

# グラフ上のフェルミオンの構成について

---

太田和俊 / Kazutoshi Ohta

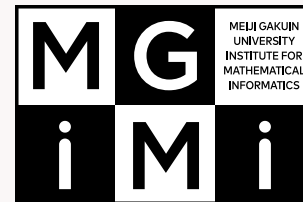
*Institute for Mathematical Informatics,  
Meiji Gakuin University*

Collaboration with So Matsuura, Keio Univ.

Based on PTEP **2025** 063B01 [arXiv:2501.08803]



Mathematical  
Informatics



# Introduction

---

- 離散空間である任意のグラフ上に一般化されたKazakov-Migdal模型[Kazakov-Migdal (1992)]の分配関数は、グラフゼータ関数(Iharaゼータ関数、Bartholdiゼータ関数)を用いて表すことができる
- グラフ上のゼータ関数の持つ“良い”性質により、興味深い物理(Large  $N$ 展開、GWW相構造、etc.)が導かれる [Matsuura-KO (2022-2024)]
- Kazakov-Migdal模型はゲージ場と結合した**ボゾン場**によって記述される

同じように、グラフゼータ関数(の逆数)を分配関数として持つような**フェルミオン場**のモデルを構成できるか？  $\Rightarrow$  YES

# Introduction

---

- 任意のグラフ(格子)上のフェルミオンの構成は統計系との関連も含め、いくつかの先行研究がある
  - グラフ上のIsing模型、ダイマー模型のフェルミオンの取り扱い [Kenyon (2002)]  
[Cimasoni (2009)]
  - スペクトルグラフ理論を用いた研究 [Yumoto-Misumi (2021-2023)]
- グラフゼータ関数を通じて、統計力学系との関連も指摘する

# グラフ理論

- グラフ $\Gamma$ は頂点 $V$ と辺 $E$ の集合:  $\Gamma = (V, E)$
- 各辺には向きを与え、 $e \in E$ に対して、根元 $s(e)$ と先端 $t(e)$ の頂点を矢印で結ぶ
- グラフの構造は、隣接行列 $A$ あるいは接続行列 $L$ を与えることで決定される

例) 三角形を2つ持つグラフ

隣接行列:

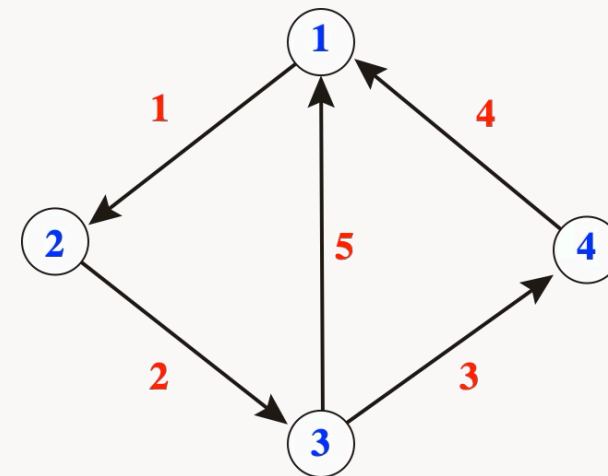
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

# of edges connecting verices

接続行列:

$$L^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

toric data or charge matrix in quiver gauge theory



# フェルミオン構成の基本的なアイデア

---

グラフ上のラプラシアン(グラフ・ラプラシアン) $\Delta$ は、グラフ上の2階差分

$$\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} = \sum_{e \in E} (x^{t(e)} - x^{s(e)})^2$$

であり、1階差分を与える接続行列の2乗で書ける

$$\Delta = L^T L$$

よって、連続理論の $\Delta = \partial^2$ の類推から、接続行列をDirac演算子とみなす

このアイデアは、格子上の2次元超対称ゲージ理論(Sugino模型)の任意のグラフ上への一般化でも有効 [\[Matsuura-KO 2021\]](#)

## 接続行列のゼロモードと指数

---

以下、 $n_V$ をグラフの頂点の個数、 $n_E$ を辺の個数として、 $L$ は $n_E \times n_V$ の行列なので、

$$L : \mathcal{V}_V \rightarrow \mathcal{V}_E$$

は

$$d : \Omega^0 \rightarrow \Omega^1$$

のアナロジー ( $\mathcal{V}_V$ 、 $\mathcal{V}_E$ はそれぞれ $V$ 、 $E$ 上のベクトル空間)

一方で、

$$L^T : \mathcal{V}_E \rightarrow \mathcal{V}_V$$

は

$$d^\dagger (= - * d *) : \Omega^1 \rightarrow \Omega^0$$

に対応

連結グラフ(かつ $n_E \geq n_V$ )に対して、 $Lx = 0$ の解は $x \propto \mathbf{1}$ のみである(constant zero mode)

すなわち、 $\dim \ker L = \dim \ker \Delta = 1$ 、あるいは $\text{rank } L = n_V - 1$   
( $\Leftrightarrow$  連結多様体に対しては $\dim H^0 = 1$ )

一方、 $\dim \ker L^T = n_E - n_V + 1$ であることがわかる

実際、サイクル $C$ に対して、 $L^T \mathbf{w}_C = 0$ を満たす $n_E - 1 + 2h$ 個( $h$ はgenus)の線型独立なベクトルを構成できる

よって、 $\text{ind } L = \dim \ker L - \dim \ker L^T = n_V - n_E$

平面グラフを2次元面の分割としてとらえると、面の集合 $F$ を頂点とする双対グラフ上に $n_E \times n_F$ 行列 $\check{L}$ を構成できる

$$L^T \check{L} = \check{L}^T L = 0$$

$$(\Leftrightarrow d^2 = (d^\dagger)^2 = 0)$$

次のDirac演算子 $((n_V + n_E + n_F) \times (n_V + n_E + n_F)$ 行列)

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L^T \\ 0 & 0 & \check{L}^T \\ -L & -\check{L} & 0 \end{pmatrix}$$

は $\text{ind } \not{D} = \dim H^V - \dim H^E + \dim H^V = n_V - n_E + n_F = 2 - 2h$ を持つ



# グラフゼータ関数と関連したフェルミオンの構成

---

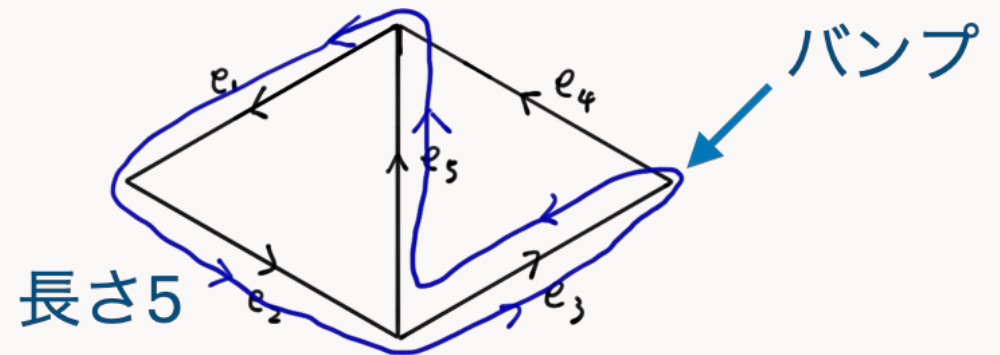
# グラフゼータ関数

グラフ $\Gamma$ のIharaゼータ関数[Ihara (1966)]およびその拡張であるBartholdiゼータ関数[Bartholdi (2001)]はグラフ上のサイクル(ループ)の数を多項式(の係数)として与える

$$\zeta_{\Gamma}(q, u) \equiv \prod_{[C]: \text{素サイクル}} \frac{1}{1 - u^{b(C)} q^{\ell(C)}}$$

