

離散的手法による場と時空のダイナミクス2025

明治学院大学(白金キャンパス) 2025-09-09

# $E_8$ 格子の数理とJacobi形式

酒井 一博

(明治学院大学情報数理学部)

arXiv:2410.12907 [math.NT]

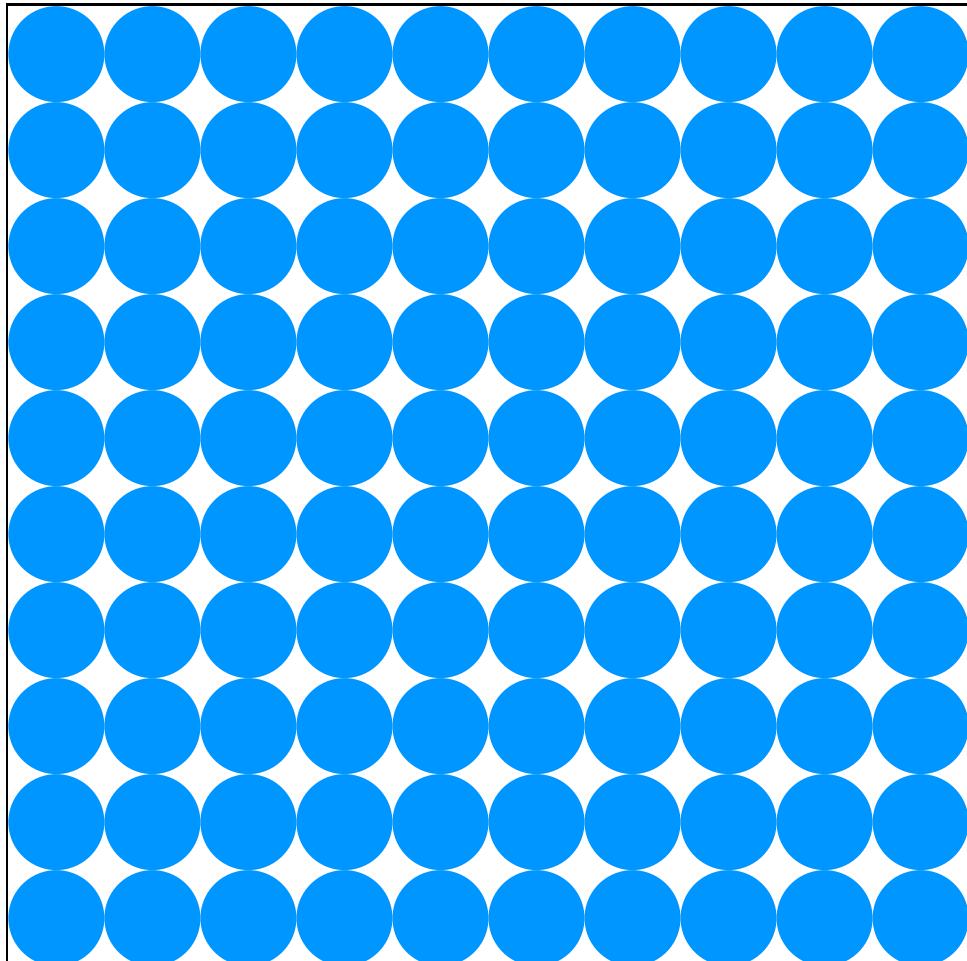
(2201.06895, 2504.00546)

# 今日の話の構成

- 前半： $E_8$ 格子
  - 格子、球充填問題、誤り訂正符号、弦理論のつながり
- 後半：(Weyl群不变な) Jacobi形式
  - 超対称場の理論におけるよい変数
  - Weyl群の不变量、同次多項式の不变式
  - $W(E_8)$ 不变弱Jacobi形式のなす環の構造定理 (今回の結果)

# はじめに

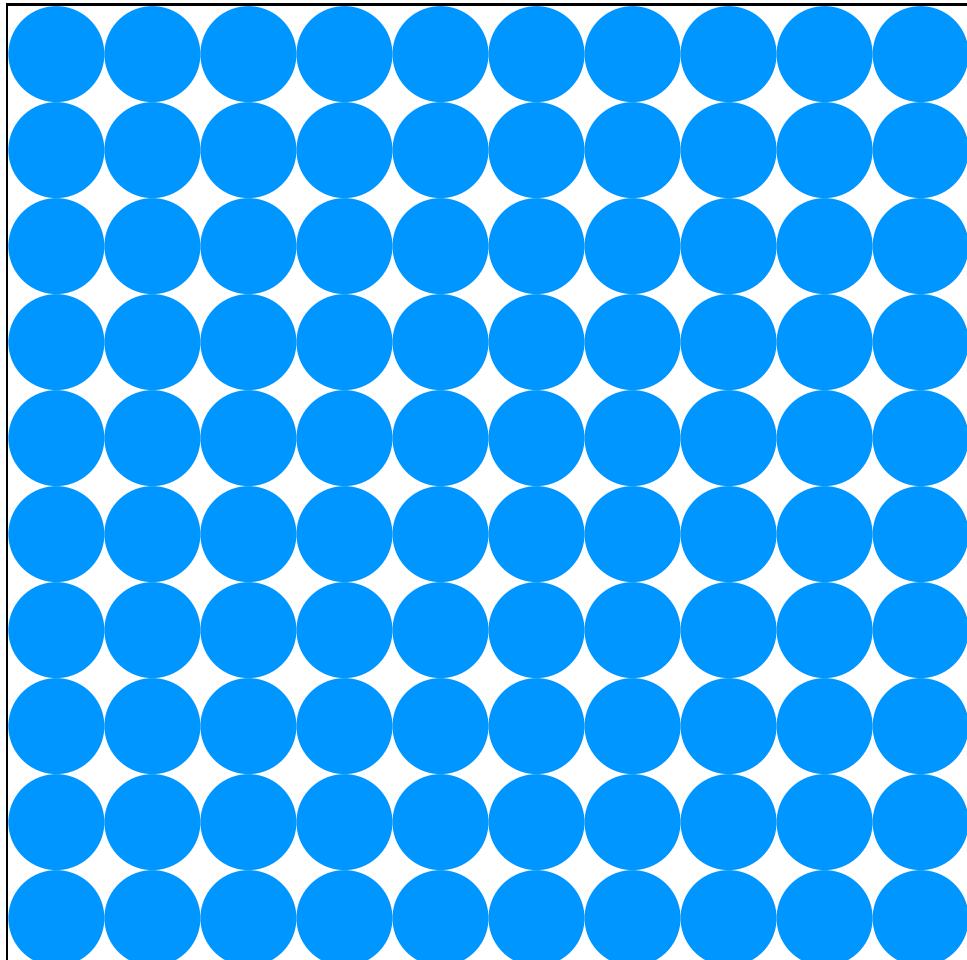
- 1m×1mの正方形内に、直径10cmの円を重ならないように並べます。最大何枚入りますか？



