

# ランダム結合テンソルネットワークの 繰り込み群的フローと正準テンソル模型

笹倉 直樹

京都大学基礎物理学研究所

*Cf. N. Sasakura, to be published in PTEP, e-Print: 2504.07587 [hep-th]*

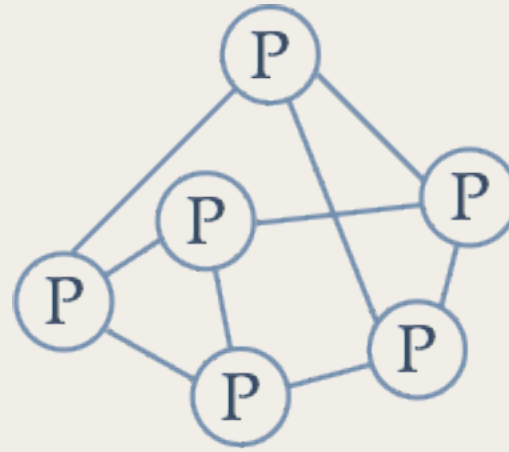
2025年9月8日

離散的手法による場と時空のダイナミクス2025

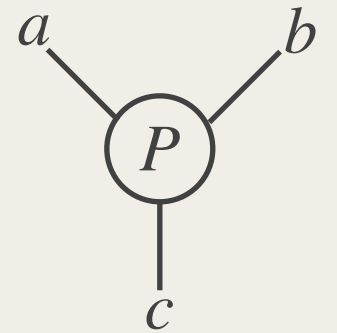
2025年9月8日(月)-9月12日(金) 明治学院大学(白金キャンパス)

# § ランダム結合テンソルネットワーク (RCTN)

$$Z_n(P) = \sum_{g \in G_n} \frac{1}{s_g}$$



$P$  : 対称実テンソル  $P_{abc}$  ( $a, b, c = 1, 2, \dots, N$ )



$G_n$  :  $n$ 個(偶数)の頂点を持つ全ての可能なネットワーク

$s_g$  : ネットワーク  $g$  の対称性因子

— : テンソルの添え字の縮約

場の理論的 (0次元) 表現

$$Z_n(P) = c \cdot \int_{\mathbb{R}^N} d^N \tilde{\phi} \left( P \tilde{\phi}^3 \right)^n e^{-\tilde{\phi}^2}$$

$$P \tilde{\phi}^3 := P_{abc} \tilde{\phi}_a \tilde{\phi}_b \tilde{\phi}_c$$

$$\tilde{\phi}^2 := \tilde{\phi}_a \tilde{\phi}_a$$

熱力学極限  $n \rightarrow \infty$  (ネットワークを無限大,  $N$  は固定)

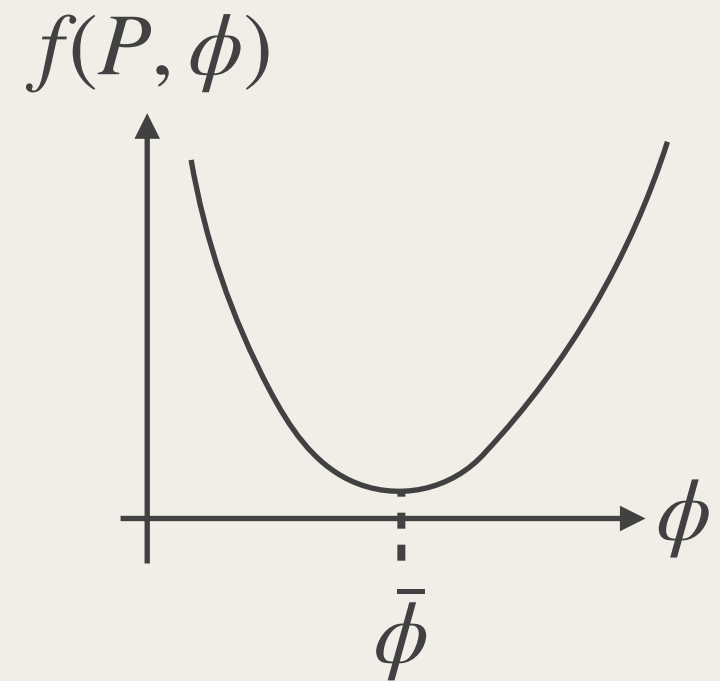
$$\tilde{\phi} = \sqrt{n}\phi \quad (n \text{ は偶数})$$

$$Z_n(P) = c \cdot \int_{P\phi^3 > 0} d^N \phi e^{-n(\phi^2 - \log(P\phi^3))}$$

頂点あたりの自由エネルギー (厳密な表現)

$$f(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log Z_n(P) = \min_{\phi} f(P, \phi) = f(P, \bar{\phi})$$

$$f(P, \phi) = \phi^2 - \log(P\phi^3)$$



$\bar{\phi}$  は必ず実で存在.

$P$ によっては,  $\bar{\phi}$  は複数または連続的に存在する可能性があるが  $N$  が有限の場合は頂点あたりの自由エネルギーに効かない. 一つの  $\bar{\phi}$  を代表元として与えれば良い.

$\bar{\phi}$  の性質 (絵に描いた餅)

$\bar{\phi}$  は鞍点方程式を満たす

$$\frac{\partial f(P, \bar{\phi})}{\partial \bar{\phi}_a} = 0 \quad \longrightarrow \quad (P\bar{\phi}^2)_a = \frac{2P\bar{\phi}^3}{3} \bar{\phi}_a \quad \text{————— ①}$$
$$(P\bar{\phi}^2)_a := P_{abc} \bar{\phi}_b \bar{\phi}_c$$

