Actividad 2.5

Unidad Temática N° 2: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias

- **Ejemplo 2.7: (caso A.i), nodo estable ($\lambda_1<0$ y $\lambda_2<0$))**

a) Encontrar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

b) Resuelva el problema de valor inicial con las condiciones:

$$x_1(0) = 2{,}0 \quad \mathbf{y} \quad x_2(0) = -1{,}5.$$

c) Grafique el diagrama de fases.

a) Hallamos los autovalores procediendo de igual manera a la presentada en el ejemplo adicional 8.

$$\left|\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda I\right| = (-3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

cuyas raíces son: -2 y -4. Estos son sus dos autovalores son negativos y sus autovectores asociados serán:

-Para λ_1=-2

$$\left[\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right]\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 1 \,\mathbf{y}\, v_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

-Para λ_2=-4

$$\left[\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right]\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = -1 \,\mathbf{y}\, v_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede verificar ambos son linealmente independientes. Por lo que la solución general se puede escribir como:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-4t}$$

Notar que en este caso tanto x1 como x2 decrecen exponencialmente, por lo que el nodo (0,0) será estable. Esto significa que todas las trayectorias evolucionarán hacia este nodo.

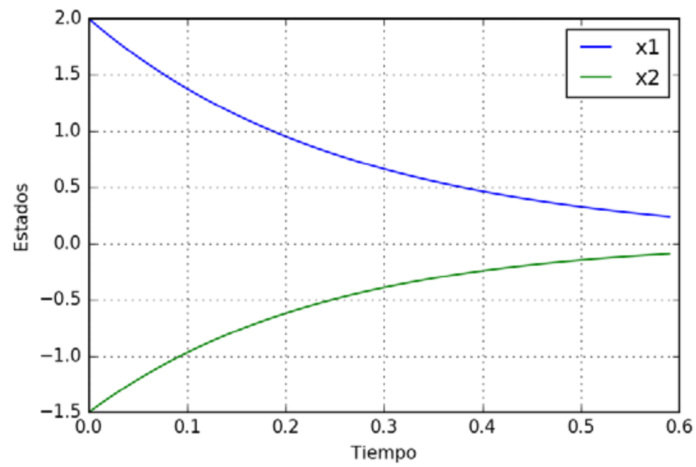
b) Para cumplir con las condiciones iniciales debemos plantear:

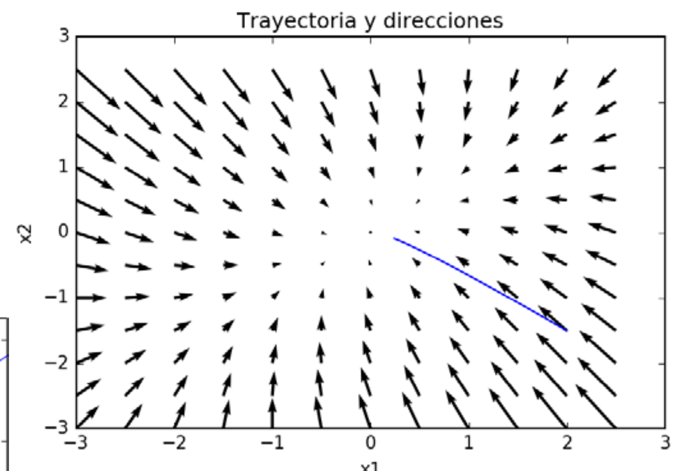
$$x_1(0) = 2 = c_1 - c_2$$
$$x_2(0) = -1{,}5 = c_1 + c_2$$

de aquí se desprende que c_1 = 1/4 y c_2 =-7/4. Por lo que el problema de valor inicial tiene como solución:

