Exercise-1

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Elementary concepts of Parabola
खण्ड (A) : दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के प्रारम्भिक सिद्धान्त

A-1. Find the value of λ for which the equation $\lambda x^2 + 4xy + y^2 + \lambda x + 3y + 2 = 0$ represents a parabola
यदि समीकरण $\lambda x^2 + 4xy + y^2 + \lambda x + 3y + 2 = 0$ परवलय को निरूपित करता हो, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।
Ans. 4
Sol. $h^2 = ab \Rightarrow 4 = \lambda.1 \Rightarrow \lambda = 4$

A-2. Find
(i) The vertex, axis, focus, directrix, length of latusrectum of the parabola $x^2 + 2y - 3x + 5 = 0$.
(ii) The equation of the parabola whose focus is (1, 1) and the directrix is $x + y + 1 = 0$.
(iii) The equation to the parabola whose focus is (1, –1) and vertex is (2, 1).
(iv) The equation of the directrix of the parabola $x^2 - 4x - 3y + 10 = 0$.
ज्ञात कीजिए
(i) परवलय $x^2 + 2y - 3x + 5 = 0$ का शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता तथा नाभिलम्ब।
(ii) परवलय का समीकरण जिसकी नाभि (1, 1) तथा नियता $x + y + 1 = 0$ है।
(iii) परवलय का समीकरण जिसकी नाभि (1, –1) तथा शीर्ष (2, 1) है।
(iv) परवलय $x^2 - 4x - 3y + 10 = 0$ की नियता का समीकरण।

Ans. **(i)** vertex $\equiv \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}\right)$, focus $\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right)$

axis $x = \frac{3}{2}$, directrix $y = -\frac{7}{8}$, length of latus rectum = 2.

शीर्ष $\equiv \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}\right)$, नाभि $\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right)$

x-अक्ष $= \frac{3}{2}$, नियता $y = -\frac{7}{8}$, नाभिलम्ब = 2.

(ii) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$
(iii) $4x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 46y - 71 = 0$
(iv) $y = 5/4$

Sol. (i) Given equation दिया गया समीकरण

$x^2 + 2y - 3x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 5 = -2y$

$x^2 - 3x = \frac{9}{4} + 5 - \frac{9}{4} = -2y \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -2y - \frac{11}{4}$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(y + \frac{11}{8}\right) \quad \Rightarrow \quad X^2 = -4AY$

Hence vertex अतः शीर्ष $\equiv \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}\right)$

Axis $x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$

directirx नियता $y = -\frac{7}{8}$ $\Rightarrow$ latus rectum नाभिलम्ब = 2.

(ii) Let P(x, y) be any point on the parabola.
Then the distance of P(x, y) from the focus (1, 1) = distance of P(x, y) from the directrix x + y + 1 = 0

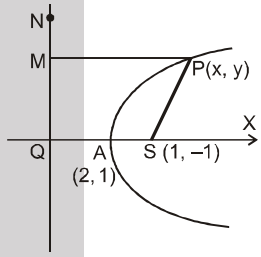
$$\therefore \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} \quad .....(1)$$

Squaring (1), we get

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

or $2[x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y] = x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 2x + 1$ or $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$
This is the required equation of the parabola.

(iii) In this problem, equation of the directrix is not given.
Therefore, first of all we will determine the equation of the directrix.
Vertex A is (2, 1) and focus S is (1, –1).
Let the axis meet the directrix in Q.
Let the co-ordinates of Q be (α, β)
Since A is the mid-point of SQ



$$\therefore \quad \frac{\alpha+1}{2} = 2 \qquad \therefore \quad \alpha = 3$$

and $$\frac{\beta-1}{2} = 1 \qquad \therefore \quad \beta = 3$$

$\therefore$ $Q \equiv (3, 3)$

Slope of axis QS = $\frac{1-(-1)}{2-1} = 2$

$\therefore$ Slope of directrix which is perpendicular to axis = $-\frac{1}{2}$

Directrix is line though Q(3, 3) which slope $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ Equation of directrix is $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ or $x + 2y - 9 = 0$

Let P(x, y) be any point on the parabola. Draw PM $\perp$ QN. Then by definition of parabola PS = PM.

$$\therefore \quad \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{|x+2y-9|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = \frac{|x+2y-9|}{\sqrt{5}}$$

Squarring, we get $5[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] = (x + 2y - 9)^2$ or $4x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 46y - 71 = 0$.
This is the required equation of the parabola.

HIndi: इस प्रश्न में नियता का समीकरण नहीं किया गया है इसलिए सबसे पहले नियता का समीकरण ज्ञात करेंगें–
शीर्ष A (2, 1) तथा नाभि S (1, –1) है।
माना नियता अक्ष को Q पर मिलती है।
माना Q के निर्देशांक (α, β) है।
चूंकि A , SQ का मध्य बिन्दु है।

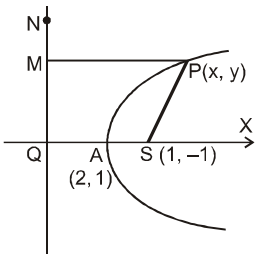
$$\therefore \quad \frac{\alpha+1}{2} = 2 \qquad \therefore \quad \alpha = 3$$

और $$\frac{\beta-1}{2} = 1 \qquad \therefore \quad \beta = 3$$

$\therefore$ $Q \equiv (3, 3)$

अक्ष QS की प्रवणता = $\frac{1-(-1)}{2-1} = 2$

$\therefore$ नियता की प्रवणता जो अक्ष के लम्बवत है = $-\frac{1}{2}$



नियता एक रेखा है जो Q(3, 3) से गुजरती है तथा प्रवणता $-\frac{1}{2}$ है।

$\therefore$ नियता का समीकरण $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ या $x + 2y - 9 = 0$

माना P(x, y) परवलय पर कोई बिन्दु है PM $\perp$ QN खींचिए तब परवलय की परिभाषा से PS = PM

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{|x+2y-9|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = \frac{|x+2y-9|}{\sqrt{5}}$$

वर्ग करने पर $5[(x-1)^2 + (y+1)^2] = (x + 2y - 9)^2$ या $4x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 46y - 71 = 0$.

परवलय का अभीष्ट समीकरण है।

(iv) The given equation can be written as $(x - 2)^2 = 3(y - 2) \Rightarrow X^2 = 3Y$, where $x = X + 2$, $y = Y + 2$. This directrix of this parabola with reference to new axes is

$Y = -a$, where $a = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = 5/4$

दिया गया परवलय $(x - 2)^2 = 3(y - 2) \Rightarrow X^2 = 3Y$,

जहाँ $x = X + 2$, $y = Y + 2$. इस परवलय की नियता, नये अक्षों के साथ

$Y = -a$, जहाँ $a = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = 5/4$

A-3. Find the equation of the parabola the extremities of whose latus rectum are (1, 2) and (1, –4).

परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके नाभिलम्ब के सिरे (1, 2) और (1, –4) है।

Ans. $(y + 1)^2 = 3(2x + 1)$ & $(y + 1)^2 = -3(2x - 5)$

Sol. Let L $\equiv$ (1, 2) and L′ $\equiv$ (1, –4)

Slope of L′L = $\frac{2+4}{1-1}$ (undefined)

Hence latus rectum L′L is perpendicular to x-axis. Therefore, axis of the parabola will be parallel to x-axis and tangent at the vertex will be parallel to y-axis.

Let the equation of the parabola be $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ .....(1)

Now $L'L = |4a|$ $\therefore$ $6 = |4a| \Rightarrow 4a = \pm 6$

Hence from (1), equation of parabola becomes

$(y - \beta)^2 = \pm 6(x - \alpha)$ .....(2)

Since L and L′ lie on (2), therefore

$(2 - \beta)^2 = \pm 6(1 - \alpha)$ .....(3)

and $(4 + \beta)^2 = \pm 6(1 - \alpha)$ .....(4)

From (3) and (4), $(2 - \beta)^2 = (4 + \beta)^2$

$\Rightarrow 12\beta = -12 \Rightarrow \beta = -1$

$\therefore$ from (3), $9 = \pm 6(1 - \alpha) \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$

From (2), required parabolas are

$(y + 1)^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)$ or $(y + 1)^2 = 3(2x + 1)$

and $(y + 1)^2 = -6\left(x - \frac{5}{2}\right)$ or $(y + 1)^2 = -3(2x - 5)$

Hindi : माना L $\equiv$ (1, 2) और L′ $\equiv$ (1, –4)

L′L की प्रवणता = $\frac{2+4}{1-1}$ (अपरिभाषित)

अतः L′L नाभिलम्ब अक्ष के लम्बवत है। इसलिए परवलय की अक्ष x-अक्ष के समान्तर है तथा शीर्ष पर स्पर्श रेखा y- अक्ष के समान्तर है।

माना परवलय का समीकरण $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ .....(1)

अब $L'L = |4a|$ $\therefore$ $6 = |4a| \Rightarrow 4a = \pm 6$

अतः (1) से परवलय का समीकरण

$(y - \beta)^2 = \pm 6(x - \alpha)$ .....(2)

चूंकि L तथा L′ (2) पर स्थित है।

$(2-\beta)^2 = \pm 6(1-\alpha)$ .....(3)

और $(4+\beta)^2 = \pm 6(1-\alpha)$ .....(4)

(3) और (4) से $(2-\beta)^2 = (4+\beta)^2$

$\Rightarrow$ $12\beta = -12$ $\Rightarrow$ $\beta = -1$

$\therefore$ (3) से $9 = \pm 6(1-\alpha)$ $\Rightarrow$ $\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$

(2) से अभिष्ट परवलय

$(y+1)^2 = 6\left(x+\frac{1}{2}\right)$ या $(y+1)^2 = 3(2x+1)$

और $(y+1)^2 = -6\left(x-\frac{5}{2}\right)$ या $(y+1)^2 = -3(2x-5)$

A-4. Find the axis, vertex, focus, directrix and equation of latus rectum of the parabola $9y^2-16x-12y-57 = 0$
परवलय $9y^2 - 16x - 12y - 57 = 0$ की अक्ष, नाभि, नियता और नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

Ans. $y = \frac{2}{3}$, $\left(-\frac{61}{16}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{485}{144}, \frac{2}{3}\right)$, $x = \frac{-613}{144}, x = -\frac{485}{144}$

Sol. Given parabola is $9y^2 - 16x - 12y - 57 = 0$ .....(1)

[Equation (1) is quadratic in y and linear in x, therefore bring all terms containing y on one side and then complete the square]

From (1), $9y^2 - 12y = 16x + 57$

or $\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}\left(x+\frac{61}{16}\right)$ .....(2)

This is of the form $Y^2 = 4aX$

where $Y \equiv y - \frac{2}{3}$, $X \equiv x + \frac{61}{16}$, $4a = \frac{16}{9}$

(i) Axis of parabola (1) is $Y = 0$ or $y = \frac{2}{3}$

(ii) Co-ordinates of vertex are given by $X = 0$ and $Y = 0$ i.e. by $x + \frac{61}{16} = 0$ and $y - \frac{2}{3} = 0$

$\therefore$ Vertex is $\left(-\frac{61}{16}, \frac{2}{3}\right)$

(iii) Co-ordinates of focus are given by

$X = a$ and $Y = 0$ i.e., by $x + \frac{61}{16} = \frac{4}{9}$ and $y - \frac{2}{3} = 0$

$\therefore$ Focus is $\left(-\frac{485}{144}, \frac{2}{3}\right)$

(iv) Equation of the directrix is $X = -a$

or $x + \frac{61}{16} = \frac{4}{9} =$ $\Rightarrow$ $x = \frac{-613}{144}$

(v) Length of latus rectum $= |4a| = \frac{16}{9}$

Hindi: दिया गया परवलय है $9y^2 - 16x - 12y - 57 = 0$ .....(1)

[समीकरण (1) y में द्विघात है तथा x में रेखिक है। इसलिए y के सभी पदों को रखने वाले एक तरफ रखकर वर्ग करने पर (1) से $9y^2 - 12y = 16x + 57$

या $\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}\left(x+\frac{61}{16}\right)$ .....(2)

परवलय का रूप $Y^2 = 4aX$

जहाँ $Y \equiv y - \frac{2}{3}$, $X \equiv x + \frac{61}{16}$, $4a = \frac{16}{9}$

(i) परवलय (1) का अक्ष Y = 0 या $y = \frac{2}{3}$

(ii) शीर्ष के निर्देशाक X = 0 तथा Y = 0 अर्थात् $x + \frac{61}{16} = 0$ तथा $y - \frac{2}{3} = 0$

$\therefore$ शीर्ष $\left(-\frac{61}{16}, \frac{2}{3}\right)$ है

(iii) नाभि के निर्देशांक X = a और Y = 0 अर्थात् $x + \frac{61}{16} = \frac{4}{9}$ और $y - \frac{2}{3} = 0$

$\therefore$ Focus is $\left(-\frac{485}{144}, \frac{2}{3}\right)$

(iv) नियता का समीकरण X = –a या $x + \frac{61}{16} = -\frac{4}{9} \Rightarrow x = \frac{-613}{144}$

(v) नाभिलम्ब की लम्बाई $= |4a| = \frac{16}{9}$

A-5. Find the locus of a point whose sum of the distances from the origin and the line x = 2 is 4 units.
उस बिन्दु का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिन्दु तथा रेखा x = 2 से दूरीयों का योगफल 4 इकाई है।

Ans. $\sqrt{x^2+y^2} + |x-2| = 4$

Sol. Required locus is $\sqrt{x^2+y^2} + |x-2| = 4$

or $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x - 2 = 4, \text{ if } x \ge 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} - x + 2 = 4, \text{ if } x \le 2 \end{cases}$

or $\begin{cases} x^2+y^2 = (6-x)^2, \text{ if } x \ge 2 \\ x^2+y^2 = (2+x)^2, \text{ if } x \le 2 \end{cases}$

or $\begin{cases} y^2 = -12(x-3), x \ge 2 & .....(1) \\ y^2 = 4(x+1), x \le 2 & .....(2) \end{cases}$

(1) is a part of parabola with vertex (3, 0) and axis y = 0.
(2) is a part of parabola with vertex (–1, 0) and axis y = 0
The sketch of the path is as shown in the figure.

Hindi : अभीष्ट बिन्दुपथ $\sqrt{x^2+y^2} + |x-2| = 4$

या $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x - 2 = 4, \text{ if } x \ge 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} - x + 2 = 4, \text{ if } x \le 2 \end{cases}$

या $\begin{cases} x^2+y^2 = (6-x)^2, \text{ if } x \ge 2 \\ x^2+y^2 = (2+x)^2, \text{ if } x \le 2 \end{cases}$

या $\begin{cases} y^2 = -12(x-3), x \ge 2 & .....(1) \\ y^2 = 4(x+1), x \le 2 & .....(2) \end{cases}$

(1) परवलय का एक भाग है जिसका शीर्ष (3, 0) और अक्ष y = 0 है।
(2) परवलय का एक भाग है जिसका शीर्ष (–1, 0) और अक्ष y = 0 है।
पथ का आरेख चित्र में दर्शाया गया है।

A-6. Find the value of α for which point $(\alpha, 2\alpha + 1)$ doesn't lie outside the parabola $y = x^2 + x + 1$.
α का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $(\alpha, 2\alpha + 1)$ परवलय $y = x^2 + x + 1$ के बाहर स्थित नहीं है।

Ans. $\alpha \in [0, 1]$

Sol. $x^2 + x + 1 - y = 0$
$(\alpha, 2\alpha + 1)$
$\alpha^2 + \alpha + 1 - (2\alpha + 1) \le 0$
$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha \le 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 1) \le 0 \Rightarrow \alpha \in [0, 1]$

A-7. Find the set of values of α in the interval $[\pi/2, 3\pi/2]$, for which the point $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ does not lie outside the parabola $2y^2 + x - 2 = 0$.
यदि $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ परवलय $2y^2 + x - 2 = 0$ के बाहर स्थित नहीं हो, तो $[\pi/2, 3\pi/2]$ अन्तराल में α के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

.

Ans. $\alpha \in [\pi/2, 5\pi/6] \cup [\pi, 3\pi/2]$

Sol. From the given condition दिए गए प्रतिबन्ध से

$2\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2 \le 0$

$2\sin^2\alpha - \sin\alpha \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha\,(2\sin\alpha - 1) \ge 0$

$-1 \le \sin\alpha \le 0,\ \sin\alpha \ge \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

A-8. If a circle be drawn so as always to touch a given straight line and also a given circle externally then prove that the locus of its centre is a parabola.(given line and given circle are non intersecting)
यदि एक वृत इस प्रकार खींचा जाता है कि वह सदैव दी गई सरल रेखा एवं वृत को बाह्य स्पर्श करता हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके केन्द्र का बिन्दुपथ परवलय है। (जबकि दिया गया वृत एवं रेखा प्रतिच्छेद नहीं करते है।)

Sol. Let the equation of circle and line are

$x^2 + y^2 = a^2$ and $y = b$

$\Rightarrow$ $PQ - a = r$

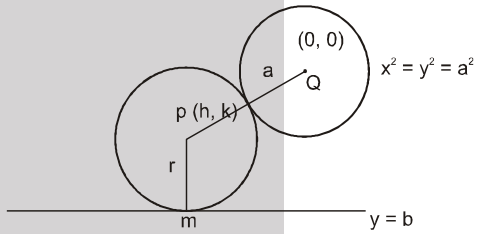
$PQ = a + r$

$(\sqrt{h^2 + k^2})^2 = (a + r)^2$

$h^2 + k^2 = (a + k - b)^2$

$h^2 + k^2 = k^2 + (a - b)^2 + 2k(a - b)$

Locus $x^2 = (a - b)^2 + 2y(a - b)$



Sol. माना वृत्त एवं रेखा के समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ तथा $y = b$ है।

$\Rightarrow$ $PQ - a = r$

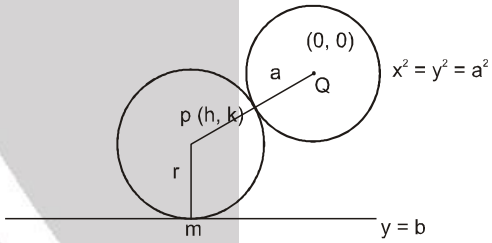
$PQ = a + r$

$(\sqrt{h^2 + k^2})^2 = (a + r)^2$

$h^2 + k^2 = (a + k - b)^2$

$h^2 + k^2 = k^2 + (a - b)^2 + 2k(a - b)$

बिन्दुपथ $x^2 = (a - b)^2 + 2y(a - b)$



Section (B) : Elementary concepts of Ellipse & Hyperbola
खण्ड (B) : परवलय के प्रारम्भिक सिद्धान्त

B-1. Find the eccentricity of an ellipse of which distance between the focii is 10 and that of focus and corresponding directrix is 15.
उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियों के बीच की दूरी 10 है तथा नाभि एवं उसके संगत नियता के बीच की दूरी 15 है।

Ans. $\left(e = \frac{1}{2}\right)$

Sol. $2ae = 10 \qquad \frac{a}{e} - ae = 15$

$ae = 5 \qquad \frac{5}{e^2} - 5 = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{e^2} = 20 \quad \Rightarrow e = \frac{1}{2}$

Hindi $2ae = 10 \qquad \frac{a}{e} - ae = 15$

$ae = 5 \qquad \frac{5}{e^2} - 5 = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{e^2} = 20 \quad \Rightarrow e = \frac{1}{2}$

B-2 If focus and corresponding directrix of an ellipse are (3, 4) and x + y – 1 = 0 respectively and eccentricity is $\frac{1}{2}$ then find the co-ordinates of extremities of major axis.

यदि दीर्घवृत्त की नाभि (3, 4), उसके संगत नियता x + y – 1 = 0 और उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ हो, तो उसके दीर्घअक्ष के सिरो के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Ans. ((2, 3) & (6, 7))

Sol. Equation of axis : x– y + k = 0,

3 – 4 + k = 0

k = 1

x – y + 1 = 0

point of intersections of axis and directrix

x– y + 1 = 0

x + y –1 = 0

x = 0, y =1 ⇒ M ≡ (0, 1)

Now, $\frac{AS}{AM} = \frac{1}{2}$

For internal division

$\therefore$ $x = \frac{1\times 0+2\times 3}{3} = 2$

$y = \frac{1\times 1+2\times 4}{3} = 3$

For external division

$x = \frac{1\times 0-2\times 3}{1-2} = 6$

$y = \frac{1\times 1-2\times 4}{1-2} = 7$

Hindi अक्ष का समीकरण है– x– y + k = 0,

3 – 4 + k = 0

k = 1

x – y + 1 = 0

अक्ष और नियता का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करनें के लिये

x– y + 1 = 0

एवं x + y –1 = 0 को हल करने पर

x = 0, y = 1 ⇒ M ≡ (0, 1)

चूँकि $\frac{AS}{AM} = \frac{1}{2}$ Where 'A' is vertex & s is focus

अतः अन्तःविभाजन हेतु

$\therefore$ $x = \frac{1\times 0+2\times 3}{3} = 2$

$y = \frac{1\times 1+2\times 4}{3} = 3$

⇒ A ≡ (2, 3)

बाह्य विभाजन हेतु

$x = \frac{1\times 0-2\times 3}{1-2} = 6$

$y = \frac{1\times 1-2\times 4}{1-2} = 7$

⇒ A′ ≡ (6, 7)

B-3 Find the set of those value(s) of 'α' for which the point $\left(7-\frac{5}{4}\alpha, \alpha\right)$ lies inside the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

'α' के उन मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिनके लिए बिन्दु $\left(7-\frac{5}{4}\alpha, \alpha\right)$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ के अन्दर स्थित हो।

Ans. $\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$

Sol. For any point to lies inside the ellipse, $S_1 < 0$

बिन्दु के दीर्घवृत्त के अन्दर स्थित होने के लिए $S_1 < 0$

$$\Rightarrow \frac{\left(7-\frac{5}{4}\alpha\right)^2}{25}+\frac{\alpha^2}{16}-1 < 0 \quad \Rightarrow \frac{(28-5\alpha)^2}{400}+\frac{\alpha^2}{16}-1 < 0 \quad \Rightarrow \quad (28-5\alpha)^2+25\alpha^2-400 < 0$$

$\Rightarrow \quad 50\alpha^2 - 280\alpha - 384 < 0 \quad \Rightarrow \quad 25\alpha^2 - 140\alpha - 192 < 0 \quad \Rightarrow \quad (5\alpha - 12)(5\alpha - 16) < 0$

$\Rightarrow \quad \frac{12}{5} < \alpha < \frac{16}{5}$

B-4. Write the parametric equation of ellipse $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

दीर्घवृत्त $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ का प्राचलिक समीकरण लिखिये।

Ans. $(x = 3 + 5\cos\theta,\ y = -2 + 4\sin\theta)$

Sol. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 5\cos\phi \quad \Rightarrow \quad y = -2 + 4\sin\phi$

B-5. Find the set of possible value of α for which point $P(\alpha, 3\alpha)$ lies on the smaller region of the ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ divided by the line $3x + 4y = 12$.

α के संभावित मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $P(\alpha, 3\alpha)$ दीर्घवृत्त $9x^2 + 16y^2 = 144$ और रेखा $3x + 4y = 12$ को विभाजित करने वाले छोटे क्षेत्र में स्थित है–

Ans. $\frac{4}{5} < \alpha < \frac{4}{\sqrt{17}}$

Sol. $\frac{\alpha^2}{16} + \alpha^2 - 1 < 0 \Rightarrow \quad \alpha^2 < \frac{16}{17}$ & $3\alpha + 12\alpha - 12 > 0$

$\Rightarrow \quad \frac{4}{5} < \alpha < \frac{4}{\sqrt{17}}$

B-6. Find the equation of the ellipse having its centre at the point (2, –3), one focus at (3, –3) and one vertex at (4, –3).

दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, –3) एक नाभि (3, –3) तथा एक शीर्ष (4, –3) है।

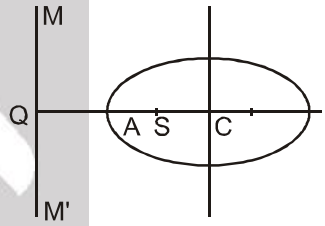
Ans. $3x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$

Sol. $C \equiv (2, -3)$, $S \equiv (3, -3)$ and $A \equiv (4, -3)$

Now $CA = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+3)^2} = 2 \quad \therefore \quad a = 2$

Again $CS = \sqrt{(3-2)^2 + (-3+3)^2} = 1$

$\therefore \quad ae = 1\ ; \quad \therefore \quad e = \frac{1}{2}$



Let the directrix cut the major-axis at Q. Then $\frac{AS}{AQ} = e = \frac{1}{2}$

If $Q \equiv (\alpha, \beta)$, then SA : AQ = e : 1 = 1 : 2

$\therefore \quad A \equiv \left(\frac{\alpha+6}{3}, \frac{\beta-6}{3}\right) = (4, -3) \Rightarrow \frac{\alpha+6}{3} = 4\ ;\ \frac{\beta-6}{3} = -3$

$\therefore \quad \alpha = 6, \beta = -3$

Slope of CA = 0, therefore directrix will be parallel to y-axis.