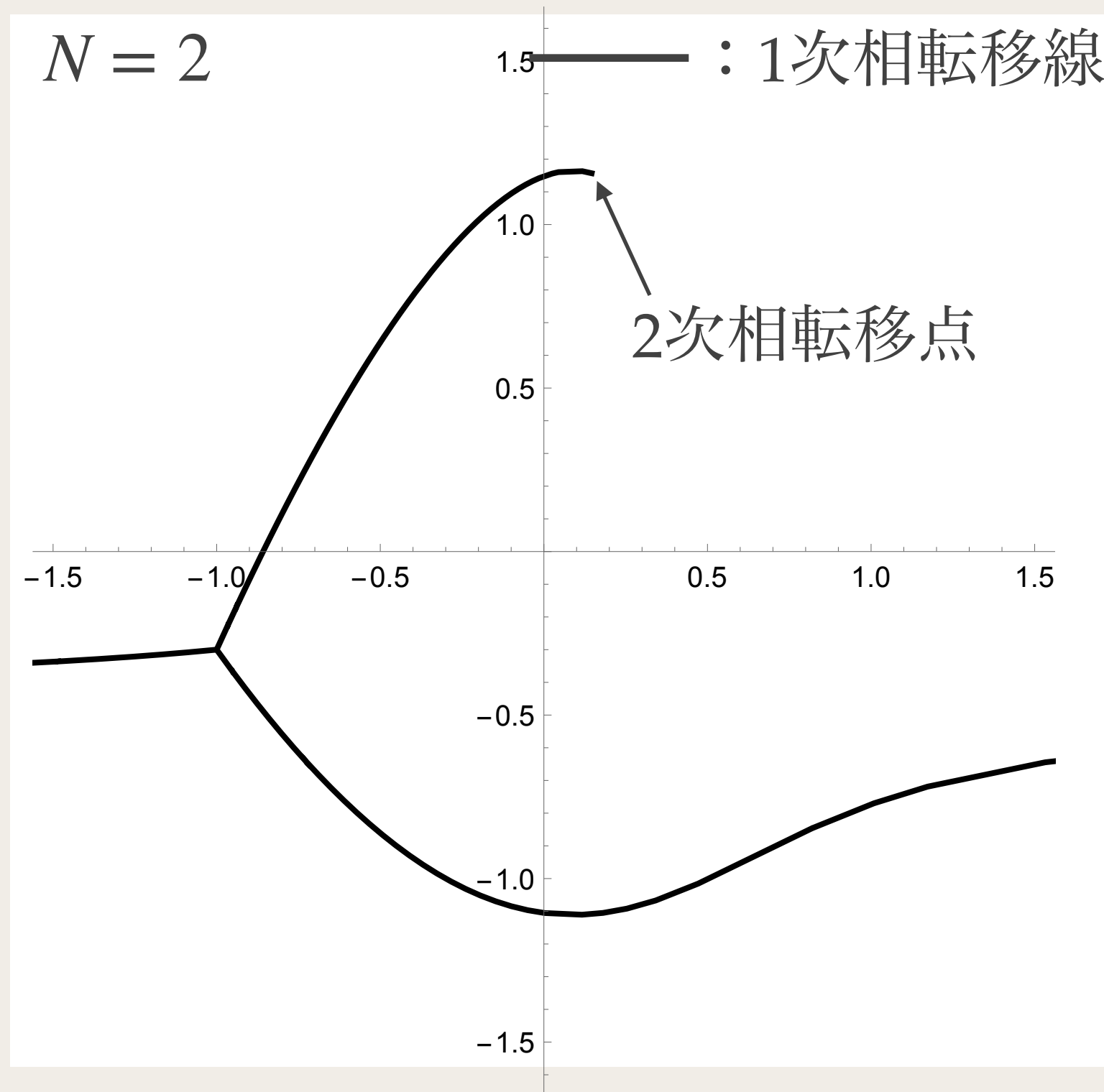
テンソルの固有方程式と同一 *Qi, Lim, 2005, Cartwright-Sturmfels 2013*

$$T_{a_1 a_2 \cdots a_p} v_{a_2} v_{a_3} \cdots v_{a_p} = \lambda v_{a_1} \quad |v| = 1 \quad p = 3$$

真空 $\bar{\phi}$ を求めるのはNP-hard *Hillar-Lim 2009*

$$\text{①を使うと } f(P) = \frac{3}{2} - \log \left( \max_{\substack{\phi \in \mathbb{R}^N \\ \phi^2 = 3/2}} P\phi^3 \right) \quad \longrightarrow \quad \bar{\phi} \text{ は } P\phi^3 \text{ を最大にする } \phi$$

