

# レフシェツツ・シンブル法で切り拓く 量子論的時間発展のフロンティア

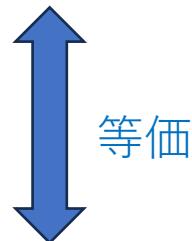
離散的手法による場と時空のダイナミクス2025  
2025年9月10日(水)、明治学院大学(白金キャンパス)

西村 淳 (KEK、総研大)

# 0. はじめに

# 量子時間発展を記述する2つの言葉

## 1) シュレディンガー方程式



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$$



## 2) ファインマン経路積分

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$
$$S = \int L dt$$



優れている点：

- 自由度の大きな系 (場の理論を含む)への適用が可能
- 量子重力 (一般座標不变性) や行列模型 (非摂動的弦理論)への拡張が可能
- 数値シミュレーション という強力な手法が適用できる可能性あり

# 実時間経路積分に関する最近の発展

➤ 量子力学 :

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

➤ 量子重力 (“時間” が力学的自由度の一部)

$$\Psi[h] = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iS[g]/\hbar}$$

➤ IKKT 行列模型 超弦理論の非摂動的定式化

(“時間” という概念の創発)

$$Z = \int dA_\mu e^{iS[A]}$$

位相が回る (振動積分)

概念的な問題: このような振動積分をどのように定義したらいいのか?

→ ピカール・レフシェツツ理論

技術的な問題: シミュレーションにおける符号問題をどう解決するか?

→ レフシェツツ・シンブル法

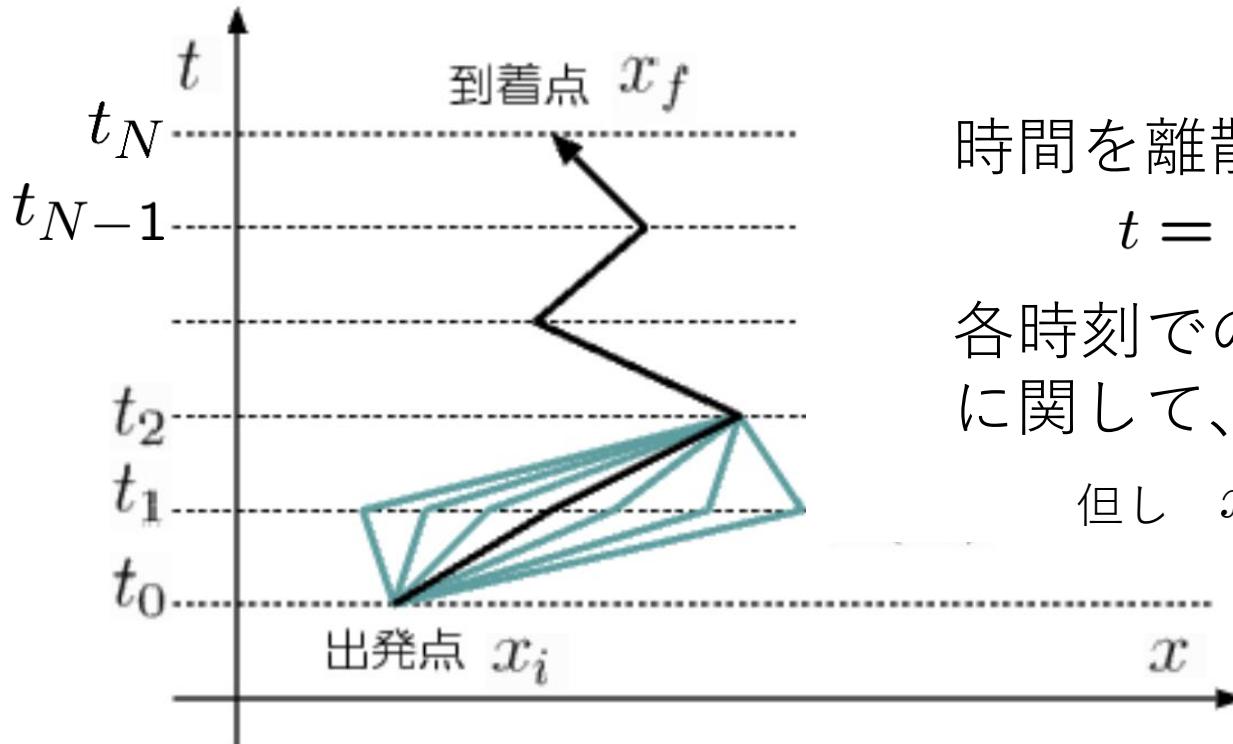
# 目次

0. はじめに
1. 実時間経路積分の数値シミュレーション
2. 量子トンネル効果
3. 量子デコヒーレンス効果
4. 宇宙の始まりにおける量子トンネル効果
5. まとめと展望

# 1. 実時間経路積分の数値シミュレーション

# 実時間経路積分

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$



時間を離散化する

$$t = t_0, t_1, \dots, t_N$$

各時刻での座標  $x_n = x(t_n)$   
に関して、積分を実行する。

但し  $x_N = x_f$  (固定)

$$\Psi(x_N, t_N) = \int dx_0 dx_1 \cdots dx_{N-1} \Psi(x_0, t_0) e^{iS[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] / \hbar}$$

このような多重積分をどう定義し、数値的に計算するか？

# 符号問題

波動関数の実時間発展：

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$

正定値でないので、確率分布と見なすことができない

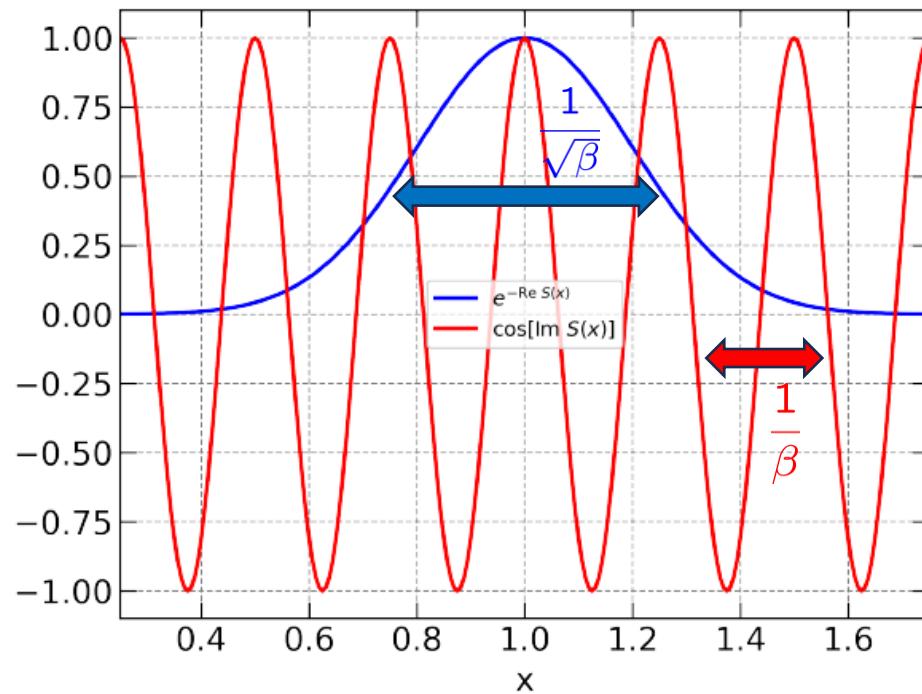
(簡単な例)

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\beta(x-i)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(\beta x) e^{-\frac{1}{2}\beta(x^2-1)} \end{aligned}$$

確率分布と見て  
xを生成

正負の値をとる。 $\beta$ が大きいと、  
激しい相殺を引き起こす

符号問題

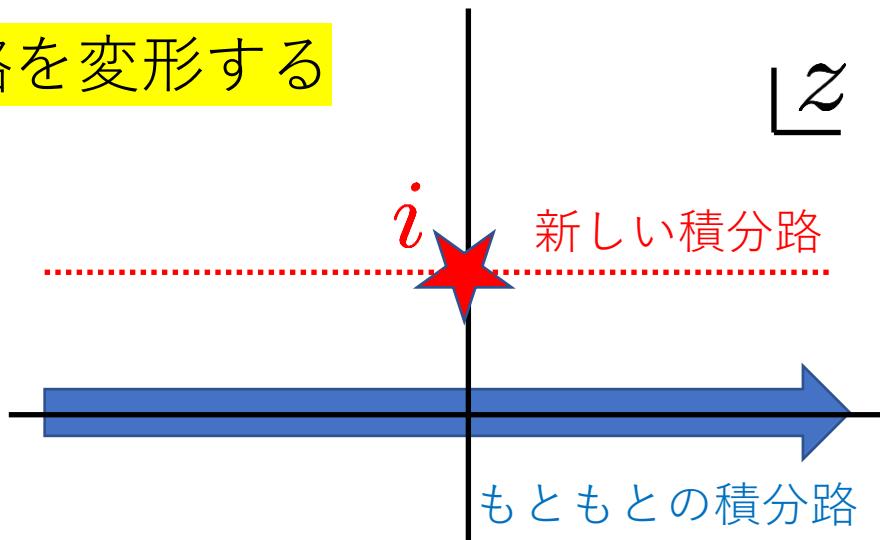


そうだ！ コーシーの定理を使おう！

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\beta(x-i)^2}$$

複素積分  $Z = \int dz e^{-\frac{1}{2}\beta(z-i)^2}$  を実軸に沿って行うことには相当。

積分路を変形する



z

$$z = i + \xi \quad \xi \in \mathbb{R}$$

積分の両端を変形する寄与は、無限遠で無視できる。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}\beta\xi^2}$$

正定値！



符号問題は解決！

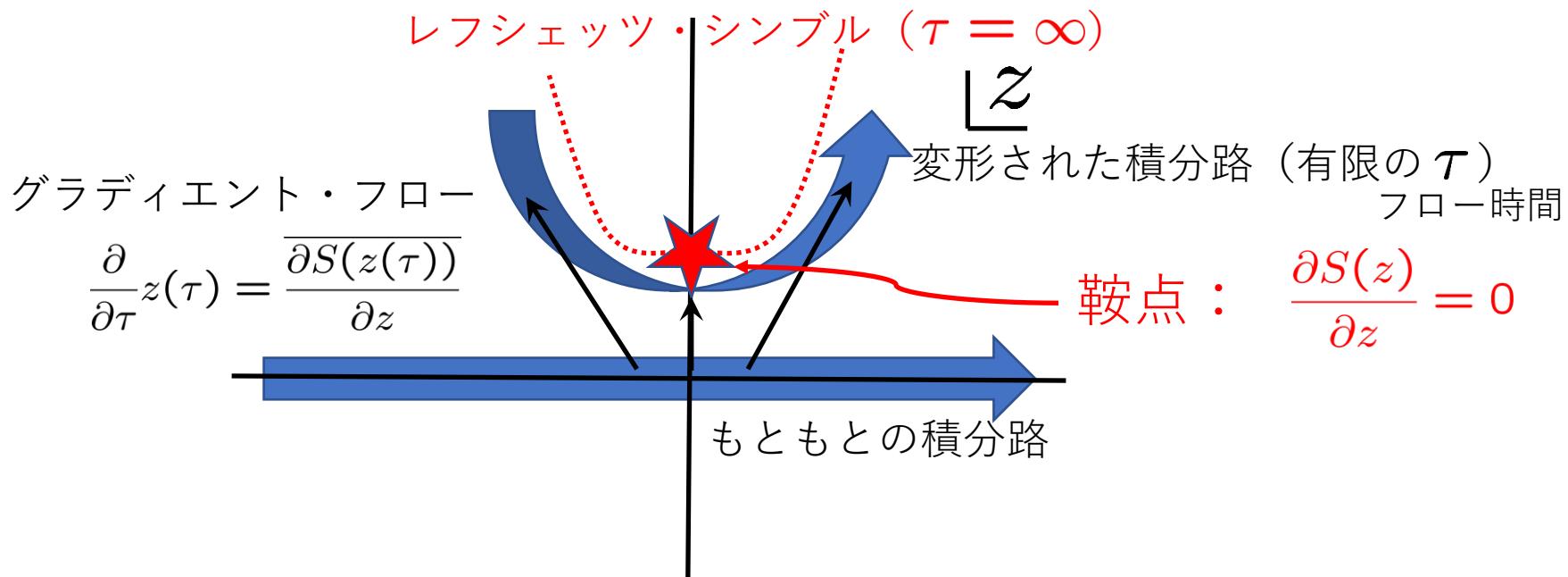
でも、複雑な多重積分になつたら、こんなことできるの？



# レフシェツツ・シンブル法

A.Alexandru, G.Basar, P.F.Bedaque, G.W.Ridgway  
and N.C.Warrington, JHEP 1605 (2016) 053

$$Z = \int dz e^{-S(z)}$$



$x$  から  $z(x; \tau)$  への 1 対 1 の写像が得られる。→ 積分路の変形を定義  
(コーシーの定理)

# グラディエント・フローのもつ重要な性質

$S(x)$  は複素数に値をもつことに注意！

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} S(z(x; \tau)) &= \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \frac{\partial z_k(x; \tau)}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \\ &= \sum_k \left| \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

