

格子Dirac演算子の指数とK理論

深谷英則 (大阪大学)



青木匠門(理研iTHEMS)、古田幹雄 (東大)、松尾信一郎 (名大)、
大野木哲也 (阪大)、山口哲 (阪大) 各氏との共同研究
[\[arXiv:2407.17708, 2503.23921\]](https://arxiv.org/abs/2407.17708)

数理科学 2025年8月号

も読んで
いただけると
うれしいです。

数理 科学

8 2025

特集
格子ゲージ理論
50年の発展と拡がりに迫る

本特集のささやかな案内
格子 QCD の半世紀
裸のクォークを見る
QCD の相構造に迫る
格子 QCD から核力を導く
格子理論における Dirac 演算子と
トポロジー
動的単体分割のすゝめ
格子上の超対称ゲージ理論から
グラフ理論へ
格子ゲージ理論と量子計算
格子ゲージ理論の未解決問題
〈連載〉 Lappo-Danilevsky を読む その9

加堂	大輔
宇川	彰
橋本	省二
青木	保道
青木	慎也
深谷	英則
佐藤	勇貴
松浦	壮
本多	正純
三角	樹弘
原岡	喜重



数物 共同研究者のみなさん

物理



Shoto Aoki



Tetsuya Onogi



Satoshi
Yamaguchi

数学



Mikio Furuta



Shinichiroh Matsuo

物理屋でもわかるDirac演算子指数プロジェクト

- Atiyah-Patodi-Singer (APS)指数の物理屋フレンドリな定式化[F, Onogi, Yamaguchi 2017]
- APS指数（Atiyah-Singer 指数も含む）の物理屋フレンドリな定式化の数学的証明
[F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2019]
- 格子ゲージ理論への応用(ただし, flat な場合で摂動論のみ)[F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi 2019]
- 奇数次元 Mod-two APS 指数への応用 [F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]
- Atiyah-Singer 指数(境界のない場合)を格子理論で非摂動的に定式化 [Aoki, F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi 2024]
- APS指数を格子理論で非摂動的に定式化
[Aoki, F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi 2025]

連続理論

格子理論

Topic today.

Dirac 演算子の指数 (通常 の 定義)

$$n_+ - n_- = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma})$$

Atiyah-Singer 指数定理
(ゲージ理論のトポロジーの理解に重要！)

$$\text{Ind} D = n_+ - n_-$$

Massless Dirac 演算子の **カイラル** なゼロモードの個数で与える。

境界のある場合は、**カイラル対称性を保つため**に、
非局所的な (Atiyah-Patodi-Singer) 境界条件が必要。

物理屋フレンドリな指数とは？

私たちの物理屋フレンドリな定義

$$= S.F.(\gamma_5(D - sM)), \quad s \in [-1, 1]$$

massive Dirac 演算子の質量を正から負に変えたときの固有値がゼロを横切る数 (スペクトル流) で与える。

- η 不変量でも書ける(後述)。

境界を考えたいときは質量項のドメインウォールで与える。

カイラル対称性を考えなくてよい。

境界条件を考えなくてよい。

物理屋フレンドリな指数格子理論版

連続理論とほとんど同じ。

$$= S.F.(\gamma_5(D_W - sM)), \quad s \in [-1, 1]$$

massive Wilson Dirac 演算子の質量を正から負に変えたときの固有値がゼロを横切る数(スペクトル流)で与える。

* η 不変量でも書ける。

境界を考えたいときは質量項のドメインウォールで与える。

カイラル対称性を考えなくてよい。

境界条件を考えなくてよい。

ただし、**doubler**を数えないように注意。Aoki相も避けること。

オーバーラップDirac演算子指数との比較

[Neuberger 1998,
Hasenfratz et al. 1998]

Overlap Dirac 演算子 : Wilson-Dirac 演算子の複雑な関数。

Ginsparg-Wilson (GW)関係式による厳密なカイラル対称性。

カイラルなゼロモードで定義 $\text{Ind} D_{\text{ov}} = n_+ - n_-$

ただし、今のところ周期正方格子=偶数次元平坦なトーラス T^{2n} 限定。

私たちの物理屋フレンドリな定式化では

- massive Wilson Dirac演算子で定式化: GW 関係式が不要。
- 境界付きの場合も閉多様体& domain-wall質量項で統一的に扱える:
境界条件が不要。
- K理論による厳密な数学的証明および一般化
平坦な偶数次元トーラスを超えて様々な系に応用が可能。
偶数奇数次元どちらも可能。境界はあってもなくてもよい。
境界は曲がっていてもよい(重力場も扱える)。
整数値指数も mod 2 指数も可能。

Contents



1. Introduction

質量項を持つ格子Dirac演算子で指数を定式化しよう。

2. 格子上のカイラル対称性とoverlap 演算子の指数(review)

3. K理論とは

4. Massless Dirac (K^0 群) vs. massive Dirac (K^1 群)

5. 格子理論における指数の定義

6. 数値計算

7. まとめ

連続の微分演算子 → 格子の差分演算子

連続理論 Dirac 演算子

$$D\psi(x) = \gamma^\mu (\partial_\mu) \psi(x) = \int dp \gamma^\mu (i \mathbf{p}_\mu) \tilde{\psi}(p) e^{ipx}$$

(naïve) 格子Dirac 演算子

$$D\psi(x) = \gamma^\mu \frac{\psi(x + \hat{\mu}a) - \psi(x - \hat{\mu}a)}{2a} = \int dp \gamma^\mu \frac{e^{ip(x+\hat{\mu}a)} - e^{ip(x-\hat{\mu}a)}}{2a} \tilde{\psi}(p)$$

a :lattice spacing
 $\hat{\mu}$: unit vector in μ direction.

$$= \int dp \gamma^\mu i \frac{\sin p_\mu a}{a} \tilde{\psi}(p) e^{ipx}.$$

ゼロ点がたくさん。

$$p_\mu = 0, \quad \frac{\pi}{a}$$

(物理) ダブラーが現れた！

(数学) Ellipticity [uniqueness of zero points] が失われた！

Wilson Dirac 演算子

a :lattice spacing

$\hat{\mu}$: unit vector in μ direction.

$$D_W = \sum_{\mu} \left[\gamma^{\mu} \frac{\nabla_{\mu}^f + \nabla_{\mu}^b}{2} - \frac{a}{2} \nabla_{\mu}^f \nabla_{\mu}^b \right]$$

$$\nabla^f \psi(x) = \frac{\psi(x + \hat{\mu}a) - \psi(x)}{a}$$

$$\nabla^b \psi(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x - \hat{\mu}a)}{a}$$

赤字の項はLapracianに相当。Fourier 変換すると

$$\sum_{\mu} \gamma^{\mu} i \frac{\sin p_{\mu} a}{a} + \sum_{\mu} \frac{(1 - \cos p_{\mu} a)}{a} = \text{Large mass term}$$

Except for $p_{\mu} = 0$

ダブラーに重い質量を持たして理論から取り除き、楕円性も回復。
そのかわりカイラル対称性 (Z_2 grading) を失う:

$$\gamma_5 D_W + D_W \gamma_5 \neq 0.$$

Nielsen-Ninomiya 定理 [1981]

Nielsen-Ninomiya 定理[1981]:

格子Dirac演算子が $\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$, を満たすときダブラー
は現れてしまう。

(カイラル対称性と楕円性は両立しない)

Ginsparg-Wilson 関係式 [1982]

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D.$$

NN 定理の回避法。しかし、具体形は約20年間見つからず。

Overlap Dirac 演算子 [Neuberger 1998]

$$D_{ov} = \frac{1}{a} (1 + \gamma_5 \text{sgn}(H_W)) \quad H_W = \gamma_5 (D_W - M) \quad M = 1/a$$

はGinsparg-Wilson関係式を満たす:

$$\gamma_5 D_{ov} + D_{ov} \gamma_5 = a D_{ov} \gamma_5 D_{ov}$$

$$\gamma_5 (1 - a D_{ov}/2) \gamma_5 D_{ov} + \gamma_5 D_{ov} \gamma_5 (1 - a D_{ov}/2) = 0.$$

➡ $\Gamma_5 H + H \Gamma_5 = 0.$

$$H = \gamma_5 D_{ov}, \quad \Gamma_5 = \gamma_5 \left(1 - \frac{a D_{ov}}{2} \right)$$

= a modified exact chiral
symmetry (but $\Gamma_5^2 \neq 1$.)

Overlap 演算子の指数

[Hasenfratz et al. 1998]

Overlap 演算子の固有値は複素平面の円上に分布。
複素固有モードは以下を満たす。

$$\psi_\lambda^\dagger \gamma_5 \left(1 - \frac{aD_{ov}}{2} \right) \psi_\lambda = 0. \quad D_{ov} \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$$

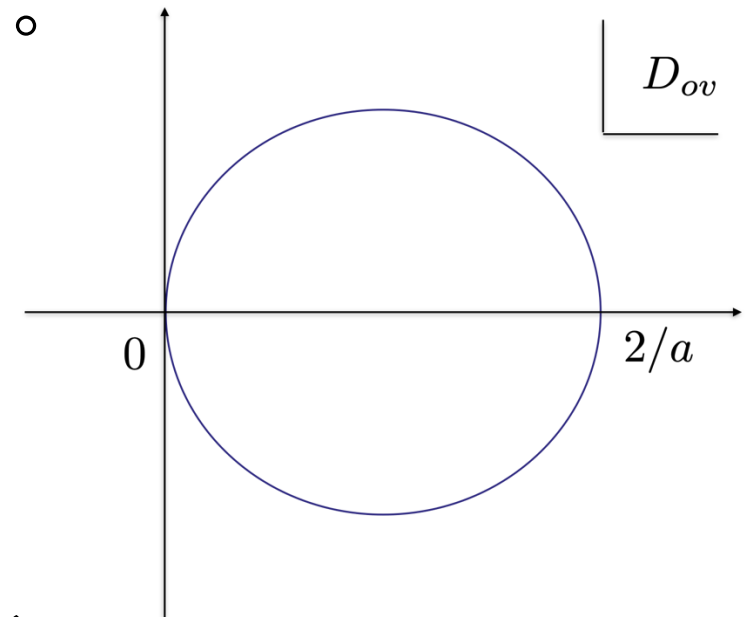
(以下のトレースには寄与しない).

