2}\lambda\left[u(t-2a)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{s} - \frac{2}{a^2}\frac{1}{s}e^{-as} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{s}e^{-2as}$$

$$= \frac{1}{a^2 s}\left(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right)$$

Penyelesaian tersebut didapat dengan mengingat karakteristik:

£ [u(t)] = $\frac{1}{s}$

£ $\left[f(t-\alpha)\,u(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha s}F(s) \quad ,\alpha \geq 0$

Transformasi Laplace Balik

Transformasi balik dipergunakan untuk mendapatkan fungsi atau sinyal dalam bentuk t dari suatu fungsi laplace s.

$$\lambda^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)\,e^{st}\,ds \quad (t>0)$$

c = dipilih > dari semua bagian *real* titik singular.

Cara ini sangat sulit untuk dikerjakan maka dipakai Tabel Transformasi Laplace yang ada pada Tabel 3.1, yaitu dengan cara mengubah fungsi ke dalam bentuk yang ada dalam tabel.

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\Lambda(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\Lambda(s+p_n)} \qquad (m<n)$$

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\Lambda+\frac{a_n}{s+p_n}$$

dengan a_k (k = 1, 2, …..n), a_k dihitung sebagai berikut:

$$\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}=\left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}+\Lambda+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\Lambda+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\right]$$

$$=a_k$$

jadi:

$$a_k=\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

$$\lambda^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right]=a_k e^{-p_k t}$$

$$f(t)=\lambda^{-1}[F(s)]=a_1e^{p_1 t}+a_2e^{-p_2 t}+\Lambda+a_ne^{-p_n t} \qquad (t\geq 0)$$

Berikut contoh penggunaan tabel tranformasi laplace unntuk mendapatkan kembali f(t) dari F(s) dengan orde penyebut lebih tinggi.

<u>Contoh soal</u>:

Diketahui F(s) sebagai berikut:

$$F(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

carilah *f (t)*.

Penyelesaian:

$$F(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

dengan rumusan a_k didapat:

$$a_1 = \left[(s+1)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{s+4}{s+2} \right]_{s=-1} = 3$$

$$a_2 = \left[(s+2)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{s+4}{s+1} \right]_{s=-2} = -2$$

jadi:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda^{-1}\left[F(s)\right] \\ &= \lambda^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] + \lambda^{-1}\left[\frac{-2}{s+2}\right] \\ &= 3e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad (t \geq 0) \\ &= \left(3e^{-t} - 2e^{-2t}\right) u(t) \end{aligned}$$

Berikut contoh penggunaan tabel tranformasi laplace untuk mendapatkan kembali f(t) dari F(s) dengan orde pembilang lebih tinggi.

<u>Contoh soal</u>:

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 8}{(s+1)(s+2)}$$

carilah *g (t)*.

Penyelesaian:

Pembagian pembilang dengan penyebut menghasilkan:

$$G(s) = s + 2 + \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 3e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad ;t \geq 0$$

Untuk fungsi dalam yang melibatkan banyak kutub maka Transformasi Laplace baliknya dikerjakan dengan ekspansi parsial sebagai berikut:

<u>Contoh soal</u>:

Tinjau $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

Penyelesaian:

Ekspansi pecahan parsial menghasilkan

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{(s+1)}$$

$$(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}=b_3+b_2(s+1)+b_1(s+1)^2$$

saat s = -1 maka:

$$\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=b_3$$

b_2 didapatkan dengan diferensiasi persamaan (1)

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]=b_2+2b_1(s+1)$$

dengan s = -1,

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=b_2$$

b_1 didapatkan dengan diferensial kuadrat persamaan (1)

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=2b_1$$

Secara umum penyelesaian Laplace balik n kutub dapat diringkas sebagai berikut:

$$b_k=\frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}\left[(s+a)^n\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-a}$$

dengan n = derajat polinomial banyak kutub.

k = n, n-1, n-2, …….1

dengan demikian didapatkan b_1, b_2, b_3 sebagai berikut:

$$b_3 = \left[(s+1)^3 \frac{(s^2+2s+3)}{(s+1)^3} \right]_{s=-1}$$

$$= \left[s^2 + 2s + 3 \right]_{s=-1}$$

$$= 2$$

$$b_2 = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{(s^2+2s+3)}{(s+1)^3} \right]_{s=-1}$$

$$= \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1}$$

$$= \left[2s + 2 \right]_{s=-1}$$

$$= 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 \frac{(s^2+2s+3)}{(s+1)^3} \right]_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2}.2$$

$$= 1$$

jadi untuk contoh soal di atas.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lambda^{-1}\left[F(s)\right] \\
&= \lambda^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}\right] \\
&= t^2 e^{-t} + e^{-t} \\
&= (t^2+1)e^{-t} \qquad (t \geq 0) \\
&= (t^2+1)e^{-t} \quad u(t)
\end{aligned}
$$

Transformasi Laplace Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial

Penyelesaian persamaan diferensial dengan mencari tanggapan homogen dan tanggapan paksa yang telah dibahas dalam Bab 2. Penyelesaian dengan cara tersebut memerlukan perumpamaan tanggapan yang tepat. Cara yang lebih mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial tanpa harus menggunakan perumpamaan tanggapan adalah dengan transformasi Laplace.

Untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial yang pertama dilakukan adalah pengubahan persamaan ke bentuk s. Untuk lebih jelasnya disajikan contoh berikut:

Contoh soal:

Carilah penyelesaian untuk persamaan diferensial berikut ini:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = a, \ \dot{x}(0) = b$$

Penyelesaian:

$$\lambda\left(\ddot{x}\right) = s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)$$

$$\lambda\left(\dot{x}\right) = s\,X(s) - s\,X(0)$$

$$\lambda\left[\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x\right] = s^2 X(s) - s\,X(0) - \dot{x}(0) + \left[s\,X(s) - X(0)\right] + 2X(s)$$

$$= (s^2 + 3s + 2)X(s) - as - 3a - b$$

maka,

$$(s^2 + 3s + 2)\,x(s) = as + b + 3a$$

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{2a + b}{s + 1} - \frac{a + b}{s + 2}$$

Laplace balik dari X (s) menghasilkan:

$$X(t) = \lambda^{-1}\left[X(s)\right]$$

$$= \lambda^{-1}\left[\frac{2a + b}{s + 1}\right] - \lambda^{-1}\left[\frac{a + b}{s + 2}\right]$$

$$= (2a + b)e^{-t} - (a + b)e^{-2t} \qquad (t \geq 0)$$