正定値！  
(ゼロとなるのは鞍点のみ。)

グラディエント・フローに沿って、  
作用の実部は単調増加、作用の虚部は一定。

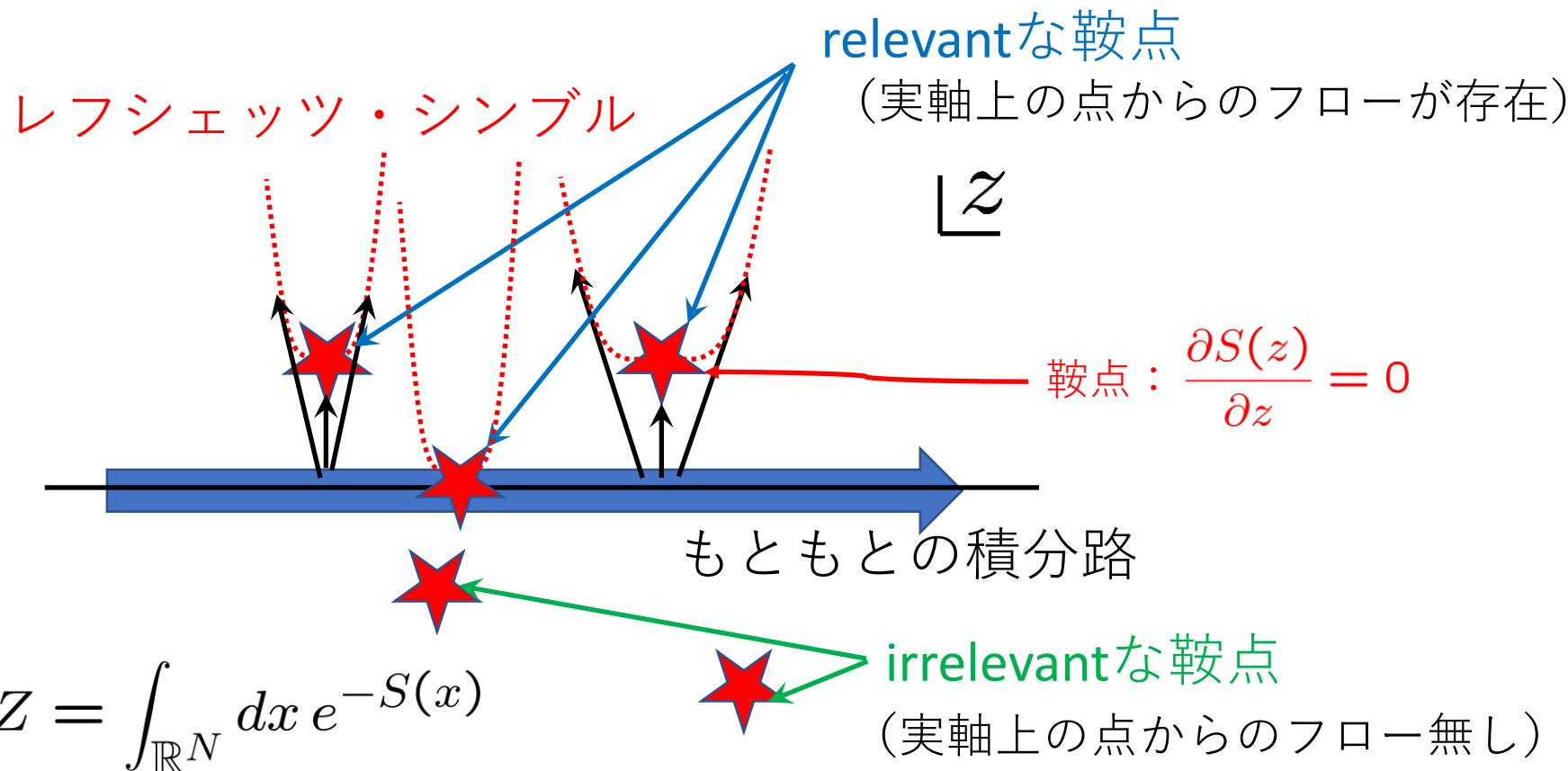


$\tau \rightarrow \infty$  で得られる積分路（レフシェツ・シンブル）上では、  
作用の虚部は一定。

符号問題は解決！

# ピカール・レフシェツツ理論

鞍点法の多重積分版



- relevantな鞍点  $z^*$  からの寄与  $\sim e^{-S(z^*)}$
- もともとの積分路上の鞍点は必ず relevant

このように、振動積分はwell definedにできる。  
(積分路の不定性は無い)

### 3. 量子トンネル効果

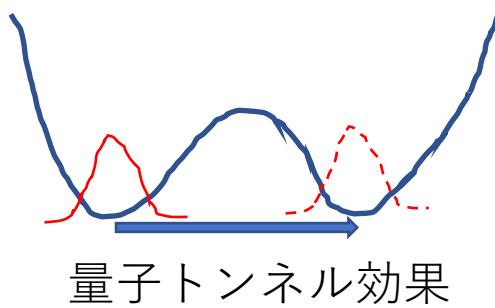
# 量子トンネル効果

- 虚時間経路積分においてインスタントンとして現れる。

- 場の理論におけるfalse vacuumの崩壊率
- 一次相転移におけるbubble核形成

$$Z = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \int dt L}$$

$$L = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (x^2 - 1)^2$$

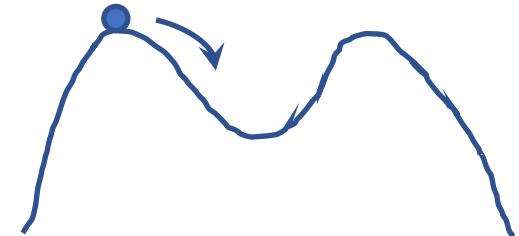


**$t = -i\tau$**

虚時間

$$Z = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{- \int d\tau \tilde{L}}$$

$$\tilde{L} = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + (x^2 - 1)^2$$



古典解

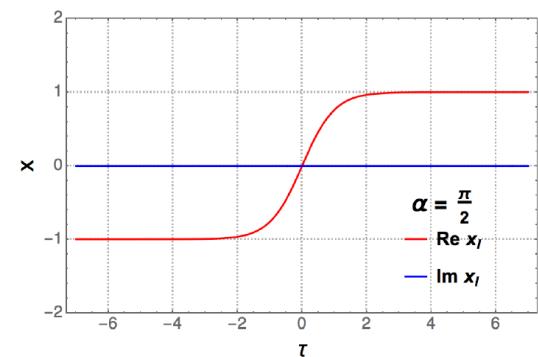
$$x(\tau) = \tanh \tau$$

インスタントン

トンネル振幅を半古典近似の範囲内で計算すると

$$\sim \exp(-S_0/\hbar)$$

非摂動現象！



# 実時間経路積分で量子トンネル効果を 直接見たらどうなるか？

## ● 動機

- 実際の時間発展には、ポテンシャル障壁を超えるような古典的な運動も寄与 (e.g., 電弱理論におけるスファーレロン)
- トンネル効果の過程で何が起きているのか、また、その後の波動関数の時間発展は？

## ● ところが、インスタントンを素朴に解析接続して 実時間に引き戻すと **singular**な複素軌道になってしまう。

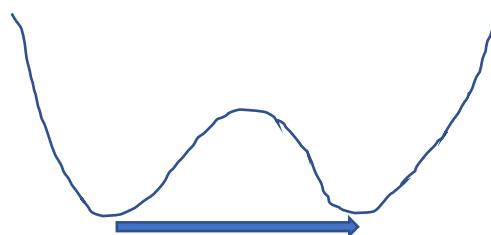
Cherman-Ünsal ('14)

こうした概念的な問題を、  
具体的な実時間経路積分の数値計算で明らかにできる。

# インスタントンを解析接続すると？

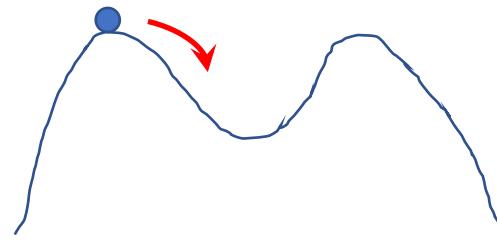
Cherman-Ünsal ('14)

$$L = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (x^2 - 1)^2$$



量子トンネル効果

$$\tilde{L} = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + (x^2 - 1)^2$$



ウィック回転:  $t \mapsto \tau e^{-i\alpha}$

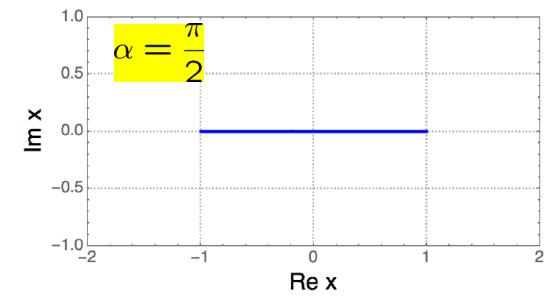
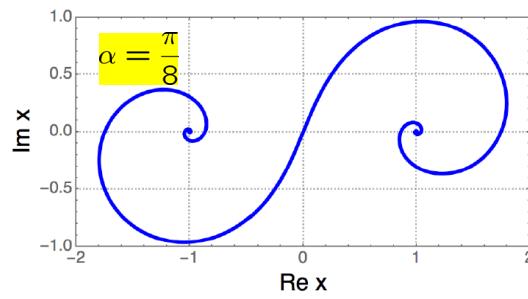
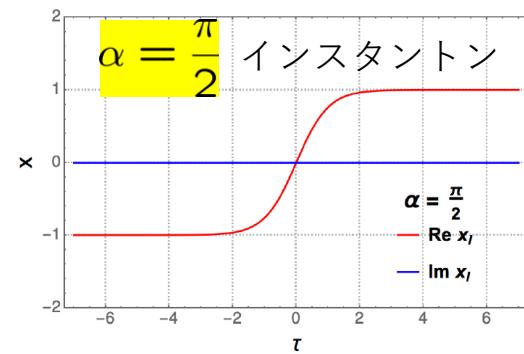
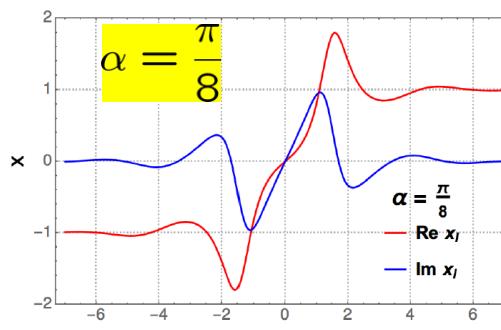
$$x(t) \mapsto x(\tau)$$

$$L = e^{2i\alpha} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - (x^2 - 1)^2$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$  imag. time

$$x(\tau) = \tanh \tau$$

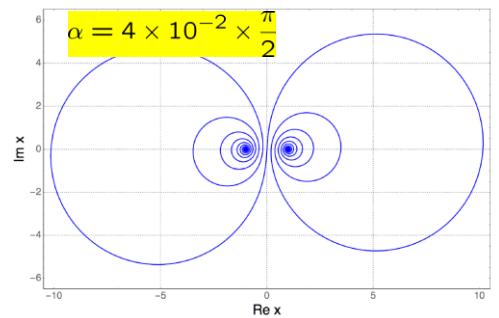
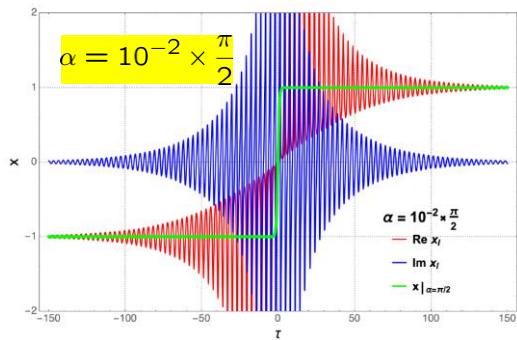
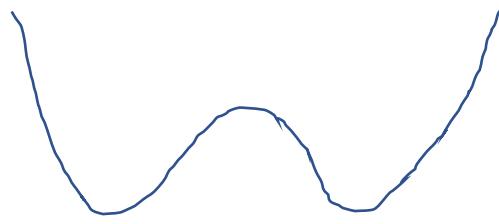
classical solution for general  $\alpha$   
 $x(\tau) = \tanh \left( \tau e^{-i(\alpha - \frac{\pi}{2})} \right)$



