数値解析特論 I
シミュレーション

木下武彦

佐賀大学 理工学部

この講義について

数値解析特論 I

- 金曜日 5 校時開講
- Microsoft Teams によるオンデマンド（動画配信）型講義および対面でのグループワークを予定していましたが，受講者も少ないし，全部対面でやろうかと思います.

単位の認定について

- 期末レポートの成績 (85%) および平常点 (15%) で評価し 60 点以上で合格とします.
- 平常点は指定した課題の取組状況で決めます.

教科書と参考図書

本講義では教科書を指定しません．

参考図書 1 金子晃：偏微分方程式入門，東京大学出版会

- 偏微分方程式の導出と，偏微分方程式が手計算で解けるいくつかの場合が書かれています．

参考図書 2 菊地文雄：有限要素法の数理–数学的基礎と誤差解析，培風館

- 有限要素法の誤差評価について書かれている本です．
- 理論を中心に書かれているので，この本を読んでもプログラムは書けません．

参考図書 3 藤田宏，黒田成俊，伊藤清三：関数解析，岩波書店

- 関数解析に関する数学書です．有限要素法は関数解析に基づいて設計された数値解法になります．
- 有限要素法の誤差評価の研究を行いたい場合に使える本です．

有限要素法のプログラムについて詳しく書かれた文献は知りません．プログラムについては講義内で説明します．

講義資料

Teams で講義資料 (この PDF ファイル) を配布します.

- 各自の PC に **PDF ファイルをコピー**して閲覧・編集して下さい.
- PDF ファイルは Adobe Acrobat (有料) や Xournal++ (フリー) を使って編集できます.
- 講義ノート (手書き) を作っても構いませんし，PDF を編集したものを講義ノート代わりにしても構いません.

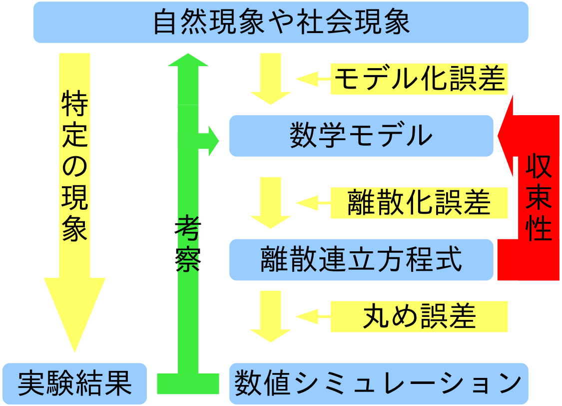
この講義では Python 3 (NumPy, matplotlib) を使ってプログラミングを行います.

- 各自の PC に **Python 3 の開発環境**を構築してください.
- Windows 利用者は WinPython とか，Anaconda とかの便利な Python 開発環境のインストーラがあります.
- Mac OS, Linux ユーザは自力で Python 3 をインストールしてください．OS が提供しているパッケージ管理システムからインストール可能です.

実験とシミュレーション

1. シミュレーションより実験の方が正しいんでしょ？
   - 概ね実験の方が正しい．特に現象が複雑な程，シミュレーションが現象と“合う” 事は難しい．
   - 簡単な現象に対するシミュレーション結果はそれなりに合う (らしい).
2. シミュレーションする意味はあるのか？
   - 実際に実験する時間，コストが節約できる．
     - 衝突実験
     - 巨大建造物・風洞実験 (実験では縮小モデル)
   - 実験するには危険な現象もある．
     - 核反応
     - 水素拡散
     - フライトシミュレータ・ドライブシミュレータ
   - そもそも実験できない現象もある．
     - 地震・津波・台風などの被害予測
     - 経済・金融
     - ウイルス感染

現象を理解するための実験・シミュレーションの流れ



- この講義では現象からシミュレーションまでの流れを一通り扱います.
- 講義の後半ではそのシミュレーション結果はどれくらい信頼できるのか？を数学的に扱います.

単位

- 単位　　　：ものの量をはかるための基準として定められた量.
- 基本単位：各種の物理量を測定するために設定された，互いに独立な数個の単位.
- 組立単位：基本単位を組み合わせてつくった単位.

