

BEREZIN-TOEPLITZ量子化と DIFFEOMORPHISM

伊敷 吾郎
(筑波大学)

- G. I-Matsumoto(DIAS) 1904.00308

Plan of talk

1. Introduction
2. Berezin-Toeplitz量子化
3. 行列のDiffeomorphisms
4. 近似的不変量

Introduction

行列模型とM理論

膜の理論 (LC gauge)

$$\begin{aligned} S &= \int d\sigma^3 \sqrt{-h} + \text{fermion} \\ &= \int d\sigma^3 \left[\frac{1}{2} (DX_\mu)^2 - \frac{1}{4} \{X^\mu, X^\nu\}^2 + \dots \right] \\ \{f, g\} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 W^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \sigma^\beta} \quad \text{ポアソン括弧} \end{aligned}$$

BFSS行列模型

$$S = \frac{1}{g^2} \int dt \left[\frac{1}{2} (D\hat{X}_\mu)^2 + \frac{1}{4} [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu]^2 + \dots \right]$$

膜の埋め込み関数 $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2) \rightarrow \hat{X}^\mu(t)$ $N \times N$ エルミート行列

(σ^1, σ^2) に対するポアソン括弧 $\{ \quad , \quad \} \rightarrow [\quad , \quad]$ 行列の交換子

(σ^1, σ^2) 積分 $\int d\sigma^1 d\sigma^2 \rightarrow \text{Tr}$ 行列のトレース

行列正則化

[Hoppe, de Wit-Hoppe-Nicolai]

行列模型は単なる膜1体の理論の正則化ではなく、膜の第二量子化された理論であると予想されている。[BFSS, cf. IKKT, DVV]

行列模型の対称性

$$S = \frac{1}{g^2} \int dt \left[\frac{1}{2} (D\hat{X}_\mu)^2 + \frac{1}{4} [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu]^2 + \dots \right]$$

この作用は $\hat{X}^\mu \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{X}^\mu \hat{U}$ の下で不変。微小変換は

$$\delta \hat{X}^\mu = i[\hat{\phi}, \hat{X}^\mu] \quad \hat{U} = \exp(-i\hat{\phi})$$

この変換は膜の理論におけるArea-preserving diffeomorphismから来ている

$$\delta X^\mu = \{\phi, X^\mu\}$$

一般にスカラー関数に対するdiffeoの変換は

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu$$

特に $\xi^\alpha = W^{\beta\alpha} \partial_\beta \phi$ の変換は膜のarea formを不変に保つ変換であり、
このとき $\delta X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu = W^{\beta\alpha} \partial_\beta \phi \partial_\alpha X^\mu = \{\phi, X^\mu\}$

話のOutline

- ◆ 行列型におけるゲージ変換 $X^\mu \rightarrow U^\dagger X^\mu U$ は行列正則化を通して area-preserving diffeomorphism (APD) に対応する
- ◆ Area-preservingでないdiffeomorphismは、行列の変換としてどのようなものか？また、その不変量を構成できるか？
[cf. Steinacker, Hanada-Kawai-Kimura]
- ◆ 我々はBerezin-Toeplitz量子化と呼ばれる手法を用いて行列正則化を定義し、それを用いて行列に対するdiffeomorphismの変換を定義した。
- ◆ さらにその変換のもとでの、近似的不変量を提案した。

近似的不変量 = ゲージ変換 (APD) に対してexactに不変だが、
一般のdiffeoに対してはlarge-N極限でのみ不変な量

〔これまで考えられてきたゲージ不変量はおもに $\text{Tr} F[X]$ のタイプ
今回考えたゲージ不変量: $F[X]$ の最小 (最大) 固有値に関係〕

Berezin-Toeplitz量子化

行列正則化

\mathcal{M} : コンパクトシンプレクティック多様体

行列正則化とは線形写像 $T_N : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ で以下を満たすもの

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{N \rightarrow \infty} \|T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)\| = 0 & \text{関数の積} \Leftrightarrow \text{行列の積} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \|iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f, g\})\| = 0 & \text{ポアソン括弧} \Leftrightarrow \text{交換子} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} T_N(f) = \int f & \text{積分} \Leftrightarrow \text{トレース} \end{array} \right.$$

◆ 一般の \mathcal{M} について、これをみたすような $\{T_N\}$ が構成できるか？

◆ 簡単のため、まず $\mathcal{M} = R^2$ の場合を考える。

(注：コンパクトでないので、この場合上の定義にははまらない)

平面の場合、行列へのmappingは古典力学系の量子化と同じである。

古典力学と量子力学

◇ 古典力学

- ・ 相空間 (p, q) $\{p, q\} = 1$
- ・ オブザーバブル $\mathcal{O}(p, q)$

◇ 量子力学

- ・ 演算子 (\hat{p}, \hat{q}) $[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$
- ・ オブザーバブル $\hat{\mathcal{O}}(\hat{p}, \hat{q})$