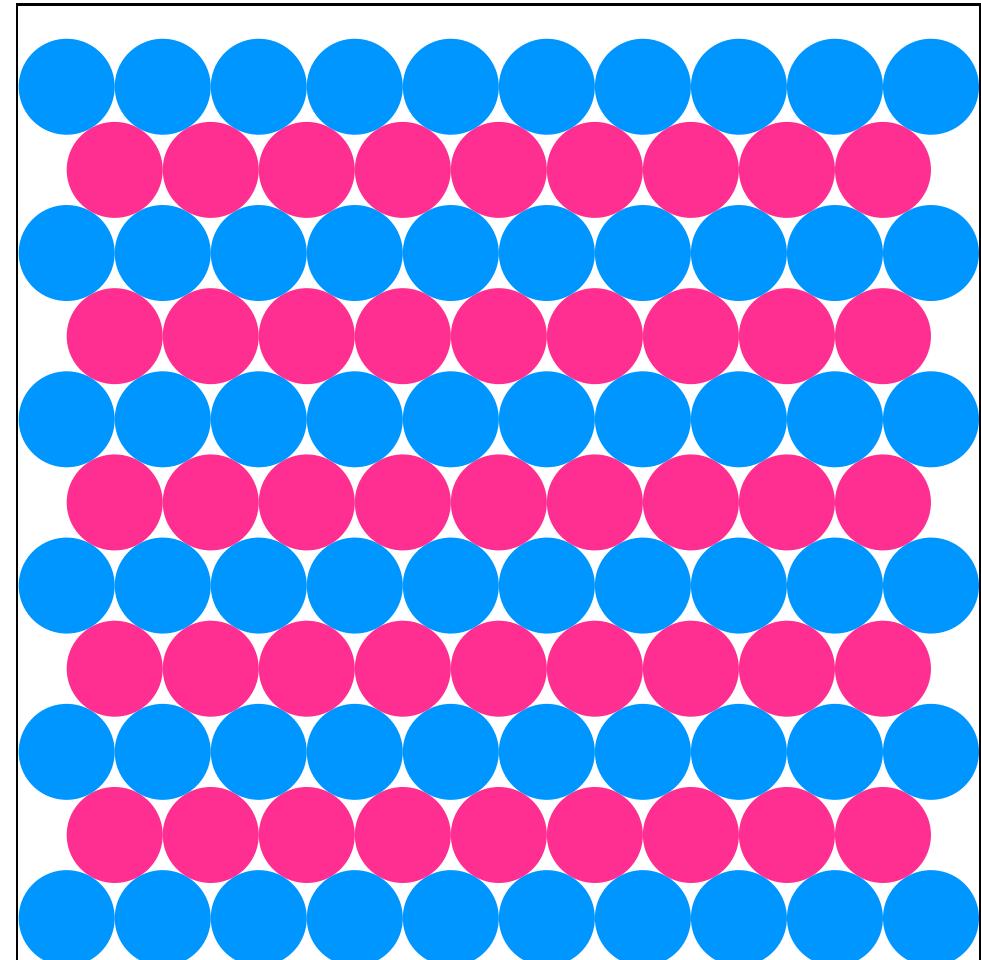
100個

# はじめに

- 1m×1mの正方形内に、直径10cmの円を重ならないように並べます。  
最大何枚入りますか？



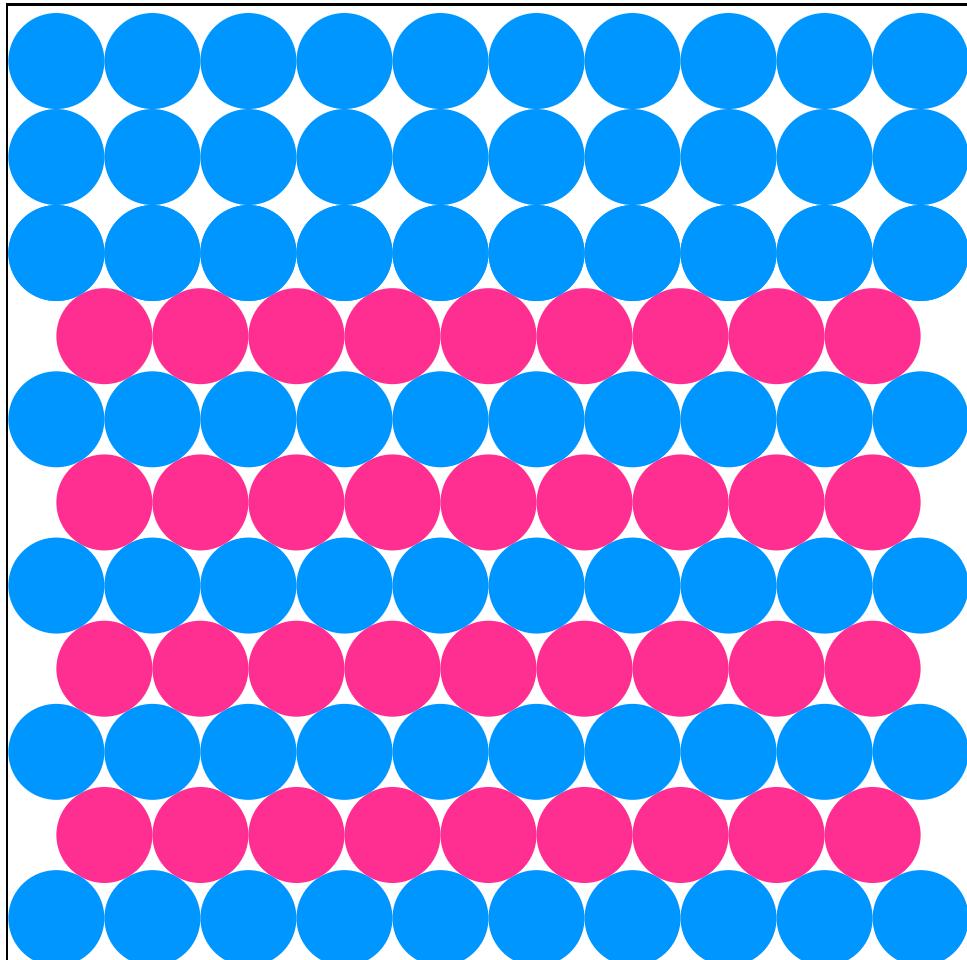
100個



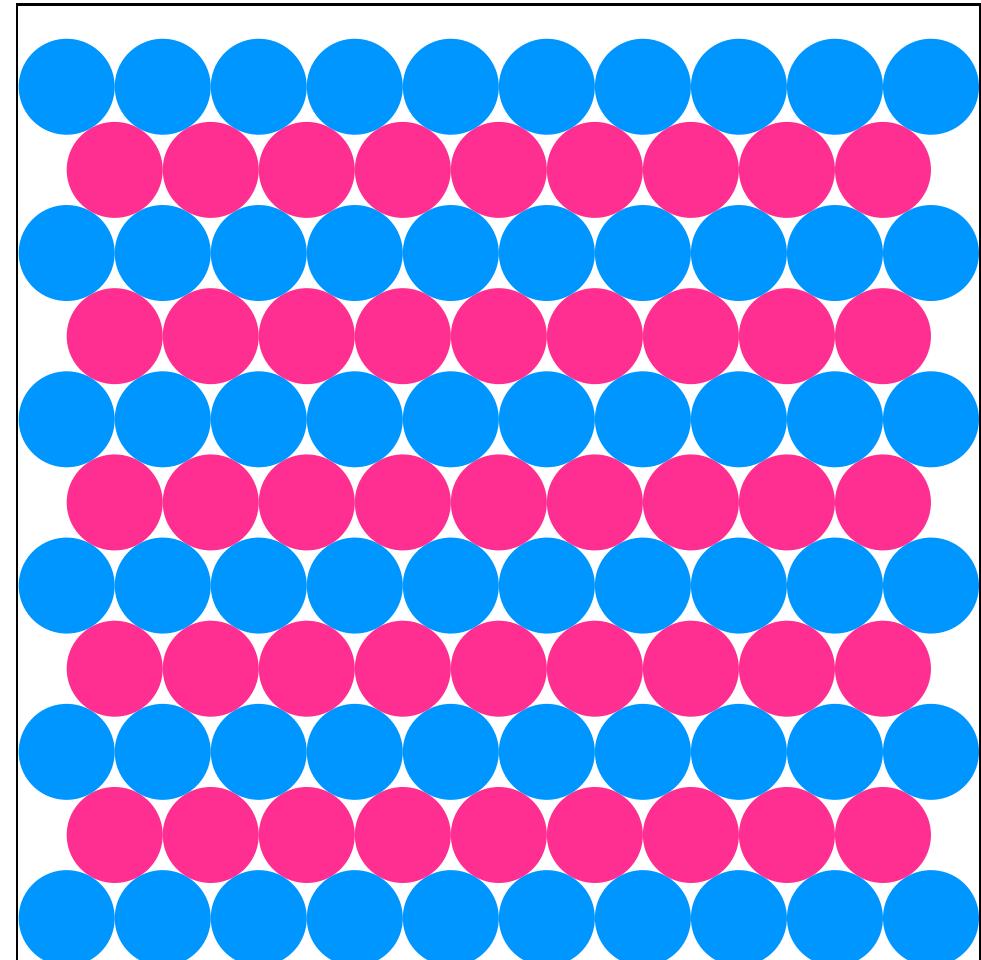
105個!

# はじめに

- 1m×1mの正方形内に、直径10cmの円を重ならないように並べます。  
最大何枚入りますか？



106個!!



105個!

