

複素ランジュバン法の様々な応用の可能性

「離散的手法による場と時空のダイナミクス」研究会

2019年9月11日(水)、島根大学 松江キャンパス

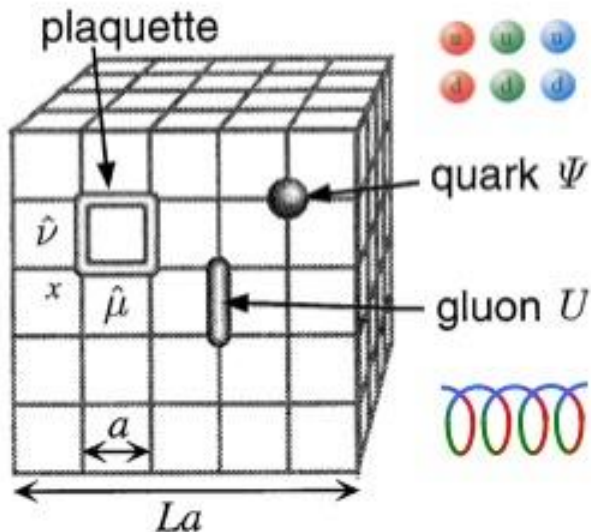
西村 淳 (KEK理論センター & 総研大)

モンテカルロ法における「符号問題」

- モンテカルロ法

場の量子論を**非摂動的**に研究するための強力な道具

例) 格子 QCD



$$\begin{aligned} Z &= \int dU d\Psi e^{-S[U, \Psi]} \\ &= \int dU e^{-S_g[U]} \det \mathcal{M}[U] \end{aligned}$$

この確率で配位 U を生成し、
 $\langle O \rangle$ を期待値として計算。

モンテカルロ法における「符号問題」

(続き)

- バリオン数密度が有限のとき ($\mu \neq 0$),

$$\begin{aligned} Z &= \int dU d\Psi e^{-S[U, \Psi]} \\ &= \int dU e^{-S_g[U]} \det \mathcal{M}[U] \end{aligned}$$

フェルミオン行列式が一般に複素数値をとる

$$\det \mathcal{M}[U] = |\det \mathcal{M}[U]| e^{i\Gamma[U]}$$

配位 U を $e^{-S_g[U]} |\det \mathcal{M}[U]|$ という確率で生成し、

$$\langle \mathcal{O}[U] \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}[U] e^{i\Gamma[U]} \rangle_0}{\langle e^{i\Gamma[U]} \rangle_0} \quad \text{を計算。 (reweighting)}$$

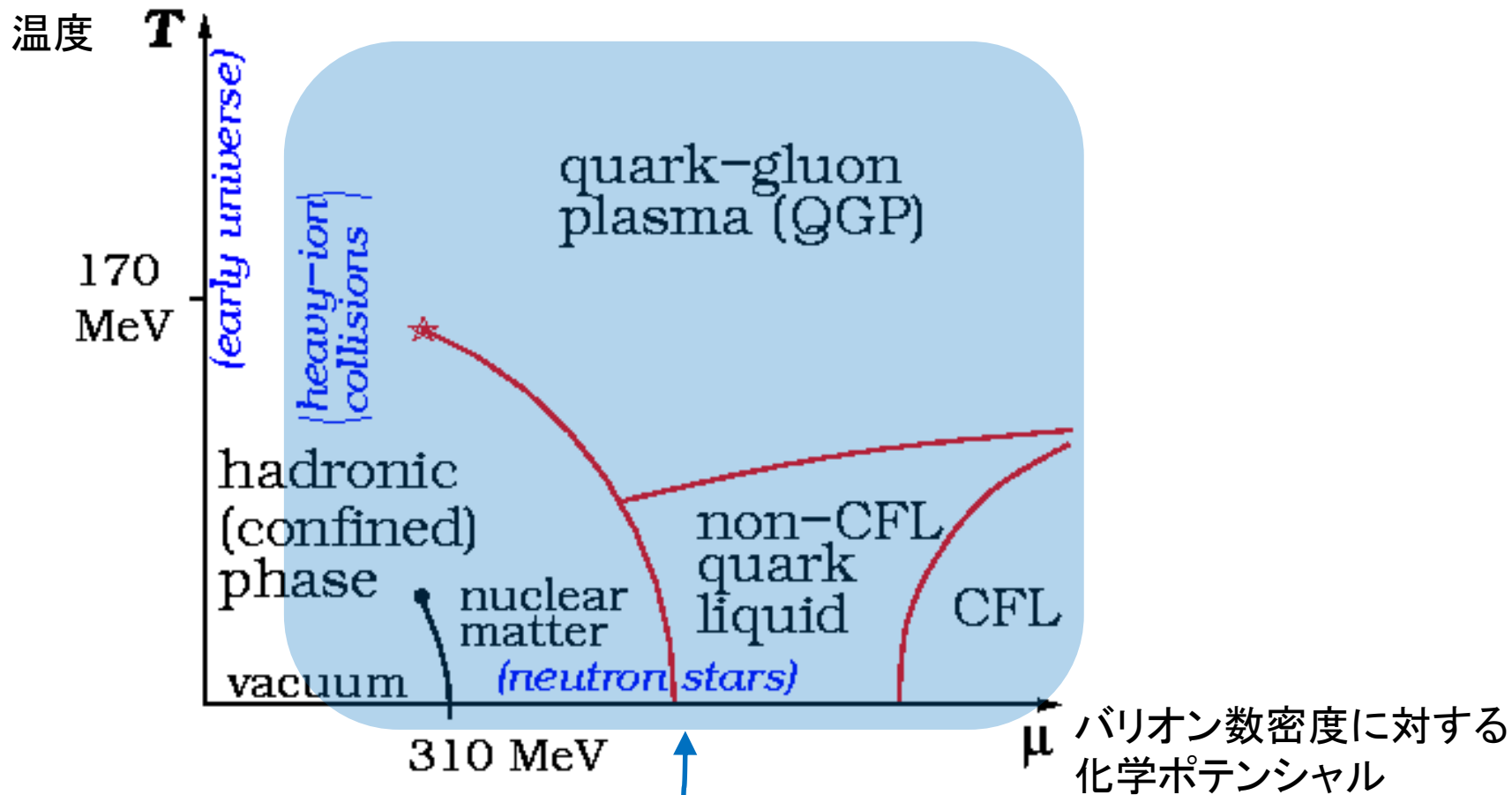
系の体積が大きくなると、指数関数的に小さくなる
(位相 Γ が激しく揺らぐため。)

期待値 $\langle \mathcal{O} \rangle$ を計算するのに必要な配位の数、系のサイズとともに指数関数的に増大。

「符号問題」

c.f.) 昨日の加堂大輔さんの講演

QCD の相図は、謎に包まれている



符号問題のために、第一原理計算は困難。

符号問題は、他にも様々な興味深い系で起きる

- Θ 項を含む理論
- Chern-Simons項を含む理論
- 実時間のダイナミクス
- 湯川相互作用
- 超対称ゲージ理論、IKKT行列模型
- カイラル・フェルミオン
- 強相関電子系など

フェルミオンに起源
を持つケース

次の松本信行さんの講演

理論物理学における様々な研究の進展が、
符号問題のために阻まれている！

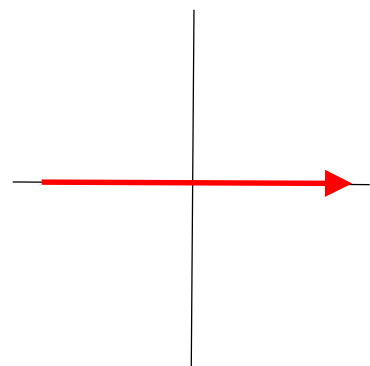
符号問題の解決に向けた新たな発展

Key : 力学変数の複素化

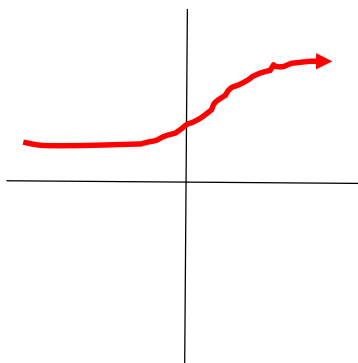
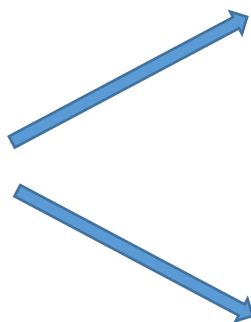
2011～

もともとの経路積分

$$Z = \int dx w(x)$$



被積分関数 $w(x)$ の位相
が激しく振動 (符号問題)

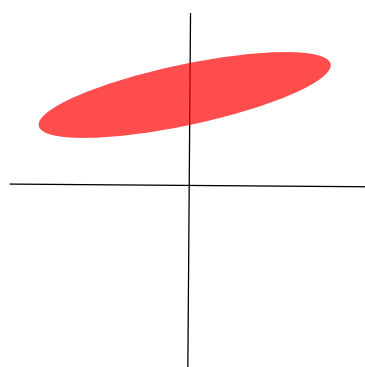


$$Z = \int dz w(z)$$

積分路を変形することにより、
符号問題を最小化する。

“Lefschetz thimble 法”

今日の話



複素化した変数に対する確率過程
のもとで、期待値を計算
(符号問題は一切なし!)

“複素ランジュバン法”

但し、もともとの経路積分との等価性には、
一定の条件が必要。

目次

0. 序

1. 複素ランジュバン法とは何か (brief review)

2. 有限密度QCDへの応用

非閉じ込め相転移を見ることはできるか
小さな空間方向を持つ格子で探る低温的振る舞い

3. Θ 項を含むゲージ理論への応用

4. まとめと展望

1. 複素ランジュバン法とは何か (brief review)

複素ランジュバン法

$$Z = \int dx \, w(x)$$

複素

Parisi ('83), Klauder ('83)

力学変数を複素化して、(仮想的な)時間発展を考える

$$z^{(\eta)}(t) = x^{(\eta)}(t) + i y^{(\eta)}(t)$$

時間発展を定義する「複素ランジュバン方程式」

$$\frac{d}{dt} z^{(\eta)}(t) = v(z^{(\eta)}(t)) + \eta(t)$$

ガウス型のノイズ
probability $\propto e^{-\frac{1}{4} \sum_t \eta(t)^2}$

$$\langle \mathcal{O} \rangle \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathcal{O}(z^{(\eta)}(t)) \rangle_{\eta}$$

注：ドリフト項 $v(x) \equiv \frac{1}{w(x)} \frac{\partial w(x)}{\partial x}$ と オブザーバブル $\mathcal{O}(x)$ を、
複素変数に対して定義するには、解析接続を用いることが重要。

正当化の鍵となる恒等式

$P(x, y; t)$: 時刻 t における力学変数 $z = x + iy$ の確率

この方法を正当化する鍵となる恒等式:

$$\int dx dy \mathcal{O}(x + iy) P(x, y; t) \stackrel{?}{=} \int dx \mathcal{O}(x) \rho(x; t)$$

但し、 $\rho(x; t) \in \mathbb{C}$ は、Fokker-Planck方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{w(x)} \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right) \rho \quad \text{を満たす。}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x; t) = \frac{1}{Z} w(x)$$

従来の議論

Aarts, Seiler, Stamatescu: Phys.Rev. D81 (2010) 054508, arXiv:0912.3360 [hep-lat]

Aarts, James, Seiler, Stamatescu: Eur. Phys. J. C ('11) 71, 1756

$$\int dx dy \mathcal{O}(x + iy) P(x, y; t)$$

$$= \int dx dy \mathcal{O}(x + iy) (e^{tL^\top} P)(x, y; 0)$$

$$= \int dx dy \left\{ e^{tL} \mathcal{O}(x + iy) \right\} P(x, y; 0)$$

$$= \int dx \left\{ e^{tL_0} \mathcal{O}(x) \right\} \rho(x; 0)$$

$$= \int dx \mathcal{O}(x) \rho(x; 0) (e^{tL_0^\top} \rho)(x; 0)$$

$$= \int dx \mathcal{O}(x) \rho(x; t)$$

$$P(x, y; 0) = \rho(x; 0) \delta(y)$$

$$L\mathcal{O}(z)|_{z=x} = L_0\mathcal{O}(x) \quad \text{for holomorphic function } \mathcal{O}(z)$$

ここで使う部分積分が必ずしも正当化できない。

我々の指摘: この表式が t 無限大では一般にwell-definedではない。

「時間発展したオブザーバブル」の期待値が定義できるための条件

Nagata-J.N.-Shimasaki, Phys.Rev. D94 (2016) no.11, 114515,
arXiv: 1606.07627 [hep-lat]

$$\langle \mathcal{O}(z^{(\eta)}(t + \tau)) \rangle_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tau^n \int dx dy \{ \tilde{L}^n \mathcal{O}(x + iy) \} P(x, y; t)$$

$$\tilde{L} = \left\{ v(z) + \frac{\partial}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial z}$$

この表式が有限の τ に対して定義できるためには、
上の無限級数が**有限の収束半径**を持つことが必要。

それには、ドリフト項の確率分布が大きい値に対して指数関数的に抑制されていることが必要。

2. 有限密度QCDへの応用

有限密度QCDにおける複素ランジュバン法

$$w(U) = e^{-S_{\text{plaq}}[U]} \det M[U]$$

$$S_{\text{plaq}}(U) = -\beta \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \text{tr} (U_{n\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^{-1} U_{n\nu}^{-1})$$