# インスタントンを解析接続すると？

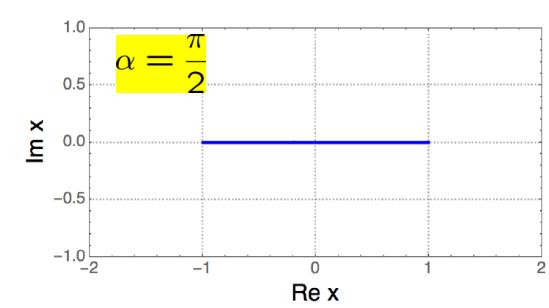
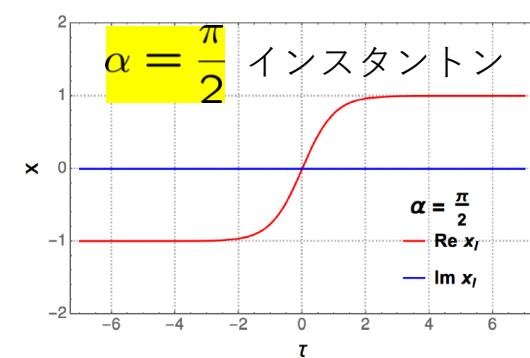
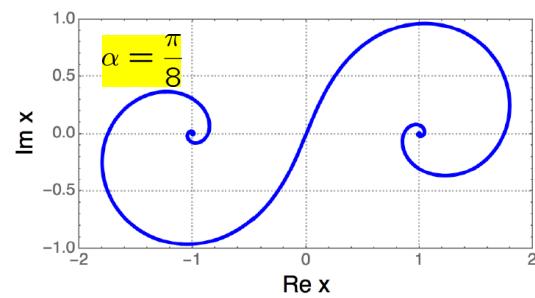
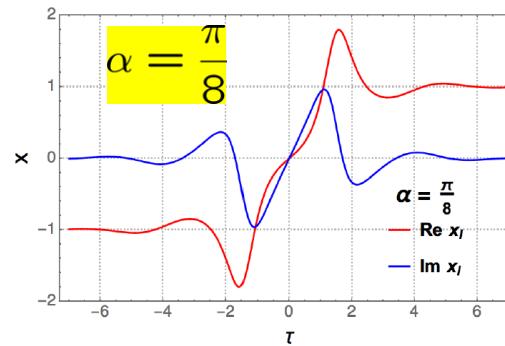
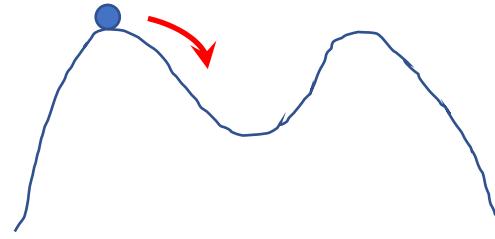
Cherman-Ünsal ('14)

$$L = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (x^2 - 1)^2$$



singular for  $\alpha \rightarrow 0$

$$L = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + (x^2 - 1)^2$$



どのような複素軌道が量子トンネル効果を表すのか？

# 二重井戸型ポテンシャルにおける古典解

エネルギー保存則 :  $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + (z^2 - 1)^2 = p^2$

Koike-Tanizaki ('14)

$$z(t) = \sqrt{\frac{p^2 - 1}{2p}} \operatorname{sd} \left( \sqrt{2p}t + c, \sqrt{\frac{1+p}{2p}} \right)$$

ヤコビ楕円関数

積分定数 :  $c, p$



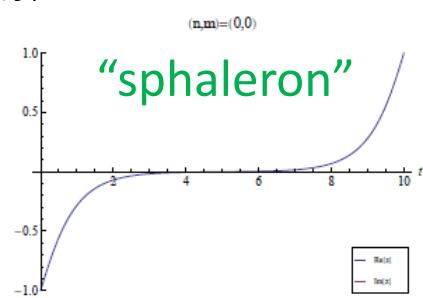
境界条件

$$\begin{cases} z\left(-\frac{T}{2}\right) = -1 \\ z\left(\frac{T}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

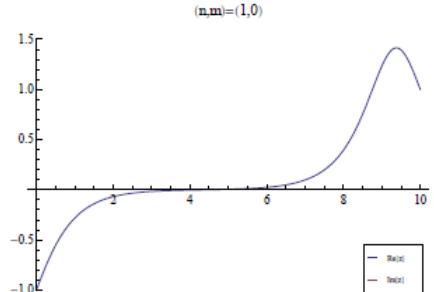
整数  $(n,m)$  でラベルされる無限個の解が存在。

実の解 :

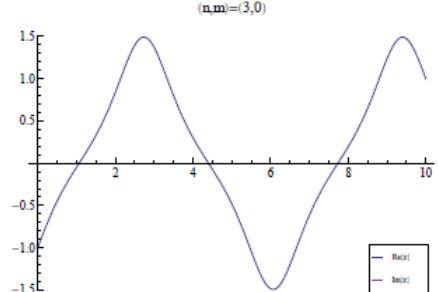
$$n = 0 \text{ or } m = 0$$



$$(n,m) = (1,0)$$

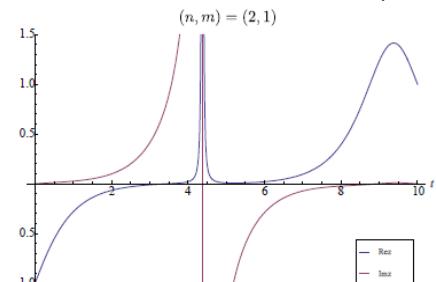


$$(n,m) = (3,0)$$



複素の解 :

$$n \neq 0 \text{ and } m \neq 0$$



整数  $n, m$  が大きくなるにつれて激しく振動

$$\operatorname{Im}(S) = S_0 \text{ for } T \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow \exp(-S_0/\hbar) \text{ suppression}$$



量子トンネル効果  
を表している？

# 実時間経路積分の数値シミュレーション

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x(t_f) = x_f} \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$

$$S[x(t)] = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right\} \quad |\Psi(x, t)|^2$$

$$V(x) = \alpha(x^2 - 1)^2 \quad \alpha = 2.5$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, t_i) &= \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} (x - b)^2 \right\} \\ \sigma &= 0.3, \quad b = -1 \end{aligned}$$

$$x_f = 1$$

$$T \equiv t_f - t_i = 2$$

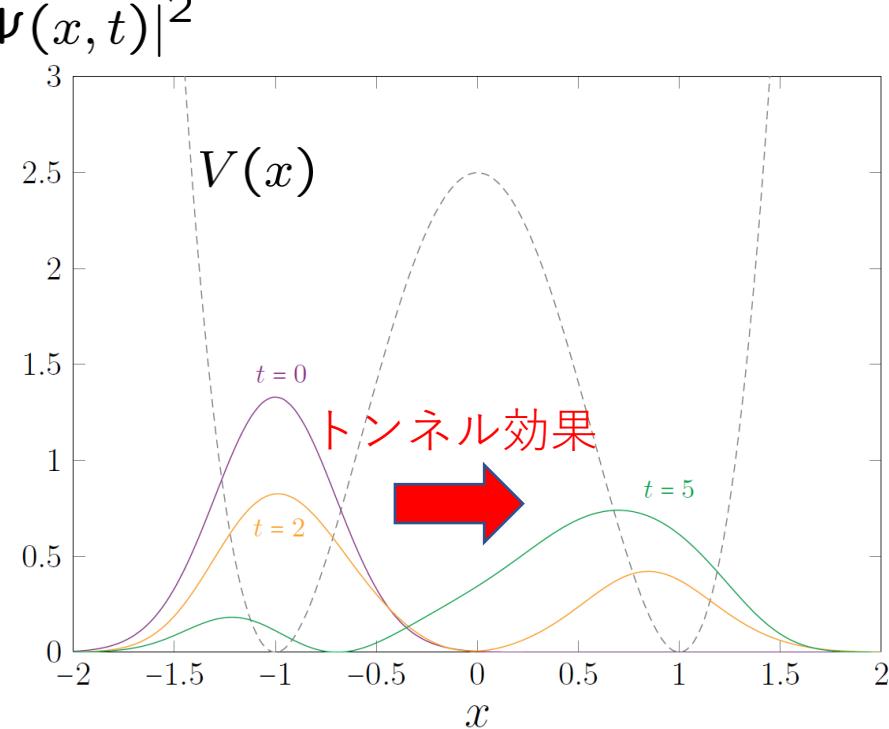
時間の離散化

$$N = 20$$

$$x_n = x(t_n)$$

$$t_n = \frac{n}{N} T \quad (n = 0, \dots, N)$$

J.N., Katsuta Sakai, Atis Yosprakob,  
JHEP 09 (2023) 110, 2307.11199 [hep-th]

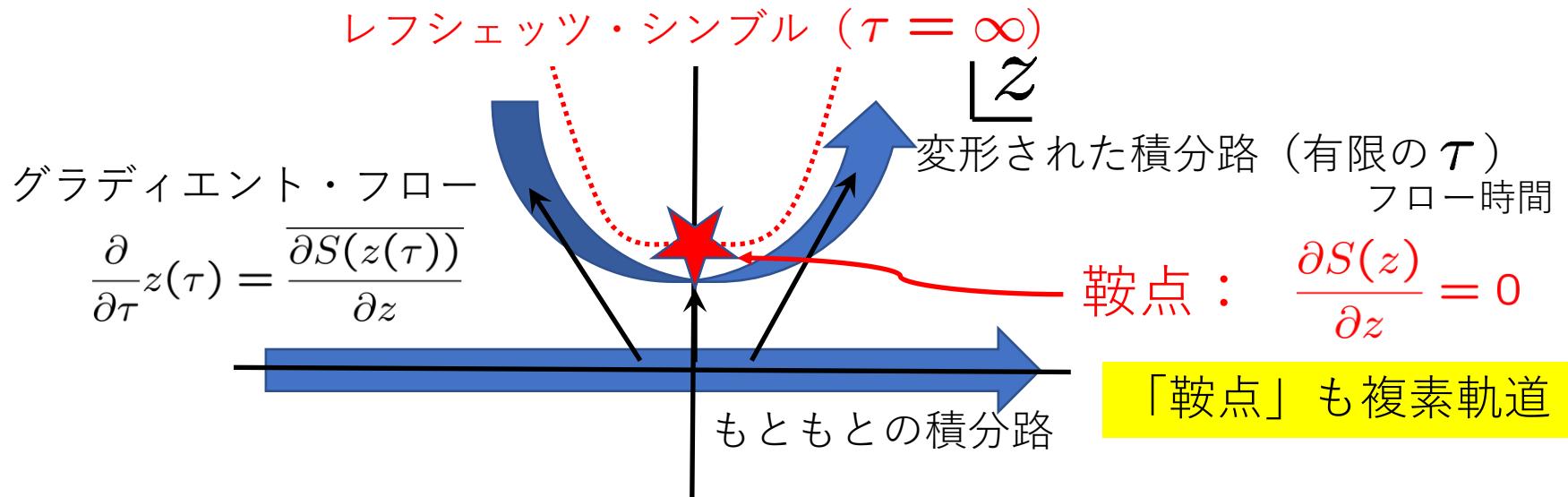


# レフシェツツ・シンブル法により 無数の複素軌道が生成される

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$

$$\Psi(x_N, t_N) = \int dx_0 dx_1 \cdots dx_{N-1} \Psi(x_0, t_0) e^{iS[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]/\hbar}$$

$$Z = \int dz e^{-S(z)}$$



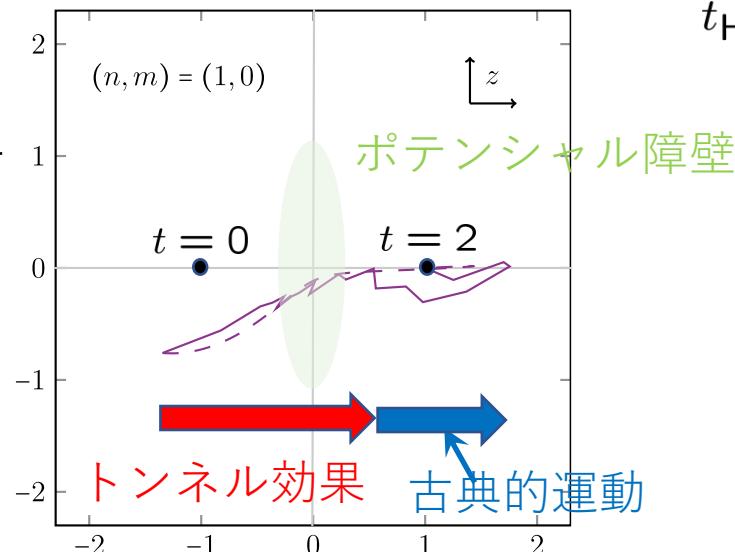
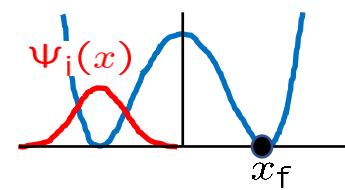
実際には、複数の鞍点まわりのシンブルの寄与を拾うため、フロー時間  $\tau$  に関しても、一定の範囲で積分。