Since directrix is parallel to y-axis and it passes through Q(6, –3)

$\therefore$ equation of the directrix is $x = 6$

Let P(x, y) be any point on the ellipse, then

$e = \frac{1}{2} = \frac{PS}{PN} = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}}{\left|\frac{x-6}{\sqrt{1^2}}\right|}$ or $3x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$

Hindi: $C \equiv (2, -3)$, $S \equiv (3, -3)$ and $A \equiv (4, -3)$

अब $CA = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+3)^2} = 2 \quad \therefore \quad a = 2$

पुनः $CS = \sqrt{(3-2)^2 + (-3+3)^2} = 1$

$\therefore$ ae = 1 ; $\therefore$ $e = \frac{1}{2}$

माना नियता दीर्घअक्ष को Q पर मिलती है तब $\frac{AS}{AQ} = e = \frac{1}{2}$

यदि $Q \equiv (\alpha, \beta)$, तब SA : AQ = e : 1 = 1 : 2

$\therefore$ $A \equiv \left(\frac{\alpha+6}{3}, \frac{\beta-6}{3}\right) = (4, -3) \Rightarrow \frac{\alpha+6}{3} = 4 ; \frac{\beta-6}{3} = -3$

$\therefore$ $\alpha = 6, \beta = -3$

CA की प्रवणता = 0 इसलिए नियता y- अक्ष के समान्तर होगी।

चूंकि नियता y-अक्ष के समान्तर है तथा यह Q(6, –3) से गुजरती है।

$\therefore$ नियता का समीकरण x = 6 है।

माना P(x, y) दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु है तब

$e = \frac{1}{2} = \frac{PS}{PN} = \frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}}{\left|\frac{x-6}{\sqrt{1^2}}\right|}$ या $3x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$

B-7. Find the equation of the ellipse whose foci are (2, 3), (–2, 3) and whose semi-minor axis is $\sqrt{5}$.

दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियां (2, 3), (–2, 3) और अर्धलघु अक्ष $\sqrt{5}$ है।

Ans. $5x^2 + 9y^2 - 54y + 36 = 0$

Sol. Let S and S' be the foci of ellipse

Let S ≡ (2, 3) and S ≡ (–2, 3)

Let C be the centre of the ellipse, then C ≡ (0, 3)

According to question semi minor axis b = $\sqrt{5}$

Also SS′ = 4 $\Rightarrow$ 2ae = 4 $\Rightarrow$ ae = 2

Now $b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow 5 = a^2 - a^2e^2 = a^2 - 4 \Rightarrow a = 3$

Slope of SS′ = 0, therefore major axis of the ellipse is parallel to x-axis and minor axis is parallel to y-axis.

Now equation of the required ellipse will be $\frac{(x-0)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

or $5x^2 + 9(y-3)^2 = 45$ or $5x^2 + 9y^2 - 54y + 36 = 0$

Hindi माना S तथा S′ दीर्घवृत्त है।

माना S ≡ (2, 3) और S ≡ (–2, 3)

माना C दीर्घवृत्त का केन्द्र है। तब C ≡ (0, 3)

प्रश्न के अनुसार अर्धलघु अक्ष b = $\sqrt{5}$

तथा SS′ = 4 $\Rightarrow$ 2ae = 4 $\Rightarrow$ ae = 2

अब $b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow 5 = a^2 - a^2e^2 = a^2 - 4 \Rightarrow a = 3$

SS′ की प्रवणता = 0 इसलिए दीर्घवृत्त की दीर्घ अक्ष x-अक्ष के समान्तर है और लघु अक्ष y-अक्ष के समान्तर है।

अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण होगा $\frac{(x-0)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

या $5x^2 + 9(y-3)^2 = 45$ या $5x^2 + 9y^2 - 54y + 36 = 0$

B-8. Find

(i) The centre, eccentricity, foci and directrices of the hyperbola $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$.

(ii) The equation of the hyperbola whose directrix is 2x + y = 1, focus (1, 2) and eccentricity $\sqrt{3}$.

(i) अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$ का केन्द्र, उत्केन्द्रता, नाभियां और नियताएं ज्ञात कीजिए।

(ii) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नियता 2x + y = 1, नाभि (1, 2) तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ है।

Ans. **(i)** Centre (–1, 2), $e = \frac{5}{3}$, foci = (4, 2), (–6, 2), $x = -\frac{14}{5}$ and $x = \frac{4}{5}$

(ii) $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 14y - 22 = 0$

Sol. **(i)** Here $16x^2 + 32x + 16 - (9y^2 - 36y + 36) - 144 = 0$ or $16(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 144$

$\therefore \quad \dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

Putting $x + 1 = X$ and $y - 2 = Y$, the equation becomes $\dfrac{X^2}{9} - \dfrac{Y^2}{16} = 1$ which is in the standard form.

Here $a^2 = 9$ and $b^2 = 16$

$\because b^2 = a^2(e^2 - 1)$, we get $16 = 9(e^2 - 1)$

$\therefore e^2 - 1 = \dfrac{16}{9}$

$\therefore e^2 = \dfrac{25}{9}$, i.e. $e = \dfrac{5}{3}$

Now, centre $= (0, 0)_{X, Y} = (-1, 2)$

{$\because$ when $X = 0$, $x + 1 = X$ gives $x = -1$ and when $Y = 0$, $y - 2 = Y$ gives $y = 2$}

foci $= (\pm ae, 0)_{X, Y} = \left(\pm 3\cdot\dfrac{5}{3}, 0\right)_{X, Y} = (\pm 5, 0)_{X, Y} = (-1 \pm 5, 2) = (4, 2), (-6, 2)$

Directrices in X, Y coordinates have the equations

$X \pm \dfrac{a}{e} = 0$ or $x + 1 \pm \dfrac{3}{(5/3)} = 0$ i.e. $x + 1 \pm \dfrac{9}{5} = 0$

$\therefore \quad x = -\dfrac{14}{5}$ and $x = \dfrac{4}{5}$

(ii) by PS = ePM (PS = ePM से)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3}\left|\frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}}\right| \Rightarrow \quad 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 14y - 22 = 0.$$

Hindi **.(i)** दिया गया है– $16x^2 + 32x + 16 - (9y^2 - 36y + 36) - 144 = 0$ or $16(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 144$

$\therefore \dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

$x + 1 = X$ और $y - 2 = Y$, खने पर समीकरण $\dfrac{X^2}{9} - \dfrac{Y^2}{16} = 1$ which is in the standard form.

जो कि मानक रूप है। यहां $a^2 = 9$ और $b^2 = 16$

$\because b^2 = a^2(e^2 - 1)$, we get $16 = 9(e^2 - 1)$

$\therefore e^2 - 1 = \dfrac{16}{9}$

$\therefore e^2 = \dfrac{25}{9}$, i.e. $e = \dfrac{5}{3}$

अब केन्द्र $= (0, 0)_{X, Y} = (-1, 2)$

{$\because$ जब $X = 0$, $x + 1 = X$ जो देता है $x = -1$ तथा जब $Y = 0$, $y - 2 = Y$ gives $y = 2$}

foci $= (\pm ae, 0)_{X, Y} = \left(\pm 3\cdot\dfrac{5}{3}, 0\right)_{X, Y} = (\pm 5, 0)_{X, Y} = (-1 \pm 5, 2) = (4, 2), (-6, 2)$

समीकरणों की X, Y में नियताओं के निर्देशांक

$X \pm \dfrac{a}{e} = 0$ or $x + 1 \pm \dfrac{3}{(5/3)} = 0$ i.e. $x + 1 \pm \dfrac{9}{5} = 0$

$\therefore \quad x = -\dfrac{14}{5}$ या $x = \dfrac{4}{5}$

(ii) by PS = ePM (PS = ePM से)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{3}\left|\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}}\right| \Rightarrow \quad 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 14y - 22 = 0.$$

B-9. For the hyperbola $x^2/100 - y^2/25 = 1$, prove that
(i) eccentricity = $\sqrt{5}/2$
(ii) SA . S′A = 25, where S & S′ are the foci & A is the vertex .
अतिपरवलय $x^2/100 - y^2/25 = 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि –
(i) उत्केन्द्रता = $\sqrt{5}/2$
(ii) SA . S′A = 25, जहाँ S व S′ नाभियाँ तथा A शीर्ष है।

Sol. $\frac{x^2}{10^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1+\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

SA = ae – a

S′A = ae + a $\quad \Rightarrow \quad$ SA.S′A = $a^2(e^2 - 1) = 25$.

B-10. The foci of a hyperbola coincide with the foci of the ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Find the equation of the hyperbola if its eccentricity is 2.
अतिपरवलय की नाभियाँ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ की नाभियों के सम्पाती हैं। अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इसकी उत्केन्द्रता 2 है।
Ans. $3x^2 - y^2 - 12 = 0$

Sol. Eccentricity of ellipse $e = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

let the equation of hyperbola be $\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{y^2}{m^2} = 1$

distance between foci

$2\ell \times 2 = 2 \times 5 \times \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \ell = 2$

$m^2 = \ell^2(4-1) \quad \Rightarrow \quad m^2 = 12 \quad \therefore$ Equation of hyperbola is

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - y^2 - 12 = 0$

Hindi दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

माना अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{y^2}{m^2} = 1$

नाभियों के मध्य दूरी

$2\ell \times 2 = 2 \times 5 \times \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \ell = 2$

$m^2 = \ell^2(4-1) \quad \Rightarrow \quad m^2 = 12$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - y^2 - 12 = 0$

B-11. Find
(i) The foci of the hyperbola $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$
(ii) Equation of the hyperbola if vertex and focus of hyperbola are (2, 3) and (6, 3) respectively and eccentricity e of the hyperbola is 2
(i) अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$ की नाभियां ज्ञात कीजिए।
(ii) अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि अतिपरवलय का शीर्ष और नाभि क्रमशः (2, 3) और (6, 3) है तथा अतिपरवलय की उत्केन्द्रता 2 है

Ans. **(i) (4, 1), (–6, 1)**

(ii) $\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{48}=1$

Sol. (i) The given equation can be written as

$9(x^2 + 2x) - 16(y^2 - 2y) = 151$ or $9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) = 151 + 9 - 16 = 144$

$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$ or $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$

where $X = x + 1$, $Y = y - 1$, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$; centre is $X = 0$, $Y = 0$ i.e., (–1, 1)

$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow e = 5/4$

foci are $X = \pm ae$, $Y = 0$ or $x + 1 = \pm 4\ (5/4)$; $y - 1 = 0$ or (4, 1) and (–6, 1)

directrices $X = \pm a/e$ or $x + 1 = \pm 16/5$ or $5x - 11 = 0$, $5x + 21 = 0$.

Hindi: दिया गया समीकरण

$9(x^2 + 2x) - 16(y^2 - 2y) = 151$ या $9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) = 151 + 9 - 16 = 144$

$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$ or $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$

जहाँ $X = x + 1$, $Y = y - 1$, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$

केन्द्र है $X = 0$, $Y = 0$ i.e., (–1, 1)

$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow e = 5/4$

नाभियां $X = \pm ae$, $Y = 0$ या $x + 1 = \pm 4\ (5/4)$; $y - 1 = 0$ या (4, 1) और (–6, 1)

नियतायें $X = \pm a/e$ या $x + 1 = \pm 16/5$ या $5x - 11 = 0$, $5x + 21 = 0$.

(ii) Distance between vertex and focus is $a(e - 1) = 4$ $\Rightarrow$ $a = 4$ ($e = 2$)

$\therefore$ $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 48$

Distance of vertex from centre is a

$\therefore$ Coordinates of the centre is (–2, 3)

$\therefore$ Equation of the required hyperbola is . $\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{48}=1$

शीर्ष और नाभि के मध्य दूरी $a(e - 1) = 4$ $\Rightarrow$ $a = 4$ ($e = 2$)

$\therefore$ $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 48$

केन्द्र से शीर्ष की दूरी = a

$\therefore$ केन्द्र के निर्देशांक (–2, 3)

$\therefore$ अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण . $\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{48}=1$

B-12. Find the position of the point (2, 5) relative to the hyperbola $9x^2 - y^2 = 1$.

अतिपरवलय $9x^2 - y^2 = 1$ के सापेक्ष बिन्दु (2, 5) की स्थिति ज्ञात कीजिए।

Ans. Inside (अन्दर)

Sol. $\because$ $(9x^2 - y^2 - 1) > 0$ at (2,5)

$\therefore$ point (2,5) lies inside.

Hindi. $\because$ (2,5) पर $(9x^2 - y^2 - 1) > 0$

$\therefore$ बिन्दु (2,5) अन्दर स्थित है।

B-13. Find the equation of auxiliary circle, of conic which passes through (1, 1) & is having foci (4, 5) & (2, 3).

शांकव के सहायक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (1, 1) से गुजरता है तथा इसकी नाभियाँ (4, 5) और (2, 3) हैं।

Ans. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$

Sol. **Case-I** : if the is a ellipse then centre (3, 4) & PS + PS' = 2a $\Rightarrow$ $5 + \sqrt{5} = 2a \Rightarrow a = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

Case-II: if it is a hyperbola the centre (3, 4) & $|PS - PS'| = 2a$ $\Rightarrow |5 - \sqrt{5}| = 2a \Rightarrow a = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\Rightarrow$ equation of auxilliary circle $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$

Hindi. **Case-I** : यदि यह दीर्घवृत्त है तब केन्द्र (3, 4) और $PS + PS' = 2a$ $\Rightarrow 5 + \sqrt{5} = 2a \Rightarrow a = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

Case-II: यदि यह अतिपरवलय है तब केन्द्र (3, 4) और $|PS - PS'| = 2a \Rightarrow |5 - \sqrt{5}| = 2a \Rightarrow a = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\Rightarrow$ सहायक वृत्त का समीकरण $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$

B-14. Find the eccentricity of the hyperbola with its principal axes along the co-ordinate axes and which passes through (3, 0) & $\left(3\sqrt{2}, 2\right)$.

(3, 0) तथा $\left(3\sqrt{2}, 2\right)$ से गुजरने वाले अतिपरवलय, जिसके मुख्य अक्ष, निर्देशी अक्ष है, की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{\sqrt{13}}{3}$

Sol. Let hyperbola be $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .....(i)

$\because$ (1) passes through (3, 0) & $(3\sqrt{2}, 2)$

$\Rightarrow$ $\frac{9}{a^2} = 1$ $\Rightarrow$ $a^2 = 9$ .....(ii)

& $\frac{9.2}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$ $\Rightarrow$ $b^2 = 4$ .....(iii)

$\therefore$ By (i), (ii) & (iii) we have hyperbola as

$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $\therefore$ $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Hindi. मानाकि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .....(i)

$\because$ (1) बिन्दु (3, 0) तथा $(3\sqrt{2}, 2)$ से गुजरती है।

$\Rightarrow$ $\frac{9}{a^2} = 1$ $\Rightarrow$ $a^2 = 9$ .....(ii)

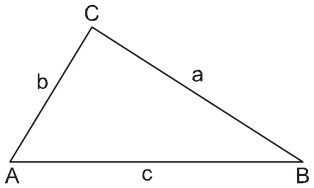
तथा $\frac{9.2}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$ $\Rightarrow$ $b^2 = 4$ .....(iii)

$\therefore$ (i), (ii) & (iii) से

$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $\therefore$ $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

B-15. Given the base of a triangle and the ratio of the tangent of half the base angles. Show that the vertex moves on a hyperbola whose foci are the extremities of the base.
एक त्रिभुज का आधार तथा इसके आधार के अर्ध कोणों की स्पर्शज्याओं का अनुपात दिया गया है। प्रदर्शित कीजिए कि शीर्ष एक अतिपरवलय पर गति करता है जिसकी नाभियाँ आधार के सिरे हैं।

Sol.



Given, $\dfrac{\tan A/2}{\tan B/2}$ = constant (say λ) दिया गया है $\dfrac{\tan A/2}{\tan B/2}$ = अचर (माना λ)

$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{\Delta}{s(s-a)}}{\dfrac{\Delta}{s(s-b)}} = \lambda \quad \Rightarrow \dfrac{a-b+c}{b+c-a} = \lambda \quad \Rightarrow \dfrac{c}{a-b} = \left(\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)$

$\Rightarrow (a-b) = \dfrac{c(\lambda-1)}{(\lambda+1)} \quad \Rightarrow |AC - AB| = k < AB$

$\Rightarrow$ C lies on a hyperbola whose vertices are A,B.
C एक अतिपरवलय पर स्थित है जिसके शीर्ष A, B हैं।

B-16. Prove that the distance of the point $(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ on the ellipse $x^2/6 + y^2/2 = 1$ from the centre of the ellipse is 2, if $\theta = 5\pi/4$
सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $x^2/6 + y^2/2 = 1$ पर स्थित बिन्दु $(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ की उसके केन्द्र से दूरी 2 होगी यदि $\theta = 5\pi/4$

Sol. $6\cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 + 4\cos^2\theta = 4 \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2\theta = 2$

$\cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{4}, n \in I$

So $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ or $\dfrac{7\pi}{4}$

Hindi. $6\cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 + 4\cos^2\theta = 4 \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2\theta = 2$

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{4}; n \in I$

अतः $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ या $\dfrac{7\pi}{4}$

B-17. Find the eccentricity of the ellipse which meets the straight line $2x - 3y = 6$ on the x-axis and the straight line $4x + 5y = 20$ on the y-axis and whose axes lie along the coordinates axes.
यदि कोई दीर्घवृत्त सरल रेखा $2x - 3y = 6$ को x-अक्ष पर तथा रेखा $4x + 5y = 20$ को y-अक्ष पर काटता है और इसकी अक्ष, निर्देशी अक्षों के अनुदिश है तो इस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

Ans. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Sol. The straight line $2x - 3y = 6$ meets the x-axis at $A \equiv (3, 0)$ and the straight line $4x + 5y = 20$ meets the y-axis at $B \equiv (0, 4)$. Thus, for the given ellipse, we have

eccentricity $e = \sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Hindi. सरल रेखा $2x - 3y = 6$, x-अक्ष को बिन्दु $A \equiv (3, 0)$ पर और सरल रेखा $4x + 5y = 20$, y-अक्ष को बिन्दु $B \equiv (0, 4)$ पर मिलती है।

अतः दिये गये दीर्घवृत्त के लिए, $e = \sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

B-18. If the foci of the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$ & the hyperbola $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ coincide then find the value of b^2.

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा अतिपरवलय $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ कीनाभियाँ सम्पाती हैं तो b^2 का मान है –

Ans. 16

Sol. For ellipse $a^2 = 16 \Rightarrow e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{25-b^2}}{5} \Rightarrow$ focii $\equiv (\pm ae, 0) = \left(\pm\sqrt{25-b^2}, 0\right)$

For hyperbola, $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{4} \therefore$ focii $\equiv (\pm ae, 0) = (\pm 3, 0)$

$\therefore \quad = 3 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16$

Hindi. दीर्घवृत्त के लिए $a^2 = 16 \Rightarrow e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{25-b^2}}{5} \Rightarrow$ नाभियाँ $\equiv (\pm ae, 0) = \left(\pm\sqrt{25-b^2}, 0\right)$

अतिपरवलय के लिए $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{4} \quad \therefore$ नाभियाँ $\equiv (\pm ae, 0) = (\pm 3, 0)$

$\therefore \quad \sqrt{25-b^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16$

Section (C) : Position of line, Equation of chord and various forms of tangents of parabola

खण्ड (C) : परवलय के लिए रेखा की स्थिति, जीवा का समीकरण और विभिन्न रूपो में स्पर्श रेखाऐं

C-1. A line $y = x + 5$ intersect the parabola $(y - 3)^2 = 8(x + 2)$ at A & B. Find the length of chord AB.

एक रेखा $y = x + 5$ परवलय $(y - 3)^2 = 8(x + 2)$ को A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है। जीवा AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans. $8\sqrt{2}$

Sol. $y = x + 5 \quad \Rightarrow \quad y - 3 = x + 2$

so $(y - 3)^2 = 8(x + 2) \quad \Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8(x + 2) \quad \Rightarrow \quad x = -2, 6$

so A & B are (–2, 3) & (6, 11)

length of chord $= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$

Hindi. $y = x + 5 \quad \Rightarrow \quad y - 3 = x + 2$

इसलिए $(y - 3)^2 = 8(x + 2) \quad \Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8(x + 2) \quad \Rightarrow \quad x = -2, 6$

इसलिए A तथा B, (–2, 3) & (6, 11) हैं।

जीवा की लम्बाई $= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$

C-2. Chord joining two distinct points $P(\alpha^2, k_1)$ and $Q\left(k_2, -\frac{16}{\alpha}\right)$ on the parabola $y^2 = 16x$ always passes through a fixed point. Find the co-ordinate of fixed point.

परवलय $y^2 = 16x$ पर दो विभिन्न बिन्दुओं $P(\alpha^2, k_1)$ और $Q\left(k_2, -\frac{16}{\alpha}\right)$ को मिलाने वाली जीवा एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है। तब स्थिर बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Ans. (4, 0), (–4, 0)

Sol. $4t_1^2 = \alpha^2$ & $8t_2 = -\frac{16}{\alpha}$

$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{\alpha}{2}$ & $t_2 = -\frac{2}{\alpha}$

as चूंकि $t_1.t_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{\alpha} = -1$

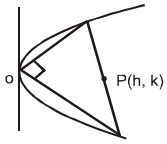
hence always passes through focus. अतः सदैव नाभि से गुजरती है।

C-3. Find the locus of the mid-points of the chords of the parabola $y^2 = 4ax$ which subtend a right angle at the vertex of the parabola.

परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष पर समकोण अन्तरित करने वाली जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $y^2 - 2ax + 8a^2 = 0$

Sol.



$$\frac{2at_1}{at_1} = \frac{2}{t_1}$$

$m_1m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad t_1t_2 = -4$

$2h = a(t_1^2 + t_2^2)$

$k = a(t_1 + t_2)$

eliminating t_1 & t_2 $\quad$ t_1 और t_2 से

we get $y^2 - 2ax + 8a^2 = 0$

Alternative :

Equation of chord is $T = S_1$ $\quad$ जीवा का समीकरण $T = S_1$

$ky - 2a(x + h) = k^2 - 4ah$

$ky - 2ax + 2ah - k^2 = 0$

$$\frac{ky - 2ax}{k^2 - 2ah} = 1$$

$y^2 = 4ax \quad (1)$

$$y^2 = 4ax\left(\frac{ky - 2ax}{k^2 - 2ah}\right)$$

coeff. of x^2 + coeff of $y^2 = 0$ $\quad$ x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0

$$1 + \frac{8a^2}{k^2 - 2ah} = 0$$

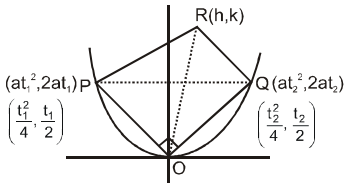
$y^2 - 2ax + 8a^2 = 0$

C-4. Two perpendicular chords are drawn from the origin 'O' to the parabola $y = x^2$, which meet the parabola at P and Q Rectangle POQR is completed. Find the locus of vertex R.

मूल बिन्दु O से परवलय $y = x^2$ पर खींची गई दो लम्बवत् जीवाएँ परवलय को बिन्दु P तथा Q पर मिलती है। एक आयत POQR निर्मित किया जाता है। बिन्दु R का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $y = x^2 + 2$

Sol.

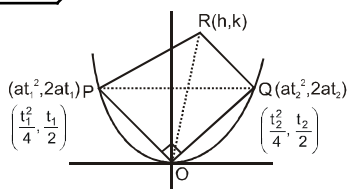


$x^2 = y$

mid point of OR and PQ is same

Now eliminate t find locus.

Hindi.



$x^2 = y$

OR तथा PQ का मध्य बिन्दु समान है।

अतः t को हटाने पर बिन्दुपथ है।

C-5. Prove that the straight line $\ell x + my + n = 0$ touches the parabola $y^2 = 4ax$ if $\ell n = am^2$.

यदि $\ell n = am^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा $\ell x + my + n = 0$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है।

Sol. Line $y = -\frac{\ell x}{m} - \frac{n}{m}$ touches the parabola

$y^2 = 4ax$ if $c = \frac{a}{m}$

$\frac{-n}{m} = \frac{a.m}{-\ell} \Rightarrow \ell n = am^2$

Hindi. रेखा $y = -\frac{\ell x}{m} - \frac{n}{m}$ परवलय को स्पर्श करती है।

$y^2 = 4ax$ यदि $c = \frac{a}{m}$

$\frac{-n}{m} = \frac{a.m}{-\ell} \Rightarrow \ell n = am^2$

C-6. Find the range of c for which the line $y = mx + c$ touches the parabola $y^2 = 8(x + 2)$.

c का परिसर ज्ञात कीजिए जिसके लिए सरल रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 8(x + 2)$ को स्पर्श करती है।

Ans. $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

Sol. $(mx + c)^2 = 8x + 16$

$m^2x^2 + c^2 + 2mx\,c = 8x + 16$

$m^2x^2 + 2mxc - 8x + c^2 - 16 = 0$

$m^2x^2 + x(2mc - 8) + c^2 - 16 = 0$

$D = 0$

$(2mc - 8)^2 - 4m^2(c^2 - 16) = 0$

$4m^2c^2 + 64 - 32mc - 4m^2c^2 + 64m^2 = 0$

$2m^2 - mc + 2 = 0$

Now for m to be real अब m के वास्तविक होने के लिए

$D \geq 0$

$c^2 - 16 \geq 0$

$c \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

C-7. Find the equation of that tangent to the parabola $y^2 = 7x$ which is parallel to the straight line $4y - x + 3 = 0$. Find also its point of contact.

