Actividad 3.1

Unidad Temática N° 3: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias

➢ **Ejemplo 3.1:** **(ODE de primer orden)**

a) Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial que describe el crecimiento exponencial de bacterias (Ley de Malthus).

$$\dot{x}-kx=0$$

donde la constante k > 0 es la tasa de crecimiento.

b) Resuelva el problema de valor inicial:

$$\dot{x}-kx=0 \ , \quad x_0=1$$

c) Utilice la tasa de crecimiento k = 0,5 y grafique para algunas condiciones iniciales.

a) La forma general para una ecuación diferencial de primer orden que vimos en la teoría es:

$$\dot{x}=f(t,x).$$

Notemos que en este caso la función f(t,x) = kx, es decir, no depende de t. Entonces se dice que es de variables separables. Si f es integrable entonces:

$$\frac{dx}{dt}=kx \Rightarrow \frac{dx}{x}=kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x}=\int kdt \Rightarrow \ln(|x|)=kt+c.$$

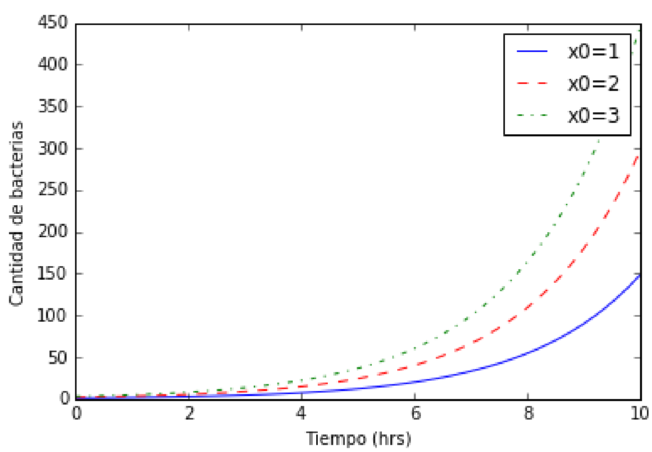
La solución general será:

$$x=x_0 e^{kt}.$$

b) Si el valor inicial es 1, entonces el resultado es: $x=e^{kt}$.

c) Simulación.

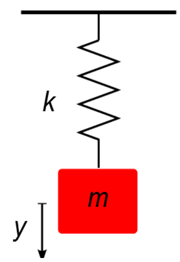
En este caso simple se puede obtener la solución de la ecuación diferencial, aunque no siempre es así. Es importante poder resolver este tipo de ecuaciones de manera numérica. Utilizaremos el script de python (ver referencia [1]) ejemplo3.1.py para resolver y graficar esta ecuación diferencial para diferentes condiciones iniciales.



Nota importante: en el último inciso vimos la resolución numérica de una ODE utilizando python. Específicamente, utilizamos las herramientas de **scipy** [2]. Estas herramientas contienen muchas subrutinas para diferentes cálculos científicos, en particular, utilizamos **odeint**. Para graficar utilizamos la librería **matplotlib** [3].

- **Ejemplo 3.2: (ODE de orden dos)**

a) Dos soluciones particulares de la ecuación:



$$m\ddot{y}+ky=mg$$

son:

$$x_1=\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{y} \quad x_2=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Verifique que son soluciones.

b) Obtenga el Wronskiano de la solución y verifique que son soluciones independientes y entonces W es distinto de cero.

c) Obtenga los valores de c_1 y c_2, para los cuales el se cumpla el problema de valor inicial: $y(t=0)=y_0$ y $\{\dot{y}(t=0)=v_0$¿.

d) Resolver para m=5kg, k=200N/m, tomando g=9,8 m/s², y los valores iniciales:

$$y(t=0)=0{,}295 \text{ m} \text{ y } \{\dot{y}(t=0)=0{,}5 \text{ m/s}.¿$$

a) Para resolver el problema podríamos considerar conveniente realizar una sustitución. Llamamos: $x=y-mg/k$, entonces la ecuación diferencial del problema queda expresada como:

$$m\ddot{x}+kx=0 \qquad (*)$$

Para verificar que x_1 y x_2 son soluciones solo debemos operar como sigue.

$$\dot{x}_1=-\sqrt{\frac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad , \quad \{\ddot{x}_1=-\frac{k}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)¿$$

$$\dot{x}_2=\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad , \quad \{\ddot{x}_2=-\frac{k}{m}sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)¿$$

Reemplazando en la Ec. (*), entonces se verifica que ambas son soluciones.