SU(3)の生成子

$$v_{an\mu}(U) = \frac{1}{w(U)} D_{an\mu} w(U)$$

$$D_{an\mu} f(U) = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(e^{ix t_a} U_{n\mu}) \right|_{x=0}$$

力学変数の複素化: $U_{n\mu} \mapsto \mathcal{U}_{n\mu} \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$

離散化した複素ランジュバン方程式

$$\mathcal{U}_{n\mu}^{(\eta)}(t+\epsilon) = \exp \left\{ i \sum_a \left(\epsilon v_{an\mu}(\mathcal{U}) + \sqrt{\epsilon} \eta_{an\mu}(t) \right) t_a \right\} \mathcal{U}_{n\mu}^{(\eta)}(t)$$

ドリフト項が大きくなるのは以下のようなとき。

- 1) リンク変数 $\mathcal{U}_{n\mu}$ がユニタリ行列から著しくずれたとき。 (“excursion problem”)

「ゲージ・クーリング」

Seiler-Sexty-Stamatescu, PLB 723 (2013) 213

Nagata-J.N.-Shimasaki, PRD94 (2016) no.11, 114515
- 2) $M[\mathcal{U}]$ の固有値がゼロに近づくとき。 (“singular drift problem”)

ドリフト項に $\text{tr} (M[\mathcal{U}]^{-1} \mathcal{D}_{an\mu} M[\mathcal{U}])$ が現れることに注意。

Mollgaard-Splittorff, PRD88 (2013) no.11, 116007
 J.N.-Shimasaki, PRD92 (2015) no.1, 011501

複素ランジュバン法の有限密度QCDへの応用

高温相：

Sexty, Phys.Lett. B729 (2014) 108-111, arXiv:1307.7748 [hep-lat]

full QCD計算での最初の成功例

Fodor-Katz-Sexty-Török, Phys.Rev. D92 (2015) no.9, 094516, arXiv:1508.05260 [hep-lat]

Tsutsui-Ito-Matsufuru-J.N.-Shimasaki-Tsuchiya, PoS LATTICE2018 (2018) 144,
arXiv:1811.07647 [hep-lat]

Sexty, arXiv:1907.08712 [hep-lat]

低温相：

Nagata-J.N.-Shimasaki, Phys.Rev. D98 (2018) no.11, 114513, arXiv:1805.03964 [hep-lat]

Ito-Matsufuru-J.N.-Shimasaki-Tsuchiya-Tsutsui, PoS LATTICE2018 (2018) 146,
arXiv:1811.12688 [hep-lat]

Kogut-Sinclair, arXiv:1903.02622

2.1 非閉じ込め相転移を見ることができるか？

Ref.) Tsutsui, Ito, Matsufuru, J.N., Shimasaki, Tsuchiya, PoS LATTICE2018 (2018) 144,
arXiv:1811.07647 [hep-lat]

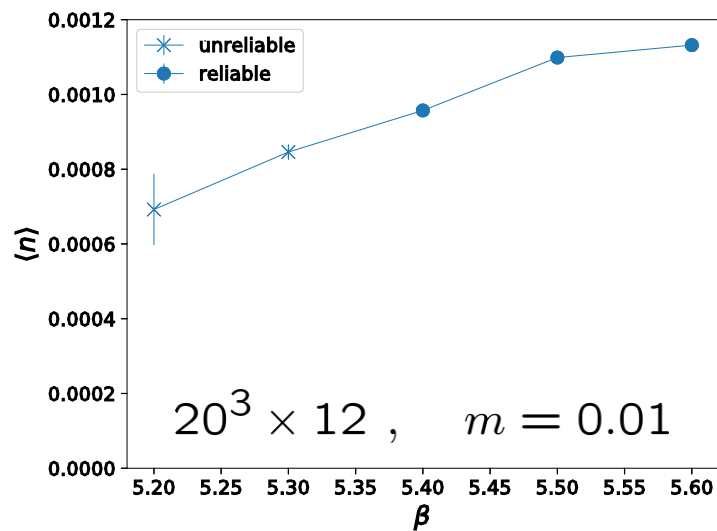
シミュレーションのセットアップ

Tsutsui, Ito, Matsufuru, J.N., Shimasaki, Tsuchiya, PoS LATTICE2018 (2018) 144,
arXiv:1811.07647 [hep-lat]

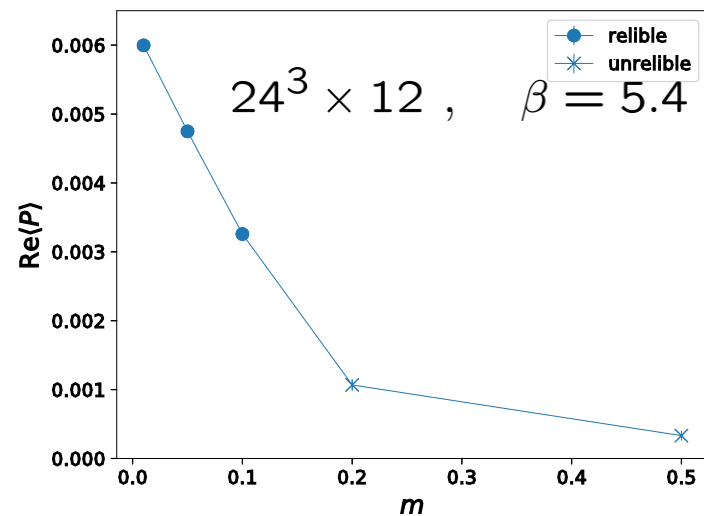
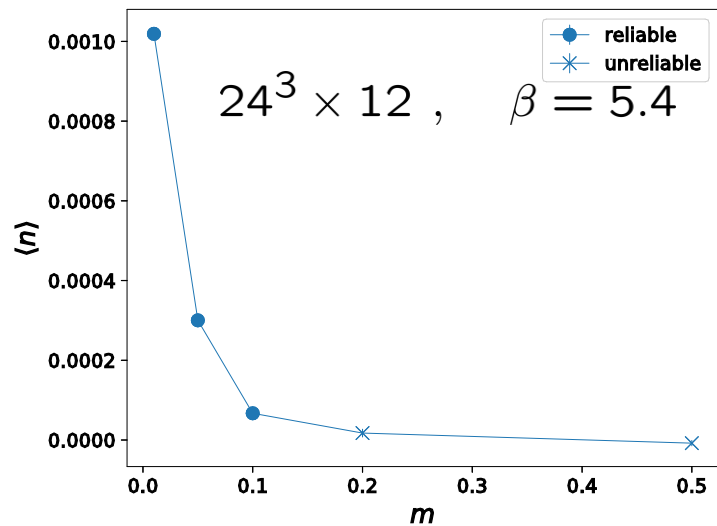
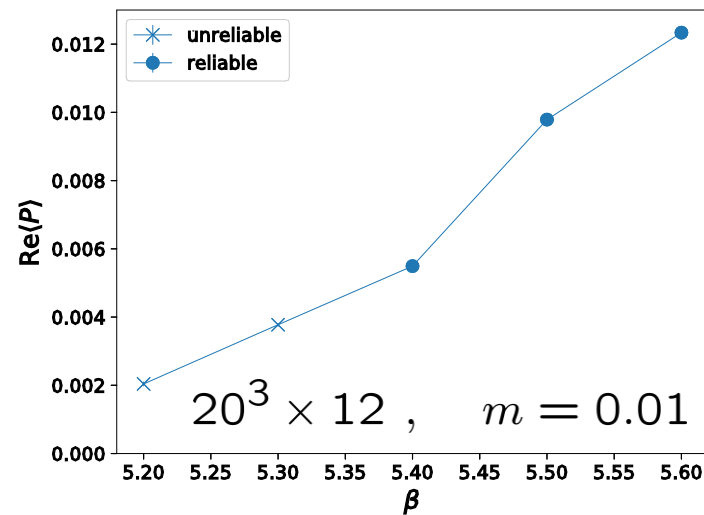
- lattice size : $20^3 \times 12$, $24^3 \times 12$ $a \sim 0.07\text{fm}$
- plaquette action with $\beta = 5.2 \sim 5.6$
- staggered fermion (4 quark flavors)
- quark chemical pot.: $\mu a = 0.1$
corresponding to $\mu/T = 1.2$
- quark mass : $ma = 0.01 \sim 0.5$
- Langevin stepsize : $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$

先行研究: Z. Fodor, S.D. Katz, D. Sexty, C. Török, Phys.Rev. D92 (2015) no.9, 094516
 $N_t = 8$, CL シミュレーションが $\beta < 5.2$ で不安定になる(?).

バリオン数密度



ポリャコフ・ループ



閉じ込め相では一般に、singular-drift problemが起こるようだ。

解釈：一般化された Banks-Casher関係式

Splitterff, Phys.Rev. D91 (2015) no.3, 034507, arXiv:1412.0502 [hep-lat]

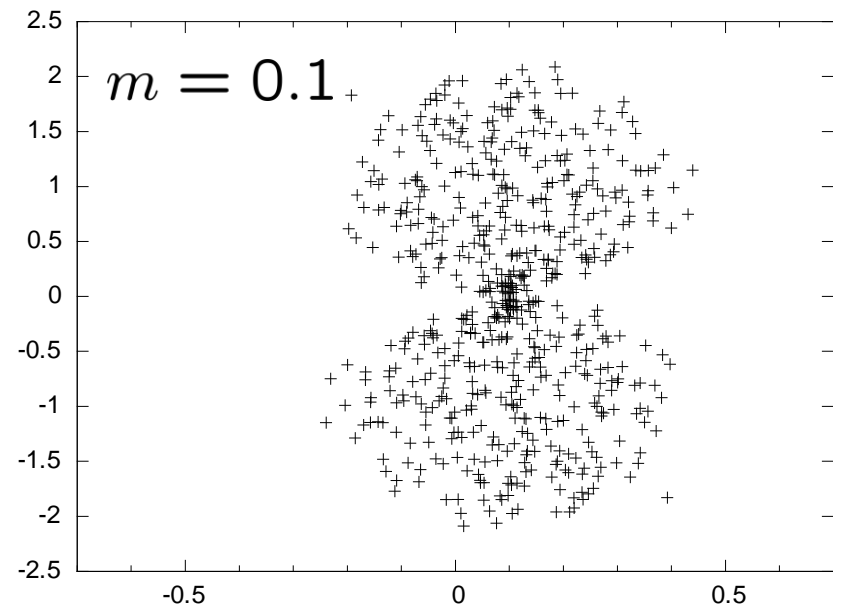
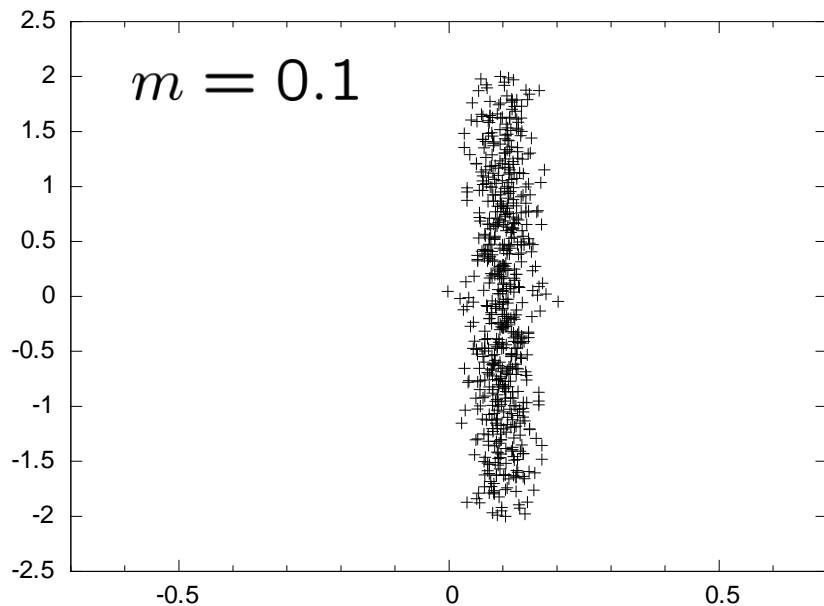
Nagata-J.N.-Shimasaki, JHEP 1607 (2016) 073, arXiv:1604.07717 [hep-lat]

$$\lim_{m \rightarrow 0} \Sigma = \pi i \lim_{r \rightarrow +0} r \int_0^\pi d\theta \lim_{m \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{CL}}(r, \theta)$$

カイラル凝縮 ディラック演算子の固有値分布

chiral Random Matrix Theoryの結果

分布自体はゲージ・クーリングのしかたに依存するが、
右辺の量はユニバーサル。



シミュレーションの結果に基づく我々の主張

- 閉じ込め相ではカイラル凝縮が生成するため、一般に singular-drift problem が起こる。
(但し、クォーク質量が小さく、格子の体積が十分大きい状況で。)
- これは、一般化された Banks-Casher 関係式により解釈可能。
- 逆に、カイラル凝縮のない 高密度領域 は、CLM で調べられる可能性あり。
(但し、excursion problem を避けるため、十分大きい β を用いる必要がある。)
- もう一つの可能性: 格子の空間方向の大きさを小さくして、ディラック演算子の固有値分布にギャップが生じるようにする。

2.2 小さな空間方向を持つ格子で探る 低温的振る舞い

Ref.) Ito, Matsufuru, J.N., Shimasaki, Tsuchiya, Tsutsui, PoS LATTICE2018 (2018) 146,
arXiv:1811.12688 [hep-lat]