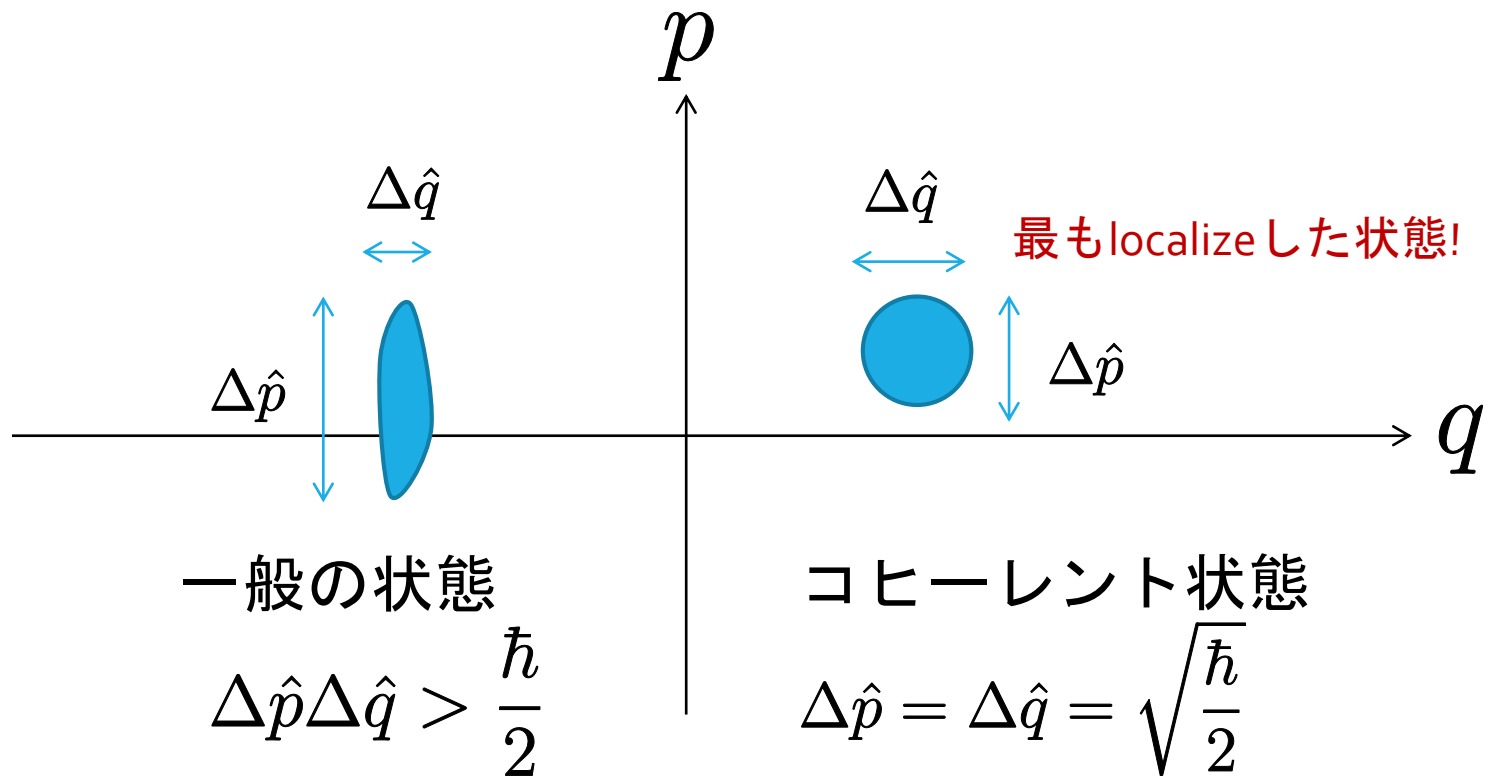
◆ 量子化

$$p, q, \mathcal{O}(p, q) \rightarrow \hat{p}, \hat{q}, \hat{\mathcal{O}}(\hat{p}, \hat{q})$$
$$\{p, q\} = 1 \quad [\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$$

- ◆ これはまさに関数から行列へのmapping (この場合は $\hbar \sim 1/N$)

コヒーレント状態を用いた量子化

- ・ コヒーレント状態 $|p, q\rangle$ (annihilation operatorの固有状態)
- ・ $|p, q\rangle$ は最小の波束を持つ



- ・ 量子化の写像 $\hat{O} = \int dp dq \mathcal{O}(p, q) |p, q\rangle \langle p, q|$ (Anti-normal ordering)

スピノルを使った(再)定式化

- ◆ コヒーレント状態は、 \mathbb{R}^2 上のDirac zero modeとして実現される。

$$\mathcal{D} = \Gamma^a (\partial_a + A_a) \quad \{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta^{ab}$$

A : \mathbb{R}^2 上の一様磁場を与えるゲージ場

- ・ ゼロモード ($\mathcal{D}\psi = 0$) の正規直交基底

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \langle n|p, q\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle : \text{任意の正規直行基底}$$