$2/a$ (doubler poles) の実固有モードも寄与しない。

→ 指数が定義できる！

$$\text{Tr} \gamma_5 \left(1 - \frac{aD_{ov}}{2} \right) = \text{Tr}_{\text{zero-modes}} \gamma_5 = n_+ - n_-$$

a : lattice spacing



でも D_{ov} の定義をよく見ると、、、

$$D_{ov} = \frac{1}{a} (1 + \gamma_5 \text{sgn}(H_W)) \quad H_W = \gamma_5 (D_W - M) \quad M = 1/a$$

$$\begin{aligned} \text{Ind} D_{ov} &= \text{Tr} \gamma_5 \left(1 - \frac{a D_{ov}}{2} \right) = \underbrace{\text{Tr} \frac{\gamma_5}{2}}_{=0} - \frac{1}{2} \text{Tr} \text{sgn}(H_W) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \text{sgn}(H_W) \end{aligned}$$

でも D_{ov} の定義をよく見ると、 、 、

$$D_{ov} = \frac{1}{a} (1 + \gamma_5 \text{sgn}(H_W)) \quad H_W = \gamma_5 (D_W - M) \quad M = 1/a$$

$$\begin{aligned} \text{Ind} D_{ov} &= \text{Tr} \gamma_5 \left(1 - \frac{a D_{ov}}{2} \right) = \underbrace{\text{Tr} \frac{\gamma_5}{2}}_{=0} - \frac{1}{2} \text{Tr} \text{sgn}(H_W) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \text{sgn}(H_W) \end{aligned}$$

What is this ???

Massive Wilson Dirac 演算子の η 不変量

$$-\frac{1}{2}\text{Tr sgn}(H_W) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_{H_W}} \text{sgn}(\lambda_{H_W}) = -\frac{1}{2}\eta(H_W)$$

$$\lambda_{H_W} : H_W = \gamma_5(D_W - M) \quad \text{の固有値}$$
$$M = 1/a$$

これは Atiyah-Patodi-Singer の η 不変量
(of the massive Wilson Dirac operator)
として知られている量。

[Atiyah, Patodi and Singer, 1975]

The Wilson Dirac 演算子と K-理論

$$\text{Ind} D_{ov} = -\frac{1}{2}\eta(H_W)$$

$$H_W = \gamma_5(D_W - M)$$

$$M = 1/a$$

このトークでは、右辺の η 不変量が数学的に由緒正しい量であることを示し、K-理論 [Atiyah-Hilzebruch 1959, Karoubi 1978…]

によって、massive Wilson Dirac 演算子が格子理論のトポロジーを理解するのに (overlap 演算子より) 役立つことを示したい。

	Overlap Dirac operator	Wilson Dirac operator
カイラル対称性	○	X
トポロジー	○	◎

Contents

✓ 1. Introduction

質量項を持つ格子**Dirac**演算子で指数を定式化しよう。

✓ 2. 格子上のカイラル対称性とoverlap 演算子の指数(review)

overlap演算子はカイラル対称性とトポロジーの両方を格子上に実現する。しかし、指数は**Wilson Dirac**演算子の η 不変量と一致。

3. K理論とは

4. Massless Dirac (K^0 群) vs. massive Dirac (K^1 群)

5. 格子理論における指数の定義

6. 数値計算

7. まとめ

ファイバー束とは

時空(=底空間) と場 (= ファイバー)をまとめて一つの多様体とみたもの。

$$\phi(x) \rightarrow (x, \phi) \in X \times F$$

Spacetime
= base space

Field space
= fiber space

直積の構造は局所的に成り立つだけ。大域的には“接続”(=ゲージ場)によって “twisted”.

数学では全空間を E とか $E \rightarrow X$ で表す。

ファイバー束のアナロジー

X base space (space-time)

= your head

F fiber (field)

= your hair

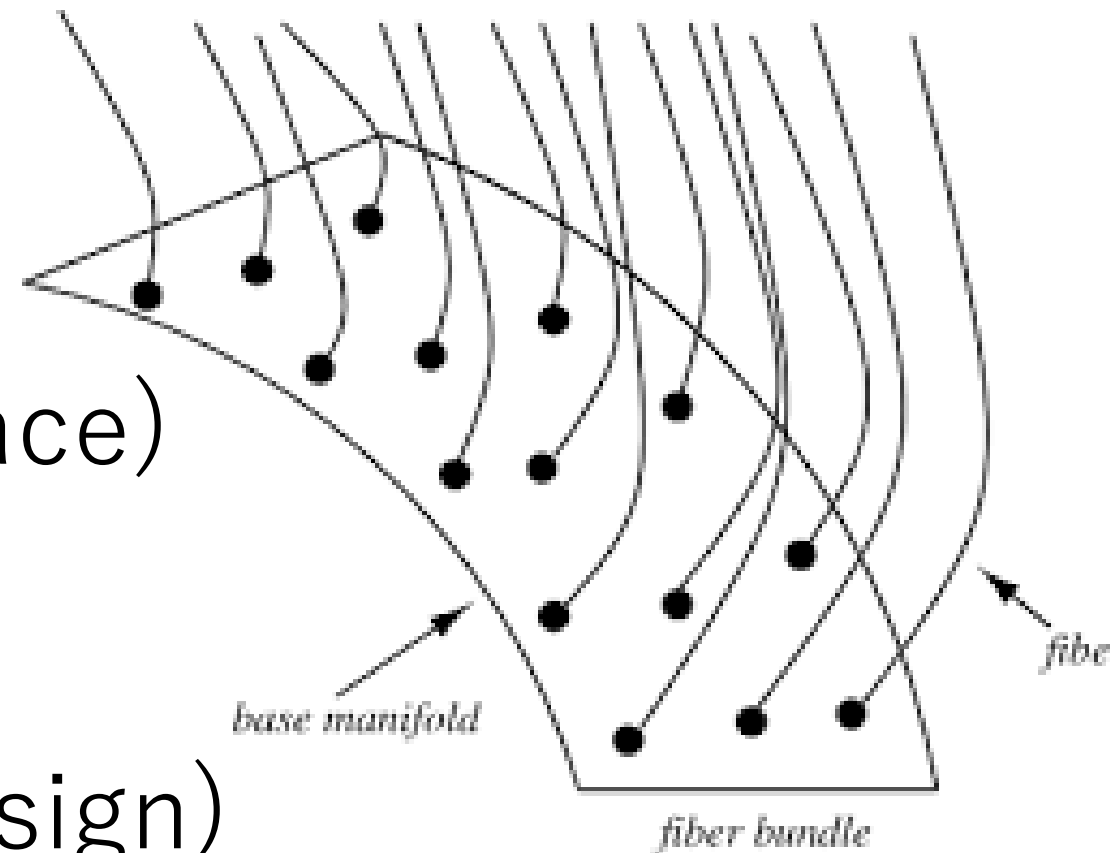
E (= locally $X \times F$) (total space)

= your hair style

Connection

= hair wax (local hair design)

Figure from Wolfram Math world



ベクトル束の分類

ファイバーがベクトル空間のときの束をベクトル束という.

ベクトル束 E_1 と E_2 の違いの分類をしたい。

ホモトピー理論が完璧な分類を与えることが証明されている。しかし、ホモトピーの計算は難しい。

K理論は完璧ではないが、ベクトル空間のランクが十分高いとき、束を分類できる一般コホモロジー理論。(more powerful than the standard (de Rham) cohomology theory).

$K^0(X)$ group

$K^0(X)$ 群の元はベクトル束のペアの同値類 $[E_1, E_2]$
(同値の定義は後述。)

次の演算子および共役を考えて

$$D_{12} : E_1 \rightarrow E_2 \quad D_{12}^\dagger : E_2 \rightarrow E_1$$

* To be precise, D acts on the sections of E .

$[E, D, \gamma]$ を元として定義しても等価な群が得られる。

ただし、 $E = E_1 \oplus E_2$, $D = \begin{pmatrix} & D_{12} \\ D_{12}^\dagger & \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

K^0 群の元=カイラル対称性を持つDirac演算子の同値類

K-theory pushforward

ベクトル束の大域的な構造のみに興味があるとき、次のK-theory pushforward (~ “integration over X ”) によって局所的な情報を“忘れる”ことができる。

$$G : K^0(X) \rightarrow K^0(\text{point})$$

$$[E, D, \gamma] \rightarrow [H_E, D, \gamma] \quad \text{The map just forgets } X.$$

H_E : The whole Hilbert space on which D acts.

いろんな情報が失われるが 一つ (Dirac operator index)残る。

懸垂同型

“点”を線に引き伸ばす。



以下の同型が知られている。

$$K^0(\text{point}) \cong K^1(I, \partial I)$$

One-parameter deformation of Dirac operator

$$[H_E, D, \gamma] \leftrightarrow [p^* H_E, D_t]$$

p^* : pull-back of $p : I \rightarrow \text{point}$.
we omit in the following.

添字の“1”はカイラル演算子を1つ減らすことに対応。

* The Dirac operator must become one-to-one (no zero mode) at the two endpoints : ∂I

この同型の物理的な意味は次のsectionで。

Contents

✓ 1. Introduction

質量項を持つ格子Dirac演算子で指数を定式化しよう。

✓ 2. 格子上のカイラル対称性とoverlap 演算子の指数(review)

overlap演算子はカイラル対称性とトポロジーの両方を格子上に実現する。しかし、指数はWilson Dirac演算子の η 不変量と一致。

✓ 3. K理論とは

ベクトル束を分類する一般コホモロジーの一種。今回は $K^1(I, \partial I)$ が重要。

4. Massless Dirac (K^0 群) vs. massive Dirac (K^1 群)

5. 格子理論における指数の定義

6. 数値計算

7. まとめ

Atiyah-Singer 指数

$$\overbrace{n_+ - n_-}^{\text{Ind}(D)} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma})$$

#sol with + chirality #sol with - chirality

Index theorem

通常の定義ではmassless Dirac演算子とカイラルなゼロモードが必要:

$$[H_E, D, \gamma] \in K^0(\text{point}) \quad H_E : \text{Hilbert space}$$

しかし、これが $[H_E, \gamma(D + m)] \in K^1(I, \partial I)$

と同型であることを以下で説明する。

連続理論における massive Dirac 演算子の固有値

$$H(m) = \gamma_5(D_{\text{cont.}} + m)$$

Gauge group is U(1) or SU(N)

もともとのゼロモード

$$D_{\text{cont.}}\phi = 0, \quad H(m)\phi = \gamma_5 m \phi = \underbrace{\pm}_{\text{chirality}} m \phi.$$