# レフシェツツ・シンブル法の結果

typical config  $z(t)$  at large  $\tau$

$$N_\tau = 10, \quad 0.2 < \tau < 4$$

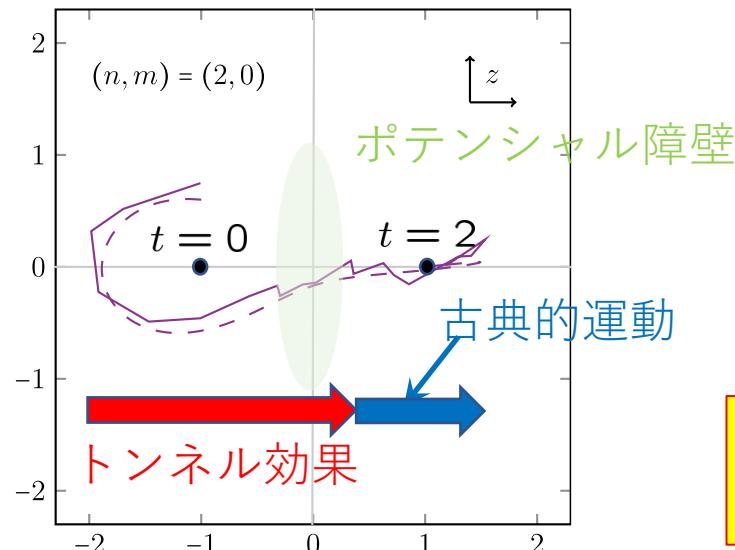
$$t_{\text{HMC}} = 1.0, \quad N_{\text{HMC}} = 10$$



(注) 点線は運動方程式の複素解（鞍点）のうち、近いものを表す

Koike-Tanizaki ('14)

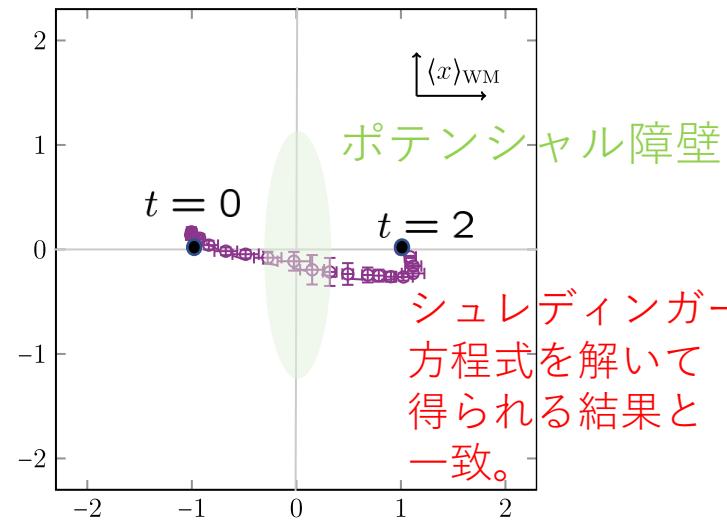
但し、  
 $x(0) \neq -1$   
 $x(T) = 1$



アンサンブル平均

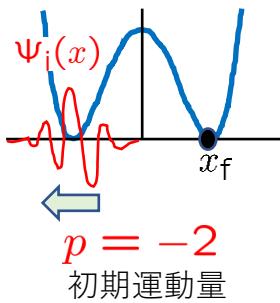
$x(t)$  に対する弱値に対応

$$\frac{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} \hat{x} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}$$



量子トンネル効果は、複素軌道によって表される

# 初期状態に運動量を導入する

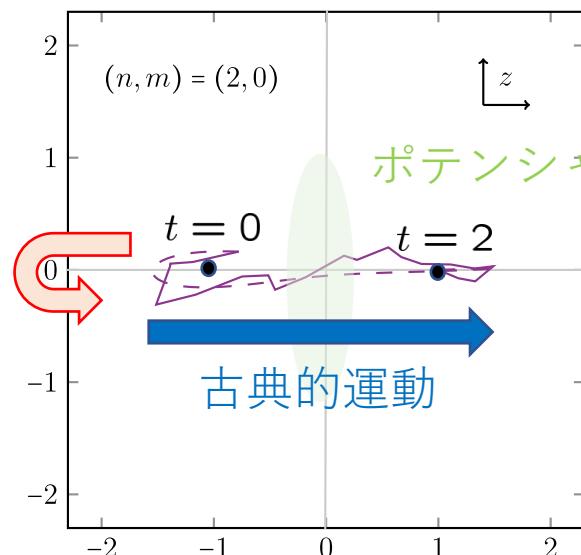
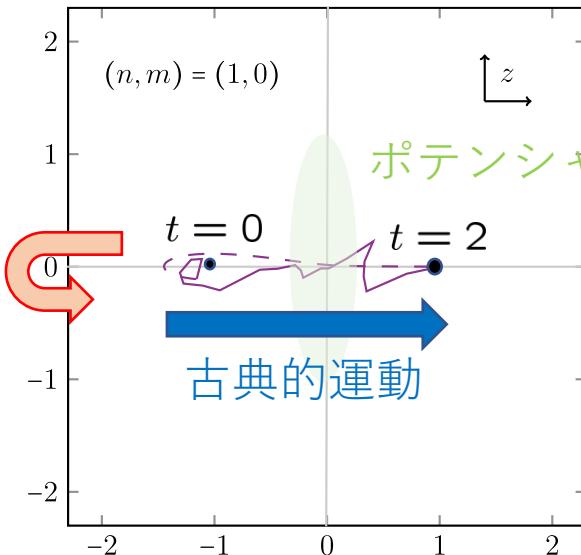


(注) 点線は運動方程式の複素解（鞍点）のうち、近いものを表す

Koike-Tanizaki  
('14)

但し、  
 $x(0) \neq -1$   
 $x(T) = 1$

typical config  $z(t)$  at large  $\tau$



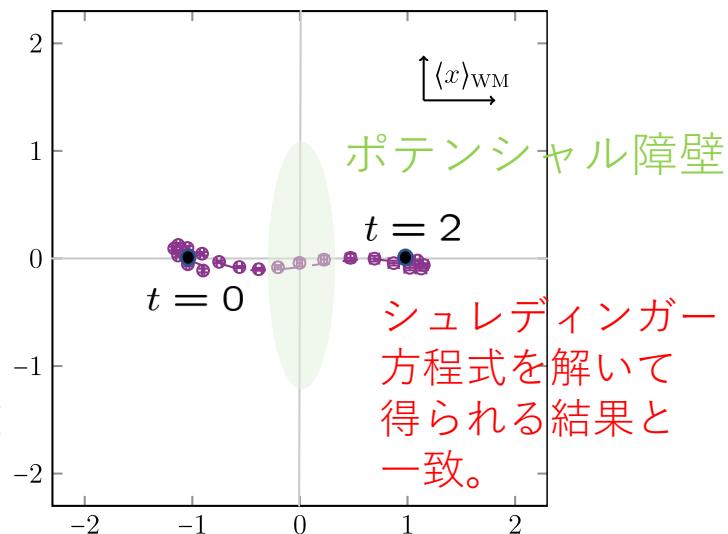
$$\Psi(x, t_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} (x + 1)^2 + i p x \right\}$$

$$p = -2$$

アンサンブル平均

$x(t)$  に対する弱値に対応

$$\frac{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} \hat{x} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}$$



ポテンシャル障壁を越える古典的運動が支配的になる  
→ ほぼ実の軌道

# 量子トンネル効果に対する新しい理解

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x(t_f) = x_f} \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

初期波動関数 :  $\Psi(x, t_i) = \varphi(x) e^{ipx/\hbar}$

$\varphi(x)$  は有限のサポート  $\Delta \equiv [x_{\min}, x_{\max}]$  をもつと仮定。

$\hbar \rightarrow 0$  の極限では、経路積分は以下の条件を満たす  $x(t)$  が支配的になる

## 古典運動方程式

$$\frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)} = 0$$

## 境界条件

$$x(t_i) \in \Delta, \quad \dot{x}(t_i) = \frac{p}{m}$$
$$x(t_f) = x_f$$

実の  $x(t)$  が存在する場合、  
必ず relevant な鞍点となり支配的に



実の軌道  
古典的運動の出現

実の  $x(t)$  が存在しない場合、  
relevant な鞍点のうち、最小の  $\text{Im}S(> 0)$   
をもつものが支配的に

$$|\text{確率振幅}| \sim e^{-\text{Im}S[x^*]/\hbar}$$



複素軌道  
量子トンネル効果の  
“半古典的”記述

弱測定を用いることによって (原理的には) 観測可能

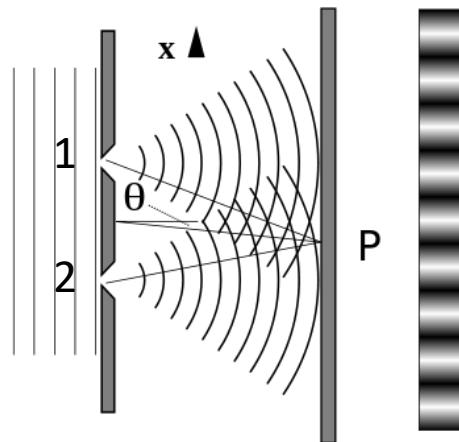
## 4. 量子デコヒーレンス効果

J.N., Hiromasa Watanabe,  
“Quantum Decoherence from Complex Saddle Points”  
[Phys.Rev.Lett.](#) 134 (2025) 21, 210401, e-Print: 2408.16627 [quant-ph]

J.N., Hiromasa Watanabe,  
“Quantum decoherence in the Caldeira-Leggett model  
by the real-time path integral on a computer”  
e-Print: 2503.20699[hep-lat], to appear in JHEP

# 量子デコヒーレンスとは

## 二重スリット実験



$$|\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2 = |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + 2 \operatorname{Re}(\Psi_1^*(x)\Psi_2(x))$$

干渉項

$$(|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) |\mathcal{E}_0\rangle \xrightarrow{\text{環境}} |\Psi_1\rangle |\mathcal{E}_1\rangle + |\Psi_2\rangle |\mathcal{E}_2\rangle \xrightarrow{\text{量子もつれ状態}}$$

$$|\Psi_1(x)|^2 \langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_1 \rangle + |\Psi_2(x)|^2 \langle \mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_2 \rangle + 2 \operatorname{Re}(\Psi_1^*(x)\Psi_2(x)) \langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 \rangle \approx |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 \quad \begin{matrix} = 1 \\ = 1 \\ \approx 0 \end{matrix}$$

干渉縞が消失（デコヒーレンス）

スリット1を通った確率とスリット2を通った確率の和

→ 「粒子がどちらのスリットを通ったか」という問い合わせ  
が意味をなす (古典的な描像の出現)

# 対象系の縮約密度行列で見る 量子デコヒーレンス

$x$ を通して環境  $\mathcal{E}$  と相互作用

“測定”

$$|\Psi\rangle = \int dx \psi(x)|x\rangle |\mathcal{E}_0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi\rangle = \int dx \psi(x)|x\rangle |\mathcal{E}(x)\rangle$$

“観測装置”

$$\langle \mathcal{E}(x) | \mathcal{E}(y) \rangle \approx 0 \quad \text{for } |x - y| \gg \delta$$

縮約密度行列 (reduced density matrix)

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}} = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\Psi\rangle \langle \Psi| = \int dx dy \rho_{\mathcal{S}}(x, y) |x\rangle \langle y|$$

$$\rho_{\mathcal{S}}(x, y) = \psi(x)\psi^*(y) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathcal{S}}(x, y) \approx |\psi(x)|^2 \delta(x - y)$$

pure state

mixed state

非対角成分の消失 (減衰)

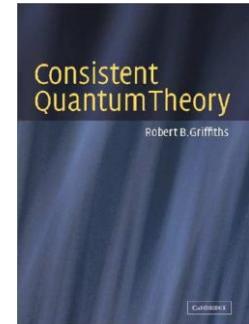
$|x\rangle$  という状態が  $|\psi(x)|^2$  という確率で現れると解釈できる。

# 量子デコヒーレンスの研究の重要性

- 量子論から古典論への転移

consistent history approach (GellMann-Hartle, Griffiths, ...)