b) El Wronskiano de las soluciones es:

$$W=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) & sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) & \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{vmatrix}=\sqrt{\frac{k}{m}}\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\sqrt{\frac{k}{m}}sen^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)=\sqrt{\frac{k}{m}}\neq 0$$

Verificamos que las dos soluciones son linealmente independientes. Por consiguiente una solución general será:

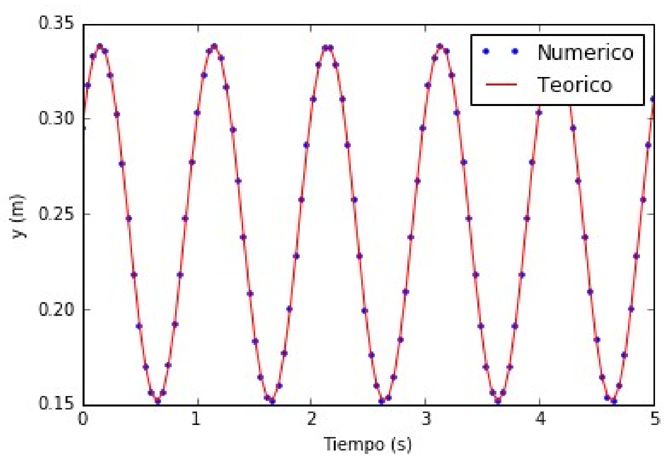
$$x=c_1 x_1+c_2 x_2$$

c) Ahora obtenemos una solución particular que verifique las condiciones iniciales. Notemos que la solución general antes hallada debe verificar las condiciones iniciales:

$$x(0)=c_1 x_1(0)+c_2 x_2(0)=x_0$$
$$\dot{x}(0)=c_1 \dot{x}_1(0)+c_2 \dot{x}_2(0)=v_0$$

entonces resolviendo el sistema de ecuaciones anterior los valores de las constantes serán:

$$c_1=x_0 \quad \text{y} \quad c_2=\sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$



d) Reemplazando los valores mencionados y graficando se obtiene la línea continua (roja). Si en cambio la resolvemos numéricamente obtenemos la línea de puntos (azules).
Utilizamos el script de python **ejemplo3.2.py** para resolver y graficar esta ecuación.

Nota importante 1: en el último inciso vimos la resolución numérica de una ODE de segundo orden utilizando python y su comparación con el valor teórico hallado. Debe comentarse que se utilizó una variable auxiliar: $a=\dot{x}\Rightarrow\dot{a}=\ddot{x}$. Entonces, operando llegamos a dos ODE de primer orden:

$$\dot{a}=-\frac{k}{m}x$$
$$\dot{x}=a$$

Esto es lo que finalmente se resuelve de manera numérica con **odeint**. Avanzaremos en este concepto y lo generalizaremos en las siguientes clases.

Nota importante 2: En este ejemplo las dos soluciones particulares de la ODE fueron dadas por el enunciado. Si tuviéramos que hallarlas, podemos utilizar la ecuación característica (ver capítulo 2 de referencia [4]).

- **Ejemplo 3.3: (Solución de la ODE no homogénea de orden dos)**

a) Encontrar la solución general de la siguiente ODE no homogénea:

$$\ddot{x}+4x=12t$$

sabiendo que una solución particular es: $x_p=3t$***, (verifíquelo).***

b) Obtenga la solución que verifica el problema de valor inicial:

$$x(0)=1 \quad \textbf{\textit{y}} \quad \dot{x}(0)=5$$

c) Transformar esta ecuación en un sistema de dos ODE de orden 1.

d) Resolver numéricamente con el software que prefiera.

a) Para verificar solo sustituimos y evidentemente es una solución de la ecuación. Por otro lado, se debe notar que para encontrar una solución general *X*, debemos tener también la solución complementaria, es decir, la de la ecuación homogénea asociada:

$$\ddot{x}+4x=0$$

Esta ecuación ya la hemos resuelto en el ejemplo 3.2 (es como pensar que tenemos un resorte de constante k = 4 N/m y m = 1 kg). Sabemos entonces que una solución general de la homogénea asociada (solución complementaria) es:

$$x_c=c_1\cos(2t)+c_2 sen(2t).$$

Entonces una solución general de la no homogénea será:

$$X=x_c+x_p=c_1\cos(2t)+c_2 sen(2t)+3t.$$

b) Para cumplir el problema de valor inicial solo reemplazo las condiciones iniciales en la ecuación anterior:

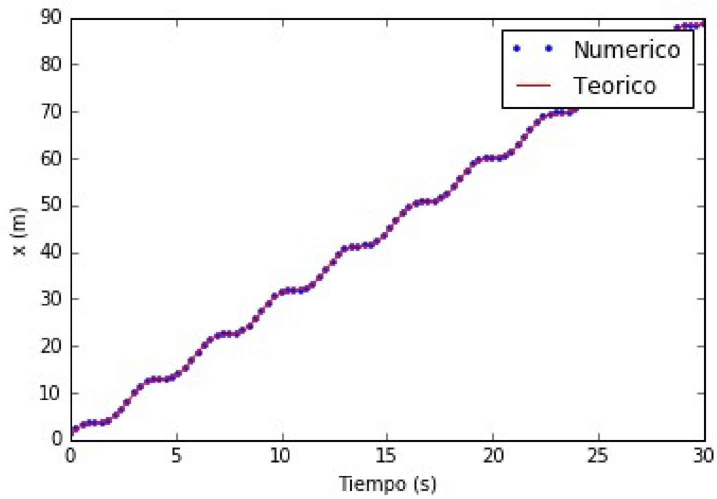
$$\begin{matrix} x(t=0)=1=c_1 \\ \dot{x}(t=0)=5=2c_2+3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1=1 \\ c_2=1 \end{matrix}$$

La solución particular es: $x=\cos(2t)+sen(2t)+3t.$

c) Utilizando el razonamiento de la filmina 13, transformaremos la ODE de segundo orden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Si definimos: entonces el sistema de ecuaciones queda:

$$x_1=x \quad \text{y} \quad x_2=\dot{x},$$

Reemplazando los valores mencionados y graficando se obtienen los valores teóricos (la línea continua (roja)). Si en cambio la resolvemos numéricamente obtenemos la línea de puntos (azules). Utilizamos el script de python **ejemplo3.3.py** para resolver y graficar esta ecuación.



- **Ejemplo 3.4: (coeficientes indeterminados)**

Encontrar la solución general de la siguiente ODE no homogénea mediante el método de coeficientes indeterminados:

$$\dddot{x}+\ddot{x}=3e^{t}+4t^{2} \qquad (**)$$

Para encontrar una solución general debemos primero resolver la ecuación homogénea asociada, cuya ecuación característica mostramos a continuación:

$$\dddot{x}+\ddot{x}=0 \Rightarrow r^{3}+r^{2}=r^{2}(r+1)=0 .$$

Esto significa que tendremos una raíz doble en 0 y una simple en -1, la solución complementaria será entonces:

$$x_c=c_1+c_2 t+c_3 e^{-t} .$$

Ahora debemos encontrar la solución particular de de la no homogénea, implementamos el método de los coeficientes indeterminados (específicamente el caso 3 combinado con el caso 2). Deberíamos elegir entonces, según el caso 3 a la funciónes: $x_p=Ce^{t}+K_2 t^{2}+K_1 t+K_0$, pero notemos que la parte de la función que es polinomio también es solución de la homogénea asociada. Entonces debemos multiplicar por t^k, en este caso, bastará con $k = 2$. Por lo tanto, la solución particular de la no homogénea tendrá la forma:

$$x_p=Ce^{t}+K_2 t^{4}+K_1 t^{3}+K_0 t^{2}$$

Calculamos las derivadas:

$$\dot{x}_p=Ce^{t}+4K_2 t^{3}+3K_1 t^{2}+2K_0 t$$

$$\ddot{x}_p=Ce^{t}+12K_2 t^{2}+6K_1 t+2K_0$$

$$\dddot{x}_p=Ce^{t}+24K_2 t+6K_1$$

Ahora reemplazamos en (**) y obtenemos:

$$Ce^t+24K_2t+6K_1+Ce^t+12K_2t^2+6K_1t+2K_0=3e^t+4t^2$$

Reordenando la ecuación:

$$2Ce^t+12K_2t^2+\left(24K_2+6K_1\right)t+6K_1+2K_0=3e^t+4t^2$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2C=3 \\ 12K_2=4 \\ 24K_2+6K_1=0 \\ 6K_1+2K_0=0 \end{cases} \Rightarrow C=\frac{3}{2}, K_2=\frac{1}{3}, K_1=-\frac{4}{3}, \text{ y } K_0=4.$$