# § RCTNの相図の例

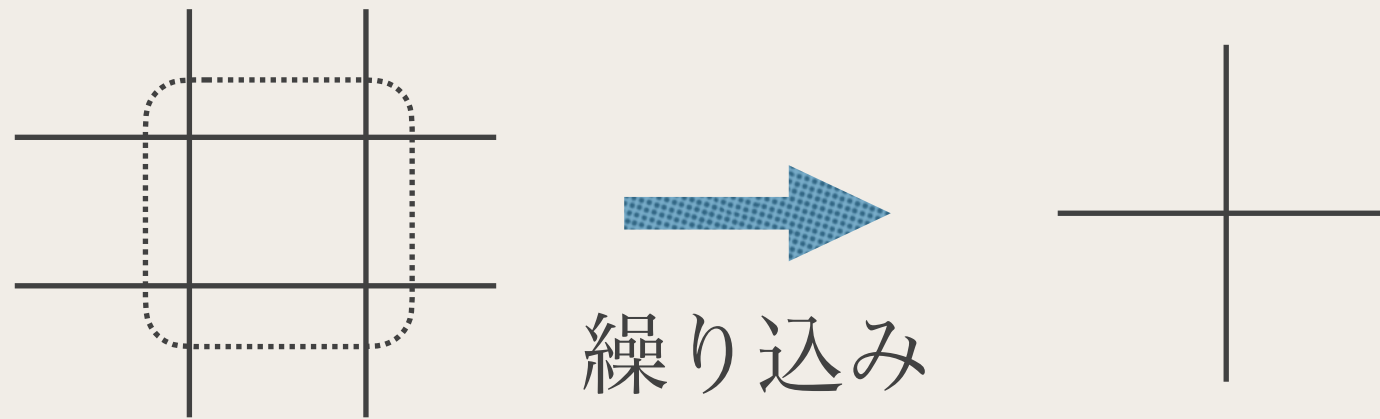


ランダムネットワーク上の  
イジング模型とも見れ  
る

2次相転移点は自発磁化が  
生・消するキュリー点に対  
応する

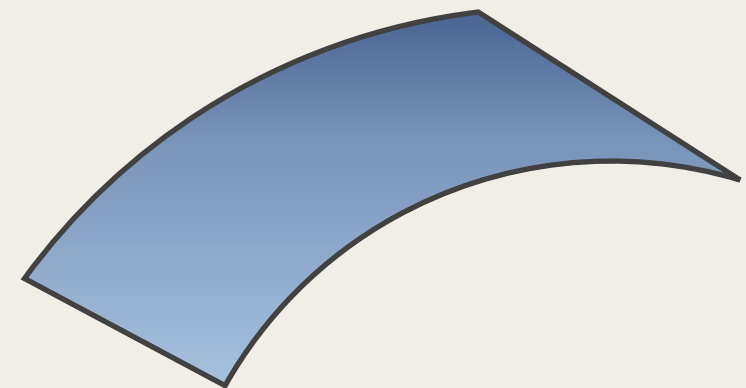
RCTNに対しても繰り込み群フローみたいなものは考えられるのだろうか？

あらゆるネットワークの足し上げであることを考えるとありそうもない．普通の場合は一つの格子上で考える



でも、あると嬉しい．離散的な量子時空 → 連続的古典的時空

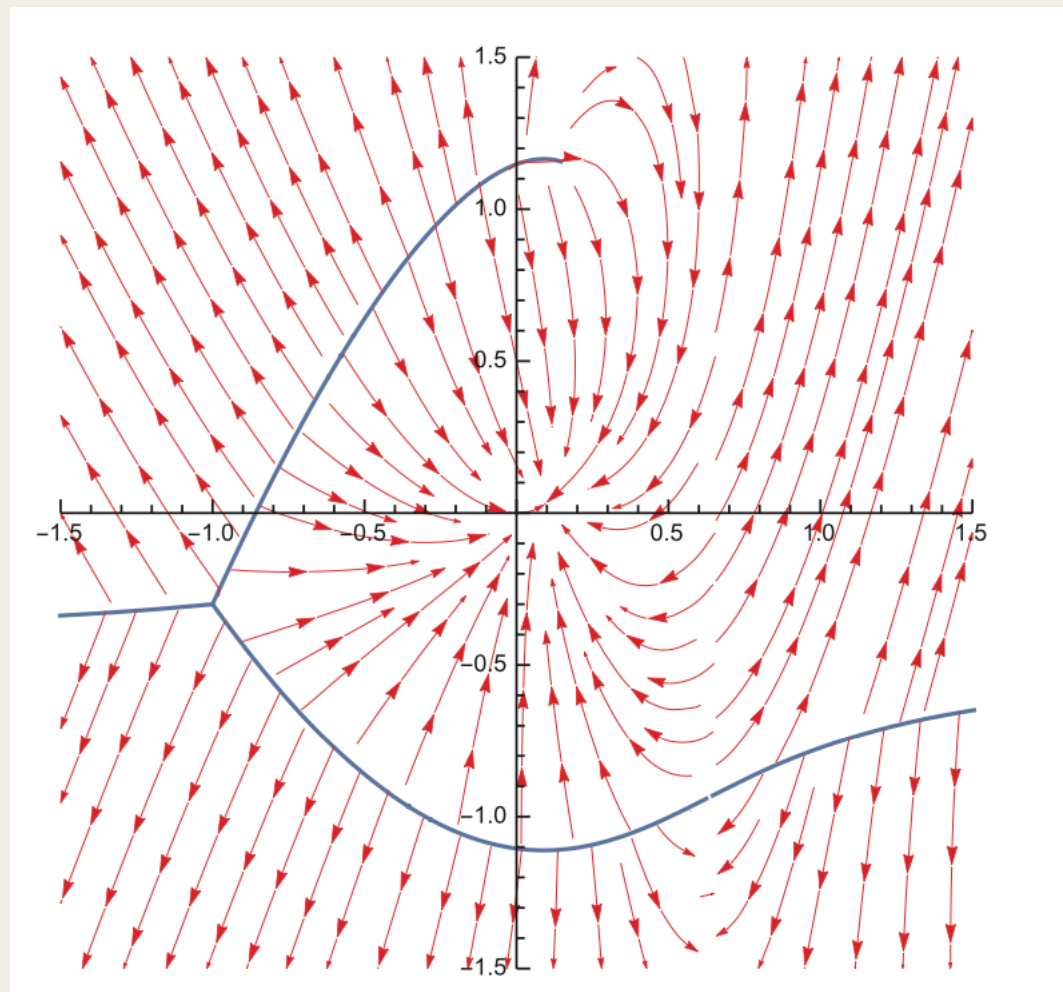
ミクロにはいろんな  
ネットワークの足し  
あげ



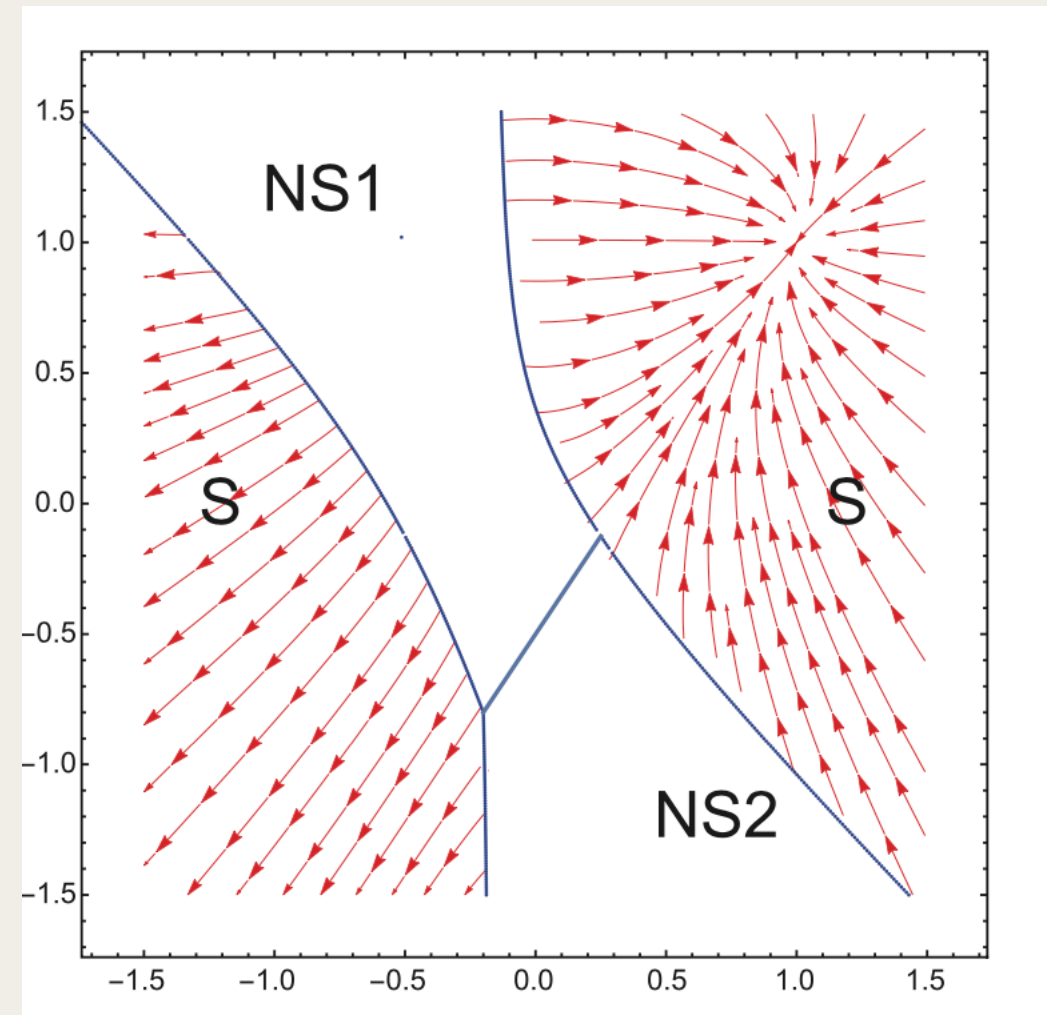
# 過去の試み

*N. Sasakura, Y. Sato, PTEP 2014 (2014) 5, 053B03 • e-Print: 1401.7806 [hep-th]*

*N. Sasakura, Y. Sato, PTEP 2015 (2015) 4, 043B09 • e-Print: 1501.05078 [hep-th]*



