数値解析特論 I 期末レポート

担当教員： 木下武彦

確定版

$\boxed{1}$ 第 2 回 – 第 4 回の講義資料にあるグループワーク課題のどれか 1 つを解いてください．

[補足]

- 物理モデル (単位を持つ偏微分方程式) とそれを無次元化した数学モデル (無次元量のみから成る偏微分方程式) の両方を導出してください．

$\boxed{\text{解答}}$

第 2 回の課題 1 を解いた．スライド中の仮定を用いて，微小部分にかかる力は，

$$F(X+\Delta X, T)\sin\theta(X+\Delta X, T) - F(X,T)\sin\theta(X,T) \tag{1}$$

この微小部分における運動方程式は，ρ が X に依存するため，以下のように求まる．

$$\begin{aligned}&\Delta X(\rho(X+\Delta X)-\rho(X))\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T)\\ =\ &F(X+\Delta X, T)\sin\theta(X+\Delta X, T) - F(X,T)\sin\theta(X,T)\end{aligned} \tag{2}$$

式 2 を変形し，$\Delta X \to 0$ の極限を取ると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) &= \frac{1}{\Delta X}\left(\frac{F(X+\Delta X, T)\sin\theta(X+\Delta X, T) - F(X,T)\sin\theta(X,T)}{\rho(X+\Delta X)-\rho(X)}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{F}{\rho}\sin\theta(X,T)\right)\end{aligned}$$

次に，右辺の分母・分子に $\frac{1}{\cos\theta(X,T)}$ をかけて，$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$ より，

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{F}{\rho}\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\frac{1}{\cos\theta(X,T)}}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{F}{\rho}\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\right)\end{aligned}$$

よって，以下の非線形偏微分方程式が求まる．

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{F}{\rho}\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\right) \tag{3}$$

次に，式3を無次元化する．スライドと同様に，X の取りえる範囲を (X_L, X_R)，T の取りえる範囲を $(0,\infty)$ とし，定数 $X_0 > 0$ を取り，$X_0 := X_R - X_L$ とする．また，$F(X,T)$ と$\rho(X)$ を無次元化するために，X 同様，取りえる範囲をそれぞれ，$(F_L, F_R), (\rho_L, \rho_R)$ と定め，定数 $F_0, \rho_0 > 0$ を取り，$F_0 := F_R - F_L, \rho_0 := \rho_R - \rho_L$ とする．以下に，無次元化された変数を列挙する．

$$\begin{aligned}
u &:= \frac{U}{X_0}(X,T) \qquad [m]\cdot[1/m] = [1] \\
x &:= \frac{X - X_L}{X_0} \qquad [m]\cdot[1/m] = [1] \\
f &:= \frac{F}{F_0}(X,T) \qquad [N]\cdot[1/N] = [1] \\
r &:= \frac{\rho}{\rho_0}(X) \qquad [kg/m]\cdot[m/kg] = [1] \\
t &:= \frac{1}{X_0}\sqrt{\left(\frac{F_0}{\rho_0}\right)}T \qquad [1/m]\cdot[m/s]\cdot[s] = 1
\end{aligned}$$

このとき，$u(x,t)$ の満たす微分方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{X_0}\frac{\partial U}{\partial T}(X,T)\frac{dT}{dt}(t) = \sqrt{\frac{\rho_0}{F_0}}\frac{\partial U}{\partial T}(X,T) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= X_0\frac{\rho_0}{F_0}\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial U}{\partial X}(X,T) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= X_0\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)
\end{aligned}$$

これらの関係を用いて，式 3 を変形すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{F}{\rho}\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\right) \\
\frac{1}{X_0}\frac{F_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{F}{\rho}\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\right) \\
\frac{1}{X_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{F}{F_0}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\right)\frac{f}{r} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}}{\frac{\partial}{\partial X}\sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\right)^2}}\frac{f}{r} \\
&= \frac{1}{X_0}\frac{f}{r}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2}
\end{aligned}
$$

よって，無次元化された偏微分方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{f}{r}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2} \tag{4}$$

$\boxed{2}$ $\Omega := (0,1)\times(0,1)$ とします．

$$f(x,y) := \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-5\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}, \quad \forall(x,y)\in\Omega$$

のグラフを描画してください．

[補足]

- グラフを描画する方法は NumPy + matplotlib, SymPy, f の区分 1 次補間など，何を使っても構いません．
- 区分 1 次補間のグラフを描画する場合は，R20 メッシュを使ってください．
- 解答はグラフを描画した画像を貼り付けてください．

$\boxed{3}$ $\phi_1(x) := \sin(\pi x)$, $\phi_2(x) := \sin(2\pi x)$ とおきます．$\{\phi_i\}_{i=1}^2$ を基底とする関数空間を

$$V_h := \left\{\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2 \in H_0^1(0,1) \,\middle|\, \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$$

とします．このとき，任意に与えられた $V_h \ni f_h := c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ に対して，次の変分問題：

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx}(x)\frac{dv_h}{dx}(x)\,dx = \int_0^1 f_h(x)v_h(x)\,dx, \quad \forall v_h \in V_h \tag{5}$$

の解 $u_h \in V_h$ を求めてください．

[補足]

- $u_h = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$, $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$, $v_h = b_1\phi_1 + b_2\phi_2$, $(b_1, b_2 \in \mathbb{R})$ として，これらを (5) に代入します．
- 積分は手で計算しても構いませんし，SymPy を使っても構いません．
- (5) は任意の $v_h \in V_h$ に対して等号が成り立つ $\iff$ 任意の実数 $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ について積分を計算した等号が成り立つ $\iff$ b_1, b_2 に関する恒等式となることから，(5) と同値な連立一次方程式がえられます．
- 連立一次方程式を解けば u_h が求まります．具体的に，a_1, a_2 は c_1, c_2 を用いて書き下すことができます．

$\boxed{4}$ $\Omega := (0,1) \times (0,1)$ の正方形領域とします．

$$g_D(x,y) := \begin{cases} y(1-y), & \forall(1,y) \in \partial\Omega \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおきます．このとき，次の Poisson 方程式：

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の有限要素解を求めてください．

[補足]

- Ω のメッシュは講義資料で配布した R20 メッシュを使ってください．
- 解答は有限要素解のグラフを描画した画像を貼り付けてください．