परवलय $y^2 = 7x$ की उस स्पर्श रेखा जो सरल रेखा $4y - x + 3 = 0$ के समान्तर हो, का समीकरण तथा स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Ans. $x - 4y + 28 = 0$ at (28, 14)

Sol. $y = mx + \frac{a}{m}$

$y = \frac{1}{4}x + \frac{7.4}{4.1}$

$y = \frac{x}{4} + 7 \Rightarrow x - 4y + 28 = 0$

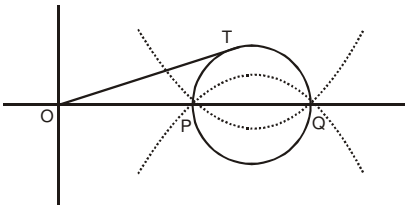
Point of contact is $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

C-8. A parabola $y = ax^2 + bx + c$ crosses the x – axis at $(\alpha, 0)$ $(\beta, 0)$ both to the right of the origin. A circle also passes through these two points. Find the length of a tangent from the origin to the circle.
एक परवलय $y = ax^2 + bx + c$, x – अक्ष को मूल बिन्दु के दांयी ओर $(\alpha, 0)$ एवं $(\beta, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है। एक वृत्त भी इन दोनों बिन्दुओं से गुजरता है। मूल बिन्दु से इस पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई है –

Ans. $\sqrt{\frac{c}{a}}$

Sol. Let $P(\alpha, 0)$ and $Q(\beta, 0)$ also α, β are roots of $ax^2 + bx + c = 0$

so $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ and $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

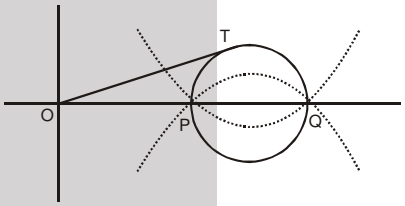


$OT^2 = OP.\ OQ$

$OT = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{c}{a}}$

Hindi. माना $P(\alpha, 0)$ एवं $Q(\beta, 0)$ तथा $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β है।

अतः $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ and $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

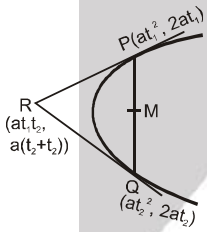


$OT^2 = OP.\ OQ$

$OT = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{c}{a}}$

C-9. If tangent at P and Q to the parabola $y^2 = 4ax$ intersect at R then prove that mid point of R and M lies on the parabola, where M is the mid point of P and Q.
परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करती हो, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं R तथा M का मध्य बिन्दु परवलय पर स्थित होगा, जहाँ M बिन्दु P तथा Q का मध्य बिन्दु है।

Sol.



Now midpoint of R & m satisfies the equation of parabola.
अब R और m का मध्य बिन्दु परवलय की समीकरण को संतुष्ठ करात है।

Section (D) : Position of line, Equation of chord and various forms of tangents of Ellipse & Hyperbola

खण्ड (D) : दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के लिए रेखा की स्थिति, जीवा का समीकरण और विभिन्न रूपो में स्पर्श रेखाऐं

D-1. Find the length of chord $x - 2y - 2 = 0$ of the ellipse $4x^2 + 16y^2 = 64$.
दीर्घवृत्त $4x^2 + 16y^2 = 64$ की जीवा $x - 2y - 2 = 0$ की लम्बाई है–

Ans. $\sqrt{35}$

Sol. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(2y+2)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow (y + 1)^2 + y^2 = 4$

$2y^2 + 2y - 3 = 0$ ...(1)

$\frac{1}{2}.(x - 2)^2 + x - 2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + 2x - 10 = 0$

$x^2 - 2x - 6 = 0$ ...(2)

length of chord जीवा की लम्बाई $= \sqrt{\left\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right\}+\left\{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right\}}$

$$= \sqrt{4+4\times 6+1+4.\frac{3}{2}} = \sqrt{4+24+1+6} = \sqrt{35}$$

D-2. Find the locus of the middle points of chords of an ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ which are drawn through the positive end of the minor axis.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो लघुअक्ष के धनात्मक सिरे से गुजरती हुई खींची जाती है।

Ans. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{y}{b}$

Sol. Let P(0, b) and Q (acosθ, bsinθ)

2h = acosθ & 2k = b + bsinθ

eliminating θ we get $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{y}{b}$

Alternative :

Let the middle point of chord is (h,k)

using $T = S_1$

$$\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}$$

$\because$ It passes through (0, b)

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=0+\frac{k}{b}$$

Hindi. माना जीवा का मध्य बिन्दु (h,k) है।

तो उस जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु दिया है, $T = S_1$ से–

$$\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}$$

$\because$ यह जीवा बिन्दु लघुअक्ष के धनात्मक सिरे (0, b) से गुजरती है,

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=0+\frac{k}{b}$$

D-3. Check whether the line 4x + 5y = 40 touches the ellipse $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ or not. If yes, then also find its point of contact.

Ans. (yes, (5, 4))

जाँच कीजिए कि, रेखा 4x + 5y = 40, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ को स्पर्श करती हैं या नहीं। यदि हाँ, तो इसका स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Ans. (हाँ, (5, 4))

Sol. For line $y=-\frac{4}{5}x+8$ to be tangent of $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$, $c^2 = a^2m^2 + b^2$ is must

Here $c^2 = 64$, $a^2m^2 + b^2 = 50 \times \frac{16}{25} + 32 = 64 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2m^2 + b^2$

$\therefore$ given line is tangent to the given ellipse

Let (h, k) is point of contact then equation of tangent is

$$\frac{hx}{50}+\frac{ky}{32}-1=0 \qquad \text{..... (i)}$$

$4x + 5y - 40 = 0$ ..... (ii)

(i) and (ii) both represents same straight line, hence comparing

$\frac{\frac{h}{50}}{4} = \frac{\frac{k}{32}}{5} = \frac{1}{40}$ $\Rightarrow \frac{h}{200} = \frac{k}{32\times 5} = \frac{1}{40}$ $\therefore$ $h = 5$, $k = 4$

Hindi. रेखा $y = -\frac{4}{5}x + 8$, वक्र $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$, की स्पर्श रेखा होगी यदि $c^2 = a^2m^2 + b^2$

यहाँ $c^2 = 64$, $a^2m^2 + b^2 = 50 \times \frac{16}{25} + 32 = 64$ $\Rightarrow$ $c^2 = a^2m^2 + b^2$

$\therefore$ दी गई रेखा, दिए गए दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा है

माना (h, k) स्पर्श बिन्दु है तब स्पर्श रेखा का समीकरण है

$\frac{hx}{50} + \frac{ky}{32} - 1 = 0$ ..... (i)

$4x + 5y - 40 = 0$ ..... (ii)

चूँकि समीकरण (i) एवं (ii) दोनों एक ही रेखा को प्रदर्शित करते है अतः तुलना करने पर

$\frac{\frac{h}{50}}{4} = \frac{\frac{k}{32}}{5} = \frac{1}{40}$ $\Rightarrow$ $\frac{h}{200} = \frac{k}{32\times 5} = \frac{1}{40}$ \ $h = 5$, $k = 4$

D-4. An ellipse passes through the point (4, – 1) and touches the line $x + 4y - 10 = 0$. Find its equation if its axes coincide with co–ordinate axes.

एक दीर्घवृत्त बिन्दु (4, – 1) से गुजरता है तथा रेखा $x + 4y - 10 = 0$ को स्पर्श करता है। यदि इसके अक्ष, निर्देशांक अक्षों के साथ संपाती हो, तो इसका समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 + 64y^2 = 80$ & और $x^2 + 4y^2 = 20$

Sol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

$4y = -x + 10$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

$C^2 = a^2m^2 + b^2$

$\frac{25}{4} = a^2 \times \frac{1}{16} + b^2$

$b^2 = \frac{25}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{100 - a^2}{16}$

$\frac{16}{a^2} + \frac{16}{100 - a^2} = 1$

$(a^2 - 80)(a^2 - 20) = 0$

$a^2 = 20, a^2 = 80$

If $a^2 = 20$

$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

$5x^2 + 20y^2 = 100$

$x^2 + 4y^2 = 20$

If $a^2 = 80$

$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{20} \times 16 = 80$

$x^2 + 64y^2 = 80$

Hindi दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, बिन्दु (4, –1) से गुजरता है

अतः $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

पुनः दीर्घवृत्त, $4y = -x + 10$ को स्पर्श करता है $\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ को स्पर्श करता है

अतः स्पर्श का प्रतिबन्ध $C^2 = a^2m^2 + b^2$ लगाने पर $\Rightarrow$ $= \frac{25}{4} = a^2 \times \frac{1}{16} + b^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{25}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{100 - a^2}{16}$ $\qquad \Rightarrow \quad \frac{16}{a^2} + \frac{16}{100 - a^2} = 1$

$\Rightarrow \quad (a^2 - 80)(a^2 - 20) = 0$ $\qquad \Rightarrow \quad a^2 = 20, a^2 = 80$

यदि $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ $\qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{20} \times 16 = 80$

$= 80$

$\Rightarrow \quad 5x^2 + 20y^2 = 100$ $\qquad \Rightarrow \quad x^2 + 64y^2 = 80$ $\qquad \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = 20$

D-5. Find the equation of the tangents at the ends of the latus rectum of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and also show that they pass through the points of intersection of the major axis and directrices.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्बों के सिरों पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि वे दीर्घअक्ष एवं संगत नियताओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरती है।

Ans. $ex \pm y = a, -ex \pm y = a$

Sol. End points of latusrectum $\left(\pm ae, \frac{\pm b^2}{a}\right)$

Equation of tangents at these points

$$\frac{\pm x \times ae}{a^2} \pm \frac{y \times b^2}{a \times b^2} = 1$$

$$\pm \frac{ex}{a} \pm \frac{y}{a} = 1$$

$\Rightarrow \pm ex \pm y = a$

Clearly these lines pass through $\left(\pm \frac{a}{e}, 0\right)$

Hindi. नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक :

इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं की समीकरणें होंगी –

$$\frac{\pm x \times ae}{a^2} \pm \frac{y \times b^2}{a \times b^2} = 1$$

$\Rightarrow \pm \frac{ex}{a} \pm \frac{y}{a} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pm ex \pm y = a$

स्पष्टतः उपरोक्त रेखाएँ $\left(\pm \frac{a}{e}, 0\right)$ से गुजरती है।

D-6. Any tangent to an ellipse is cut by the tangents at the ends of major axis in the points T and T′. Prove that the circle, whose diameter is T T′ will pass through the focii of the ellipse.

किसी दीर्घवृत्त के दीर्घअक्ष के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं, दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा को बिन्दुओं T तथा T′ पर प्रतिच्छेद करती है, तो सिद्ध कीजिए कि वृत्त जिसका व्यास TT′ है, दीर्घवृत्त की नाभि से गुजरेगा।

Sol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...(1)

tangent at P(a cos θ, b sin θ) is

$\frac{x}{a} \cos\theta + \frac{y}{b} \sin\theta = 1$ ...(2)

tangent at A(a, 0) is x = a ...(3)

tangent at A′(–a, 0) is x = –a ...(4)

solving (2) & (3), $t \equiv \left(a, \frac{b(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

solving (2) & (4) $T' \equiv \left(a, \frac{b(1 + \cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

$\therefore$ equation of circle taking TT′ as diameter is

$$(x-a)(x+a)+\left(y-\frac{b(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\left(y-\frac{b(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)=0$$

clearly both the focus (ae, 0) & (–ae, 0) satisfies this equaiton
Hence we can say that this circle will pass through both the focii of ellipse

Hindi. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ...(1)

P(a cos θ, b sin θ) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ ...(2)

शीर्ष A(a, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण x = a ...(3)

शीर्ष A′(–a, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण x = –a ...(4)

(2) व (3) को हल करने पर $t\equiv\left(a,\frac{b(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

(2) व (4) को हल करने पर $T'\equiv\left(a,\frac{b(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

$\therefore$ TT′ को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण

$$(x-a)(x+a)+\left(y-\frac{b(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\left(y-\frac{b(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)=0$$

स्पष्टतः दीर्घवृत्त की दोनों नाभियाँ (ae, 0) व (–ae, 0) वृत्त की इस समीकरण को संतुष्ट करती है अतः यह कहा जा सकता है कि प्राप्त वृत्त दीर्घवृत्त की नाभियों से गुजरता है।

D-7. If 'P' be a moving point on the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ in such a way that tangent at 'P' intersect $x=\frac{25}{3}$ at Q then circle on PQ as diameter passes through a fixed point. Find that fixed point.

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ पर एक चर बिन्दु 'P' इस प्रकार गमन करता है कि 'P' पर स्पर्श रेखा, सरल रेखा $x=\frac{25}{3}$ को Q पर प्रतिच्छेद करती है, तो PQ को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त एक स्थिर बिन्दु से गुजरता है। इस स्थिर बिन्दु को ज्ञात कीजिए।

Ans. (3, 0)

Sol. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ...(1)

$\therefore\ e=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

Equation of directrix : $x=\frac{a}{c}=\frac{5}{3}\times5=\frac{25}{3}$ ...(2)

Let a point P(5 cos θ, 4 sin θ) on (1)

tangent at 'P' : $\frac{x}{5}\cos\theta+\frac{y}{4}\sin\theta=1$ ...(3)

given that (3) cuts (2) (directrix) at Q
$\therefore$ By property we know that circle taking PQ as diameter, always passes through corresponding focus

$(ae, 0)\equiv\left(5\times\frac{3}{5},0\right)\equiv(3, 0)$

Hindi. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ...(1)

$\therefore\ e=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

नियता का समीकरण $x = \frac{a}{c} = \frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}$ ...(2)

माना कोई बिन्दु P(5 cos θ, 4 sin θ) दीर्घवृत्त (1) पर स्थित है।

बिन्दु 'P' पर स्पर्श रेखा का समीकरण : $\frac{x}{5}\cos\theta + \frac{y}{4}\sin\theta = 1$ ...(3)

दिया गया है कि स्पर्श रेखा (3), रेखा (नियता) (2) को बिन्दु Q पर काटती है जबकि रेखा (2) नियता है।
अतः गुणधर्म से PQ को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त दिये गये दीर्घवृत्त की नियता के संगत नाभि

$(ae, 0) \equiv \left(5 \times \frac{3}{5}, 0\right) \equiv (3, 0)$ से गुजरता है।

D-8. AB is a chord to the curve $S \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ with A (3, 0) and C is a point on line AB such that AC : AB = 2 : 1 then find the locus of C.

वक्र $S \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ की AB एक जीवा है जहाँ A (3, 0) और रेखाखण्ड AB पर एक बिन्दु C इस प्रकार है कि AC : AB = 2 : 1 तब C का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

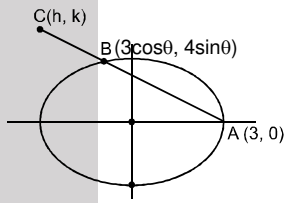
Ans. $16x^2 + 9y^2 + 96x = 432$ or $16x^2 + 9y^2 - 288x + 720 = 0$

Sol. $3 = 6\cos\theta - h$ $\qquad$ $0 = 8\sin\theta - k$

$$\left(\frac{h+3}{6}\right)^2 + \left(\frac{k}{8}\right)^2 = 1$$

$$4 = \left\{\frac{16(x^2+9+6x)+9y^2}{9\times 16}\right\}$$

$16x^2 + 9y^2 + 96x = 432$



case-II

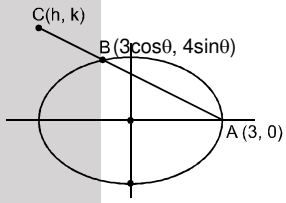
$h + 6\cos\theta = 9$

$k + 8\sin\theta = 0$

$$\left(\frac{h-9}{6}\right)^2 + \left(\frac{k}{8}\right)^2 = 1$$

$576 = 16(x^2 + 81 - 18x) + 9y^2$

$16x^2 + 9y^2 - 288x + 720 = 0$



D-9. Find the length of chord $x - 3y - 3 = 0$ of hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ की जीवा $x - 3y - 3 = 0$ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{8}{3}\sqrt{10}$

Sol. $\frac{(3y+3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

$y^2 + 1 + 2y - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3y^2}{4} + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y\left(\frac{3}{4}y + 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, -\frac{8}{3}$

$(3, 0)$ & $\left(-5, \frac{8}{3}\right)$

$\ell = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{10}$

D-10. For what value of λ, does the line $y = 3x + \lambda$ touch the hyperbola $9x^2 - 5y^2 = 45$?

λ के किस मान के लिए रेखा $y = 3x + \lambda$ अतिपरवलय $9x^2 - 5y^2 = 45$ को स्पर्श करती हैं ?

Ans. $\lambda = \pm 6$

Sol. Tangent to $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$ is

$y = mx \pm \sqrt{5m^2 - 9}$ comparing it with $y = 3x + \lambda$ we get $\lambda = \pm 6$.

Hindi. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$ पर स्पर्श रेखा है।

$y = mx \pm \sqrt{5m^2 - 9}$ इसे $y = 3x + \lambda$ के साथ तुलना करने पर हमें $\lambda = \pm 6$ प्राप्त होता है।

D-11. If the straight line $2x + \sqrt{2}y + n = 0$ touches the hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, then find the value of n.

यदि सरल रेखा $2x + \sqrt{2}y + n = 0$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ को स्पर्श करती है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $n = \pm 2$

Sol. $\because$ $y = -\sqrt{2}x - \frac{n}{\sqrt{2}}$ touches

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ hence,

$\frac{-n}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{9(-\sqrt{2})^2 - 16}$ $\therefore$ $n = \pm 2$.

Hindi. $\because$ $y = -\sqrt{2}x - \frac{n}{\sqrt{2}}$, को स्पर्श करती है इस प्रकार $\Rightarrow$ दीर्घवृत्त

$\frac{-n}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{9(-\sqrt{2})^2 - 16}$ $\therefore$ $n = \pm 2$

D-12. Find the equation of the tangent to the hyperbola $x^2 - 4y^2 = 36$ which is perpendicular to the line $x - y + 4 = 0$.

अतिपरवलय $x^2 - 4y^2 = 36$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x - y + 4 = 0$ के लम्बवत् है।

Ans. $x + y \pm 3\sqrt{3} = 0$

Sol. Required tangent is

आवश्यक स्पर्श रेखा है

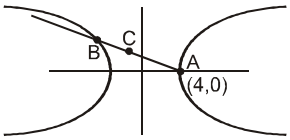
$y = -x \pm \sqrt{36(-1)^2 - 9}$ $\Rightarrow$ $x + y \pm 3\sqrt{3} = 0$

D-13. AB is a chord to the curve $S \equiv x^2 - y^2 - 16 = 0$ with A (4, 0) and C is a point on line segment AB such that AC : AB = 1 : 2 then find the locus of C.

वक्र $S \equiv x^2 - y^2 - 16 = 0$ की AB एक जीवा है जहाँ A (4, 0)और रेखाखण्ड AB पर एक बिन्दु C इस प्रकार है कि AC : AB = 1 : 2 तब C का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 - y^2 - 4x = 0$

Sol.



$x^2 - y^2 = 16$

$(4\sec\theta, 4\tan\theta)$

$2h = 4 + 4\sec\theta$

$2k = 4\tan\theta$

$x = 2 + 2\sec\theta$

$y = 2\tan\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \frac{y^2}{4} = \frac{(x-2)^2}{4}$

$4 + y^2 = (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \quad x^2 - y^2 - 4x = 0$

D-14. If the tangent on the point $(3\sec\phi, 4\tan\phi)$ (which is in first quadrant) of the hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ is perpendicular to $3x + 8y - 12 = 0$, then find the value of ϕ is (in degree).

Ans. 30

यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ के किसी बिन्दु $(3\sec\phi, 4\tan\phi)$ (जो कि प्रथम चतुर्थांश में है) से स्पर्श रेखा खींची जाती है जो कि $3x + 8y - 12 = 0$ पर लम्ब है, तो ϕ का मान है। (डिग्री में)

Sol. Tangent on $(3\sec\phi, 4\tan\phi)$ is

$\frac{\sec\phi}{3}x - \frac{\tan\phi}{4}y = 1$ .....(i)

given that (i) is $\perp$ to $3x + 8y - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\left(\frac{\sec\phi}{\tan\phi}\right)\left(\frac{-3}{8}\right) = -1$

$\Rightarrow \quad \phi = 30^\circ$

Hindi.. बिन्दु $(3\sec\phi, 4\tan\phi)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$\frac{\sec\phi}{3}x - \frac{\tan\phi}{4}y = 1$ .....(i)

दिया हुआ है कि समीकरण (i), $3x + 8y - 12 = 0$ के लम्बवत् है।

$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\left(\frac{\sec\phi}{\tan\phi}\right)\left(\frac{-3}{8}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 30^\circ$

Section (E) : Pair of tangents, Director circle, chord of contact and chord with given middle point of Parabola

खण्ड (E) : परवलय के लिए स्पर्शी युग्म, नियामंक वृत्त, स्पर्श जीवा और जीवा जबकि मध्य बिन्दु दिया गया हो

E-1. Find the equation of tangents to the parabola $y^2 = 9x$, which pass through the point (4, 10).

परवलय $y^2 = 9x$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4, 10) से गुजरती है।

Ans. $4y = 9x + 4$, $4y = x + 36$

Sol. Let the equation of tangent is

$y = mx + \frac{9}{4m}$ ..... (i)

above equation pases through (4, 10)

$10 = 4m + \frac{9}{4m}$

Find the two values of m and put it in the equation(i)

Hindi. माना स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \frac{9}{4m}$ ..... (i)

जो बिन्दु (4, 10) से गुजरती है

$10 = 4m + \frac{9}{4m}$

m के दोनों मान ज्ञात करके समीकरण (i) में रखिए।

E-2. If two tangents to the parabola $y^2 = 4ax$ from a point P make angles θ_1 and θ_2 with the axis of the parabola, then find the locus of P in each of the following cases.

(i) $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ (a constant)

(ii) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \lambda$ (is constant)

बिन्दु P से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परवलय के अक्ष से θ_1 तथा θ_2 कोण अन्तरित करती हो, तो बिन्दु P का बिन्दुपथ निम्न स्थितियों में ज्ञात कीजिए–

(i) $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ (एक अचर)

(ii) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \lambda$ (एक अचर)

Ans. (i) $y = (x - a)\tan\alpha$, (ii) $x = a$, (iii) $y = \lambda x$

Sol. Let the equation of tangent and $p \equiv (h, k)$ माना स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \frac{a}{m}$ तथा बिन्दु $p \equiv (h, k)$

$k = mh + \frac{a}{m}$

$m^2h - mk + a = 0$

$m_1 + m_2 = \frac{k}{h}$ ..... (i)

$m_1 . m_2 = \frac{a}{h}$ ..... (ii)

(i) $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$

$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \tan\alpha$

$\tan\alpha = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2} \Rightarrow \frac{\frac{k}{h}}{1 - \frac{a}{h}} = \tan\alpha$

$\frac{k}{h - a} = \tan\alpha$

$y = (x - a)\tan\alpha$

(ii) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta_1 . \tan\theta_2 = 1$

$\frac{a}{h} = 1$

$x = a$

(iii) $m_1 + m_2 = \lambda \Rightarrow \frac{k}{h} = \lambda$

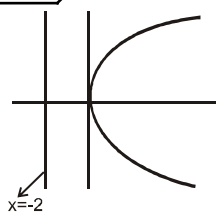
$y = \lambda x$

E-3. The equation of a tangent to the parabola $y^2 = 8x$ is $y = x + 2$. Find the point on this line from which the other tangents to the parabola is perpendicular to the given tangent.

परवलय $y^2 = 8x$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = x + 2$ है। इस रेखा पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिससे परवलय पर खींची गई अन्य स्पर्श रेखाएँ दी गई स्पर्श रेखाओं के लम्बवत् हो।

Ans. (–2, 0)

Sol.



Point of intersection of two ⊥r tangents will lie on the directrix of the parabola point is (–2, 0)
दो लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु (–2, 0) परवलय की नियता पर स्थित है।

E-4. From the point (α, β) two perpendicular tangents are drawn to the parabola $(x - 7)^2 = 8y$. Then find the value of β.
बिन्दु (α, β) से परवलय$(x - 7)^2 = 8y$ दो लम्बवत् स्पर्श रेखाऐं खीची जाती है तब β का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. –2

Sol. (α, β) must lie on the directrix of the parabola which is $y = -2$
therefore $\beta = -2$
(α, β) परवलय की नियता पर स्थित होगा जो $y = -2$ है
इसलिए $\beta = -2$ है

E-5. Find the locus of the middle point of the focal chord of the parabola $y^2 = 4x$.
परवलय $y^2 = 4x$ के नाभिय जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $y^2 = 2x - 2$

Sol. Let (h, k) is middle point
Equation of chord is $T = S_1 \Rightarrow yk - 2(x + h) = k^2 - 4h$
This passes through focus (1, 0) $\Rightarrow -2-2h = k^2 - 4h \Rightarrow y^2 = 2x-2$

Sol. माना (h, k) मध्य बिन्दु है
जीवा का समीकरण $T = S_1 \Rightarrow yk - 2(x + h) = k^2 - 4h$
यह नाभि (1, 0) से गुजरता है $\Rightarrow -2-2h = k^2 - 4h \Rightarrow y^2 = 2x-2$

Section (F): Pair of tangents, Director circle, chord of contact and chord with given middle point of Ellipse & Hyperbola

खण्ड (F) : दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के लिए स्पर्शी युग्म, नियामंक वृत्त, स्पर्श जीवा और जीवा जबकि मध्य बिन्दु दिया गया हो

F-1. Find the equation of tangents to the ellipse $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ which passes through a point (15, – 4).
दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (15, – 4) से गुजरती हो।

Ans. $4x + 5y = 40$, $4x - 35y = 200$.