シミュレーションのセットアップ

Ito, Matsufuru, J.N., Shimasaki, Tsuchiya, Tsutsui, PoS LATTICE2018 (2018) 146,
arXiv:1811.12688 [hep-lat]

- lattice size : $8^3 \times 16$ $a \sim 0.045\text{fm}$
- plaquette action with $\beta = 5.7$
- staggered fermion (4 quark flavors)
- quark chemical pot.: $0 \leq \mu a \leq 0.5$
corresponding to $0 \leq \mu/T \leq 8$
- quark mass : $ma = 0.01$
- total Langevin time = 50 \sim 150
with stepsize $\epsilon = 10^{-4}$

注意：格子の空間方向の大きさは $0.045\text{fm} \times 8 = 0.36\text{ fm}$

c.f.) $4^3 \times 8$ の格子で行なった先行研究

Nagata, JN, Shimasaki, Phys.Rev. D98 (2018) no.11, 114513, arXiv:1805.03964 [hep-lat]

ドリフト項の ヒストグラム

$$8^3 \times 16, \quad N_f = 4$$

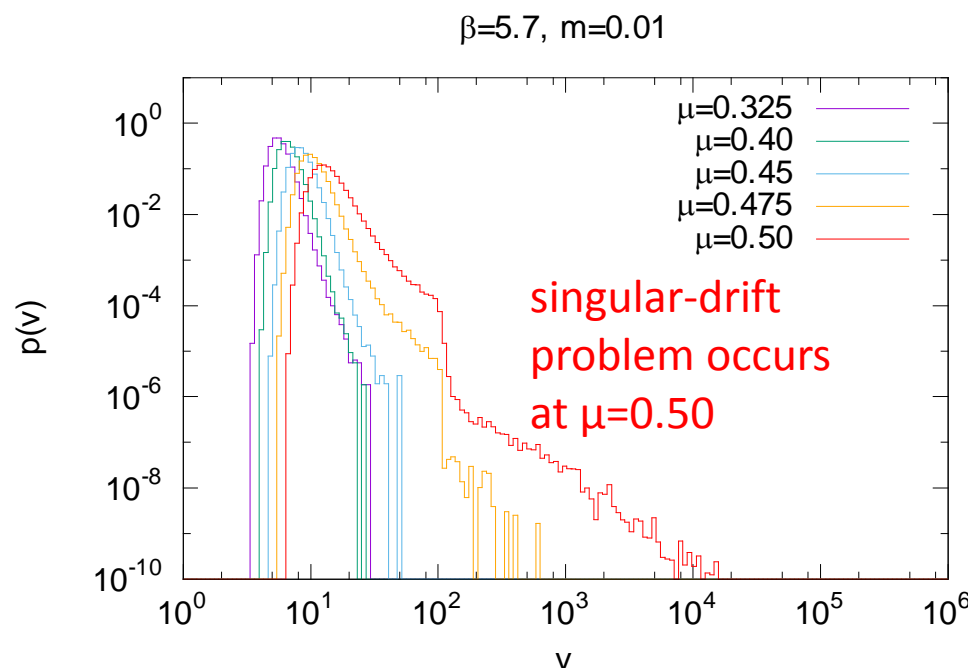
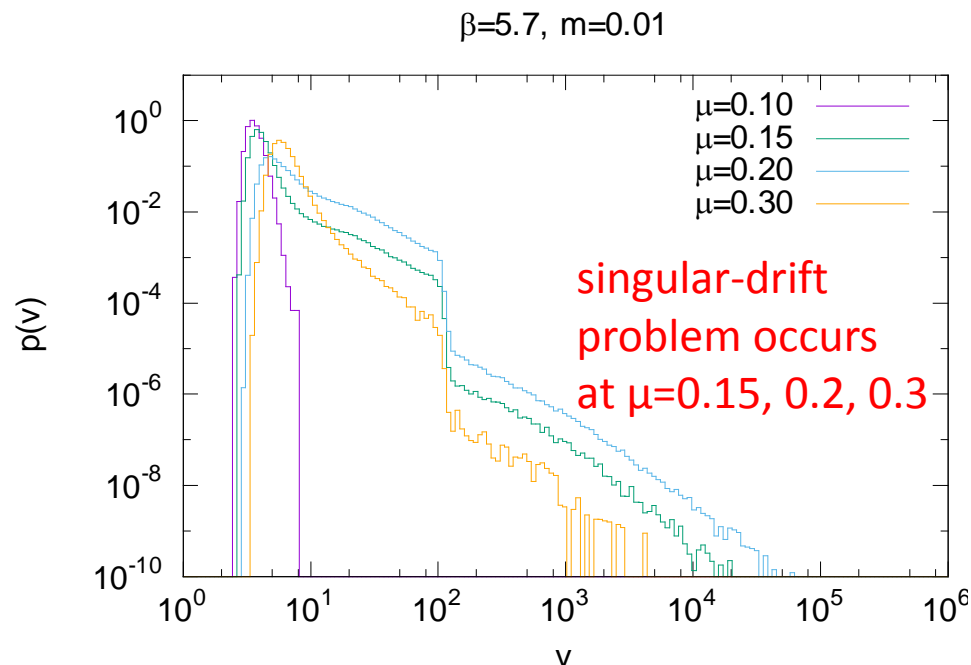
$$\beta = 5.7$$

$$m = 0.01$$

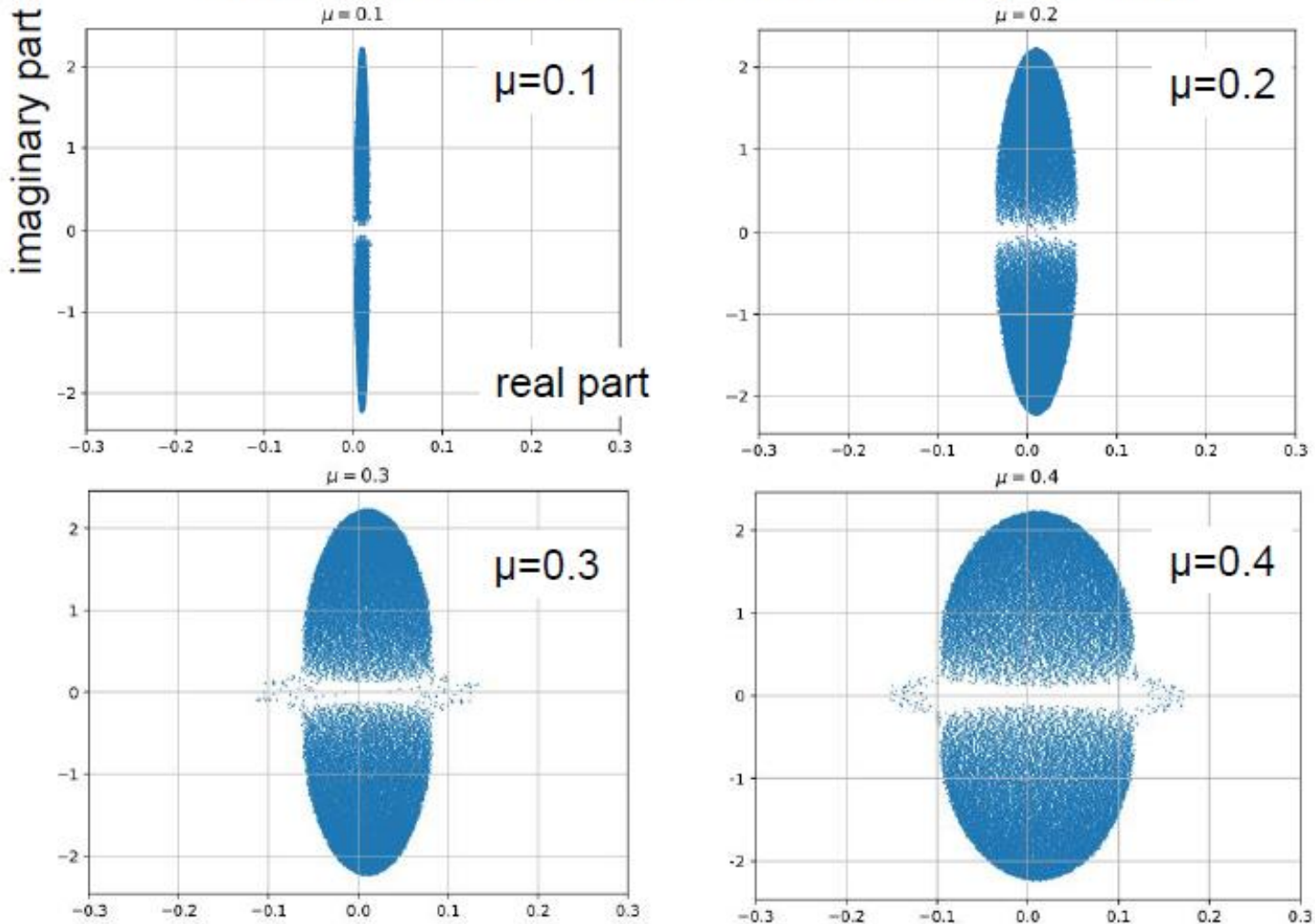
CLMが信用できる領域

$$\mu \leq 0.1$$

$$0.325 \leq \mu \leq 0.475$$

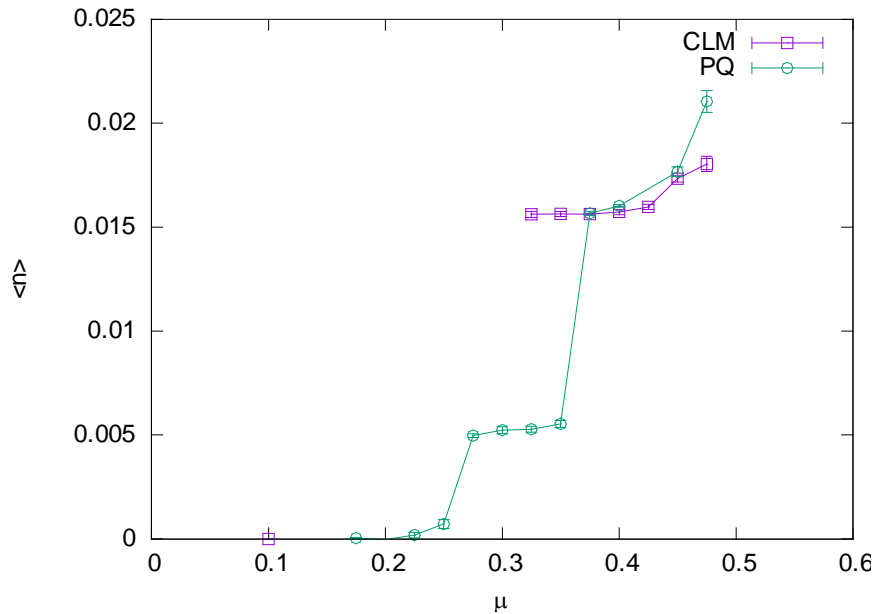


Eigenvalue distribution of (D+m)

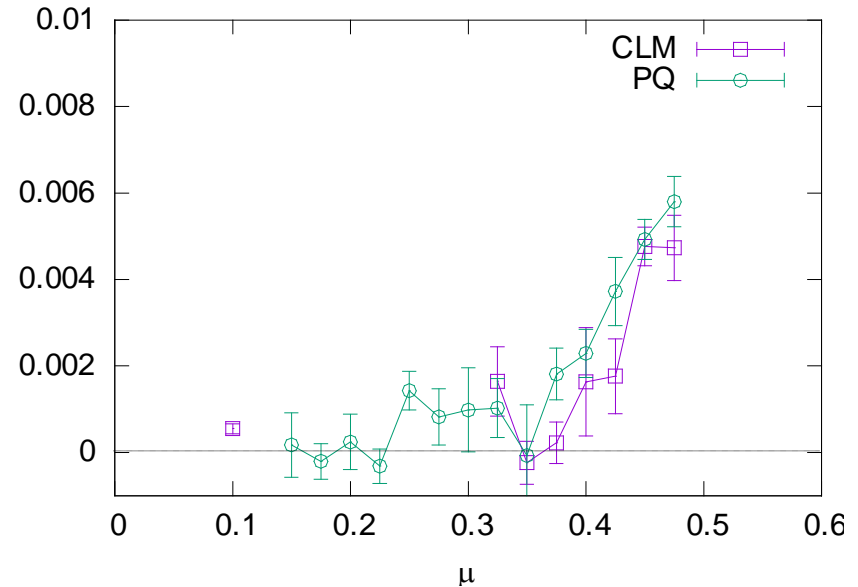


空間方向が有限である効果により、常にギャップがあるような状況だが、
 $\mu = 0.2$, $\mu = 0.3$ では **singular-drift problem** が起こる。
相転移に伴い、固有値分布の揺らぎが大きくなることが原因か？