ここで、


- 素サイクル:  $C = (C')^r$  ( $r \geq 2$ )と書けないサイクル
- $\ell(C)$ : サイクルの長さ
- $b(C)$ : バンプの数



# Iharaの定理

グラフゼータ関数は、パラメータによって変形されたグラフ・ラプラシアン行列式によって与えられる

$$\zeta_{\Gamma}(q, u) = \frac{1}{(1 - q^2(1 - u))^{n_E - n_V} \det \Delta_{q,u}}$$

ここで、 $\Delta_{q,u} \equiv I_{n_V} - qA + q^2(1 - u)(D - (1 - u)I_{n_V})$  

- $n_V$ : 頂点の数、 $n_E$ : 辺の数
- $A$ : 隣接行列、 $D$ : 頂点次数行列

  $\Delta_{1,0} = D - A = \Delta, \quad \Delta_{q,1} = I - qA$

# 目的

---

グラフ上のフェルミオンの分配関数として、グラフゼータ関数の逆数を与える模型を考えたい

$$Z_{\Gamma} \sim \zeta_{\Gamma}(q, u)^{-1}$$

この分配関数は以下の無限積表示

$$Z_{\Gamma} \sim \prod_{[C]: \text{素サイクル}} \left(1 - u^{b(C)} q^{\ell(C)}\right)$$

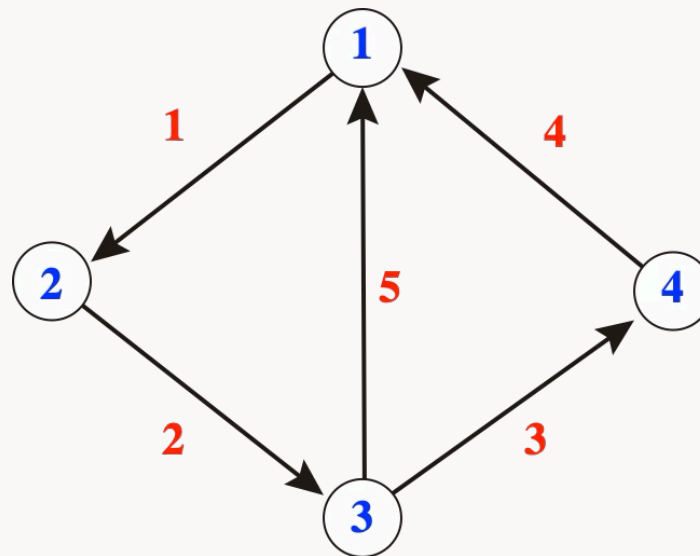
と(有限次数の)行列式(Ihara)表示

$$Z_{\Gamma} \sim (1 - q^2(1 - u))^{n_E - n_V} \det \Delta_{q,u}$$

を持つ

## 例: 三角形を2つ持つグラフ( $u = 0$ )

$$\prod_{[C]: \text{素サイクル}} \left(1 - q^{\ell(C)}\right) = (1 - q^3)^4 (1 - q^4)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^7)^4 (1 - q^9)^4 (1 - q^{10})^{12} (1 - q^{11})^4 (1 - q^{12})^6 \dots$$
$$= 1 - 4q^3 - 2q^4 + 4q^6 + 4q^7 + q^8 - 4q^{10} = (1 - q^2) \det \Delta_{q,0}$$

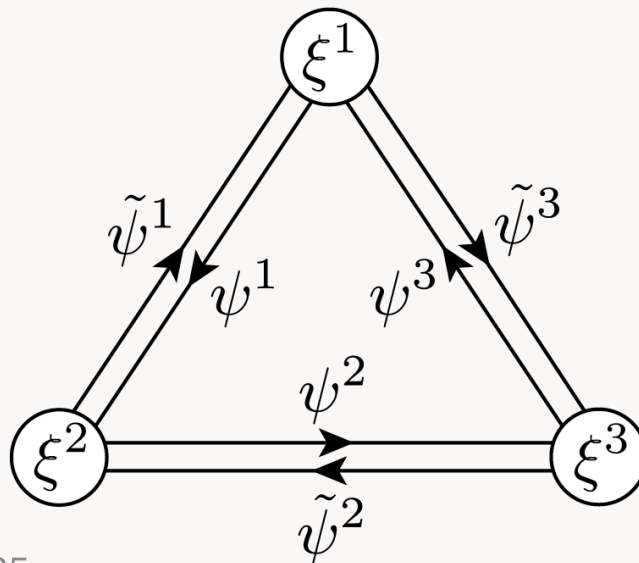


# グラフ上のフェルミオンの構成

- パラメータ変形されたグラフ・ラプラシアンをDirac演算子の2乗として得るために、接続行列をパラメータ変形する

$$(L_{q,u})^e_v \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } v = t(e) \\ -q(1-u) & \text{if } v = s(e), \\ 0 & \text{others} \end{cases}, \quad (\tilde{L}_{q,u})^e_v \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } v = s(e) \\ -q(1-u) & \text{if } v = t(e) \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

- 各頂点に $\xi^v$ 、各辺に $(\psi^e, \tilde{\psi}^e)$ のフェルミオン(とその複素共役)を置く



次のDirac演算子と質量項

$$\not{D} + \mathcal{M} = \begin{pmatrix} I_{n_V} & \alpha \tilde{L}_{q,u}^T & \alpha L_{q,u}^T \\ \alpha L_{q,u} & I_{n_E} & -q(1-u)I_{n_E} \\ \alpha \tilde{L}_{q,u} & -q(1-u)I_{n_E} & I_{n_E} \end{pmatrix}$$

( $\alpha = \sqrt{\frac{q}{1-q^2(1-u)^2}}$ )を用いて作用を

$$S_F = \bar{\Psi}(\not{D} + \mathcal{M})\Psi$$

で与える。ここで、

$$\Psi = (\xi, \psi, \tilde{\psi})^T, \quad \bar{\Psi} = (\bar{\xi}, \bar{\psi}, \bar{\tilde{\psi}})$$

# 分配関数

---

このモデルの分配関数

$$Z_{\Gamma}(q, u) \equiv \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_F(q, u)} = \det (\not{D} + \mathcal{M})$$

はグラフゼータ関数の逆数と一致する

$$Z_{\Gamma}(q, u) = (1 - q^2(1 - u)^2)^{n_E - n_V} \det \Delta_{q, u} = \zeta_{\Gamma}(q, u)^{-1}$$



この行列式を別の方法(基底)で評価すると、**辺隣接行列(edge adjacency matrix)  $W$** と  
バンプ行列 $J$ を用いた表示も得る (**Hashimoto表示**)

$$Z_{\Gamma}(q, u) = \det (I_{2n_E} - q(W + uJ))$$

フェルミオンの構成で用いた作用素 $\mathcal{D} + \mathcal{M}$ はIhara表示(頂点表示)とHashimoto表示(辺表示)の等価性の証明で用いられたBassのアイデアに近いものになっている **[Bass (1992)]**