# 球充填問題 (sphere packing problem)

- 互いに重なり合わない同半径の超球を $d$ 次元ユークリッド空間に詰め込むとき、密度の最大値、およびそれを実現する配置を求めよ。

超球の中心(点)のなす集合を言えばよい

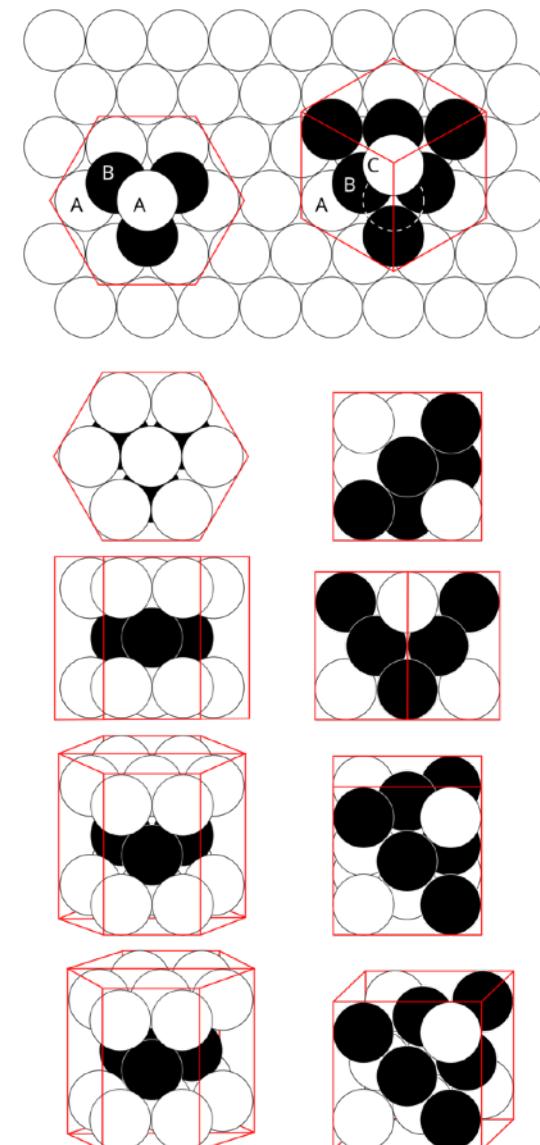
- $d = 1$ : 整数格子

• • • • • • •

- $d = 2$ : 六角格子

• • • • • • •  
• • • • • • •  
• • • • • • •  
• • • • • • •  
• • • • • • •  
• • • • • • •

- $d = 3$ : 面心立方格子、六方最密充填、...



# 球充填問題 — (少なくとも) Kepler (1611) 以来続く難問 —

- $d = 1, 2, 3, 8, 24$ の場合にしか解けていない！(格子に限れば  $d \leq 8, d = 24$ )

| 次元 | 現時点での最密解                 | 証明                                           |
|----|--------------------------|----------------------------------------------|
| 1  | $\mathbb{Z}$ ( $A_1$ 格子) | (自明)                                         |
| 2  | $A_2$ 格子                 | A. Thue (1890)? L. Tóth (1940)               |
| 3  | $A_3$ 格子 & 他無数           | T. Hales (1998) [250 pages + computer]       |
| 4  | $D_4$ 格子                 |                                              |
| 5  | $D_5$ 格子 & 他無数           |                                              |
| 6  | $E_6$ 格子 & 他無数           |                                              |
| 7  | $E_7$ 格子 & 他無数           |                                              |
| 8  | $E_8$ 格子                 | M. Viazovska (2016) [Fields Medal 2022]      |
| 9  | $D_9^+$ 格子 & 他無数         |                                              |
| 10 | Bestの充填 (非格子)            |                                              |
| 24 | Leech格子                  | Cohn-Kumar-Miller-Radchenko-Viazovska (2016) |

## 格子 (今回は正定値符号の格子のみ考える)

- 格子とは、ユークリッド空間内の離散的な点（格子点）の集合で、格子点同士の和や差もまた格子点となるもの

$$\Lambda = \{m_1 \vec{u}_1 + \cdots + m_n \vec{u}_n \mid m_i \in \mathbb{Z}\} \quad (\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} : \mathbb{R}^n \text{ の基底})$$

- 代表的な格子

$$A_n = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0\}$$

$A_1 \cong \mathbb{Z}$  (整数格子),  $A_2$  = 六角格子,  $A_3$  = 面心立方格子

$$D_n = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = \text{even}\}$$

$D_1 \cong A_1 \cong \mathbb{Z}$ ,  $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$ ,  $D_3 \cong A_3$

$$E_8 = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \mid x_1 + \cdots + x_8 = \text{even}\}$$

( $D_8$ を2つ、あるいは $A_8$ を3つ、ずらして重ねたもの)

## $E_8$ 格子 — 特別な格子 —

- Even unimodular lattice
  - 格子点のノルム  $\vec{x}^2$  が常に偶数 (even)
  - 格子の基底  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\}$  について  $[\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d)]^2 = 1$  (unimodular)
- Even unimodular latticeは(正定値符号では)  $d$ が8の倍数のときのみ存在

$$d = 8 : E_8$$

$$d = 16 : E_8 \oplus E_8, D_{16}^+$$

$$d = 24 : 24\text{種類 (その内の1つがLeech格子)}$$

# 誤り訂正符号

- ノイズが入る際のデータの通信や保存に用いられる  
データに冗長性を持たせて送る

$1011 \rightarrow 11001111 \rightsquigarrow 11001\textcolor{red}{0}11 \rightarrow 10\textcolor{blue}{1}1? \text{ or } 1001?$

(これでは不十分(誤りの検出はできる))

$1011 \rightarrow 111000111111 \rightsquigarrow 1110001\textcolor{red}{0}1111 \rightarrow 10\textcolor{blue}{1}1!$

効率のよいやり方は？

(高い確率で誤りを訂正できる)

- 例：(8,4) 拡張Hamming符号

|     |       |
|-----|-------|
| 000 | 00000 |
| 000 | 01111 |
| 001 | 10011 |
| 001 | 11100 |
| 010 | 10101 |
| 010 | 11010 |
| 011 | 00110 |
| 011 | 01001 |
| 100 | 10110 |
| 100 | 11001 |
| 101 | 00101 |
| 101 | 01010 |
| 110 | 00011 |
| 110 | 01100 |
| 111 | 10000 |
| 111 | 11111 |

- 4ビットのデータを8ビットの「符号語」に変換して送る
- 16個のどの符号語同士も最低4ビットずつ異なる  
(2つの符号語間のHamming距離(異なるビットの数)  $\geq 4$ )  
 $\Rightarrow$  1ビットの誤り訂正と2ビットまでの誤り検出が  
同時に可能！

# 格子と誤り訂正符号

- 誤り訂正符号から格子を構成できる（その逆も可能）

## 例：(8,4) 拡張Hamming符号

00000000  
00001111  
00110011  
00111100  
01010101  
01011010  
01100110  
01101001  
10010110  
10011001  
10100101  
10101010  
11000011  
11001100  
11110000  
11111111

符号語のいずれかと mod 2 で合同な  $\mathbb{Z}^8$  の点の集合

⇒  $E_8$ 格子（の  $\sqrt{2}$  倍）

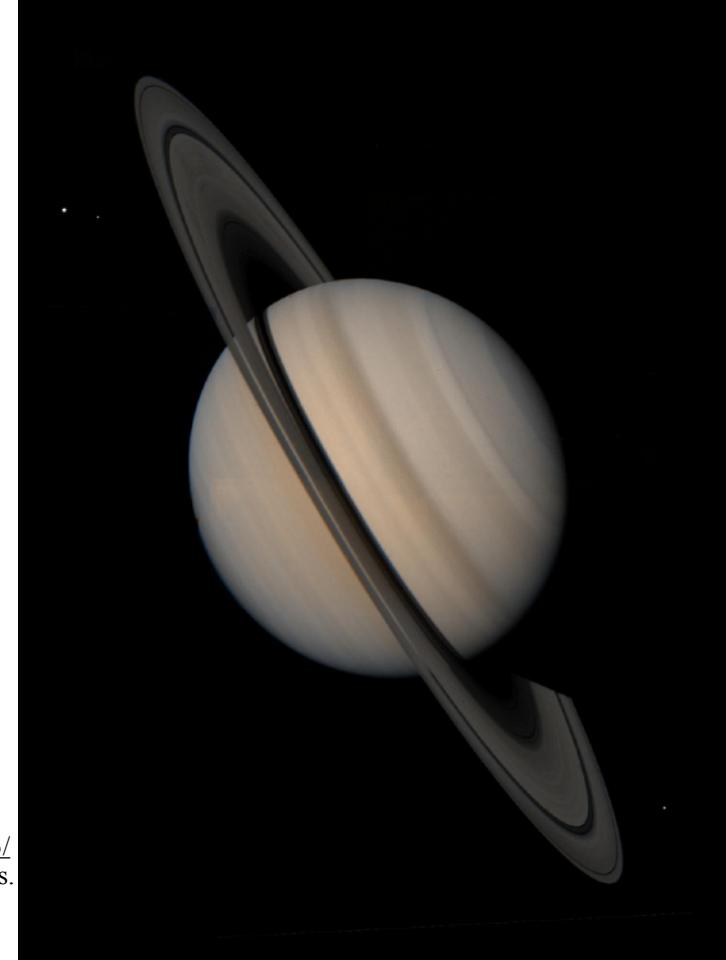
- 最小Hamming距離の最大化  $\leftrightarrow$  球充填

- Leech格子 ( $d = 24$ の球充填問題の解) は

Golay符号を基に構成された

(J. Leech 1967; E. Witt 1940?)

