

KUPC 2022 문제 풀이

Official Solutions

by

KUPC 2022 출제진

문제	의도한 난이도	출제자
A 슬픈 건구스	Easy	이동훈 _{aru0504}
B 만주의 식사	Easy	김명기 _{riroan}
C 비숍 여행	Easy	김명기 _{riroan}
D 시험자리 배정하기	Medium	김명기 _{riroan}
E 즐거운 XOR	Medium	김명기 _{riroan}
F 키프로드로 등교하기	Medium	김태현 _{kth990303}
G 보물찾기 2	Hard	이동훈 _{aru0504}
H 볼링 아르바이트	Hard	이승엽 _{delena0702}
I 문자열 게임	Hard	이승엽 _{delena0702}
J 압도적 XOR수	Challenging	김태현 _{kth990303}

A. 슬픈 건구스

number_theory

출제진 의도 - **Easy**

✓ 출제자: 이동훈

A. 슬픈 건구스

$(0, 0)$ 에서 (n, m) 으로 레이저를 쏘는 경우를 생각해봅시다.

레이저가 진행하며 x 좌표가 n 번, y 좌표가 m 번 증가해야 합니다.

스

- ✓ x 축에 평행한 벽을 뚫을 때 마다 y 좌표의 정수부분이 1 증가합니다.
- ✓ y 축에 평행한 벽을 뚫을 때 마다 x 좌표의 정수부분이 1 증가합니다.
- ✓ 건물을 뚫을 때 마다 x 좌표와 y 좌표의 정수부분이 동시에 1 증가합니다.

B. 만쥬의 식사

greedy

출제진 의도 - **Easy**

✓ 출제자: 김명기

- ✓ 밥그릇에 들어있는 쉼의 개수는 늘어나지 않습니다.
- ✓ 그래서 모든 쉼이 같아지기 위해 가장 작은 값으로 맞춰야 합니다.
- ✓ 쉼의 최솟값을 m 이라고 하면 $\sum_{i=1}^N (a_i - m)$ 의 값을 구하면 정답이 됩니다.
- ✓ 총 시간복잡도는 $\mathcal{O}(N)$ 입니다.

C. 비숍 여행

implementation, math

출제진 의도 – **Easy**

✓ 출제자: 김명기

- ✓ 비숍은 한번 이동할 때마다 x 좌표와 y 좌표의 홀짝이 각각 변합니다.
- ✓ 예를들어 비숍이 (짝수, 홀수)좌표에 있다면 한번 이동했을 때 (홀수, 짝수)좌표로 이동합니다.
- ✓ 하지만 이동을 하더라도 **x 좌표 + y 좌표**의 홀짝은 변하지 않습니다.
- ✓ 따라서 비숍의 시작좌표 합의 홀짝과 같은 동전좌표 합의 홀짝인 개수를 구하면 됩니다.
- ✓ 총 시간복잡도는 $\mathcal{O}(N)$ 입니다.

D. 시험자리 배정하기

math, dynamic_programming, combinatorics

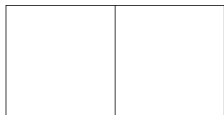
출제진 의도 – **Medium**

✓ 출제자: 김명기

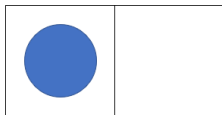
D. 시험자리 배정하기

- ✓ 이 문제는 dp풀이와 조합식을 이용한 풀이가 있습니다.
- ✓ 여기에서는 dp풀이를 소개하겠습니다.

- ✓ 문제의 정답을 $A(n)$ 으로 정의하겠습니다.
- ✓ $A(1) = 1, A(2) = 2$ 임을 직관적으로 알 수 있습니다.
- ✓ $k \geq 3$ 에서 $A(k)$ 의 마지막 자리 2개만 봤을 때 가능한 경우는 아래 3가지 뿐입니다.



Case 1



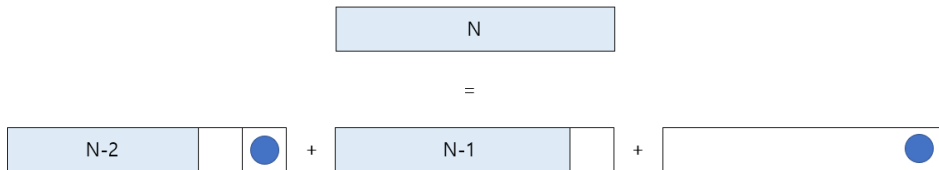
Case 2



Case 3

D. 시험자리 배정하기

KUPC 2022



- ✓ 위와 같이 구성하면 $A(n)$ 의 모든 경우를 구할 수 있습니다.
- ✓ 따라서 점화식은 $A(n) = A(n - 1) + A(n - 2) + 1$ 이 됩니다.
- ✓ 총 시간복잡도는 $\mathcal{O}(n)$ 입니다.