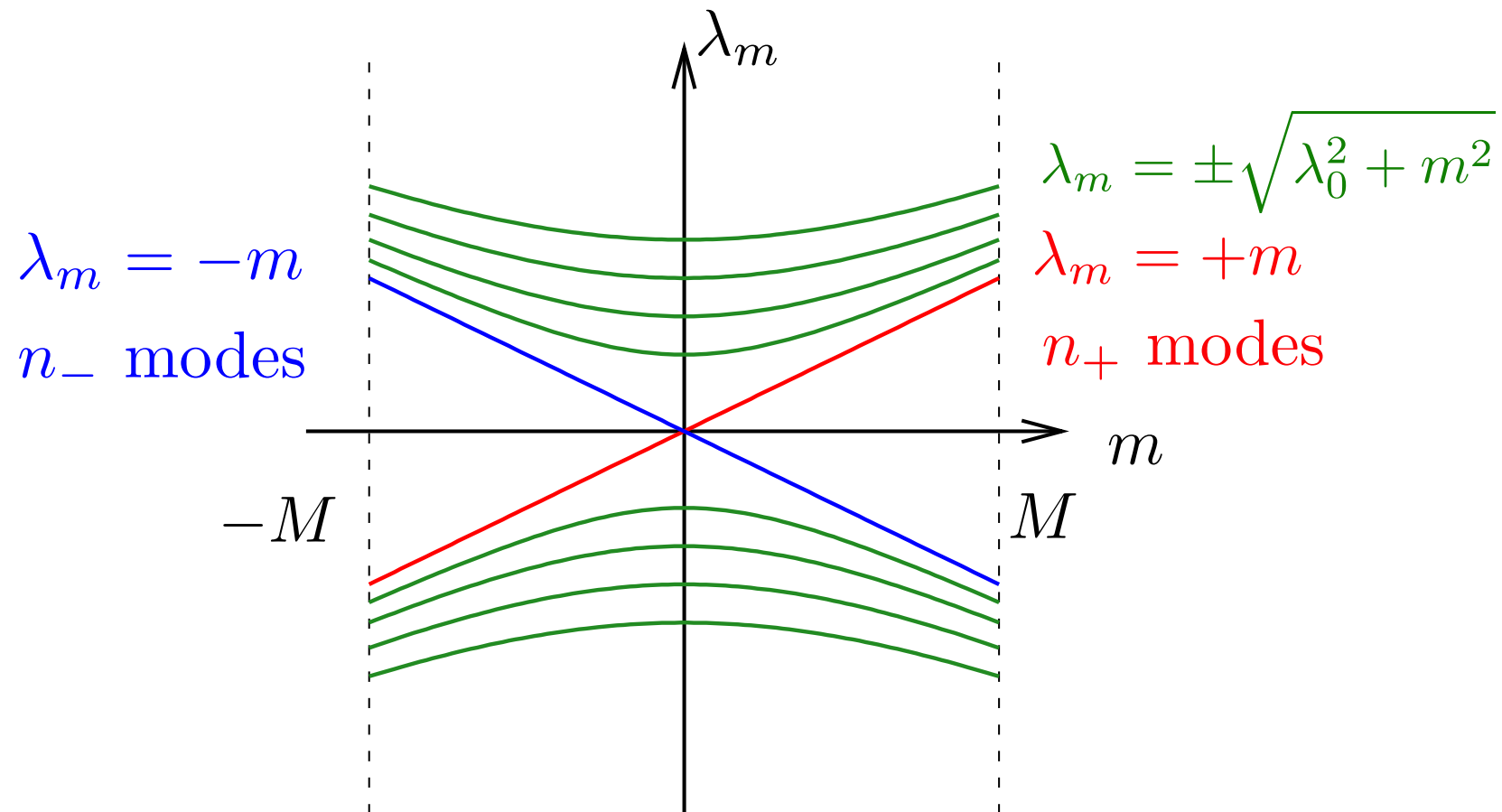
非ゼロモード $D_{\text{cont.}}\phi \neq 0, \quad \{H(m), D_{\text{cont.}}\} = 0.$

の固有値は±のペアを作る:

$$H(m)\phi_{\lambda_m} = \lambda_m \phi_{\lambda_m} \quad H(m)D_{\text{cont.}}\phi_{\lambda_m} = -\lambda_m D_{\text{cont.}}\phi_{\lambda_m}$$

$$H(m)^2 = -D_{\text{cont.}}^2 + m^2 \quad \longrightarrow \quad \lambda_m = \pm \sqrt{\lambda_0^2 + m^2}$$

$H(m) = \gamma_5(D_{\text{cont.}} + m)$ の固有値分布



スペクトル流 = η 不変量

n_+ = - から + へ符号を変える固有値の数

n_- = + から - へ符号を変える固有値の数

$$H(m) = \gamma_5 (D_{\text{cont.}} + m)$$

$$n_+ - n_- =: \text{spectral flow of } H(m) \quad m \in [-M, M]$$

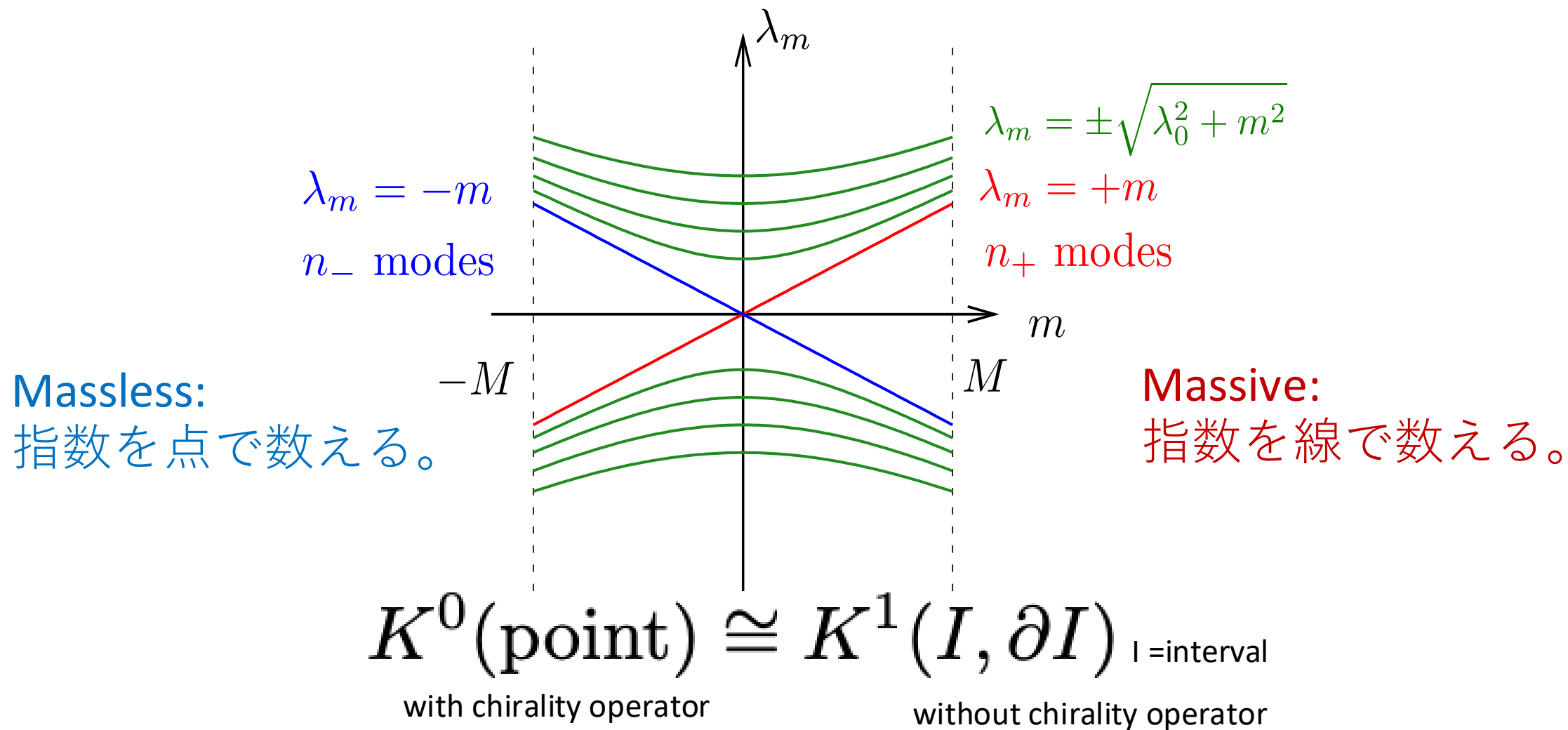
この量は η 不変量 (固有値が符号をかえると2ずつ jump する量), $\eta(H(m))$ でも書ける。

$$\frac{1}{2}\eta(H(M)) - \frac{1}{2}\eta(H(-M)) = n_+ - n_-.$$

$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{\text{reg}} - \sum_{\lambda < 0}^{\text{reg}}$$

Pauli-Villars subtraction

K 理論における懸垂同型の物理的な意味

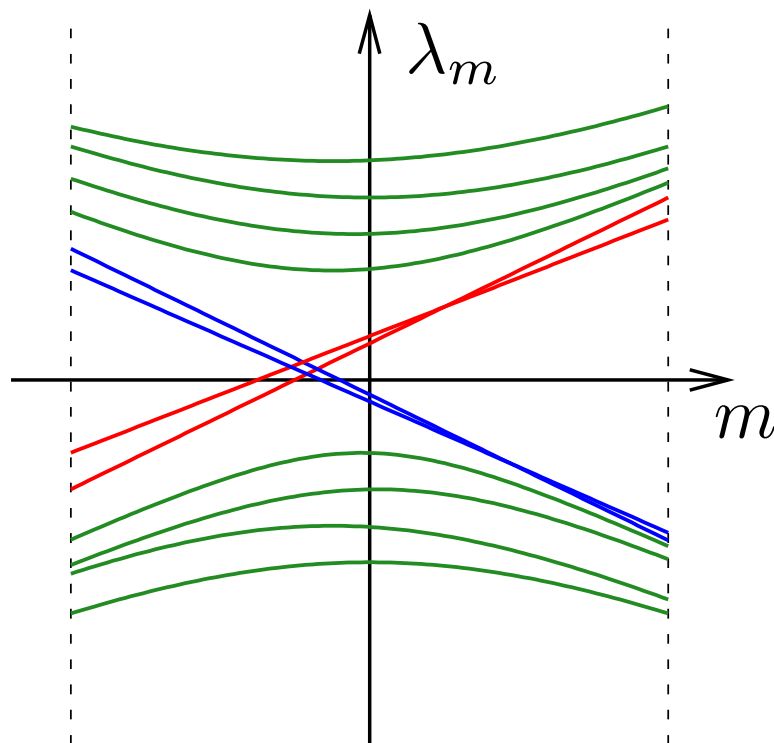


\Rightarrow 2つの定義は必ず一致する。

(格子理論で) カイラル対称性が破れると固有値分布が歪む。点で数える(**massless**)ことは難しくなるが線で数える(**massive**)ことは可能。

通常の変義:

$m=0$ の点が定義できない。ゼロモードも定義できない。



K^1 群による定義:

$m = \pm M$ の端点できちんとギャップが開いていれば線で数えるのは容易。

Note) Wilson Diracのspectral flowで指数を評価できることは、Itoh-Iwasaki-Yoshie 1987 によって示されていた！
[K理論についての言及はない]
(See also Adams, Kikukawa-Yamada, Luescher, Fujikawa, and Suzuki)