$N = 2$

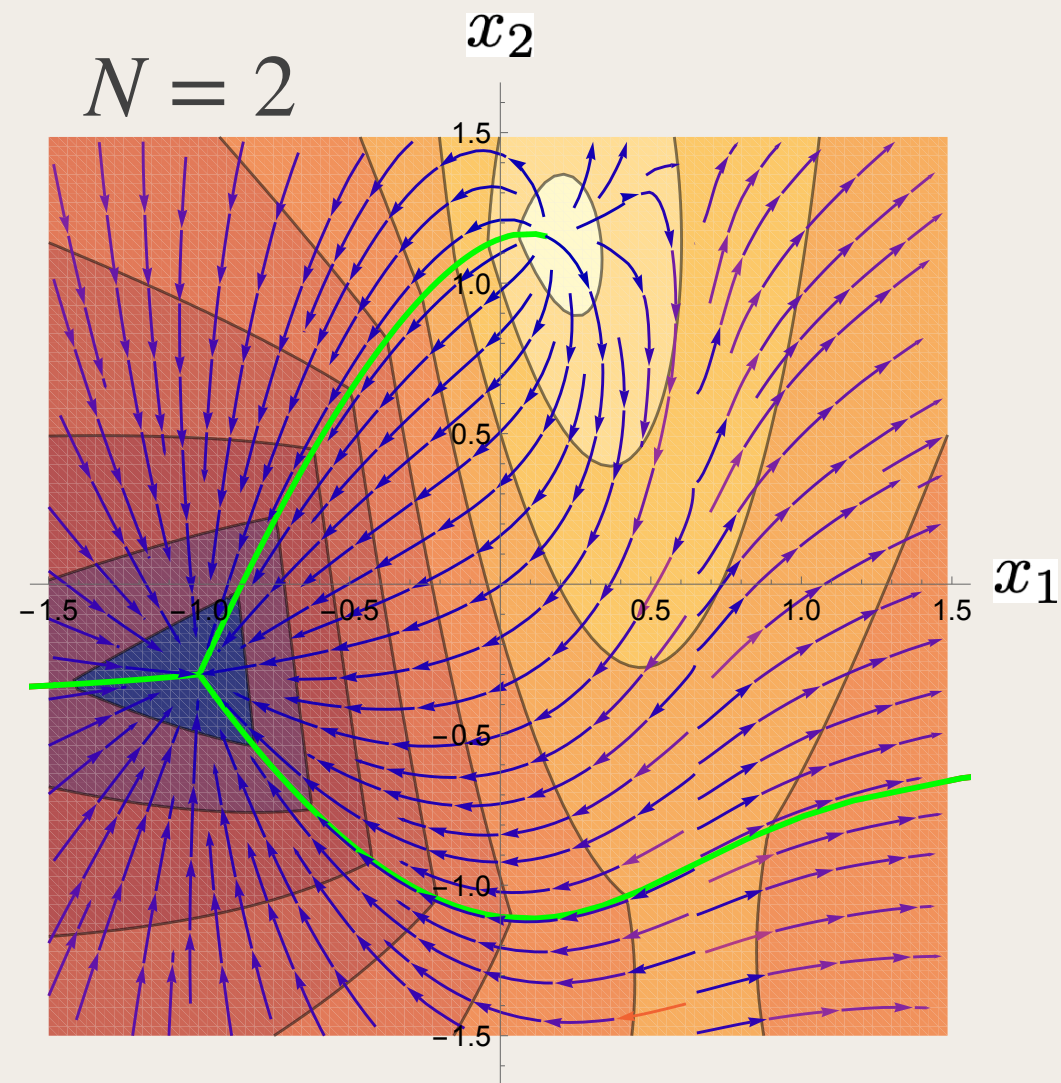


$N = 3$

いまいち. なんか変. 相図とは矛盾してない気もするが,  
フローの端点が相図となんの関係もない. やはりちゃんと  
した繰り込み群フローは存在しないのか.



今回の成果. 相図との完璧な一致！厳密に証明できる.



フローは相転移点に漸近的に両端点を持つ

高位数から低位数の相転移点に向かう

フローは1次相転移線(面,...)に添う

フローに沿って減少する関数が存在する  
 $a - c$  関数のアナロジー

固定点の完全分類

- フローを定義するのに正準テンソル模型のハミルトニアンを使う  
(過去の試みと同様)
- New ! (正の) 宇宙項も考慮する.

## 証明のテクニック（大学初年度レベル！）

$$f(P) = \min_{\phi} f(P, \phi) = f(P, \bar{\phi}) \qquad f(P, \phi) = \phi^2 - \log(P\phi^3)$$

$$(P\bar{\phi}^2)_a = \frac{2P\bar{\phi}^3}{3}\bar{\phi}_a : \bar{\phi} \text{ がテンソルの固有方程式を満たす}$$

Injective norm,  $\max_{\substack{\phi \in \mathbb{R}^N \\ \phi^2 = 3/2}} P\phi^3$ , は  $\phi = \bar{\phi}$  で与えられる  
(背理法  $\exists \phi \neq \bar{\phi}, P\phi^3 > P\bar{\phi}^3$  なら矛盾)

