数値解析特論 I 期末レポート

担当教員： 木下武彦

確定版

[注意事項]

- この期末レポートは 85 点満点です．
- 各大問の配点は $25 \cdot \frac{85}{100} = 21.25$ です．
- 平常点 15 点満点と合わせて 100 点満点で成績を付けます．
- 提出期限は 2021 年 8 月 3 日 (火) – 8 月 10 日 (火) です．
- レポートは PDF ファイルを Teams にアップロードしてください．
- この TEX ファイルを使ってレポートを書いても構いませんし，word などの文書作成ソフトを使っても構いません．
- word を使った場合，docx ファイルを**提出してはいけません**．docx を PDF に変換して，PDF ファイルを提出してください．

$\boxed{1}$ 第 2 回 – 第 4 回の講義資料にあるグループワーク課題のどれか 1 つを解いてください．

[補足]

- 物理モデル (単位を持つ偏微分方程式) とそれを無次元化した数学モデル (無次元量のみから成る偏微分方程式) の両方を導出してください．

$\boxed{2}$ $\Omega := (0,1) \times (0,1)$ とします．

$$f(x,y) := \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-5\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}, \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

のグラフを描画してください．

[補足]

- グラフを描画する方法は NumPy + matplotlib, SymPy, f の区分 1 次補間など，何を使っても構いません．
- 区分 1 次補間のグラフを描画する場合は，R20 メッシュを使ってください．

- 解答はグラフを描画した画像を貼り付けてください．

$\boxed{3}$ $\phi_1(x) := \sin(\pi x)$, $\phi_2(x) := \sin(2\pi x)$ とおきます．$\{\phi_i\}_{i=1}^2$ を基底とする関数空間を

$$V_h := \left\{\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \in H_0^1(0,1) \,\middle|\, \forall\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

とします．このとき，任意に与えられた $V_h \ni f_h := c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ に対して，次の変分問題：

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx}(x)\frac{dv_h}{dx}(x)\,dx = \int_0^1 f_h(x)v_h(x)\,dx, \quad \forall v_h \in V_h \tag{1}$$

の解 $u_h \in V_h$ を求めてください．

[補足]

- $u_h = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$, $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$, $v_h = b_1\phi_1 + b_2\phi_2$, $(b_1, b_2 \in \mathbb{R})$ として，これらを (1) に代入します．
- 積分は手で計算しても構いませんし，SymPy を使っても構いません．
- (1) は任意の $v_h \in V_h$ に対して等号が成り立つ $\Longleftrightarrow$ 任意の実数 $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ について積分を計算した等号が成り立つ $\Longleftrightarrow$ b_1, b_2 に関する恒等式となることから，(1) と同値な連立一次方程式がえられます．
- 連立一次方程式を解けば u_h が求まります．具体的に，a_1, a_2 は c_1, c_2 を用いて書き下すことができます．

$\boxed{4}$ $\Omega := (0,1)\times(0,1)$ の正方形領域とします．

$$g_D(x,y) := \begin{cases} y(1-y), & \forall(1,y) \in \partial\Omega \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおきます．このとき，次の Poisson 方程式：

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の有限要素解を求めてください．

[補足]

- Ω のメッシュは講義資料で配布した R20 メッシュを使ってください．
- 解答は有限要素解のグラフを描画した画像を貼り付けてください．