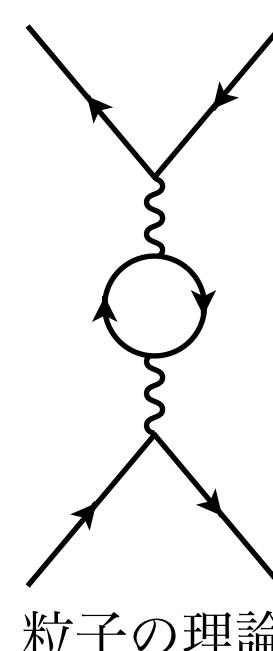
<https://science.nasa.gov/image-detail/pia01383-3/>  
Saturn and Moons Tethys, Enceladus, and Mimas.  
Taken by NASA's Voyager 1 on Oct. 30, 1980.  
IMAGE CREDIT: NASA/JPL-Caltech



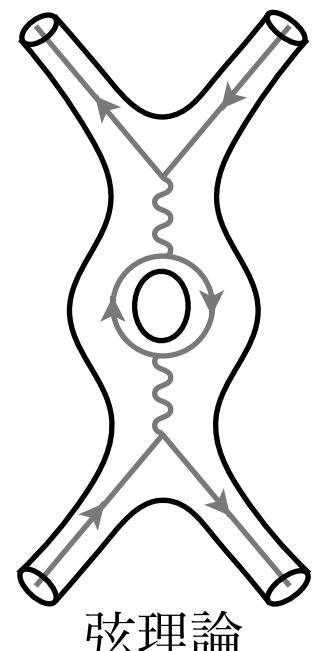
# 弦理論

- 特殊相対論 × 量子論 = 場の量子論 (理論の枠組み)  
素粒子の標準模型、大統一理論などは、この枠組みの上に構成される「模型」  
一般相対論(重力)と量子論をどう融合させるか？
- 弦理論：「世界の基本構成要素は粒子ではなく弦である」ことのみにおいて場の量子論を修正する、最も保守的な量子重力理論  
弦理論は、理論の枠組みであり、かつその上に構成される唯一の模型  
(ただし未完成；実験での検証もない)

理論の整合性（無矛盾性）のみから  
どこまで何が言えるかを探る試み



粒子の理論



弦理論

# 量子異常(anomaly)と弦理論の時空の次元

- 量子異常：古典的に成り立つ対称性が量子論的に破れる現象

量子異常には、許されるものと禁止される(理論に矛盾を引き起こす)ものとがある

弦理論では時空の次元 $D$ によってLorentz対称性の量子異常が生じる  
(これは許されない量子異常)



許される時空の次元は 26 (bosonic) または 10 (supersymmetric) のみ

- かなり端折った&論理的に飛躍のある説明(bosonic stringの場合)：

弦の基底状態のエネルギー：

$$\underbrace{-1}_{\substack{\text{理論がゲージ場を含む} \\ \text{ためにはこの値が必要}}} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{調和振動子の} \\ \text{零点エネルギー}}} \times \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots)}_{\substack{\text{N倍振動からの寄与} \\ (N=1,2,3,\dots)}} \times \underbrace{(D - 2)}_{\text{横波の数}}$$

調和振動子の  
エネルギー  
 $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$   
( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$= \frac{1}{2} \times \zeta(-1) \times (D - 2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{12}\right) \times (D - 2)$$

$$\therefore D = 26$$

Riemannゼータ関数  
 $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

# 超弦理論と $E_8$ 格子

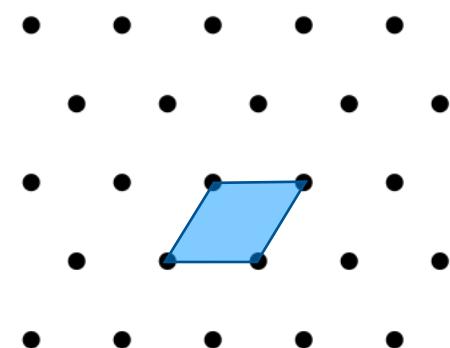
- 純ボソン的弦理論 ( $D = 26$ ) ではタキオン (質量が負の粒子) が生じる  
➡ 超対称性をもつ弦理論 (超弦理論) のみが生き残る
- 超弦理論：弦同士の相互作用が弱い状況で5種類の異なる姿をとる  
(ただしこれらの5つは場の変数変換や背景時空の変形で互いにつながっている)

|          |          |        |                     |                               |
|----------|----------|--------|---------------------|-------------------------------|
| Type IIA | Type IIB | Type I | SO(32)<br>heterotic | $E_8 \times E_8$<br>heterotic |
|----------|----------|--------|---------------------|-------------------------------|

- 混成弦理論 (heterotic string theory) — 超弦理論の一つ (の姿)  
閉弦の左向きモード : bosonic ( $D = 26$ ), 右向きモード : supersymmetric ( $D = 10$ )  
ただし、左向きの余剰な  $26 - 10 = 16$  次元空間はトーラスにコンパクト化しておく  
(周期的境界条件を課しておく) 必要がある

このときのトーラスに対応する格子は even unimodular  
であることが必要

$$d = 16 : E_8 \oplus E_8, D_{16}^+$$



ここから後半

# 超対称場の理論と対称性不变な変数

- $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論

$$A_\mu$$

$$V(\phi) = \text{Tr}[\phi, \phi^\dagger]^2$$

$$\lambda_\alpha \quad \psi_\alpha$$

$\phi$  : Higgs (随伴表現)

$$\phi$$

$\phi \in \text{Cartan部分代数} \Rightarrow V = 0$  (平坦方向が存在: Coulomb branch)

例 :  $SU(n)$

$$\phi = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \quad (\mu_1 + \cdots + \mu_n = 0)$$

対角成分の入れ換えて物理は変わらない

$S_n = W(A_{n-1})$  の対称性が残っている

$W(A_{n-1}) \subset SU(n)$

Weyl群 (ルート鏡映のなす離散群)

⇒ 対角成分の対称多項式がよい変数

$W(A_{n-1})$  の不变多項式 ( $\Leftrightarrow$  Casimir不变量)

# 多項式、三角関数、楕円関数

- Heisenberg XYZ model (spin chain)

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z]$$

XXX model ( $J_x = J_y = J_z$ ), XXZ model ( $J_x = J_y$ ) の自然な拡張

- Seiberg-Witten理論：4次元  $\mathcal{N}=2$  ゲージ理論の低エネルギー厳密解  
低エネルギーで 4d  $\mathcal{N}=2$  に見えていればよい

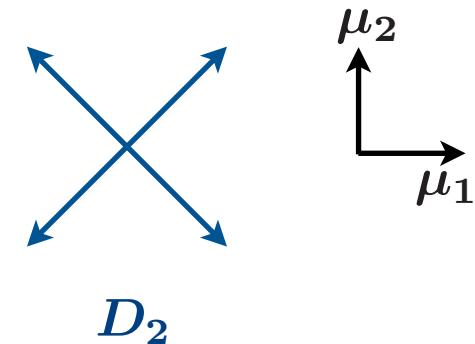
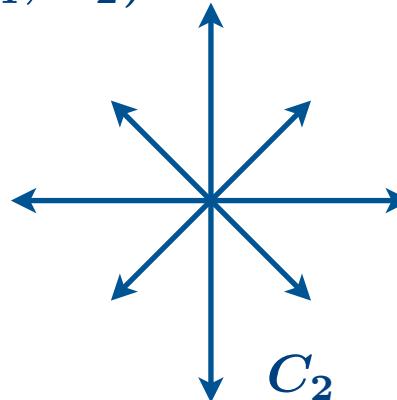
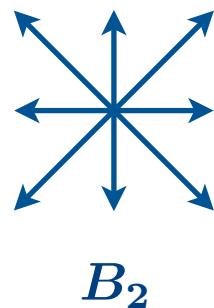
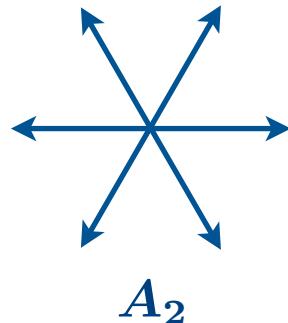
| Heisenberg模型         | XXX                | XXZ                                                | XYZ                                      |
|----------------------|--------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------|
| Seiberg-Witten<br>理論 | 4d $\mathcal{N}=2$ | 5d $\mathcal{N}=1$<br>on $\mathbb{R}^4 \times S^1$ | 6d (1,0)<br>on $\mathbb{R}^4 \times T^2$ |
| 変数依存性                | 多項式的               | 三角関数的<br>(指数関数的)                                   | 楕円関数的                                    |