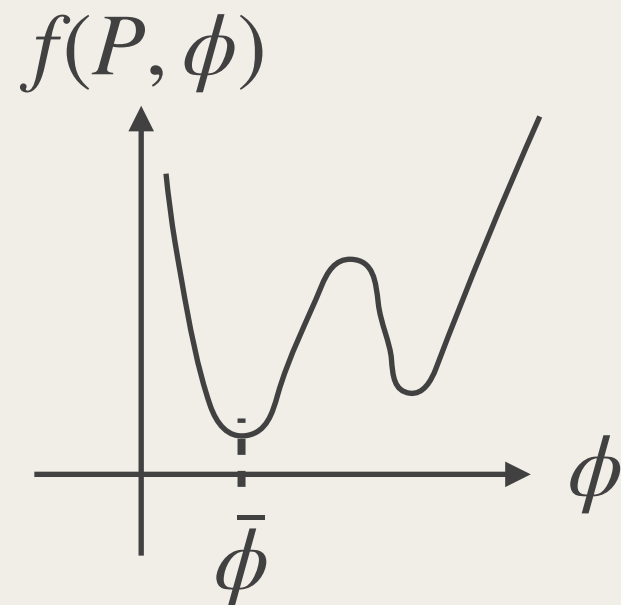
実対称行列は実の対角要素で対角化できる．固有ベクトルは実で互いに直行する

# §RCTNにおける相転移

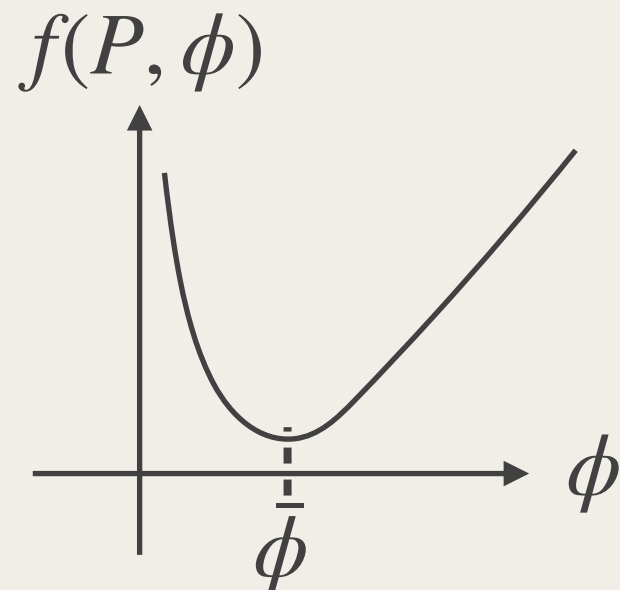
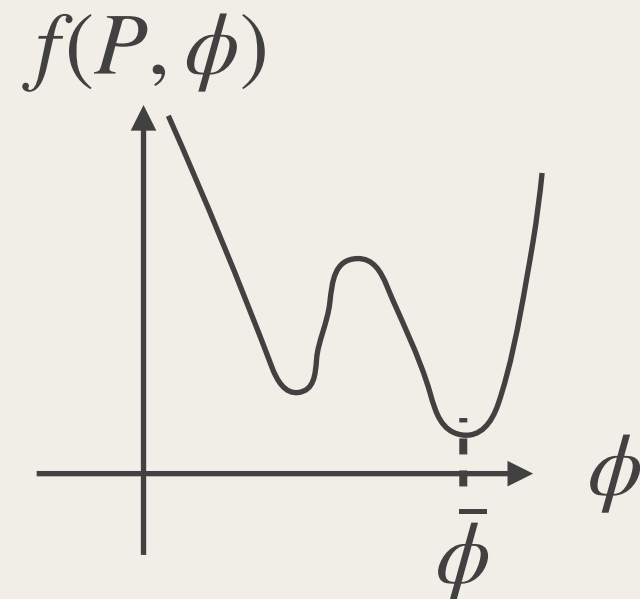
$$f(P) = \min_{\phi} f(P, \phi) = f(P, \bar{\phi})$$

$$f(P, \phi) = \phi^2 - \log(P\phi^3)$$

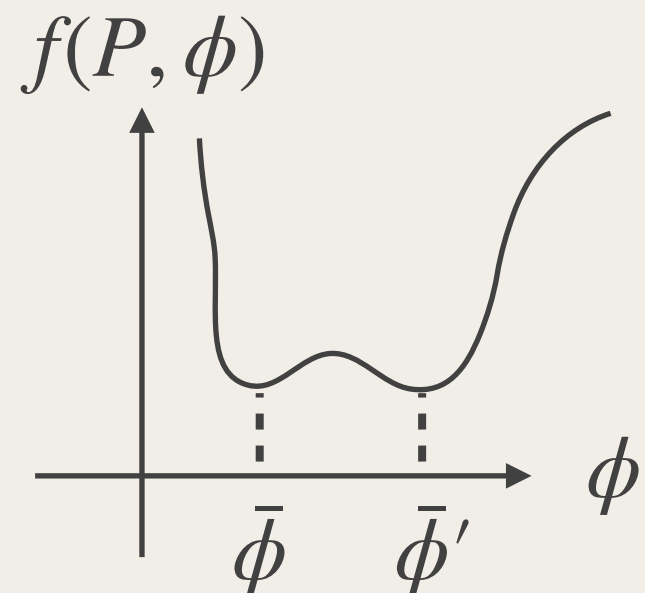
テンソル  $P_{abc}$  の変化に伴い相転移が生じる



1次相転移



2次相転移



## 2次相転移点

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(P, \phi)}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \bigg|_{\phi=\bar{\phi}} = \delta_{ab} + 2\bar{\phi}_a \bar{\phi}_b - 3R_{ab} \quad : \text{Hessian}$$

$$R_{ab} := \frac{(P\bar{\phi})_{ab}}{P\bar{\phi}^3} = \frac{4}{9}\bar{\phi}_a \bar{\phi}_b + R_{ab}^{\perp} \quad \begin{aligned} V_{\parallel} &= \{c \bar{\phi} \mid c \in \mathbb{R}\} \\ V_{\perp} &= \{v \mid v \cdot \bar{\phi} = 0\} \end{aligned}$$

$$\left( R\bar{\phi} = \frac{2}{3}\bar{\phi} \right) \quad (P\phi)_{ab} = P_{abc}\phi_c$$

$\bar{\phi}$ は最小点  $\rightarrow$  行列  $K$  の固有値は0以上. 0があるときは2次相転移点

$\rightarrow R^{\perp}$  の固有値  $e_i^{\perp}$  について

$$e_i^{\perp} \leq \frac{1}{3} \quad \exists e_i^{\perp} = \frac{1}{3} \quad \longleftrightarrow \quad \text{2次相転移点}$$

$P$ の分解(第一段)  $V = V_{\parallel} \oplus V_{\perp}$

$$P = \frac{8(P\bar{\phi}^3)}{27} \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} + 2(P\bar{\phi}^3) [\bar{\phi} \otimes R^{\perp}] + P^{\perp} \quad \text{とできる}$$

$[\dots]$ : 対称化

この表式において  $\phi_{\theta} := \bar{\phi} \cos \theta + |\bar{\phi}| \eta_{\perp} \sin \theta$  ( $|\eta_{\perp}| = 1, \eta_{\perp} \in V_{\perp}$ ) を作用させ,  $\bar{\phi}$  が満たすべき必要条件  $P\phi_{\theta=2\pi/3}^3 + P\phi_{\theta=4\pi/3}^3 \leq 2P\bar{\phi}^3$  を使  
うと,

$$-\frac{2}{3} \leq e_i^{\perp} \leq \frac{1}{3}$$

この bound は実は tight でもある. 理由は後述

# § 指数 $(N_+, N_-)$ の導入

$$V = V_{\parallel} \oplus V_+ \oplus V_- \oplus V_{\perp\perp} \quad (V_{\perp} = V_+ \oplus V_- \oplus V_{\perp\perp})$$

