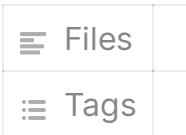


Week 2 - Section 2



1. Portfolio Construction with Time-Varying Risk Parameters

- Non-stationarity.
- 위험 요인이 시간이 흐름에 따라 다양하다.

ESTIMATING VOLATILITY

DEFINE σ_T AS THE VOLATILITY PER DAY BETWEEN DAY T AND DAY T+1 AS ESTIMATED AT END OF DAY T

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2$$
$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$$

EDHEC-RISK

volatility today at the end of day t today.



- 가정: R_t 의 평균은 0이다.

e.g., Consider the following stream of returns:

+1%, -2%, -1%, +2%. What are the corresponding (arithmetic) average return and volatility estimates?

Average return is $(1\%-2\%-1\%+2\%)/4=0\%$.

Variance of returns is $(1\%^2-2\%^2-1\%^2+2\%^2)/4=0.025\%$.

Volatility is square-root of variance: $\sqrt{0.025\%}=1.58\%$.



- 변동성이 시간이 흐름에 따라 일정하지 않다. (일정하다고 가정하는 것은 큰 실수)

CURSE OF NON-STATIONARITY

INCREASING FREQUENCY IS BETTER
THAN INCREASING SAMPLE PERIOD IN
CASE OF NON-STATIONARY
RETURN DISTRIBUTIONS



Because if you're
increasing frequency

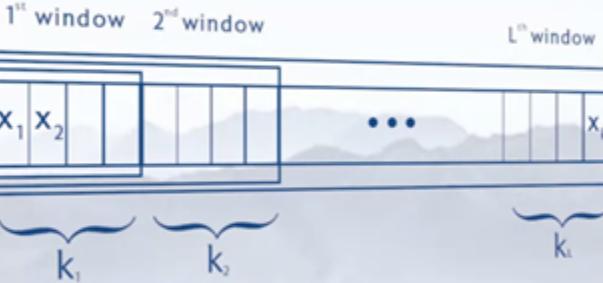


- 빈도를 높이는 것이 기간을 늘리는 것보다 낫다.

e.g., 1년치 일간 데이터 > 10년치 월간 데이터

- 최근 추세가 더 중요하다.
- 오늘의 변동성 추정치 $=/=$ 변동성 추정치 = 평균 변동성 (변동성이 클 경우 과거 데이터 활용 불가능)

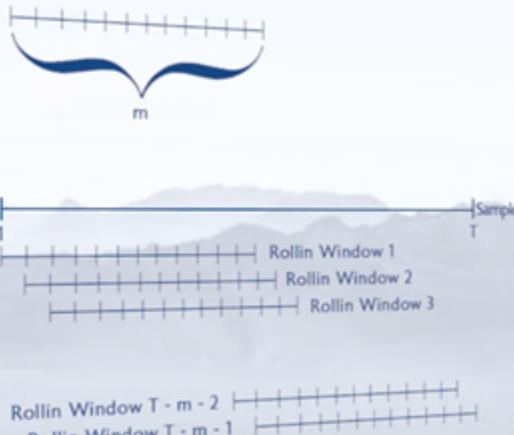
EXPANDING WINDOW ANALYSIS



EDHEC-RISK
Expanding window analysis
is a situation whereby as

- 시간이 흐름에 따라 변동성 추정치를 새로 구하는 것 → 샘플 사이즈 증가 → 변동성이 일정한 케이스에 적합하다.

ROLLING WINDOW ANALYSIS



EDHEC-RISK
the other hand
keeps the constant,

- 추정하는 시점마다 샘플 사이즈 유지 → 가장 최근의 데이터를 다루므로 변동성이 일정하지 않은 케이스에 적합하다.

2. Exponentially weighted average

- Portfolio의 weight을 eqaully하게 정할 수 있지만 날마다(per day) 다르게 weight을 설정하여 portfolio를 구성할 수 있다.

WEIGHTING SCHEME

INSTEAD OF ASSIGNING EQUAL WEIGHTS
TO THE OBSERVATIONS WE CAN SET

$$\sigma_T^2 = \sum_{t=1}^T \alpha_t R_t^2$$

where $\sum_{t=1}^T \alpha_t = 1$

The simple case corresponds to

$$\alpha_t = \frac{1}{T} \quad \text{for all } t$$

we're back to
the previous situation.



EDHEC-RISK

- simple case는 모든 날짜에 동등하게 weight 을 부여하는 것(T = number of total days)
- EWMA Model의 기본 원리는 날짜가 멀어질 수록 weight을 작게 부여하고 날짜가 가까울 수록 weight을 크게 부여하는 것이다.