Sol. $y + 4 = m(x - 15)$
$y = mx - (15m + 4)$ .... (i)
for tangent
$(15m + 4)^2 = 50m^2 + 32$
$175m^2 + 120m - 16 = 0$
$(35m - 4)(5m + 4) = 0$
$m = \frac{4}{35}, \frac{-4}{5}$
putting in (i)
$4x + 5y = 40$
$4x - 35y = 200$

Hindi. $y + 4 = m(x - 15)$
$y = mx - (15m + 4)$ .... (i)
समीकरण (i) द्वारा प्रदर्शित रेखा के स्पर्श रेखा होने के लिए
$(15m + 4)^2 = 50m^2 + 32$

$175m^2 + 120m - 16 = 0$
$(35m - 4)(5m + 4) = 0$
$m = \frac{4}{35}, \frac{-4}{5}$
m के ये मान (i) में रखने पर
$4x + 5y = 40$
$4x - 35y = 200$

F-2. If $3x + 4y = 12$ intersect the ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ at P and Q, then find the point of intersection of tangents at P and Q.

यदि $3x + 4y = 12$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ को P तथा Q पर काटती हो, तो P तथा Q पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Ans. $\left(\frac{25}{4}, \frac{16}{3}\right)$

Sol. Let point of intersection is R(h, k)
PQ is chord of contact

$$\frac{hx}{25} + \frac{ky}{16} = 1 \quad ..... (i)$$

equation $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 ..... (ii)$

Comparing (i) and (ii) $\Rightarrow$ equation, $\frac{h}{25} = \frac{1}{4}$, $k = \frac{16}{3}$

Hindi माना प्रतिच्छेद बिन्दु R(h, k) है–
अतः स्पर्श जीवा PQ का समीकरण

$$\frac{hx}{25} + \frac{ky}{16} = 1 ..... (i)$$

लेकिन स्पर्श जीवा PQ की दी गई समीकरण है $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ ..... (ii)

अतः (i) और (ii) की तुलना करने पर

$\frac{h}{25} = \frac{1}{4}$, $k = \frac{16}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{h}{25} = \frac{1}{4}$, $k = \frac{16}{3}$

F-3. Find the equation of chord of ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ whose mid point is (3, 1).

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ की उस जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका मध्य बिन्दु (3, 1) है।

Ans. $48x + 25y - 169 = 0$

Sol. $T = S_1$

$$\frac{3x}{25} + \frac{y.1}{16} - 1 = \frac{9}{25} + \frac{1}{16} - 1$$

$$\frac{3x}{25} + \frac{y}{16} = \frac{169}{400}$$

$48x + 25y = 169$

F-4. If m_1 & m_2 are the slopes of the tangents to the hyperbola $x^2/25 - y^2/16 = 1$ which passes through the point (4, 2), find the value of (i) $m_1 + m_2$ & (ii) $m_1 m_2$.

यदि m_1 और m_2 अतिपरवलय $x^2/25 - y^2/16 = 1$ की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताऐं हैं जो बिन्दु (4, 2) से गुजरती है तो (i) $m_1 + m_2$ तथा (ii) $m_1 m_2$ का मान ज्ञात करो।

Ans. **(i)** –16/9 **(ii)** –20/9

Sol. Let tangent to $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ is

$y = mx \pm \sqrt{25m^2-16}$ $\because$ it passes through (4,2)

$2 = 4m \pm \sqrt{25m^2-16}$

$\Rightarrow$ $25m^2 - 16 = 4 + 16m^2 - 16m$ $\Rightarrow$ $9m^2 + 16m - 20 = 0$

$m_1 + m_2 = -\frac{16}{9}$, $m_1m_2 = -\frac{20}{9}$

Hindi. माना $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ पर स्पर्श रेखा है

$y = mx \pm \sqrt{25m^2-16}$ $\because$ यह (4, 2) से गुजरती है।

$\therefore$ $2 = 4m \pm \sqrt{25m^2-16}$

$\Rightarrow$ $25m^2 - 16 = 4 + 16m^2 - 16m$ $\Rightarrow$ $9m^2 + 16m - 20 = 0$

$m_1 + m_2 = -\frac{16}{9}$, $m_1m_2 = -\frac{20}{9}$

F-5. Find the equations of the tangents to the hyperbola $x^2 - 9y^2 = 9$ that are drawn from (3, 2) . Find the area of the triangle that these tangents form with their chord of contact.

अतिपरवलय $x^2 - 9y^2 = 9$ पर बिन्दु (3, 2) से खींची गई स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए जो ये स्पर्श रेखाऐं स्पर्श जीवा के साथ बनाती है।

Ans. $y=\frac{5}{12}x+\frac{3}{4}$; $x - 3 = 0$; 8 sq. unit (वर्ग इकाई)

Sol. Let tangent $y = mx + \sqrt{9m^2-1}$

It passes through (3, 2)

$\therefore$ $(2 - 3m)^2 = (9m^2 - 1)$

$\therefore$ m is not defined or $m = \frac{5}{12}$

$\therefore$ tangents are

$x = 3$ ..... (i)

$5x - 12y + 9 = 0$..... (ii)

Chord of contact is $3x - 18y = 9$ ..... (iii)

by (i) & (iii) by (ii) & (iii)

$x = 3, y = 0$ $x = -5, y = -\frac{4}{3}$

$$\text{Area of triangle} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$\frac{1}{2} = \times 2 \times (3 + 5) = 8$ sq. unit.

Hindi माना स्पर्श रेखा $y = mx + \sqrt{9m^2-1}$

यह (3, 2) से गुजरती है

$\therefore$ $(2 - 3m)^2 = (9m^2 - 1)$

$\therefore$ m परिभाषित नहीं है या $m = \frac{5}{12}$

$\therefore$ स्पर्श रेखाऐं है।

$x=3$ ..... (i)

$5x - 12y + 9 = 0$..... (ii)

स्पर्श जीवा $3x - 18y = 9$ ..... (iii)

(i) तथा (iii) से (ii) तथा (iii) से

$x = 3, y = 0$ $\qquad$ $x = -5, y = -\frac{4}{3}$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \times 2 \times (3 + 5) = 8$ वर्ग इकाई

F-6. Find the locus of the mid points of the chords of the circle $x^2 + y^2 = 16$, which are tangent to the hyperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.
वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ की जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ की स्पर्श रेखा है।

Ans. $(x^2 + y^2)^2 = 16x^2 - 9y^2$

Sol. Let (h,k) be the mid pt of the chord of the circle $x^2 + y^2 = 16$

$\therefore$ the equation of the chord will be

$hx + ky = h^2 + k^2$

or $y = \frac{-h}{k}x + \frac{h^2 + k^2}{k}$

i.e. of the form $y = mx + C$.

It will touch the hyperbola if $C^2 = a^2m^2 - b^2$

$\therefore \left(\frac{h^2 + k^2}{k}\right)^2 = 16\left(\frac{-h}{k}\right)^2 - 9$

$\Rightarrow (h^2 + k^2)^2 = 16h^2 - 9k^2$

$\therefore$ required locus is $(x^2 + y^2)^2 = 16x^2 - 9y^2$

Hindi. मानाकि वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ की जीवा का मध्य बिन्दु (h, k) है।

$\therefore$ जीवा का समीकरण $hx + ky = h^2 + k^2$ या $y = \frac{-h}{k}x + \frac{h^2 + k^2}{k}$

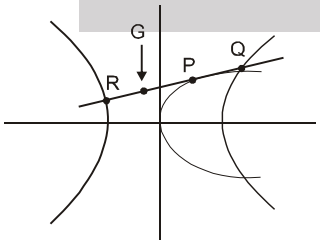
$\Rightarrow$ जो कि $y = mx + C$ के रूप का है।

यह अतिपरवलय को स्पर्श करेगी यदि $C^2 = a^2m^2 - b^2$ $\therefore \left(\frac{h^2 + k^2}{k}\right)^2 = 16\left(\frac{-h}{k}\right)^2 - 9$

$\Rightarrow (h^2 + k^2)^2 = 16h^2 - 9k^2$ $\qquad$ $\therefore$ अभीष्ट बिन्दुपथ $(x^2 + y^2)^2 = 16x^2 - 9y^2$ है।

F-7. Chords of the hyperbola, $x^2 - y^2 = a^2$ touch the parabola, $y^2 = 4ax$. Prove that the locus of their middle points is the curve, $y^2(x - a) = x^3$.
अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ की जीवाएँ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए उनके मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ वक्र $y^2(x - a) = x^3$ है।

Sol.



If G(h,k) is mid–point of chord then chord is

$xh - yk = h^2 - k^2$ .....(i)

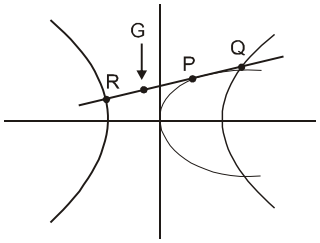
It must be in form of $y = mx + \frac{a}{m}$ .....(ii)

to touch $y^2 = 4ax$

On comparing (i), (ii) and eleminating m we get,

$k^2(h - a) = h^3 \Rightarrow y^2(x - a) = x^3$ H.P.

Hindi.



यदि G(h,k) जीवा का मध्यबिन्दु है, तो जीवा है

$xh - yk = h^2 - k^2$ .....(i)

यह इस रूप में होनी चाहिए $y = mx + \frac{a}{m}$ .....(ii)

$y^2 = 4ax$ को स्पर्श करने के लिए

(i) तथा (ii) की तुलना करके m का विलोप करने पर

$k^2(h - a) = h^3 \Rightarrow y^2 (x - a) = x^3$ इति सिद्धम्

F-8. Find the condition so that the line $px + qy = r$ intersects the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ in points whose eccentric angles differ by $\frac{\pi}{4}$.

सरल रेखा $px + qy = r$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ को जिन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है उनके उत्केन्द्रीय कोणों के मध्य अन्तर $\frac{\pi}{4}$ होने के लिये प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये।

Ans. $a^2p^2 + b^2q^2 = r^2\sec^2 \frac{\pi}{8} = (4 - 2\sqrt{2})\, r^2$

Sol. $px + qy = r$ ..... (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (2)

$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$

$Q\left[a\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right), b\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$

$Q\left[a\left[\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{2}}\right], b\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$ap\cos\theta + qb\sin\theta = r$ .....(3)

and $\frac{pa}{\sqrt{2}}[\cos\theta - \sin\theta] + \frac{qb}{\sqrt{2}}[\sin\theta + \cos\theta] = r$

$pa[\cos\theta - \sin\theta] + qb[\sin\theta + \cos\theta] = r\sqrt{2}$

$pa\cos\theta + qb\sin\theta + qb\cos\theta - pa\sin\theta = r\sqrt{2}$

$qb\cos\theta - pa\sin\theta = r(\sqrt{2} - 1]$ .....(4)

by equation (3) and (4)

$a^2p^2 + q^2b^2 = r^2[1 + (\sqrt{2}-1)^2] = r^2[1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2}] = r^2[4 - 2\sqrt{2}] = r^2\sec^2\frac{\pi}{8}$

Hindi. दी गई सरल रेखा है– $px + qy = r$ ..... (1)

दिया गया दीर्घवृत्त है $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (2)

माना रेखा (1), दीर्घवृत्त (2) को 'P' एवं Q बिन्दुओं पर काटती है।

यदि $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$

तो $Q\left[a\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right), b\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$

$$Q\left[a\left[\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{2}}\right], b\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$\because$ बिन्दु P एवं Q दोनों सरल रेखा पर भी स्थित है,

$\Rightarrow$ $ap\cos\theta + qb\sin\theta = r$ .....(3)

और $\frac{pa}{\sqrt{2}}[\cos\theta - \sin\theta] + \frac{qb}{\sqrt{2}}[\sin\theta + \cos\theta] = r$

$\Rightarrow$ $pa[\cos\theta - \sin\theta] + qb[\sin\theta + \cos\theta] = r\sqrt{2}$

$pa\cos\theta + qb\sin\theta + qb\cos\theta - pa\sin\theta = r\sqrt{2}$

$qb\cos\theta - pa\sin\theta = r(\sqrt{2}-1]$ .....(4) (समीकरण (3) का प्रयोग करने पर)

समीकरण (3) और (4) से –

$$a^2p^2 + q^2b^2 = r^2[1 + (\sqrt{2}-1)^2] = r^2[1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2}] = r^2[4 - 2\sqrt{2}] = r^2\sec^2\frac{\pi}{8}$$

Section (G) : Equation of normal, co-normal points of parabola
खण्ड (G) : परवलय के लिए अभिलम्ब का समीकरण, सहअभिलम्ब बिन्दु

G-1. Find equation of all possible normals to the parabola $x^2 = 4y$ drawn from point (1, 2).
बिन्दु (1, 2) से परवलय $x^2 = 4y$ के सभी संभावित अभिलम्बों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x + y = 3$

Sol. Normal at $(2h, h^2)$ is $y - h^2 = -1/h\,(x - 2h)$
As it pass through (1, 2) $\Rightarrow$ $2 - h^2 = -1/h\,(1 - 2h)$ $\Rightarrow$ $h = 1$

Hindi. $(2h, h^2)$ पर अभिलम्ब $y - h^2 = -1/h\,(x - 2h)$
यह (1, 2) से गुजरता है $2 - h^2 = -1/h\,(1 - 2h)$ $\Rightarrow$ $h = 1$

G-2. If $ax + by = 1$ is a normal to the parabola $y^2 = 4Px$, then prove that $Pa^3 + 2aPb^2 = b^2$.

यदि रेखा $ax + by = 1$ परवलय $y^2 = 4Px$ की अभिलम्ब रेखा है तब सिद्ध कीजिए $Pa^3 + 2aPb^2 = b^2$.

Sol. Equation of normal to $y^2 = 4Px$ at (x_1, y_1) is $y - y_1 = \frac{-y_1}{2p}(x - x_1)$; $y - y_1 = \frac{-y_1}{2p}\left(x - \frac{y_1^2}{4p}\right)$

$\Rightarrow$ $4py_1x + 8p^2y = y_1^3 + 8p^2y_1$

Compair with $ax + by = 1$

$\Rightarrow$ $\frac{4py_1}{a} = \frac{8p^2}{b} = y_1^3 + 8p^2y_1$

$\Rightarrow$ $y_1 = \frac{2ap}{b}$ & $\frac{4p}{a} = y_1^2 + 8p^2$

$\Rightarrow$ $Pa^3 + 2aPb^2 = b^2$.

Hindi. (x_1, y_1) पर $y^2 = 4Px$ के अभिलम्ब का समीकरण $y - y_1 = \frac{-y_1}{2p}(x - x_1)$; $y - y_1 = \frac{-y_1}{2p}\left(x - \frac{y_1^2}{4p}\right)$

$\Rightarrow$ $4py_1x + 8p^2y = y_1^3 + 8p^2y_1$

$ax + by = 1$ के साथ तुलना करने पर

$\Rightarrow$ $\frac{4py_1}{a} = \frac{8p^2}{b} = y_1^3 + 8p^2y_1$

$\Rightarrow$ $y_1 = \frac{2ap}{b}$ & $\frac{4p}{a} = y_1^2 + 8p^2$

$\Rightarrow$ $Pa^3 + 2aPb^2 = b^2$.

G-3. Find the equation of normal to the parabola $x^2 = 4y$ at (6, 9).
बिन्दु (6, 9) पर परवलय $x^2 = 4y$ के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x + 3y = 33$

Sol. $2x = 4.\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \quad \therefore \quad$ Slope of normal is $-\dfrac{1}{3}$

equation of normal is $y - 9 = -\dfrac{1}{3}(x - 6)$

$x + 3y = 33$

Hindi. $2x = 4.\dfrac{dy}{dx}$

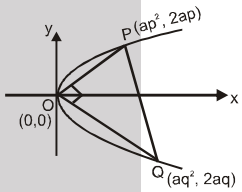
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \quad \therefore \quad$ अभिलम्ब का समीकरण $-\dfrac{1}{3}$

अभिलम्ब का समीकरण $y - 9 = -\dfrac{1}{3}(x - 6)$

$x + 3y = 33$

G-4. The normal at the point $P(ap^2, 2ap)$ meets the parabola $y^2 = 4ax$ again at $Q(aq^2, 2aq)$ such that the lines joining the origin to P and Q are at right angle. Then prove that $p^2 = 2$.
परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $P(ap^2, 2ap)$ पर खींचा गया अभिलम्ब परवलय को पुनः बिन्दु $Q(aq^2, 2aq)$ पर इस प्रकार मिलता है कि बिन्दु P एवं Q को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाएं मूल बिन्दु पर समकोण अन्तरित करती हो, तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 = 2$.

Sol. $q = -p - \dfrac{2}{p}$



$pq = -p^2 - 2$

$p^2 + pq + 2 = 0$ ..... (i)

and also

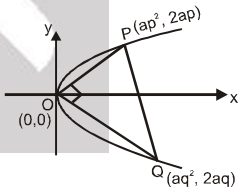
slope of OP × slope of OQ = – 1

$\dfrac{2ap}{ap^2} \times \dfrac{2aq}{aq^2} = -1$

$pq = -4$ ..... (ii)

Using (ii) in (i) $p^2 = 2$

Hindi $q = -p - \dfrac{2}{p}$



$pq = -p^2 - 2$

$p^2 + pq + 2 = 0$ ..... (i)

तथा

OP की प्रवणता × OQ की प्रवणता = – 1

$\dfrac{2ap}{ap^2} \times \dfrac{2aq}{aq^2} = -1$

$pq = -4$ ..... (ii)

(i) एवं (ii) से $p^2 = 2$

G-5. If a line $x + y = 1$ cut the parabola $y^2 = 4ax$ in points A and B and normals drawn at A and B meet at C (C does not lies on parabola). The normal to the parabola from C other, than above two meet the parabola in D, then find D
यदि सरल रेखा $x + y = 1$ परवलय $y^2 = 4ax$ को बिन्दु A एवं B पर मिलती है तथा A एवं B पर खींचे गए अभिलम्ब बिन्दु C पर मिलते है। बिन्दु C (C परवलय पर स्थित नहीं है) से खींचा गया अभिलम्ब उपरोक्त अभिलम्बों के अलावा परवलय को बिन्दु D पर मिलता हो, तो D ज्ञात कीजिए।

Ans. (4a, 4a)

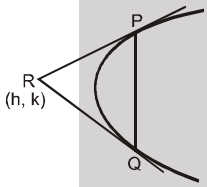
Sol. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

$y_1 + y_2 + y_3 = 0$ ...(1)
$y^2 = 4ax$
$y^2 = 4a(1 - y)$
$y^2 + 4ay - 4a = 0$
$y_1 + y_2 = -4a$ ...(2)
using (2) in (1)
(2) की सहायता से (1) में
$y_3 = 4a$
D(4a, 4a)

G-6. If normal of circle $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ intersect the parabola $y^2 = 4x$ at P and Q then find the locus of point of intersection of tangent's at P and Q.
यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ पर खींचा गया अभिलम्ब परवलय $y^2 = 4x$ को बिन्दु P तथा Q पर प्रतिच्छेद करता हो, तो बिन्दु P तथा Q पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

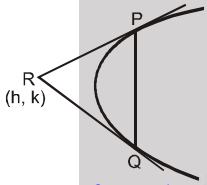
Ans. $x + 2y - 3 = 0$

Sol.



PQ is chord of contact
T = 0
$ky = 2(x + h)$ ...(1)
above line passes through thecentre ofthe circle i.e. (–3, –4)
$-4k = 2(h - 3)$
$2h + 4k - 6 = 0$
$x + 2y - 3 = 0$

Hindi.



PQ, स्पर्शजीवा है।
T = 0
$ky = 2(x + h)$ ...(1)
सदैव, वृत्त के केन्द्र (–3, –4) से गुजरता है।
$-4k = 2(h - 3)$
$2h + 4k - 6 = 0$
$x + 2y - 3 = 0$

Section (H) : Equation of normal, co-normal points of Ellipse & Hyperbola
खण्ड (H) : दीर्घवृत्त अतिपरवलय के लिए अभिलम्ब का समीकरण, सहअभिलम्ब बिन्दु

H-1. If the normal at an end of a latus-rectum of an ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passes through one extremity of the minor axis, show that the eccentricity of the ellipse is given by $e^4 + e^2 - 1 = 0$
दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी नाभिलम्ब के एक सिरे पर खींचा गया अभिलम्ब, लघुअक्ष के एक सिरे से गुजरता हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $e^4 + e^2 - 1 = 0$ द्वारा दी जाती है।

Sol. Equation of normal at $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$

$$\frac{a^2x}{ae} - \frac{b^2y}{b^2} \times a = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{e} - ay = a^2 - b^2 = a^2e^2$$

$x - ey = ae^3$

passes through $(0, -b)$

$+ be = ae^3$

$b = ae^2$

$a^2(1 - e^2) = a^2e^4$

$e^4 + e^2 - 1 = 0$

Hindi. पर अभिलम्ब का समीकरण होगा – $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$

$$\frac{a^2x}{ae} - \frac{b^2y}{b^2} \times a = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{e} - ay = a^2 - b^2 = a^2e^2$$

$\Rightarrow x - ey = ae^3$

$\because$ यह अभिलम्ब बिन्दु $(0, -b)$ से गुजरता है –

$\therefore + be = ae^3$

$\Rightarrow b = ae^2 \quad \Rightarrow \quad a^2(1 - e^2) = a^2e^4 \quad \Rightarrow \quad e^4 + e^2 - 1 = 0$

H-2. A ray emanating from the point $(-4, 0)$ is incident on the ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ at the point P with abscissa 3. Find the equation of the reflected ray after first reflection.

एक किरण बिन्दु $(-4, 0)$ से निकलकर दीर्घवृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ के बिन्दु P जिसका भुज 3 है, पर आपतित होती है, तो प्रथम परावर्तन के बाद परावर्तित किरण का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $12x + 5y = 48$; $12x - 5y = 48$

Sol. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ reflected ray thus will be line joining $\left(3, \frac{12}{5}\right)$ & $(4, 0)$

$$\Rightarrow \quad y - 0 = \frac{-12}{5}(x - 4)$$

$5y = -12x + 48$

or line joining the points $\left(3, \frac{-12}{5}\right)$ & $(4, 0)$

$$y - 0 = \frac{12}{5}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad 12x - 5y - 48 = 0$$

Hindi. दिया गया $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

परावर्त्तित किरण, बिन्दुओं $\left(3, \frac{12}{5}\right)$ तथा $(4, 0)$ को मिलाने वाली रेखा होगी

$$\Rightarrow \quad y - 0 = \frac{-12}{5}(x - 4)$$

$5y = -12x + 48$

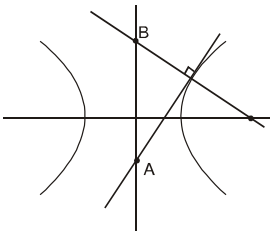
या परावर्त्तित किरण, बिन्दुओं $\left(3, \frac{-12}{5}\right)$ तथा $(4, 0)$ को मिलाने वाली रेखा होगी

$$\Rightarrow \quad y - 0 = \frac{12}{5}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad 12x - 5y - 48 = 0$$

H-3. The tangent & normal at a point on $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ cut the y – axis respectively at A & B. Prove that the circle on AB as diameter passes through the focii of the hyperbola .

अतिपरवलय $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा व अभिलम्ब y-अक्ष को क्रमशः A व B बिन्दु पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त अतिपरवलय की नाभियों से गुजरता है।

Sol. tangent $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$



$\therefore$ $A(0, -b\cot\theta)$

Normal $ax\cos\theta + by\cot\theta = a^2e^2$

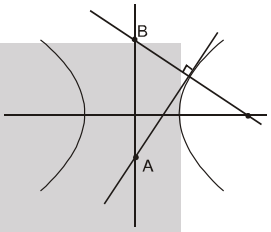
$\therefore$ $B\left(0, \frac{a^2e^2}{b}\tan\theta\right)$

Now, circle with diameter as AB is

$$x^2 + (y + b\cot\theta)\left(y - \frac{a^2e^2}{b}\tan\theta\right) = 0$$

Obviously it passes $(\pm ae, 0)$

Hindi. स्पर्शरेखा $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$



$\therefore$ $A(0, -b\cot\theta)$

अभिलम्ब $ax\cos\theta + by\cot\theta = a^2e^2$

$\therefore$ $B\left(0, \frac{a^2e^2}{b}\tan\theta\right)$

अब AB व्यास वाले वृत्त का समीकरण है $x^2 + (y + b\cot\theta)\left(y - \frac{a^2e^2}{b}\tan\theta\right) = 0$

स्पष्टतया यह $(\pm ae, 0)$ से गुजरता है।

H-4. The normal at P to a hyperbola of eccentricity e, intersects its transverse and conjugate axes at L and M respectively. Show that the locus of the middle point of LM is a hyperbola of eccentricity $\frac{e}{\sqrt{(e^2-1)}}$.

e उत्केन्द्रता वाले एक अतिपरवलय के बिन्दु P पर अभिलम्ब इसकी अनुप्रस्थ व संयुग्मी अक्षों को क्रमशः L तथा M पर काटता है। प्रदर्शित कीजिए कि LM के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $\frac{e}{\sqrt{(e^2-1)}}$ उत्केन्द्रता वाला एक अतिपरवलय है।

Sol. Normal is

$x\,a\cos\theta + by\cot\theta = a^2e^2$

$L(ae^2\sec\theta, 0)$

& $M\left(0, \frac{a^2e^2}{b}\tan\theta\right)$

$\therefore$ Mid–point of L,M

Say $M_1\left(\frac{ae^2}{2}\sec\theta, \frac{a^2e^2}{2b}\tan\theta\right)$

Let $M_1(h,k)$ then

$\sec\theta = \frac{2ah}{a^2e^2}$, $\tan\theta = \frac{2bk}{a^2e^2}$

$\therefore$ eleminating θ we get

$$\frac{4a^2x^2}{(a^2e^2)^2} - \frac{4b^2y^2}{(a^2e^2)^2} = 1$$

Its eccentricity $= \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{e^2-1}} = \frac{e}{\sqrt{e^2-1}}$.