解析上は、Hashimoto表示のフェルミオン作用

$$S = -\bar{\eta}^e (q(W + uJ) - I_{2n_E})_{ee'} \eta^{e'}$$

を用いた方が都合が良い (Kac-Ward行列やKenyonのフェルミオンの構成と本質的に同じもの)

## 分配関数の意味

---

分配関数はフェルミオンのなサイクルで構成された状態(**fermionic cycle**)に対するWitten指数を与えている

$$\zeta_{\Gamma}(q, u)^{-1} = 1 + \sum_{[C]} \mu(C) u^{b(C)} q^{\ell(C)}$$

ここで、 $\mu(C)$ はサイクルMöbius関数

$$\mu(C) = \begin{cases} 0 & \text{if the same directed edge is included somewhere in } C \\ (-1)^F & \text{if } C \text{ contains } F \text{ distinct primitive cycles} \end{cases}.$$

Hashimoto表示のフェルミオン作用を用いると証明できる

## 参考

Riemannゼータ関数の逆数

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})$$

はMöbius関数 $\mu(n)$ を使って

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$$

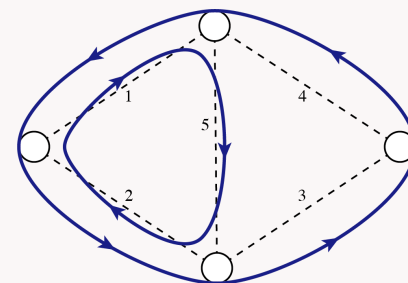
と表せる

例：三角形を2つ持つグラフ

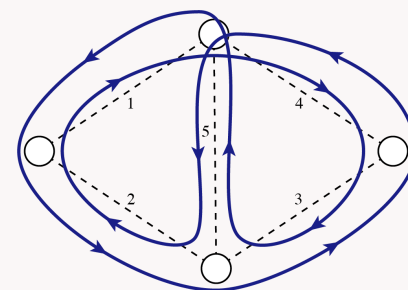
$$\zeta_{\text{DT}}(q)^{-1} = 1 - 4q^3 - 2q^4 + 4q^6 + 4q^7 + q^8 - 4q^{10}$$

length	fermionic cycles	F
3	$\Psi_{125}, \Psi_{\bar{5}2\bar{1}}, \Psi_{\bar{5}34}, \Psi_{\bar{4}35}$	1
4	$\Psi_{1234}, \Psi_{\bar{4}3\bar{2}\bar{1}}$	1
6	$\Psi_{125}\Psi_{\bar{5}2\bar{1}}, \Psi_{\bar{5}34}\Psi_{\bar{4}35}, \Psi_{125}\Psi_{\bar{5}34}, \Psi_{\bar{4}35}\Psi_{\bar{5}2\bar{1}}$	2
7	$\Psi_{125}\Psi_{\bar{4}3\bar{2}\bar{1}}, \Psi_{1234}\Psi_{\bar{5}2\bar{1}}, \Psi_{\bar{5}34}\Psi_{\bar{4}3\bar{2}\bar{1}}, \Psi_{1234}\Psi_{\bar{4}35}$	2
8	$\Psi_{1234}\Psi_{\bar{4}3\bar{2}\bar{1}}$	2
10	$\Psi_{125\bar{4}3\bar{2}\bar{1}\bar{5}34}, \Psi_{\bar{4}351234\bar{5}2\bar{1}}$	1
10	$\Psi_{125}\Psi_{\bar{5}34}\Psi_{\bar{4}3\bar{2}\bar{1}}, \Psi_{1234}\Psi_{\bar{4}35}\Psi_{\bar{5}2\bar{1}}$	3

$$\Psi_{1234}\Psi_{\bar{5}2\bar{1}}, \quad \ell = 7, \quad F = 2$$



$$\Psi_{\bar{4}351234\bar{5}2\bar{1}}, \quad \ell = 10, \quad F = 1$$



# 一般の2次元格子(周期境界条件)の場合

---

# 被覆グラフ

格子の用に同じ構造が繰り返し現れるグラフについては、元となるグラフに離散群を作用させ、“コピー”を繋ぎ合わせて被覆グラフ(グラフ上のファイバー束)を構成する

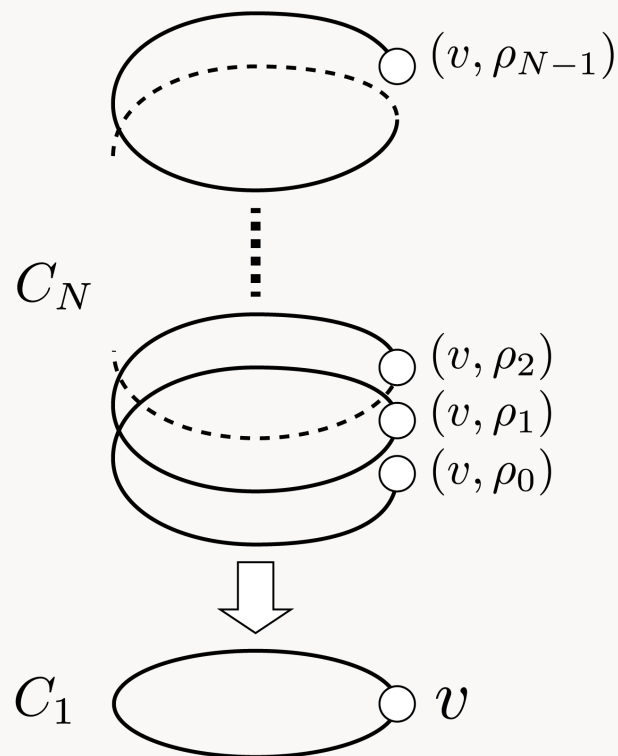
例: サイクルグラフ  $C_N$

1.  $C_1$  に対して、 $\mathbb{Z}_N$  の表現  $\rho_n = e^{2\pi i n/N}$  の Artin-Ihara  $L$  関数を構成する (隣接行列の各辺に表現の重みを与える)

$$L_{C_1}(q; \rho_n) = \frac{1}{1 - (\rho_n + \rho_n^{-1})q + q^2}$$

2.  $C_N$  のゼータ関数は  $L$  関数の全ての表現についての積で与えられる (運動量空間で対角化して因数分解をしている)

$$\zeta_{C_N}(q) = \prod_{n=0}^{N-1} L_{C_1}(q; \rho_n)$$



# グリッドグラフ

被覆グラフと $L$ 関数のアイデア(離散Fourier変換)を使うと、グリッド(周期)構造をもつグラフのゼータ関数を基本領域のグラフから構成することができる

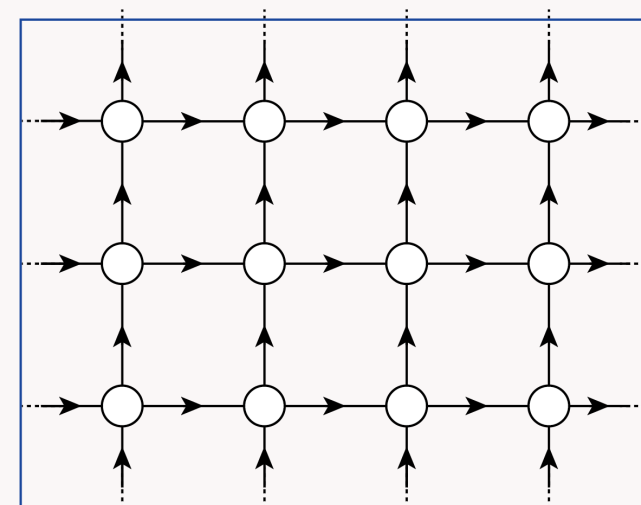
例)