- ・ Toeplitz演算子

$$\hat{O}_{nn'} = \int \psi_{n'}^\dagger \mathcal{O} \psi_n \quad \left[\begin{array}{l} \text{先ほどの量子化と等価} \\ \longleftrightarrow \hat{O} = \int dp dq \mathcal{O}(p, q) |p, q\rangle \langle p, q| \end{array} \right]$$


- ◆ コヒーレント状態を用いた量子化 = スピノルのゼロモードによる量子化
- ◆ スピノルを用いた方法は、より一般の多様体の場合に拡張できる

Berezin-Toeplitz量子化

- ・ コンパクトなspin-C リーマン多様体 (\mathcal{M}, g)
- ・ ゲージ群 \mathcal{G} 、ゲージ場 A
- ・ \mathcal{M} 上のスピノルで、 \mathcal{G} のある表現 \mathcal{R} に属するものを考える
- ・ 内積 $(\psi, \psi') = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{g} \psi^\dagger \cdot \psi'$
- ・ Dirac演算子 $\mathcal{D} = \Gamma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + A_\alpha) \quad \{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta^{ab}$



Metricから決まる
Tetradとspin接続



表現 \mathcal{R} の空間に作用
- ・ ゼロモードの数を $\dim \text{Ker} \mathcal{D} = N$ と置く
- ・ $\{\psi_i | i = 1, 2, \dots, N\}$: ゼロモードの正規直行基底 $\begin{cases} (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \\ \mathcal{D} \psi_i = 0 \end{cases}$

Toeplitz演算子

: 関数 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ の作用を、ゼロモードの上に制限したもの

$$f\psi_i = \sum_j \hat{f}_{ij}\psi_j + \cdots \quad \longrightarrow \quad \hat{f}_{ij} = (\psi_j, f\psi_i)$$

zero modes nonzero modes

この関係は、関数から行列への写像を与えている: $T_N : f \rightarrow \hat{f}$

- ◆ この演算子の構成には、(計量・ゲージ場・スピノル)が必要
- ◆ ゼロモードの数を大きくするためには、ゲージ場がトポロジカルに非自明な配位を取る必要がある (モノポール・インスタントン etc)
- ◆ シンプレクティックでない空間に対してもToeplitz演算子は定義できる

◆ シンプレクティック多様体の場合に、以下のように幾何構造を選ぶ

$G = U(1)$, $F = \text{symplectic form}$, $g = \text{compatible metric of } F$
 スピノル : ChargeがNのもの $\left[\mathcal{D} = \sigma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + N A_\alpha) \right]$

するとToeplitz演算子は以下の性質を満たす(以下は2次元の場合)。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} \|T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)\| = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \|iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f, g\})\| = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} T_N(f) = \int f \end{array} \right.$$

・ [Bordemann-Meinrenken-Shlichenmaier, Ma-Marinescu]

例 1 : S^2

◆ $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} \quad \omega = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} \quad (\text{stereographic coordinate})$

◆ ゲージ群 = $U(1)$, $A = \frac{1}{2} \frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1 + |z|^2} \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int F = 1 \quad \text{Wu-Yangモノポール} \right)$

◆ charge N のスピノルを考える

Dirac演算子: $\mathcal{D} = \sigma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + N A_\alpha)$

Index定理 $\Rightarrow \dim \text{Ker} \mathcal{D} = N$

◆ ゼロモードの基底

$$\psi_r = \left(\frac{(2J)!}{(J-r)!(J+r)!} \right)^{1/2} \frac{z^{J-r}}{(1+|z|^2)^J} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \int d^2z \sqrt{g} \psi_r^\dagger \psi_{r'} = \delta_{rr'} \\ \mathcal{D} \psi_r = 0 \end{array} \right.$$

$$J = (N-1)/2, \quad r = -J, -J+1, \dots, J$$

◆ Toeplitz演算子 $\hat{f}_{rr'} = \int d^2z \sqrt{g} \psi_{r'}^\dagger f \psi_r$

単位球面の埋め込み関数 $\begin{cases} x^1 = \sin \theta \cos \phi \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi \\ x^3 = \cos \theta \end{cases} \quad \left(z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right)$

に対してはToeplitz演算子は以下で与えられる

$$\hat{x}^\mu = \frac{1}{J+1} L^\mu \quad L^\mu : \text{SU(2)生成子のN次元既約表現行列}$$

$$[L^\mu, L^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\rho} L^\rho$$

Fuzzy sphere [Madore]

◆ Toeplitz演算子は以下を満たす

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f, g\})\| = 0$$

これは次の関係式から直ちに理解できる

$$\{x^\mu, x^\nu\} = \epsilon^{\mu\nu\rho} x^\rho \iff [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \frac{i}{J+1} \epsilon^{\mu\nu\rho} \hat{x}^\rho$$