- XXX より XXZ, 4d  $\mathcal{N}=2$  より 5d  $\mathcal{N}=1$  の方が “自然・簡単” (縮退が解消)
- XYZ, 6d (1,0) は自然な終着地 (mother theory)

# $W(R)$ 不变量

- 以下では既約なルート系  $R$  を考える ( $\Leftrightarrow$  単純Lie代数)

$$(R = A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2)$$



- Weyl群  $W(R)$  : ルートによる鏡映のなす離散群  $\vec{\mu}$  : ルート空間の座標
- $W(R)$ の多項式的不变量 : 不変多項式  $p_j(\vec{\mu})$

$$\prod_{\text{all roots } \vec{\alpha}} (1 - t \vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}) = \sum_j p_j(\vec{\mu}) t^j$$

- $W(R)$ の三角関数的不变量 : 対応するLie代数の表現  $\rho$  の指標(character)

$$\chi_\rho(\vec{\mu}) = \sum_{\vec{w} \in \rho} \exp(2\pi i \vec{w} \cdot \vec{\mu})$$

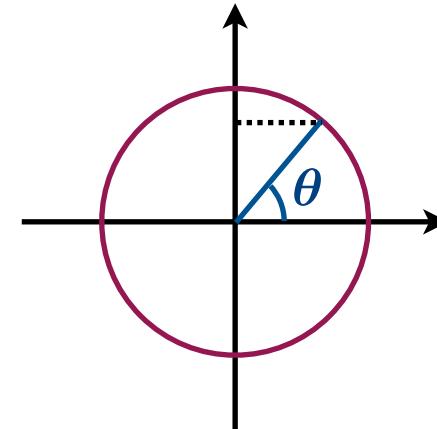
- $W(R)$ の楕円関数的不变量 :  $W(R)$ 不变Jacobi形式

# 橙円関数

- 三角関数 — 周期関数

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

円周上の関数とみなせる



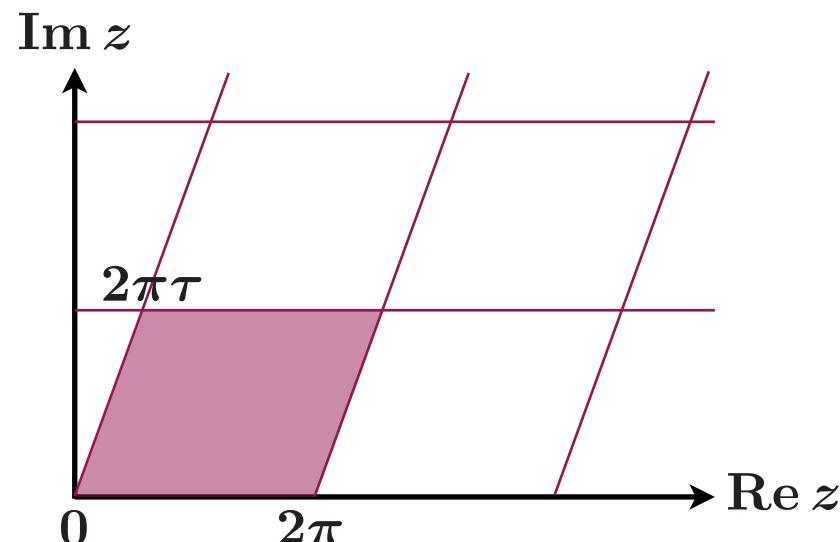
- 楢円関数 — 2重周期関数
  - 例：Weierstrassの橙円関数

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \left[ \frac{1}{(z - \Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right], \quad \Omega_{m,n} = 2\pi(m + n\tau)$$

$$\begin{aligned}\wp(z + 2\pi) &= \wp(z) \\ \wp(z + 2\pi\tau) &= \wp(z)\end{aligned}$$

2次元トーラス上の関数とみなせる

$\tau$ : トーラスのモジュラス



# モジュラー形式

- Weierstrassの楕円関数は次の微分方程式を満たす：

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - \frac{1}{12}E_4(\tau)\wp(z) - \frac{1}{216}E_6(\tau)$$

- Eisenstein級数

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

Eisenstein級数  $E_{2k}(\tau)$  ( $k \geq 2$ ) はモジュラー形式の例

- モジュラー形式

以下の性質を満たす関数  $f(\tau)$  をウェイト  $2k$  のモジュラー形式という

(i) 上半平面  $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$  で正則

(ii) 次の2条件が成り立つ：

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{2k} f(\tau)$$

(iii) 無限遠点  $\tau = i\infty$  で正則、すなわち次のFourier展開形を持つ

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

# テータ級数、Jacobi形式

- 格子に対してテータ級数が定義できる

$$\Theta_{\Lambda}(\tau) := \sum_{\vec{x} \in \Lambda} e^{\pi i \tau \vec{x}^2}$$

$E_8$ 格子のテータ級数はウェイト4のEisenstein級数を与える！

$$\Theta_{E_8}(\tau) = E_4(\tau)$$

(より一般に、even unimodular latticeのテータ級数はモジュラー形式となる)

- テータ級数に化学ポテンシャルを入れることもできる

$$\Theta_{E_8}(\tau, \vec{\mu}) := \sum_{\vec{x} \in E_8} e^{\pi i \tau \vec{x}^2 + 2\pi i \vec{\mu} \cdot \vec{x}}$$

これはJacobi形式の例

- Jacobi形式：正則関数  $\varphi(\tau, z)$  ( $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) (Eichler-Zagier '85)

$\tau$ に関するモジュラー性、 $z$ に関する準二重周期性をあわせ持つ

弦理論や場の量子論の分配関数を組み立てる構成要素として重要

# Jacobi形式

(Eichler-Zagier '85)

- 以下の条件を満たす正則関数  $\varphi(\tau, z)$  ( $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) を weight  $k$ , index  $m$  の Jacobi 形式という。

i) モジュラー変換性

$$\varphi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \exp\left(2\pi im\frac{cz}{c\tau + d}\right) \varphi(\tau, z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

ii) 準二重周期性

$$\varphi(\tau, z + \alpha\tau + \beta) = e^{-2\pi im(\alpha^2\tau + 2\alpha z)} \varphi(\tau, z), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$$

iii) 次の Fourier 展開形をもつ：

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4nm}} c(n, r) q^n \zeta^r, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \zeta = e^{2\pi iz}$$

$r^2 \leq 4nm$  (この条件を外したものは、弱Jacobi形式という)

(例)  $\phi_{10,1}(\tau, z) = \eta(\tau)^{18} \vartheta_1(z, \tau)^2, \quad \phi_{12,1}(\tau, z) = 4\eta(\tau)^{24} \sum_{k=1}^4 \frac{\vartheta_k(z, \tau)^2}{\vartheta_k(0, \tau)^2} = 12\wp(z)\phi_{10,1}(\tau, z)$

楕円関数 (完全二重周期性 / 極を持つ)  $\leftrightarrow$  Jacobi形式 (準二重周期性 / 正則)

# $W(R)$ 不変弱Jacobi形式

(Wirthmüller '92)

- 以下の条件を満たす正則関数  $\varphi(\tau, \vec{\mu})$  ( $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $\vec{\mu} \in \mathbb{C}^n$ ) を、 weight  $k$ , index  $m$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) の  $W(R)$ 不変弱Jacobi形式という。

## i) Weyl群不变性

$$\varphi_{k,m}(\tau, w(\vec{\mu})) = \varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}), \quad w \in W(R).$$

Weyl group of  $R$

## ii) 準二重周期性

$$\varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu} + \tau \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = e^{-m\pi i(\tau \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\mu} \cdot \vec{\alpha})} \varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}), \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L_R.$$

root lattice of  $R$

## iii) モジュラー変換性

$$\varphi_{k,m}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\vec{\mu}}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \exp\left(m\pi i \frac{c}{c\tau + d} \vec{\mu}^2\right) \varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}),$$