Hindi. अभिलम्ब है

$x\, a\cos\theta + by\cot\theta = a^2e^2$

$L(ae^2\sec\theta, 0)$ तथा $M\left(0, \frac{a^2e^2}{b}\tan\theta\right)$

$\therefore$ L,M का मध्य बिन्दु $M_1\left(\frac{ae^2}{2}\sec\theta, \frac{a^2e^2}{2b}\tan\theta\right)$

माना $M_1(h,k)$ हो, तो

$\sec\theta = \frac{2ah}{a^2e^2}$, $\tan\theta = \frac{2bk}{a^2e^2}$

$\therefore$ θ का विलोप करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{4a^2x^2}{(a^2e^2)^2} - \frac{4b^2y^2}{(a^2e^2)^2} = 1$$

इसकी उत्केन्द्रता $= \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{e^2-1}} = \frac{e}{\sqrt{e^2-1}}$.

Section (I) : Miscelleneous problems
खण्ड (I) : विविध प्रश्न

I-1. Find the equation of a circle touching the parabola $y^2 = 8x$ at (2, 4) and passes through (0, 4).
परवलय $y^2 = 8x$ के बिन्दु (2, 4) पर स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (0, 4) से गुजरती है।

Ans. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + 2(x-y+2) = 0$

Sol. Equation of tangent to the parabola $y^2 = 8x$ at (2, 4) is T = 0 $\Rightarrow$ $y.4 = 4(x+2)$

$\Rightarrow$ $y = (x+2)$

so, equation of circle touching the parabola $y^2 = 8x$ at (2, 4) is $(x-2)^2 + (y-4)^2 + \lambda(x-y+2) = 0$.

it passes through (0, 4)

$\Rightarrow$ $\lambda = 2$

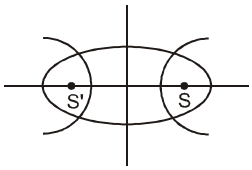
so the reqiured equation is $(x-2)^2 + (y-4)^2 + 2(x-y+2) = 0$

I-2. An ellipse and a hyperbola have the same centre origin, the same foci and the minor-axis of the one is the same as the conjugate axis of the other. If e_1, e_2 be their eccentricities respectively, then find value of $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}$.

एक दीर्घवृत्त और एक अतिपरवलय का केन्द्र मूलबिन्दु है, नाभियाँ समान है और एक का लघु अक्ष दूसरे का संयुग्मी अक्ष है। यदि उनकी उत्केन्द्रताऐं क्रमशः e_1 और e_2 है, तो $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

Ans. 2

Sol.



ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

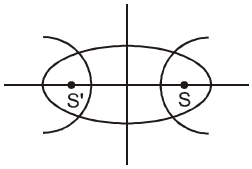
Hyperbola, $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ $\therefore$ $e_1^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, $e_2^2 = 1 + \frac{B^2}{A^2}$ and $2ae_1 = 2Ae_2$

Also, $b = B$

So, $\frac{b}{ae_1} = \frac{B}{Ae_2}$ $\therefore$ $e_1^2 = 1 - \frac{B^2}{A^2}\frac{e_1^2}{e_2^2} = 1 - \frac{(e_2^2-1)e_1^2}{e_2^2}$

$e_1^2\ e_2^2 = e_2^2 - e_1^2\ e_2^2 + e_1^2 \Rightarrow e_1^{-2} + e_2^{-2} = 2$

Hindi.



दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

अतिपरवलय, $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ $\therefore$ $e_1^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, $e_2^2 = 1 + \frac{B^2}{A^2}$ तथा $2ae_1 = 2Ae_2$

Also, $b = B$

इसलिए, $\frac{b}{ae_1} = \frac{B}{Ae_2}$ $\therefore$ $e_1^2 = 1 - \frac{B^2}{A^2}\frac{e_1^2}{e_2^2} = 1 - \frac{(e_2^2-1)e_1^2}{e_2^2}$

$e_1^2\ e_2^2 = e_2^2 - e_1^2\ e_2^2 + e_1^2 \Rightarrow e_1^{-2} + e_2^{-2} = 2$

I-3. $x - 2y + 4 = 0$ is a common tangent to $y^2 = 4x$ & $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Then find the value of 'b' and the other common tangent.

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और $y^2 = 4x$ की उभयनिष्ट स्पर्श रेखा $x - 2y + 4 = 0$ है। तब b का मान ज्ञात कीजिए। तथा अन्य उभयनिष्ट स्पर्श रेखा ज्ञात कीजिए।

Ans. $b = \sqrt{3}$; $x + 2y + 4 = 0$

Sol. $2y = x + 4$

$y = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow M = \frac{1}{2}$

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$2 = \pm\sqrt{4m^2 + b^2} \Rightarrow b^2 = 3 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{m} = \pm\sqrt{4m^2 + 3}$

$\Rightarrow \frac{1}{m^2} = 4m^2 + 3 \Rightarrow 4m^4 + 3m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Hence (अतः) $y = -\frac{1}{2}x - 2$, $2y = -x - 4$

I-4. The line $y = x$ intersects the hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ at the points P and Q. Then find eccentricity of ellipse with PQ as major axis and miror axis of length $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

रेखा $y = x$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ P और Q पर बिन्दुओं पर काटती है तब दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसमें PQ दीर्घअक्ष है और लघुअक्ष की लम्बाई $\frac{5}{\sqrt{2}}$ है।

Ans. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Sol. $\frac{16x^2}{225} = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{15}{4}$

Hence intersection points are P $\left(\frac{15}{4}, \frac{15}{4}\right)$ and

$Q\left(-\frac{15}{4}, -\frac{15}{4}\right)$

$2a = PQ = 2\sqrt{2} \times \frac{15}{4} = \frac{15}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{15}{2\sqrt{2}}$

given $b = \frac{5}{2\sqrt{2}}$

$e = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

I-5. Find the equation of common tangent to circle $x^2 + y^2 = 5$ and ellipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ और $x^2 + 9y^2 = 9$ दीघवृत्त की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –

Ans. $y = x \pm \sqrt{10}$, $y = -x \pm \sqrt{10}$

Sol. $c^2 = a^2m^2 + b^2 = a^2c_1 + m^2$

$\Rightarrow 9m^2 + 1 = 5 + 5m^2$

$\Rightarrow 4m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 1$

$y = x \pm \sqrt{10}$

$y = -x \pm \sqrt{10}$

I-6. If latus rectum of ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ is double ordinate of parabola $y^2 = 4ax$, then find the value of a.

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ का नाभिलम्ब, परवलय $y^2 = 4ax$ की द्विकोटी है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{64}{75}$

Sol. $e = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

End points of latus rectum $\left(3, \frac{16}{5}\right)$

put in $y^2 = 4x \Rightarrow \frac{256}{25} = 4a(3) \quad \Rightarrow a = \frac{64}{75}$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

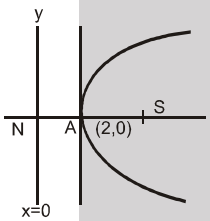
Section (A) : Elementary concepts of Parabola
खण्ड (A) : दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के प्रारम्भिक सिद्धान्त

A-1. The equation of the parabola whose focus is $(-3, 0)$ and the directrix is $x + 5 = 0$ is:
परवलय का समीकरण जिसकी नाभि $(-3, 0)$ तथा नियता $x + 5 = 0$ हो, है–
(A) $y^2 = 4(x-4)$ (B) $y^2 = 2(x+4)$ (C) $y^2 = 4(x-3)$ (D*) $y^2 = 4(x+4)$

Sol. Eq. of the parabola is $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = |x + 5|$
$x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 + 25 + 10x \Rightarrow y^2 = 4(x + 4)$

A-2. If (2, 0) is the vertex & y – axis is the directrix of a parabola, then its focus is:
यदि परवलय का शीर्ष (2, 0) एवं नियता y–अक्ष हो, तो इसकी नाभि है–
(A) (2, 0) (B) (–2, 0) (C*) (4, 0) (D) (–4, 0)

Sol.



A is the mid point of N & S focus is (4, 0)
N और S का मध्य बिन्दु A है तथा नाभि (4, 0) है।

A-3. Length of the latus rectum of the parabola $25[(x-2)^2 + (y-3)^2] = (3x - 4y + 7)^2$ is:
परवलय $25[(x-2)^2 + (y-3)^2] = (3x - 4y + 7)^2$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है–
(A) 4 (B) 2 (C) 1/5 (D*) 2/5

Sol. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left|\frac{3x - 4y + 7}{5}\right|^2$

$\therefore$ focus is (2, 3) & directrix is $3x - 4y + 7 = 0$

latus rectum $= 2 \times \perp_r$ distance from focus to directrix $= 2 \times \frac{1}{5} = 2/5$

Hindi $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left|\frac{3x - 4y + 7}{5}\right|^2$

$\therefore$ नाभि (2, 3) एवं नियता $3x - 4y + 7 = 0$ है।

नाभिलम्ब $= 2 \times$ नाभि से नियता की लम्बवत् दूरी है। $= 2 \times \frac{1}{5} = 2/5$

A-4. A parabola is drawn with its focus at (3, 4) and vertex at the focus of the parabola $y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$. The equation of the parabola is:
एक परवलय जिसकी नाभि (3, 4) तथा शीर्ष, परवलय $y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$ की नाभि पर स्थित हो, तो उस परवलय का समीकरण है–
(A*) $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ (B) $y^2 - 8x - 6y + 25 = 0$
(C) $x^2 - 6x + 8y - 25 = 0$ (D) $x^2 + 6x - 8y - 25 = 0$

Sol. $y^2 = 12x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 12x - 4$

$(y-2)^2 = 12x \Rightarrow \quad Y^2 = 12X$

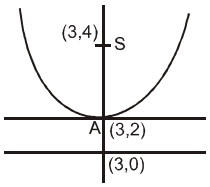
focus नाभि : X = A, Y = 0

x = 3, y = 2

equ. of directrix in नियता का समीकरण y = 0, PS = PM

$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = |y|$

squaring, we will get the required result. वर्ग करके जोड़ने पर अभीष्ट परिणाम।



A-5. Which one of the following equations parametrically represents equation to a parabolic profile?

निम्नलिखित प्राचलिक समीकरणों में से कौनसा एक परवलय को प्रदर्शित करता है–

(A) $x = 3\cos t;\ y = 4\sin t$ (B*) $x^2 - 2 = -2\cos t;\ y = 4\cos^2\frac{t}{2}$

(C) $\sqrt{x} = \tan t;\ \sqrt{y} = \sec t$ (D) $x = \sqrt{1-\sin t}\ ;\ y = \sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}$

Sol. $x^2 - 2 = -2\cos t$, $\quad y = 4\cos^2\frac{t}{2}$

$\cos t = \frac{x^2-2}{-2}$, $\quad y = 4\cos^2\frac{t}{2} \Rightarrow y = 2\left(2\cos^2\frac{t}{2}\right) \Rightarrow y = 2(1+\cos t)$

$y = 2\left(1+\frac{x^2-2}{-2}\right) \Rightarrow y = 2 + 2 - x^2 \Rightarrow y = 4 - x^2$

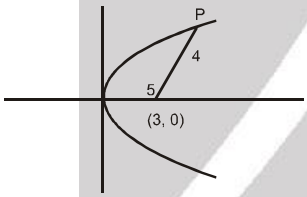
A-6. The points on the parabola $y^2 = 12x$ whose focal distance is 4, are

(A) $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})$ (B*) $(1, 2\sqrt{3}), (1, -2\sqrt{3})$ (C) (1, 2), (2, 1) (D) $(2, 2\sqrt{3}), (3, -2\sqrt{3})$

परवलय $y^2 = 12x$ पर स्थित बिन्दुओं जिसकी नाभीय दूरी 4 हो, है –

(A) $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})$ (B*) $(1, 2\sqrt{3}), (1, -2\sqrt{3})$ (C) (1, 2), (2, 1) (D) $(2, 2\sqrt{3}), (3, -2\sqrt{3})$

Sol.

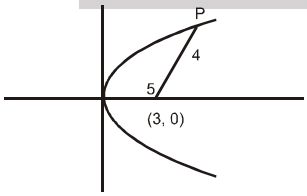


Let the point P is $(3t^2, 6t)$ and $PS = 3 + 3t^2 = 4$

$t^2 = 1/3 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ Points are $(1, 2\sqrt{3})$ & $(1, -2\sqrt{3})$

Hindi.



माना बिन्दु P के निर्देशांक $(3t^2, 6t)$ है तथा $PS = 3 + 3t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = 1/3 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ बिन्दु $(1, 2\sqrt{3})$ एवं $(1, -2\sqrt{3})$

A-7. Find the all possible values of α such that point $P(\alpha, \alpha)$ is outside the parabola $y = x^2 + x + 1$ and inside the circle $x^2 + y^2 = 50$.

α के सभी संभावित मान ज्ञात कीजिए जबकि $P(\alpha, \alpha)$ परवलय $y = x^2 + x + 1$ के बाहर तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 50$ के अन्दर स्थित है

(A) $(-5, \infty)$ (B) $(-\infty, \infty)$ (C) $(-1, 5)$ (D*) $(-5, 5)$

Sol. $y = x^2 + x + 1$

Point is outside parabola

$\therefore$ $P(\alpha, -\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha > 0 \Rightarrow (\alpha + 1)^2 > 0 \Rightarrow \alpha \in R$

and $\alpha^2 + \alpha^2 < 50 \Rightarrow \alpha \in (-5, 5)$

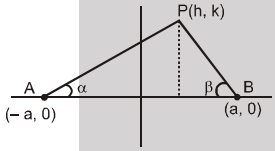
A-8. If on a given base, a triangle be described such that the sum of the tangents of the base angles is a constant, then the locus of the vertex is :

(A) a circle (B*) a parabola (C) an ellipse (D) a hyperbola

यदि दिए गए आधार पर एक त्रिभुज इस प्रकार परिभाषित है कि उनके आधार कोणों के स्पर्शी का योग एक स्थिरांक हो, तो शीर्ष का बिन्दुपथ होगा –

(A) एक वृत्त (B*) एक परवलय (C) एक दीर्घवृत्त (D) एक अतिपरवलय

Sol.



$\tan\alpha + \tan\beta = \lambda$(constant अचर) $\Rightarrow \dfrac{k}{h+a} + \dfrac{k}{a-h} = \lambda \Rightarrow \dfrac{1}{a+h} + \dfrac{1}{a-h} = \dfrac{\lambda}{k}$

$\dfrac{a-h+a+h}{a^2-h^2} = \dfrac{\lambda}{k} \Rightarrow 2ak = (a^2 - h^2)\lambda \Rightarrow \dfrac{2ay}{\lambda} = (a^2 - x^2)$

A-9. **Statement-1 :** For triangle whose two vertices are ends of a double ordinate for a parabola and third vertex lies on axis of same parabola incentre, circumcentre, centroid are collinear.

Statement-2 : In isosceles triangle incentre, circumcentre; orthocentre, centroid all lie on same line.

(A*) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1

(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1

(C) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false

(D) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true

(E) Both STATEMENTS are false

कथन-1 : त्रिभुज के लिए दो शीर्ष परवलय की द्विकोटि के सिरे है तथा तीसरा शीर्ष इसी परवलय की अक्ष पर स्थित है। अंतकेन्द्र,परिकेन्द्र, केन्द्रक सरेखीय है।

कथन-2 : समद्विबाहु त्रिभुज में अन्तकेन्द्र, परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र सभी एक सरल रेखा पर स्थित होते है।

(A*) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।

(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है। (E) दोनों कथन असत्य है।

Sol. Every triangle as deseribed in statement 1 is isosceles.

कथन–1 में बनाया गया प्रत्येक त्रिभुज समद्विबाहु है।

A-10. The length of the latus rectum of the parabola whose focus is $\left(\dfrac{u^2}{2g}\sin 2\alpha, -\dfrac{u^2}{2g}\cos 2\alpha\right)$ and directrix is $y = \dfrac{u^2}{2g}$, is

परवलय के नाभिलम्ब की लम्बाई होगी जिसकी नाभि $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\alpha, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\alpha\right)$ और नियता $y = \frac{u^2}{2g}$ है–

(A) $\frac{u^2}{g}\cos^2\alpha$ (B) $\frac{u^2}{g}\cos 2\alpha$ (C) $\frac{2u^2}{g}\cos 2\alpha$ (D*) $\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha$

Sol. Since, focus is $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\alpha, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\alpha\right)$ and directrix is $y = \frac{u^2}{2g}$, therefore, equation of the parabola is

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{u^2\cos^2\alpha}\left[x^2 - \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}x\right] \qquad \Rightarrow \left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha\left(y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

$\therefore$ Length of the latus rectum is $\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha$.

Hindi: चूंकि नाभि $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\alpha, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\alpha\right)$ और नियता $y = \frac{u^2}{2g}$ इसलिए परवलय का समीकरण

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{g}{u^2\cos^2\alpha}\left[x^2 - \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}x\right]$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha\left(y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right) \quad \therefore \quad \text{नाभिलम्ब की लम्बाई } \frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha.$$

A-11. The distance between the focus and directrix of the conic $\left(\sqrt{3}x - y\right)^2 = 48\left(x + \sqrt{3}y\right)$ is :

शांकव $\left(\sqrt{3}x - y\right)^2 = 48\left(x + \sqrt{3}y\right)$ की नाभि और नियता के मध्य दुरी है–

(A) 24 (B) 48 (C) 6 (D*) 12

Sol. $\left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2}\right)^2 = 24\left(\frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right) \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow 2a = 12$

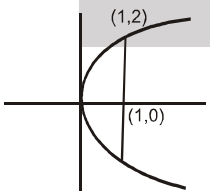
A-12. If one end of a focal chord of the parabola $y^2 = 4x$ is (1, 2), the other end doesn't lie on

यदि परवलय $y^2 = 4x$ की नाभिय जीवा के एक सिरे के निर्देशांक (1, 2) हो, तो दूसरे सिरे के निर्देशांक निम्न पर स्थित नहीं है–

(A) $x^2 y + 2 = 0$ (B) $xy + 2 = 0$

(C*) $xy - 2 = 0$ (D) $x^2 + xy - y - 1 = 0$

Sol.



$y^2 = 4x$, the other end of focal chord will be (1, –2) and this satisfy options (A) (B) & (D)

परवलय $y^2 = 4x$ नाभीय जीवा का दुसरा सिरा (1, –2) होगा तथा यह (A) (B) (D) को संतुष्ठ करता है।

A-13. The angle made by a double ordinate of length 8a at the vertex of the parabola $y^2 = 4ax$ is :

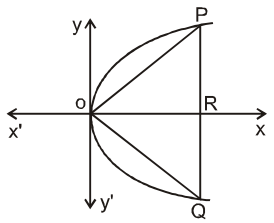
परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष पर 8a लम्बाई की द्विकोटि से बनाया गया कोण है–

(A) $\pi/3$ (B*) $\pi/2$ (C) $\pi/4$ (D) $\pi/6$

Sol. Let PQ be a double ordinate of length 8a. Then PR = RQ = 4a. Coordinates of P and Q are (OR, 4a) and

(OR, – 4a) respectively. Since, P lies on the parabola $y^2 = 4ax$, therefore,

$(4a)^2 = 4a(OR) \Rightarrow OR = 4a$



Thus, the ordinates of P and Q are (4a, 4a) and (4a, –4a) respectively.

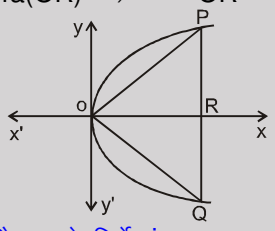
Now, m_1 = slope of OP = $\frac{4a-0}{4a-0} = 1$ and m_2 = slope of OQ = $-\frac{4a-0}{4a-0} = -1$

Clearly, $m_1m_2 = -1$

Thus, PQ makes a right angle at the vertex of the parabola.

Hindi: माना PQ, 8a लम्बाई की द्विकोटि है। तब PR = RQ = 4a P और Q के निर्देशांक क्रमशः (OR, 4a) और (OR, – 4a) चूंकि P परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है। इसलिए

$(4a)^2 = 4a(OR) \Rightarrow$ OR = 4a



अतः P और Q के निर्देशांक क्रमशः (4a, 4a) और (4a, –4a) है।

अब m_1 = OP की प्रवणता = $\frac{4a-0}{4a-0} = 1$ और m_2 = OQ की प्रवणता = $-\frac{4a-0}{4a-0} = -1$

स्पष्टतया $m_1m_2 = -1$

अतः PQ परवलय के शीर्ष पर समकोण बनाती है।

Section (B) : Elementary concepts of Ellipse & Hyperbola

खण्ड (B) : परवलय के प्रारम्भिक सिद्धान्त

B-1. The equation of the ellipse whose focus is (1, –1), directrix is the line x – y – 3 = 0 and the eccentricity is $\frac{1}{2}$, is

(A*) $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$ (B) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 7 = 0$

(C) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y - 7 = 0$ (D) $7x^2 + 4xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$

दीर्घवृत्त जिसकी नाभि (1, –1), नियता x – y – 3 = 0 तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ हो, का समीकरण होगा –

(A) $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$ (B) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 7 = 0$

(C) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y - 7 = 0$ (D) $7x^2 + 4xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$

Sol. $$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{x-y-3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$$

Squaring, we have $7x^2 + 7y^2 + 7 - 10x + 10y + 2xy = 0$

Hindi. नाभि (1, –1) एवं नियता x – y – 3 = 0 वाले दीर्घवृत्त का समीकरण होगा–

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{x-y-3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$$

दोनों ओर वर्ग करने पर $7x^2 + 7y^2 + 7 - 10x + 10y + 2xy = 0$

B-2. The eccentricity of the ellipse $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$ is

दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$ की उत्केन्द्रता है –

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D*) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Sol. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0 \Rightarrow 4(x^2 + 2x + 1) + 9[y^2 + 4y + 4] = 36$

$\Rightarrow 4(x+1)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \quad \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

B-3. The equation $\frac{x^2}{2-r} + \frac{y^2}{r-5} + 1 = 0$ represents an ellipse, if

समीकरण $\frac{x^2}{2-r} + \frac{y^2}{r-5} + 1 = 0$ एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करती है, यदि

(A) $r > 2$ (B) $2 < r < 5$ (C) $r > 5$ (D*) $r \in (2, 5) - \{3.5\}$

Sol. $\frac{x^2}{r-2} + \frac{y^2}{5-r} = 1$ For ellipse $2 < r < 5$

Hindi. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{r-2} + \frac{y^2}{5-r} = 1$ के लिए $2 < r < 5$

B-4. The length of the latus rectum of the ellipse $9x^2 + 4y^2 = 1$, is

दीर्घवृत्त $9x^2 + 4y^2 = 1$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है –

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C*) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{8}{9}$

Sol. $9x^2 + 4y^2 = 1$ Þ $\frac{x}{1/9} + \frac{y^2}{1/4} = 1 \quad \Rightarrow$ Length of latusrectun $= \frac{2a^2}{b} = \frac{4}{9}$

Sol. $9x^2 + 4y^2 = 1$ Þ $\frac{x}{1/9} + \frac{y^2}{1/4} = 1 \quad \Rightarrow$ नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2a^2}{b} = \frac{4}{9}$

B-5. The equation of the ellipse with its centre at (1, 2), focus at (6, 2) and passing through the point (4, 6) is

दीर्घवृत्त जिसका केन्द्र (1, 2), नाभि (6, 2) हो तथा जो बिन्दु (4, 6) से गुजरता हो, का समीकरण है –

(A*) $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$ (B) $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$

(C) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ (D) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

Sol. $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$

It passes through (4, 6)

$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$ and $ae = 5$

$\Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2) \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2 \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - 25$

$\Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2 - 25} = 1 \quad \Rightarrow (a^2 - 5)(a^2 - 45) = 0 \quad \Rightarrow$ either $a^2 = 5$ or $a^2 = 45$

but $a^2 \neq 5 \quad \therefore a^2 = 45 \quad \Rightarrow b^2 = 20$

Hindi. केन्द्र (1, 2) वाले दीर्घवृत्त का समीकरण है

$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$

यह दीर्घवृत्त बिन्दु (4, 6) से गुजरता है,

अतः $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

पुनः $ae = 5 \quad (\because X = ae \Rightarrow x - 1 = ae \Rightarrow 6 - 1 = ae \Rightarrow ae = 5)$

$\Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2) \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2 \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - 25$

$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2 - 25} = 1 \quad \Rightarrow (a^2 - 5)(a^2 - 45) = 0 \quad \Rightarrow$ या तो $a^2 = 5$ या $a^2 = 45$

लेकिन $a^2 \neq 5 \quad \therefore a^2 = 45 \quad \Rightarrow b^2 = 20$

B-6. The position of the point (1, 3) with respect to the ellipse $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$

(A) outside the ellispe
(B) on the ellipse
(C*) on the major axis
(D) on the minor axis

दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$ के सापेक्ष बिन्दु (1, 3) की स्थिति है –

(A) दीर्घवृत्त के बाहर
(B) दीर्घवृत्त पर
(C) दीर्घअक्ष पर
(D) लघुअक्ष पर

Sol. $4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 64 + 9) = 36 \Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$

Equation of major axis y = 3.
Equation of minor axis x = 2

Hindi. दीर्घवृत्त की दी गयी समीकरण से–

$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 64 + 9) = 36 \Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$

अतः दीर्घअक्ष का समीकरण y = 3.
एवं लघुअक्ष का समीकरण x = 2

B-7. With respect to the hyperbola $(3x - 3y)^2 - (2x + 2y)^2 = 36$

(A) (3,2) lies on conjugate axis
(B) (3,2) lies on tranverse axis
(C) (3,2) lies inside hyperbola
(D*) (3,2) lies outside hyperbola

अतिपरवलय $(3x - 3y)^2 - (2x + 2y)^2 = 36$ के सापेक्ष

(A) (3,2) सयुग्मी अक्ष पर स्थित है।
(B) (3,2) अनुप्रस्थ अक्ष पर स्थित है।
(C) (3,2) अतिपरवलय के अन्दर है।
(D*) (3,2) अतिपरवलय के बाहर स्थित है।

Sol. $\frac{(x-y)^2}{2^2} - \frac{(x+y)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow$ x – y = 0 is conjugate axis, x + y = 0 is tranverse axis
$\Rightarrow$ further $S = (3x - 3y)^2 - (2x + 2y)^2 - 36 = (9 - 6)^2 - (6 + 4)^2 - 36 = 9 - 100 - 36 < 0$
so (3,2) lies outside hyperbola

B-8. Equation of auxilliary circle of the ellipse $2x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$ is

दीर्घवृत्त $2x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$ के सहायक वृत्त का समीकरण है–

(A) $(x - 1)^2 + y^2 = 7 - 3\sqrt{5}$
(B*) $x^2 + y^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$
(C) $x^2 + y^2 = \frac{2}{7 + 3\sqrt{5}}$
(D) $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{4}{7 + 3\sqrt{5}}$

Sol. by partial differentiation centre of ellipse is (0, 0)

आंशिक अवकलन से दीर्घवृत्त का केन्द्र (0, 0) है–

$2r^2\cos^2\theta + 6r^2\cos\theta\sin\theta + 5r^2\sin^2\theta = 1$

$$r^2 = \frac{2}{2(1+\cos 2\theta) + 6\sin 2\theta + 5(1-\cos 2\theta)} = \frac{2}{7 + 3(2\sin 2\theta - \cos 2\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2}{7 - 3\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2(7 + 3\sqrt{5})}{49 - 45}} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

B-9. **Statement-1 :** Eccentricity of ellipse whose length of latus rectum is same as distance between foci is 2sin18°.