◆ S^2 上のラプラシアン Δ も、行列に対する演算にmapできる

f のToeplitz演算子が \hat{f} のとき、 Δf のToeplitz演算子は以下となる

$$\hat{\Delta f} = [\hat{x}^\mu, [\hat{x}^\mu, \hat{f}]]$$

例 2: トーラス

- ・ 計量 $ds^2 = d\theta^2 + d\phi^2$ $(\theta, \phi) \sim (\theta + 2\pi n, \phi + 2\pi m)$
- ・ $G=U(1)$, ゲージ場は一様磁場 $\frac{1}{2\pi} \int F = 1$
- ・ charge N のスピノル $\dim \text{Ker} \not{D} = N$
- ・ $(e^{i\theta}, e^{i\phi})$ に対する Toeplitz 演算子は、clock-shift 行列となる。

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & e^{2\pi i/N} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{2\pi i(N-1)/N} \end{pmatrix}$$

Fuzzy torus

例 3 : S^4

◆ 計量 $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\psi^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \sin^2 \psi d\chi^2$

◆ ゲージ群 = $SU(2)$, $A = A^a L_a$

$$\left[\begin{array}{l} A^1 = \cos \phi d\psi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta d\chi \\ A^2 = -\sin \phi \cos \theta d\psi - \sin \psi \cos \phi d\chi \\ A^3 = -\cos \theta d\phi + \cos \psi d\chi \end{array} \right. \left(\frac{1}{8\pi} \int F^a \wedge F^a = 1 : \text{Yangモノポール} \right)$$

◆ スピンJ表現のスピンルを考える

Dirac 演算子: $\mathcal{D} = \Gamma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + A_\alpha^{[J]})$

インデックス定理 $\Rightarrow \dim \text{Ker} \mathcal{D} = \frac{J(J+1)(2J+1)}{3} =: N$

◆ ゼロモードの基底

$$\psi_i^{Jm} = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\gamma=-J+\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} C_{\frac{1}{2}sJ-\frac{1}{2}\gamma}^{Jm} |1/2, s\rangle \langle i|U^{\otimes n}|J-1/2, \gamma\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \int d\Omega_4 \psi_i^\dagger \psi_j = \delta_{ij} \\ \mathcal{D} \psi_i = 0 \end{array} \right.$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

◆ Toeplitz演算子 $\hat{f}_{ij} = \int d^2z \sqrt{g} \psi_j^\dagger f \psi_i$

単位球面の埋め込み関数

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = \sin \theta \sin \phi \sin \psi \cos \chi \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi \sin \psi \sin \chi \\ x^3 = \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ x^4 = \sin \theta \cos \phi \\ x^5 = \cos \theta \end{array} \right.$$

に対してToeplitz演算子は

$$\hat{x}^\mu = \frac{1}{2J+3} [\Gamma^\mu \otimes 1_4 \otimes \dots \otimes 1_4 + sym] \quad \text{Fuzzy } S^4$$

◆ S^4 はシンプレクティック多様体ではないが、Toeplitz演算子は定義できる。

◆ ラプラシアン

f のToeplitz演算子が \hat{f} のとき、 Δf のToeplitz演算子は以下となる

$$\Delta \hat{f} = [\hat{x}^\mu, [\hat{x}^\mu, \hat{f}]]$$

この形はどこまでユニバーサルなのか？

行列のDiffeomorphism

Diffeomorphisms

- ◆ Diffeoは滑らかな1:1写像 $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ である
- ◆ $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ の場合のdiffeo不変量が、物理には重要（一般相対論など）
- ◆ Diffeoは \mathcal{M} 上の関数の変換を誘導する

$$\text{For } \sigma \rightarrow \sigma'(\sigma), \quad f(\sigma) \rightarrow f'(\sigma) := f \circ \sigma'(\sigma) = f(\sigma'(\sigma))$$

$$C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$$

- ◆ Diffeo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ はより一般に、 \mathcal{M} 上のテンソル場の変換を引き起こす

幾何構造を不変に保つDiffeo

- Isometry: 計量を不変に保つ
- Symplectomorphism: シンプレクティック形式を不変に保つ
- Volume(Area)-preserving diffeo: volume (area) formを不変に保つ
- Holomorphic diffeo: 複素構造を不変に保つ

行列のDiffeo

- ◆ Berezin-Toeplitz 量子化を使えば、以下のように行列がDiffeoの下でどのように変換するのを読み取ることができる。

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathcal{M}) \ni f & \xrightarrow{\text{BTQ}} & \hat{f} \\ \text{Diffeo} \downarrow & & \downarrow \text{行列の Diffeo} \\ C^\infty(\mathcal{M}) \ni f' & \xrightarrow{\text{BTQ}} & \hat{f}' \end{array}$$

Area-preserving diffeo (APD)

- ・（ほとんどの）APDに対して、関数の微小変換は以下のように書ける

$$\delta f = \{\alpha, f\}$$

- ・ BT量子化によれば、これは以下の形のものにmapされるはず

$$\hat{\delta} f = i[\hat{\alpha}, \hat{f}]$$

- ◆ この有限変換版は、ユニタリー相似変換である

$$\hat{f}' = \hat{U}^\dagger \hat{f} \hat{U} \quad \text{APD} \Leftrightarrow \text{ゲージ変換}$$

