FINDING AND PROVING AN IDENTITY FOR K^(C)[p,m] where p=19 and m=15 (quadratic residue case)

This worksheet has **Startup Code**

NOTE 1: myseeds generates 3*9 = 27 functions. For m=15 we need these 27 functions. Also we need to multiply by $(eta(19*tau)/eta(tau))^(4*k)$, k=-1,1. Thus the list [-4,4] in the plantseeds function is needed.

> BIGBAS:=plantseeds(myseeds,[-4,4],19):

NOTE 2: Now to finish getting the basis for m=1 we need to multiply all the functions by f[19,6]/f[17, _5]. This is achieved using the **mult_nv_by_fp_quot** function.

> nvLA:=BIGBAS:

```
1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1], [3, 0, 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, -1], [3, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0
        -8, -9, -8, -9, -7, -9, -5], [75, -5, -9, -9, -9, -7, -8, -9, -9, -8], [75,
        -9, -7, -9, -8, -9, -9, -9, -5, -8], [75, -8, -5, -9, -9, -9, -9, -8, -9,
        -7], [75, -9, -9, -7, -8, -9, -8, -5, -9, -9], [75, -8, -9, -5, -7, -9, -9,
        -8, -9, -9, -9, -9], [75, -9, -9, -9, -9, -5, -7, -8, -8, -9], [75, -7, -9,
       -9, -9, -7, -6, -8, -9, -9], [75, -9, -7, -9, -9, -8, -9, -6, -9, -7], [75,
        -6, -8, -7, -7, -9, -9, -9, -9, -9, [75, -7, -9, -9, -7, -6, -9, -9, -9,
        -8], [75, -9, -9, -8, -9, -7, -7, -9, -6, -9], [75, -9, -6, -9, -8, -9, -7,
        -9, -7, -9], [75, -9, -9, -7, -6, -9, -9, -7, -8, -9], [75, -8, -7, -9, -9]
        -9, -9, -9, -7, -6], [75, -9, -9, -6, -9, -9, -8, -7, -9, -7], [75, -8, -9,
        -8, -7, -7, -8, -9, -9, -8], [75, -8, -8, -9, -9, -9, -8, -8, -7, -7], [75,
        -9], [75, -7, -9, -9, -8, -8, -7, -8, -8, -9], [75, -8, -8, -8, -9, -7, -8,
       -9, -7, -9], [75, -9, -8, -7, -8, -9, -8, -8, -9, -7], [75, -9, -7, -9, -8]
        -8, -7, -9, -8, -8], [75, -9, -7, -8, -9, -8, -9, -7, -8, -8]]
    nvL:=map(nv->mult nv by fp quot(nv,19,6,5),nvLA):
> nops(nvL);
                                                                            81
                                                                                                                                                          (3)
We now have a list of 81 functions in our basis list and we are ready to find an prove the identity for
m=15.
> nvLq:=nvL2q(nvL,19,100):
> nvLq2:=map(f->series(f/q^(15/19),q,100),nvLq):
> findhom(nvLq2,q,1,0);
                                                                         \{\emptyset\}
                                                                                                                                                          (4)
> do alg steps(19,15,nvL);
 STEP 1: check modularity
                   modularity checks
 STEP 2: find k0 and divide by j0
                   k0 = 28
 STEP 3: Compute table of ORDS at all cusps for each func
 "CUSPS: ", [[1, 0], [0, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8], [1, 9], [2, 19], [3, 19],
       [4, 19], [5, 19], [6, 19], [7, 19], [8, 19], [9, 19]]
                                                                  "TABLE of ords"
                             3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
                        10, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 2, 7, 4, 2, -1, 3, -2, 2
                       5, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 2, 2, -1, 7, -3, 8, -2, 9
```

```
9, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 3, 3, -1, 1, -1, 2, 2, 9
  9, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -2, 1, -1, 8, 4, 7, -3, 4
 5, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -2, 8, -2, 3, 3, 8, -4, 8
 10, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -2, 3, 3, 8, -2, 1, -2, 8
  4, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -4, 8, 4, 3, -1, 7, 2, 4
  7, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -2, 10, 2, 2, 1, 4, -1, 4
    5, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 1, 5, 0, 3, 0, 2, 5, 6
   12, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 0, 3, 0, 6, 1, 3, -3, 5
  8, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -1, 4, 6, 5, -2, 3, 0, 4
  4, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -2, 6, 1, 5, 0, 10, -2, 5
7, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -1, 5, -2, 4, -1, 6, -2, 11
  6, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 5, 2, 1, 3, -1, 5, -1, 7
   5, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 0, 4, -1, 4, 6, 5, 1, 3
  7, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -2, 4, 4, 5, 1, 4, -1, 5
   5, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 5, 0, 4, 0, 5, -1, 6
    6, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 0, 4, 0, 8, 1, 3, 0, 5
   10, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -1, 4, 0, 5, 1, 4, 0, 4