E. 즐거운 XOR

pigeonhole_principle, brute_force

출제진 의도 – **Medium**

✓ 출제자: 김명기

- ✓ a_i 의 제한이 작음에 주목합니다.
- ✓ 비둘기집 원리에 의해 배열 크기가 100 이 넘어가면 중복되는 원소가 적어도 하나 존재합니다.
- ✓ 원소의 개수를 세는 배열을 A 라고 정의하겠습니다.

- ✓ 이제 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (100, 100, 100)$ 까지 모두 탐색을 하면 됩니다.
- ✓ (a, b, c) 인 경우 $A[a] = A[a] - 1, A[b] = A[b] - 1, A[c] = A[c] - 1$ 를 했을 때 배열 A 에 음수가 없는 경우에만 탐색합니다.
- ✓ 탐색이 완료된 후 가장 큰 xor 값을 출력하면 됩니다.
- ✓ 총 시간복잡도는 $\mathcal{O}(100^3)$ 입니다.

F. 킥보드로 등교하기

`binary_search`, `parametric_search`

출제진 의도 – **Medium**

✓ 출제자: 김태현

- ✓ 가장 용량이 작은, 즉 가장 싼 키패드를 사기 위해서는 방문하는 충전소 간 거리가 짧을수록 유리합니다.
- ✓ K 가 작다면 모든 경우를 완전탐색하거나 다이나믹 프로그래밍으로 최적의 해를 구할 수 있지만, 충전 가능 횟수가 매우 큼니다.
- ✓ 어떻게 하면 좋을까요?

- ✓ 키포드의 용량이 클수록 충전소에 방문해야 하는 횟수는 감소하게 됩니다.
- ✓ 다시 말해 키포드의 용량이 특정 값 이상이면 조건에 만족하게 되며, 단조함수 형태로 증감하므로 키포드의 용량을 매개변수로 두어 접근할 수 있습니다.
- ✓ 이 때, 키포드의 용량 L 에 대해 모든 경우를 순차적으로 탐색하면, 특정 용량일 때 통학 가능 여부를 판단하는 로직 $\mathcal{O}(n)$ 을 최대 L 번 수행하므로 시간초과를 받습니다.

- ✓ 따라서 키폁드 용량과 충전 횟수 관계가 서로 단조증감함수 성질을 지닌다는 점을 이용해 이분 탐색으로 $\mathcal{O}(N \log(L))$ 로 해결해야 합니다.
- ✓ 집과 학교의 위치도 탐색 범위에 포함시켜야된다는 점을 유의합시다.

G. 보물찾기 2

constructive

출제진 의도 - Hard

✓ 출제자: 이동훈

문제 만들어서 Call for Tasks 제출할 때까지만 해도 🏆1 정도 예상했는데, 검수진분들이 🏆5을 주셨습니다. (???)

H. 볼링장 아르바이트

dynamic_programming

출제진 의도 - Hard

✓ 출제자: 이승엽

- ✓ 우선, S 나 E 가 $400(N - 1)$ 보다 크면 의미가 없습니다. 더 크면 $400(N - 1)$ 로 바꿔줍시다.
- ✓ 지름이 S 이상 E 이하인 경우의 수는 (지름이 S 이상인 경우의 수) - (지름이 $E + 1$ 이상인 경우의 수) 입니다.
- ✓ 지름이 X 이상인 경우의 수를 구할 수 있으면 문제를 해결할 수 있습니다.

I. 문자열 게임

greedy

출제진 의도 - **Hard**

✓ 출제자: 이승엽

풀이를 열심히 준비해서 오니까 검수진한테

“이거 너무 Well-Known이라서 사전지식을 아는 사람만 풀듯”

이라고 구박받은 문제입니다. $\pi\pi$

J. 압도적 XOR수

math, bit_mask

출제진 의도 – **Challenging**

✓ 출제자: 김태현

- ✓ 먼저, 압도적 xor 수의 정의부터 살펴봅시다.
- ✓ 압도적 xor 수의 정의를 파악하려면 A 와 B 의 상관관계에 대해 살펴볼 필요가 있습니다.
- ✓ P 는 A 보다 큰 2의 제곱수 중 가장 작은 값이므로, $P - 1$ 은 A 보다 크거나 같은 $2^i - 1$ (i 는 자연수)임을 알 수 있습니다.