2次元正方格子

$$\zeta_{\text{SQ}}(q, u)^{-1} = \prod_{m_1=0}^{N-1} \prod_{m_2=0}^{M-1} (1 - q^2(1 - u)^2) \left( 1 + (1 - u)(3 + u)q^2 - q\hat{A}_{\text{SQ}}(\vec{m}) \right)$$

$$\hat{A}_{\text{SQ}}(\vec{m}) = \omega_1^{m_1} + \omega_1^{-m_1} + \omega_2^{m_2} + \omega_2^{-m_2}$$

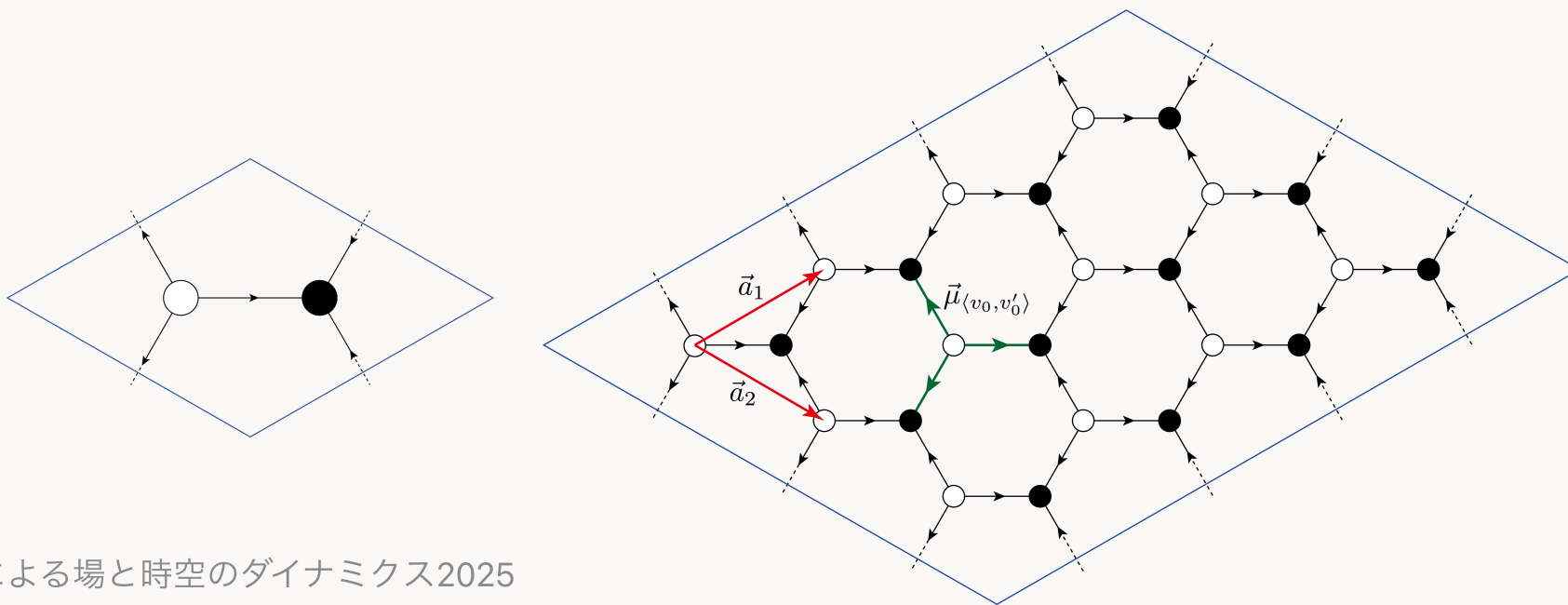
ここで、 $\omega_1 = e^{2\pi i/N}$ ,  $\omega_2 = e^{2\pi i/M}$



## 2次元ハニカム格子

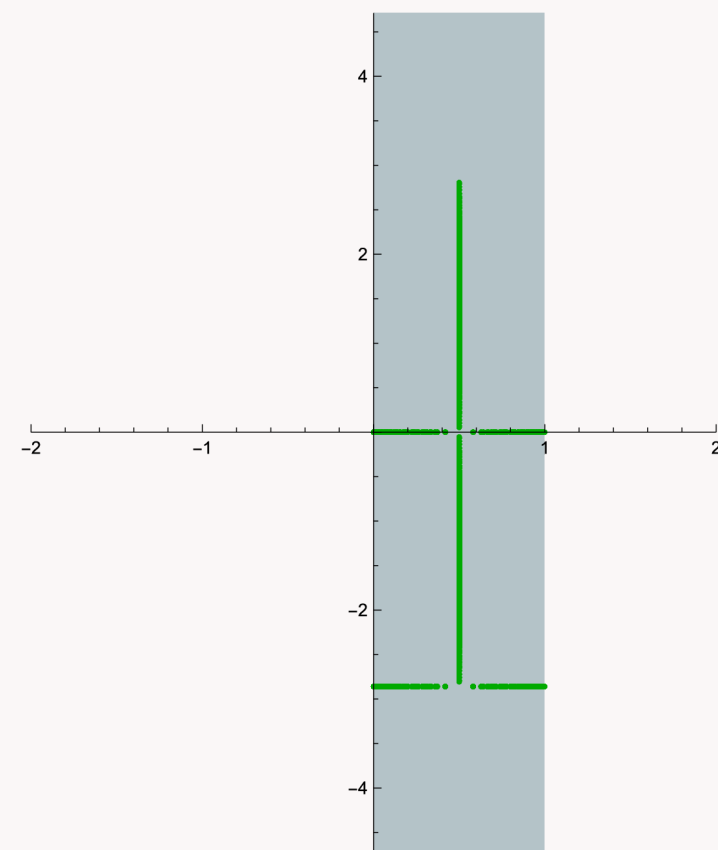
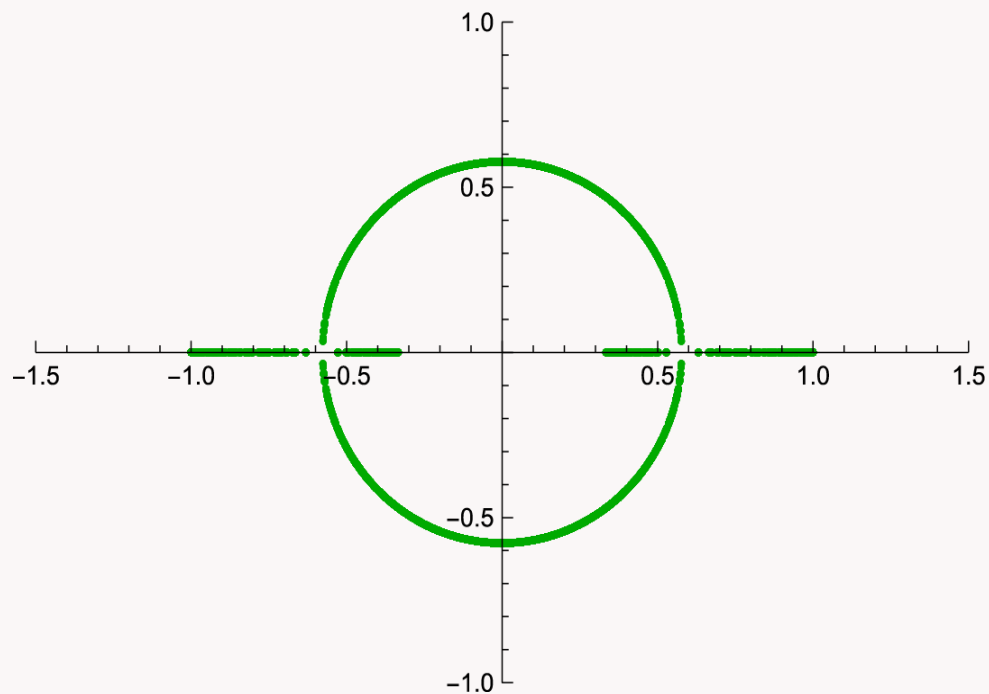
$$\zeta_{\text{HC}}(q, u)^{-1} = \prod_{m_1=0}^{N-1} \prod_{m_2=0}^{M-1} (1 - q^2(1 - u)^2) \det \left( (1 + (1 - u)(2 + u)q^2)I_2 - q\hat{A}_{\text{HC}}(\vec{m}) \right)$$