K理論のまとめ

Vector束を分類する一般コホモロジーの一種

Vector束間の写像であるDirac演算子をK群の元と考えることができる。
Massless Diracとmassive Diracの対応は 懸垂同型として得られる。

$$K^0(\text{point}) \cong K^1(I, \partial I)$$

ここで point は $m = 0$, Interval $I = m \in [-M, M]$ に対応。

K¹群の定義にはカイラル対称性は必要ない。

K¹群を特徴づけるのは質量が -MからMに変わったとき負から正、
正から負に変わるDirac演算子の固有値の数の差=spectral flow。
連続のDirac演算子も格子上のWilson Dirac 演算子も同等に扱える。

Reference: 青木匠門 「[K theory のノート](https://sites.google.com/view/shotoaoki/notes?authuser=0)」

<https://sites.google.com/view/shotoaoki/notes?authuser=0>

Contents

- ✓ 1. Introduction
質量項を持つ格子Dirac演算子で指数を定式化しよう。
- ✓ 2. 格子上のカイラル対称性とoverlap 演算子の指数(review)
overlap演算子はカイラル対称性とトポロジーの両方を格子上に実現する。しかし、指数はWilson Dirac演算子の η 不変量と一致。
- ✓ 3. K理論とは
ベクトル束を分類する一般コホモロジーの一種。今回は $K^1(I, \partial I)$ が重要。
- ✓ 4. Massless Dirac (K^0 群) vs. massive Dirac (K^1 群)
指数は点で数える(K^0)よりも線で数える(K^1)ほうが楽。
- 5. 格子理論における指数の定義
- 6. 数値計算
- 7. まとめ

物理屋フレンドリな指数格子理論版

(連続理論とほとんど同じ。)

$$= S.F.(\gamma_5(D_W - sM)), \quad s \in [-1, 1]$$

$$D_W = \sum_i \left[\gamma^i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2} - \frac{a}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b \right] \quad \nabla_i^{f/b} : \begin{array}{l} \text{前方/後方} \\ \text{共変差分演算子} \end{array}$$

massive Wilson Dirac 演算子の質量を正から負に変えたときの固有値がゼロを横切る数(スペクトル流)で数える。

* η 不変量でも書ける。

$$= -\frac{1}{2} \eta(H_W) (= \text{Ind } D_{ov})$$

境界を持つ系への応用

Q.質量を一部の領域だけで変える場合(=domain-wall fermion)どうなるか？

A.その領域だけの**APS** 指数になる。

$$S.F.(\gamma_5 D_{DW}) = S.F.(\gamma_5 (D_{DW}^{\text{cont.}})) = \text{Ind}_{\text{APS}} D^{\text{cont.}}$$



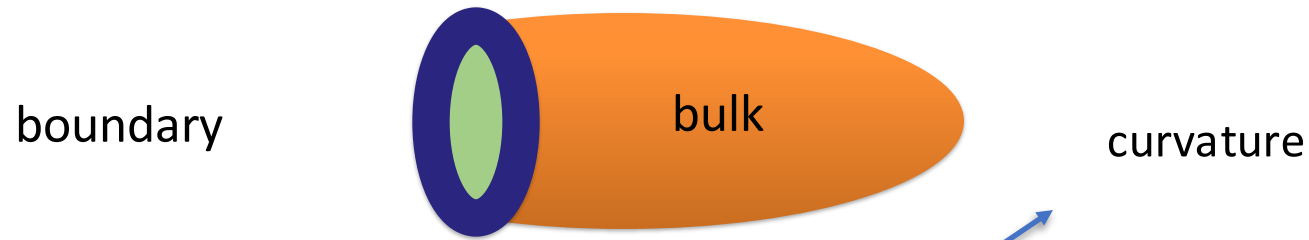
[perturbative equality by F, Kawai, Matsuki,
Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi 2019
Mathematical proof on-going].



[F, Furuta, Matuso, Onogi,
Yamaguchi, Yamashita 2019].

Cf) overlap Dirac演算子に境界条件を与えると Ginsparg-Wilson relationが破れてしまう。[Luescher 2006].

Atiyah-Patodi-Singer index theorem [1975]



$$\text{Ind}(D_{\text{APS}}) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{x_4 > 0} d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}[F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{3\text{D}})}{2}$$

$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{\text{reg}} - \sum_{\lambda < 0}^{\text{reg}}$$

* 平坦な4次元の例

Dirac演算子が実のときのmod-2 指数

K群の代わりにKO群が対応する。Wittenの SU(2) anomaly の起源
=mod-two index : in 5Dも記述可能.

$$KO^0(I, \partial I) \quad \rightarrow \quad S.F. \cdot_{mod2}(D_W - sM) = S.F. \cdot_{mod2}(D^{\text{cont.}} - sM)$$
$$= \text{Ind}_{\text{mod-two}} D_{\text{cont.}} \quad [\text{F, Furuta, Matsuki, Matuso, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020}].$$

ただし、spectral flowはゼロを横切るペアで数える。

Domain-wall を持つAPS版への拡張も可能。

Overlap Dirac演算子による記述は知られていない。

Mod-two 指数 と mod-two spectral flow

Mod-two指数には2種類あることに注意。

1. 実反Hermite演算子のゼロ固有値の**数**で数える場合

$$D \in KO^{-1}(\text{point})$$

2. 実反Hermite演算子のゼロ固有値の**ペア数**で数える場合

$$\tau_1 \otimes D \in KO^{-2}(\text{point})$$

どちらの場合も **massive operator**の族で

$$D_s = \tau_1 \otimes D - i\tau_2 \otimes sM \in KO^0(I, \partial I)$$

考えると、the mod-two spectral flow = ゼロを横切る固有値ペアの数がもとの mod-two 指数と一致する。

Wilson Dirac 演算子をK群の元として指数を統一的に記述できる。

質量を変えてDirac演算子の固有値がゼロを横切る数を数えるだけ。

境界=domain-wallはあってもなくてもO.K. → APS指数を記述できる。

曲がっていてもO.K. (重力場の記述も可能)

ふつうの整数値指数(ただ数えるだけ)もmod-two指数 (ペアで数える)もどちらも可能。

数学的証明の方針

連続理論の **massive Dirac** 演算子と格子理論の **massive Wilson Dirac** 演算子を K 群の元として比較する。

十分細かい格子間隔で両者が同じ元に属することを背理法で証明。

Wilson 項が演算子の楕円性を保証 \rightarrow **Sobolev** 埋め込み、弱収束などの数学的議論が可能に。

Domain-wall で **APS** 条件を回避できることは、数学的にも新しい結果。

Domain-wall のない場合の証明は [arXiv:2407.17708](https://arxiv.org/abs/2407.17708)

Domain-wall のある場合の証明は現在論文を準備中。

連続理論の Dirac 演算子

E : 複素ベクトル束

底空間 M : $2n$ 次元 平坦なトーラス T^{2n}

ファイバー F : rank r のベクトル空間

接続 : gauge field A_i

D : Dirac operator on sections of E

$$D_{\text{cont.}} = \gamma_i (\partial_i + A_i)$$

Chirality (Z_2 grading) operator: $\gamma = i^n \prod_i \gamma_i$

$$\{\gamma, D\} = 0, \{\gamma, \gamma_i\} = 0.$$

Lattice link variables

トーラス \mathbb{T}^{2n} を格子間隔 a の正方格子で正則化。

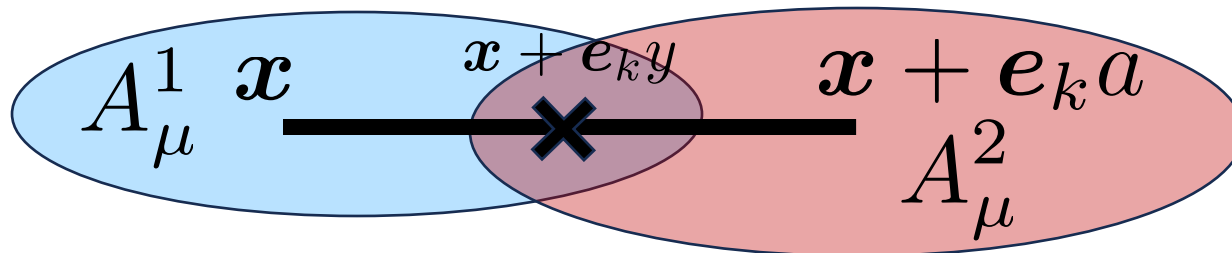
(ファイバー空間は連続のまま)

束を E^a で表す。

link variables : $U_k(\mathbf{x}) = P \exp \left[i \int_0^a A_k(\mathbf{x}' + \mathbf{e}_k l) dl \right]$

*) Wilson lineの途中にpatchの重なりが必要なとき

$$U_k(\mathbf{x}) = P \exp \left[i \int_0^y A_k^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k l) dl \right] \underset{\text{Transition function}}{g_{12}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k y)} P \exp \left[i \int_y^a A_k^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k l) dl \right]$$



Note: In our paper, we consider "generalized link variables" to determine the gauge fields both in continuum and on a lattice simultaneously. But the standard Wilson line works, too.

We can show

$$\frac{\partial}{\partial y} U_k(\mathbf{x}) = 0.$$

格子上的Wilson Dirac演算子

$$D_W = \sum_i \left[\gamma^i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2} - \frac{a}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b \right] \quad \text{Wilson term}$$

$$a \nabla_i^f \psi(\boldsymbol{x}) = U_i(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) - \psi(\boldsymbol{x})$$

$$a \nabla_i^b \psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) - U_i^\dagger(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i) \psi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i)$$

*Wilson項は“楕円性”(Fourier 変換したときのゼロ点の一意性)を保証する数学的な役割がある.