- ◆ APD以外のdiffeoに対してはどのようなものになるのか？

Diffeomorphisms on S^2

- ◆ S^2 という単純な空間でも一般のdiffeoは無限個あって手におえないので、簡単のためholomorphicなdiffeoだけに注目する
- ◆ S^2 上のholomorphic diffeoは $SL(2, C)/Z_2$ と同型であることが知られている。

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{with} \quad a, b, c, d \in C, \quad ad - bc = 1$$

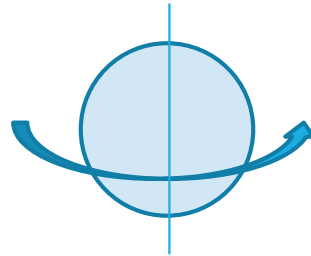
- ◆ 以下の4つの変換によって生成される

▪ rotation	$z \rightarrow e^{i\theta} z$	← APD & Isometry
▪ dilatation	$z \rightarrow e^t z$	APDでもisometryでもない
▪ translation	$z \rightarrow z + p$	
▪ sp. conf.	$z \rightarrow \frac{z}{qz + 1}$	

$(\theta, t \in R, \quad p, q \in C)$

例 1 : Rotation on S^2

$$z' = e^{i\theta} z$$



Rotation on the 1-2 plane

$$\hat{x}_{ij}^{\mu'} = \int d^2 z \sqrt{g} \psi_j^\dagger x^{\mu'} \psi_i = \int d^2 z \sqrt{g} \psi_j^\dagger(z) x^\mu(z'(z)) \psi_i(z)$$

$$\longrightarrow \hat{x}'^\mu = U^\dagger \hat{x}^\mu U$$

$$U = e^{i\theta \hat{x}^3}$$

APD \Leftrightarrow Unitary 相似变换

例 2 : Dilatation on S^2

◆ For the dilatation $z \rightarrow e^t z$, we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{x}'^3)_{rr'} = \frac{\delta_{rr'}}{J+1} [(J+1)F(J+r+2, 0, 2J+3; 1-e^{-2t}) - (J-r+1)F(J+r+1, 1, 2J+3; 1-e^{-2t})] \\ (\hat{x}'^{\pm})_{rr'} = \frac{\delta_{rr' \pm 1} e^{-t}}{J+1} [\sqrt{(J \pm r+1)(J \pm r)} F(J+r+2, 1, 2J+3; 1-e^{-2t})] \end{array} \right.$$

F: Gauss's hyper geometric function

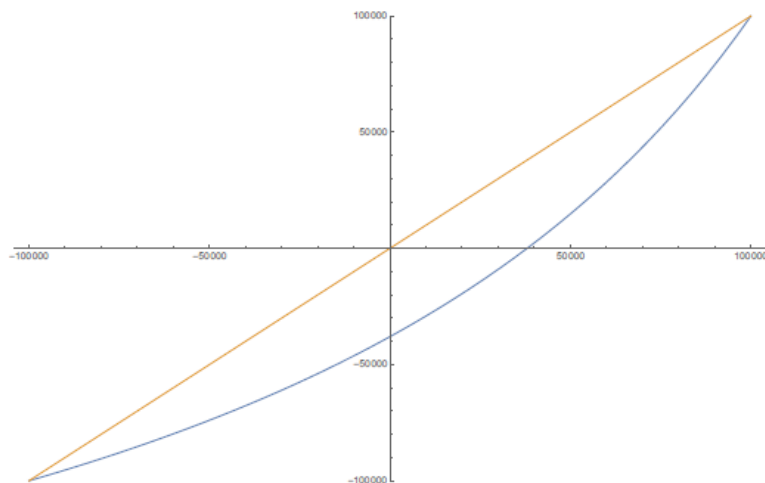
$$\begin{aligned} (\hat{x}'^\mu \hat{x}'^\mu)_{rr} = & \frac{1}{(J+1)^2} [(J+1)F(J+r+2, 0, 2J+3 : 1-e^{-2t}) \\ & - (J-r+1)F(J+r+1, 1, 2J+3 : 1-e^{-2t})]^2 \\ & + \frac{e^{-2t}}{2(J+1)} [(J+r+1)(J-r)F(J+r+3, 1, 2J+3 : 1-e^{-2t})^2 \\ & + (J+r)(J-r+1)F(J+r+2, 1, 2J+3 : 1-e^{-2t})^2] \end{aligned}$$

◆ They look very complicated. But all eigenvalues of $\hat{x}'^\mu \hat{x}'^\mu$ are nearly equal to 1 .