デジタル大辞泉より

- 実際には実用上の面から，基本単位は互いに独立な単位としている訳ではない.
- 基準が無いと量をはかる (実験データを取る) 事ができない.
- 現在，最も一般的な単位系は国際単位系 (SI 単位系).
- 日本では尺貫法，英米ではヤード・ポンド法などの方言もある.
- 単位を持たない量を**無次元量** (無次元数) と言う.

国際単位系 (SI 単位系)

基本量	名称 [記号]	定義
時間	秒 [s]	セシウム原子の共鳴周波数
長さ	メートル [m]	1 秒間に光が真空中を進む距離
質量	キログラム [kg]	単結晶シリコン球体の原子数
電流	アンペア [A]	真空中に置かれた二本の直線導体が 2×10^{-7} [N] で引き合う一定の電流
温度	ケルビン [K]	水の三重点
物質量	モル [mol]	0.012 [kg] の炭素 12 の中に存在する原子数
光度	カンデラ [cd]	540×10^{12} [Hz] の単色放射を放出し，放射強度が $\frac{1}{683}$ [W/sr] となる光源の強さ

Table: 国際単位系 (SI 単位系) の基本単位

組立量	名称 [記号]	組立量	名称 [記号]
平面角	ラジアン [rad = 1]	電荷	クーロン [$C = A \cdot s$]
立体角	ステラジアン [sr = 1]	電圧	ボルト [$V = J/C$]
力	ニュートン [$N = kg \cdot m/s^2$]	光束	ルーメン [$lm = cd \cdot sr$]
圧力，応力	パスカル [$Pa = N/m^2$]	照度	ルクス [$lx = lm/m^2$]
エネルギー	ジュール [$J = N \cdot m$]	放射能量	ベクレル [$Bq = 1/s$]
仕事率	ワット [$W = J/s$]	線量当量	シーベルト [$Sv = J/kg$]

Table: 国際単位系 (SI 単位系) の組み立て単位 (の一部)

SI 接頭語

SI 基本単位，組立単位で量を表すとき，数値が大きすぎたり，小さすぎたり場合がある．数値を実用的な値にするために 10 の冪乗の大きさの倍量・分量単位を作るための接頭語が用意されている．

Table: SI 接頭語

乗数	記号	名称	乗数	記号	名称
10^{24}	Y	ヨタ	10^{-1}	d	デシ
10^{21}	Z	ゼタ	10^{-2}	c	センチ
10^{18}	E	エクサ	10^{-3}	m	ミリ
10^{15}	P	ペタ	10^{-6}	μ, mc	マイクロ
10^{12}	T	テラ	10^{-9}	n	ナノ
10^{9}	G	ギガ	10^{-12}	p	ピコ
10^{6}	M	メガ	10^{-15}	f	フェムト
10^{3}	k	キロ	10^{-18}	a	アト
10^{2}	h	ヘクト	10^{-21}	z	ゼプト
10^{1}	da	デカ	10^{-24}	y	ヨクト

単位間の演算

問題：

- 1 [m] + 1 [m] は計算できるのか？
- 1 [m] × 1 [m] は計算できるのか？
- 1 [m] / 1 [s] は計算できるのか？
- 1 [m] + 1 [s] は計算できるのか？

単位間の演算

問題：

- 1 [m] $+$ 1 [m] は計算できるのか？$\Longrightarrow$ 2 [m]
- 1 [m] $\times$ 1 [m] は計算できるのか？$\Longrightarrow$ 1 [m^2]
- 1 [m] / 1 [s] は計算できるのか？$\Longrightarrow$ 1 [m/s]
- 1 [m] $+$ 1 [s] は計算できるのか？$\Longrightarrow$ 無理

単位を考慮した演算は以下のようになる．

- 同一単位同士の加減算は計算できる．さらに結果の単位は元と同じ．
- SI 接頭語のみ異なる単位同士の加減算もできる．ただし，結果の単位はどちらかに合わせる．

  例： 1 [km] $+$ 1 [m] $=$ 1001 [m] or 1.001 [km]
- 単位が同じまたは違う物同士の乗除算は計算できる．結果の単位は変わる．
- 単位が違う物同士の加減算 (と比較演算) は計算できない．
- 初等関数は無次元量に対してのみ定義される．また，初等関数の関数値も無次元量．