$$\hat{A}_{\text{HC}}(\vec{m}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^{\frac{m_1}{3}} \omega_2^{\frac{m_2}{3}} + \omega_1^{\frac{m_1}{3}} \omega_2^{-\frac{2m_2}{3}} + \omega_1^{-\frac{2m_1}{3}} \omega_2^{\frac{m_2}{3}} \\ \omega_1^{-\frac{m_1}{3}} \omega_2^{-\frac{m_2}{3}} + \omega_1^{-\frac{m_1}{3}} \omega_2^{\frac{2m_2}{3}} + \omega_1^{\frac{2m_1}{3}} \omega_2^{-\frac{m_2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$





# グリッドグラフのゼロ点分布



$s$ -平面 ( $q = 3^{-s}$ )

2次元正方格子( $100 \times 100$ )上の  
ゼータ関数(の逆数)のゼロ点分布  
( $q$ -平面)

## Riemann予想との関係

---

- 各頂点に同じ数の辺がつながっている正則グラフに対して、 $s = 0, 1$ と $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ の線上にのみグラフゼータ関数の極が現れるとき、そのグラフをRamanujanという
- 2次元正方格子とハニカム格子は正則グラフだが、Ramanujanではない (最近接相互作用のみを考えているため)
- 一方、ランダムな正則グラフは高い確率(正則2部グラフのうちの52%)でRamanujanになることが知られている
- 今回のフェルミオンのモデルではグラフゼータ関数の極は分配関数のゼロ点集合であるため、Lee-Yangの定理により、 $n_V \rightarrow \infty$ の $d$ -正則Ramanujanグラフ上では $q = \frac{1}{\sqrt{d-1}}$ が相転移点になる!?

# フェルミオン・ダブリング

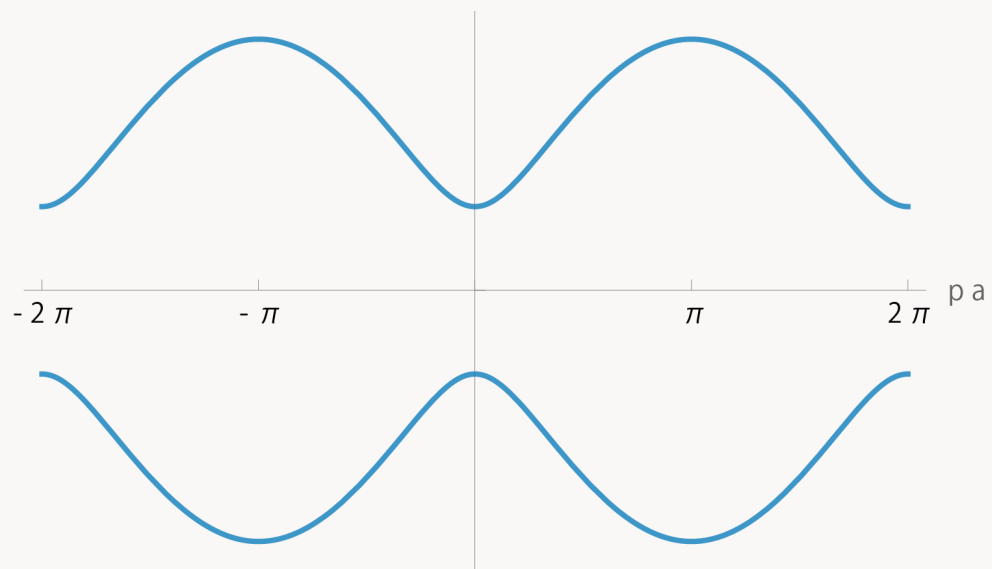
---

- $L$ 関数から求まる分散関係から、 $p_\mu = 0$ の近傍にのみ伝搬関数にmasslessの極が現れる
- スタッガード(Kogut-Susskind)フェルミオンとしての解釈ができる
- グラフ上の超対称ゲージ理論のフェルミオンとしても解釈できる
- $X \equiv \not{D} + \mathcal{M}$ は以下の $\gamma_5$ エルミート性を満たす(Ginsparg-Wilson関係式を満たすoverlap演算子が構成できる)