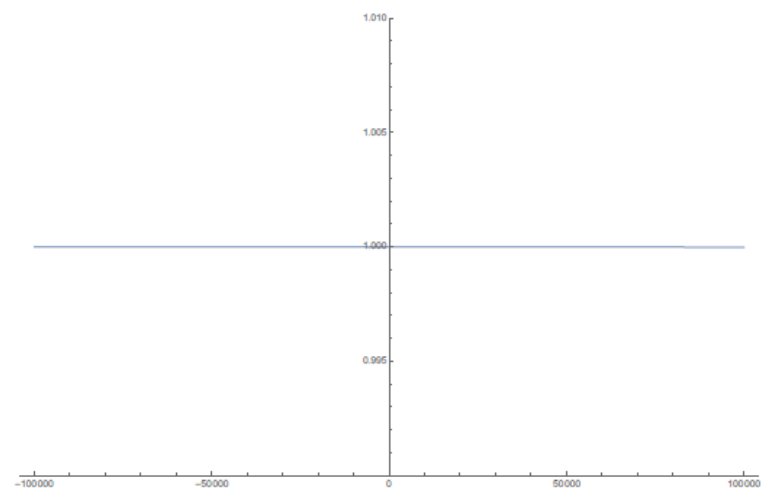
Plots for Eigenvalues

Orange : $t=0$ (original fuzzy S_2)

Blue : $t=0.4$



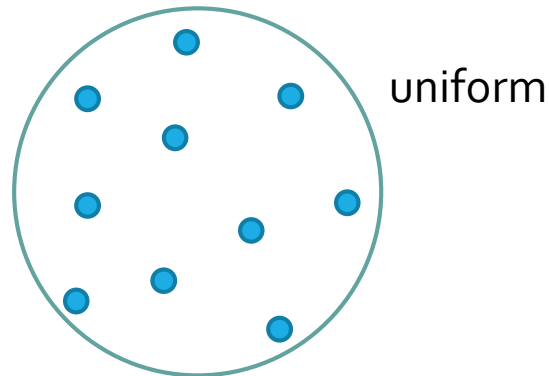
Eigenvalues of \hat{x}^3



Eigenvalues of $\sum_i \hat{x}^i \hat{x}^i$

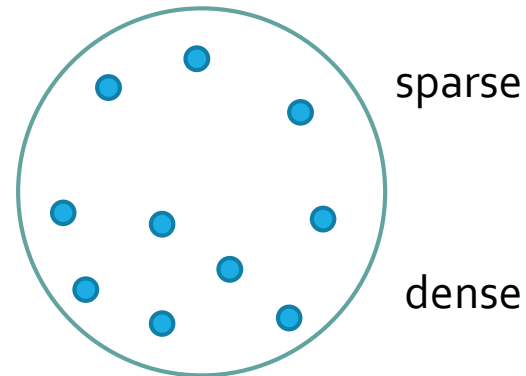
固有値の集合はdiffeoによって変形される（相似変換では書けない）が、固有値がtarget空間の単位球面上に分布するという性質は保っている

Diffeomorphism for fuzzy spaces?



Ordinary fuzzy sphere

$$t = 0$$



$$t \neq 0$$

- ◆ It is suggested from this example that diffeomorphisms for fuzzy spaces are given by transformations of Do-brane density, such that the support of the density function in the target space is kept fixed.