$K^1(I, \partial I)$ 群定義

次の **Hilbert 束** を考える。

底空間 I = range of mass $[-M, M]$

端点 $\partial I = \pm M$ points

ファイバー空間 \mathcal{H} = Dirac演算子が作用する Hilbert空間全体

D_m : one-parameter family (質量 m でラベル)

$D_{\pm M}$ はゼロ固有値を持たないと仮定。

同値類 $[(\mathcal{H}, D_m)]$ は **Spectral flow** が等しいか否かで定義する。

注) $K^1(I, \partial I)$ 群にカイラリティ演算子は不要。

$K^1(I, \partial I)$ 群の定義に連続理論の演算子と格子演算子の区別はない。どちらも同等に扱える。

$K^1(I, \partial I)$ 群の定義つづき

群としての作用: $[(\mathcal{H}^1, D_m^1)] \pm [(\mathcal{H}^2, D_m^2)] = [(\mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2, \begin{pmatrix} D_m^1 & \\ & \pm D_m^2 \end{pmatrix})]$

単位元: $[(\mathcal{H}, D_m)]|_{\text{Spec.flow}=0}$

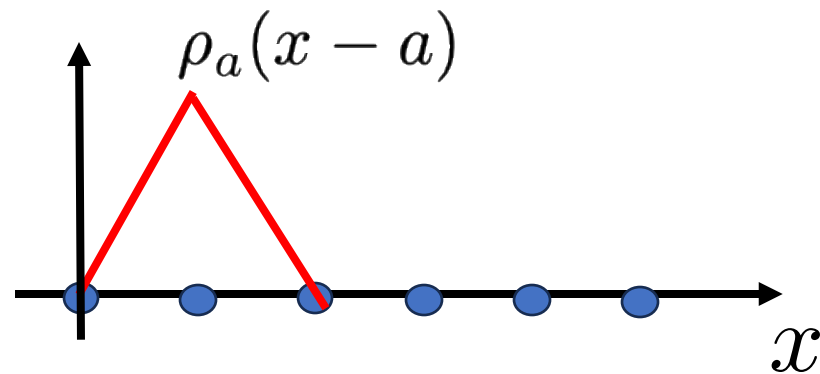
$[(\mathcal{H}_{\text{cont.}}, \gamma(D_{\text{cont.}} + m))]$ と $[(\mathcal{H}_{\text{lat.}}, \gamma(D_W + m))]$ が同じ元であることを示すには差をとり、**連続-格子 混合 Dirac operator**

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D_{\text{cont.}} + m) & \\ & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$$

あるいはそれをさらに連続変形した $\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D_{\text{cont.}} + m) & f_a \\ f_a^* & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$ を考え、その **Spectral flow = 0** を示せば良い。

ただし、 f_a^*, f_a は**連続-格子 混合 質量項**(次のページで定義)。

$$f_a : H^{\text{lat.}} \rightarrow H^{\text{cont.}}$$



は格子上有限次元 Hilbert space から連続理論上無限次元 Hilbert space への写像:

$$f_a \phi(x) := a^n \sum_{z \in \text{lattice sites}} \rho_a(x-z) U(x,z) \phi(z).$$

$U(x,z)$: parallel transport (or Wilson line) \rightarrow ゲージ不変性を保証.

$\rho_a(x-z)$: (多方向-) 線形な重み関数=近傍の格子の寄与を連続的に内挿.

以下の条件が写像の前後でノルムが“ほとんど変わらない”ことを保証。

$$\int_{x \in T^n} \rho_a(x-z) d^n x = 1 \qquad a^n \sum_{z \in \text{lattice sites}} \rho_a(x-z) = 1.$$

$$f_a^* : H^{\text{cont.}} \rightarrow H^{\text{lat.}}$$

逆写像も定義。

$$f_a^* \psi_1(z) := \int_{x \in T^n} \rho_a(z - x) U(x, z)^{-1} \psi_1(x) d^n x.$$

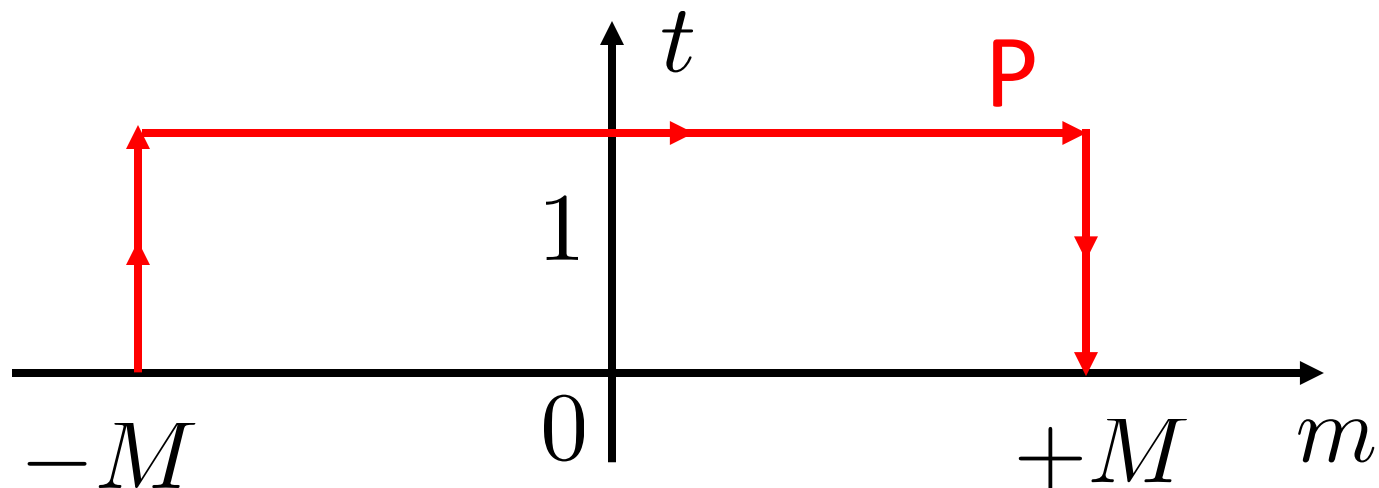
Note $f_a^* f_a$ は **identity** にはならず、近傍に **smeared** された写像になる。(デルタ関数の粗視化)

主定理

次の連続-格子混合Dirac演算子の 1-parameter family

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D_{\text{cont.}} + m) & t f_a \\ t f_a^* & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$$

を以下のpath P 上で考える。



主定理続き

ある有限な 格子間隔 a_0 が存在し、 $a < a_0$ の任意の格子間隔に対して以下を満たす。

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D_{\text{cont.}} + m) & tf_a \\ tf_a^* & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$$

がP上いかなる点においても可逆である(ゼロ固有値がない)

[Spec.flow=0 の十分条件]

$\Rightarrow \gamma(D_{\text{cont.}} + m), \gamma(D_W + m)$ は同じSpectral flowを持つ。

$$\frac{1}{2}\eta(\gamma(D - M))^{\text{PV reg.}} = \frac{1}{2}\eta(\gamma(D_W - M))$$

→ 連続理論と格子理論の指数が一致する。 (論文では背理法で証明)

Contents

✓ 1. Introduction

質量項を持つ格子**Dirac**演算子で指数を定式化しよう。

✓ 2. 格子上のカイラル対称性と**overlap** 演算子の指数(review)

overlap演算子はカイラル対称性とトポロジーの両方を格子上に実現する。しかし、指数は**Wilson Dirac**演算子の η 不変量と一致。

✓ 3. K 理論とは

ベクトル束を分類する一般コホモロジーの一種。今回は $K^1(I, \partial I)$ が重要。

✓ 4. Massless Dirac (K^0 群) vs. massive Dirac (K^1 群)

指数は点で数える(K^0)よりも線で数える(K^1)ほうが楽。

✓ 5. 格子理論における指数の定義

質量を持つ**Wilson Dirac**演算子のスペクトル流で様々な指数を統一的に扱える。

6. 数値計算

7. まとめ

2次元正方格子上の Atiyah-Singer 指数

まずは通常の(反)周期境界を持つ正方格子で次のU(1)ゲージ場

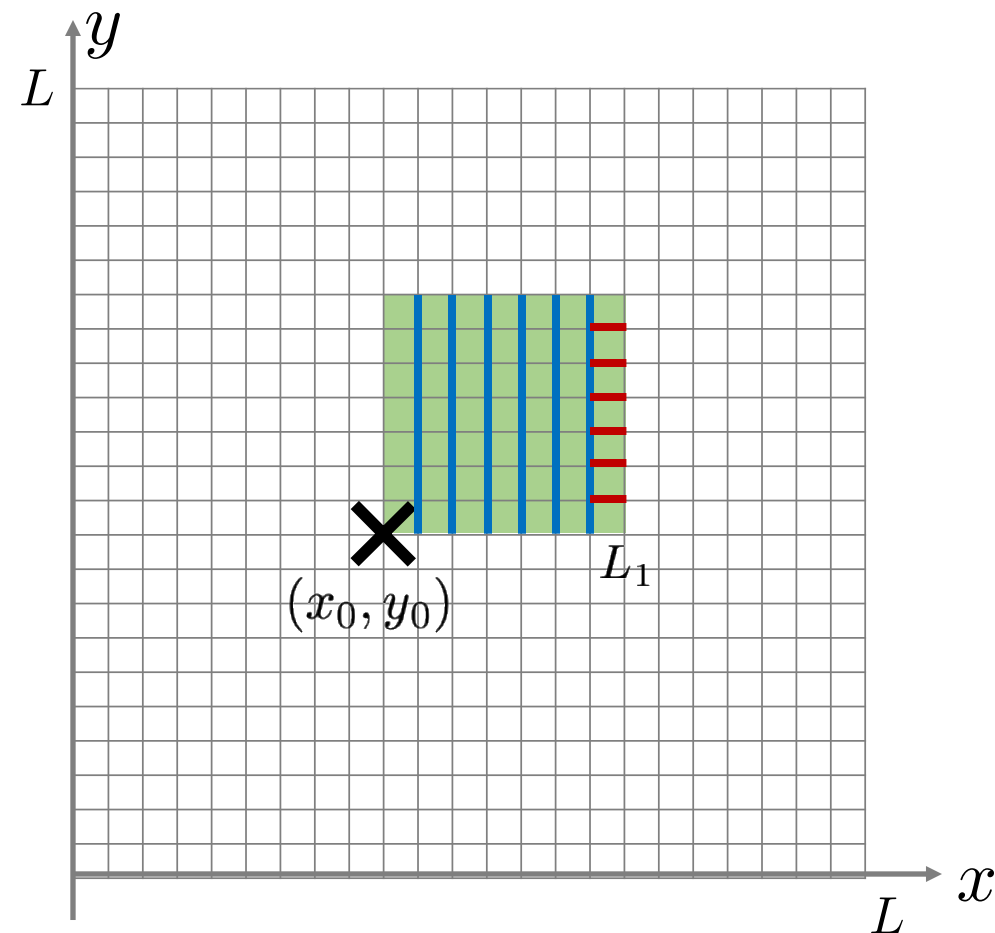
$$U_y(x, y) = \exp \left[i \frac{2\pi Q(x - x_0)a}{L_1^2} \right] \quad U_x(x, y) = \exp \left[-i \frac{2\pi Q(y - y_0)}{L_1} \right]$$

others = 1.

を与える。これは緑の領域で
定数値plaquette

$$U_P(x, y) = \exp \left[i \frac{2\pi Q a^2}{L_1^2} \right]$$

を与え、**Geometrical 指数=Q**を与える
ことに対応。



This constant curvature background can be extended to any even dimensions with SU(N) gauge connections
[Cf. Hamanaka-Kajiura 2002].