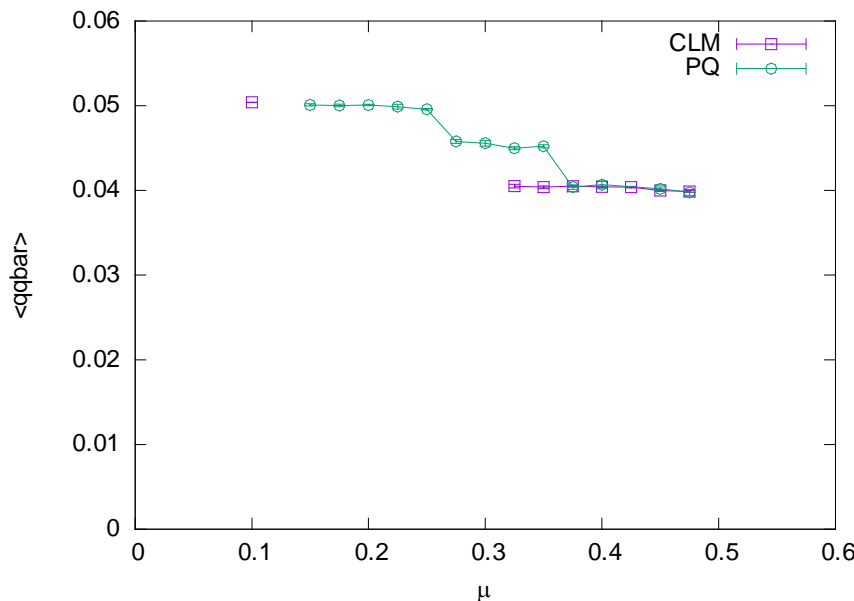
バリオン数密度



ポリャコフ・ループ

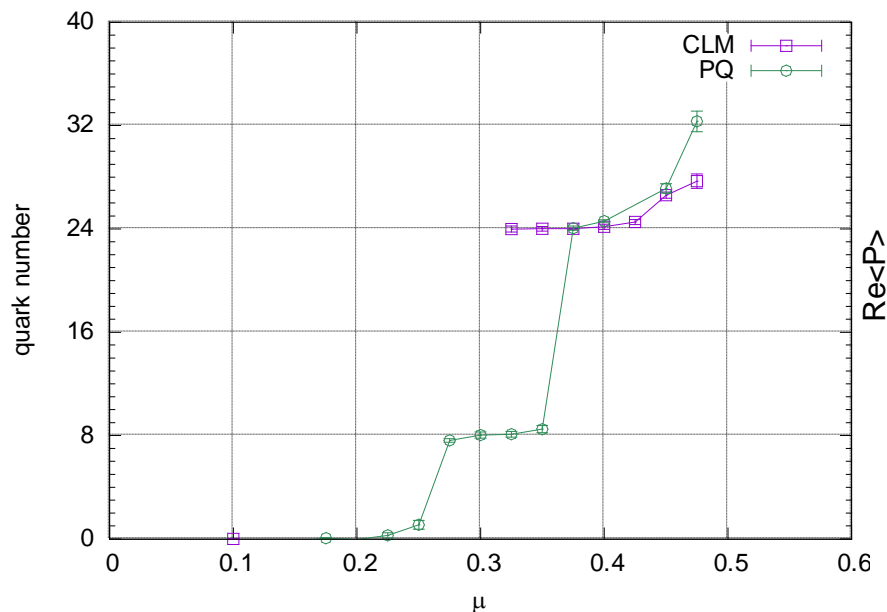


カイラル凝縮

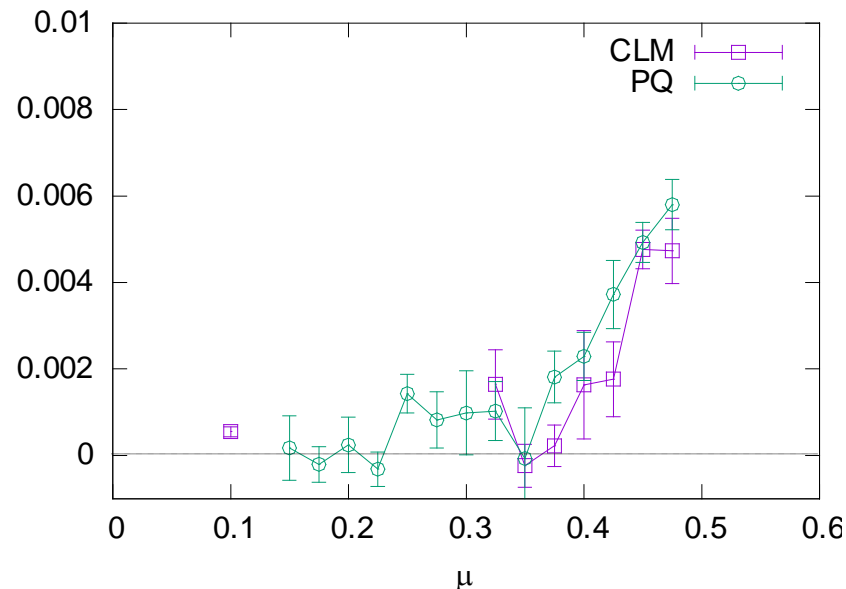


- はっきりしたプラトーが見られる。
(24個のクォークに対応)
プラトー付近ではポリャコフ・ループの値は小さい。
- これらの低温的振る舞いは
空間方向が小さいことによる効果。
(Note $T \sim 270$ MeV.)
- 行列式の位相をクエンチしたモデルでは、少し小さい μ に別のプラトー。
(4つのメソンが形成?)

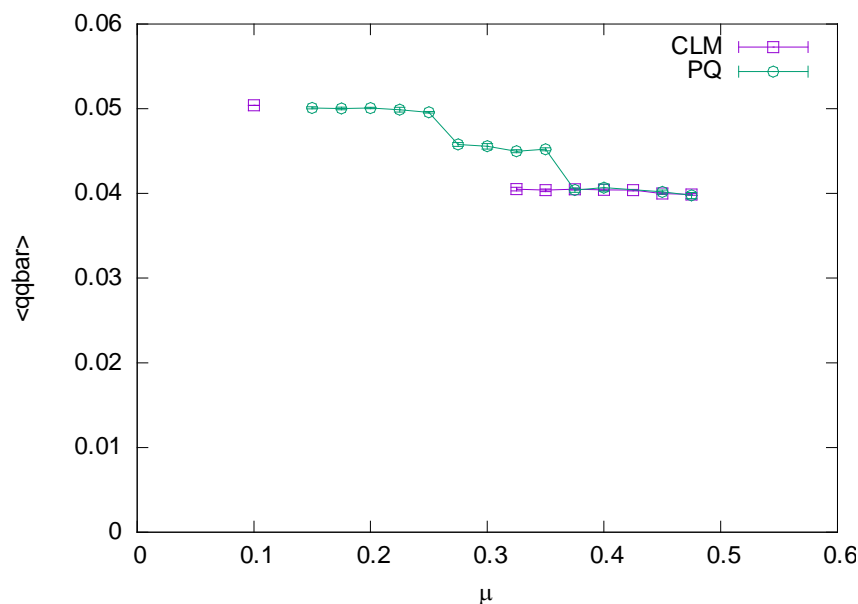
クォーク数



ポリャコフ・ループ



カイラル凝縮

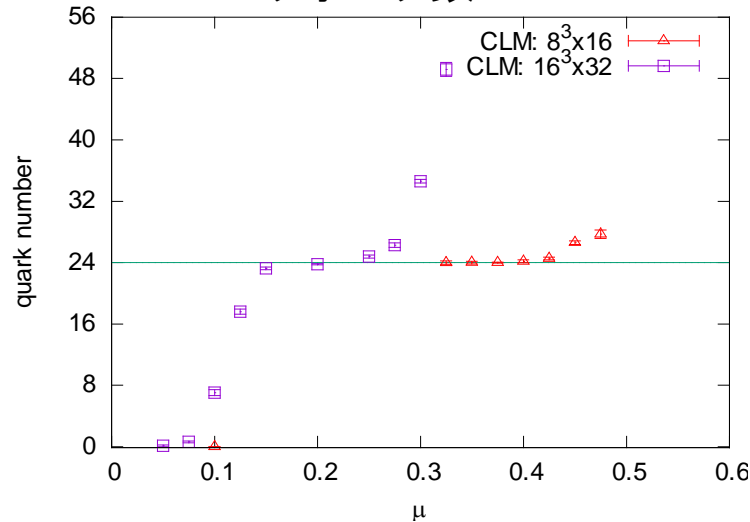


- はっきりしたプラトーが見られる。
(24個のクォークに対応)
プラトー付近ではポリャコフ・ループの値は小さい。
- これらの低温的振る舞いは
空間方向が小さいことによる効果。
(Note $T \sim 270$ MeV.)
- 行列式の位相をクエンチしたモデルでは、少し小さい μ に別のプラトー。
(4つのメソンが形成?)

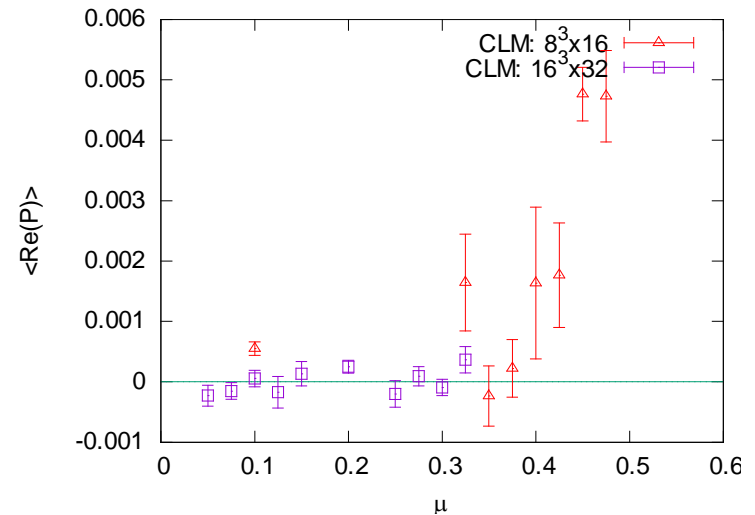
$16^3 \times 32$ の格子に対する新しい結果

Ito, Matsufuru, J.N., Shimasaki, Tsuchiya, Tsutsui, in prep.

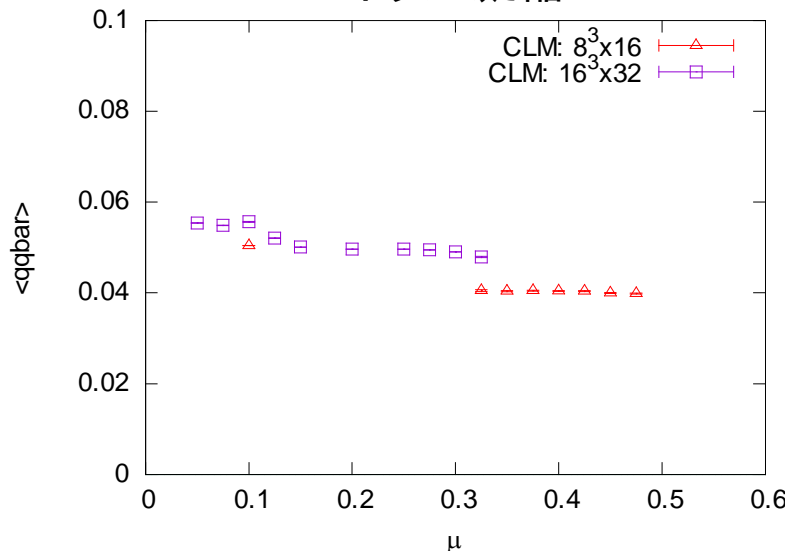
クォーク数



ポリャコフ・ループ



カイラル凝縮



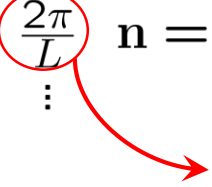
- プラトーは、 μ の小さい領域に移動。
- プラトーの高さはクォーク数にして24のまま変わらず。
- バリオン数密度が核密度 0.17 fm^{-3} に達するまでは変わらないだろう。
(そこに至るには、 $L_s=80$ が必要)

プラトーの解釈について

注：格子の空間方向の大きさ $0.045\text{fm} \times 8 = 0.36\text{ fm}$
 $0.045\text{fm} \times 16 = 0.72\text{ fm}$

バリオンを形成するには小さすぎる。
(今のセットアップでは核物質相は実現できないだろう。)

フェルミ球の形成では？

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \sim \frac{2\pi}{L}|\mathbf{n}| = \begin{cases} 0 & \mathbf{n} = (0, 0, 0) \\ \frac{2\pi}{L} & \mathbf{n} = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) \\ \vdots & \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{L} = \begin{cases} 0.79 & (L = 8) \\ 0.38 & (L = 16) \end{cases}$$

For $\mu \lesssim \frac{2\pi}{L}$, only zero modes condense.

height of the plateau = $3 \times 4 \times 2 = 24$
color flavor spin

有限格子中の自由粒子の振る舞いとの比較

Yokota, Asano, Ito, Matsufuru, Namekawa, J.N., Tsuchiya, Tsutsui, work in progress

$$N_q = \underbrace{N_c N_f N_{\text{spin}}}_{24} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{e^{(E(\mathbf{k}) - \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(E(\mathbf{k}) + \mu)/T} + 1} \right)$$