近似的不变量

近似的不変量

行列の汎関数 $I(X^\mu)$ であり、ゲージ変換の下でexactに不変、

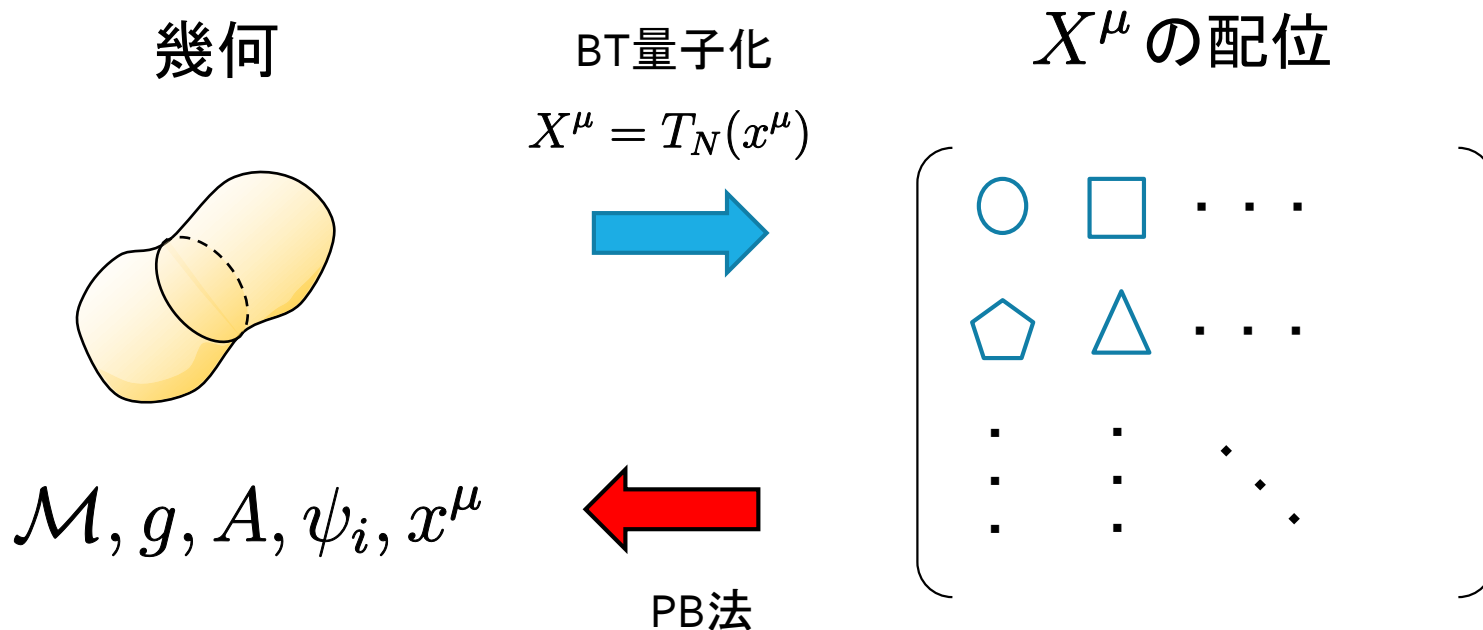
$$I(X^\mu + i[C, X^\mu]) = I(X^\mu)$$

一般のDiffeoの下ではlarge-Nで不変

$$I(X^\mu + \delta X^\mu) = I(X^\mu) + \mathcal{O}(1/N)$$

になっているようなものを構成する

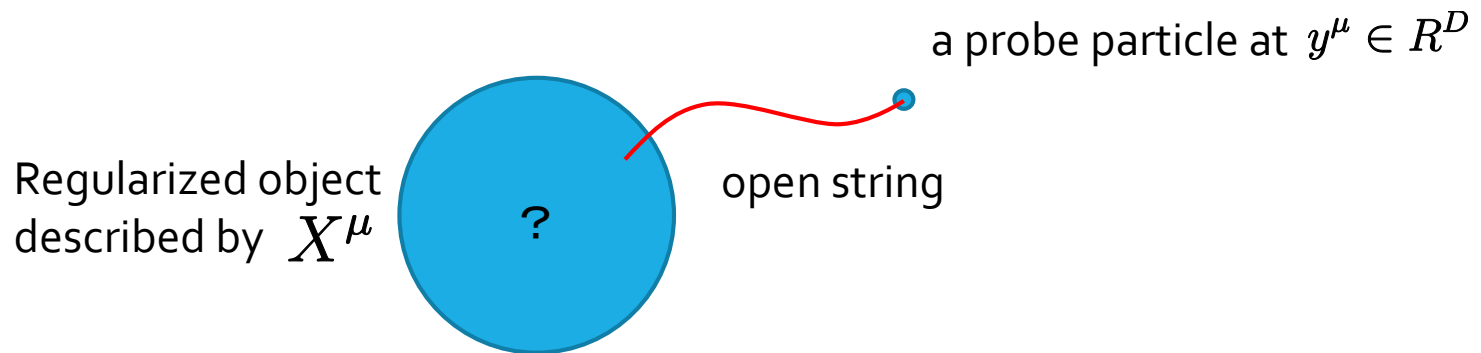
Probe brane法



PB法を用いれば、行列の配位から対応する幾何を読み取れる

Cf. Coherent state法 [Ishiki, Schneiderbauer-Steinaker]

行列模型において、 X^μ に加えてもう一つ別のprobe粒子 (Do-brane) を導入する



開弦の最低エネルギー \propto 開弦の長さ

エネルギー = 0 \Leftrightarrow 長さ = 0 \Leftrightarrow probe粒子が物体に触れている

X^μ によって記述される物体の形は、開弦のエネルギーが0になる超曲面として表すことができる。

◆ 開弦のエネルギーは 行列版のDirac演算子の固有値で与えられる

$$\mathcal{D} = \Gamma^\mu \otimes (X^\mu - y^\mu 1_N)$$

SO(d) gamma matrices

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

$y^\mu \in R^D$: the position of
the probe particle

◆ 固有状態

$$\mathcal{D}(y)|n, y\rangle = E_n(y)|n, y\rangle \quad |E_0| \leq |E_1| \leq \dots$$

◆ X^μ の記述する幾何は、以下で与えられる。

$$\mathcal{M} := \{y \in R^D | E_0(y) = 0\}$$

BT量子化とPB法の関係

少なくともターゲット空間が3次元で \mathcal{M} が2次元の場合には、PB法のzero modeはBT量子化のzero modeによって与えられることが示せる。
(高次元の場合は考え中)

$$\mathcal{D}(y)|0, y\rangle = 0$$

$$|0, y\rangle = U \sum_i \psi_i \otimes |i\rangle \quad \mathcal{D} = \Gamma^\mu \otimes (X^\mu - y^\mu 1_N)$$

のとき、 $|0, y\rangle$ の各成分 ψ_i は連続のDirac演算子のゼロモードになっている

$$\mathcal{D}\psi_i = 0$$

連続のDirac 演算子 $\left\{ \begin{array}{l} \text{埋め込みによるinduced metric} \\ \text{Berry connection } A = \langle 0, y | d | 0, y \rangle \end{array} \right.$

$$\mathcal{M} := \{y \in R^D | E_0(y) = 0\}$$

$E_0(y(\sigma)) = 0$ というようにこの超曲面をパラメトライズする座標を入れる

◆ 近似的不変量その1 :

$$E_0(X, y(\sigma))$$

行列のdiffeoはtarget空間での形を保っていた

埋め込みや誘導計量の情報を持っている [Ishiki]