$V_{\parallel} : \bar{\phi}$  のベクトル空間

$V_+ : R^{\perp}$  の固有値  $e_i^{\perp} = 1/3$  の空間. 次元を  $N_+$

$V_- : R^{\perp}$  の固有値  $e_i^{\perp} = -2/3$  の空間. 次元を  $N_-$

$V_{\perp\perp} : \text{残りの空間 } (-2/3 < e_i^{\perp} < 1/3)$

$P$  を更に分解する

$$P = \frac{8(P\bar{\phi}^3)}{27} \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} + \frac{2(P\bar{\phi}^3)}{3} [\bar{\phi} \otimes I^+] - \frac{4(P\bar{\phi}^3)}{3} [\bar{\phi} \otimes I^-] + 2(P\bar{\phi}^3) [\bar{\phi} \otimes R^{\perp\perp}] + P^{\perp}$$

$$P^{\perp} = P^{++-} + P^{++\perp\perp} + P^{+-\perp\perp} + P^{+\perp\perp\perp} + P^{-\perp\perp\perp} + P^{\perp\perp\perp\perp} \quad (\text{対称化済})$$

$$(\text{背理法により } P^{+++} = P^{--+} = P^{---} = P^{--\perp\perp} = 0)$$

# § フロー方程式

正準テンソル模型のハミルトニアンを使う

*N. Sasakura, Int.J.Mod.Phys.A 27 (2012) 1250020 • e-Print: 1111.2790 [hep-th]*

$$\mathcal{H}_a = P_{abc} P_{bde} M_{cde} - \lambda M_{abb}$$

$$\{M_{abc}, P_{def}\} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma} \delta_{a\sigma_d} \delta_{b\sigma_e} \delta_{c\sigma_f} \quad \{M_{abc}, M_{def}\} = \{P_{abc}, P_{def}\} = 0$$

$\lambda$  は宇宙定数

*N. Sasakura, Y. Sato, Phys.Lett.B 732 (2014) 32-35, • e-Print: 1401.2062 [hep-th]*

## フロー方程式

$$\frac{d}{ds}P_{abc} = \{\bar{\phi}_d \mathcal{H}_d, P_{abc}\} = [\bar{\phi} P P]_{abc} - \lambda [\bar{\phi} \otimes I]_{abc}$$

↑ 真空を使う

$$(\bar{\phi} P P)_{abc} = \bar{\phi}_d P_{dae} P_{ebc}$$

$$I_{ab} = \delta_{ab}$$

以降,  $\lambda = \frac{8}{27}(P\bar{\phi}^3)^2$  こうとると全てうまくいく!

$\lambda$  はフローに沿って定数. 後述

$$\lambda = \text{const.} \cdot e^{-2f(P, \bar{\phi})}$$



$\bar{\phi}$  のフロー

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial f(P, \bar{\phi})}{\partial \bar{\phi}_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \bar{\phi}_a = 0$$

真空はフローに沿って不変

他にも

$$\frac{d}{ds} f(P, \bar{\phi}) = 0$$

自由エネルギーが不変

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0$$

宇宙定数が不変

# § 1次相転移とフロー

1次相転移線(面,.....)

$$\bar{\phi}_1 \neq \bar{\phi}_2$$

$$f(P, \bar{\phi}_1) = f(P, \bar{\phi}_2)$$

$$\frac{\partial f(P, \bar{\phi}_1)}{\partial \bar{\phi}_{1a}} = \frac{\partial f(P, \bar{\phi}_2)}{\partial \bar{\phi}_{2a}} = 0$$



$$\frac{d}{ds_1} f(P, \bar{\phi}_2) = 0$$

$$\left( \frac{d}{ds_1} f(P, \bar{\phi}_1) = 0 \right)$$

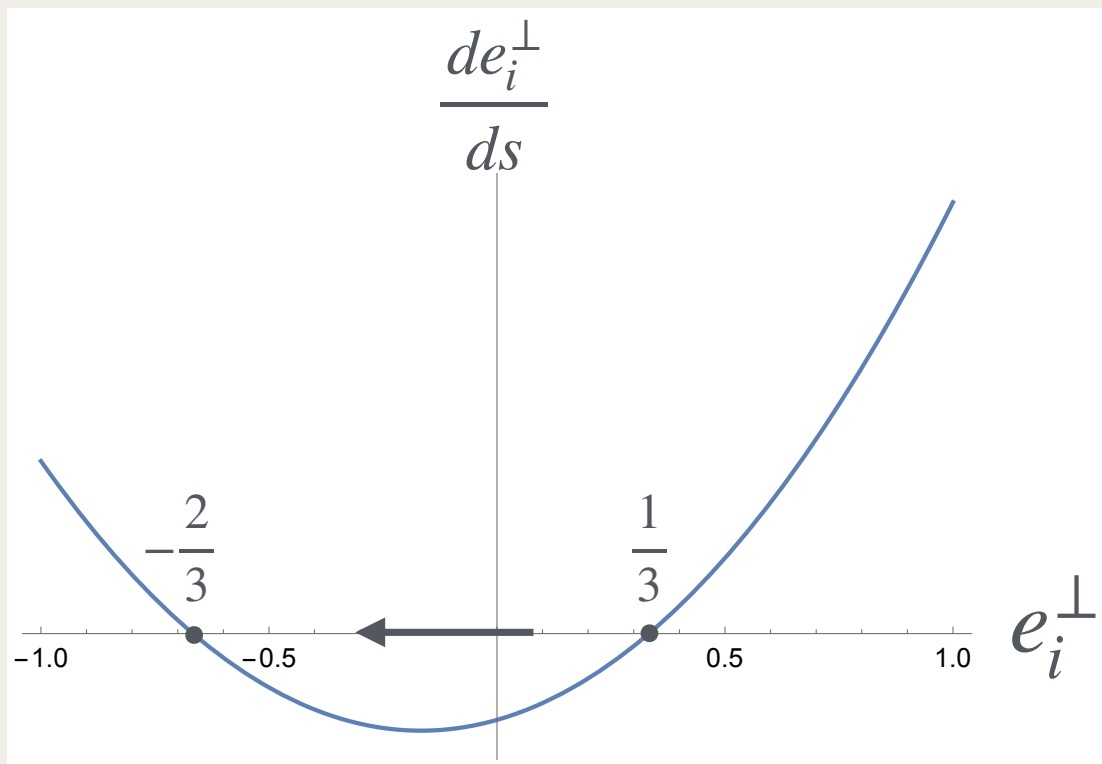
1次相転移上でフローは1次相転移上をフローする.

(フローは1次相転移を跨がない)

# § フローの分解表現

$P$  の分解を代入

$$\frac{d}{ds}R^\perp = \frac{2P\bar{\phi}^3}{3} \left(R^\perp - \frac{1}{3}I^\perp\right) \left(R^\perp + \frac{2}{3}I^\perp\right) \quad \longrightarrow \quad e_i^\perp \text{ のフロー}$$



固定点は  $(N_+, N_-)$  で分類できる.

$N_+ : e_i^\perp = 1/3$  の個数

$N_- : e_i^\perp = -2/3$  の個数

$$N_+ + N_- = N - 1$$

$N_+ > 0 : 2$  次相転移点

固定点を漸近的な端点とするフローに対して以下の不等式が成立

$$(N_+, N_-) \rightarrow (N'_+, N'_-)$$

$$N_+ > N'_+ \quad (N_- < N'_-)$$

$P$  の分解を代入することにより以下の式も導かれる

$$\frac{d}{ds}P^\perp = P\bar{\phi}^3 [R^\perp P^\perp]$$

$s \rightarrow \pm \infty$  での振る舞いより以下が導かれる.