Statement-2 : For $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, eccentricity $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

(A) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1
(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1

(C*)STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false
(D) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true
(E) Both STATEMENTS are false

कथन-1 : दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता जिसके नाभिलम्ब की लम्बाई, नाभियों के मध्य की दूरी के समान है, 2sin18° है।

कथन-2 : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के लिए उत्केन्द्रता $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।
(E) दोनों कथन असत्य है।

Sol. Statement-1 is true by $\frac{2b^2}{a}=2ae$ for (a > b) or by $\frac{2a^2}{b}=2be$ for (a < b)
statement-2 is false when a < b.

Hindi: कथन-1 सत्य है $\frac{2b^2}{a}=2ae$, (a > b) के लिए या $\frac{2a^2}{b}=2be$, (a < b) के लिए
कथन-2 असत्य है। जब a < b.

B-10. The curve represented by x = 3 (cos t + sin t), y = 4 (cos t – sin t), is
(A*) ellipse (B) parabola (C) hyperbola (D) circle
x = 3 (cos t + sin t), y = 4 (cos t – sin t) द्वारा निरूपित वक्र है :–
(A*) दीर्घवृत्त (B) परवलय (C) अतिपरवलय (D) वृत्त

Sol. $\frac{x}{3}=(\cos t+\sin t)$, $\frac{y}{4}=(\cos t-\sin t)$. Squaring and adding $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Hindi $\frac{x}{3}=(\cos t+\sin t)$, $\frac{y}{4}=(\cos t-\sin t)$. वर्ग करके जोड़ने पर $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

B-11. The eccentricity of the conic represented by $x^2 - y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$ is
शांकव $x^2 - y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$ की उत्केन्द्रता है –
(A) 1 (B*) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 1/2

Sol. Given hyperbola $(x-2)^2-(y-2)^2=-16$
Rectangular hyperbola
$\therefore$ $e=\sqrt{2}$.

Hindi. दिया गया अतिपरवलय $(x-2)^2-(y-2)^2=-16$
आयतीय अतिपरवलय $\therefore$ $e=\sqrt{2}$

B-12. Which of the following pair, may represent the eccentricities of two conjugate hyperbolas, for all $\alpha \in (0, \pi/2)$?
सभी $\alpha \in (0, \pi/2)$ के लिए निम्न में से कौनसा युग्म दो संयुग्मी अतिपरवलय की उत्क्रेन्द्रताओं को प्रदर्शित कर सकता हैं–
(A) sin α, cos α (B) tan α, cot α
(C*) sec α, cosec α (D) 1 + sin α, 1 + cos α

Sol. If e_1 & e_2 are eccentircities of two conjugate hyperbolas
यदि e_1 और e_2 दो संयुग्मी अतिपरवलयों की उत्केन्द्रताएँ है
then (तो) $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$ $\therefore$ $e_1=\sec\alpha$ & और $e_2=\operatorname{cosec}\alpha$

B-13. For hyperbola represented by $16x^2 - 3y^2 - 32x + 12y - 44 = 0$, which of the following statement is INCORRECT
(A*) the length of whose transverse axis is $4\sqrt{3}$
(B) the length of whose conjugate axis is 8
(C) whose centre is (1, 2)

(D) whose eccentricity is $\sqrt{\frac{19}{3}}$

समीकरण $16x^2 - 3y^2 - 32x + 12y - 44 = 0$ एक अतिपरवलय को प्रदर्शित करता है, तब निम्न मे से कौनसा कथन गलत है–

(A*) जिसके अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $4\sqrt{3}$ है। (B) जिसके संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 8 है।

(C) जिसका केन्द्र (1, 2) है। (D) जिसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{\frac{19}{3}}$ है।

Sol. The given equation reduces to

$16(x-1)^2 - 3(y-2)^2 = 48$ i.e. $\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

so $a^2 = 3$ and $b^2 = 16$ and centre is (1, 2) also we have eccentricity as $\sqrt{\frac{19}{3}}$

Hindi. दिया हुआ समीकरण $16x^2 - 3y^2 - 32x + 12y - 44 = 0 \Rightarrow 16(x-1)^2 - 3(y-2)^2 = 48$

अर्थात् $\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

$\therefore$ $a^2 = 3$ और $b^2 = 16$ और केन्द्र (1, 2) और $e = \sqrt{\frac{19}{3}}$

B-14. **Statement-1 :** If $\sec\theta$, $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ represent eccentricity of a hyperbola then eccentricity of its conjugate hyperbola is given by $\operatorname{cosec}\theta$.

Statement-2 : If e_1, e_2 are eccentricities of two hyperbolas which are conjugate to each other then $e_1^{-2} + e_2^{-2} = 1$

(A) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1

(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1

(C) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false

(D*) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true

(E) Both STATEMENTS are false

कथन-1 : यदि $\sec\theta$, $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ अतिपरवलय की उत्केन्द्रता को व्यक्त करता है तब संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\operatorname{cosec}\theta$ से दी जाती है।

कथन-2 : यदि e_1 तथा e_2 दो अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है। जो एक–दूसरे के संयुग्मी है तब $e_1^{-2} + e_2^{-2} = 1$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।

(D*) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

(E) दोनों कथन असत्य है।

Sol. Statement-2 is true (standard results)

Statement-1 is false for $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right]$

Hindi: कथन-2 सत्य है (मानक परिणाम)

कथन-1 असत्य है। $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right]$ के लिए

B-15. The eccentricity of the hyperbola whose conjugate axis is equal to half the distance between the foci, is :

उस अतिपरवलय की उत्केन्द्रता, जिसका संयुग्मी अक्ष नाभियों के बीच की दूरी का आधा है, है–

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (C*) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

Sol. $\frac{2b^2}{a} = 8$ ... (1) and तथा $2b = \frac{2ae}{2}$ ...(2)

and तथा $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ ... (3)

by (1), (2), (3) से $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$ Ans.

B-16. Identify the following statements for true/false (T/F) in order
S1 : A latus rectum of an ellipse is a line passing through a focus
S2 : A latus rectum of an ellipse is a line through the centre
S3 : A latus rectum of an ellipse is a line perpendicular to the major axis
S4 : A latus rectum of an ellipse is a line parallel to the minor axis
(A) TFTF (B) TTFF (C*) TFTT (D) FFFF
दिये गये कथनो को पहचानिये एवं सत्य (T) या असत्य (F) होने का सही क्रम है –
S1 : दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब एक ऐसी रेखा है जो नाभि से गुजरती है।
S2 : दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब एक ऐसी रेखा है जो केन्द्र से गुजरती है।
S3 : दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब एक ऐसी रेखा है जो दीर्घअक्ष के लम्बवत् है।
S4 : दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब एक ऐसी रेखा है जो लघुअक्ष के समान्तर है।
(A) TFTF (B) TTFF (C*) TFTT (D) FFFF

Sol. Obvious (By Definition) स्पष्टतया परिभाषानुसार

B-17. If P ($\sqrt{2}\sec\theta$, $\sqrt{2}\tan\theta$) is a point on the hyperbola whose distance from the origin is $\sqrt{6}$ where P is in the first quadrant then θ =
यदि P ($\sqrt{2}\sec\theta$, $\sqrt{2}\tan\theta$) अतिपरवलय पर एक बिन्दु है, जिसकी मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{6}$ है, जहाँ पर P प्रथम चतुर्थांश में है, तब θ का मान होगा–
(A*) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{15}$

Sol. $\sqrt{2}^2\sec^2\theta + \sqrt{2}^2\tan^2\theta = 6$ $\Rightarrow 1 + 2\tan^2\theta = 3$
$\therefore \theta = \pi/4$ for first quadrant $\therefore$ प्रथम चतुर्थांश के लिए $\theta = \pi/4$

B-18. The co-ordinates of a focus of the hyperbola $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$ is
अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$ के नाभियों के निर्देशांक हैं –
(A) (–1, 1) (B) (6, 1) (C*) (4, 1) (D) (– 6, –1)

Sol. Given Hyperbola $9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1)$
$= 151 + 9 - 16 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow$ foci (4, 1), (–6, 1)

Hindi. दिया गया अतिपरवलय $9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) = 151 + 9 - 16$
$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow$ नाभियाँ (4, 1), (– 6, 1)

B-19. The set of values of 'a' for which $(13x - 1)^2 + (13y - 2)^2 = a(5x + 12y - 1)^2$ represents an ellipse is
(A) $1 < a < 2$ (B*) $0 < a < 1$ (C) $2 < a < 3$ (D) $3 < a < 4$
'a' के मानों का समुच्चय जिसके लिये $(13x - 1)^2 + (13y - 2)^2 = a(5x + 12y - 1)^2$ एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करता है –
(A) $1 < a < 2$ (B*) $0 < a < 1$ (C) $2 < a < 3$ (D) $3 < a < 4$

Sol. $\left(x - \frac{1}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{13}\right)^2 = a\left[\frac{5x + 12y - 1}{13}\right]^2 \Rightarrow PS^2 = e^2\, PM^2$
here $a = e^2$ $\Rightarrow 0 < e < 1$ for ellipse
so $0 < a < 1$

Hindi. $\left(x-\frac{1}{13}\right)^2+\left(y-\frac{2}{13}\right)^2 = a\left[\frac{5x+12y-1}{13}\right]^2 \Rightarrow PS^2 = e^2\, PM^2$

यहाँ $a = e^2$

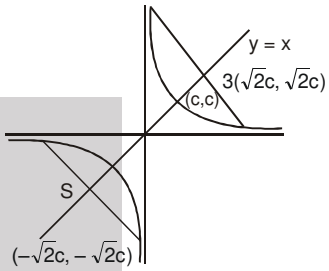
$0 < e < 1$ (दीर्घवृत्त के लिए) $\Rightarrow$ अतः $0 < a < 1$

B-20. Find the equation of latus rectum of rectangular hyperbola $xy = c^2$

आयतीत अतिपरवलय $xy = c^2$ के नाभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए–

(A) $x - y \pm 2\sqrt{2}\,c = 0$ (B) $x - y \pm \sqrt{2}\,c = 0$ (C*) $x + y \pm 2\sqrt{2}\,c = 0$ (D) $x + y \pm \sqrt{2}\,c = 0$

Sol. Latus rectum is $\perp$ to T.A



$\therefore$ $x + y + k = 0$ passing $(\pm 2\sqrt{2}\,c, \pm \sqrt{2}\,c)$

$\therefore$ $x + y \pm 2\sqrt{2}\,c = 0$

Hindi. नाभिलम्ब, अनुप्रस्थ अक्ष के लम्बवत् होती है।

$\therefore$ रेखा $x + y + k = 0$, $(\pm 2\sqrt{2}\,c, \pm \sqrt{2}\,c)$से गुजरती है।

$\therefore$ $x + y \pm 2\sqrt{2}\,c = 0$

Section (C) : Position of line, Equation of chord and various forms of tangents of parabola

खण्ड (C) : परवलय के लिए रेखा की स्थिति, जीवा का समीकरण और विभिन्न रूपो में स्पर्श रेखाऐं

C-1. The locus of point of trisections of the focal chords of the parabola, $y^2 = 4x$ is:

(A) $y^2 = x - 1$ (B) $9y^2 = 4.(3x - 4)$ (C) $y^2 = 2(1 - x)$ (D*) None of these

परवलय $y^2 = 4x$ की नाभीय जीवा को समत्रिविभाजित बिन्दुओं का बिन्दुपथ है–

(A) $y^2 = x - 1$ (B) $9y^2 = 4.(3x - 4)$ (C) $y^2 = 2(1 - x)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $(t^2, 2t)$, $\left(\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t}\right)$ $\Rightarrow$ $3h = 2t^2 + \frac{1}{t^2}$, $3k = 4t - \frac{-2}{t}$ eleminate t from these equations

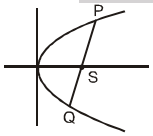
C-2. The latus rectum of a parabola whose focal chord is PSQ such that SP = 3 and SQ = 2 is given by:

(A*) 24/5 (B)) 12/5 (C) 6/5 (D) 23/5

वह परवलय जिसकी नाभिय जीवा PSQ है। (जहाँ SP = 3 तथा SQ = 2 दिया है) उस परवलय के नाभिलम्ब की लम्बाई है–

(A*) 24/5 (B) 12/5 (C) 6/5 (D) 23/5

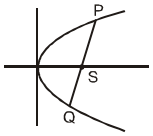
Sol.



From the property $\frac{1}{PS} + \frac{1}{QS} = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$ $a = \frac{6}{5}$ $\therefore$ Latus rectum $= 4a = \frac{24}{5}$

Hindi.



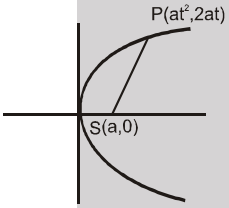
नाभिय गुणधर्म से $\frac{1}{PS} + \frac{1}{QS} = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$ $\quad a = \frac{6}{5}$ $\quad \therefore$ नाभिलम्ब $= 4a = \frac{24}{5}$

C-3. Identify following statements for true/false (T/F) in order
S1 : The circles on focal radii of a parabola as diameter touch the tangent at the vertex
S2 : The circles on focal radii of a parabola as diameter touch the axis
S3 : A circle described on any focal chord of the parabola as its diameter will touch the directrix of the parabola
S4 : A circle described on any focal chord of the parabola as its diameter will touch the axis of the parabola
(A) TTFF (B*) TFTF (C) FFTT (D) FTFT

निम्न कथनों में कौनसे सही/गलत कथनों को पहचानिए –
S1 : परवलय के नाभीय त्रिज्यायें को व्यास मानक खीचे गए वृत्त, शीर्ष पर स्पर्श रेखा को स्पर्श करते है –
S2 : परवलय की नाभिय त्रिज्या को व्यास मानकर खीचा गया वृत्त, x-अक्ष को स्पर्श करता है।
S3 : परवलय की नाभिय जीवा को व्यास मानकर खीचा गया वृत्त, परवलय की नियता को स्पर्श करता है।
S4 : परवलय की नाभिय जीवा को व्यास मानकर खीचा गया वृत्त, परवलय की अक्ष को स्पर्श करता है।
(A) TTFF (B*) TFTF (C) FFTT (D) FTFT

Sol.



Write the equation of circle with PS as diameter and then prove that the tangent at vertex touches to circle.
PS को व्यास मानकर वृत्त का समीकरण लिखिए तथा तब सिद्ध कीजिए कि शीर्ष पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है।

C-4. The length of the chord $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ intercepted by the parabola $y^2 = 4(x-1)$ is
जीवा $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ की लम्बाई जो परवलय $y^2 = 4(x-1)$ द्वारा अन्तखण्डित होती है
(A) $4\sqrt{3}$ (B*) $\frac{16}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Sol. $y = \sqrt{3}(x-2)$ passes through the focus of $y^2 = 4(x-1)$
i.e. (2, 0). So length of focal chord
$= 4a\operatorname{cosec}^2\alpha = 4 \times 1 \times \operatorname{cosec}^2 60° = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

जीवा $y = \sqrt{3}(x-2)$, परवलय $y^2 = 4(x-1)$ की नाभि से गुजरती है।
अर्थात (2, 0) इसलिए नाभीय जीवा की लम्बाई
$= 4a\operatorname{cosec}^2\alpha = 4 \times 1 \times \operatorname{cosec}^2 60° = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

C-5. If $y = 2x - 3$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4a\left(x - \frac{1}{3}\right)$, then 'a' is equal to, where $a \neq 0$:
यदि $y = 2x - 3$ परवलय $y^2 = 4a\left(x - \frac{1}{3}\right)$ की स्पर्श रेखा हो, तो a का मान है, जहाँ $a \neq 0$
(A) 1 (B) – 1 (C) $\frac{14}{3}$ (D*) $\frac{-14}{3}$

Sol. $y = 2x - 3,\ y^2 = 4a\left(x - \frac{1}{3}\right)$

$(2x - 3)^2 = 4a\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Apply D = 0 in above quadratic and find a.

उपरोक्त द्विघात समीकरण का D = 0 करने पर a का मान प्राप्त होगा।

C-6. An equation of a tangent common to the parabolas $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ is

परवलय $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ की उभयनिष्ट स्पर्शी का समीकरण है –

(A) $x - y + 1 = 0$ (B) $x + y - 1 = 0$ (C*) $x + y + 1 = 0$ (D) $y = 0$

Sol. Let the equation of tangent to the parabola $y^2 = 4x$ is

$y = mx + \frac{1}{m}$ ...(1)

solving equation (1) with parabola $x^2 = 4y$ $\Rightarrow x^2 = 4\left(mx + \frac{1}{m}\right)$

Now put D = 0 & find the value of m

Hindi. परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा का समीकरण

$y = mx + \frac{1}{m}$ ...(1)

समीकरण (1) को $x^2 = 4y$ के साथ हल करने पर $\Rightarrow x^2 = 4\left(mx + \frac{1}{m}\right)$

अब D = 0 रखकर m का मान ज्ञात कीजिए।

C-7. Equation of a tangent to the parabola $y^2 = 12x$ which make an angle of 45° with line $y = 3x + 77$ is

परवलय $y^2 = 12x$ की स्पर्श रेखा जो रेखा $y = 3x + 77$ से 45º का कोण बनाती हो, का समीकरण है–

(A) $2x - 4y + 3 = 0$ (B*) $x - 2y + 12 = 0$ (C) $4x + 2y + 5 = 0$ (D) $2x + y - 12 = 0$

Sol. Let the equation of tangent is माना स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \frac{a}{m}$

$y = mx + \frac{3}{m}$ ...(1)

$\tan 45° = \left|\frac{m-3}{1+3m}\right| \Rightarrow \frac{m-3}{1+3m} = \pm 1$

find the value of m and put it in the equation

m के मान ज्ञात कीजिए तथा समीकरण में रखने पर

C-8. Identify the following statements for true/false (T/F) in order

S1 : The tangents at the extremities of a focal chord of a parabola are perpendicular

S2 : The tangents at the extremities of a focal chord of a parabola are parallel

S3 : The tangents at the extremities of a focal chord of a parabola intersect on the directrix

S4 : The tangents at the extremities of a focal chord of a parabola intersect at the vertex

(A*) TFTF (B) TTFF (C) TTTT (D) FFFF

परवलय की नाभीय जीवा के अन्तिम सिरों पर खींची गयी स्पर्श रेखाएं–

(A*) लम्बवत् है। (B) समान्तर है।

(C*) नियता पर प्रतिच्छेद करती है। (D) शीर्ष पर प्रतिच्छेद करती है।

Sol. Option (A) & (C) are used as a property

HIndi. विकल्प (A) और (C) गणुधर्म से

Section (D) : Position of line, Equation of chord and various forms of tangents of Ellipse & Hyperbola

खण्ड (D) : दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के लिए रेखा की स्थिति, जीवा का समीकरण और विभिन्न रूपो में स्पर्श रेखाऐं

D-1. If the line y = 2x + c be a tangent to the ellipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, then c is equal to

यदि रेखा y = 2x + c दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ की स्पर्श रेखा हो, तो c का मान है –

(A) ± 4 (B*) ± 6 (C) ± 1 (D) ± 8

Sol. $C = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$C = \pm\sqrt{8\times4+4} = \pm 6$

D-2. The distance of the point of contact from the origin of the line $y = x-\sqrt{7}$ with the ellipse $3x^2 + 4y^2 = 12$, is

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C*) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (D) $\frac{5}{7}$

दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की स्पर्श रेखा $y = x-\sqrt{7}$ के स्पर्श बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी है –

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Equation of the given ellipse is $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

Equation of a tangent to the ellipse at any point (h, k) on the ellipse, is $\frac{xh}{4}+\frac{yk}{3}=1$

Comparing it with the equation of the given tangent, we have

$$\frac{h}{4}=\frac{-k}{3}=\left(\frac{3h^2+4k^2}{3.4^2+4.3^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{12}{84}\right)^{1/2}$$

[∵ (h, k) lies on the ellipse ∴ $3h^2 + 4k^2 = 12$]

gives $h = 4/\sqrt{7}$ and $-3/\sqrt{7}$

So distance = $\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{5}{\sqrt{7}}$

Hindi. दिये गये दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ है।

दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु (h, k) पर खींची गयी स्पर्श रेखा का समीकरण $\frac{xh}{4}+\frac{yk}{3}=1$ है।

स्पर्श रेखा की इस समीकरण की दी गयी स्पर्श रेखा के समीकरण से तुलना करने पर

$$\frac{h}{4}=\frac{-k}{3}=\left(\frac{3h^2+4k^2}{3.4^2+4.3^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{12}{84}\right)^{1/2}$$

[∵ (h, k) दीर्घवृत्त पर स्थित है अतः ∴ $3h^2 + 4k^2 = 12$]

⇒ $h = 4/\sqrt{7}$ और $-3/\sqrt{7}$

अतः अभीष्ट दूरी = $\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{5}{\sqrt{7}}$

D-3. If $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\sqrt{2}$ touches the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at a point P, then eccentric angle of P is

यदि रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\sqrt{2}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को बिन्दु P पर स्पर्श करती है, तो P का उत्केन्द्रीय कोण होगा–

(A) 0 (B*) 45° (C) 60° (D) 90°

Sol. Let eccentric angle be θ, then equation of tangent is

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \qquad ...(1)$$

given equation is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{2} \qquad ...(2)$$

comparing (1) and (2)

$$\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$$

Hindi. माना बिन्दु 'p' का उत्केन्द्रीय कोण θ है, तो बिन्दु 'p' पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा –

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \qquad ...(1)$$

लेकिन बिन्दु 'p' पर दी गयी स्पर्श रेखा है –

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{2} \qquad ...(2)$$

(1) व (2) की तुलना करने पर

$$\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$$

D-4. The point of intersection of the tangents at the point P on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and its corresponding point Q on the auxiliary circle, lies on the line :

(A) $x = a/e$ (B) $x = 0$ (C*) $y = 0$ (D) $y = \frac{b}{e}$

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु P पर तथा इसके सहायक वृत्त पर संगत बिन्दु Q पर खीचीं गई स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु जिस रेखा पर स्थित है, वह है