量子系に対して“history”をconsistentに定義するには  
「デコヒーレンス条件」が必要。



- 量子力学の観測問題を理解する上でも重要。

c.f.) Kenichi Konishi,

Int.J.Mod.Phys.A 37 (2022) 17, 2250113, arXiv: 2111.14723 [quant-ph]

“Quantum fluctuations, particles and entanglement:  
A discussion towards the solution of the quantum measurement”

- 量子技術（量子測定、量子計算）において、  
デコヒーレンスは誤差の原因の一つ

如何にコントロールするかが重要。

環境のモデルをどうとるか。

環境のパラメタに対する依存性。

# Caldeira-Leggett模型

Caldeira-Leggett ('83)

$$L = L_S + L_{\mathcal{E}} + L_{\text{int}}$$

$$L_S = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} M \omega_b^2 x(t)^2 ,$$

$$L_{\mathcal{E}} = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{E}}} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{q}^k(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega_k^2 q^k(t)^2 \right\} ,$$

$$L_{\text{int}} = c x(t) \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{E}}} q^k(t) ,$$

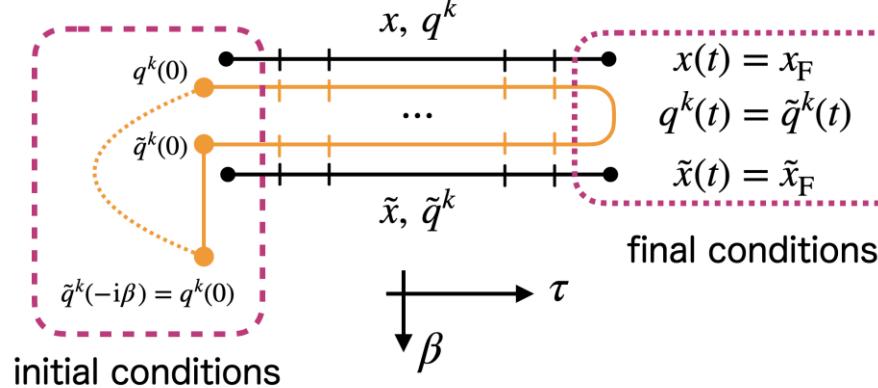
環境をtrace outして得られる reduced density matrix

$$\rho_S(x_F, \tilde{x}_F; t_F) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\tilde{x} \prod_{k=1}^{N_{\mathcal{E}}} \mathcal{D}q^k \mathcal{D}\tilde{q}^k \mathcal{D}\tilde{q}_0^k e^{-S_{\text{eff}}(x, \tilde{x}, q, \tilde{q}, \tilde{q}_0)} ,$$

$$S_{\text{eff}}(x, \tilde{x}, q, \tilde{q}, \tilde{q}_0) = -i \{ S(x, q) - S(\tilde{x}, \tilde{q}) \} + S_0(\tilde{q}_0) + \frac{1}{4\sigma^2} (x_0^2 + \tilde{x}_0^2)$$

Gaussian initial state assumed for the system

Environment initially in thermal equilibrium with temperature  $1/\beta$



Tracing out environment  $\mathcal{E}$

# 鞍点だけでデコヒーレンス効果が見える

JN, Hiromasa Watanabe, Phys.Rev.Lett. 134 (2025) 21,  
210401, arXiv: 2408.16627 [quant-ph]

Introducing  $X_\mu = \{x_i, \tilde{x}_i, q_i^k, \tilde{q}_i^k, (\tilde{q}_0^k)_j\}$

$$S_{\text{eff}}(x, \tilde{x}, q, \tilde{q}, \tilde{q}_0) = \frac{1}{2} X_\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} X_\nu - C_\mu X_\mu + B$$

2次式

saddle point:  $\bar{X}_\mu = (\mathcal{M}^{-1})_{\mu\nu} C_\nu$

$$X_\mu = \bar{X}_\mu + Y_\mu$$

Integrating  $Y_\mu$ ,

$$\rho_S(x_F, \tilde{x}_F; t_F) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{M}}} e^{-\mathcal{A}},$$

$$\mathcal{A} = B - \frac{1}{2} C_\mu (\mathcal{M}^{-1})_{\mu\nu} C_\nu$$

relevantな複素鞍点は  
uniqueに決まる。

$$\text{cost} = O(D^3)$$

$$D = 2N_t(1 + N_{\mathcal{E}}) + N_\beta N_{\mathcal{E}}$$

シンプルに沿った積分は  
解析的に実行可能。  
(normalizationを出すだけ)

$$|\rho_S(x, \tilde{x}; t)| \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Gamma_{\text{diag}}(t) \left( \frac{x + \tilde{x}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{\text{off-diag}}(t) \left( \frac{x - \tilde{x}}{2} \right)^2 \right\}$$

デコヒーレンス効果

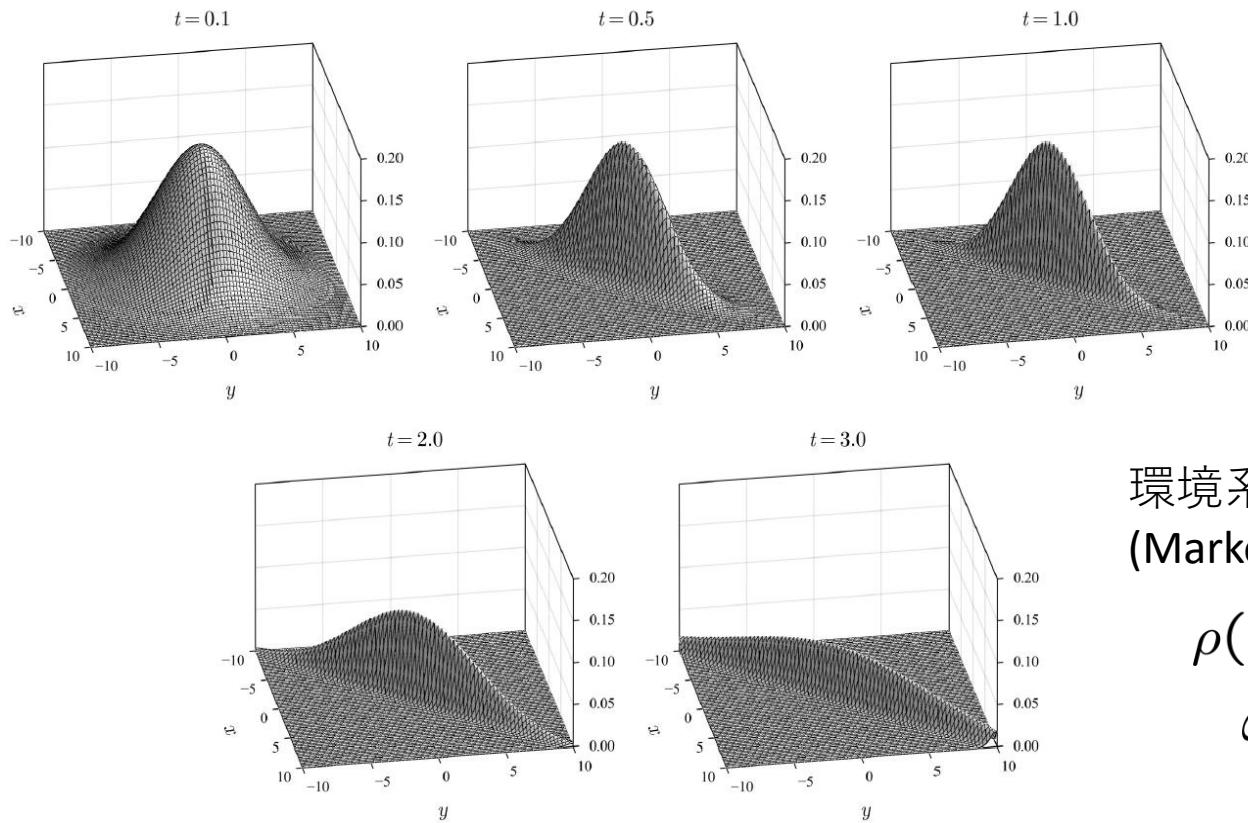
# 密度行列の非対角成分の減衰

$|\rho_S(x, y; t)|$

初期状態

対象系：基底状態  
環境：温度  $1/\beta$  のカノニカル分布

$$\omega_r = 0.08$$



$$N_{\mathcal{E}} = 64, \beta = 0.05 \\ \omega_{\text{cut}} = 2$$

環境系の振動数分布：  
(Markov近似を正当化するため)

$$\rho(\omega) \propto \omega^2 \quad (\text{Ohmic}) \\ \omega \leq \omega_{\text{cut}} \quad (\text{cutoff})$$

t=0.1～1の間に、非対角成分が急速に減衰

# マスター方程式からの予言

Caldeira-Leggett, Physica A 121 (1983) 587

マスター方程式 (Born近似、Markov近似を用いて導出)

$$\frac{d}{dt}\rho_S(x, \tilde{x}; t) = K(x, \tilde{x})\rho_S(x, \tilde{x}, t) , \quad (\omega_r \ll \omega_{cut} \ll T = \beta^{-1})$$
$$K(x, \tilde{x}) = \frac{i}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) - \frac{i}{2} M \omega_r^2 (x^2 - \tilde{x}^2) - \gamma(x - \tilde{x}) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) - \frac{2M\gamma}{\beta} (x - \tilde{x})^2$$

The effect of decoherence is  $\propto \frac{\gamma}{\beta}$

環境との相互作用 :  $c^2 \sim \frac{4\omega_{cut}^3}{3\pi N_{\mathcal{E}}} \gamma$        $L_{int} = c x(t) \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{E}}} q^k(t)$

$$\rho_S(x, \tilde{x}; t) = \rho_S(x, \tilde{x}; 0) e^{-\frac{2M\gamma}{\beta}(x-\tilde{x})^2 t}$$

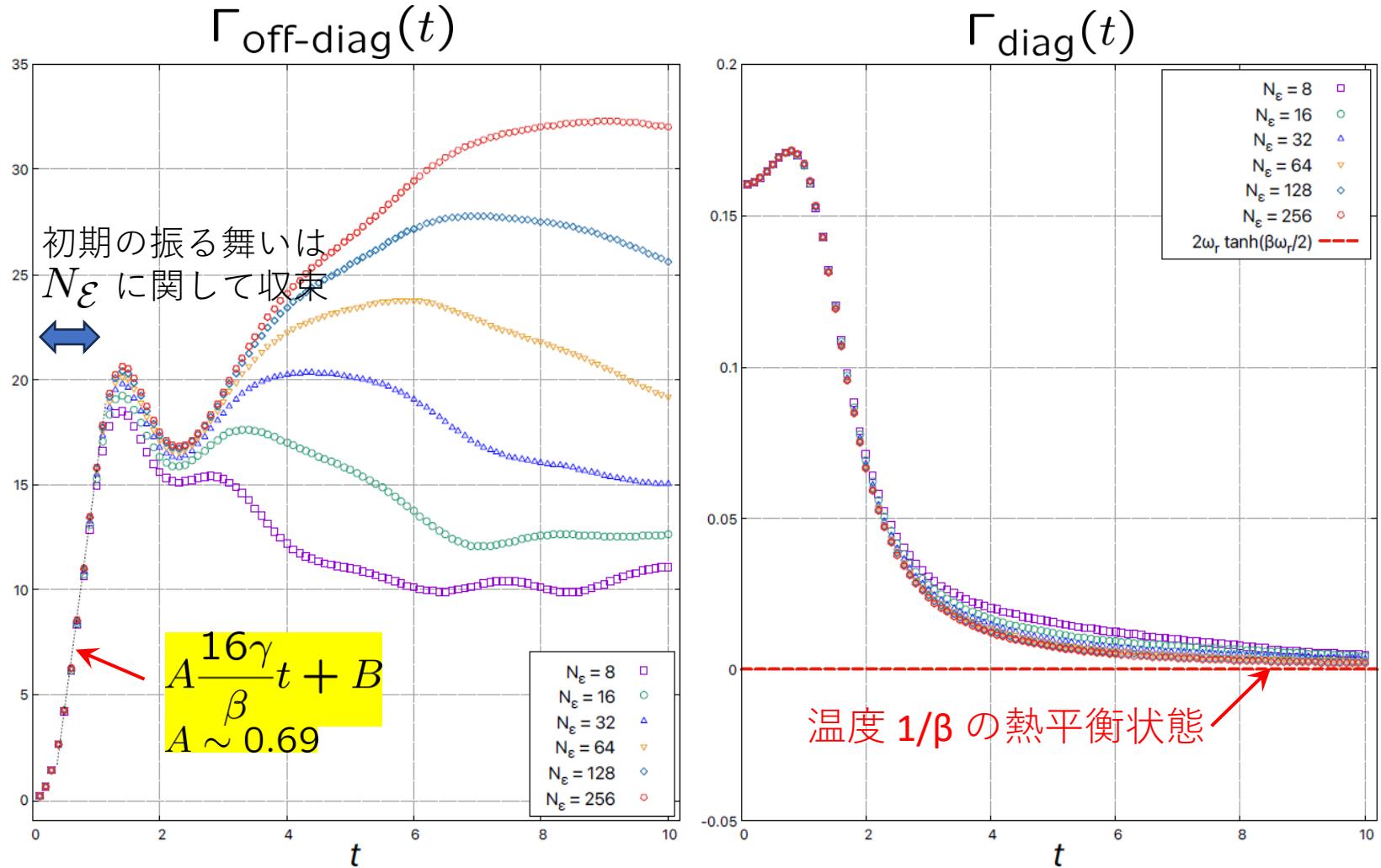
$$|\rho_S(x, \tilde{x}; t)| \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Gamma_{\text{diag}}(t) \left( \frac{x + \tilde{x}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{\text{off-diag}}(t) \left( \frac{x - \tilde{x}}{2} \right)^2 \right\}$$