  7, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -1, 8, 1, 5, 0, 4, -2, 5
 7, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -1, 5, 1, 4, -1, 8, -1, 5
    6, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 0, 3, 0, 4, 4, 4, 0, 6
  6, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -1, 5, 1, 3, 0, 5, -1, 9
   6, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, 0, 4, -1, 4, 0, 5, 3, 6
              7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4, 1, -1, -4, 0, -5, -1
         2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -4, 4, -6, 5, -5, 6
         6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, -2, -4, -1, -1, 6
            2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6, 4, -6, 4, 1, 0, 0, 1
          6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, -2, -4, 5, 1, 4, -6, 1
           2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 5, -5, 0, 0, 5, -7, 5
          7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 0, 0, 5, -5, -2, -5, 5
           1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -7, 5, 1, 0, -4, 4, -1, 1
         4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 7, -1, -1, -2, 1, -4, 1
          2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 2, -3, 0, -3, -1, 2, 3
          9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 0, -3, 3, -2, 0, -6, 2
           5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, 3, 2, -5, 0, -3, 1
          1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 3, -2, 2, -3, 7, -5, 2
```

```
4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 2, -5, 1, -4, 3, -5, 8
         3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6, 0, -4, 7, -1, 1, -3, 3
         3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -1, -2, 0, -4, 2, -4, 4
         2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, -4, 1, 3, 2, -2, 0
         4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 1, 1, 2, -2, 1, -4, 2
         2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -3, 1, -3, 2, -4, 3
         3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, -3, 5, -2, 0, -3, 2
         7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -3, 2, -2, 1, -3, 1
        4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 5, -2, 2, -3, 1, -5, 2
        4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 2, -2, 1, -4, 5, -4, 2
         3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 0, -3, 1, 1, 1, -3, 3
        3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 2, -2, 0, -3, 2, -4, 6
          3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, -4, 1, -3, 2, 0, 3
  6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
 13, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 5, 10, 7, 5, 2, 6, 1, 5
 8, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 5, 5, 2, 10, 0, 11, 1, 12
 12, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 6, 6, 2, 4, 2, 5, 5, 12
 8, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 0, 10, 0, 10, 7, 6, 6, 7
 12, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 1, 4, 2, 11, 7, 10, 0, 7
8, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 1, 11, 1, 6, 6, 11, -1, 11
 13, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 1, 6, 6, 11, 1, 4, 1, 11
7, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -1, 11, 7, 6, 2, 10, 5, 7
 10, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 1, 13, 5, 5, 4, 7, 2, 7
  8, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 4, 8, 3, 6, 3, 5, 8, 9
  15, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 3, 6, 3, 9, 4, 6, 0, 8
  11, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 2, 7, 9, 8, 1, 6, 3, 7
  7, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 1, 9, 4, 8, 3, 13, 1, 8
 10, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 2, 8, 1, 7, 2, 9, 1, 14
  9, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 0, 6, 2, 13, 5, 7, 3, 9
  9, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 8, 5, 4, 6, 2, 8, 2, 10
  8, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 3, 7, 2, 7, 9, 8, 4, 6
  10, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 1, 7, 7, 8, 4, 7, 2, 8
  8, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 6, 8, 3, 7, 3, 8, 2, 9
  9, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 3, 7, 3, 11, 4, 6, 3, 8
  13, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 2, 7, 3, 8, 4, 7, 3, 7
 10, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 2, 11, 4, 8, 3, 7, 1, 8
 10, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 2, 8, 4, 7, 2, 11, 2, 8
  9, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 3, 6, 3, 7, 7, 7, 3, 9
```

9, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 2, 8, 4, 6, 3, 8, 2, 12 9, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 3, 7, 2, 7, 3, 8, 6, 9

STEP 4: Compute LOWER BOUND for ORD of _Kpm/_j0 at each cusp

"TABLE:"

STEP 5: Compile LHS vs RHS ORD table at cusps and find constant B

"TABLE ORD lower bounds"

_cusp, _width, _ORD_LHS, _ORD_RHS, _ORD_LHS_minus_RHS 0, 19,
$$-6$$
, -6 , -6 $\frac{1}{2}$, 19, 0, -6 , -6 $\frac{1}{3}$, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{1}{4}$$
, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{1}{5}$$
, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{1}{6}$$
, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{1}{7}$$
, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{1}{8}$$
, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{1}{9}$$
, 19, 0, -6 , -6

$$\frac{2}{19}$$
, 1, -4, -7, -7

$$\frac{3}{19}$$
, 1, 0, -2, -2

$$\frac{4}{19}$$
, 1, -1, -6, -6

$$\frac{5}{19}$$
, 1, 2, -2, -2

$$\frac{6}{19}$$
, 1, -4, -6, -6

$$\frac{7}{19}$$
, 1, 2, -2, -2

$$\frac{8}{19}$$
, 1, -2, -7, -7

$$\frac{9}{19}$$
, 1, 1, -1, -1

This implies that B = -87

STEP 6: Prove and check identity

"Coefficients in CKpm identity"

$$k = 4, -\zeta^{17} + 16\zeta^{16} + 4\zeta^{15} - 4\zeta^{14} + 12\zeta^{13} + 6\zeta^{12} - 5\zeta^{11} + 12\zeta^{10} + 12\zeta^{9} - 5\zeta^{8} + 6\zeta^{7}$$

$$+ 12\zeta^{6} - 4\zeta^{5} + 4\zeta^{4} + 16\zeta^{3} - \zeta^{2} + 14$$

$$k = 5, 5 \zeta^{17} + 3 \zeta^{16} + 4 \zeta^{15} + 2 \zeta^{14} + 2 \zeta^{13} + \zeta^{12} + 3 \zeta^{11} + 4 \zeta^{10} + 4 \zeta^{9} + 3 \zeta^{8} + \zeta^{7} + 2 \zeta^{6} + 2 \zeta^{5} + 4 \zeta^{4} + 3 \zeta^{3} + 5 \zeta^{2} + 3$$

$$k = 6, -48 \zeta^{17} - 75 \zeta^{16} - 62 \zeta^{15} - 14 \zeta^{14} + 17 \zeta^{13} + 13 \zeta^{12} - 32 \zeta^{11} - 71 \zeta^{10} - 71 \zeta^{9} - 32 \zeta^{8}$$

$$+ 13 \zeta^{7} + 17 \zeta^{6} - 14 \zeta^{5} - 62 \zeta^{4} - 75 \zeta^{3} - 48 \zeta^{2} + 21$$

$$k = 7, 3 \zeta^{17} - 13 \zeta^{16} - 2 \zeta^{15} + 5 \zeta^{14} - 12 \zeta^{13} - 6 \zeta^{12} + 6 \zeta^{11} - 9 \zeta^{10} - 9 \zeta^{9} + 6 \zeta^{8} - 6 \zeta^{7} - 12 \zeta^{6} + 5 \zeta^{5} - 2 \zeta^{4} - 13 \zeta^{3} + 3 \zeta^{2} - 14$$

$$k = 8, 5 \zeta^{17} + 3 \zeta^{16} + 4 \zeta^{15} + 2 \zeta^{14} + 2 \zeta^{13} + \zeta^{12} + 3 \zeta^{11} + 4 \zeta^{10} + 4 \zeta^{9} + 3 \zeta^{8} + \zeta^{7} + 2 \zeta^{6} + 2 \zeta^{5} + 4 \zeta^{4} + 3 \zeta^{3} + 5 \zeta^{2} + 3$$