$8^3 \times 16$

$$E(\mathbf{k}) = \sinh^{-1} \sqrt{\sum_i \sin^2 k_i + m^2}$$

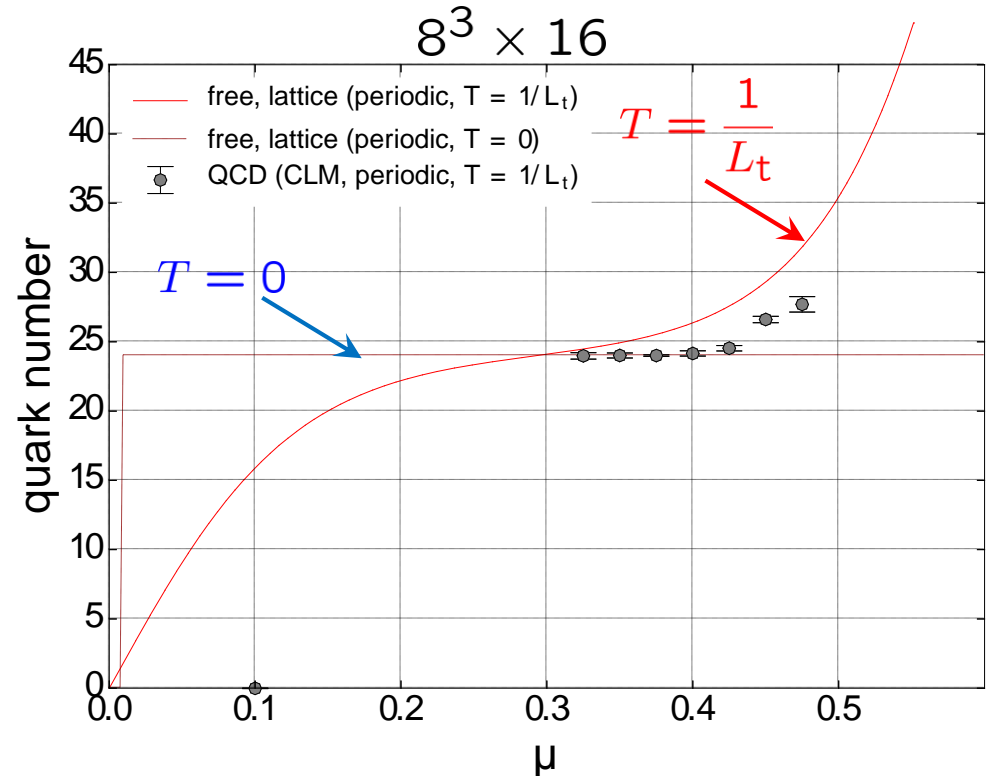
$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L_s} \mathbf{n}$$

$$-\frac{L_s}{4} \leq n_i < \frac{L_s}{4}$$

staggered fermion

空間が有限のため、運動量が離散化
その結果、プラトーが現れる。

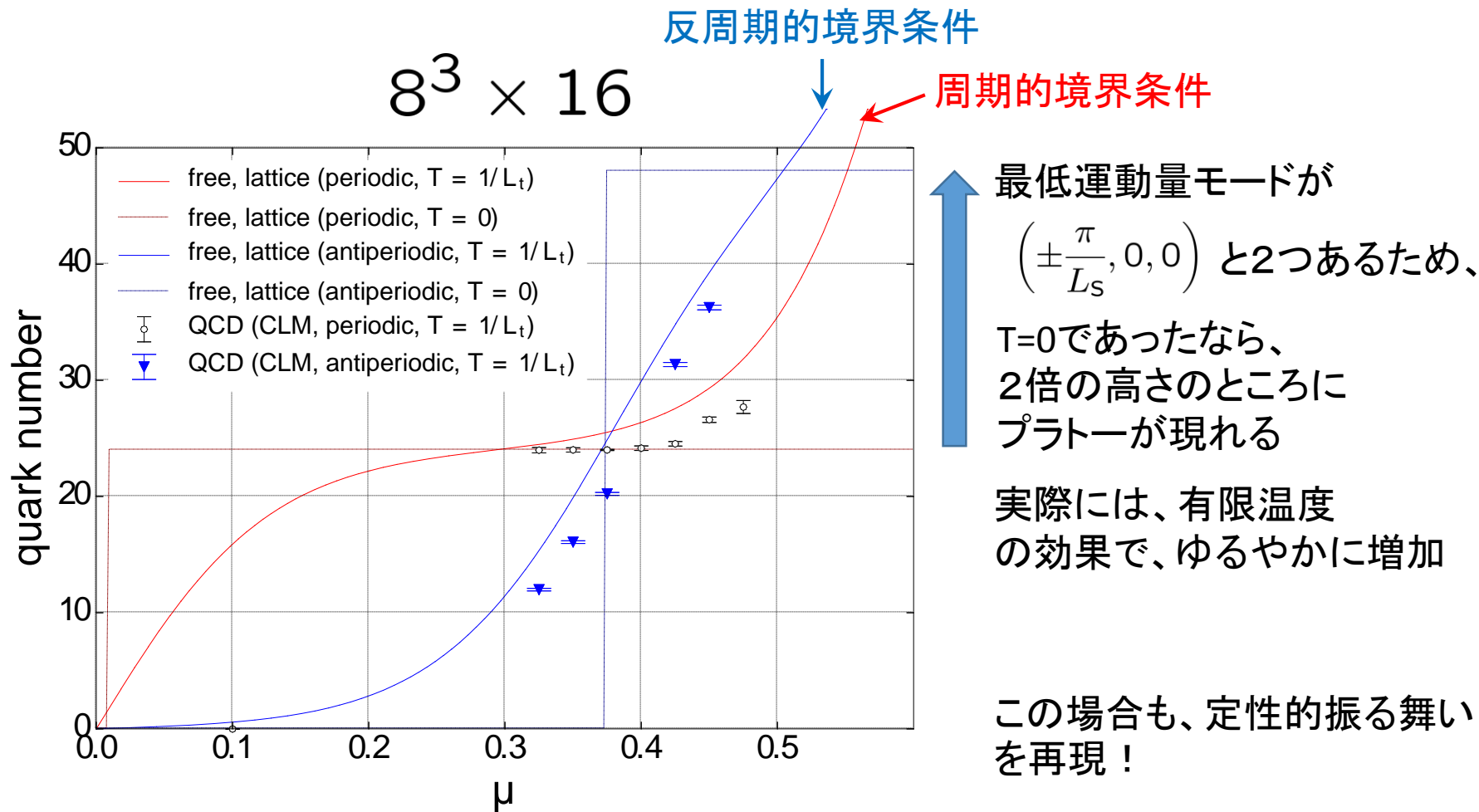
$T = \frac{1}{L_t}$ 有限温度のため、なだらかに増加。



CLMの結果の定性的振る舞いを再現！（ずれは相互作用の効果）

空間一方向を反周期的境界条件にした場合

Yokota, Asano, Ito, Matsufuru, Namekawa, J.N., Tsuchiya, Tsutsui, work in progress



QCDの相互作用をフルに入れて、このような計算が
実行できていることは画期的。

3. Θ 項を含むゲージ理論への応用

Hirasawa-Matsumoto-J.N.-Yosprakob, work in progress

θ 項を含む2次元 U(1) ゲージ理論

$$S = \int d^2x \frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu})^2 - i\theta Q$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Q : topological charge

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

周期的境界条件のもとで整数値をとる (トポロジカル)

θ 真空、strong CP問題、アクシオンの物理に関連して重要だが、符号問題のため通常のモンテカルロ計算は困難。

格子正則化

$$U_{n,\mu} = e^{iaA_{n,\mu}}$$

$$\begin{aligned} P_n &= U_{n,1} U_{n+\hat{1},2} U_{n+\hat{2},1}^{-1} U_{n,2}^{-1} \\ &= e^{ia^2 F_{n,12}} = 1 + ia^2 F_{n,12} - \frac{1}{2}a^4 (F_{n,12})^2 + \dots \end{aligned}$$

$$F_{n,\mu\nu} = \frac{A_{n+\hat{\mu},\nu} - A_{n,\nu}}{a} - \frac{A_{n+\hat{\nu},\mu} - A_{n,\mu}}{a}$$

$$S = -\frac{\beta}{2} \sum_n (P_n + P_n^{-1}) \simeq \frac{1}{4g^2} \sum_n a^2 (F_{n,\mu\nu})^2$$
$$\beta = \frac{1}{(ga)^2}$$


$$Q = -\frac{i}{4\pi} \sum_n (P_n - P_n^{-1}) \simeq \frac{1}{4\pi} \sum_n a^2 \epsilon_{\mu\nu} F_{n,\mu\nu}$$

格子上的Qのtopologicalな定義

2D U(1) では、以下のようにして、格子上でも**厳密に整数値**をとるQの定義が可能（トポロジカルなQの定義）

$$P_n = e^{ia^2 F_{n,12}}$$

$$Q = -\frac{i}{2\pi} \sum_n \log P_n = \frac{1}{4\pi} \sum_n a^2 \epsilon_{\mu\nu} F_{n,\mu\nu}$$


$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

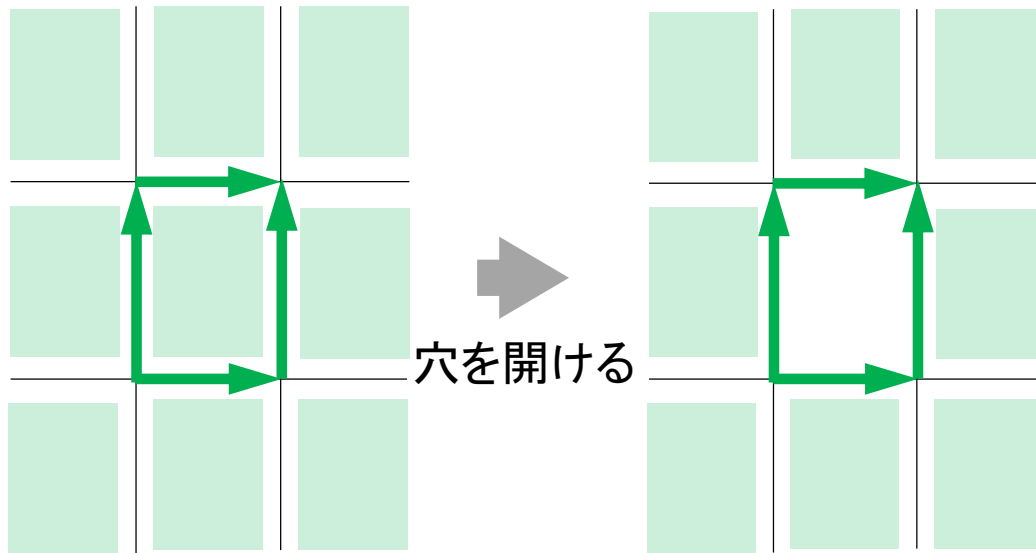
c.f.) ホロモロフィックなQの定義

$$Q = -\frac{i}{4\pi} \sum_n (P_n - P_n^{-1}) \simeq \frac{1}{4\pi} \sum_n a^2 \epsilon_{\mu\nu} F_{n,\mu\nu}$$

トポロジカルな量に関する技術的問題

局所的な配位の更新では、異なるtopological sector間をなかなか遷移できない

2Dトーラスに“穴を開ける”



穴を囲む4つのリンクは
トポロジカルな Q の定義
を用いた場合でも
有限のdrift項を得る

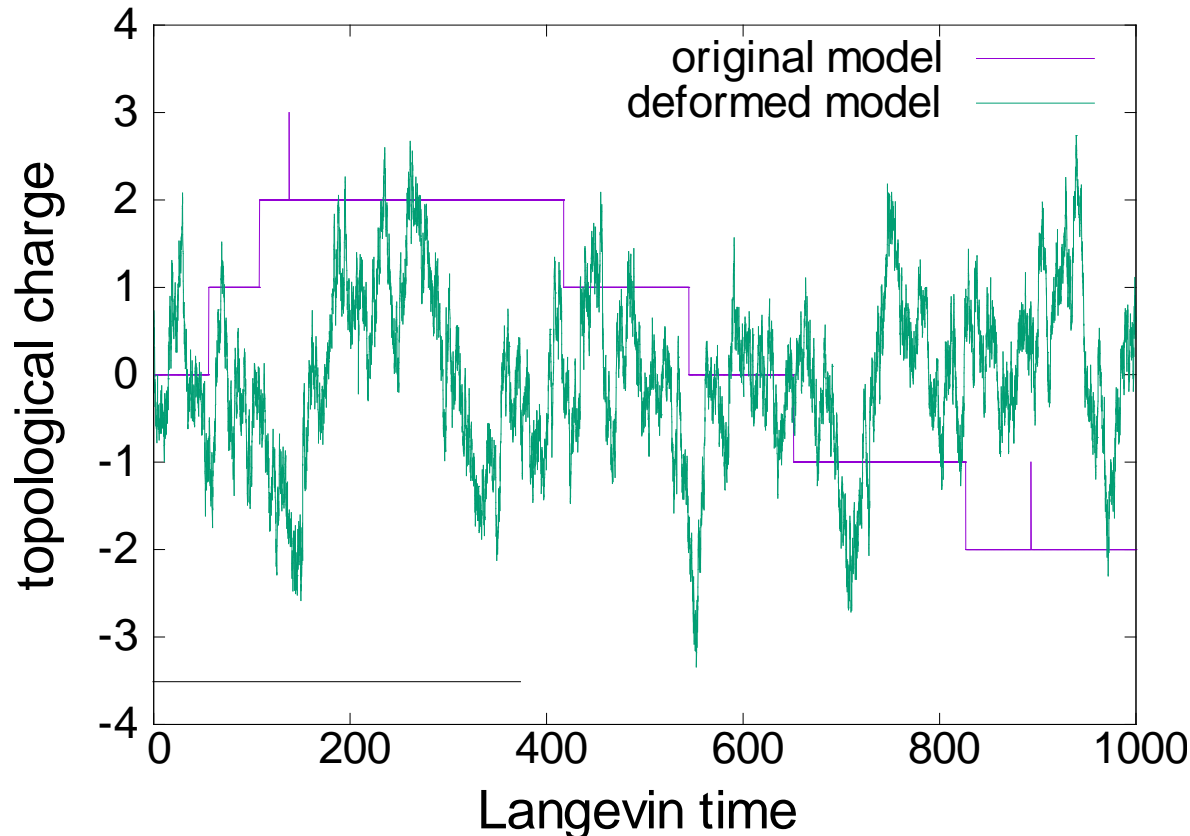
Q は整数付近に縛られなくなる

→ 異なるtopological sector間を自由に行き来できるようになる
(また、系が充分大きければ、物理量の計算に影響なし。)

topological chargeのヒストリー

(この図ではtopologicalな定義を用いた)