(A) $x = a/e$ (B) $x = 0$ (C) $y = 0$ (D) $y = \frac{b}{e}$

Sol. $\frac{x}{a}\cos\phi + \frac{y}{b}\sin\phi = 1 \qquad .....(1)$

$x^2 + y^2 = a^2$

$ax\cos\phi + ay\sin\phi = a^2$

$x\cos\phi + y\sin\phi = a$

$\frac{x}{a}\cos\phi + \frac{y}{a}\sin\phi = 1 \qquad .....(2)$

Solving (1) and (2) $y = 0$

Hindi. दीर्घवृत्त पर स्थित बिन्दु $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$\frac{x}{a}\cos\phi + \frac{y}{b}\sin\phi = 1 \qquad .....(1)$

दीर्घवृत्त के सहायक वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 = a^2$

सहायक वृत्त पर स्थित बिन्दु $Q(a\cos\phi, a\sin\phi)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$ax\cos\phi + ay\sin\phi = a^2$

$\Rightarrow x\cos\phi + y\sin\phi = a$

$\frac{x}{a}\cos\phi + \frac{y}{a}\sin\phi = 1 \qquad .....(2)$

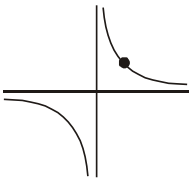
(1) एवं (2) को हल करने पर $y = 0$

D-5. A chord is drawn to the hyperbola xy = 4 from a point A(2, 2) which cuts it again at point B. The locus of point P such that AP : PB = 2 :1

अतिपरवलय xy = 4 की बिन्दु A(2, 2) से खीची जाने वाली एक जीवा, पुनः इसे बिन्दु B पर मिलती है तब बिन्दु P का बिन्दुपथ होगा जबकि AP : PB = 2 :1 है।

(A*) (3x – 2) (3y – 2) = 16 (B) (2x – 3)(2y – 3) = 16
(C) xy = 2 (D) (3x – 2)(2y – 3) = 16

Sol.



xy = 4

A(2, 2) $B\left(2t, \frac{2}{t}\right)$

AP : PB = 2 : 1

$h = \frac{4t+2}{3}$, $k = \frac{\frac{4}{t}+2}{3}$

$(3h-2).(3k-2) = \frac{4t}{8} \times \frac{4}{t}$

(3x – 2)(3y – 2) = 16

D-6. The number of possible tangents which can be drawn to the curve $4x^2 - 9y^2 = 36$, which are perpendicular to the straight line 5x + 2y –10 = 0 is :

वक्र $4x^2 - 9y^2 = 36$ पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या, जो कि सरल रेखा 5x + 2y –10 = 0 के लम्बवत् है, है–

(A*) zeroशून्य (B) 1 (C) 2 (D) 4

Sol. $4x^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

5x + 2y – 10 = 0

$m = \frac{-5}{2}$ $m' = \frac{2}{5}$

Equation of tangent (स्पर्श रेखा का समीकरण) $y = m'x \pm \sqrt{a^2(m')^2 - b^2}$

$y = \frac{2}{5}x \pm \sqrt{9 \times \frac{4}{25} - 16}$

$y = \frac{2}{5}x \pm \sqrt{-ve}$ so not possible (अतः संभव नहीं है)

D-7. The equation of the tangent lines to the hyperbola $x^2 - 2y^2 = 18$ which are perpendicular to the line y = x are :

अतिपरवलय $x^2 - 2y^2 = 18$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण, जो रेखा y = x के लम्बवत् है, है –

(A) y = – x ± 7 (B*) y = – x ± 3 (C) y = – x ± 4 (D) none of these

Sol. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$

given line is (दी गई रेखा है)

y = x

∴ slope of tangent (स्पर्श रेखा की प्रवणता) = – 1

$\therefore$ equation is (समीकरण है)

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad \Rightarrow \quad y = -x \pm 3$

Section (E) : Pair of tangents, Director circle, chord of contact and chord with given middle point of Parabola

खण्ड (E) : परवलय के लिए स्पर्शी युग्म, नियामंक वृत्त, स्पर्श जीवा और जीवा जबकि मध्य बिन्दु दिया गया हो

E-1. The angle between the tangents drawn from a point $(-a, 2a)$ to $y^2 = 4ax$ is
बिन्दु $(-a, 2a)$ से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण है–

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B*) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

Sol. $\because$ $(-a, 2a)$ lies on directrix of the parabola.

$\because$ $(-a, 2a)$ परवलय की नियता पर स्थित है।

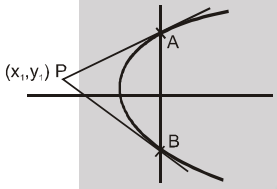
$y^2 = 4ax$

$\therefore$ Angle कोण $= \frac{\pi}{2}$

E-2. The line $4x - 7y + 10 = 0$ intersects the parabola, $y^2 = 4x$ at the points A & B. The co-ordinates of the point of intersection of the tangents drawn at the points A & B are:
रेखा $4x - 7y + 10 = 0$ परवलय $y^2 = 4x$ को बिन्दु A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है। बिन्दु A तथा B पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक है–

(A) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (B) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ (C*) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ (D) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Sol.



Eq. of AB is :

$T = 0$

$yy_1 = 2(x + x_1)$

$2x - yy_1 + 2x_1 = 0$ ...(1)

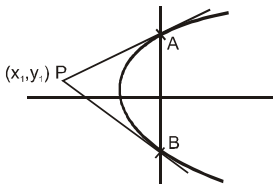
$4x - 7y + 10 = 0$ .... (2)

equ. (1) & (2) are identical

$\therefore \frac{2}{4} = \frac{y_1}{7} = \frac{2x_1}{10}$

$y_1 = \frac{7}{2}$ & $x_1 = \frac{5}{2}$

Hindi



AB का समीकरण

$T = 0$

$yy_1 = 2(x + x_1)$

$2x - yy_1 + 2x_1 = 0$ ...(1)

$4x - 7y + 10 = 0$ .... (2)

(1) व (2) सर्वसम है।

$\therefore \frac{2}{4} = \frac{y_1}{7} = \frac{2x_1}{10}$

$y_1 = \frac{7}{2}$ & $x_1 = \frac{5}{2}$

E-3. The locus of the middle points of the focal chords of the parabola, $y^2 = 4x$ is:
(A) $y^2 = x - 1$ (B*) $y^2 = 2(x - 1)$ (C) $y^2 = 2(1 - x)$ (D) $y^2 = 2(x + 1)$
परवलय $y^2 = 4x$ की नाभीय जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–
(A) $y^2 = x - 1$ (B*) $y^2 = 2(x - 1)$ (C) $y^2 = 2(1 - x)$ (D) कोई नहीं

Sol. Eq. of chord is $T = S_1$
$ky - 2(x + h) = k^2 - 4h$ ...(1)
$\because$ above eq. passes through focus (1, 0)
$\therefore 0.k - 2(1 + h) = k^2 - 4h$
$-2 - 2x = y^2 - 4x$
$y^2 = 2(x - 1)$

Hindi जीवा का समीकरण $T = S_1$
$ky - 2(x + h) = k^2 - 4h$ ...(1)
$\because$ नाभि (1, 0) से गुजरती है। $\therefore 0.k - 2(1 + h) = k^2 - 4h$
$-2 - 2x = y^2 - 4x$
$y^2 = 2(x - 1)$

Section (F) : Pair of tangents, Director circle, chord of contact and chord with given middle point of Ellipse & Hyperbola

खण्ड (F) : दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के लिए स्पर्शी युग्म, नियामंक वृत्त, स्पर्श जीवा और जीवा जबकि मध्य बिन्दु दिया गया हो

F-1. The equation of the locus of the middle point of the portion of the tangent to the ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ included between the co-ordinate axes is the curve:

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ की स्पर्श रेखा द्वारा, निर्देशी अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ हैं –

(A*) $9x^2 + 16y^2 = 4x^2y^2$ (B) $16x^2 + 9y^2 = 4x^2y^2$
(C) $3x^2 + 4y^2 = 4x^2y^2$ (D) $9x^2 + 16y^2 = x^2y^2$

Sol. Let tangent $\frac{x}{4}\cos\theta + \frac{y}{3}\sin\theta = 1$
$A \equiv (4\sec\theta, 0)$ $B \equiv (0, 3\,\text{cosec}\theta)$
Let mid point be $(h, k) \equiv (2\sec\theta, \frac{3\,\text{cosec}\theta}{2})$.
$\cos\theta = \frac{2}{h}$, $\sin\theta = \frac{3}{2k}$ $\frac{4}{x^2} + \frac{9}{4y^2} = 1$ $\Rightarrow$ $16y^2 + 9x^2 = 4x^2y^2$

Hindi. मानाकि स्पर्शरेखा का समीकरण $\frac{x}{4}\cos\theta + \frac{y}{3}\sin\theta = 1$ है।
अतः $A \equiv (4\sec\theta, 0)$ $B \equiv (0, 3\,\text{cosec}\theta)$
मानाकि अन्तःखण्ड AB का मध्यबिन्दु (h, k) है। अतः $(h, k) \equiv (2\sec\theta, \frac{3\,\text{cosec}\theta}{2}) \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{h}$, $\sin\theta = \frac{3}{2k}$
अतः (h, k) का बिन्दुपथ होगा–
$\frac{4}{x^2} + \frac{9}{4y^2} = 1$ $\Rightarrow$ $16y^2 + 9x^2 = 4x^2y^2$

F-2. The equation of the chord of the ellipse $2x^2 + 5y^2 = 20$ which is bisected at the point (2, 1) is
बिन्दु (2, 1) पर समद्विभाजित होने वाली दीर्घवृत्त $2x^2 + 5y^2 = 20$ की जीवा का समीकरण है–
(A) $4x + 5y + 13 = 0$ (B*) $4x + 5y = 13$ (C) $5x + 4y + 13 = 0$ (D) $5x + 4y = 13$

Sol. Ellipse $-2x^2 + 5y^2 = 20$, mid point (2, 1)
using $T = S_1$
$2x(2) + 5(y \times 1) - 20 = 2(2)^2 + 5(1)^2 - 20$
$4x + 5y = 13$

Hindi. दीर्घवृत्त $-2x^2 + 5y^2 = 20$ की किसी जीवा का मध्य बिन्दु (2, 1) है। अतः इस जीवा का समीकरण
$T = S_1$ से
$2x(2) + 5(y \times 1) - 20 = 2(2)^2 + 5(1)^2 - 20$
$4x + 5y = 13$

F-3 Point, from which tangents to the ellipse $5x^2 + 4y^2 = 20$ are not perpendicular, is:

बिन्दु जिससे दीर्घवृत्त $5x^2 + 4y^2 = 20$ पर खीचीं गई स्पर्श रेखायें परस्पर लम्बवत् नहीं है–
(A) $(1, 2\sqrt{2})$ (B) $(2\sqrt{2}, 1)$ (C) $(2, \sqrt{5})$ (D*) $(\sqrt{5}, 3)$

Sol. Tangent drawn from points lying on director circle are mutually perpendicular
Equation of director circle given ellipse = 1 is $x^2 + y^2 = 9$
All points $(1, 2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 1)$, $(2, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, 2)$ lies on it.

Hindi. नियामक वृत्त पर स्थित बिन्दुओं से खींची गयी स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् होती है।
दीर्घवृत्त = 1 के लिये नियामक वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 9$
अतः समस्त बिन्दु $(1, 2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 1)$, $(2, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, 2)$ इस नियामक वृत्त पर स्थित होंगे।

F-4. The locus of the middle points of chords of hyperbola $3x^2 - 2y^2 + 4x - 6y = 0$ parallel to $y = 2x$ is
रेखा $y = 2x$ के समान्तर अतिपरवलय $3x^2 - 2y^2 + 4x - 6y = 0$ की जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–
(A*) $3x - 4y = 4$ (B) $3y - 4x + 4 = 0$ (C) $4x - 4y = 3$ (D) $3x - 4y = 2$

Sol. by $T = S_1$
$3xh - 2yk + 2(x + h) - 3(y + k)$
$= 3h^2 - 2k^2 + 4h - 6k$
$\Rightarrow x(3h + 2) + y(-2k - 3) = 3h^2 - 2k^2 + 2h - 3k$
If is parallel to $y = 2x$
$\therefore \dfrac{(3h+2)}{(2k+3)} = 2$
$\Rightarrow 3x - 4y = 4$ Ans.

Hindi. $T = S_1$ से
$3xh - 2yk + 2(x + h) - 3(y + k)$
$= 3h^2 - 2k^2 + 4h - 6k$
$\Rightarrow x(3h + 2) + y(-2k - 3) = 3h^2 - 2k^2 + 2h - 3k$
यह $y = 2x$ के समान्तर है।
$\therefore \dfrac{(3h+2)}{(2k+3)} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y = 4$ Ans.

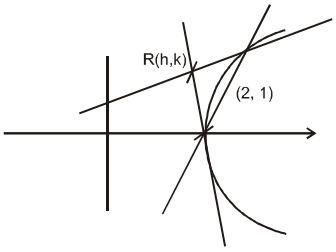
F-5. The chords passing through L(2, 1) intersects the hyperbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ at P and Q. If the tangents at P and Q intersects at R then Locus of R is
(A) $x - y = 1$ (B*) $9x - 8y = 72$ (C) $x + y = 3$ (D) $9x + 8y = 7$

बिन्दु L(2, 1) से गुजरने वाली जीवाऐं अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ को P तथा Q पर प्रतिच्छेद करती है। अगर P तथा Q पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं R पर प्रतिच्छेद करती है, तब R का बिन्दुपथ होगा –
(A) $x - y = 1$ (B*) $9x - 8y = 72$ (C) $x + y = 3$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Let the point R is (h, k)
So the equation of chord of contact.

$\frac{hx}{16} - \frac{ky}{9} = 1$

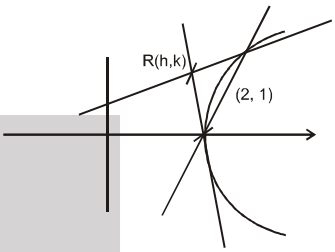


It passes through (2, 1) so $\frac{2h}{16} - \frac{k}{9} = 1$

$\frac{h}{8} - \frac{k}{9} = 1$ so locus of R is $9x - 8y = 72$

Hindi $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

माना बिन्दु R (h, k) है।
अतः स्पर्श जीवा का समीकरण



$\frac{hx}{16} - \frac{ky}{9} = 1$

यह (2, 1) से गुजरती है अतः $\frac{2h}{16} - \frac{k}{9} = 1$

$\frac{h}{8} - \frac{k}{9} = 1$ अतः R का बिन्दुपथ $9x - 8y = 72$ है।

F-6. The number of points from where a pair of perpendicular tangents can be drawn to the hyperbola, $x^2 \sec^2 \alpha - y^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1$, $\alpha \in (0, \pi/4)$, is :
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D*) infinite
उन बिन्दुओं की संख्या, जहां से अतिपरवलय $x^2 \sec^2 \alpha - y^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1$, $\alpha \in (0, \pi/4)$ पर लम्बवत् स्पर्श रेखा युग्म खींचे जा सकते हैं –
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त

Sol. $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$
locus of perpendicular tangents
(Director circle) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$
$x^2 + y^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$
But $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
$\cos\theta < x^2 + y^2 < \cos \frac{\pi}{4}$ $0 < x^2 + y^2 < 1$ So there are infinite points.

Hindi. $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$
लम्बवत् स्पर्श रेखाओं का बिन्दुपथ
(नियामक वृत्त) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$
$x^2 + y^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$
परन्तु $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
$\cos\theta < x^2 + y^2 < \cos \frac{\pi}{4}$ $0 < x^2 + y^2 < 1$
अतः उसमें अनन्त बिन्दु होंगे।

F-7. Locus of the middle points of the parallel chords with gradient m of the rectangular hyperbola $xy = c^2$ is:
आयतीय अतिपरवलय $xy = c^2$ की m प्रवणता वाली समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–
(A*) $y + mx = 0$ (B) $y - mx = 0$ (C) $my - x = 0$ (D) $my + x = 0$

Sol. by $T = S_1$
$\frac{xk + yh}{2} = hk \Rightarrow \frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 2$

$\therefore \quad m = \dfrac{-1/h}{+1/k}$

$\Rightarrow k + mh = 0 \Rightarrow y + mx = 0$

Hindi. $T = S_1$ से

$\dfrac{xk + yh}{2} = hk$

$\Rightarrow \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k} = 2 \qquad \therefore \quad m = \dfrac{-1/h}{+1/k}$

$\Rightarrow k + mh = 0 \qquad \Rightarrow \quad y + mx = 0$

F-8. The tangents from $(1, 2\sqrt{2})$ to the hyperbola $16x^2 - 25y^2 = 400$ include between them an angle equal to:

बिन्दु $(1, 2\sqrt{2})$ से अतिपरवलय $16x^2 - 25y^2 = 400$ पर खीची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है –

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D*) $\dfrac{\pi}{2}$

Sol. $(1, 2\sqrt{2})$ lies on director circle

of $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ i.e. $x^2 + y^2 = 9$

$\therefore$ Required angle $\pi/2$

Hindi. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ के नियामक वृत्त पर $(1, 2\sqrt{2})$ स्थित है

अर्थात् $x^2 + y^2 = 9$

$\therefore$ आवश्यक कोण $\pi/2$

F-9. The locus of the mid points of the chords passing through a fixed point (α, β) of the hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ is :

(A) a circle with centre $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$ (B) an ellipse with centre $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$

(C*) a hyperbola with centre $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$ (D) straight line passing through

एक स्थिर बिन्दु (α, β) से गुजरने वाली अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है –

(A) एक वृत्त जिसका केन्द्र $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$ है। (B) एक दीर्घवृत्त जिसका केन्द्र $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$ है।

(C) एक अतिपरवलय जिसका $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$ केन्द्र है। (D) एक सरल रेखा जो बिन्दु से $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$ गुजरती है।

Sol. Let (h, k) be the mid point

$\therefore \quad T = S_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{xh}{a^2} - \dfrac{yk}{b^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{k^2}{b^2}$ .....(i)

(1) passes through (α, β) so putting (α, β) in it

$\Rightarrow \quad \dfrac{\alpha x}{a^2} - \dfrac{\beta y}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

$\Rightarrow \quad \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{\alpha x}{a^2}\right) - \left(\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{\beta y}{b^2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{4a^2} - \frac{\beta^2}{4b^2} = 0$$

which is a hyperbola with centre $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

Hindi. मानाकि (h, k) मध्य बिन्दु है।

$$\therefore \quad T = S_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{xh}{a^2} - \frac{yk}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} \quad .....(i)$$

समीकरण (1), (α, β) से गुजरती है। अतः

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{\alpha x}{a^2}\right) - \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{\beta y}{b^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{4a^2} - \frac{\beta^2}{4b^2} = 0$$

जो कि एक अतिपरवलय है जिसका केन्द्र $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ है।

Section (G) : Equation of normal, co-normal points of parabola
खण्ड (G) : परवलय के लिए अभिलम्ब का समीकरण, सहअभिलम्ब बिन्दु

G-1. The subtangent, ordinate and subnormal to the parabola $y^2 = 4ax$ at a point (different from the origin) are in

(A) AP (B*) GP (C) HP (D) none of these

परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु (मूलबिन्दु से भिन्न) पर अद्यःस्पर्शी, कोटि और अद्योलम्ब होते है–

(A) समान्तर श्रेढ़ी में (B) गुणोत्तर श्रेढ़ी में (C) हरात्मक श्रेढ़ी में (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Subtangent अधःस्पर्शी $= 2x_1$

ordinate कोटि $= y_1$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

subnormal अधोलम्ब $= 2a$

G-2. Equation of the normal to the parabola, $y^2 = 4ax$ at its point $(am^2, 2am)$ is:

(A*) $y = -mx + 2am + am^3$ (B) $y = mx - 2am - am^3$

(C) $y = mx + 2am + am^3$ (D) none

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(am^2, 2am)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है–

(A*) $y = -mx + 2am + am^3$ (B) $y = mx - 2am - am^3$

(C) $y = mx + 2am + am^3$ (D) कोई नहीं

Sol. Equation of normal to the parabola $y^2 = 4ax$ at its points $(am^2, 2am)$ is

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} = \frac{2a}{2am} = \frac{1}{m}$$

$m_N = -m$

$y - 2am = (-m)(x - am^2)$

$y = -mx + 2am + am^3$

Hindi. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(am^2, 2am)$ पर नाभिलम्ब का समीकरण

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} = \frac{2a}{2am} = \frac{1}{m}$

$m_N = -m$

$y - 2am = (-m)(x - am^2)$

$y = -mx + 2am + am^3$

G-3. At what point on the parabola $y^2 = 4x$ the normal makes equal angles with the axes?

परवलय $y^2 = 4x$ के किस बिन्दु पर अभिलम्ब अक्षों से समान कोण बनाता है–

(A) (4, 4) (B) (9, 6) (C) (4, – 1) (D*) (1, 2)

Sol. For equal angle $m = \pm 1$

Point is $(am^2, -2am)$

$\therefore$ point is (1, 2)

Hindi. रेखा के अक्षों पर समान कोण से झुकने के लिए $m = \pm 1$

बिन्दु $(am^2, -2am)$, जहाँ $m = \pm 1$ $\therefore$ बिन्दु (1, 2)

G-4. The line $2x + y + \lambda = 0$ is a normal to the parabola $y^2 = -8x$, then λ is

यदि रेखा $2x + y + \lambda = 0$ परवलय $y^2 = -8x$ का अभिलम्ब हो, तो λ का मान है–

(A) 12 (B) – 12 (C*) 24 (D) –24

Sol. Line रेखा : $y = -2x - \lambda$

Prabola परवलय : $y^2 = -8x$

$c = -2am - am^3$ (condition for line to be normal at to parabola)

$c = -2am - am^3$ (परवलय के अभिलम्ब की रेखा का प्रतिबन्ध)

$-\lambda = -2 \times -2 \times -2 - (-2)(-8)$

$-\lambda = -8 - 16$

$\lambda = 24$

G-5. The equation of the other normal to the parabola $y^2 = 4ax$ which passes through the intersection of those at (4a, – 4a) & (9a, – 6a) is:

(A) $5x - y + 115a = 0$ (B*) $5x + y - 135a = 0$

(C) $5x - y - 115a = 0$ (D) $5x + y + 115 = 0$

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दुओं (4a, – 4a) एवं (9a, – 6a) पर अभिलम्बों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले अन्य अभिलम्ब का समीकरण है–

(A) $5x - y + 115a = 0$ (B) $5x + y - 135a = 0$ (C) $5x - y - 115a = 0$ (D) $5x + y + 115 = 0$

Sol. $y^2 = 4ax$.....(i)

Let $(am_1^2, -2am_1) \equiv (4a, -4a)$ $\Rightarrow$ $m_1 = 2$

and $(am_2^2, -2am_2) \equiv (9a, -6a)$ $\Rightarrow$ $m_2 = 3$

Let slope of the third normal be m_3

$\because$ $m_1 + m_2 + m_3 = 0$

$\Rightarrow$ $m_3 = -5$

$\therefore$ equation of third normal is $y = m_3 x - 2am_3 - am_3^3$

$y = -5x - 2a(-5) - a(-125)$

$5x + y - 135a = 0$

Hindi. $y^2 = 4ax$.....(i)

माना $(am_1^2, -2am_1) \equiv (4a, -4a)$ $\Rightarrow$ $m_1 = 2$

एवं $(am_2^2, -2am_2) \equiv (9a, -6a)$ $\Rightarrow$ $m_2 = 3$

माना तृतीय अभिलम्ब की प्रवणता m_3 है।

$\because$ $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ $\Rightarrow$ $m_3 = -5$

$\therefore$ तृतीय अभिलम्ब का समीकरण $y = m_3 x - 2am_3 - am_3^3$

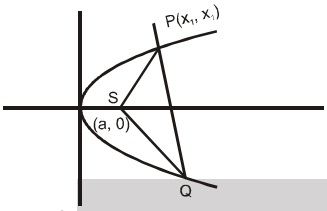
$y = -5x - 2a(-5) - a(-125)$

$5x + y - 135a = 0$

G-6. The normal chord of a parabola $y^2 = 4ax$ at the point $P(x_1, x_1)$ does not subtends a right angle at the
(A) focus
(B) point (12a, 0)
(C) one of the end of the latus rectum
(D*) (a, 2a)

बिन्दु $P(x_1, x_1)$ पर परवलय $y^2 = 4ax$ की अभिलम्ब जीवा निम्न में से किस बिन्दु पर समकोण अन्तरित नहीं करता है ?
(A) नाभि पर
(B) बिन्दु (12a, 0)
(C) नाभि लम्ब के एक सिरे पर
(D*) (a, 2a)

Sol.