$$k = 10, 105 \zeta^{17} + 70 \zeta^{16} + 159 \zeta^{15} + 3 \zeta^{14} + 117 \zeta^{13} + 72 \zeta^{12} + 92 \zeta^{11} + 86 \zeta^{10} + 86 \zeta^{9} + 92 \zeta^{8}$$

$$+ 72 \zeta^{7} + 117 \zeta^{6} + 3 \zeta^{5} + 159 \zeta^{4} + 70 \zeta^{3} + 105 \zeta^{2} + 202$$

$$k = 11, -5 \zeta^{17} + 44 \zeta^{16} - 20 \zeta^{15} + 20 \zeta^{14} + 30 \zeta^{13} - 3 \zeta^{12} + 26 \zeta^{11} + 4 \zeta^{10} + 4 \zeta^{9} + 26 \zeta^{8} - 3 \zeta^{7} + 30 \zeta^{6} + 20 \zeta^{5} - 20 \zeta^{4} + 44 \zeta^{3} - 5 \zeta^{2} + 48$$

$$k = 12, -41 \zeta^{17} - 130 \zeta^{16} - 74 \zeta^{15} + 4 \zeta^{14} - 33 \zeta^{13} - 12 \zeta^{12} - 11 \zeta^{11} - 111 \zeta^{10} - 111 \zeta^{9} - 11 \zeta^{8}$$
$$- 12 \zeta^{7} - 33 \zeta^{6} + 4 \zeta^{5} - 74 \zeta^{4} - 130 \zeta^{3} - 41 \zeta^{2} - 38$$

$$k = 13,228 \zeta^{17} - 1045 \zeta^{16} - 239 \zeta^{15} + 377 \zeta^{14} - 932 \zeta^{13} - 511 \zeta^{12} + 465 \zeta^{11} - 731 \zeta^{10} - 731 \zeta^{9}$$

$$+ 465 \zeta^{8} - 511 \zeta^{7} - 932 \zeta^{6} + 377 \zeta^{5} - 239 \zeta^{4} - 1045 \zeta^{3} + 228 \zeta^{2} - 1101$$

$$k = 14, -20 \zeta^{17} + 12 \zeta^{16} - 10 \zeta^{15} - 20 \zeta^{14} + 12 \zeta^{13} + \zeta^{12} - 31 \zeta^{11} - 10 \zeta^{10} - 10 \zeta^{9} - 31 \zeta^{8} + \zeta^{7}$$

$$+ 12 \zeta^{6} - 20 \zeta^{5} - 10 \zeta^{4} + 12 \zeta^{3} - 20 \zeta^{2} + 18$$

$$k = 15, 29 \zeta^{17} - 14 \zeta^{16} + 14 \zeta^{15} + 19 \zeta^{14} - 14 \zeta^{13} - 7 \zeta^{12} + 26 \zeta^{11} - \zeta^{10} - \zeta^{9} + 26 \zeta^{8} - 7 \zeta^{7}$$