16×16 , $\beta = 6$, $\theta = 0$



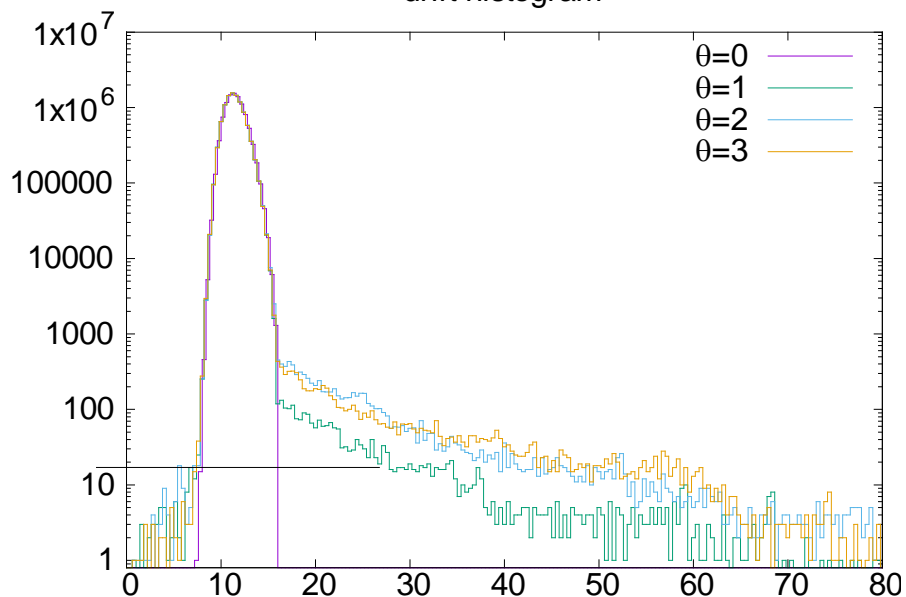
2次元トーラス上に穴をあけたことにより、topological chargeが整数値に拘束されずに、自由に変化できるようになった。

ドリフトのヒストグラム

$$16 \times 16, \beta = 8$$

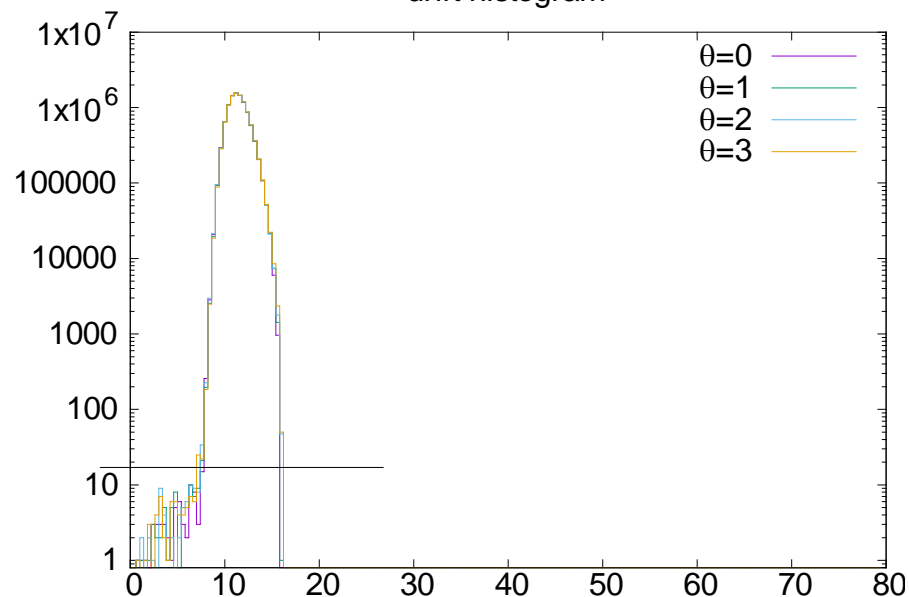
holomorphicなQ

drift histogram



topologicalなQ

drift histogram



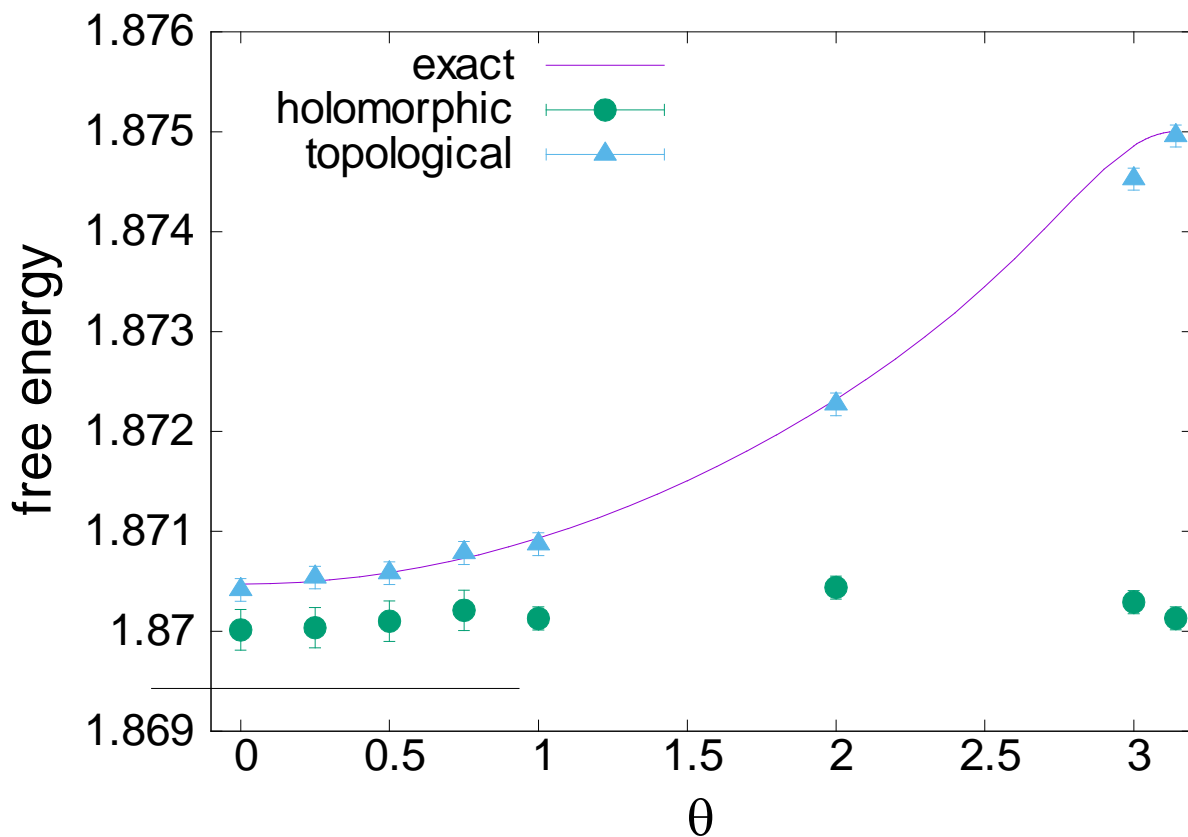
topologicalなQを用いた場合は、driftのhistogramが速く落ちる。

自由エネルギー

$$\mathcal{F} := \frac{1}{L_1 L_2} \left\langle \sum_n (P_n + P_n^{-1}) \right\rangle$$

Hirasawa-Matsumoto-J.N.-Yosprakob, work in progress

$16 \times 16, \beta = 8$

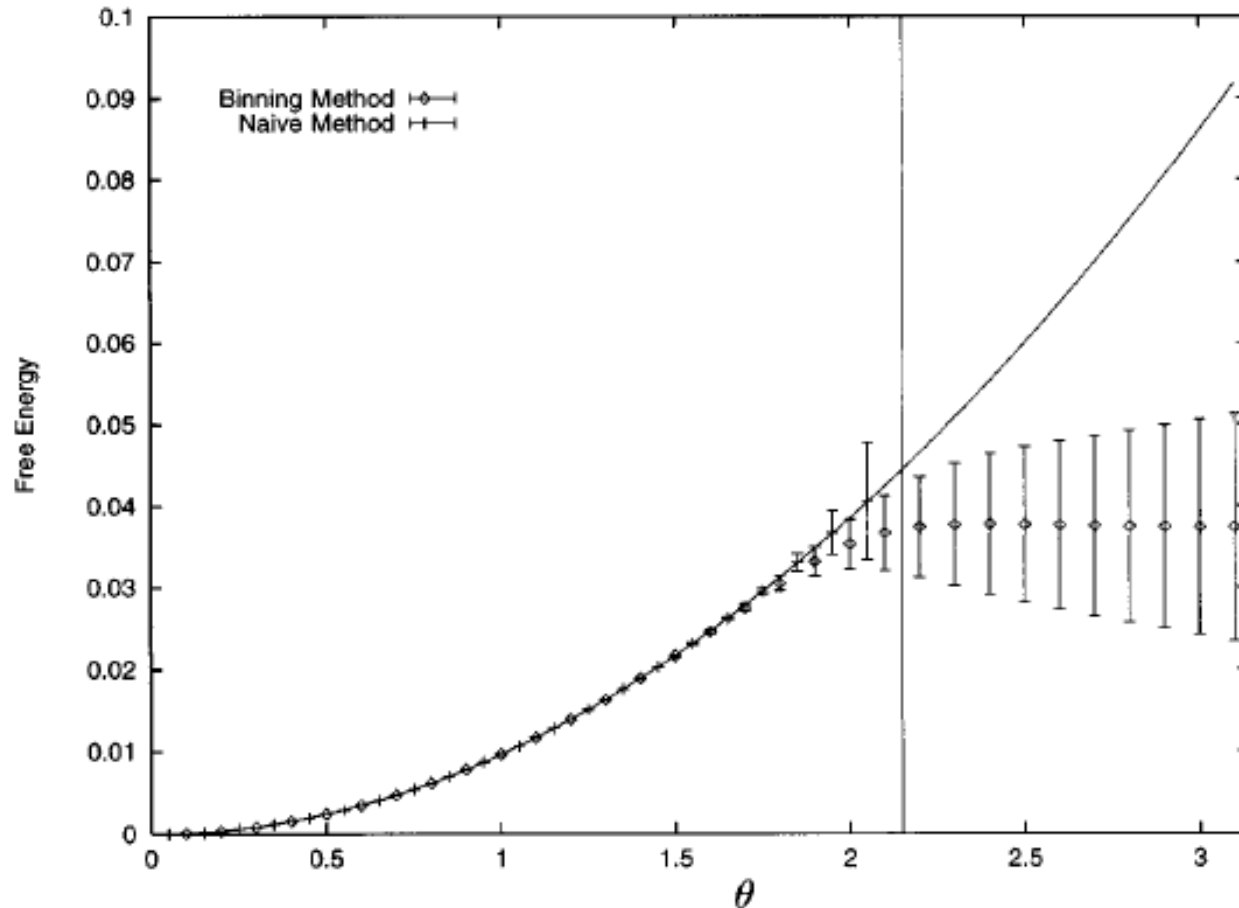


topologicalなQを用いたCLMは、 $-\pi < \theta \leq \pi$ の全領域で厳密解を再現。

reweighting法の結果

Plefka-Samuel, Phys.Rev. D56 (1997) 44 [hep-lat/9704016]