Entonces finalmente obtuvimos la solución general de la ecuación no homogénea:

$$X=x_c+x_p=c_1+c_2t+c_3e^{-t}+\tfrac{3}{2}e^t+\tfrac{1}{3}t^4-\tfrac{4}{3}t^3+4t^2$$

- **Ejemplo 2.5: (variación de parámetros)**

a) Encontrar la solución particular por el método de variación de parámetros de la siguiente ODE no homogénea:

$$t^2\ddot{x}+4t\dot{x}+6x=t^3$$

sabiendo que una solución complementaria de esta ecuación es:

$$x_c=c_1t^2+c_2t^3$$

b) Resuelva el problema de valor inicial con las condiciones:

$$\dot{x}\left(t_0=1\right)=3 \quad \text{y} \quad x\left(t_0=1\right)=0.$$

a) Remarcamos que la ecuación diferencial debe estar escrita de la forma:

$$\ddot{x}-\frac{4}{t}\dot{x}+\frac{6}{t^2}x=t,$$

es decir, el coeficiente que acompaña a la derivada de mayor orden debe ser 1. Como consecuencia, la variable t debe ser distinta de cero. Se tienen los valores de x_1 y x_2, podemos entonces encontrar W, W_1, y W_2.

$$x_c=c_1t^2+c_2t^3\Rightarrow x_1=t^2 \quad \text{y} \quad x_2=t^3.$$

$$W=\begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{vmatrix}=t^4, \quad W_1=\begin{vmatrix} 0 & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{vmatrix}=-t^3, \quad \text{y} \quad W_1=\begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 1 \end{vmatrix}=t^2.$$

Entonces una solución particular será:

$$x_p = t^2 \int_{t_0}^{t} -\frac{t'^3}{t'^4} t' \, dt' + t^3 \int_{t_0}^{t} \frac{-t'^2}{t'^4} t' \, dt' = t^2 (t_0 - t) + t^3 (\ln t - \ln t_0).$$

La solución general de la ecuación será:

$$X = c_1 t^2 + c_2 t^3 + t^2 (t_0 - t) + t^3 (\ln t - \ln t_0).$$

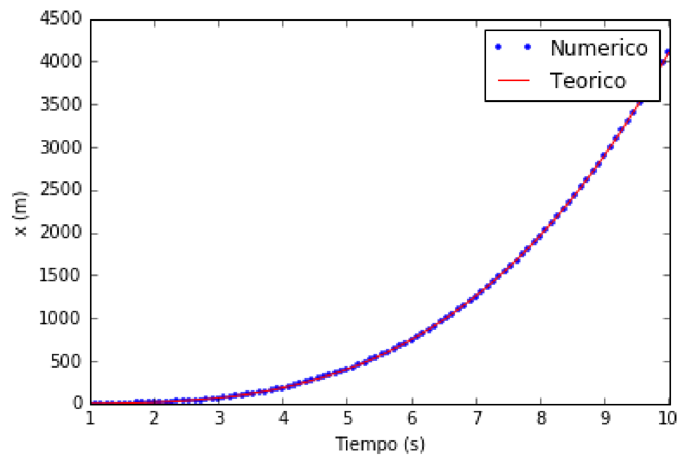
b) Resolvemos ahora el problema de valor inicial.

$$\begin{cases} x(1) = 0 = c_1 + c_2 \\ \dot{x}(1) = 3 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -3 \ \mathbf{y} \ c_2 = 3.$$

La solución es:

$$x = -3t^2 + 3t^3 + t^2 (1 - t) + t^3 \ln t.$$

La resolución numérica comparada con la teórica se muestra en siguiente figura utilizando el script **ejemplo3.5.py.**



Nota importante: a diferencia de los ejercicios anteriores en este ejercicio la variable independiente t comienza a evaluarse en el intervalo t > 1 porque en t = 0 la ecuación no está definida. Es por eso que en la solución general aparece el valor inicial de esta variable (t_0).