マスター方程式からの予言 :  $\Gamma_{\text{off-diag}}(t) \sim \frac{16M\gamma}{\beta} t$

以下、一般性を失うことなく  $M=m=1$  とする。

# $N_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$ に対する収束性

$$\beta = 0.05, \gamma = 0.1, \omega_{\text{cut}} = 2$$



マスター方程式の予言には、 $\omega_r \ll \omega_{\text{cut}} \ll T = \beta^{-1}$  が必要。

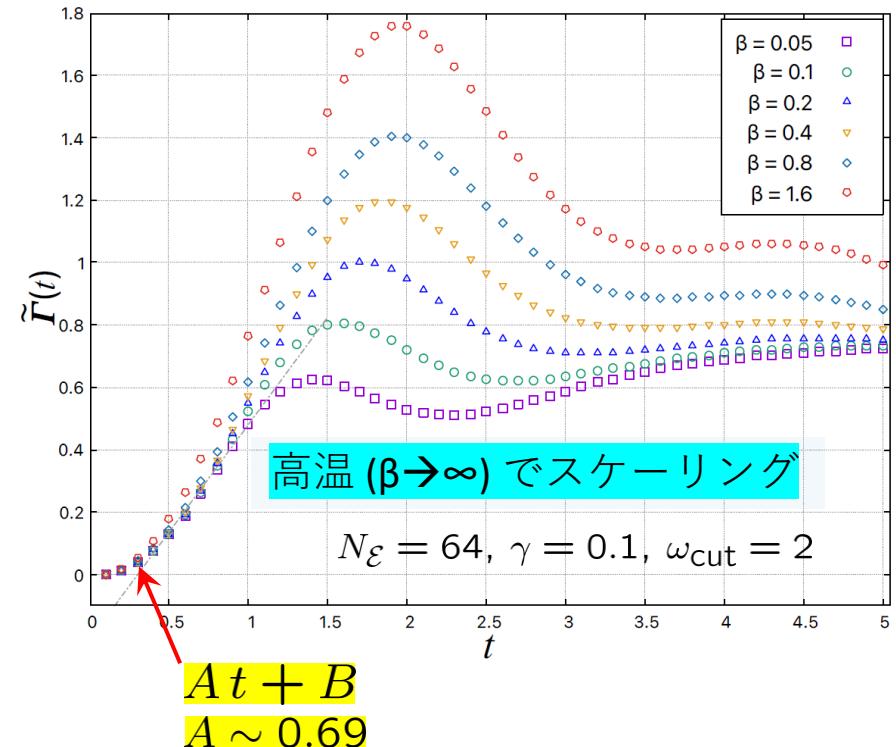
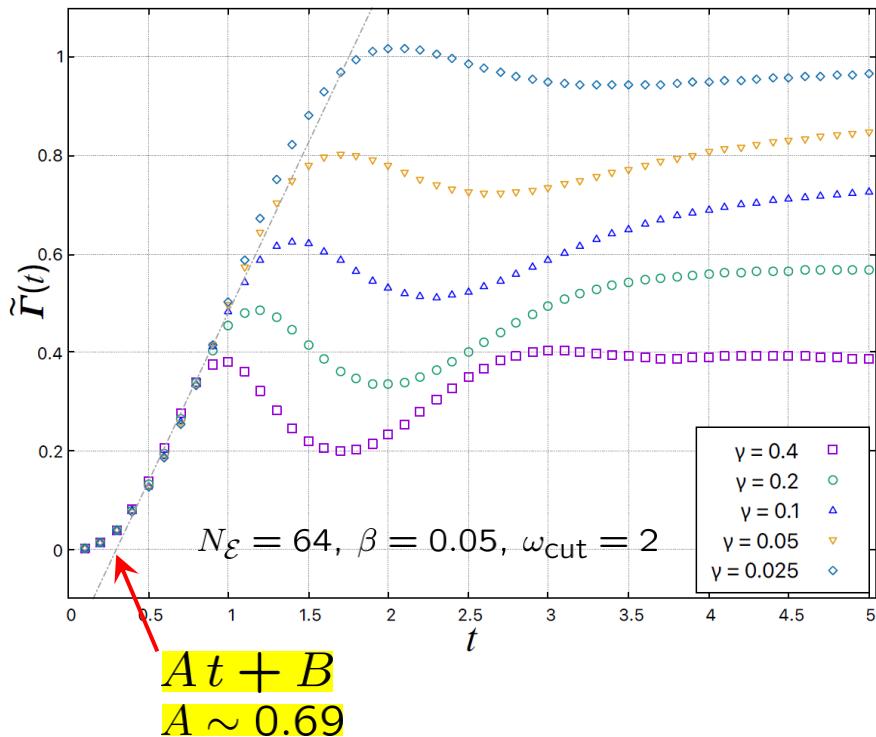
$$\text{c.f.) } \omega_r = 0.08$$

$$\omega_{\text{cut}} = 2$$

$$T = 20$$

# $\beta, \gamma$ に関するスケーリング

$$\tilde{\Gamma}(t) = \frac{\beta}{16\gamma} \{ \Gamma_{\text{off-diag}}(t) - \Gamma_{\text{off-diag}}(0) \}$$

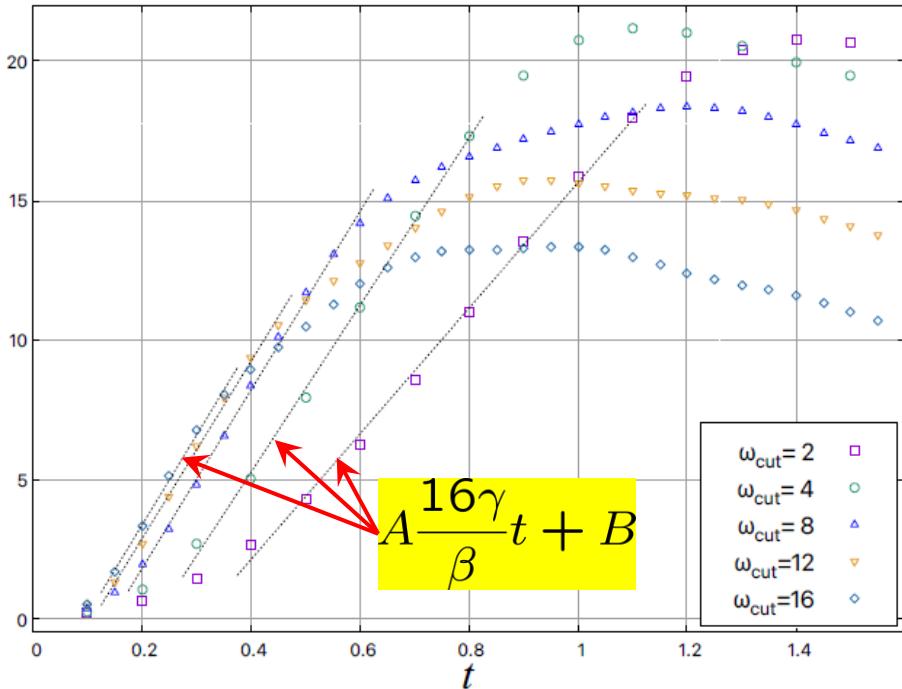


傾きが  $\gamma/\beta$  に比例するという、マスター方程式の予言を定性的に再現。（但し、数係数は30%ほど小さい。）

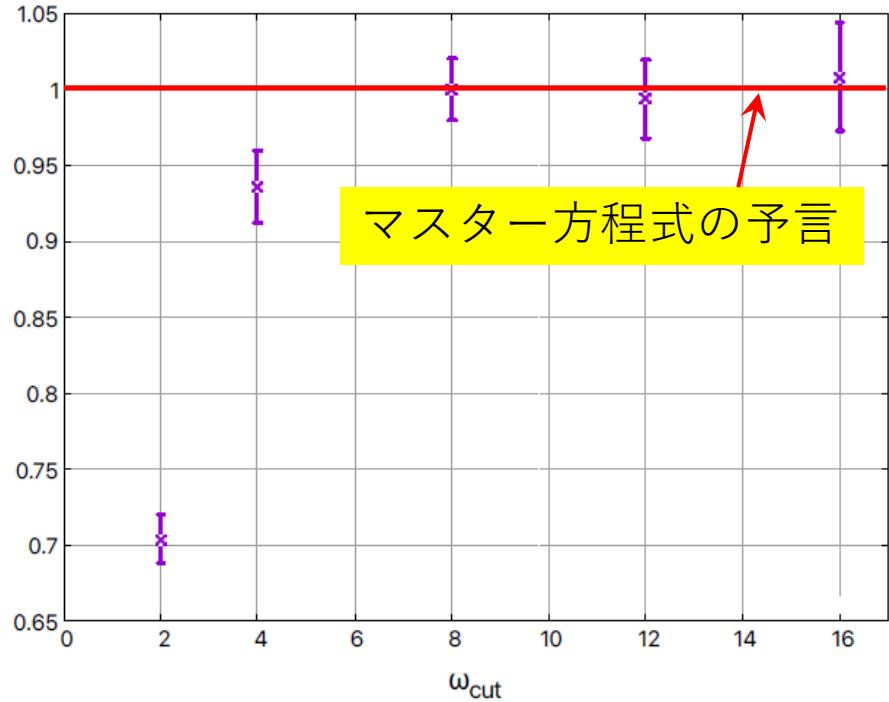
# マスター方程式の予言との定量的な一致

J.N., Hiromasa Watanabe,  
arXiv: 2503.20699[hep-lat], to appear in JHEP

$$N_{\mathcal{E}} = 512, \beta = 0.05, \gamma = 0.1$$



fitした数係数Aの値



$\omega_{\text{cut}}$ を大きくしていくことで、数係数も予言と一致。

マスター方程式の予言には、 $\omega_r \ll \omega_{\text{cut}} \ll T = \beta^{-1}$  が必要。

$$\omega_r = 0.08$$

$$T = 20$$

Markov近似を正当化するのに必要

# 「二重スリット実験」における干渉縞の消失

対象系の初期波動関数

$$\psi_I(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x)$$

$$\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}(x - \xi)^2 - ipx\right)$$

$$\psi_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}(x + \xi)^2 + ipx\right)$$

J.N., Hiromasa Watanabe,  
arXiv: 2503.20699[hep-lat], to appear in JHEP

$$\sigma = 0.1, \xi = 1, p = 1$$

$$(N_{\mathcal{E}} = 64, \omega_{\text{cut}} = 2, \omega_r = 0)$$

$\gamma$  : coupling with environment

$\beta$  : inverse temperature

$$\rho_S(x, x; t)$$

$$\beta = 0.5, 0.1, 0.05 \\ (\gamma = 0.1)$$

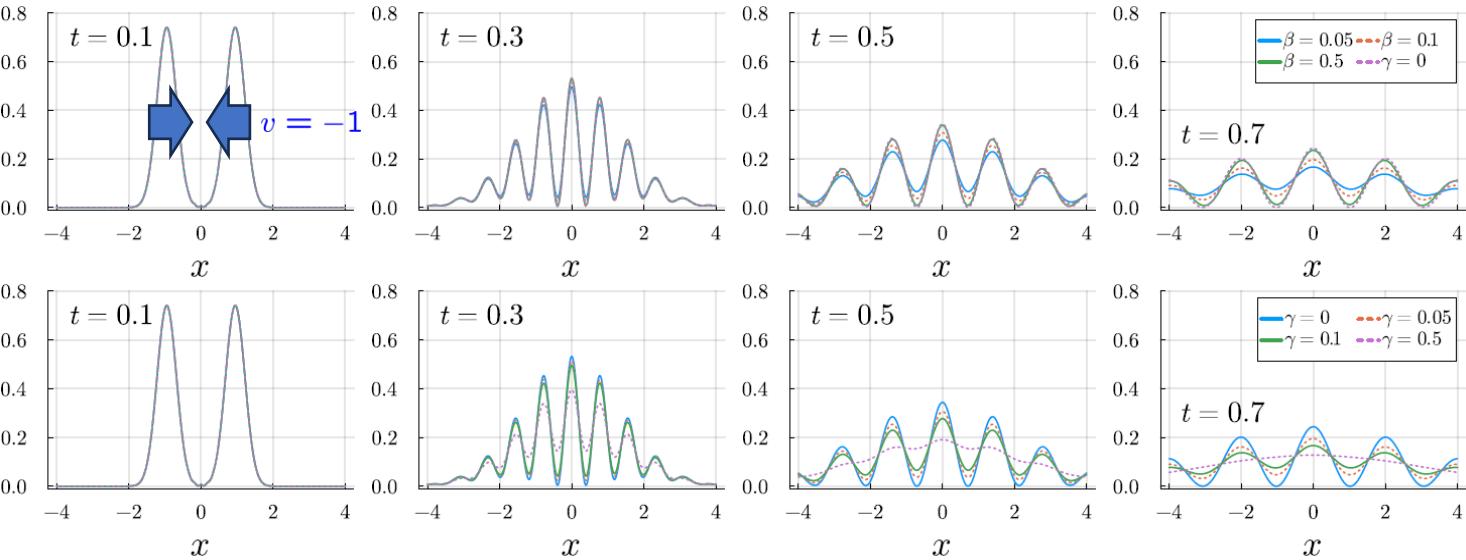
$$\gamma = 0.05, 0.1, 0.5 \\ (\beta = 0.05)$$

$$t = 0$$

$$t = 0.3$$

$$t = 0.5$$

$$t = 0.7$$



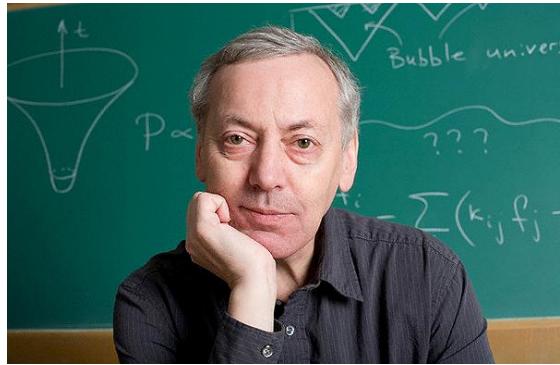
量子デコヒーレンスは、実時間経路積分においては複素鞍点で捉えられる。

## 4. 宇宙の始まりにおける量子トンネル効果

Chien-Yu Chou and JN,

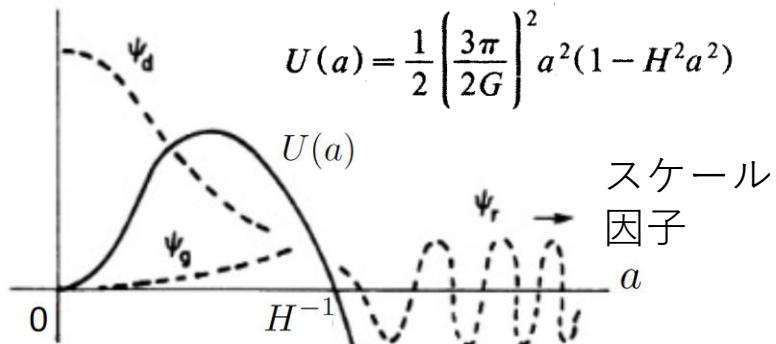
JHEP 05 (2025) 142, arXiv:2407.17724 [gr-qc]