◆ 近似的不変量その2 :

$$\text{情報計量} \quad ds^2 = \text{Tr} d\rho^2 = g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \quad \rho(\sigma) = |0, y(\sigma)\rangle \langle 0, y(\sigma)|$$

は行列のdiffeoの下で $\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \chi_\beta + \nabla_\beta \chi_\alpha + \mathcal{O}(1/N)$ の形で変換

$$I_0(X) = \int d^d\sigma \sqrt{g} \quad I_1(X) = \int d^d\sigma \sqrt{g} R \quad \text{等は近似的不変量}$$

Heat Kernel

◆ もう一つ別の不変量の構成として、Heat kernelを用いたものがある

◆ 一般にコンパクトな空間上で Δ : Laplacian

$$K(t) = \text{Tr} e^{-t\Delta} = \frac{1}{(4\pi t)^n} \int \sqrt{g} + \frac{1}{(4\pi)^n t^{n-1}} \int \sqrt{g} \frac{R}{6} + \dots$$

$t \sim +0$

◆ Fuzzyな空間上で素朴にこれをやろうとすると全く違う展開になってしまう

$$K'(t) = \text{Tr} e^{-t[X^\mu, [X^\mu, \cdot]]} = \text{Tr}(1) + \mathcal{O}(t)$$

$t \sim +0$

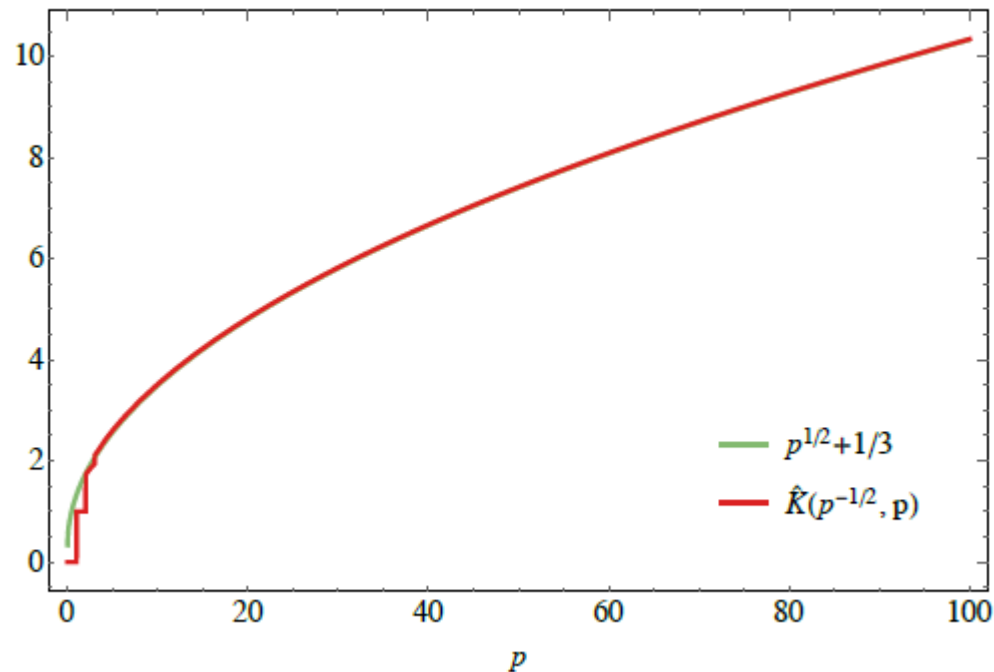
◆ しかし、 t を $1/N$ より遅くゼロに行くようにとればよい。例えば $t = N^{-1/2}$

$$K'(t) = \frac{c_0}{t^n} + \frac{c_1}{t^{n-1}} + \dots \quad (N \rightarrow \infty)$$

[cf. Sasakura (finite N)]

$$K'(t) = \frac{c_0}{t^n} + \frac{c_1}{t^{n-1}} + \dots \quad (N \rightarrow \infty)$$

Fuzzy S^2 の場合



Fuzzy S^2 の場合、各係数 c_0, c_1 が行列のDiffeoに不変であることが示せる。
 しかし、一般の場合にはそもそもラプラシアンが $[X^\mu, [X^\mu, \cdot]]$ でよいのか不明。

まとめと展望

- ◆ Berezin-Toeplitz 量子化 : 関数 \Rightarrow 行列
- ◆ BT量子化を用いて、“行列のdiffeomorphism”を定義した
- ◆ 3種類の近似的不変量を提案 (Eo, 情報計量, Heat kernel)
これらはそれぞれ異なるメトリックに対応する
- ◆ 不変量を用いた理論の構成
- ◆ Hopf代数を用いた言い換え
- ◆ Higher spinへの拡張 [cf. Hanada-Kawai-Kimura]