

Week 4 - Section 1

≡ Files	
≡ Tags	

Naive diversification

우리의 mean goal: well-balanced portfolio

우리의 end goal: well-rewarded portfolio

계란을 한 바구니에 담으면 그 바구니를 떨어뜨렸을 때 다 깨짐.

→ (중간목표)그럼 계란을 여러 바구니에 나눠담자!


→ (최종 목표)그럼 각 바구니에 얼마나 계란을 분배해야 unrewarded risk에 대해서도 최적으로 분배할 수 있을까?

Q1. 몇 개의 바구니에 나눠야할까?

Q2. 어떤 바구니에는 배분의 의미가 없을 정도로 계란이 적게 담겨있다면 어떻게 해야할까?

→ Effective number을 봐야함.

— EFFECTIVE NUMBER OF CONSTITUENTS (ENC) —

$$ENC \equiv \left(\sum_{i=1}^N w_i^2 \right)^{-1}$$


ex. 만약 Equally weighted portfolio라면 모든 종목의 비중이 $1/N$ 일 것이고 그러면 $ENC = N$ 이 됨.

→ N 종목의 ENC 가 N 이라면 최대임

ex. 만약 한 종목에 99.99% 투자하면?

→ $ENC = 1$ 이 나올 것.

CW portfolio인 S&P500에서 ENC 를 구해보면 평균적으로 100정도가 나옴.

이 말은 S&P 500이 Equally weighted portfolio와 거리가 있다는 것임.

Scientific diversification(Global Minimum Variance Portfolio)

1. MSR(Maximize Sharpe Ratio)

- 신뢰할 수 있는 expected return 추정이 필수적임.
- 이게 어려워서 MSR 포트폴리오는 성공하기 어려움

2. GMV(Global minimum variance)

- 이 포트폴리오는 expected return을 몰라도 됨!

GMV PORTFOLIO

**DERIVATION OF THE GLOBAL
MINIMUM VARIANCE PORTFOLIO**

$$\text{Min}\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$


— GMV의 문제점 —

1. Risk를 minimize하는데 집중하다보면 고르게 종목 분산하는 거에 실패할 경향이 높아짐.

- low-vol 종목에 overweight하게 될 것.

→ 낮은 기대 수익이 결과로 따라오게 됨.

→ 과거의 연구결과들을 살펴보면 GMV가 EW 포트폴리오보다 항상 결과가 좋은 것은 아님.

PROBLEMS WITH GMV PORTFOLIOS

GMV IMPLICITLY ASSUMES CONSTANT EXPECTED RETURNS, NOT A HIGHLY REASONABLE PRIOR!

**“MAGIC” OF DIVERSIFICATION IS NOT WORKING PROPERLY:
LOW VOLATILITY COMPONENTS ARE NOT PENALIZED AND
THEREFORE OVER-WEIGHTED => GMV IS NOT
A WELL BALANCED PORTFOLIO**

**DEMIGUEL, GARLAPPI AND UPPAL (2009) (“1/N PAPER”):
GMV NOT CONSISTENTLY BETTER THAN
THE 1/N RULE IN TERMS OF SHARPE RATIO!**



→ 어떻게 개선해야 분산화도 잘 할 수 있을까? 그리고 결과적으로 naive portfolio인 EW보다 Sharpe ratio도 개선했으면 좋겠음.

1. 최소 effective number of constituents target을 설정해 놓고

2. 모든 asset이 같은 vol을 갖는다는 가정을 도입.

→ 그럼 지금 우리는 모든 개별 종목이 expected return과 vol이 같다고 가정하게 되는 것이므로

→ 자연스럽게 de-correlation을 최대로 하게되는 포트폴리오를 구축하게 될 것.

그러면 하나의 자산은 risky할지라도 각 자산간의 연관성이 약하니까 전체 포트폴리오의 risk는 낮아짐.

Measuring risk contributions

well-balanced portfolio들은 dollar allocation 관점에서는 잘 분배되어 있을지는 모르겠으나, risk allocation의 관점으로는 잘 분배되어 있지 않았을 확률이 있다.

여기서 우리는 ENC의 단점을 살펴볼 수 있다.

만약 포폴을 vol이 30%인 주식에 50%, vol이 10%인 채권에 50% 분산투자한다고 가정, 그리고 두 자산간의 corr은 0이라 가정하자.

- $ENC = 2$

→ well-balanced


그렇다면 Risk는?

포트폴리오 전체의 risk는 0.025

여기서 주식의 리스크 비중이 90%, 채권의 리스크 비중은 10%임.

→ Risk 분배는 전혀 고르지 못함.

RISK VERSUS \$ CONTRIBUTIONS


$$\sigma_p^2 = \underbrace{0.5^2 \times 0.3^2}_{\text{stock contribution}} + \underbrace{0.5^2 \times 0.1^2}_{\text{bond contribution}} = 0.025$$
$$p_1 = \frac{0.5^2 \times 0.3^2}{0.025} = 90\%$$
$$p_2 = \frac{0.5^2 \times 0.1^2}{0.025} = 10\%$$

이는 Corr이 0이 아닐 때도 적용해서 분석해 볼 수 있음.

→ 만약 corr이 0이 아니라면 각 자산에 correlated component를 1/n씩 분배하면 된다.

ALLOCATING THE CORRELATED COMPONENT

HOW TO **ALLOCATE**
THE **CORRELATED COMPONENT**?

SPLIT IT HALF:

$$\sigma_p^2 = \underbrace{0.5^2 \times 0.3^2 + 0.5 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.1 \times 0.25}_{\text{contribution of asset 1} = 0.024375} + \underbrace{0.5^2 \times 0.1^2 + 0.5 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.1 \times 0.25}_{\text{contribution of asset 2} = 0.004375} = 0.0288$$


RISK CONTRIBUTIONS IN THE CORRELATED CASE

RISK CONTRIBUTIONS

$$p_1 = \frac{0.5^2 \times 0.3^2 + 0.5 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.1 \times 0.25}{0.0288} \simeq 85\%$$

$$p_2 = \frac{0.5^2 \times 0.1^2 + 0.5 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.1 \times 0.25}{0.0288} \simeq 15\%$$



- 결론

— 이처럼 well-balanced 포트폴리오여도, risk의 분배는 전혀 고르지 않을 수가 있다.