# 宇宙はどうやって始まったのか？



A. Vilenkin

“Creation of Universes from Nothing”  
Phys.Lett.B 117 (1982) 25

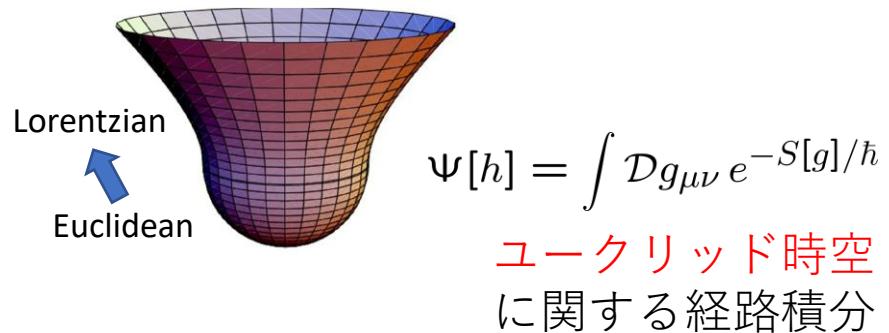


「無」からのトンネル効果



J. B. Hartle and S. W. Hawking

“Wave function of the Universe”  
Phys. Rev. D 28,(1983) 2960



「無境界」波動関数

量子宇宙論 (Quantum Cosmology)

# 量子重力理論

$$Z = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iS_{\text{EH}}[g]/\hbar} \quad \text{計量テンソルに関する経路積分}$$

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left( \frac{1}{G_N} R - \Lambda \right)$$

AINSHUTAIN ·  
HILBERT ACTION

スカラー曲率

$G_N$  : ニュートンの重力定数 (重力の強さ)

$\Lambda$  : 宇宙定数 (単位体積当たりのエネルギー)

古典極限

$$\frac{\delta S_{\text{EH}}[g(x)]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

(真空中の) アインシュタイン方程式

# 一様等方な時空に制限した模型

Halliwell-Louko, Phys.Rev.D 39 (1989) 2206

$$ds^2 = a^2(\eta) (-N^2 d\eta^2 + d\Omega_3^2)$$

時間変数（共形時間）

スケール因子

ラプス関数  
(時間の刻み幅)

3次元単位球面上の計量  
cf) 2次元単位球面だったら  
 $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$S_{EH}[a, N] = -6\pi^2 \int d\eta \left\{ \frac{1}{N} \left( \frac{da}{d\eta} \right)^2 - NV(a) \right\}$$

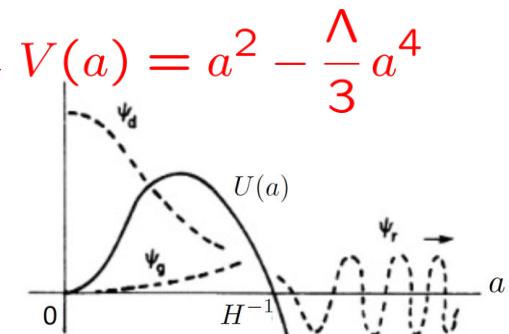
変数変換 :

$$\begin{aligned} q &= a^2 \\ d\eta &= a^{-2}(t) dt \end{aligned} \quad ds^2 = -\frac{N^2}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2$$

$$S_{EH}[q, N] = -6\pi^2 \int_0^1 dt \left\{ \frac{1}{4N} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - N \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} q \right) \right\}$$

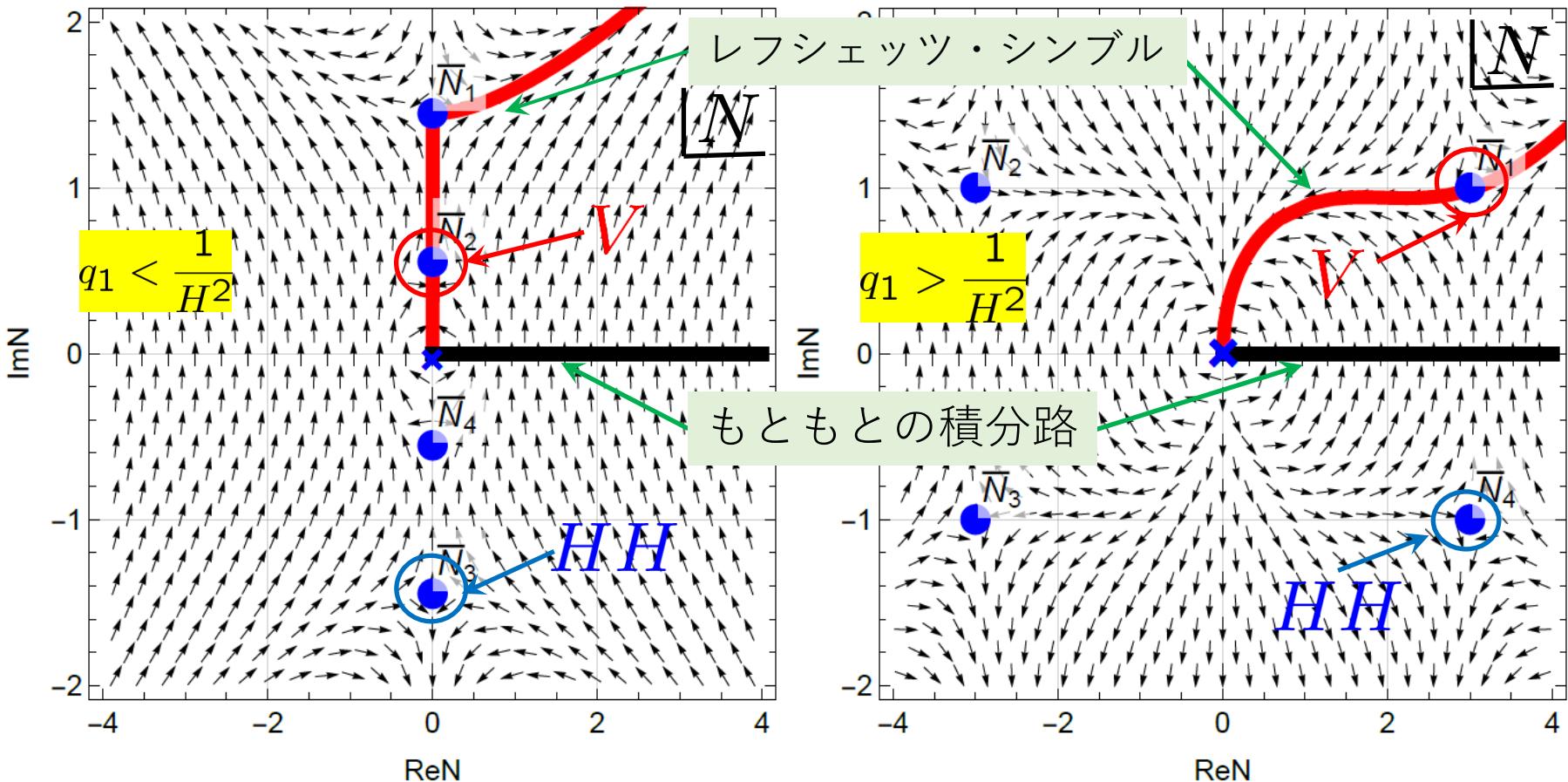
$q(t)$  に関する経路積分は、ガウス積分で実行可能。

残るラプス関数  $N$  に関する積分を鞍点近似で評価する。  
 $\Lambda \ll 1$



# ラプラス関数の鞍点とレフシツ・シンブル

ディレクレ境界条件  $\begin{cases} q(0) = 0 : \text{no boundary} \\ q(1) = q_1 \end{cases}$



ピカール・レフシェツ理論によると、Vilenkinの理論がrelevantな鞍点として選ばれる。

# 鞍点が表す時空（初期）

$$ds^2 = -\frac{N^2}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2$$

$$q(1) < \frac{1}{H^2} \quad N^\star = \frac{1 - \sqrt{1 - H^2 q_1}}{H^2} i \quad \Lambda = 3H^2$$

$q(t) = -H^2 |N^\star|^2 t^2 + 2|N^\star| t$

↑ 純虚数！

時間座標の変更 :  $t = \frac{1}{H^2 |N^\star|} (1 - \cos H\tau)$

$$q(t) = \frac{1}{H^2} \sin^2 H\tau$$

$$dt = \frac{d\tau}{H|N^\star|} \sin H\tau$$

$$ds^2 = \boxed{d\tau^2} + \frac{1}{H^2} \sin^2 H\tau d\Omega_3^2$$



半径  $\frac{1}{H}$  の 4 次元球面の一部

$$0 \leq \tau \leq \frac{1}{H} \arccos \sqrt{1 - H^2 q_1} \left( < \frac{\pi}{2H} \right)$$

ユークリッド時空（虚時間）

# 鞍点が表す時空（後期）

$$ds^2 = -\frac{N^2}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2$$

$$q(1) > \frac{1}{H^2} \quad N^* = \frac{\sqrt{H^2 q_1 - 1}}{H^2} + \frac{i}{H^2} \quad \Lambda = 3H^2$$

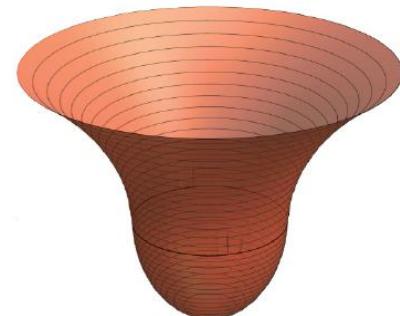
$q(t) = H^2(N^*)^2 t^2 - 2i N^* t$

↑  $q_1$ とともに、  
実部が増大

時間座標の変更：  $t = \frac{1}{H^2 N^*} (\sinh H\tau + i)$

$$q(t) = \frac{1}{H^2} \cosh^2 H\tau$$

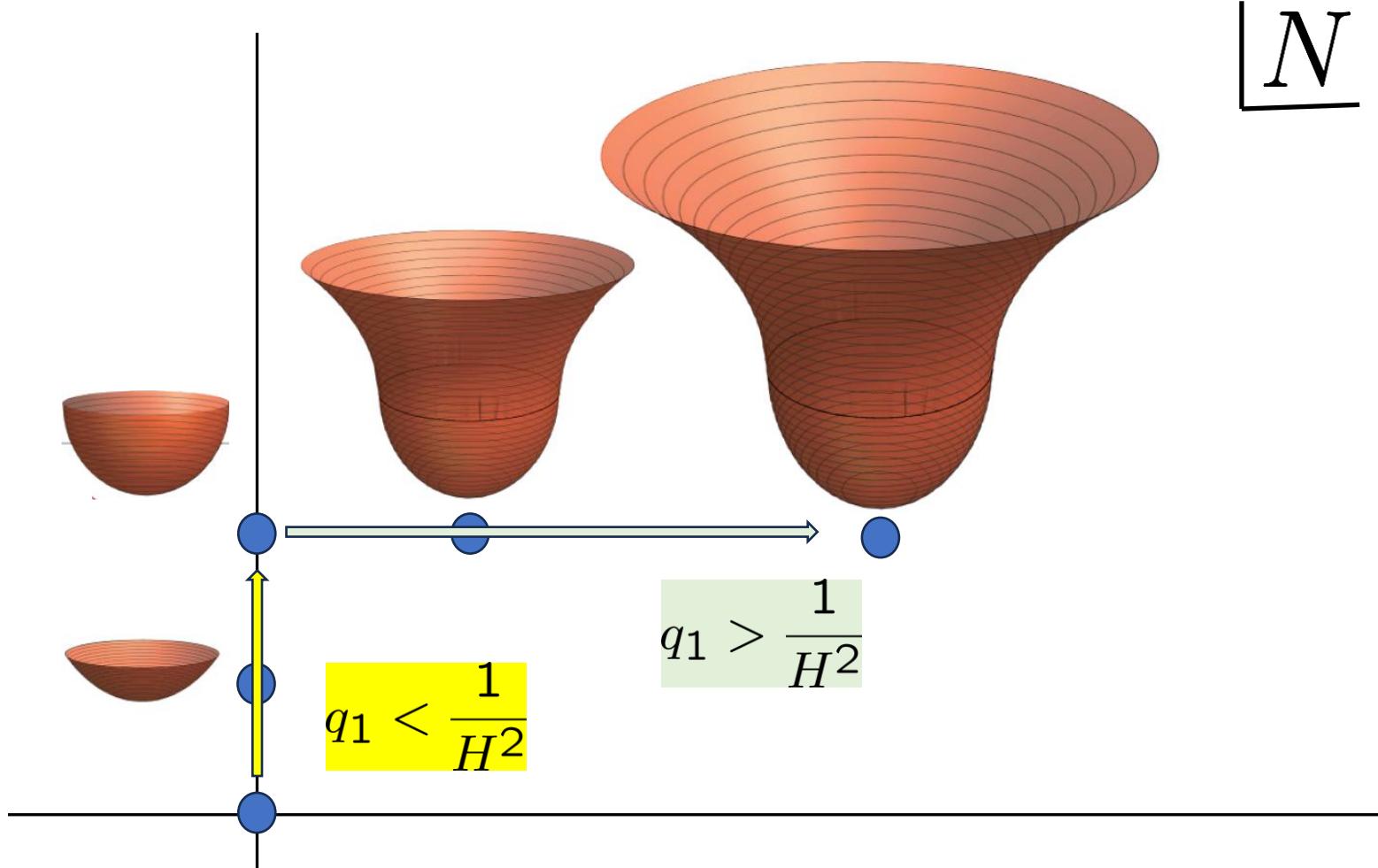
$$dt = \frac{d\tau}{HN^*} \cosh H\tau$$



$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{1}{H^2} \cosh^2 H\tau d\Omega_3^2 \quad (3+1)\text{次元ドジッター時空の一部}$$