Massive Wilson Dirac演算子

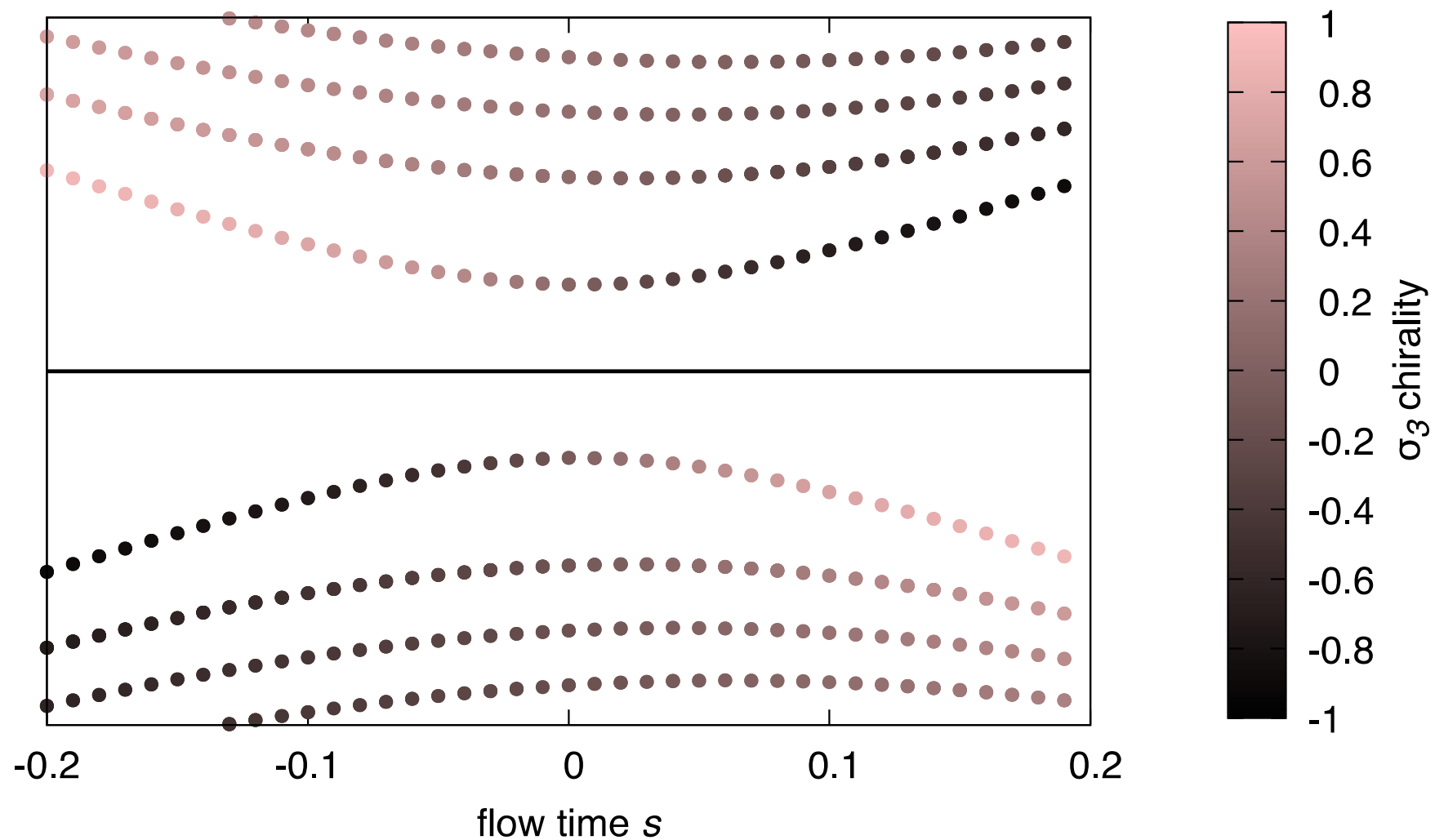
$$\gamma D_W(m) = \gamma \left[\sum_i \left[\gamma^i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2} - \frac{a}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b \right] - sM \right]$$

$$a \nabla_i^f \psi(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - \psi(\mathbf{x}) \quad a \nabla_i^b \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - U_i^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)$$

with periodic b.c. in x-direction and anti-periodic b.c. in y direction. We set L=33 and L1=9.

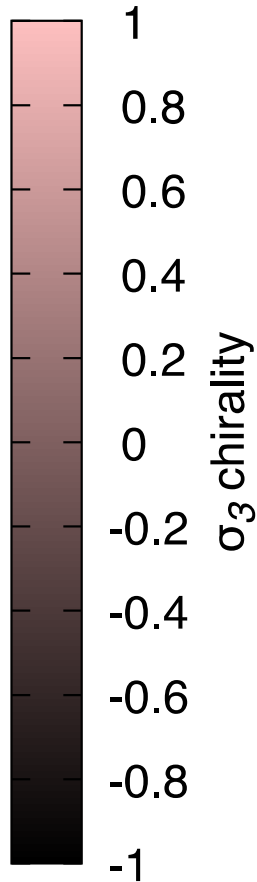
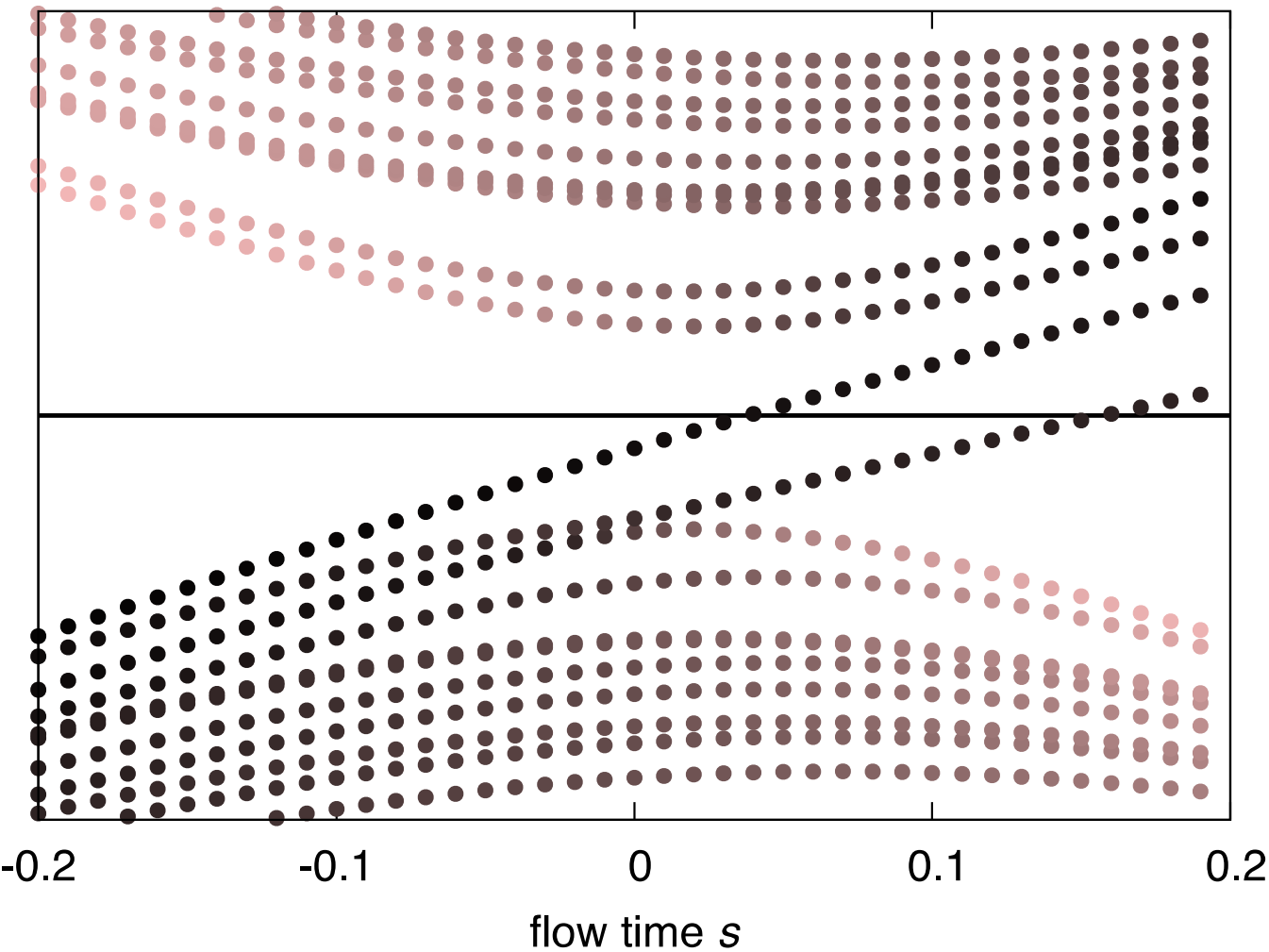
質量項を $s=-1$ から $s=+1$ [s:flow time] まで変化させたときの固有値分布を数値計算する。

Wilson Dirac 固有値分布 at Q=0



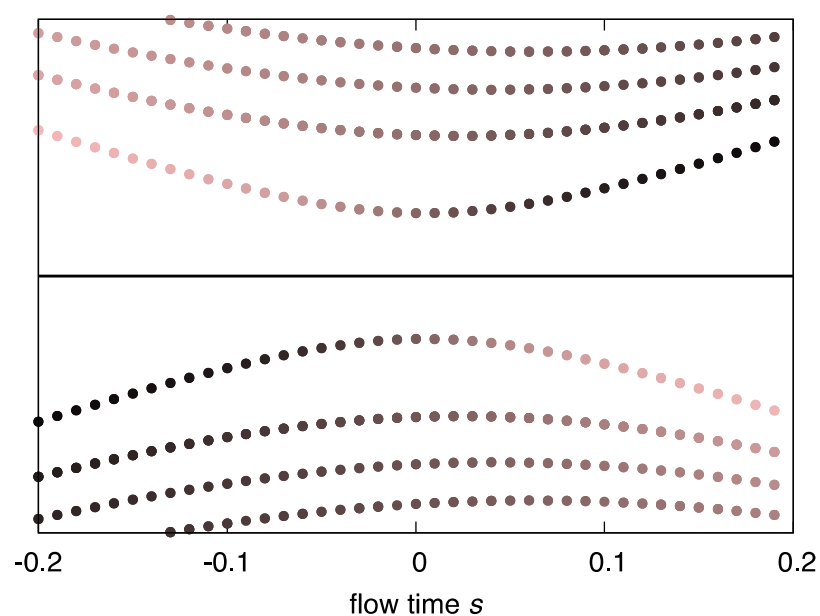
固有値の符号
の変化は
ゼロ:
index=0.