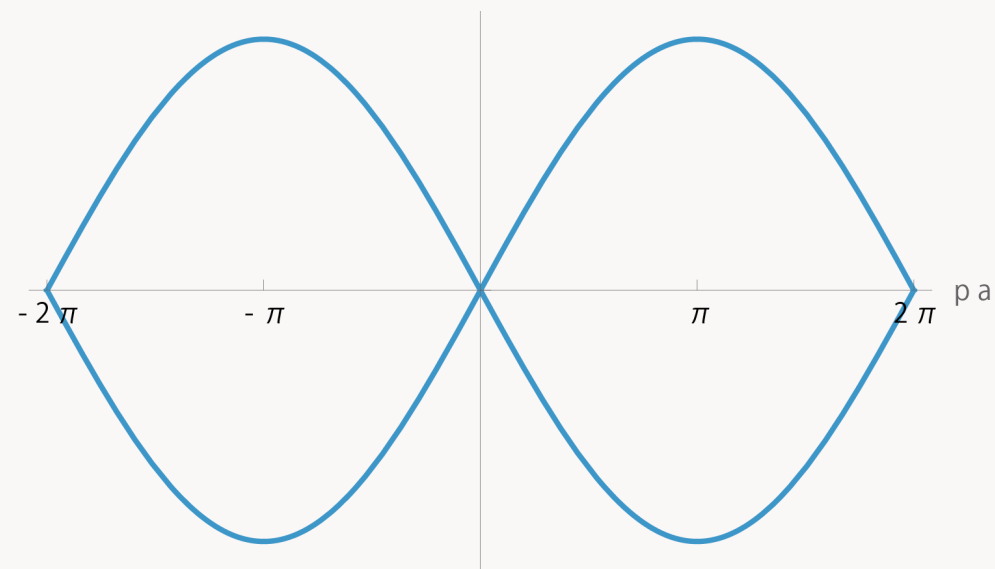
$$\gamma_5 X \gamma_5 = X^\dagger$$

以上の結果から、このモデルにはフェルミオン・ダブリング問題が**存在しない**と考えられる

## サイクルグラフ $C_N$ 上の分散関係



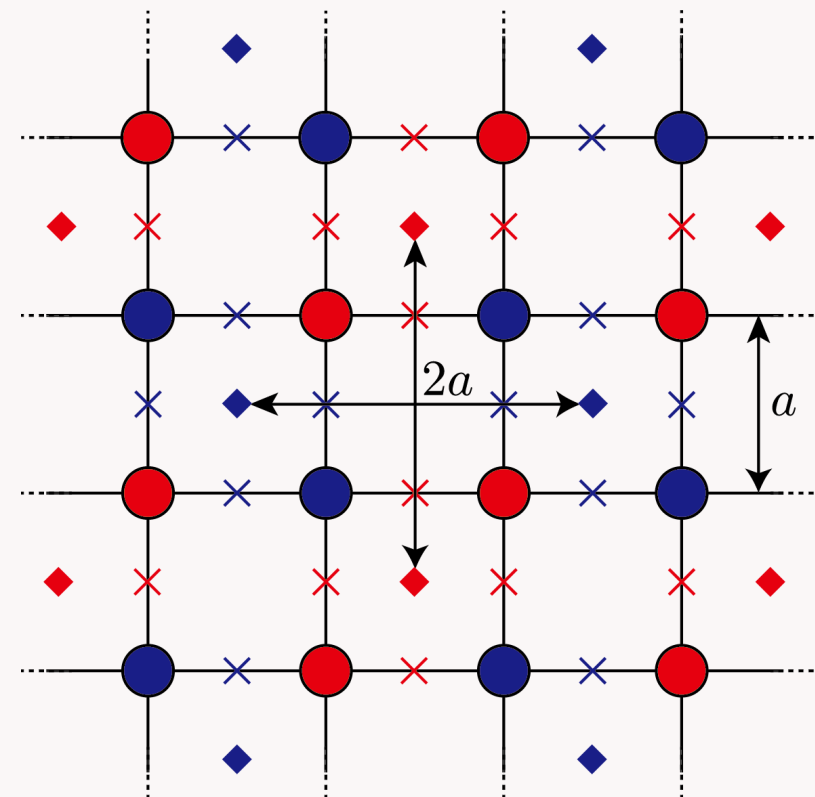
$$q = 0.5$$



$$q = 1.0$$

## スタaggerド・フェルミオンとしての解釈

頂点のフェルミオン2個と辺のフェルミオン4個をひとまとめにして考えると、格子間隔が2倍に拡大しているように見える( $\Rightarrow p_\mu a = \pi$ にmasslessの極が現れない)



## Overlap Fermion

---

$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_E} \\ I_{n_E} & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、 $X = qW - I_{2n_E}$ は $\gamma_5$ -hermiticityを満たすので、

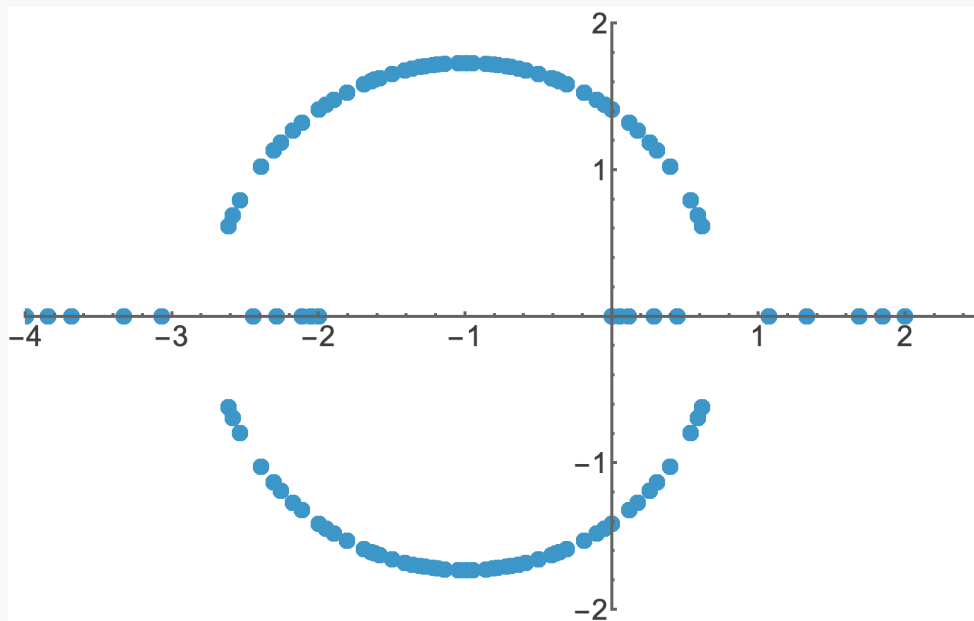
$$\mathcal{D}_{\text{ov}} = \frac{1}{a} \left( I_{2n_E} + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}} \right)$$

は、Ginsparg-Wilson関係式

$$\mathcal{D}_{\text{ov}} \gamma_5 + \gamma_5 \mathcal{D}_{\text{ov}} = a \mathcal{D}_{\text{ov}} \gamma_5 \mathcal{D}_{\text{ov}}$$