$$- 14 \zeta^{6} + 19 \zeta^{5} + 14 \zeta^{4} - 14 \zeta^{3} + 29 \zeta^{2} - 13$$

```
k = 16, 37 \zeta^{17} - 19 \zeta^{16} + 47 \zeta^{15} + 77 \zeta^{14} + 8 \zeta^{13} + 7 \zeta^{12} + 37 \zeta^{11} - 40 \zeta^{10} - 40 \zeta^{9} + 37 \zeta^{8} + 7 \zeta^{7}
       +8 \zeta^{6} + 77 \zeta^{5} + 47 \zeta^{4} - 19 \zeta^{3} + 37 \zeta^{2} - 51
k = 17, -244 \zeta^{17} - 759 \zeta^{16} - 444 \zeta^{15} - 8 \zeta^{14} - 101 \zeta^{13} - 62 \zeta^{12} - 78 \zeta^{11} - 641 \zeta^{10} - 641 \zeta^{9}
       -78 \zeta^{8} - 62 \zeta^{7} - 101 \zeta^{6} - 8 \zeta^{5} - 444 \zeta^{4} - 759 \zeta^{3} - 244 \zeta^{2} - 137
k = 18, -849 \zeta^{17} - 117 \zeta^{16} - 795 \zeta^{15} - 114 \zeta^{14} - 744 \zeta^{13} - 286 \zeta^{12} - 512 \zeta^{11} - 454 \zeta^{10} - 454 \zeta^{9}
       -512 \zeta^{8} - 286 \zeta^{7} - 744 \zeta^{6} - 114 \zeta^{5} - 795 \zeta^{4} - 117 \zeta^{3} - 849 \zeta^{2} - 943
k = 19, -167 \zeta^{17} - 279 \zeta^{16} - 450 \zeta^{15} - 351 \zeta^{14} - 451 \zeta^{13} - 267 \zeta^{12} - 88 \zeta^{11} + 10 \zeta^{10} + 10 \zeta^{9}
       -88 \zeta^{8} - 267 \zeta^{7} - 451 \zeta^{6} - 351 \zeta^{5} - 450 \zeta^{4} - 279 \zeta^{3} - 167 \zeta^{2} - 204
k = 20,921 \zeta^{17} - 257 \zeta^{16} + 716 \zeta^{15} + 149 \zeta^{14} + 376 \zeta^{13} + 54 \zeta^{12} + 525 \zeta^{11} + 132 \zeta^{10} + 132 \zeta^{9}
       +525 \zeta^{8} + 54 \zeta^{7} + 376 \zeta^{6} + 149 \zeta^{5} + 716 \zeta^{4} - 257 \zeta^{3} + 921 \zeta^{2} + 591
k=21, -209 \zeta^{17} + 801 \zeta^{16} + 508 \zeta^{15} - 673 \zeta^{14} + 826 \zeta^{13} + 611 \zeta^{12} - 784 \zeta^{11} + 826 \zeta^{10} + 826 \zeta^{9}
       -784 \zeta^{8} + 611 \zeta^{7} + 826 \zeta^{6} - 673 \zeta^{5} + 508 \zeta^{4} + 801 \zeta^{3} - 209 \zeta^{2} + 835
k = 22,3899 \zeta^{17} + 1195 \zeta^{16} + 4088 \zeta^{15} + 284 \zeta^{14} + 4232 \zeta^{13} + 1813 \zeta^{12} + 2242 \zeta^{11} + 2583 \zeta^{10}
       +2583 \zeta^{9} + 2242 \zeta^{8} + 1813 \zeta^{7} + 4232 \zeta^{6} + 284 \zeta^{5} + 4088 \zeta^{4} + 1195 \zeta^{3} + 3899 \zeta^{2} + 5472
k = 23, -215 \zeta^{17} + 235 \zeta^{16} - 72 \zeta^{15} - 153 \zeta^{14} + 131 \zeta^{13} + 49 \zeta^{12} - 218 \zeta^{11} + 86 \zeta^{10} + 86 \zeta^{9}
       -218 \zeta^{8} + 49 \zeta^{7} + 131 \zeta^{6} - 153 \zeta^{5} - 72 \zeta^{4} + 235 \zeta^{3} - 215 \zeta^{2} + 111
k = 24,749 \zeta^{17} - 5341 \zeta^{16} - 1463 \zeta^{15} + 1608 \zeta^{14} - 4035 \zeta^{13} - 2210 \zeta^{12} + 1938 \zeta^{11} - 3841 \zeta^{10}
       -3841 \zeta^{9} + 1938 \zeta^{8} - 2210 \zeta^{7} - 4035 \zeta^{6} + 1608 \zeta^{5} - 1463 \zeta^{4} - 5341 \zeta^{3} + 749 \zeta^{2} - 4759