## iv) $\varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu})$ は次のFourier展開形をもつ :

$$\varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{w} \in L_R^*} c(n, \vec{w}) e^{2\pi i(n\tau + \vec{w} \cdot \vec{\mu})}.$$

dual lattice of  $L_R$

# $W(R)$ 不变量のなす環

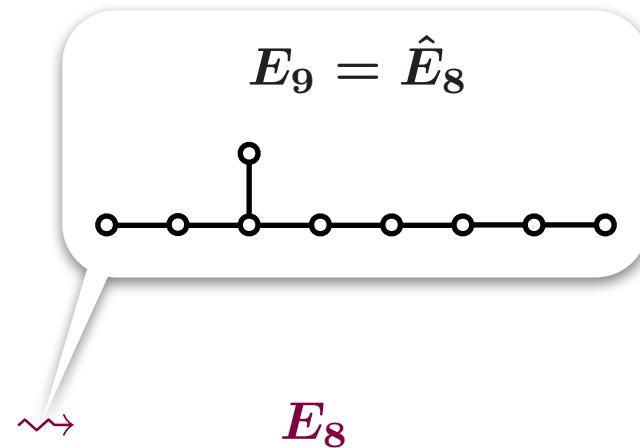
- $W(R)$ 不变量：分配関数等の物理量を記述する際の基本構成要素  
— どれだけあるか？（どうすれば、構成し尽くせるか？）
- 多項式的／三角関数的／楕円関数的  $W(R)$ 不变量の全体は、それぞれ  $\mathbb{C}$ 上の環をなす。
- $W(R)$ の不变多項式環：全ての既約な  $R$ について、多項式環  
あらゆる不变多項式は  $\text{rank}(R)$ 個の生成元の多項式として書ける  
(Chevalley-Shephard-Toddの定理)
- $W(R)$ の指標環： 全ての既約な  $R$ について、多項式環  
あらゆる有限次元表現の指標は  $\text{rank}(R)$ 個の基本表現の指標の多項式として書ける
- $W(R)$ 不变Jacobi形式の環： $E_8$ を除く既約な  $R$ について、多項式環  
 $R \neq E_8$ ：あらゆる  $W(R)$ 不变Jacobi形式は  $\text{rank}(R)+1$ 個の生成元の多項式として書ける  
(Wirthmüllerの定理(1992))
- $W(E_8)$ 不变Jacobi形式の環の構造は？

# フレーバー対称性の拡大

(Seiberg '96)

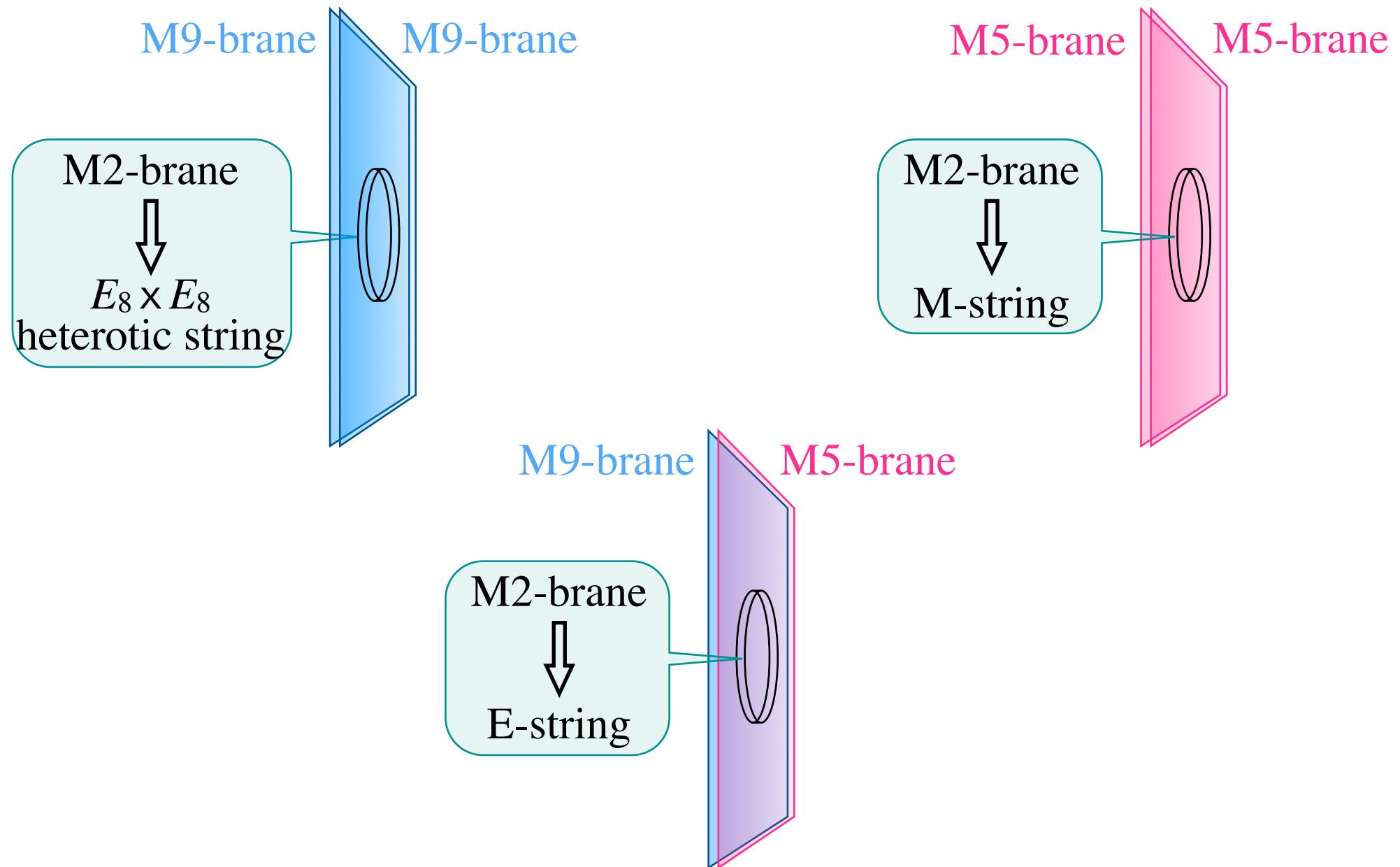
- 4d  $\mathcal{N}=2$  SU(2)ゲージ理論に基本表現物質場を加えてゆく際の  
フレーバー対称性の変化

|           | 4d $\mathcal{N}=2$<br>on $\mathbb{R}^4$ | 5d $\mathcal{N}=1$<br>on $\mathbb{R}^4 \times S^1$ | 6d (1,0)<br>on $\mathbb{R}^4 \times T^2$ |
|-----------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $N_f = 1$ | $SO(2) = D_1$                           |                                                    |                                          |
| $N_f = 2$ | $SO(4) = D_2$                           |                                                    |                                          |
| $N_f = 3$ | $SO(6) = D_3$                           |                                                    |                                          |
| $N_f = 4$ | $SO(8) = D_4$                           | $SO(10) = E_5$                                     |                                          |
| $N_f = 5$ |                                         | $E_6$                                              |                                          |
| $N_f = 6$ |                                         | $E_7$                                              |                                          |
| $N_f = 7$ |                                         | $E_8$                                              |                                          |
| $N_f = 8$ |                                         | $E_9?$                                             | $E_8$                                    |



- $E_8$ 対称性、楕円関数的パラメータ依存性が自然に(意図せずに)現れる

# E弦理論 (Ganor-Hanany '96) (Seiberg-Witten '96)



- E弦理論：最も基本的な6d (1,0)超対称共形場理論(のひとつ)

# Seiberg-Witten theory

(Seiberg-Witten '94)

- Exact solution to the low energy theory of 4d  $\mathcal{N}=2$  SYM

Low energy effective Lagrangian

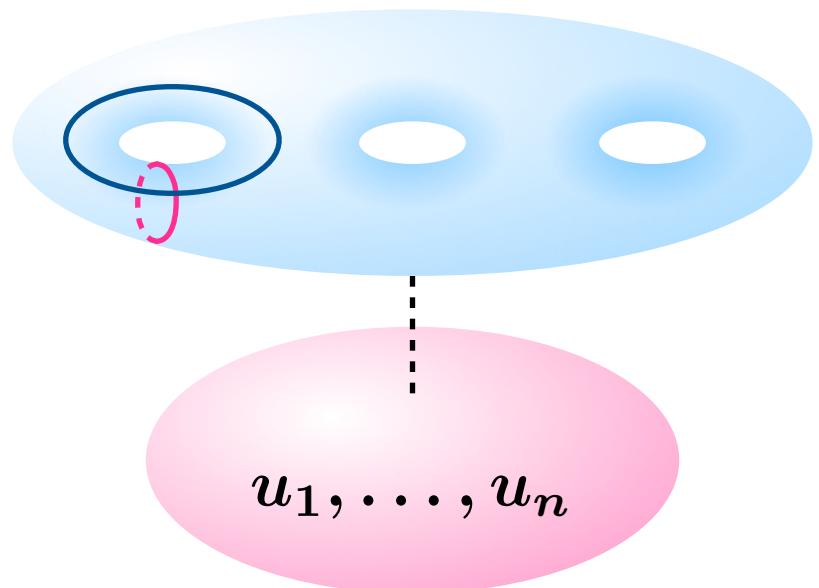
$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[ \int d^4\theta \frac{\partial F_0(A)}{\partial A^i} \bar{A}^i + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0(A)}{\partial A^i \partial A^j} W_\alpha^i W^{\alpha j} \right]$$

prepotential  $F_0(a_1, \dots, a_n)$ : holomorphic function

Seiberg-Witten curve

$\lambda_{\text{SW}}$ : Seiberg-Witten differential

$$a_i = \oint_{\alpha_i} \lambda_{\text{SW}}, \quad \frac{\partial F}{\partial a_i} = \oint_{\beta_i} \lambda_{\text{SW}}$$