実時間の出現、空間の指数関数的膨張

# $q_1$ に伴う時空の変化



虚時間もつ時空から始まり、実時間をもつ膨張時空に。

(量子トンネル効果を表す)

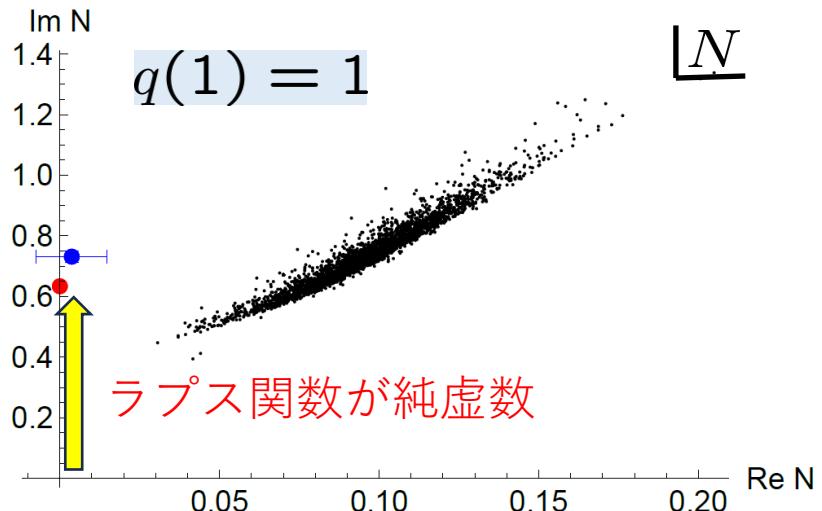
Figures from Jean-Luc Lehners, Phys.Rev.D 104 (2021) 6, 063527

# 量子宇宙論のシミュレーション

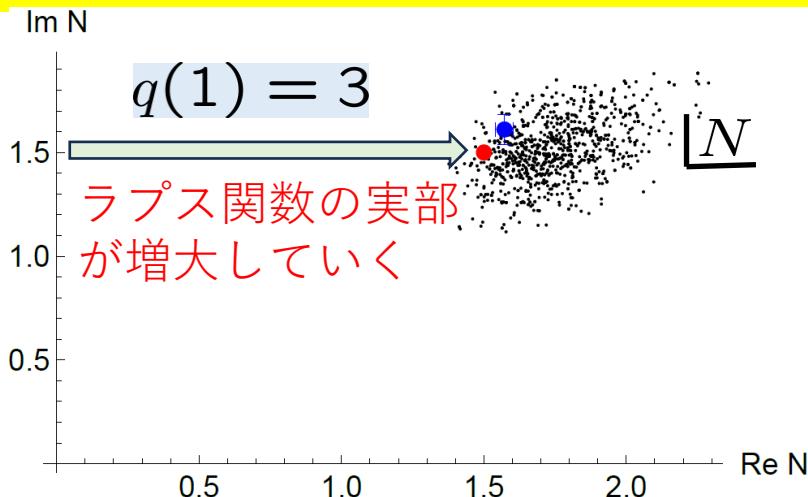
Chien-Yu Chou and JN,

JHEP 05 (2025) 142, arXiv: 2407.17724 [gr-qc]

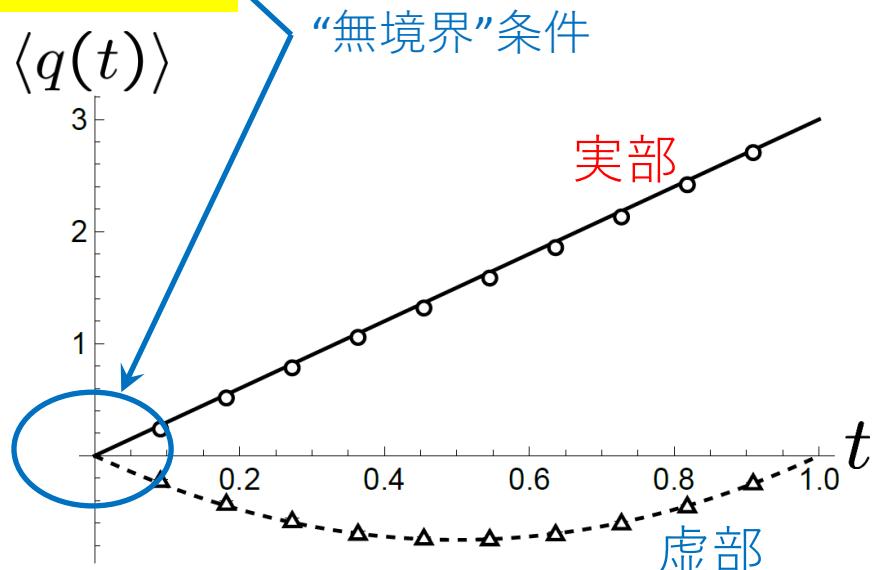
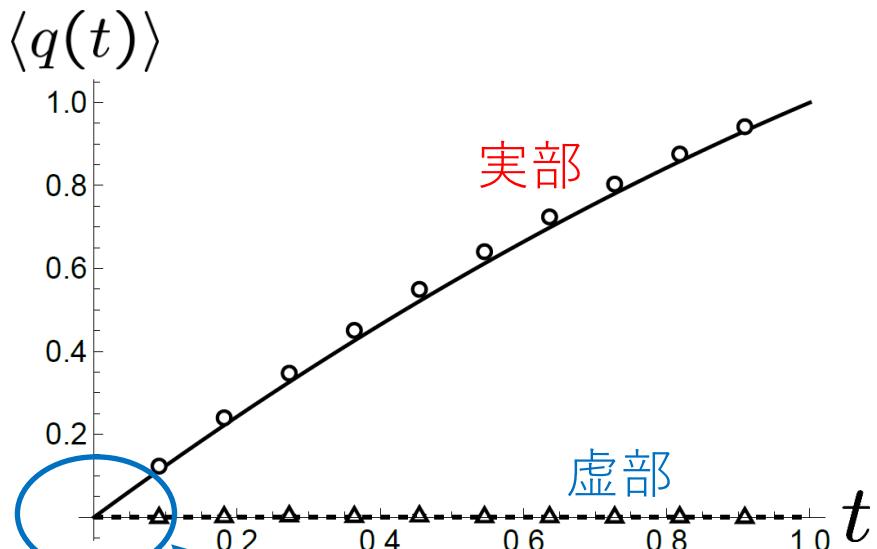
$$\Lambda = 3H^2 = 2$$



- 宇宙は虚時間から始まった（量子トンネル効果）



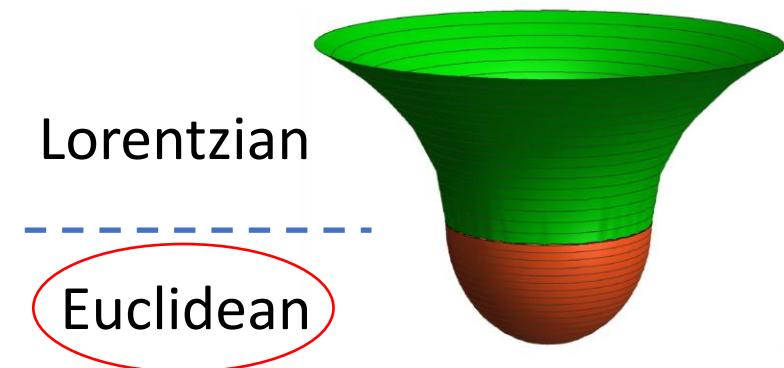
- 実時間の出現と空間の指指数的膨張



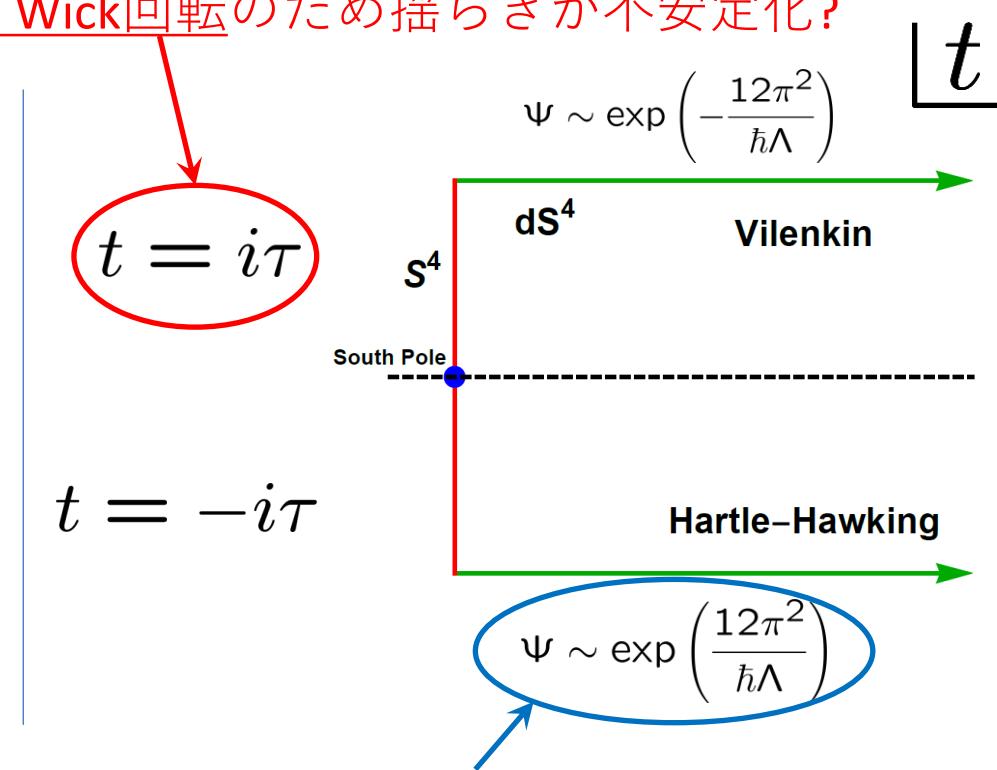
# 量子宇宙論の今後の課題

c.f.) 昨年の松井宏樹氏の講演

- Vilenkinの提案は、“間違った” Wick回転のため揺らぎが不安定化?



宇宙の始まりの量子トンネル効果



- Hartle-Hawkingの提案は、 $\Lambda = 0$  が支配的になるため、インフレーションのシナリオと相容れないように見える。
- 実際にテンソル・モードや物質場を入れて、揺らぎの不安定化の問題を摂動論に依らずに検証。本当にこれが問題なのかを明らかにしたい。

## 4. まとめと展望

# まとめと展望

- 「量子系の実時間発展を経路積分で調べる」という新しい研究の方向性

多自由度系の量子力学（自由度が大きいことによる計算コスト）  
量子重力（一般座標不変性を保つような計算）  
超弦理論（時空がアприオリには無く、創発するような理論）  
などにおいて、大きなメリットがある。
- 振動する積分を**well-defined**にして、具体的な計算が可能。  
(ピカール・レフシェツツ理論) (レフシェツツ・シンブル法)
- 量子トンネル効果や量子デコヒーレンス効果が、「複素鞍点」（半古典的な複素軌道）で捉えられる。
- 量子宇宙論やIKKT行列模型の数値シミュレーションにより「宇宙の始まり」の研究が可能。