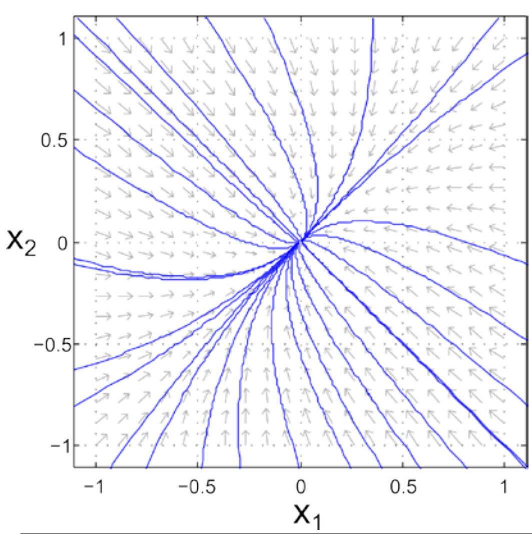
$$\mathbf{x} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-2t} - \frac{7}{4}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-4t}$$

c) Para graficar el diagrama de fase utilizamos la misma función que en el ejemplo 2.6 de la actividad 2.1. Utilizaremos el script de python **ejemplo2.7.py** para resolver y graficar los estados de la ecuación diferencial para las condiciones iniciales mencionadas. Notar que ambas evolucionan al nodo (0,0).





Esto ocurrirá para cualquier condición inicial tal como se muestra en la siguiente figura (diagrama de fase).



Si dibujamos algunas trayectorias más tendremos la figura de la izquierda.

- **Ejemplo 2.8:** **autovalores de multiplicidad k**

Encontrar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Si calculamos los autovalores de esta matriz dan como resultado un autovalor con multiplicidad k = 3 en λ = 2 (resuelto en script de python, mire la diferencia del cálculo a mano y en computadora!).
Notemos que la ecuación $\text{rango}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 2$, (ver resolución en el script de python **ejemplo2.8.py**). Esto significa que tendré solo 1 autovector asociado a este autovalor, necesitaré 2 más para formar la base y así encontrar la solución general. Calculamos las siguientes matrices:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \quad (A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nos damos cuenta que:

$$(A - \lambda I)^3 \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo cumple cualquier autovector. Podemos utilizar cualquiera que no anule $(A- \lambda I)\mathbf{v}_3$.
Podemos usar: $\mathbf{v}_3 = [1\ 0\ 0]^T$. Entonces comenzamos a desarrollar la cadena de autovectores generalizados hasta llegar al ordinario.

$$\mathbf{v}_2 = (A - \lambda I)\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = (A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con los tres autovectores ya tengo la base y puedo construir las soluciones:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{2t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{2t} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

$$\mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3 \right) e^{2t} = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

Aquí están los tres vectores linealmente independientes que me permiten construir la solución general: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + c_3\mathbf{x_3}$.

- **<u>Ejemplo 2.9:</u> Matriz exponencial**

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la matriz exponencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver la matriz A se puede escribir como suma de dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix} = B + C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz B es diagonal y la C es nilpotente, por lo que sus potencias se anularán, en este caso a partir de C^3 (inclusive), serán matrices nulas. Entonces podré truncar la serie de la propiedad i) de la matriz exponencial y con la propiedad ii) se podrá calcular la matriz exponencial de B. Entonces:

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \quad e^{Ct} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!}$$

Por lo tanto la matriz exponencial quedará:

$$e^{At}=e^{(B+C)t}=e^{Bt}e^{Ct}=\left(\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}\right)\left(I+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix}t+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}\right)=$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 10te^{5t} & e^{5t} & 0 \\ \left(150t^2+20t\right)e^{5t} & 30te^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

El problema de valor inicial quedará resuelto con:

$$\mathbf{x}(t)=e^{At}\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 10te^{5t} & e^{5t} & 0 \\ \left(150t^2+20t\right)e^{5t} & 30te^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 10t-2 \\ 150t^2-40t+1 \end{bmatrix}e^{5t}$$

Referencias

[1] https://www.python.org/

[2] http://www.scipy.org/

[3] http://matplotlib.org/

[4] Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). Elementary differential equations. Pearson Higher Ed.6.