- **Ejemplo 3.6: (Sistema de ecuaciones diferenciales)**

a) Encontrar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2$$

b) Resuelva el problema de valor inicial con las condiciones:

$$x_1(t_0 = 0) = 2{,}0 \quad \text{y} \quad x_2(t_0 = 0) = -1{,}5.$$

c) Grafique el plano de fase (opcional).

a) Escribiendo el sistema de manera matricial y luego calculando el polinomio característico:
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}x \Rightarrow \left|\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=0$$

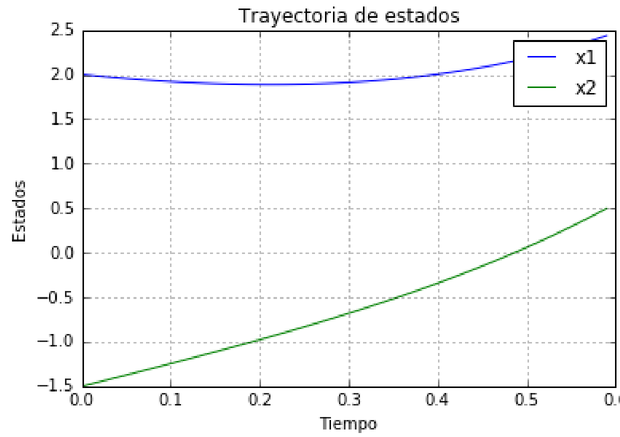
Los autovalores son: 3 y -1. Los autovectores se pueden calcular de la siguiente manera. El asociado con el autovalor λ_1=3 será:
$$\left[\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2v_{11}+2v_{21}\\ 2v_{11}-2v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
esto significa que podría elegir cualquier v_{11}, por ejemplo, v_{11} = *1*, entonces consecuentemente v_{21} = *1* también. Por consiguiente:
$$x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{3t}$$
El asociado con el autovalor λ_2 = -1 será:
$$\left[\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2v_{12}+2v_{22}\\ 2v_{12}+2v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
si se elije v_{12} = *1*, por ejemplo, entonces v_{22} = *-1* también. La solución asociada a este autovalor es:
$$x_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-t}$$

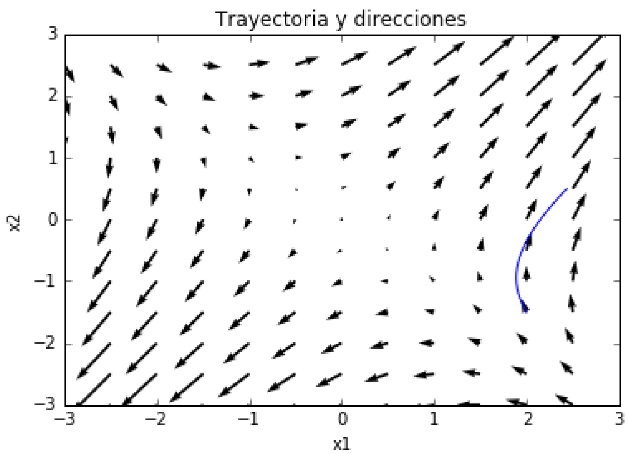
De estas dos soluciones se puede verificar que son independientes por medio del Wronskiano:
$$W=|x_1 \quad \mathrm{x}_2|=\begin{vmatrix}e^{3t} & e^{-t}\\ e^{3t} & -e^{-t}\end{vmatrix}=-e^{2t}-e^{2t}=-2e^{2t}$$
que es distinto de cero para todo t. La solución general será finalmente:
$$x(t)=c_1x_1+c_2x_2=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{3t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-t}$$
b) En el problema de valor inicial si t_0 = 0 entonces:
$$x(0)=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1,5\end{bmatrix}\Rightarrow c_1=\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad c_2=\frac{7}{4}$$

La solución es:
$$x(t)=c_1x_1+c_2x_2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{3t}+\frac{7}{4}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-t}$$

c) Describiremos con más detalle el diagrama de fases de un sistema autónomo (homogéneo) en la siguiente unidad. Estos diagramas se pueden hacer cuando se tienen dos variables o estados (x_1 y x_2). La idea es graficar la evolución de las dos variables tomando como variable intrínseca el tiempo, es decir, graficar una en función de la otra, $x_2 = f(x_1)$. Estos se grafican para diferentes posiciones iniciales. En el caso de este ejercicio utilizamos un script de python **ejemplo3.6.py.**

Por ejemplo, la figura de la derecha muestra la evolución de los dos estados explicitando la variable t (Tiempo).





La figura de la izquierda muestra las variables de la figura anterior (una en función de la otra en azul continua) y las flechas indican cómo evolucionarían los estados, es decir, todas las posibles soluciones partiendo de diferentes posiciones iniciales.

Los usuarios de matlab, pueden utilizar una función denominada pplane (pueden descargarla de Rice University: http://math.rice.edu/~dfield/) desarrollada por John C. Polking.

Referencias

[1] https://www.python.org/

[2] http://www.scipy.org/

[3] http://matplotlib.org/

[4] Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). Elementary differential equations. Pearson Higher Ed.6.