- ・ フローの両端は有限な領域に存在する固定点に漸近的に収斂する

- ・ 固定点  $(N_+, N_-)$  は必ず以下の形を持つ

$$P = \frac{8P\bar{\phi}^3}{27}\bar{\phi} \otimes \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} + \frac{2P\bar{\phi}^3}{3}[\bar{\phi} \otimes I^+] - \frac{4P\bar{\phi}^3}{3}[\bar{\phi} \otimes I^-] + P^{++-}$$

ここで  $V = V_\parallel \oplus V_+ \oplus V_-$  で  $\dim V_+ = N_+$ ,  $\dim V_- = N_-$

また必要十分条件として (背理法などで証明)

$$\max_{|\eta_+|=|\eta_-|=1} P^{++-}\eta_+^2\eta_- \leq \frac{\sqrt{3}P\bar{\phi}^3}{2|\bar{\phi}|^3}$$



この形から以下のことが証明される

$$\max_{|\eta_+|=|\eta_-|=1} P^{++-} \eta_+^2 \eta_- < \frac{\sqrt{3} P \bar{\phi}^3}{2 |\bar{\phi}|^3} \text{ の場合}$$

$N_- > 0$  の固定点は1次相転移線(面,...)上に存在する

$N_+ > 0$  の固定点は1次相転移線(面,...)の端点に存在する

$$\max_{|\eta_+|=|\eta_-|=1} P^{++-} \eta_+^2 \eta_- = \frac{\sqrt{3} P \bar{\phi}^3}{2 |\bar{\phi}|^3} \text{ の場合}$$

真空  $\bar{\phi}$  は連続的に縮退する

# § 臨界指数

SO( $N$ )対称性を固定することにより非物理的なフローを除く

$e_i^\perp$  と  $P^\perp$  のフローを調べる

固定点  $(N_+, N_-)$  ( $N_+ + N_- = N - 1$ ) の周りでは一般に以下の形の摂動となる

$$e_i^+ = 1/3 - \delta e_i^+, i = 1, 2, \dots, N_+$$

$$e_i^- = -2/3 - \delta e_i^-, i = 1, 2, \dots, N_-$$

$$P^\perp = P_0^{++-} + \delta P^{+++} + \delta P^{++-} + \delta P^{+--} + \delta P^{---}$$

Relevant

$$\frac{d}{ds}\delta e^+ = \frac{2P\bar{\phi}^3}{3}\delta e^+$$

$$\frac{d}{ds}\delta P^{+++} = \frac{P\bar{\phi}^3}{3}\delta P^{+++}$$

Marginal

$$\frac{d}{ds}\delta\tilde{P}^{++-} = 0$$

Irrelevant

$$\frac{d}{ds}\delta P^{+--} = -\frac{P\bar{\phi}^3}{3}\delta P^{+--}$$

$$\frac{d}{ds}\delta e^- = -\frac{2P\bar{\phi}^3}{3}\delta e^-$$

$$\frac{d}{ds}\delta P^{---} = -\frac{2P\bar{\phi}^3}{3}\delta P^{---}$$

$$\delta\tilde{P}_{abc}^{++-} := \delta P_{abc}^{++-} + (\delta e_a^+ + \delta e_b^+ + \delta e_c^-)P_{0abc}^{++-}$$

Critical exponent  $\nu = \frac{1}{2}$

$$D_{\text{relevant}} = \frac{N_+(N_+^2 + 3N_+ + 8)}{6}$$

$$D_{\text{irrelevant}} = \frac{N_-(8 + 3N_- + N_-^2 + 3N_+ + 3N_+N_-)}{6}$$

$$D_{\text{marginal}} = \frac{N_-N_+(N_+ + 1)}{2}$$

# § 繰り込み関数

以下の関数はフローに沿って減少

$$d_{\text{RG}} = \text{Tr} \left( R^\perp + \frac{2}{3} I^\perp \right)$$

固定点では  $d_{\text{RG}} = N_+$

一般に  $0 \leq d_{\text{RG}} \leq N - 1$

直感的には  $d_{\text{RG}}$  は軽いモード(固定点では0質量モード)を数えている。モードはフローに沿って重くなり、 $d_{\text{RG}}$  から消えていく



# § 指数( $N_+, N_-$ )と繰り込み関数の多価性

$R = \frac{P\bar{\phi}}{P\bar{\phi}^3}$  であるため  $R^\perp$  は真空  $\bar{\phi}$  に依存. 1次相転移線(面,...)

上では, 指数( $N_+, N_-$ )と繰り込み関数は一般に多価.

固定点 ( $N_+, N_-$ ) ( $N_+ + N_- = N - 1$ ) が  $N_- > 0$  とする. 先の定理から1次相転移上. 別の真空での指数は ( $N_- - 1, 0$ ) が証明でき, 非固定点.