単位を持つ量の計算をする際は注意が必要！

数学モデルを作るために

1. 現象をよく観察しよう.
2. まずは現象を自然言語で記述してみよう.
   - 自然言語で現象を説明できないと数学モデルは作れない.
   - 現象が複雑すぎる場合は考察する対象を絞ってみる.
3. 自然言語で記述した現象に適切な変数を割り当てよう.
   - 独立変数と従属変数 (変数の依存関係) は特に重要.
   - 実験で確認できる変数だとシミュレーション結果の考察が容易.
4. 数学モデルを立てよう.
   - 微分方程式・積分方程式を使うと簡単にできる場合が多い.
   - 微分・積分の意味を理解しておく.
5. 次元解析でモデルの妥当性を確認.
6. 数学モデルを厳密に，もしくは近似的に解いて現象を予測.
7. 各項目で結果を考察し， 1 に戻る.

バネ振動の物理モデル

一つの理想化された振動系を考える.
自然言語：

- バネは Hooke の法則 (バネの張力はその伸びに比例する) に従う.
- 質点には外力が働く.
- 抵抗は考えない.

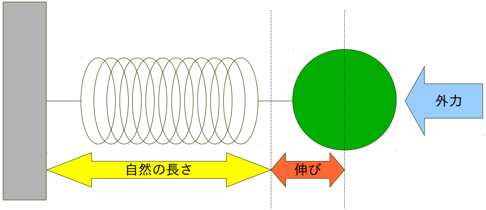


Figure: 力学的振動

バネ振動の物理モデル

関数

仮定：

- τ を時間変数とする．単位は [s].
- 質点の質量を m [kg] とし，m は時間に依存しないとする．
- バネ定数を k [N/m] とする．
- 時刻 τ における，質点の自然長からの伸びを $x(\tau)$ [m] とする．
- 時刻 τ における，外力を $F(\tau)$ [N] とする．

⚠ 単位を持つ量の計算なので，単位に気をつけて計算する．特に，以下の計算で単位の合っていない加減算をしていないことを確認しましょう！

モデル導出：

- この系に働く力は $f(\tau) := F_t(\tau) + F(\tau)$ [N] となる．ここで，F_t はバネの張力で，F は与えられた外力．
- バネの張力は変位とは逆方向に働く (復元力) ので，$F_t(\tau) = -kx(\tau)$ [N].
- Newton の運動方程式より $mx''(\tau) = f(\tau) = -kx(\tau) + F(\tau)$ [N].

次元解析　単位が揃っているかの確認

単位を持つ方程式は両辺の単位が同じでなければならない．

- 物理モデルを作った時，両辺の単位が揃ってなかったら何かがおかしいのでやり直し．
- 両辺の単位が等しいという条件から，物理定数の単位を求める事ができる．
- 次元解析から求めた物理定数の単位がわけのわからない物だと実験で確かめる事ができない．この場合もモデルを作り直す．

例 :バネ振動のモデルの場合

- $kx(\tau)$ の単位は [N/m]·[m]=[N] となる．
- 時間微分 $\frac{d}{d\tau}$ の単位は [1/s]．よって，x の 2 階導関数 $x''(\tau)$ の単位は [m/s^2]．
- SI 単位系の力の単位 [N] は組立単位であり，[N=kg·m/s^2]．
- よって，$mx''(\tau) = -kx(\tau) + F(\tau)$ の両辺の単位は [N] で合っている．

次元解析の応用

外力 $F(\tau)$ を $\cos(\tau)$ の様な周期関数となるようにしたい (強制振動).

- 三角関数の変数は無次元量でなければならない.
- 時間 τ は [s] の単位を持つので, $\cos(\tau)$ は定義できない.
- 周波数 ω [Hz] を使って, $\omega\tau$ を考えると [Hz·s=1/s·s=1] なので $\omega\tau$ は無次元量となり $\cos(\omega\tau)$ が定義できる.
- 三角関数の関数値も無次元量なので, 単位が [N] となるようにしなければならない.
- 定数 (振幅) F_0 [N] を掛けて, $F(\tau) = F_0 \cos(\omega\tau)$ とすればつじつまが合う.