k = 25, -1544 \zeta^{17} - 2442 \zeta^{16} - 2022 \zeta^{15} - 527 \zeta^{14} + 629 \zeta^{13} + 426 \zeta^{12} - 1055 \zeta^{11} - 2245 \zeta^{10}
       -2245 \zeta^{9} - 1055 \zeta^{8} + 426 \zeta^{7} + 629 \zeta^{6} - 527 \zeta^{5} - 2022 \zeta^{4} - 2442 \zeta^{3} - 1544 \zeta^{2} + 824
k = 26, 22 \zeta^{17} + 767 \zeta^{16} + 678 \zeta^{15} - 98 \zeta^{14} - 126 \zeta^{13} + 208 \zeta^{12} + 228 \zeta^{11} + 484 \zeta^{10} + 484 \zeta^{9}
       +228 \zeta^{8} + 208 \zeta^{7} - 126 \zeta^{6} - 98 \zeta^{5} + 678 \zeta^{4} + 767 \zeta^{3} + 22 \zeta^{2} + 318
k = 27,932 \zeta^{17} - 4 \zeta^{16} + 852 \zeta^{15} + 267 \zeta^{14} + 576 \zeta^{13} + 176 \zeta^{12} + 629 \zeta^{11} + 372 \zeta^{10} + 372 \zeta^{9}
       +629 \zeta^{8} + 176 \zeta^{7} + 576 \zeta^{6} + 267 \zeta^{5} + 852 \zeta^{4} - 4 \zeta^{3} + 932 \zeta^{2} + 697
                                                                         k = 28, 0
                                                                         k = 29, 0
                                                                         k = 30, 0
                                                                         k = 31, 0
                                                                         k = 32, 0
                                                                         k = 33, 0
                                                                         k = 34, 0
```

```
+3952 \zeta^{9} + 4066 \zeta^{8} + 912 \zeta^{7} + 2831 \zeta^{6} + 1254 \zeta^{5} + 5548 \zeta^{4} + 3078 \zeta^{3} + 5852 \zeta^{2} + 3857
k = 60, -11495 \zeta^{17} - 11115 \zeta^{16} - 12388 \zeta^{15} - 3249 \zeta^{14} + 779 \zeta^{13} + 1254 \zeta^{12} - 8170 \zeta^{11}
      -12198 \zeta^{10} - 12198 \zeta^9 - 8170 \zeta^8 + 1254 \zeta^7 + 779 \zeta^6 - 3249 \zeta^5 - 12388 \zeta^4 - 11115 \zeta^3
      -11495 c^2 - 190
k = 61, -874 \zeta^{17} - 5396 \zeta^{16} - 2413 \zeta^{15} + 608 \zeta^{14} - 4997 \zeta^{13} - 2717 \zeta^{12} + 1425 \zeta^{11} - 4294 \zeta^{10}
      -4294 \zeta^9 + 1425 \zeta^8 - 2717 \zeta^7 - 4997 \zeta^6 + 608 \zeta^5 - 2413 \zeta^4 - 5396 \zeta^3 - 874 \zeta^2 - 5643
k = 62,6213 \zeta^{17} + 4921 \zeta^{16} + 4845 \zeta^{15} + 2565 \zeta^{14} + 3857 \zeta^{13} + 380 \zeta^{12} + 6042 \zeta^{11} + 4674 \zeta^{10}
      +4674 \zeta^{9} + 6042 \zeta^{8} + 380 \zeta^{7} + 3857 \zeta^{6} + 2565 \zeta^{5} + 4845 \zeta^{4} + 4921 \zeta^{3} + 6213 \zeta^{2} + 6289
k = 63,4161 \zeta^{17} - 5681 \zeta^{16} + 1045 \zeta^{15} + 133 \zeta^{14} - 2641 \zeta^{13} - 1786 \zeta^{12} + 4484 \zeta^{11} - 1311 \zeta^{10}