- ✓ $2^i - 1$ 을 2진수로 나타내보면 1로만 이루어짐을 알 수 있습니다. 그러므로 xor 성질에 따라 $B = A \oplus (P - 1)$ 에서 B 는 A 와 서로 완전히 다른 비트를 가지는 수임을 파악할 수 있습니다.
- ✓ 다시 말해 A 가 가지는 비트 성질을 완전히 제외(반전)시키므로 $B = P - 1 - A$ 입니다.
- ✓ 예를 들어 $A = 13(1101_{(2)})$ 이면 $P - 1 = 15(1111_{(2)})$ 이고, $B = A \oplus (P - 1)$ 은 $2(0010_{(2)})$ 입니다.
- ✓ P 는 조건을 만족하는 값 중 가장 작은 값이므로 $B = P - 1 - A < A$ 을 만족합니다.

- ✓ 이제 압도적 xor 수의 정의를 살펴봅시다.
- ✓ $A \geq B \cdot (2^K - 1)$ 일 때 A 가 압도적 xor 수라고 합니다.
- ✓ A 와 B 는 2진수일 때 같은 길이를 가지고 완전히 반전된 비트를 가진다는 점을 이용하여 둘의 상관관계를 다시 한 번 살펴봅시다.
- ✓ A, B 를 2진수로 나타낼 때 같은 길이를 가지는 범위 내에서 A 와 B 의 차이가 가장 클 때는 A 는 1로만 구성돼있을 때이고 B 는 0으로만 구성돼있을 때입니다.
- ✓ 이 때는 $B = 0$ 이므로 어떠한 길이이든 상관없이 A 는 압도적 xor 수입니다. 다시 말해 $1, 3, 7, 15, \dots$ 과 같이 $2^i - 1$ 꼴은 반드시 압도적 xor 수입니다.

- ✓ A, B 를 2진수로 나타낼 때 같은 길이를 가지는 범위 내에서 A 와 B 의 차이가 가장 작을 때는 A 는 맨 앞을 제외하고 0으로 구성돼있을 때입니다.
- ✓ $2^i > (2^{i-1} + 2^{i-2} + \dots + 2^0)$ (i 는 자연수)임이 성립한다는 점을 이용해봅시다.
- ✓ $A = 100000_{(2)}, B = 011111_{(2)}$ 일 때, A 는 B 의 1 배보다 큼니다. 그리고 A, B 의 맨 앞에서 2 번째 비트가 정반되기 전까지는 $(1 + 2)$ 배보다 작음이 보장됩니다.

- ✓ $A = 110000_{(2)}, B = 001111_{(2)}$ 일 때, A 는 B 의 $(1 + 2)$ 배보다 큼니다.
- ✓ 그리고 A, B 의 맨 앞에서 3번째 비트가 정반되기 전까지는 $(1 + 2 + 4)$ 배보다는 작음이 보장됩니다.
- ✓ 따라서 $A \geq B \cdot (2^K - 1)$ 이기 위해서는 A, B 를 이진수로 나타냈을 때 맨 앞에서 K 번째 비트까지 A 는 1로, B 는 0으로 구성돼야 합니다.

- ✓ A, B 를 이진수로 나타냈을 때 서로 같은 길이일 경우, A 가 특정 값 이상이면 압도적 xor수임이 보장됨을 이용해 수학 또는 이분탐색으로 $\mathcal{O}(\log(n))$ 시간복잡도에 답을 구할 수 있습니다.
- ✓ 수학으로 접근한다면 $[2^i, 2^{i+1} - 1]$ 범위의 정수(i 는 음이 아닌 정수)에서 압도적 xor 수의 개수는 $2^{i+2} - 1$ 개임을 이용하여 등비수열 합의 공식을 이용해 구할 수 있습니다.
- ✓ 이분탐색으로 접근한다면 $[2^i, 2^{i+1} - 1]$ 범위의 정수(i 는 음이 아닌 정수)에서 압도적 xor 수가 특정 값 이상임이 되는 단조함수 꼴을 이룬다는 점을 이용해 $\mathcal{O}(\log(2^i))$ 에 구할 수 있습니다.
- ✓ 이 과정을 $i \leq \log N$ 이 될 때까지 반복해서 더해주면 됩니다.
- ✓ $[2^i, 2^{i+1} - 1]$ 범위 경계값이 $2^K - 1$ 보다 작을 때에도 반드시 압도적 xor 수가 1개는 있다는 점을 주의합시다.