よって1次相転移を跨ぐ無限小の「ジャンプ」を許せば以下のフローが存在

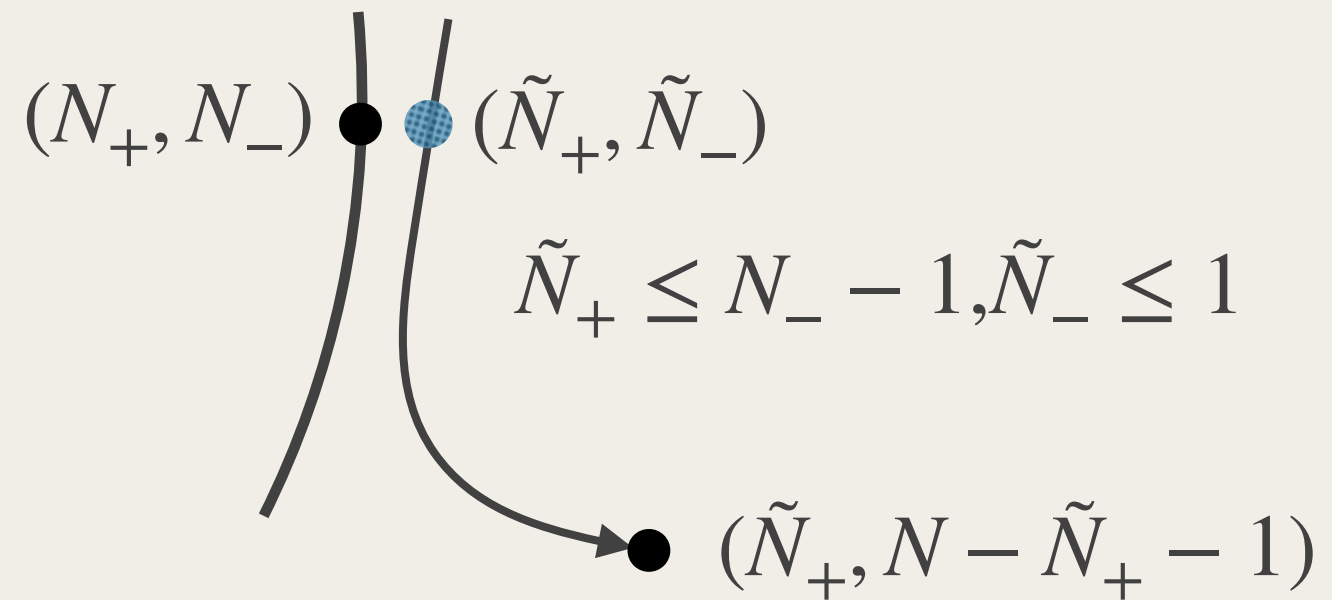
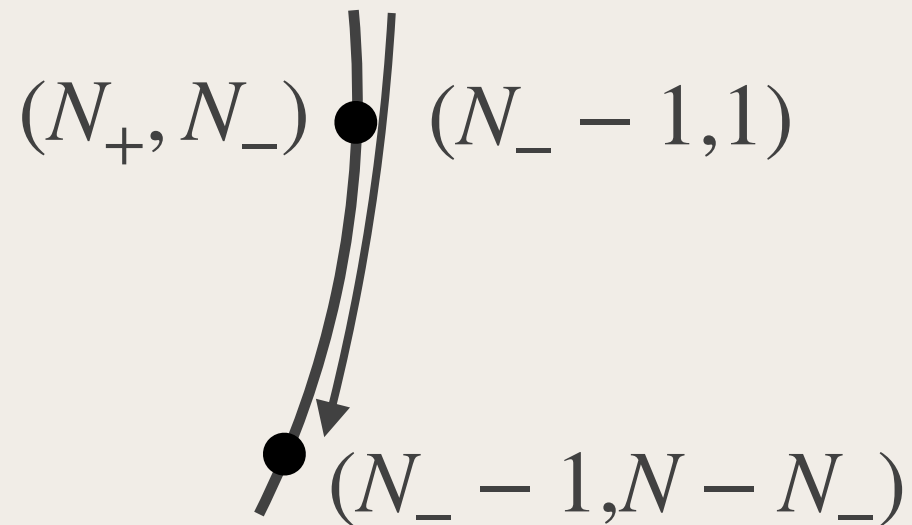
$$(N_+, N_-) \Rightarrow (N_- - 1, 1) \longrightarrow (N_- - 1, N - N_-)$$

⇒ 無限小ジャンプ  
→ フロー

跨ぎでは繰り込み関数  $d_{RG}$  も離散的に変化する.

# § 周期的フロー

無限小の摂動も許す



特に  $N_+ \leq N_- - 1$  では以下が可能

$$(N_+, N_-) \Rightarrow (N_+, \tilde{N}_-) \longrightarrow (N_+, N_-)$$

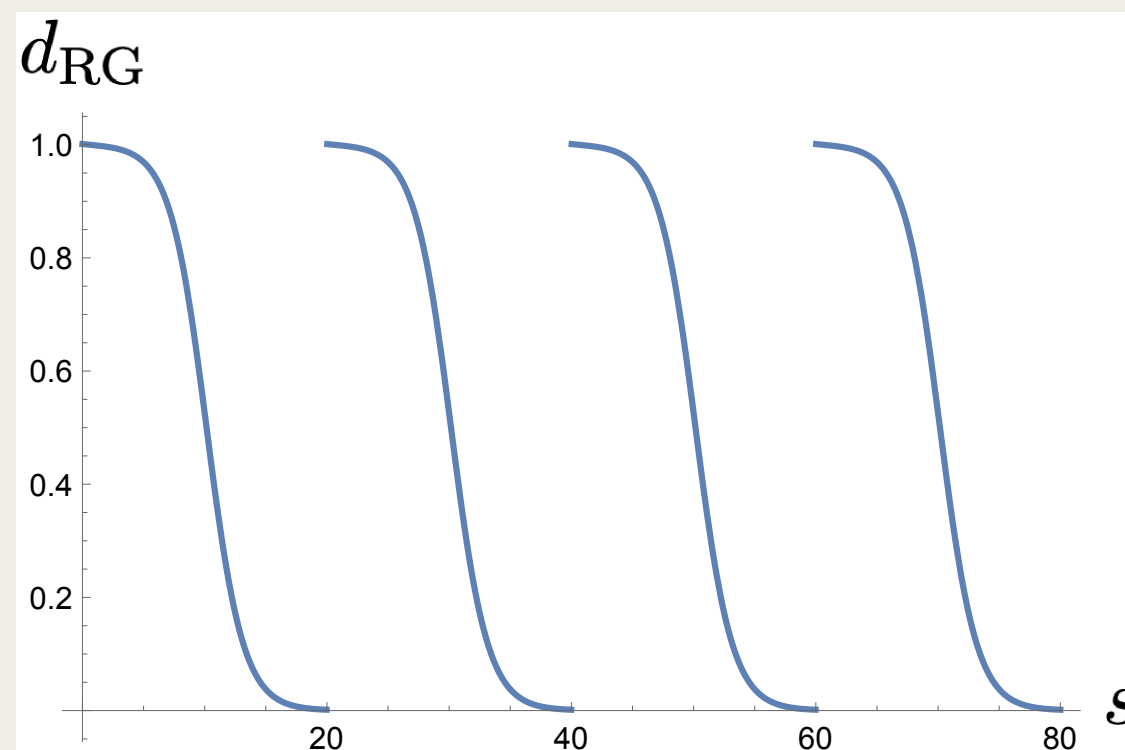
具体例:  $N = 3$  での周期フロー  $(0,2) \Rightarrow (0,0) \rightarrow (0,2)$

$$(0,2) \quad P = \frac{8P\bar{\phi}^3}{27}\bar{\phi} \otimes \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} - \frac{4P\bar{\phi}^3}{3}[\bar{\phi} \otimes I^-] \quad \text{一次転移以上}$$

別の真空  $\tilde{\phi} = -\bar{\phi}/2 + \frac{\sqrt{3}|\bar{\phi}|}{2}\eta_- \quad (\eta_- \in V_-, |\eta_-| = 1)$

無限小ジャンプ  $P \Rightarrow \tilde{P} \quad \tilde{P} = P + \epsilon \tilde{\phi} \otimes \tilde{\phi} \otimes \tilde{\phi} \quad 0 < \epsilon \ll 1$

真空が転移  $\bar{\phi} \Rightarrow \tilde{\phi} \quad (0,0) \rightarrow (0,2)$



# § まとめと議論と課題

RCTNは量子重力やランダムネットワーク上の統計系の観点から興味深い

RCTNの繰り込み群的フローは量子重力の模型である正準テンソル模型のハミルトニアンにより与えられる

正の宇宙項が本質的に重要

dS/CFTに似ている

周期フローの存在は量子重力的にはOK? スケールの大/小は真空の取り方により変わる? T-dualityに似ている.

$P$  が実の場合だけ議論した.  $P$  が複素の場合には量子論的干渉効果があり, もっとややこしく面白い. 今後の課題.