      -1311 \zeta^{9} + 4484 \zeta^{8} - 1786 \zeta^{7} - 2641 \zeta^{6} + 133 \zeta^{5} + 1045 \zeta^{4} - 5681 \zeta^{3} + 4161 \zeta^{2} - 57
k = 64,30970 \zeta^{17} + 26182 \zeta^{16} + 34713 \zeta^{15} + 665 \zeta^{14} + 30533 \zeta^{13} + 11457 \zeta^{12} + 14250 \zeta^{11}
      +32870 \zeta^{10} +32870 \zeta^{9} +14250 \zeta^{8} +11457 \zeta^{7} +30533 \zeta^{6} +665 \zeta^{5} +34713 \zeta^{4} +26182 \zeta^{3}
      +30970 \zeta^{2} + 37430
k = 65, -17651 \zeta^{17} - 6403 \zeta^{16} - 18525 \zeta^{15} - 3705 \zeta^{14} - 5624 \zeta^{13} - 2071 \zeta^{12} - 16378 \zeta^{11}
      -11020 \zeta^{10} - 11020 \zeta^9 - 16378 \zeta^8 - 2071 \zeta^7 - 5624 \zeta^6 - 3705 \zeta^5 - 18525 \zeta^4 - 6403 \zeta^3
      -17651 c^2 - 13414
k = 66, -20197 \zeta^{17} - 33687 \zeta^{16} - 27664 \zeta^{15} - 836 \zeta^{14} - 21793 \zeta^{13} - 7980 \zeta^{12} - 7201 \zeta^{11}
      -31863 \zeta^{10} - 31863 \zeta^9 - 7201 \zeta^8 - 7980 \zeta^7 - 21793 \zeta^6 - 836 \zeta^5 - 27664 \zeta^4 - 33687 \zeta^3
      -20197 \zeta^2 - 24263
k = 67,3705 \zeta^{17} + 33440 \zeta^{16} + 12255 \zeta^{15} - 7695 \zeta^{14} + 33155 \zeta^{13} + 14630 \zeta^{12} - 5700 \zeta^{11}
      +26239 \zeta^{10} + 26239 \zeta^9 - 5700 \zeta^8 + 14630 \zeta^7 + 33155 \zeta^6 - 7695 \zeta^5 + 12255 \zeta^4 + 33440 \zeta^3
      +3705 \zeta^{2} + 40584
k = 68, -11799 \zeta^{17} + 5548 \zeta^{16} - 2584 \zeta^{15} - 6251 \zeta^{14} + 14402 \zeta^{13} + 10355 \zeta^{12} - 12635 \zeta^{11}
      +\ 152\ \zeta^{10}\ +\ 152\ \zeta^{9}\ -\ 12635\ \zeta^{8}\ +\ 10355\ \zeta^{7}\ +\ 14402\ \zeta^{6}\ -\ 6251\ \zeta^{5}\ -\ 2584\ \zeta^{4}\ +\ 5548\ \zeta^{3}
      -11799 c^2 + 14288
k = 69, 25251 \zeta^{17} + 2413 \zeta^{16} + 22135 \zeta^{15} + 7771 \zeta^{14} + 5529 \zeta^{13} - 380 \zeta^{12} + 20976 \zeta^{11}
      +\ 10203\ \zeta^{10} +\ 10203\ \zeta^{9} +\ 20976\ \zeta^{8} -\ 380\ \zeta^{7} +\ 5529\ \zeta^{6} +\ 7771\ \zeta^{5} +\ 22135\ \zeta^{4} +\ 2413\ \zeta^{3}
      +25251 c^{2} + 10393
 \underline{k} = 70, 11153 \zeta^{17} - 23940 \zeta^{16} + 3173 \zeta^{15} + 4674 \zeta^{14} - 8246 \zeta^{13} - 4522 \zeta^{12} + 13585 \zeta^{11}
```

- $-11723 \zeta^{10} 11723 \zeta^{9} + 13585 \zeta^{8} 4522 \zeta^{7} 8246 \zeta^{6} + 4674 \zeta^{5} + 3173 \zeta^{4} 23940 \zeta^{3} + 11153 \zeta^{2} 4408$

- $_{k}$ =75, 49609 ζ^{17} 6194 ζ^{16} + 36328 ζ^{15} + 20824 ζ^{14} + 3610 ζ^{13} 4693 ζ^{12} + 39558 ζ^{11} + 11514 ζ^{10} + 11514 ζ^{9} + 39558 ζ^{8} 4693 ζ^{7} + 3610 ζ^{6} + 20824 ζ^{5} + 36328 ζ^{4} 6194 ζ^{3} + 49609 ζ^{2} + 3572

"IDENTITY checked for ", $_{-}O(q^{-topq+1}) = _{-}O(q^{106})$

and _topq + 1 > -B = 87