$16 \times 16, \beta = 2$

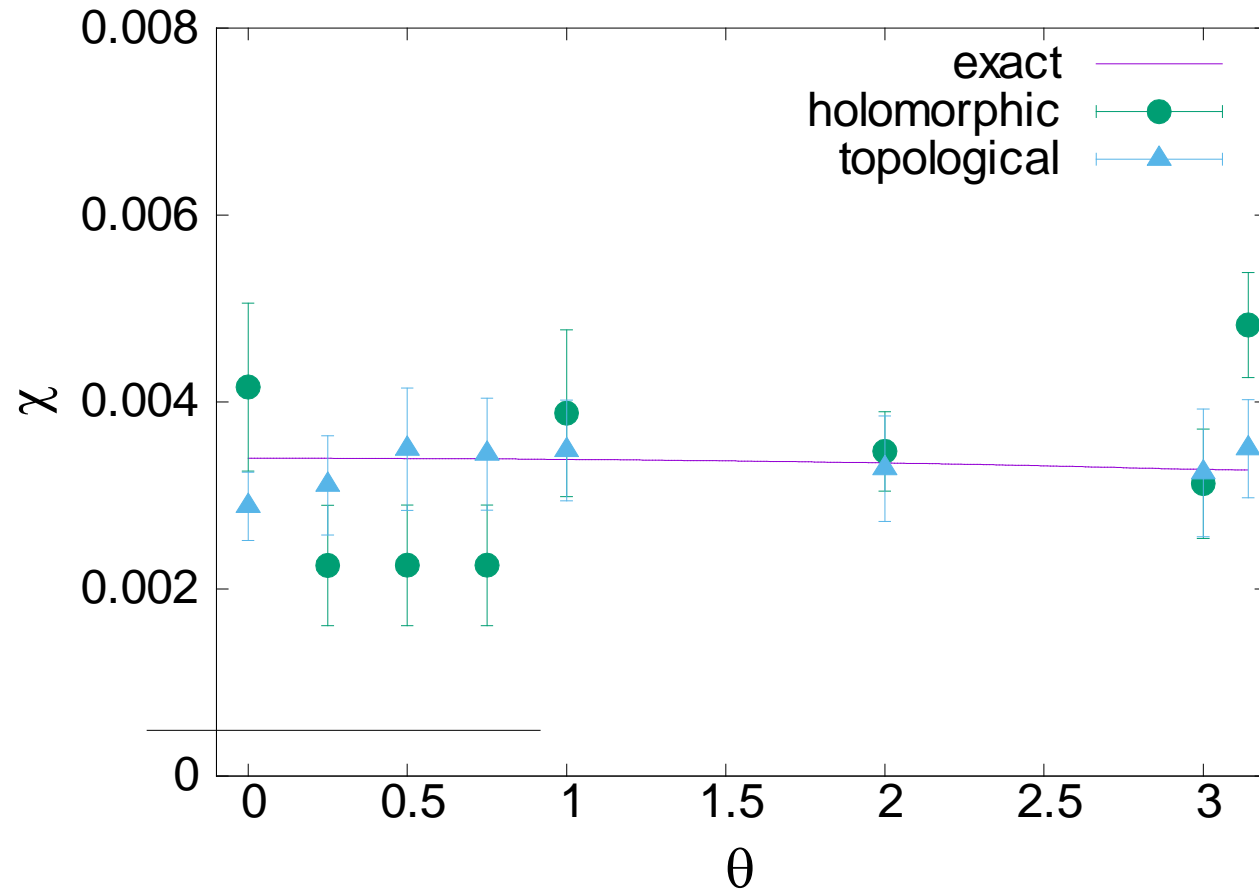


$\theta=2.2$ くらいで、 θ 依存性がほとんどなくなってしまう（“flattening現象”）

topological susceptibility $\chi := \frac{1}{L_1 L_2} \left(\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 \right)$

Hirasawa-Matsumoto-J.N.-Yosprakob, work in progress

$16 \times 16, \beta = 8$



topologicalなQを用いたCLMは、 $-\pi < \theta \leq \pi$ の全領域で厳密解を再現。

$\theta \geq \pi$ ではどうなるか？

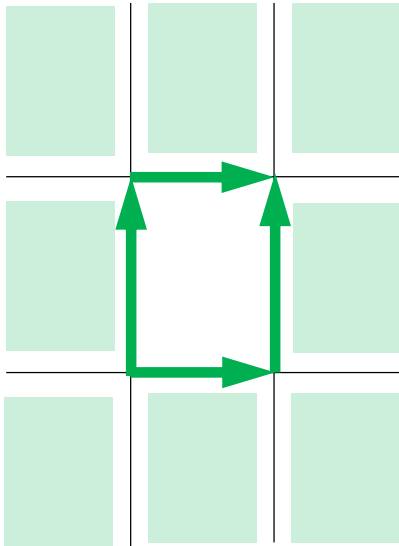
$\Theta \geq \pi$ ではどうなるか？

トポロジカルなQの定義

$$P_n = e^{ia^2 F_{n,12}}$$

$$Q = -\frac{i}{2\pi} \sum_n \log P_n = \frac{1}{4\pi} \sum_n a^2 \epsilon_{\mu\nu} F_{n,\mu\nu}$$

$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$



この4つのリンクに対してのみ、
 Θ に比例した定数のドリフト項を与える。

もともとの分配関数が持つ $\Theta \rightarrow \Theta + 2\pi$ の
周期性は再現されるのか？

$\theta \geq \pi$ ではどうなるか？

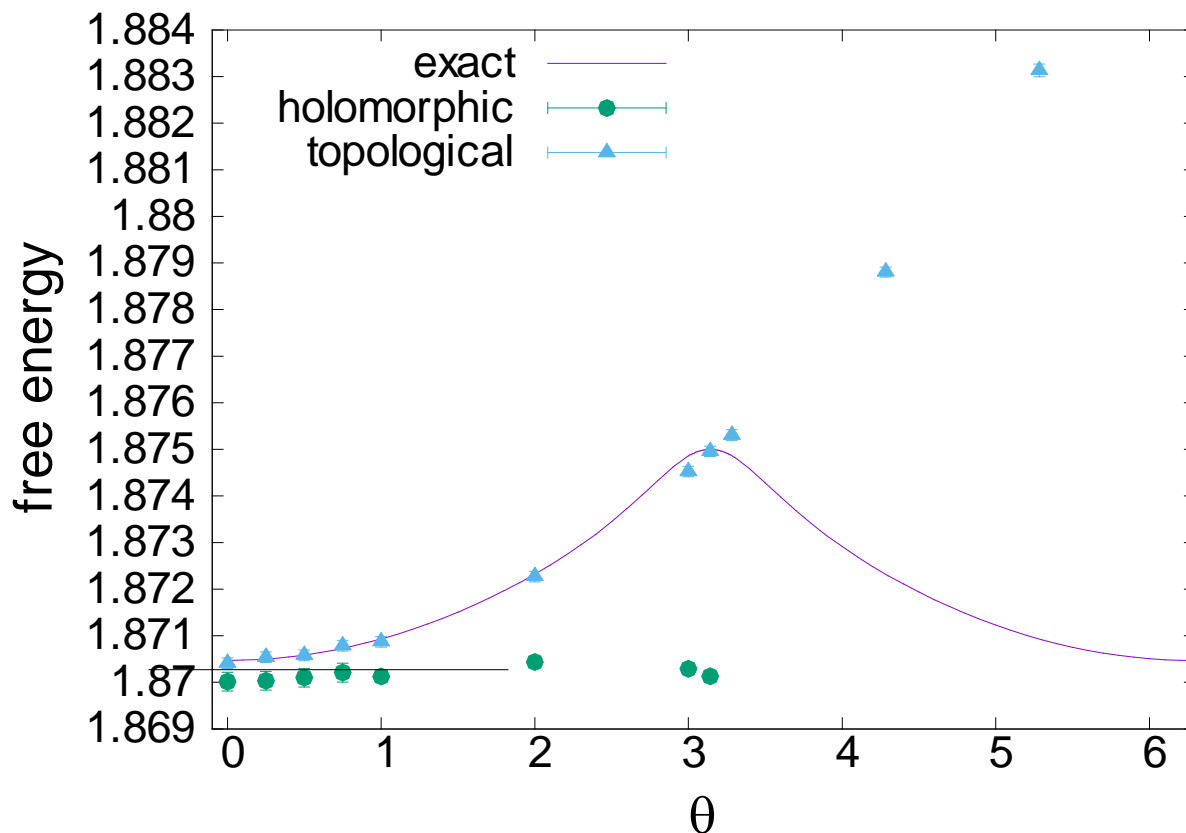
- 1) ドリフトの分布が指数関数的に落ちなくなり、間違った答えが得られる
- 2) ドリフトの分布は指数関数的に落ち続け、正しい答えが得られる。
($\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ の周期性が再現される)
- 3) その他

自由エネルギー

$$\mathcal{F} := \frac{1}{L_1 L_2} \left\langle \sum_n (P_n + P_n^{-1}) \right\rangle$$

Hirasawa-Matsumoto-J.N.-Yosprakob, work in progress

$$16 \times 16, \beta = 8$$



$\theta \geq \pi$ でもドリフトのヒストグラムに問題はないが、
 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ の周期性を再現しない。

4. まとめと展望

まとめ

- 複素ランジュバン法は、符号問題に対する有望なアプローチ

この方法を正当化する議論、正しい収束の条件が確立したことは重要。
実際に使ってみて、正しい収束の条件が満たされるかを見ることが必要。

- 様々な応用の可能性

- 有限密度QCD (4-flavor staggered fermion)

無限体積、軽いクォークの場合、閉じ込め相ではsingular drift問題。
(一般化されたBanks-Casher関係式のため)

空間のサイズを小さくすることにより、低温的な振る舞いを観測。
フェルミ球の形成を示唆。カラー超伝導相の研究への重要な一歩。

- Θ 項を含むゲージ理論

2次元U(1)の場合、Qの定義としてtopologicalなものを採用することにより、 Θ の全領域で正しい計算が可能。体積を大きくしてもOK.

今後の展望

符号問題が起こる様々な問題

- 有限密度系
- Θ 項を含む理論
- Chern-Simons 項を含む理論
- 実時間のダイナミクス
- 湯川相互作用
- 超対称ゲージ理論、IKKT行列模型
- カイラル・フェルミオン
- 強相関電子系 など。

使える可能性のある方法

- 力学変数を変更して、符号問題のない系に帰着
(meron cluster algorithm, worm algorithm, fermion bag model, etc.)
- テンソルくりこみ群
- 複素ランジュバン法
- レフシェッツ・シンブル法

いずれの方法も長所・短所があり、万能というものはない。
問題によって、最も有効な方法は異なる。

まずは興味のある問題に対して、使える方法を実際に適用してみて、
比較検討することが必要。

いままで全く見えなかったものが、見えてくる可能性がある！

6. バックアップ

holomorphy の役割

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, y; t) = L^\top P(x, y; t) \quad \dots\dots\dots P(x, y; t) \text{ の時間発展}$$

$$L = \left\{ \operatorname{Re} v(z) + \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Im} v(z) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x; t) = L_0^\top \rho(x; t) \quad \dots\dots\dots \rho(x; t) \text{ の時間発展}$$

$$L_0 = \left\{ v(x) + \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\langle L \mathcal{O}, P \rangle = \langle \mathcal{O}, L^\top P \rangle$$

$$\langle L_0 \mathcal{O}, \rho \rangle = \langle \mathcal{O}, L_0^\top \rho \rangle$$

$$L \mathcal{O}(x + iy) = \left[\left\{ \operatorname{Re} v(z) + \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Im} v(z) \frac{\partial}{\partial y} \right] \mathcal{O}(x + iy)$$

$$y = 0 \quad = \left\{ v(z) + \frac{\partial}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{O}(z)$$

$$= \tilde{L} \mathcal{O}(z)$$

holomorphy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto i \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\tilde{L} = \left\{ v(z) + \frac{\partial}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial z}$$

$\mathcal{O}(z)$ と $v(z)$ の
holomorphy を使った

正しい収束のための条件

- ドリフト項の大きさの確率分布

$$p(u; t) = \int dx dy \delta(u - |v(z)|) P(x, y; t)$$


- n 次のモーメント $\int_0^\infty du u^n p(u; t)$ が有限であるためには、 $p(u; t)$ は大きな u に対してベキ則よりも速く落ちることが必要。

- 例えば $p(u; t) \sim e^{-\kappa u}$ であるならば、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du u^n p(u; t) &\sim \int_0^\infty du u^n e^{-\kappa u} \sim \frac{n!}{\kappa^{n+1}} \\ \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \tau^n \int_0^\infty du u^n p(u; t) &\sim \frac{1}{\kappa} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^n \end{aligned}$$

収束半径は $\tau_{\text{conv}} \sim \kappa$ と評価できる。

必要十分条件

オブザーバブルの有限 t 発展  指数関数的に落ちることが必要
部分積分の有効性

鍵となる恒等式の証明

任意の k に対する以下の恒等式を t に関する帰納法で証明

$$\int dx dy \left\{ \tilde{L}^k \mathcal{O}(x + iy) \right\} P(x, y; t) = \int dx \left\{ (L_0)^k \mathcal{O}(x) \right\} \rho(x; t)$$

$$\tilde{L} = \left\{ v(z) + \frac{\partial}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$L_0 = \left(v(x) + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

$t=0$ では自明に満たされる。

$$P(x, y; 0) = \rho(x) \delta(y) ,$$

$$\rho(x; 0) = \rho(x)$$

ある t で満たされているとすると、 $\tau < \tau_{\text{conv}}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tau^n \int dx dy \left\{ \tilde{L}^{n+k} \mathcal{O}(x + iy) \right\} P(x, y; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tau^n \int dx \left\{ (L_0)^{n+k} \mathcal{O}(x) \right\} \rho(x; t)$$

$$\begin{aligned} \int dx dy \left\{ \tilde{L}^k \mathcal{O}(x + iy) \right\} P(x, y; t + \tau) &= \int dx \left\{ e^{\tau L_0} (L_0)^k \mathcal{O}(x) \right\} \rho(x; t) \\ &= \int dx \left\{ (L_0)^k \mathcal{O}(x) \right\} e^{\tau (L_0)^\top} \rho(x; t) \\ &= \int dx \left\{ (L_0)^k \mathcal{O}(x) \right\} \rho(x; t + \tau) \end{aligned}$$