EWMA MODEL

IN AN EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE MODEL THE WEIGHTS DECLINE EXPONENTIALLY AS WE MOVE BACK THROUGH TIME

THIS LEADS TO :

$$\alpha_t = \frac{\lambda^{T-t}}{\sum_{t=1}^T \lambda^{T-t}}$$

COVARIANCE PARAMETER ESTIMATE

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^T \alpha_t (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$



1. 람다를 설정한다. 이때 람다는 0과 1 사이의 값으로 지정
2. 위의 식을 사용해서 각 날짜에 맞는 alpha 값을 구한다.
3. 2에서 구한 alpha를 weight으로 사용하여 portfolio를 구성한다

EWMA MODEL

STANDARD ESTIMATE IS RECOVERED FOR $\lambda=1$

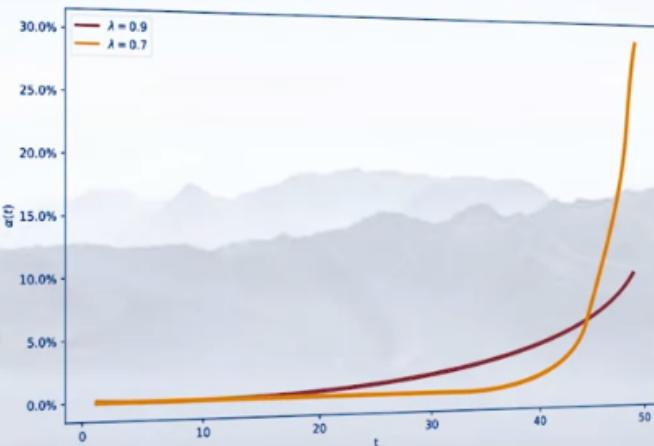
OK THEN TO USE EXPANDING WINDOWS



- 람다 = 1 : 모든 weight이 같음
- 람다가 0에 가까울 수록 recent data에 더 큰 weight를 부여하게 된다.

EWMA MODEL

α_t for $\lambda = 0.9, 0.7, T=50$



α_t FOR TWO VALUES OF THE DECAY FACTOR $\lambda : .9$ AND $.7$

$$\alpha_t = \frac{\lambda^{T-t}}{\sum_{t=1}^T \lambda^{T-t}}$$

As you can see with 0.7,



- 그림을 보면 노란선의 감마값이 0.7, 빨간색 그래프의 감마값이 0.9인 것을 확인할 수 있다.
- 감마가 1에 가까울 수록 날짜마다 거의 균등하게 weight이 부여되며 감마가 0에 가까울 수록 최근 날짜에 더 큰 weight를 부여하는 것을 확인할 수 있다.
- EWMA 모델의 특징: expanding window를 사용해도 괜찮다.
- why?

rolling window의 특징 → window의 밖에 있는 데이터는 고려되지 않는다.

EWMA model의 특징 → old data의 weight이 점점 작아지기 때문에 old data가 미치는 영향을 점점 작게 만드는 것이 가능하다.

- 따라서 rolling window를 사용해서 window의 밖에 있는 데이터를 제외하기 보단, EWMA model과 expanding window를 사용해서 데이터를 다루는 것이 합리적이다.

3. ARCH and GARCH Models

ARCH

- 장기변동성을 추정의 기준점으로 삼고 시작
- 현재의 변동성은 장기변동성과 이전기 편차의 가중합
- 상대적 크기는 추정을 통해 결정

ARCH MODEL

IN AN ARCH(T) MODEL WE ALSO ASSIGN
SOME WEIGHT TO THE LONG-RUN VARIANCE V_L

$$\sigma_T^2 = \gamma V_L + \sum_{t=1}^T \alpha_t R_t^2$$

where $\gamma + \sum_{t=1}^T \alpha_t = 1$

ARCH(1) MODEL

$$\sigma_T^2 = \gamma V_L + \alpha R_T^2$$

where $\gamma + \alpha = 1$



 EDHEC-RISK

GARCH

- ARCH에 더해서
- 이전기의 추정치를 현재의 추정치 예측에 사용
- 전기까지의 누적 변동성이 추정에 포함되는 이유는 변동성은 클러스터링하는 경향이 있었기 때문이다
→ 한번 스파이크를 쳐서 방향이 변하는 경우가 있고 쳐도, 변동성 자체가 장기평균보다 크다고 베팅할 수 있는 상품만 있다면 되지 않을까요?

GARCH MODEL

IN GARCH (1,1) WE ADDITIONALLY
ASSIGN SOME WEIGHT TO THE PREVIOUS
VARIANCE ESTIMATE TO CAPTURE
VOLATILITY CLUSTERING

$$\sigma_T^2 = \gamma V_L + \alpha R_T^2 + \beta \sigma_{T-1}^2$$

with $\gamma + \alpha + \beta = 1$



EDHEC-RISK

VARIATIONS ON GARCH

GARCH(p,q)

$$\sigma_T^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{T-j}^2$$



EDHEC-RISK

Factor GARCH, OGARCH라는 것도 있답니다. 무작정 시간만 늘리는 것이 능사는 아님.

FACTOR GARCH

GARCH MODELS ARE VERY CONVENIENT
BUT THEY INCREASE THE CURSE
OF DIMENSIONALITY

ORTHOGONAL (0)GARCH MODEL

$$\hat{\sigma}_{ij}^{OGARCH} = \hat{\sigma}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_{ik} \hat{\beta}_{jk} \hat{\sigma}_{F_k}^2(t)$$



EDHEC-RISK