疑問：$F_0 = 1$ [N], $\omega = 1$ [Hz] とすれば $F(\tau) = \cos(\tau)$ になるから次元解析なんてやらなくていいじゃん.

- 極論を言えばこの主張は正しく, 次元解析の必要はないかもしれない.
- 一般に, モデルの中にパラメータが多い程, 多くの現象を表現できる.
- $F_0 = 1$ [N], $\omega = 1$ [Hz] では実際の現象に合わなくても, F_0, ω が別の定数なら上手く行く場合があるかもしれない.
- 最初からパラメータを決めて, この可能性を放棄するのは勿体ない.

無次元化

物理モデルの変数，定数の単位を無次元量にする．

例 :強制振動のモデル $mx''(\tau) = -kx(\tau) + F_0\cos(\omega\tau)$ [N] の場合

- $u := \frac{k}{F_0}x$ とおく．u の単位は [N/m]·[m]/[N]=[1] となる．
- $t := \omega\tau$ とおく．t の単位は [Hz]·[s]=[1] となる．
- このとき，$u(t)$ のみたす微分方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2}(t) &= \frac{k}{F_0}\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\omega^2}\frac{k}{F_0}\frac{1}{m}\left(-kx(\tau) + F_0\cos(t)\right) \\
&= \frac{k}{m\omega^2}\left(-u(t) + \cos(t)\right)
\end{aligned}
$$

- $\frac{k}{m\omega^2} > 0$ より，$\lambda := \sqrt{\frac{k}{m\omega^2}}$ とおく．λ の単位は [N/m]·[s^2]/[kg]=[1] となる．

以上より，強制振動のモデルを無次元化した方程式 $u''(t) + \lambda^2 u(t) = \lambda^2\cos(t)$ をえる．

なぜ無次元化するのか？

$$mx''(\tau) = -kx(\tau) + F_0 \cos(\omega\tau) \Longleftrightarrow u''(t) + \lambda^2 u(t) = \lambda^2 \cos(t)$$

- すべての変数，定数を無次元化すれば単位を気にしないで計算できる．
  - 純粋な数学の問題となる． $\Longrightarrow$ どのような数学的手法を使っても良い！
  - 特に近似解を計算する時にいちいち単位なんて考えていられない．
- 無次元化 (変数変換) は一意ではない．様々なやり方がある．
- 良い無次元化 (変数変換) を行えば，一般性を失う事なくパラメータの数を減らす事ができるかもしれない．
  - 強制振動モデルでは 4 パラメータ $\{m, k, F_0, \omega\}$ が 1 パラメータ $\{\lambda\}$ になった．
  - 多くのパラメータを探索するのは大変なので，この効果は大きい！

経験的に次の方針で変数変換すると上手く行く場合が多い．

1. まず最初に従属変数を無次元化する．
2. 次に独立変数を無次元化する．
3. 最後に，つじつまが合うように定数を無次元化する．

無次元化が失敗していると 3 番目にやる定数が無次元化されない．このときは 1 に戻って別の変数変換を試みる．

強制振動

強制振動を表す数学モデル：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \lambda^2 u = \lambda^2 \cos(t), & \text{in } 0 < t, \\ u(0) = u_0, \quad \dfrac{du}{dt}(0) = v_0, & \end{cases}$$

を考える．ここで，$\lambda > 0,\ u_0, v_0 \in \mathbb{R}$．(本講義では単位を持つモデルを物理モデルと呼び，無次元化された物理モデルを数学モデルと呼ぶ事にする．)

この方程式は非斉次定数係数 2 階常微分方程式なので，一般解 u は斉次方程式の一般解 u_c と，非斉次方程式の特殊解 u_p との重ね合わせで $u = u_c + u_p$ と表される．ここで，u_c と u_p はそれぞれ

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \lambda^2 u_c = 0, \quad \text{in } 0 < t,$$
$$\frac{d^2u_p}{dt^2} + \lambda^2 u_p = \lambda^2 \cos(t), \quad \text{in } 0 < t,$$