# Seiberg-Witten curve for the E-string theory

(Eguchi-KS '02)  
(KS '11)

$$y^2 = 4x^3 - (a_0 u^4 + a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4)x \\ - (b_0 u^6 + b_1 u^5 + b_2 u^4 + b_3 u^3 + b_4 u^2 + b_5 u + b_6)$$

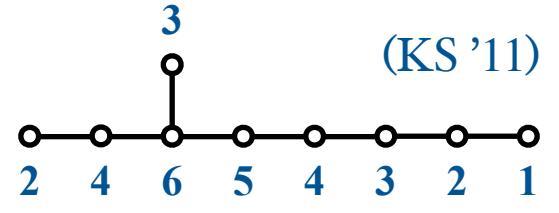
with

$$a_0 = \frac{E_4}{12}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{6}{E_4 \Delta} \left( -E_4 A_2 + A_1^2 \right), \\ a_3 = \frac{1}{9E_4^2 \Delta^2} \left( -7E_4^2 E_6 A_3 - 20E_4^3 B_3 - 9E_4 E_6 A_1 A_2 + 30E_4^2 A_1 B_2 + 6E_6 A_1^3 \right), \\ b_0 = \frac{E_6}{216}, \quad b_1 = -\frac{4}{E_4} A_1, \quad b_2 = \frac{5}{6E_4^2 \Delta} \left( E_4^2 B_2 - E_6 A_1^2 \right), \\ b_3 = \frac{1}{108E_4^3 \Delta^2} \left( -7E_4^5 A_3 - 20E_4^3 E_6 B_3 \right. \\ \left. - 9E_4^4 A_1 A_2 + 30E_4^2 E_6 A_1 B_2 + (16E_4^3 - 10E_6^2) A_1^3 \right), \quad \dots$$

$(\Delta := \eta^{24})$

# Nine basic $W(E_8)$ -invariant Jacobi forms

$$\Theta(\tau, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \prod_{j=1}^8 \vartheta_k(\mu_j, \tau)$$



Theta function associated with the  $E_8$  lattice

$$A_2(\tau, \vec{\mu}) = \frac{8}{9} \mathcal{H}\{\Theta(2\tau, 2\vec{\mu})\},$$

$$A_1(\tau, \vec{\mu}) = \Theta(\tau, \vec{\mu}),$$

$$A_3(\tau, \vec{\mu}) = \frac{27}{28} \mathcal{H}\{\Theta(3\tau, 3\vec{\mu})\},$$

$$A_4(\tau, \vec{\mu}) = \Theta(\tau, 2\vec{\mu}),$$

$$A_5(\tau, \vec{\mu}) = \frac{125}{126} \mathcal{H}\{\Theta(5\tau, 5\vec{\mu})\},$$

$$B_2(\tau, \vec{\mu}) = \frac{32}{5} \mathcal{H}\{e_1(\tau) \Theta(2\tau, 2\vec{\mu})\},$$

$$B_3(\tau, \vec{\mu}) = \frac{81}{80} \mathcal{H}\{h(\tau)^2 \Theta(3\tau, 3\vec{\mu})\},$$

$$B_4(\tau, \vec{\mu}) = \frac{16}{15} \mathcal{H}\{\vartheta_4(2\tau)^4 \Theta(4\tau, 4\vec{\mu})\}, \quad B_6(\tau, \vec{\mu}) = \frac{9}{10} \mathcal{H}\{h(\tau)^2 \Theta(6\tau, 6\vec{\mu})\}.$$

$\mathcal{H}\{\cdot\}$  : sum of all possible  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  transforms

$$e_1(\tau) = \frac{1}{12} (\vartheta_3(\tau)^4 + \vartheta_4(\tau)^4), \quad A_n(\tau, \vec{0}) = E_4,$$

$$h(\tau) = \vartheta_3(2\tau)\vartheta_3(6\tau) + \vartheta_2(2\tau)\vartheta_2(6\tau). \quad B_n(\tau, \vec{0}) = E_6.$$

# $W(E_8)$ 不変Jacobi形式の環に関する進展

- $E_4, E_6, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_2, B_3, B_4, B_6$ は $\mathbb{C}$ 上で $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式の環を生成するか？

Observation (Huang-Klemm-Poretschkin 2013)

index $\geq 5$ では上で生成されない $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式が存在する。

Theorem (Sun-Wang 2021), based on Conjecture (Del Zotto et. al. 2017)

あらゆる $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式は一意的に次の形に書ける：

$$\frac{1}{\Delta^{N_t}} \left[ \sum_{j=0}^{t_1-1} \left( \frac{P_{16,5}}{E_4} \right)^{t_1-j} P_j(E_6, A_i, B_i) + P_{t_1}(E_4, E_6, A_i, B_i) \right]$$

- Seiberg-Witten curveの係数  $a_i, b_j$  — ほとんど $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式  $E_4(\tau)$  は  $\tau = e^{2\pi i/3}$  に零点をもつ  $\rightarrow$  分母の $E_4$ が  $a_i, b_j$  に極をもたらす

Conjecture (KS 2017)  $\rightarrow$  Theorem (KS 2022)

あらゆる $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式は  $a_i, b_j$  の多項式で書ける：

$$J_{*,*}^{E_8} \subsetneq \mathbb{C}[a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6].$$

# $W(E_8)$ 不変Jacobi形式 : $a_i, b_j$ による表示

- **Observation:** 低いweightの $W(E_8)$ 不変Jacobi形式は、E弦理論の Seiberg-Witten curve

$$y^2 = 4x^3 - f(u)x - g(u)$$

$$f(u) = a_0 u^4 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4, \quad g(u) = b_0 u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6$$

の係数  $a_i, b_j$  を用いて表す方が、簡単に書ける!?

例1) weight -16, index 4: 独立な元の数=1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{864\Delta^3} (-192E_4 A_1^4 + 144E_4^2 A_1^2 A_2 + 56E_4^3 A_1 A_3 - 9E_4^3 A_2^2 + E_4^4 A_4 + 240E_6 A_1^2 B_2 \\ & \quad - 56E_6^2 A_1 A_3 - 18E_6^2 A_2^2 - 90E_4 E_6 A_2 B_2 - E_4 E_6^2 A_4 - 75E_4^2 B_2^2) \end{aligned}$$

$$= a_2^2 + 12a_0 a_4 \quad : f(u) の 2 次の不変式$$

例2) weight -24, index 6: 独立な元の数=2

$$2a_2^3 + 27a_0 a_3^2 - 72a_0 a_2 a_4, \quad : f(u) の 3 次の不変式$$

$$3b_3^2 - 8b_2 b_4 + 20b_1 b_5 - 120b_0 b_6 : g(u) の 2 次の不変式$$

これは何だろうか？

# 2変数同次式の不变式 (invariants of a binary form)

- 2変数  $n$  次同次多項式

$$f(u, v) = \alpha_0 u^n + \alpha_1 u^{n-1} v + \cdots + \alpha_n v^n$$

に対し、 $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の作用を以下で定める：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$f'(u, v) = \alpha'_0 u^n + \alpha'_1 u^{n-1} v + \cdots + \alpha'_n v^n := f(u', v')$$

(以下では ' で  $T$  の作用を表す :  $\alpha'_i = T\alpha_i$ , etc.)