を満たしている。

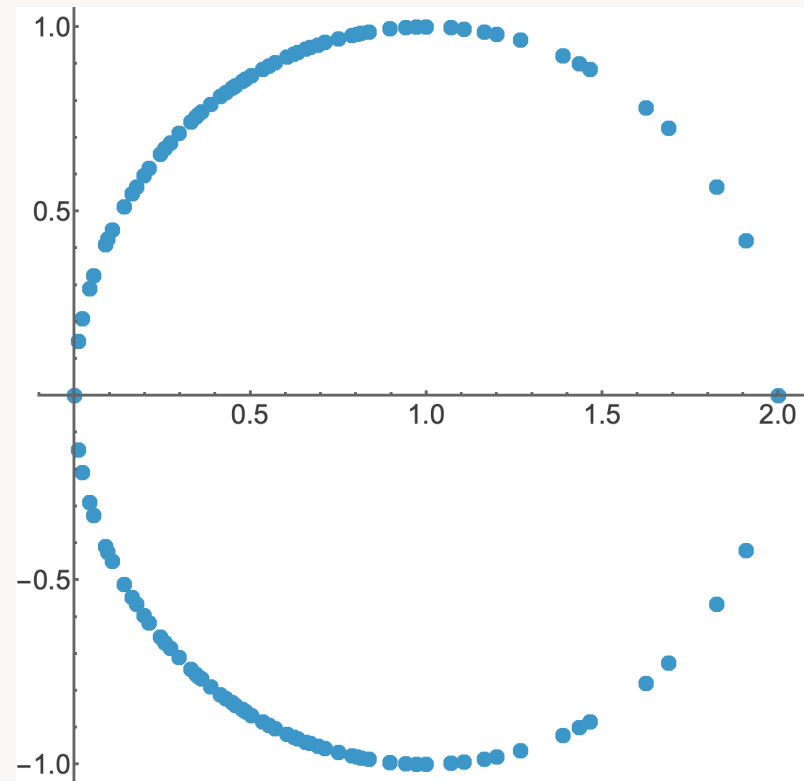
## 100 × 100 2次元正方格子の例



$X = qW - I_{2n_E}$  の固有値分布

$\det X = \zeta_\Gamma(q)^{-1}$  なので、グラフゼータ関数の極の分布と基本的に同じ

$\Rightarrow$



$D_{\text{ov}}$  の固有値分布

Riemann予想を満たさない実軸上の極がゼロ

モードとなる

# 統計系との関係

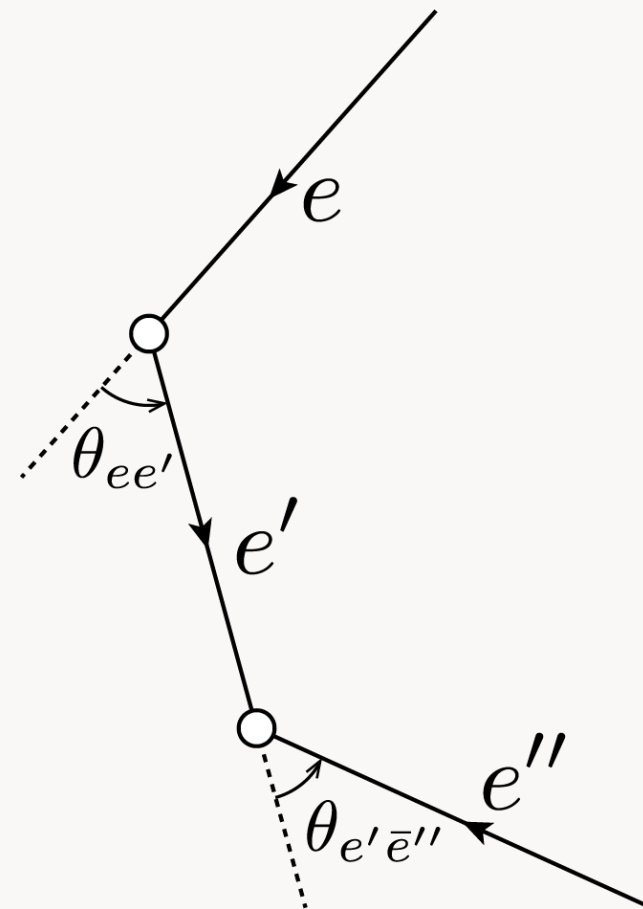
---



## 回転数

平面グラフにおいて各辺に平面での回転角を与え、回転角に応じた重みつき接続行列を考えると、サイクルの回転数 $w(C)$ を含むグラフゼータ関数が得られる

$$\tilde{\zeta}_{\Gamma}(q, u, r) \equiv \prod_{[C]: \text{素サイクル}} \frac{1}{1 - r^{w(C)} u^{b(C)} q^{\ell(C)}}$$



特に  $u = 0$  かつ  $r = -1$  とおくと、Hashimoto表示における辺隣接行列は任意のグラフ上のIsing模型のKac-Ward行列[Kac-Ward (1952)]に一致し、グラフゼータ関数はグラフ上のIsing模型の分配関数を与える

$$\tilde{\zeta}_{\Gamma}(q, u=0, r=-1)^{-1} = 2^{-2n_V} (1 - q^2)^{n_E} \left( Z_{\Gamma}^{\text{Ising}} \right)^2$$

ここで、 $(q = \tanh \beta J)$

我々の模型にホロノミー( $\leftrightarrow$ 回転数)を持つ  $U(1)$  ゲージ場を加えたものは、任意のグラフ上のIsing模型の自由フェルミ場表現にもなっている

## Random Bond Ising Modelの高温展開

---

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma \in \Omega} \exp \left( \beta \sum_{e=\langle u,v \rangle \in E} J_e \sigma_u \sigma_v \right) \\ &= \prod_{e \in E} \cosh \beta J_e \sum_{\sigma \in \Omega} \prod_{e=\langle u,v \rangle \in E} (1 + \sigma_u \sigma_v \tanh \beta J_e) \\ &= \prod_{e \in E} \cosh \beta J_e \sum_{\gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)} \prod_{e \in E(\gamma)} \tanh \beta J_e \end{aligned}$$

ここで、 $\mathcal{E}(\Gamma)$ は $\Gamma$ のEuler部分グラフ(一筆書きができる部分グラフ、全ての頂点の次数が偶数)全体の集合。(empty graphも含む。)

以下、 $z_e = \tan \beta J_e$ とおく。

### $C_3$ (Triangle Graph)

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma_v=\{\pm 1\}} (1 + \sigma_1 \sigma_2 z_1)(1 + \sigma_2 \sigma_3 z_2)(1 + \sigma_3 \sigma_1 z_3) \\ &= \sum_{\sigma_v=\{\pm 1\}} \left[ 1 + \sigma_1 \sigma_2 z_1 + \sigma_2 \sigma_3 z_2 + \sigma_1 \sigma_3 z_3 \right. \\ & \quad + \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3 z_1 z_2 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 z_2 z_3 + \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 z_1 z_3 \\ & \quad \left. + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 z_1 z_2 z_3 \right] \\ &= 2^3 (1 + z_1 z_2 z_3) \end{aligned}$$

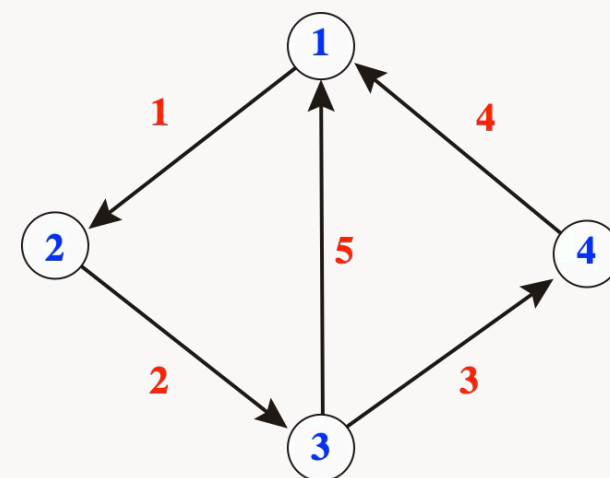
$K_4 - e$  (Double Triangle Graph)

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma_v=\{\pm 1\}} (1 + \sigma_1\sigma_2z_1)(1 + \sigma_2\sigma_3z_2)(1 + \sigma_3\sigma_4z_3) \\ & \quad \times (1 + \sigma_4\sigma_1z_4)(1 + \sigma_1\sigma_3z_5) \\ & = 2^4 (1 + z_1z_2z_5 + z_3z_4z_5 + z_1z_2z_3z_4) \end{aligned}$$

全てのbond上のcouplingが等しい(通常のIsing模型)とき、

$$z_e = \tanh \beta J = q$$

グラフ $\Gamma$ 上のIsing模型の分配関数は、Euler部分グラフの数を $q$ の多項式として与える



## Iharaゼータ関数との関係

---

- Iharaゼータ関数の逆数は向きも含めた全てのフェルミオン・サイクルの生成母関数(フェルミオン数による符号もある)
- Ising模型はサイクルではなく、向きを無視したダイアグラム(Euler部分グラフ)の和になる
- 巻きつき数を導入し $r = -1$ とおくことで、フェルミオンの符号を変更し、相殺によってダイアグラムのみが残る
- 一筆書き全体の向きについては独立に2つずつあるので、その組み合わせによりIsing模型の分配関数の2乗になる