Wilson Dirac 固有値分布 at Q=-2

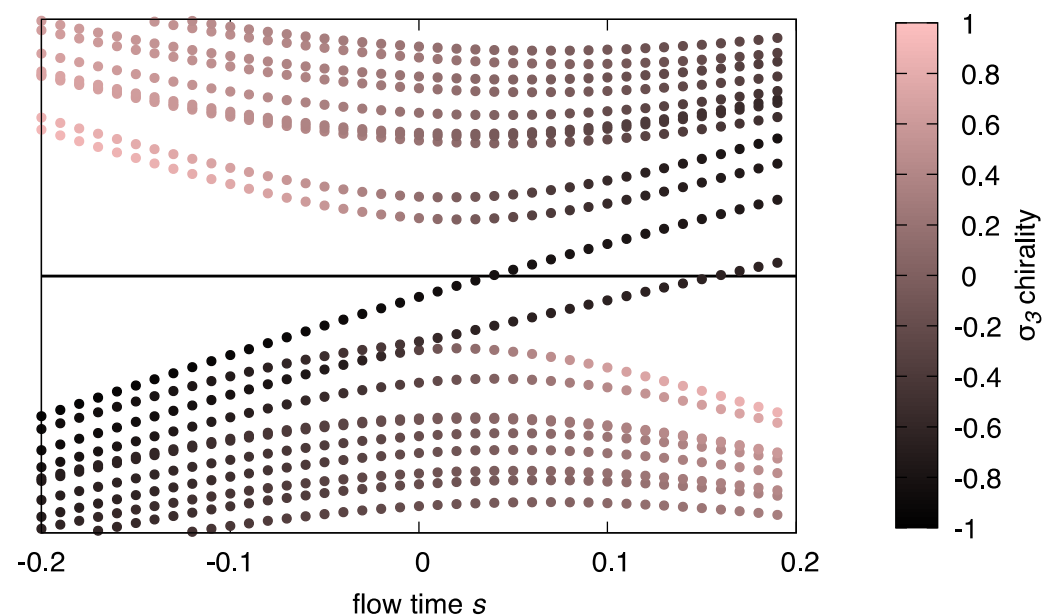


一の固有値
2つが+にな
る: **index=-2**.
Gradationは
chirality.

2次元トーラス上のAtiyah-Singer index定理がよく再現できた。



Index= $Q=0$



Index= $Q=-2$

これはoverlap fermion でもできる。(厳密に等しい)

次に S^1 domain-wall フェルミオンを考える。

質量項は円の内部だけ変化させる：
 $m=-s$ inside, $m=+1$ outside and change s
from -1 to 1 .

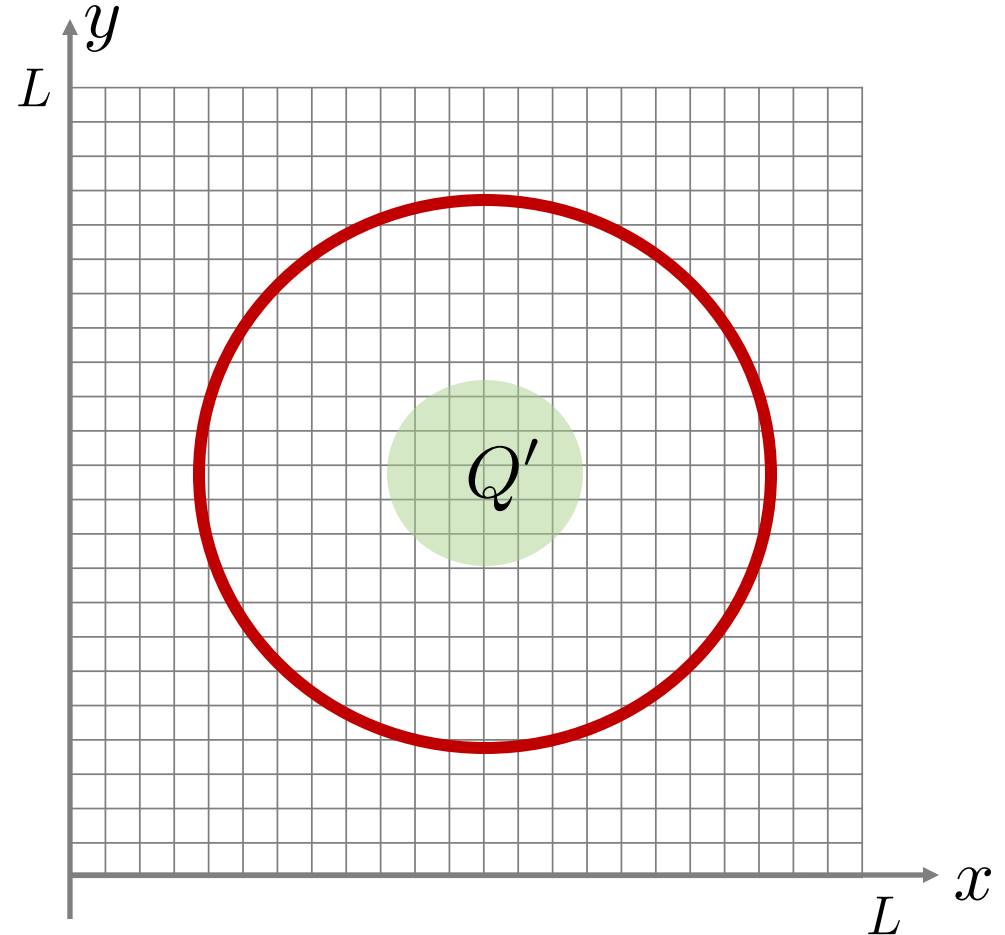
$U(1)$ のflux = Q' になるようにリンク変
数を与える。

Atiyah-Patodi-Singer 指数定理

$$\text{Ind} D_{\text{APS}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int F}_{=Q'} - \frac{1}{2} \eta(iD^{1D})$$

と比較する。

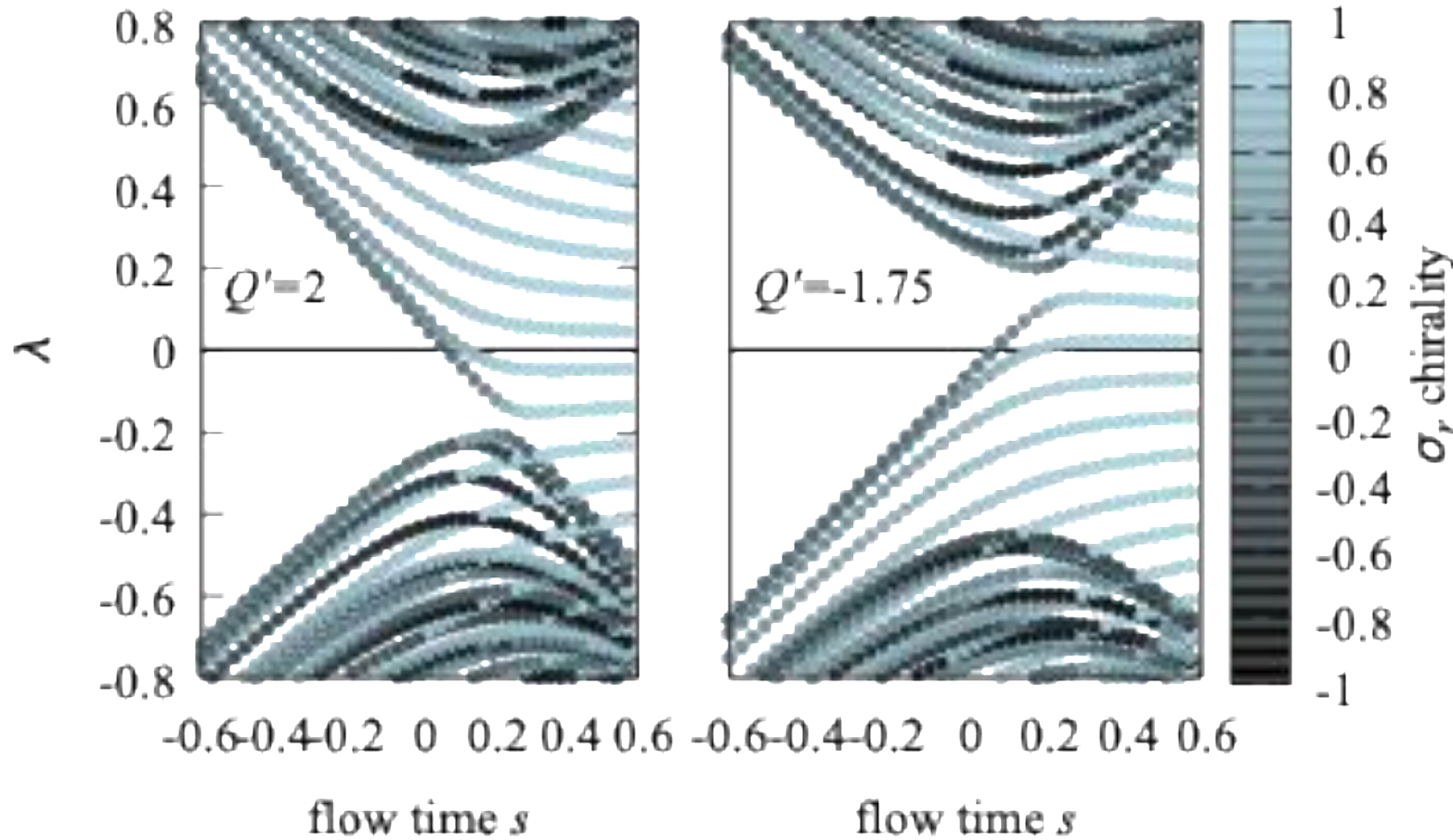
$L=33$, DW radius=10, flux radius=6.