簡単な例でのデモンストレーション

$$Z = \int dx w(x) , \quad w(x) = (x + i\alpha)^p e^{-x^2/2}$$

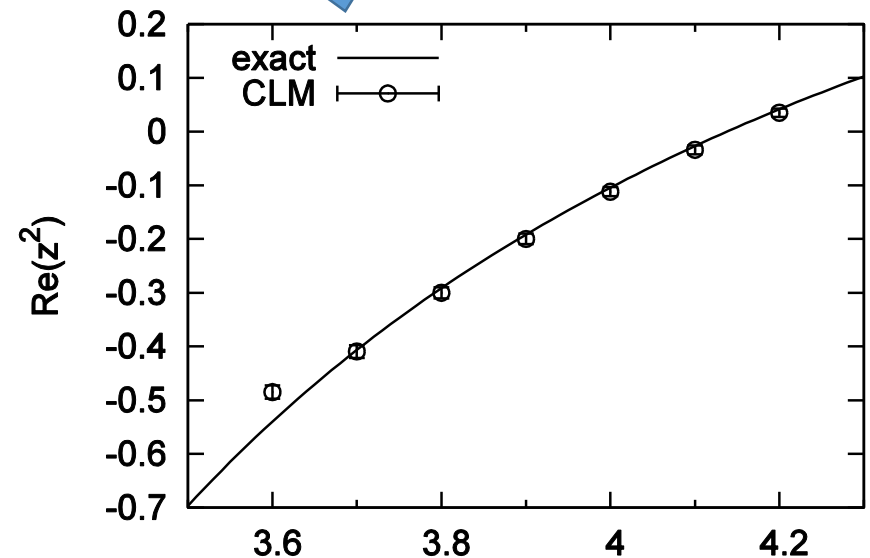
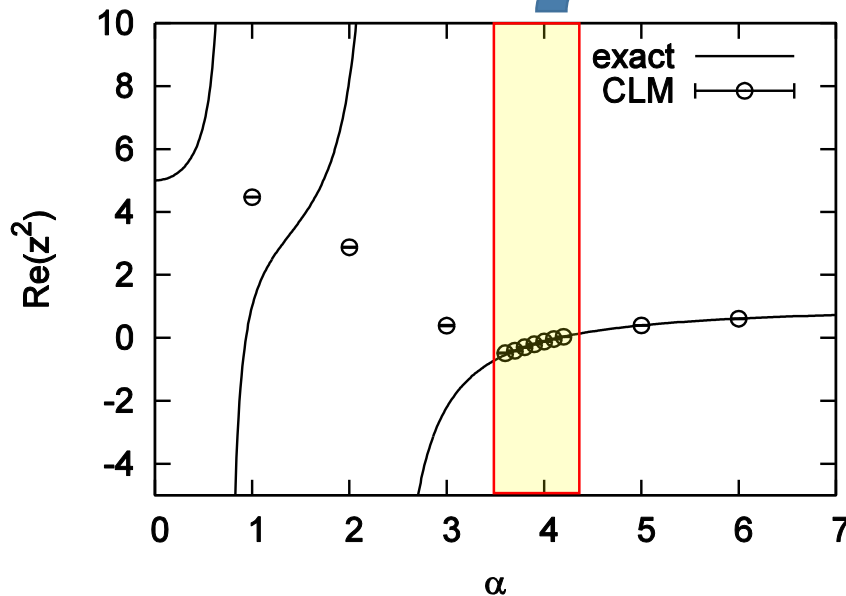
J.N.-Shimasaki, PRD 92 (2015) 1, 011501 arXiv:1504.08359 [hep-lat]

ドリフト項 : $v(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{dw(x)}{dx} = \frac{p}{x + i\alpha} - x$ 解析接続 \rightarrow $v(z) = \frac{p}{z + i\alpha} - z$

$z = -i\alpha$ に特異点

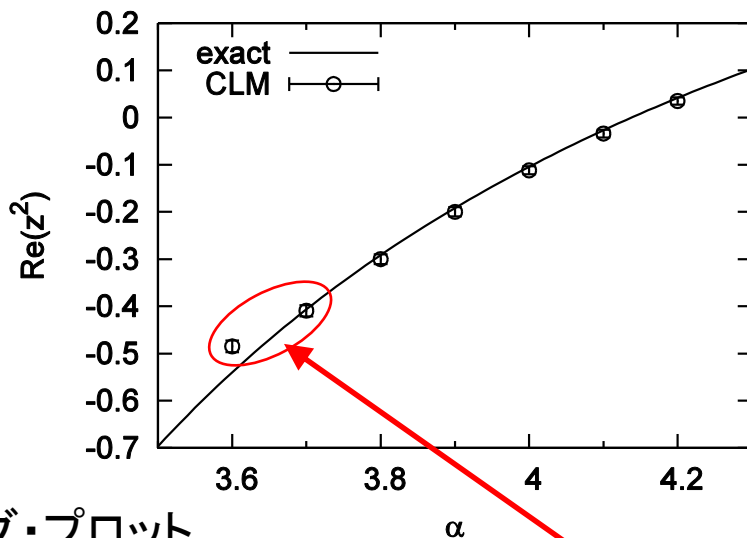
$p = 4$

この領域を拡大

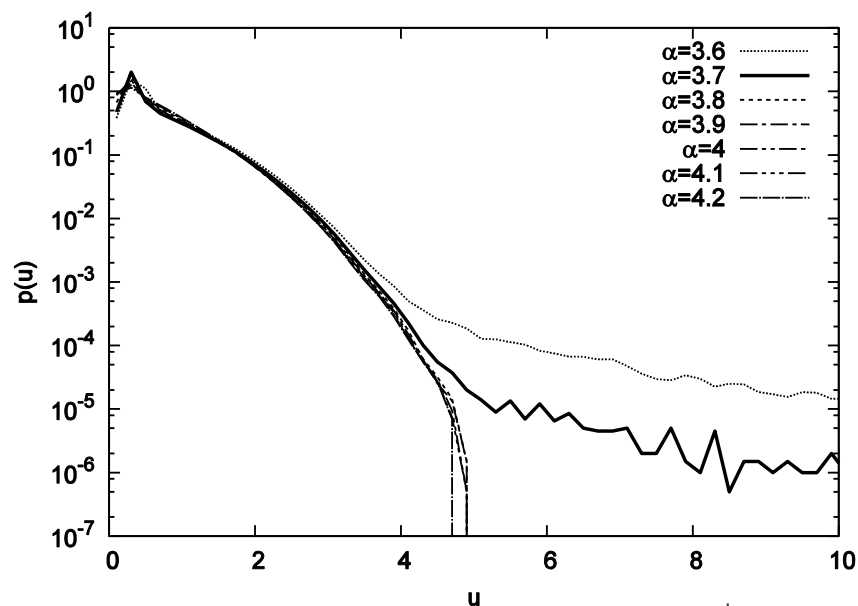


$\alpha \lesssim 3.6$ で CLM は間違った結果を出す。

我々の条件のデモンストレーション

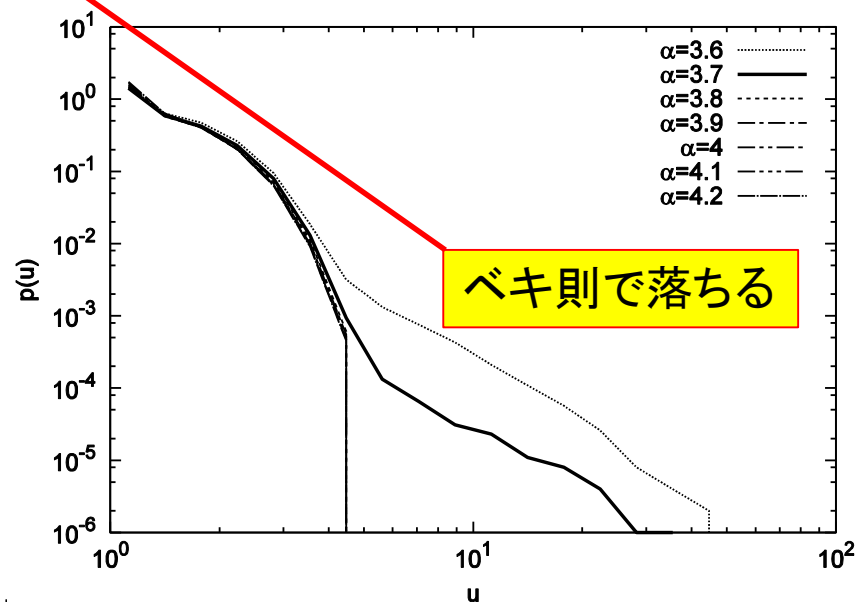


片ログ・プロット



ドリフト項の大きさ $u \equiv |v(z)| = \left| \frac{p}{z + i\alpha} - z \right|$

ログログ・プロット

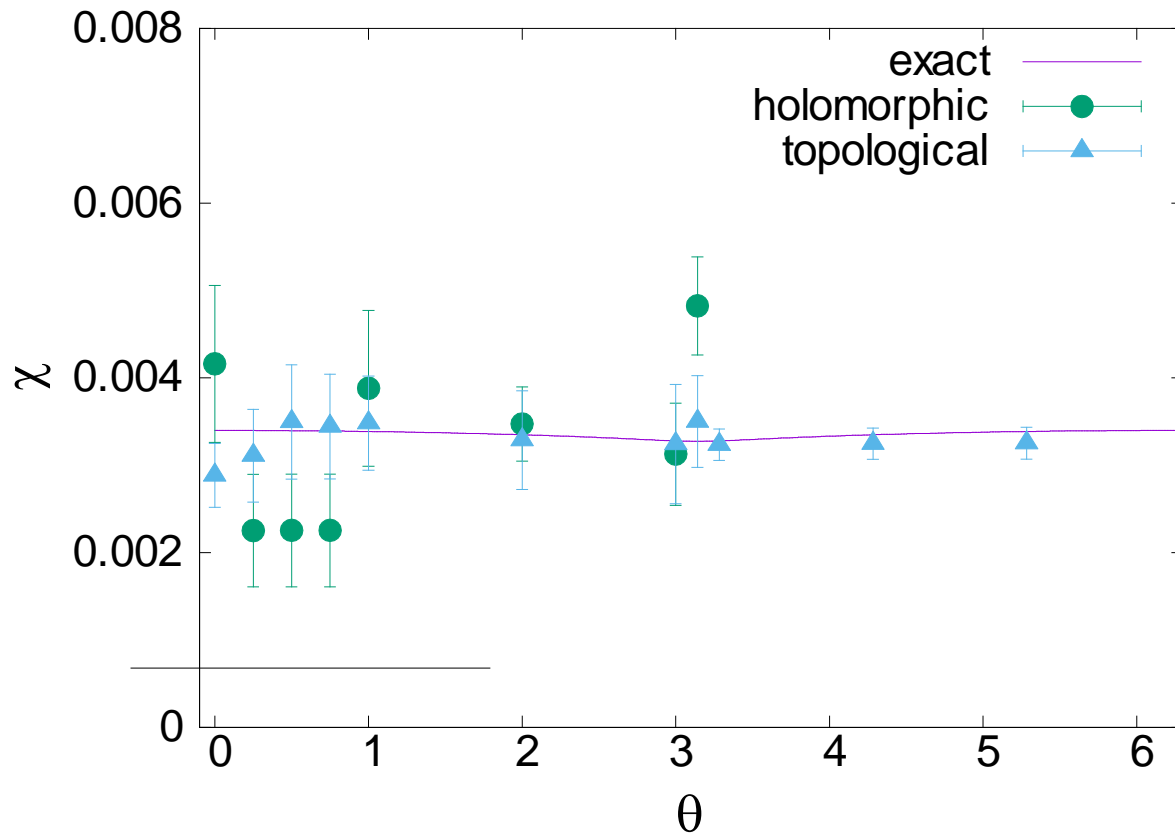


の確率分布

topological susceptibility $\chi := \frac{1}{L_1 L_2} \left(\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 \right)$

Hirasawa-Matsumoto-J.N.-Yosprakob, work in progress

$$16 \times 16, \beta = 8$$



$\theta \geq \pi$ でもドリフトのヒストグラムに問題はないが、
 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ の周期性を再現しない。

今後の展望

● QCDの相図の探索

- 信頼に足る方法に基づく臨界終点の決定
(重イオン衝突実験において重要。)
- 大きい μ の領域で現れる核物質やクォーク液体
の状態方程式 (天体物理に対するインパクト)

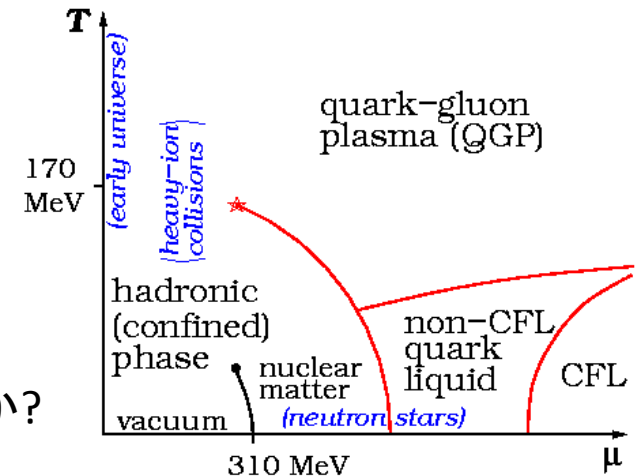
● 超弦理論の非摂動的定式化 (IKKT行列模型) で $SO(9, 1) \mapsto SO(3, 1)$ という自発的破れが起こるのか?

Ishibashi-Kawai-Kitazawa-Tsuchiya ('97)

● 以下にあげるものに手が届くようになる可能性あり。

既に論文あり

- Θ 項
- Chern-Simons 項
- 実時間のダイナミクス
- 湯川相互作用
- 超対称理論
- カイラル・フェルミオン
- 強相関電子系 など。



全く新しい理論物理学の世界が我々を待ち受けているのかもしれない！