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square with a horizontal line through the center. The top and bottom edges are curved with arrows pointing left. The left and right edges are straight with arrows pointing right. The horizontal line has arrows pointing right on both sides of the center.} \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A square with a horizontal line through the center. The top and bottom edges are curved with arrows pointing left. The left edge is straight with an arrow pointing right. The right edge is straight with an arrow pointing left. The horizontal line has an arrow pointing right on the left side and an arrow pointing left on the right side.} \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A square with a horizontal line through the center. The top and bottom edges are curved with arrows pointing left. The left edge is straight with an arrow pointing right. The right edge is straight with an arrow pointing right. The horizontal line has an arrow pointing right on the left side and an arrow pointing left on the right side.} \end{array} & + & \dots \\
 (-1)^F r^w q^\ell & & -r^0 q^8 & & -r^1 q^8 & & +r^2 q^8
 \end{array}$$

$$= (r^2 - r + 2 - r^{-1} + r^{-2})q^8$$

$$\xrightarrow[r \rightarrow -1]{} +6q^8$$

$$\tilde{\zeta}(q, r = -1) = (1 + 2q^4 + q^8)^2$$

# 回転数を含むグリッド上のゼータ関数

---

正方格子:

$$\zeta_{\text{SQ}}(q, r)^{-1} = \prod_{m_1=0}^{N-1} \prod_{m_2=0}^{M-1} \left\{ (1 - q^2) \left( 1 + 3q^2 - q \hat{A}_{\text{SQ}}(\vec{m}) \right) - (r^{1/2} - r^{-1/2})^2 q^4 \right\}$$

ハニカム格子:

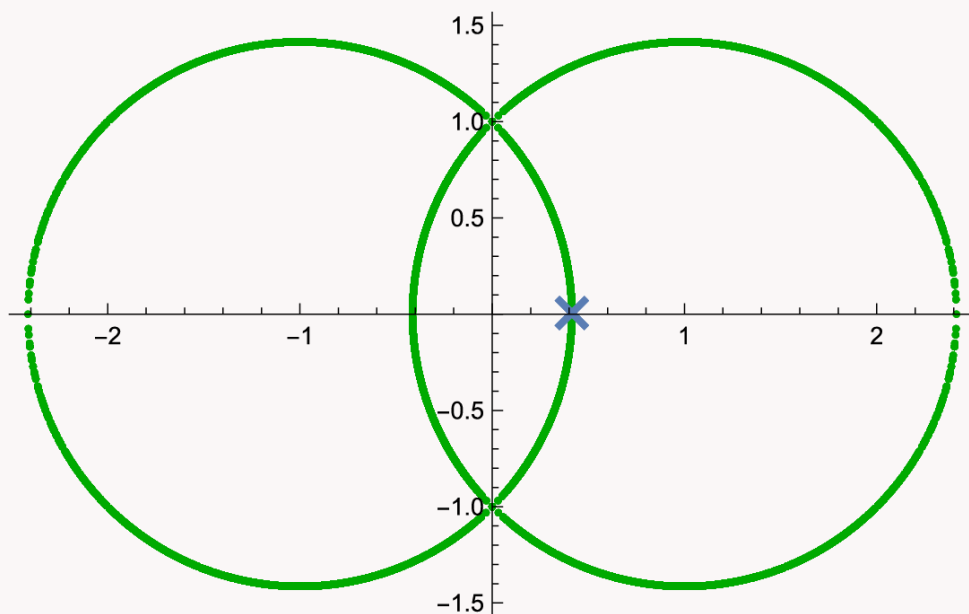
$$\zeta_{\text{HC}}(q, r)^{-1} = \prod_{m_1=0}^{N-1} \prod_{m_2=0}^{M-1} \left\{ (1 - q^2) \det \left( (1 + 2q^2) I_2 - q \hat{A}_{\text{HC}}(\vec{m}) \right) - (r^{1/2} - r^{-1/2})^2 q^6 \right\}$$

$r$ の効果でゼータ関数のゼロ点分布が変形される

⇒ ゼータ関数のゼロ点は分配関数のゼロ点でもあるので、Lee-Yangの円定理により、ゼロ点分布はグリッドグラフ上のIsing模型の相転移点を決定する



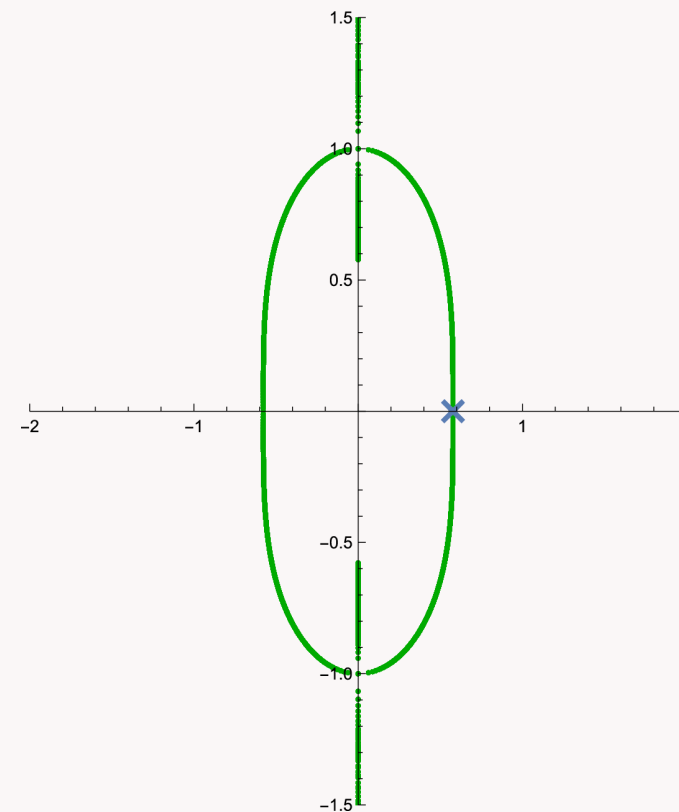
## 回転数( $r = -1$ )を含むゼータ関数のゼロ点分布



$$q^* = \sqrt{2} - 1 = 0.414214 \dots$$

2次元正方格子Ising模型の厳密解と一致

(ちなみに、Kramers-Wannier双対性と  $J \leftrightarrow -J$  の対称性を  
反映して4つの交点が見える。)



$$q^* = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735 \dots$$

2次元ハニカム格子Ising模型の厳密解と一致

## まとめと展望

---

- 分配関数としてグラフゼータ関数の逆数を持つようなフェルミオンのモデルを離散空間である任意のグラフ上に構成した
- その他、 $L$ 関数の応用として、周期構造を持つグリッド・グラフ上の分配関数を基本領域のグラフから構成することも可能
- ゼータ関数の関数等式から導かれる双対性、あるいはリーマン予想と関連したゼロ点分布の性質は、物理的にも非常に興味深い (Lee-Yangの円定理との関係)
- グラフ上のボゾンのKazakov-Migdal模型と組み合わせることで、任意のグラフ上のQCDあるいは超対称ゲージ理論の構成が期待できる(ゲージ場+物質場)