APS 指数 on a 2D disk

$$\text{Ind} D_{\text{APS}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int F}_{=Q'} - \frac{1}{2} \eta(iD^{1D})$$

$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{\text{reg}} - \sum_{\lambda < 0}^{\text{reg}}$$



$$-\frac{1}{2} \eta(iD^{1D}) = 0.$$

$$-\frac{1}{2} \eta(iD^{1D}) = -0.25$$



一次元円状domain-wallに
エッジ状態が現れた。
その分布は”重力場”のある
連続理論の結果と一致
(Aoki-Fukaya 2022, 2023)
-> 非自明な境界の η 不変量

物理屋フレンドリ指数は 2D
disk上のAPS 指数定理をよく
再現。

The boundary eta invariant (details)

[Aoki-F, 2022,2023]

$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda < 0}^{reg}$$

Continuum result for
1D Dirac eigenvalues on a circle

$$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5 D_{DW}) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int F}_{=Q'} - \frac{1}{2}\eta(iD^{1D})$$

$$\lambda_j = \frac{1}{r_0} \left(j + \frac{1}{2} - Q' \right)$$

Gravity
(Spin^c connection)

Aharonov-Bohm effect

$$-\frac{1}{2}\eta(iD^{1D}) = -\frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{\lambda} \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|^{1+s}} = [Q'] - Q'$$

$$\text{Ind} D_{\text{APS}} = [Q'] \quad \text{Gauss symbol: the biggest integer } \leq Q'$$

$$[2] = 2, \quad [-1.75] = -2.$$

最後はMajorana フェルミオン with S^1 domain-wall

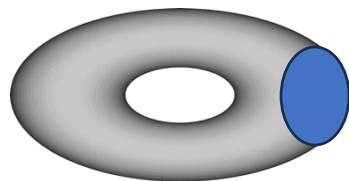
リンク変数がすべて1のとき
Dirac演算子はreal.

$$H_m = \sigma_1 \partial_x + \sigma_3 \partial_y + i\sigma_2(W + M(x))$$

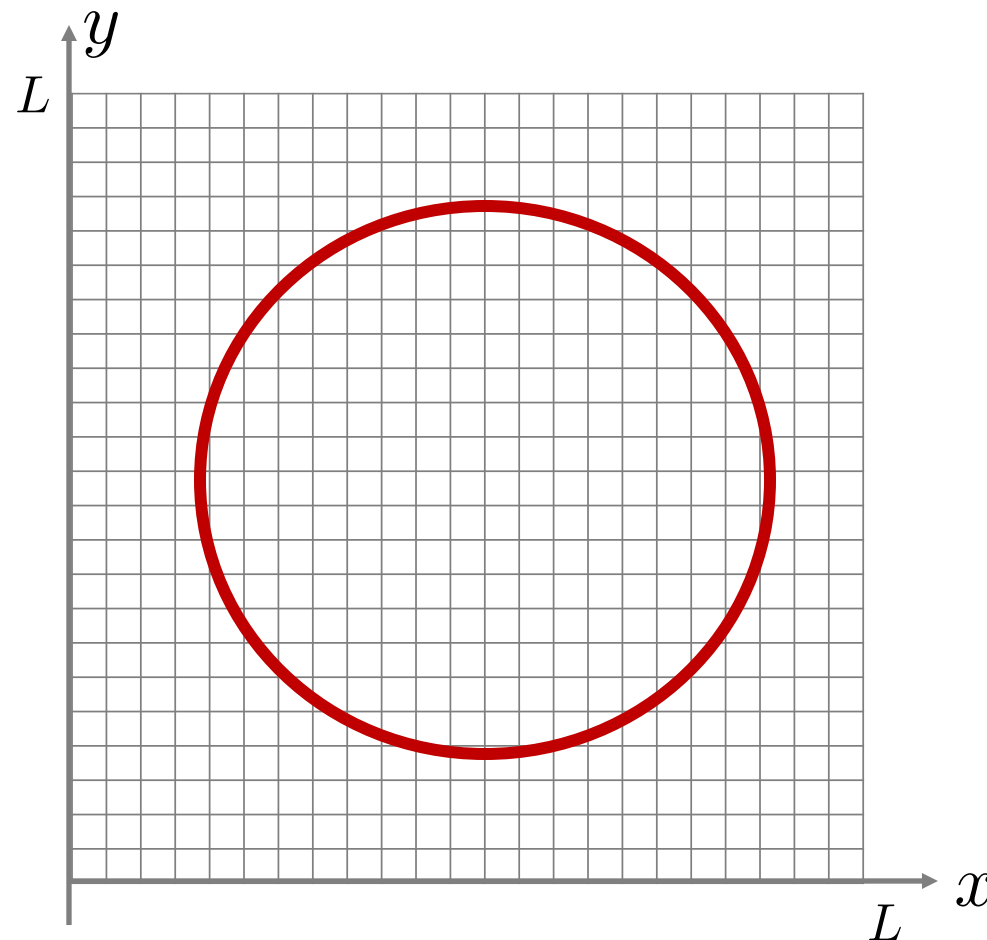
質量項を円の内側だけ変化させる=disk



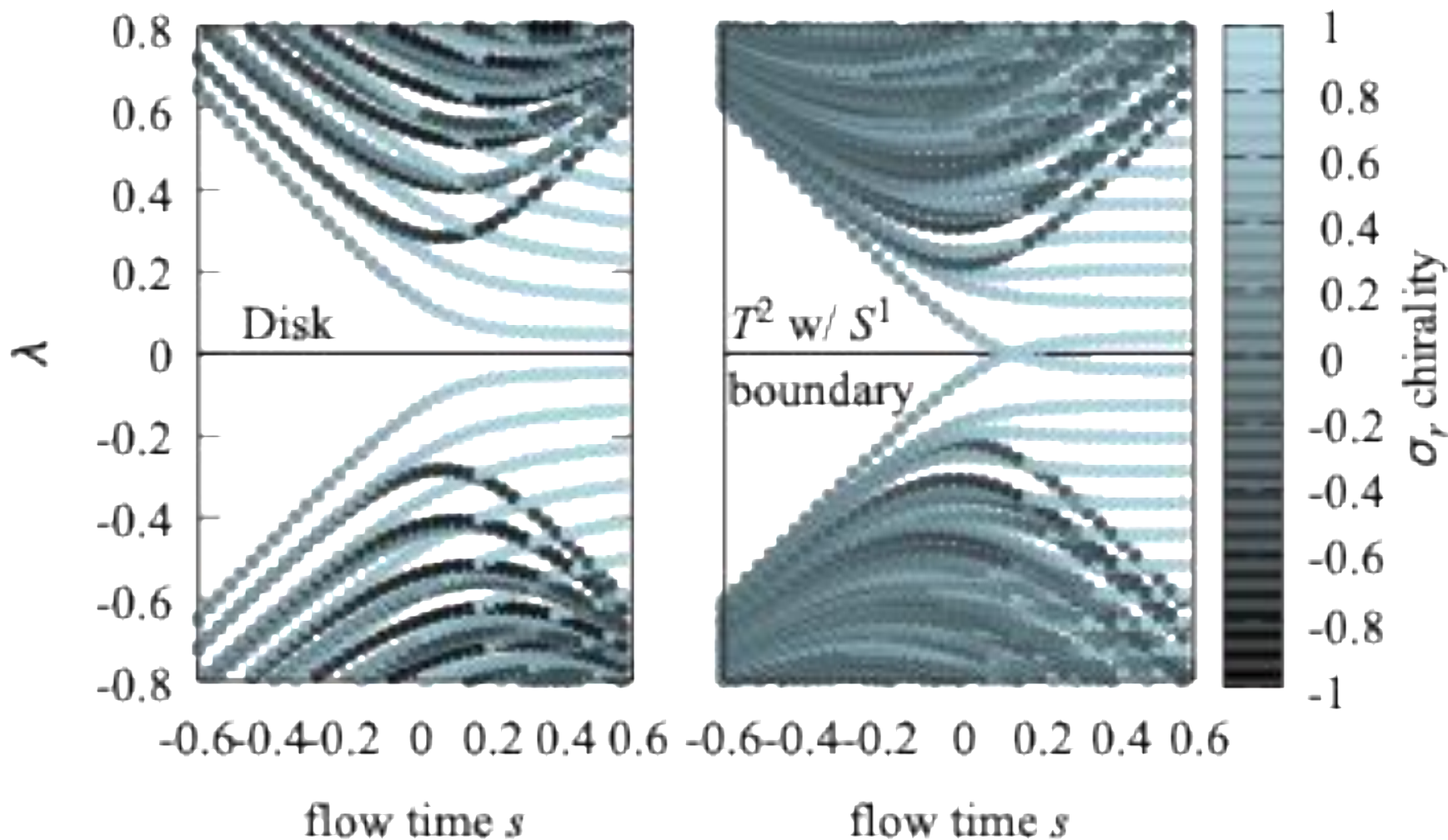
質量項を円の外側だけ変化させる
= torus with a S^1 hole.



それぞれ連続理論で計算される mod-
two APS指数は0 および 1.

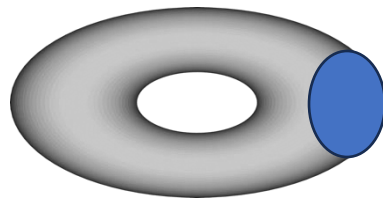


Majorana フェルミオンの mod-2 APS 指数



注) Mod-two spectral flowはゼロを横切る固有値のペア mod 2で数える。

mod-2 APS 指数も再現.



Contents

- ✓ 1. Introduction
質量項を持つ格子Dirac演算子で指数を定式化しよう。
- ✓ 2. 格子上のカイラル対称性とoverlap 演算子の指数(review)
overlap演算子はカイラル対称性とトポロジーの両方を格子上に実現する。しかし、指数はWilson Dirac演算子の η 不変量と一致。
- ✓ 3. K理論とは
ベクトル束を分類する一般コホモロジーの一種。今回は $K^1(I, \partial I)$ が重要。
- ✓ 4. Massless Dirac (K^0 群) vs. massive Dirac (K^1 群)
指数は点で数える(K^0)よりも線で数える(K^1)ほうが楽。
- ✓ 5. 格子理論における指数の定義
質量を持つWilson Dirac演算子のスペクトル流で様々な指数を統一的に扱える。
- ✓ 6. 数値計算
2次元T2, disk, T2 with hole, でAPS指数およびmod-2版も含めて再現できた。
- 7. まとめ

まとめ

正方格子上のWilson Dirac 演算子をK群の元とみなすことで、格子理論におけるDirac演算子の指数を網羅的に定式化できる。

質量を変えてDirac演算子固有値がゼロを横切る数を数えるだけ。

偶数次元に限らず任意の次元で定式化可能。

境界を持つ場合のAPS指数は境界のかわりにdomain-wallを考えればよい。

domain-wall は曲がっていてもよい(重力場も扱える)。

普通の整数値指数もmod-2 指数もどちらも可能。

K理論を用いた厳密な証明により有限格子間隔で定義できることを保証。

注)overlap fermion のindexが定義できているのは平坦な偶数次元torusだけ。

Outlook

バルクも曲げられるか？

複数枚のDomain-wallと junction を考えればできそう。

向き付け不能な場合は扱えるか？

Z_8, Z_{16} 不変量は扱えるか？

η 不変量は扱えるか？

➔ 荒木匠(阪大D1)

“格子理論で探るPin-構造を持つMajorana fermionのアノマリー”

(Araki, F, Onogi, Yamaguchi, in preparation)

[日本物理学会年次大会[9/16(火) 13:45 EK114会場]

RP^2 , Klein bottle, Mobius strip etc. 上のWilson Dirac演算子の pfaffianを用

いて Z_8 不変量=Arf-Brown-Kervaire (ABK) 不変量をよく再現。