- 係数  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  の  $d$  次同次多項式  $\Phi(\alpha_i)$  が、

任意の  $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の作用に対して

$$\Phi(\alpha'_i) = \Phi(\alpha_i)$$

を満たすとき、 $\Phi$  を  $f$  の  $d$  次不变式という。

(例)  $f = au^2 + buv + cv^2$   
 に対し、判別式  
 $D = b^2 - 4ac$   
 は2次の不变式

## 2変数同次式の共変式 (covariants of a binary form)

- ・ 同次式  $f(u, v) = \alpha_0 u^n + \alpha_1 u^{n-1}v + \cdots + \alpha_n v^n$  に対し、以下の全ての条件を満たす多項式  $\Psi(\alpha_i; u, v)$  を、  
degree  $d$ , order  $\omega$  の共変式という。

- (i)  $\Psi$  は係数  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  について  $d$  次の同次式
- (ii)  $\Psi$  は変数  $u, v$  について  $\omega$  次の同次式
- (iii)  $\Psi$  は任意の  $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の作用に対して次を満たす：

$$\Psi(\alpha'_i; u, v) = \Psi(\alpha_i; u', v')$$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

( 例1)  $f(u, v)$  それ自身は degree 1, order  $n$  の共変式  
例2)  $f(u, v)$  の Hessian  
は degree 2, order  $2n - 4$  の共変式 )

- ・ 註：order 0 の共変式は不变式

## 2変数同次式の半不変式 (semiinvariants of a binary form)

- 同次式  $f(u, v) = \alpha_0 u^n + \alpha_1 u^{n-1}v + \cdots + \alpha_n v^n$  に対し、以下の全ての条件を満たす多項式  $\Phi(\alpha_i)$  を、  
*degree  $d$ , order  $\omega$  の半不変式* という。

(i)  $\Phi$  は係数  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  について  $d$  次の同次式

(ii)  $\Phi$  は任意の  $T = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の作用に対して

$$\Phi(\alpha'_i) = \Phi(\alpha_i)$$

(iii)  $\Phi$  は任意の  $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の作用に対して

$$\Phi(\alpha'_i) = \lambda^\omega \Phi(\alpha_i)$$

- 註：order 0 の半不変式は不变式

## Roberts isomorphism

(Roberts 1861)

- 共変式  $\Psi$  の展開

$$\Psi(\alpha_i; u, v) = \Psi_0(\alpha_i)u^\omega + \Psi_1(\alpha_i)u^{\omega-1}v + \cdots + \Psi_\omega(\alpha_i)v^\omega$$

の初項の係数  $\Psi_0$  は半不变式。

- 逆に、与えられた半不变式  $\Psi_0$  に対して、対応する共変式  $\Psi$  が構成できる。
- この対応により、共変式のなす環と半不变式のなす環は同型。

# $W(E_8)$ 不変Jacobi形式の環の構造定理

定理 (KS 2024)

$W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式のなす環は、2変数6次形式と4次形式の連立共変式のなす環に同型である。

- 証明の概略

$W(E_8)$ 不変  
弱Jacobi形式の環  
 $J_{*,*}^{E_8}$

$\cong$

6次形式と4次形式の  
連立半不変式の環  
 $\mathbb{C}[V_4 \oplus V_6]^{\mathrm{U}_2(\mathbb{C})}$

$\cong$

6次形式と4次形式の  
連立共変式の環  
 $\mathbb{C}[V_4 \oplus V_6 \oplus \mathbb{C}^2]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$

↑  
補助定理を使う  
&具体的な同型写像を構成

↑  
Roberts isomorphism

補助定理 (KS 2024)

$$J_{*,*}^{E_8} = R \cap \tilde{R}$$

$$\begin{pmatrix} V_n : n\text{次形式の}\mathbb{C}\text{ベクトル空間} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{C} \right\} \end{pmatrix}$$

## 補助定理

- Seiberg-Witten curveには2通りの自然な書き方がある  $\left( u = \tilde{u} - \frac{b_1}{6b_0} \right)$

$$\begin{aligned} f &= a_0 u^4 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4 & g &= b_0 u^6 + b_1 u^5 + b_2 u^4 + \cdots + b_6 \\ &= c_0 \tilde{u}^4 + c_1 \tilde{u}^3 + c_2 \tilde{u}^2 + c_3 \tilde{u} + c_4 & &= d_0 \tilde{u}^6 + d_2 \tilde{u}^4 + \cdots + d_6 \end{aligned}$$

前出の定理 (KS 2022) より

$$J_{*,*}^{E_8} \subsetneq R = \mathbb{C}[a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]$$

( $a_i, b_j$  は  $E_4$  の零点で極をもち得る以外は  $W(E_8)$  不変弱 Jacobi 形式)

であった。同様に以下が成り立つ：

$$J_{*,*}^{E_8} \subsetneq \tilde{R} = \mathbb{C}[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_0, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]$$

( $c_i, d_j$  は  $E_6$  の零点で極をもち得る以外は  $W(E_8)$  不変弱 Jacobi 形式)

補助定理 (KS 2024)

$$J_{*,*}^{E_8} = R \cap \tilde{R}$$

換言すれば、以下の2条件は同値：

- (i)  $\varphi$  は  $W(E_8)$  不変 Jacobi 形式
- (ii)  $\varphi$  は  $a_i, b_j$  の多項式かつ  $c_i, d_j$  の多項式

## 同型写像 (以下の内容が証明できる)

- 4次形式と6次形式

$$f = \sum_{i=0}^4 \alpha_i u^{4-i} v^i, \quad g = \sum_{i=0}^6 \beta_i u^{6-i} v^i$$

の係数  $\alpha_i, \beta_j$  に関する次の有理式を導入する：

$$\begin{aligned}\hat{a}_i &= \sum_{j=0}^i \alpha_j \binom{4-j}{4-i} \left(-\frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\right)^{i-j}, & \hat{b}_i &= \sum_{j=0}^i \beta_j \binom{6-j}{6-i} \left(-\frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\right)^{i-j}, \\ \hat{c}_i &= \sum_{j=0}^i \alpha_j \binom{4-j}{4-i} \left(-\frac{\beta_1}{6\beta_0}\right)^{i-j}, & \hat{d}_i &= \sum_{j=0}^i \beta_j \binom{6-j}{6-i} \left(-\frac{\beta_1}{6\beta_0}\right)^{i-j}.\end{aligned}$$

代入  $a_i = \hat{a}_i, b_i = \hat{b}_i, c_i = \hat{c}_i, d_i = \hat{d}_i$  により定義される2つの写像

$$\psi : R = \mathbb{C}[a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] \rightarrow \mathbb{C}[\alpha_0, \dots, \alpha_4, \beta_0, \dots, \beta_6, \alpha_0^{-1}],$$

$$\tilde{\psi} : \tilde{R} = \mathbb{C}[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] \rightarrow \mathbb{C}[\alpha_0, \dots, \alpha_4, \beta_0, \dots, \beta_6, \beta_0^{-1}]$$

は単射で、定義域を  $J_{*,*}^{E_8} = R \cap \tilde{R}$  に制限すると同一。その制限写像

$$\left(\psi|_{J_{*,*}^{E_8}} = \tilde{\psi}|_{J_{*,*}^{E_8}}\right) : J_{*,*}^{E_8} \rightarrow \mathbb{C}[\alpha_0, \dots, \alpha_4, \beta_0, \dots, \beta_6]$$

は  $J_{*,*}^{E_8}$  から4次形式と6次形式の半不变式の環への同型写像を与える。

# 結論

- Wirthmüllerの定理(1992)以来、30年近く未解決であった $W(E_8)$ 不变弱Jacobi形式の全貌が明らかになった。(R=E<sub>8</sub>の場合のみ特別)

## 定理 (KS 2024)

$W(E_8)$ 不变弱Jacobi形式のなす環は、2変数6次形式と4次形式の連立共変式のなす環に同型である。

- 2変数 $n$ 次形式 ( $n$ 次同次多項式)の不变式・共変式の環は、19世紀以来よく研究されており、その構造はよく分かっている (不变式論)

不变式論研究の結果(Olive 2014)を利用

⇒  $W(E_8)$ 不变弱Jacobi形式の環は194個の生成元から生成される

- 194個の生成元についても  $a_i, b_j$  を用いて全て具体的に構成した。

⇒ 生成元が分かると分配関数の仮説を組むのが容易になる

# 展望

- 類似の定理が見つかっている：

定理 (Nagano-Ueda 2021)

符号(2,18)のeven unimodular latticeのモジュラー形式の環は、2変数  
12次形式と8次形式の連立不変式のなす環に同型である。

(K3曲面と関連)

定理 (KS 2025)

$D_4$  triality invariantsの環は、2変数3次形式と2次形式の連立共変式の  
なす環に同型である。

(4d  $\mathcal{N}=2$   $SU(2)$   $N_f=4$  ゲージ理論と関連)

- 不変式論は19世紀に発展した「古典」の数学であるが、まだまだ  
物理への活用の余地がありそうである。