の解である．

強制振動の特殊解

特性方程式は $y^2+\lambda^2=0$ なので，特性方程式の解は $y=\pm i\lambda$．
よって，斉次方程式の一般解は $u_c(t)=C_1\cos(\lambda t)+C_2\sin(\lambda t)$．ここで，$C_1, C_2$ は積分定数．

$\phi_1(t):=\cos(\lambda t)$, $\phi_2(t):=\sin(\lambda t)$ とおく．ロンスキアン W は

$$W(\phi_1,\phi_2)=\det\begin{pmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\cos(\lambda t) & \sin(\lambda t)\\ -\lambda\sin(\lambda t) & \lambda\cos(\lambda t)\end{pmatrix}=\lambda.$$

よって，非斉次方程式の特殊解は

$$\begin{aligned}u_p(t)&=-\phi_1(t)\int\frac{\phi_2(t)f(t)}{W(\phi_1,\phi_2)}\,dt+\phi_2(t)\int\frac{\phi_1(t)f(t)}{W(\phi_1,\phi_2)}\,dt\\&=-\cos(\lambda t)\int\lambda\sin(\lambda t)\cos(t)\,dt+\sin(\lambda t)\int\lambda\cos(\lambda t)\cos(t)\,dt\\&=\frac{\lambda^2\cos(t)}{\lambda^2-1}\end{aligned}$$

となる．

強制振動の解

よって，非斉次解の一般解は

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t) + \frac{\lambda^2 \cos(t)}{\lambda^2 - 1}.$$

初期条件から C_1, C_2 を決定すると，求める解は

$$u(t) = \cos(\lambda t) u_0 + \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} v_0 + \frac{\lambda^2 \bigl(\cos(t) - \cos(\lambda t)\bigr)}{\lambda^2 - 1}$$

となる．$\mathbb{Q} \ni \lambda \neq 0, \pm 1$ のとき，u は周期解となる．

共鳴

強制振動の解

$$u(t) = \cos(\lambda t)u_0 + \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}v_0 + \frac{\lambda^2\left(\cos(t) - \cos(\lambda t)\right)}{\lambda^2 - 1}$$

において，分母が 0 になる場合を考える．λ の定義は $\lambda = \sqrt{\frac{k}{m\omega^2}}$ なので，実際に物理的な意味があるのは $\lambda = 1$ のときのみ．

$$\hat{u}(t) := \lim_{\lambda \to 1} u(t) = \cos(t)u_0 + \sin(t)v_0 + \frac{t}{2}\sin(t).$$

- $\hat{u}$ の振幅は t に比例して増加
- 一方，$\lambda \neq 1$ の場合の振幅は有限
- この現象は**共鳴**と呼ばれ，バネ定数，質量，外力の周波数が丁度いい具合に揃った時に発生する
- 工学では共振と呼ばれる事もある
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を固有振動数と言う

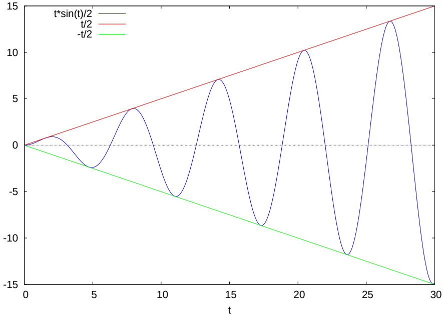


Figure: 共鳴

建築物の共鳴

建築物も弾性体と見なし，力学的振動を考える事ができる．

- タコマ橋 (ワシントン州，1940)
  https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw
- Kármán 渦 (Theodore von Kármán, 1881–1963)
  https://www.youtube.com/watch?v=_AJgEa2dbJU
- 弾性体の固有振動数は必ず存在し，建築物の共鳴現象をなくす事はできない．
- 建築物の固有振動数を自然界で発生するような振動数にしないように設計する事はできる．
- 現在の大型建築物は振動解析も考慮されて設計されている．

なお，タコマ橋の崩壊は共鳴の影響では無いと言う研究者もいる．

まとめ

今日の講義のまとめ：

- 単位を持つ量の計算には注意.
- 次元解析は方程式の単位が合っているという事.
- 無次元化は物理モデルの単位を無次元量に変換する事.
- バネ振動の物理モデルを導出.
- 強制振動の解を計算.
- 共鳴現象をやった.