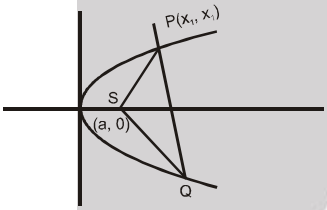


$y^2 = 4ax$
$x_1^2 = 4ax_1$
$x_1 = 0, 4a$
P(4a, 4a)

$\therefore$ Q is (9a, – 6a) $\left\{\text{using } t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}\right\}$

slope of PS × slope of QS = – 1

Hindi



$y^2 = 4ax$
$x_1^2 = 4ax_1$
$x_1 = 0, 4a$

P(4a, 4a) $\therefore$ $Q \equiv (9a, -6a)$ $\left\{\text{using } t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}\right\}$

PS की प्रवणता × QS की प्रवणता = – 1

G-7. If three normals can be drawn to the curve $y^2 = x$ from point (c, 0) then 'c' can be equal to

यदि बिन्दु (c, 0) से वक्र $y^2 = x$ पर तीन अभिलम्ब खीचे जाते है, तब 'c' का मान हो सकता है–

(A) 0
(B) $-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D*) 2

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

Equation of normal at (h^2, h) is
$y - h = -2h(x - h^2)$
As it passes through (c, 0)
$\Rightarrow y - h = -2h(c - h^2) \Rightarrow h^2 = c - 1/2 \Rightarrow c > 1/2$

Hindi. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

(h^2, h) पर अभिलम्ब का समीकरण है
$y - h = -2h(x - h^2)$
चूंकि यह बिन्दु (c, 0) से गुजरता है,
$\Rightarrow y - h = -2h(c - h^2) \Rightarrow h^2 = c - 1/2 \Rightarrow c > 1/2$

G-8. The locus of the middle points of normal chords of the parabola $y^2 = 4ax$ is
परवलय $y^2 = 4ax$ की अभिलम्ब जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–

(A*) $y^4 - 2a(x - 2a).y^2 + 8a^4 = 0$ (B) $y^4 + 2a(x - 2a).y^2 + 8a^4 = 0$
(C) $y^4 - 2a(x + 2a).y^2 + 8a^4 = 0$ (D) $y^4 - 2a(x - 2a).y^2 - 8a^4 = 0$

Sol. $y^2 = 4ax$ .....(i)

$\because$ equation of any normal to parabola (i) is $y + tx = 2at + at^3$ .....(ii)

Let the middle point of normal chord (ii) be (h, k)

$\therefore$ equation of chord with middle point (h, k) is $T = S_1$

$yk - 2a(x + h) = k^2 - 4ah$

$(2a)x - (k)y + k^2 - 2ah = 0$ .....(iii)

$\because$ (ii) and (iii) represent the same line

$\therefore \frac{t}{2a} = \frac{1}{-k} = \frac{-(2at + at^3)}{k^2 - 2ah}$

$\therefore t = -\frac{2a}{k}$ and $k^2 - 2ah = atk(2 + t^2)$

$\Rightarrow k^2 - 2ah = ak\left(-\frac{2a}{k}\right)\left(2 + \frac{4a^2}{k^2}\right) \Rightarrow k^2 - 2ah = -4a^2 - \frac{8a^4}{k^2}$

$\therefore k^4 - 2ahk^2 = -4a^2k^2 - 8a^4$

$\therefore$ locus of (h, k) is

$y^4 - 2a(x - 2a)y^2 + 8a^4 = 0$

Hindi. $y^2 = 4ax$ .....(i)

$\because$ परवलय (i) के किसी अभिलम्ब का समीकरण $y + tx = 2at + at^3$ .....(ii)

माना अभिलम्ब जीवा (ii) के मध्य बिन्दु (h, k) है।

$\therefore$ मध्यबिन्दु (h, k) वाली जीवा का समीकरण $T = S_1$

$yk - 2a(x + h) = k^2 - 4ah$

$(2a)x - (k)y + k^2 - 2ah = 0$ .....(iii)

$\because$ (ii) एवं (iii) एक ही रेखा को प्रदर्शित करती है।

$\therefore \frac{t}{2a} = \frac{1}{-k} = \frac{-(2at + at^3)}{k^2 - 2ah}$

$\therefore t = -\frac{2a}{k}$ एवं $k^2 - 2ah = atk(2 + t^2)$

$\Rightarrow k^2 - 2ah = ak\left(-\frac{2a}{k}\right)\left(2 + \frac{4a^2}{k^2}\right) \Rightarrow k^2 - 2ah = -4a^2 - \frac{8a^4}{k^2}$

$\therefore k^4 - 2ahk^2 = -4a^2k^2 - 8a^4$

$\therefore$ (h, k) का बिन्दुपथ $y^4 - 2a(x - 2a)y^2 + 8a^4 = 0$

Section (H) : Equation of normal, co-normal points of Ellipse & Hyperbola
खण्ड (H) : दीर्घवृत्त अतिपरवलय के लिए अभिलम्ब का समीकरण, सहअभिलम्ब बिन्दु

H-1. If the line $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ be normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, then

यदि रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलम्ब हों, तो –

(A) $p^2(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha) = a^2 - b^2$ (B) $p^2(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha) = (a^2 - b^2)^2$
(C) $p^2(a^2\sec^2\alpha + b^2\operatorname{cosec}^2\alpha) = a^2 - b^2$ (D*) $p^2(a^2\sec^2\alpha + b^2\operatorname{cosec}^2\alpha) = (a^2 - b^2)^2$

Sol. Equation of normal

$ax\sec\phi - by\operatorname{cosec}\phi = a^2 - b^2$ ...(1)

$x\cos\alpha + 4\sin\alpha = p$ ...(2)

$$\frac{a\sec\phi}{\cos\alpha} = \frac{-by\,\text{cosec}\phi}{\sin\alpha} = \frac{a^2-b^2}{p}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{ap}{(a^2-b^2)} \times \sec\alpha \qquad ...(3)$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{-bp}{(a^2-b^2)} \times \text{cosec}\alpha \qquad ...(4)$$

squaring and adding

$$1 = \frac{p^2}{(a^2-b^2)^2}[a^2\sec^2\alpha + b^2\,\text{cosec}^2\alpha]$$

Hindi. अभिलम्ब का समीकरण

$ax\sec\phi - by\,\text{cosec}\phi = a^2 - b^2$ ...(1)

$x\cos\alpha + 4\sin\alpha = p$ ...(2)

$$\frac{a\sec\phi}{\cos\alpha} = \frac{-by\,\text{cosec}\phi}{\sin\alpha} = \frac{a^2-b^2}{p}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{ap}{(a^2-b^2)} \times \sec\alpha \qquad ...(3)$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{-bp}{(a^2-b^2)} \times \text{cosec}\alpha \qquad ...(4)$$

वर्ग करके जोड़ने पर

$$1 = \frac{p^2}{(a^2-b^2)^2}[a^2\sec^2\alpha + b^2\,\text{cosec}^2\alpha]$$

H-2. If the focal chord of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$ is normal at $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ then eccentricity of the ellipse is (it is given that $\sin\theta \neq 0$)

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$ की नाभिय जीवा, बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर अभिलम्ब है तब दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है (दिया गया है कि $\sin\theta \neq 0$)

(A) $|\sec\theta|$ (B) $|\cos\theta|$ (C) $|\sin\theta|$ (D*) None of these

Sol. $ax\sec\theta - by\,\text{cosec}\theta = a^2e^2$

it passes through $(\pm ae, 0)$

यह $(\pm ae, 0)$ से गुजराता है

$\Rightarrow \pm a^2e\sec\theta = a^2e^2 \quad \Rightarrow \quad e = \pm\sec\theta$ Which is not difined (जो परिभाषित नहीं है)

H-3. The locus of the foot of perpendicular drawn from the centre of the hyperbola $x^2 - y^2 = 25$ to its normal.

अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 25$के केन्द्र से इसके अभिलम्ब पर डाले गये लम्ब पाद के बिन्दु का बिन्दुपथ है –

(A*) $100x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 (y^2 - x^2)$ (B) $10x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 (y^2 - x^2)$

(C) $200x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 (y^2 + x^2)$ (D) $100x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 (y^2 + x^2)$

Sol. Equation of normal at $(5\sec f, 5\tan\phi)$ is $\frac{5x}{\cos\phi} + \frac{5y}{\tan\phi} = 50 \Rightarrow \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\tan\phi} = 10$ ...(i)

Equation of line perpendicular to normal passing through centre $x\sec\phi - y\tan\phi = 0$ ...(ii)

eliminating ϕ from equation (i) & (ii)

$100x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 (y^2 - x^2)$

Hindi $(5\sec f, 5\tan\phi)$ पर अभिलम्ब का समीकरण $\frac{5x}{\cos\phi} + \frac{5y}{\tan\phi} = 50$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\tan\phi} = 10 \qquad ...(i)$$

केन्द्र से अभिलम्ब पर लम्बवत् रेखा का समीकरण $x\sec\phi - y\tan\phi = 0$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) ϕ विलुप्त करने पर

$100x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 (y^2 - x^2)$

H-4. The value of $|\lambda|$, for which the line $2x - \frac{8}{3}\lambda y = -3$ is a normal to the conic $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ is

$|\lambda|$ के वे मान जिनके लिए रेखा $2x - \frac{8}{3}\lambda y = -3$, शांकव $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ का एक अभिलम्ब हैं–

(A*) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

Sol. $2x - \frac{8}{3}\lambda y = -3$

$\frac{8}{3}\lambda y = 2x + 3 \quad \Rightarrow y = \left(\frac{3}{4\lambda}\right)x + \left(\frac{9}{8\lambda}\right)$

$m = \frac{3}{4\lambda}, c = \frac{9}{8\lambda}$

condition of normal

$c = \frac{-(a^2 - b^2)m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$

$\frac{9}{8\lambda} = -\frac{(-3).m}{\sqrt{1+4m^2}}$ but $m = \frac{3}{4}\lambda$

solving

$\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sol. दिये गये दीर्घवृत्त $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ के लिये अभिलम्ब का दिया गया समीकरण है

$2x - \frac{8}{3}\lambda y = -3 \quad ...(1)$

$\Rightarrow \quad \frac{8}{3}\lambda y = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{3}{4\lambda}\right)x + \left(\frac{9}{8\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{4\lambda}, c = \frac{9}{8\lambda}$

समीकरण (1) के अभिलम्ब होने के लिये प्रतिबन्ध $c = \frac{-(a^2 - b^2)m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$ लगाने पर

$\Rightarrow \quad \frac{9}{8\lambda} = -\frac{(-3).m}{\sqrt{1+4m^2}}$ लेकिन $m = \frac{3}{4}\lambda$

अतः $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Section (I) : Miscelleneous problems
खण्ड (I) : विविध प्रश्न

I-1. The feet of the perpendicular drawn from focus upon any tangent to the parabola, $y = x^2 - 2x - 3$ lies on

परेवलय $y = x^2 - 2x - 3$ की किसी स्पर्श रेखा पर नाभि से खींचे गए अभिलम्ब का पाद स्थित है–

(A*) $y + 4 = 0$ (B) $y = 0$ (C) $y = -2$ (D) $y + 1 = 0$

Sol. From the property : the feet of the ⊥r will lie on the tangent at vertex of the parabola.

$y = (x - 1)^2 - 3 - 1$

$(x - 1)^2 = (y + 4)$

Tangent at vertex of above parabola is $y + 4 = 0$.

Hindi. गुणधर्म से : लम्बपाद, परवलय से शीर्ष पर स्पर्श रेखा होगी।

$y = (x - 1)^2 - 3 - 1$

$(x - 1)^2 = (y + 4)$

परवलय के शीर्ष पर स्पर्श रेखा $y + 4 = 0$ है।

I-2. If F_1 & F_2 are the feet of the perpendiculars from the focii S_1 & S_2 of an ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ on the tangent at any point P on the ellipse, then $(S_1F_1).(S_2F_2)$ is equal to :

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ के किसी बिन्दु P पर खीचीं गई स्पर्श रेखा पर नाभियों S_1 तथा S_2 से डाले गये लम्बों के पाद यदि F_1 तथा F_2 है तो $(S_1F_1).(S_2F_2)$ बराबर है –

(A) 2 (B*) 3 (C) 4 (D) 5

Sol. $(S_1 F_1) \cdot (S_2 F_2) = b^2 = 3$

I-3. P & Q are corresponding points on the ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, and the auxiliary circle respectively. The normal at P to the ellipse meets CQ in R where C is centre of the ellipse. Then ℓ(CR) is

(A) 5 units (B) 6 units (C*) 7 units (D) 8 units

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ तथा इसके सहायक वृत्त पर संगत बिन्दु क्रमशः P तथा Q है। दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर अभिलम्ब CQ को बिन्दु R पर मिलता है जहाँ C दीर्घवृत्त का केन्द्र है। तब ℓ(CR) है –

(A) 5 इकाई (B) 6 इकाई (C) 7 इकाई (D) 8 इकाई

Sol. Property $\ell = a + b = 4 + 3 = 7$

Hindi. गुणधर्म $\ell = a + b = 4 + 3 = 7$

I-4. The equation of common tangent of $x^2 + y^2 = 2$ and $y^2 = 8x$ is

$x^2 + y^2 = 2$ और $y^2 = 8x$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –

(A*) $x - y + 2 = 0$ (B) $x + y + 1 = 0$

(C) $x - y + 1 = 0$ (D) $x + y - 2 = 0$

Sol. $c = \frac{a}{m} = \pm b\sqrt{1+m^2}$

$\frac{2}{m} = \sqrt{2}\sqrt{1+m^2}$

$2 = m^2(1 + m^2)$

$\Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0$

$m^4 + 2m^2 - m^2 - 2 = 0$

$(m^2 - 1) = 0$

$m = \pm 1$

$y = \pm x \pm 2$

$y = x + 2$

or $y = -x - 2$

I-5. The equation of common normal to the circle $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$ and parabola $y^2 = 4x$ is

वृत्त $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$ और परवलय $y^2 = 4x$ के उभयनिष्ठ अभिलम्ब का समीकरण है

(A) $y = 0$ (B) $2x - y = 12$ (C) $2x + y = 12$ (D*) All of the above उपरोक्त समीकरण

Sol. $y = mx - 2am - am^3$

$y = mx - 2m - m^3$

Passes through centre of circle (6,0)

$= 6m - 2m - m^3 \Rightarrow 4m - m^3 = 0$

$\Rightarrow m = 0, m = 2, m = -2$

I-6. Equation of common tangent to ellipse $5x^2 + 2y^2 = 10$, and hyperbola $11x^2 - 3y^2 = 33$ is

दीघवृत्त $5x^2 + 2y^2 = 10$, और अतिपरवलय $11x^2 - 3y^2 = 33$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –

(A) $y = \pm 3x \pm \sqrt{21}$ (B) $y = \pm x \pm 3$

(C*) $y = \pm 4x \pm \sqrt{37}$ (D) $3x \pm y = 12$

Sol. $c^2 = a^2m^2 + b^2 = a^2m - b^2$

$2m^2 + 5 = 3m^2 - 11$

$\Rightarrow m^2 = 16 = 3x^2 - 11$

$\Rightarrow y = \pm 4x \pm \sqrt{37}$

I-7. The equation of common tangent to the parabola $y^2 = 8x$ and hyperbola $3x^2 - y^2 = 3$ is

परवलय $y^2 = 8x$ और अतिपरवलय $3x^2 - y^2 = 3$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –

(A*) $2x \pm y + 1 = 0$ (B) $2x \pm y - 1 = 0$

(C) $x \pm 2y + 1 = 0$ (D) $x \pm 2y - 1 = 0$

Sol. $c = \dfrac{a}{m} = \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$\dfrac{2}{m} = \sqrt{m^2 - 3}$

$\Rightarrow 4 = m^2(m^2 - 3) \Rightarrow m^4 - 3m^2 - 4 = 0$

$(m^2 - 4)(m^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow m = \pm 2$

$y = \pm 2x \pm 1$

$\Rightarrow \pm y = 2x + 1$

I-8. $x - 2y + 4 = 0$ is a common tangent to $y^2 = 4x$ & $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Then the value of 'b' and the other common tangent are given by :

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ और $y^2 = 4x$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा $x - 2y + 4 = 0$ है। तब 'b' का मान तथा दूसरी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है –

(A*) $b = \sqrt{3}$; $x + 2y + 4 = 0$
(B) $b = 3$; $x + 2y + 4 = 0$
(C) $b = \sqrt{3}$; $x + 2y - 4 = 0$
(D) $b = \sqrt{3}$; $x - 2y - 4 = 0$

Sol. $2y = x + 4$

$y = \frac{x}{2}+2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{2}$

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$

$2 = \pm\sqrt{4m^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \pm\sqrt{4m^2+3}$

$\Rightarrow \frac{1}{m^2} = 4m^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad 4m^4 + 3m^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{1}{2}$

Hence अतः $y = -\frac{1}{2}x - 2$, $2y + x + y = 1$

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. Match the column

	Column – I		Column – II
(A)	If the mid point of a chord of the ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25} = 1$ is (0, 3), then length of the chord is $\frac{4k}{5}$, then k is	(p)	6
(B)	Eccentric angle of one of the points on the ellipse $x^2 + 3y^2 = 6$ at a distance 2 units from the centre of the ellipse is $\frac{k\pi}{4}$, then k is	(q)	8
(C)	If 'e' is eccentricity and ℓ is the length of latus rectum of the ellipse $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$, then $4(e + \ell)$ is	(r)	3
(D)	Sum of distances of a point on the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} = 1$ from the focii	(s)	16

Ans. (A) → (q), (B) → (r), (C) → (s), (D) → (q)

मिलान कीजिये।

	स्तम्भ - I		स्तम्भ - II
(A)	यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25} = 1$ की एक जीवा का मध्य बिन्दु (0, 3) है, तब जीवा की लम्बाई $\frac{4k}{5}$ है, तो k का मान होगा–	(p)	6
(B)	दीर्घवृत्त $x^2 + 3y^2 = 6$ के केन्द्र से 2 इकाई दूरी पर दीर्घवृत्त पर स्थित बिन्दुओं में से एक का उत्केन्द्रीय कोण $\frac{k\pi}{4}$ है, तो k का मान होगा–	(q)	8

(C) यदि दीर्घवृत्त $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$ की उत्केन्द्रता 'e' तथा नाभिलम्ब की लम्बाई ℓ है तब $4(e + \ell)$है– (r) 3

(D) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ के एक बिन्दु से नाभीय दूरियों का योग है (s) 16

Ans. (A) → (q), (B) → (r), (C) → (s), (D) → (q)

Sol. **(A)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow be = \frac{3}{5} \times 5 = 3$

$\frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 16}{5} = \frac{32}{5} = \frac{4k}{5} \Rightarrow k = 8$

(B) Any point of ellipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ is $\left(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta\right)$

माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ पर एक बिन्दु $\left(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta\right)$ है।

distance from origin $\sqrt{6\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 2$ इसकी मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{6\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $9x^2 + 5(y^2 - 6y + 9) = 45$ or $9x^2 + 5(y - 3)^2 = 45$

$\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Putting x = Y and y – 3 = X, the equation becomes $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{5} = 1$

$\therefore a^2 = 9,\ b^2 = 5 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$,

$\therefore 5 = 9(1 - e^2)$ or $1 - e^2 = \frac{5}{9}$ or $e^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$, $\therefore e = \frac{2}{3}$

latus rectum $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.5}{3} = \frac{10}{3}$

Hindi: $9x^2 + 5(y^2 - 6y + 9) = 45$ या $9x^2 + 5(y - 3)^2 = 45$

$\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

x = Y और y – 3 = X रखने पर समीकरण $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{5} = 1$

$\therefore a^2 = 9,\ b^2 = 5$

$\because b^2 = a^2(1 - e^2)$,

$\therefore 5 = 9(1 - e^2)$ या $1 - e^2 = \frac{5}{9}$ या $e^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$,

$\therefore e = \frac{2}{3}$

नाभिलम्ब $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.5}{3} = \frac{10}{3}$

(D) By definition of ellipse
दीर्घवृत्त की परिभाषा से

2. AB is a chord of the parabola $y^2 = 4ax$ joining $A(at_1^2, 2at_1)$ and $B(at_2^2, 2at_2)$. Match the following

Column – I		**Column – II**	
(A)	AB is a normal chord	(p)	$t_2 = -t_1 + 2$
(B)	AB is a focal chord	(q)	$t_2 = -\frac{4}{t_1}$

(C) AB subtends 90º at (0, 0) (r) $t_2 = -\frac{1}{t_1}$

(D) AB is inclined at 45º to the axis of parabola (s) $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

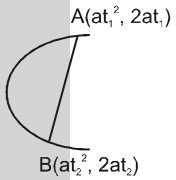
परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दुओं $A(at_1^2, 2at_1)$ एवं $B(at_2^2, 2at_2)$ को मिलाने वाली जीवा AB है। मिलान कीजिए–

स्तम्भ – I		स्तम्भ – II	
(A)	AB अभिलम्ब जीवा है–	(p)	$t_2 = -t_1 + 2$
(B)	AB नाभीय जीवा है–	(q)	$t_2 = -\frac{4}{t_1}$
(C)	AB बिन्दु (0,0) पर समकोण बनाती है–	(r)	$t_2 = -\frac{1}{t_1}$
(D)	AB परवलय के अक्ष से 45º कोण पर झुकी है–	(s)	$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

Ans. (A) → (s), (B) → (r), (C) → (q), (D) → (p)

Sol. Equation AB

$$y - 2at_1 = \frac{2}{t_1 + t_2}(x - at_1^2)$$



(A) AB is a normal chord $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

(B) AB is a focal chord $t_1t_2 = -1$

(C) AB subtends 90º at the origin then $= \frac{2at_1 - 0}{at_1^2 - 0} \times \frac{2at_2 - 0}{at_2^2 - 0} = -1$

$$\frac{2}{t_1} \cdot \frac{2}{t_2} = -1$$

$$t_1t_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad t_2 = -\frac{4}{t_1}$$

(D) AB is inclinded at 45° to the axis then slope $\frac{2}{t_1 + t_2} = 1$

$$t_1 + t_2 = 2$$
$$t_2 = -t_1 + 2$$

Hindi. AB का समीकरण

$$y - 2at_1 = \frac{2}{t_1 + t_2}(x - at_1^2)$$

(A) AB अभिलम्ब जीवा है। $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

(B) AB नाभिय जीवा है। $t_1t_2 = -1$

(C) AB मूल बिन्दु पर 90º का कोण बनाती हो, तो $= \frac{2at_1 - 0}{at_1^2 - 0} \times \frac{2at_2 - 0}{at_2^2 - 0} = -1$

$$\frac{2}{t_1} \cdot \frac{2}{t_2} = -1$$

$$t_1t_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad t_2 = -\frac{4}{t_1}$$

(D) AB जीवा अक्ष से 45° कोण बनाती हो, तो प्रवणता $\frac{2}{t_1 + t_2} = 1$

$$t_1 + t_2 = 2$$
$$t_2 = -t_1 + 2$$

3. A tangent having slope $-\frac{4}{3}$ touches the ellipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$ at point P and intersects the major and minor axes at A & B respectively, O is the centre of the ellipse

Column - I		**Column - II**	
(A)	Distance between the parallel tangents having slopes $-\frac{4}{3}$, is	(p)	24
(B)	Area of ΔAOB is	(q)	7/24
(C)	If the tangent in first quadrant touches the ellipse at (h, k) then value of hk is	(r)	48/5
(D)	If equation of the tangent intersecting positive axes is $\ell x + my = 1$, then $\ell + m$ is equal to	(s)	12

Ans. (A) $\rightarrow$ (r), (B) $\rightarrow$ (p), (C) $\rightarrow$ (s), (D) $\rightarrow$ (q)

Sol. (A) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$

$$y = -\frac{4}{3}x \pm \sqrt{18\times\frac{16}{9}+32} \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x \pm 8$$

$$\text{Distance between tangent} = \frac{16}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{16\times 3}{5} = \frac{48}{5}$$

(B) $y = -\frac{4}{3}x + 8$ A(6, 0) B (0, 8)

Area of $\Delta AOB = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

(C) point of contact $\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

product of coordinates $= -\frac{a^2b^2m}{a^2m^2+b^2} = -\frac{18\times 32\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{64} = 12$

(D) $4x + 3y = 24$ $\ell = \frac{4}{24}$ $m = \frac{3}{24}$

$\frac{4}{24}x + \frac{3}{24}y = 1$ $\ell + m = \frac{7}{24}$

एक स्पर्श रेखा जिसकी प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32} = 1$ को बिन्दु P पर स्पर्श करती है तथा दीर्घ एवं लघु अक्ष को क्रमशः A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है। दीर्घवृत्त का केन्द्र O है।

	स्तम्भ – I		स्तम्भ – II
(A)	समान्तर स्पर्श रेखाओं जिनकी प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है, के मध्य दूरी है –	(p)	24
(B)	ΔAOB का क्षेत्रफल है –	(q)	7/24
(C)	यदि प्रथम चतुर्थांश में स्पर्श रेखा, दीर्घवृत्त को (h, k) पर स्पर्श करती है, तो hk का मान है –	(r)	48/5
(D)	यदि धनात्मक अक्ष को प्रतिच्छेद करने वाली स्पर्श रेखा का समीकरण $\ell x + my = 1$ है, तो $\ell + m$ का मान होगा –	(s)	12

Ans. (A) $\to$ (r), (B) $\to$ (p), (C) $\to$ (s), (D) $\to$ (q)

Sol. (A) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$

$y = -\frac{4}{3}x \pm \sqrt{18\times\frac{16}{9}+32} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \pm 8$

अतः स्पर्श रेखाओं के मध्य दूरी $= \frac{16}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{16\times 3}{5} = \frac{48}{5}$

(B) $\because$ स्पर्श रेखा का समीकरण

$y = -\frac{4}{3}x + 8 \Rightarrow$ A(6, 0), B (0, 8)

$\therefore \Delta AOB$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

(C) स्पर्श बिन्दु $\equiv (h, k) \equiv \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

स्पर्श बिन्दु के निर्देशांको का गुणनफल $= h.k = -\frac{a^2b^2m}{a^2m^2+b^2} = -\frac{18\times 32\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{64} = 12$

(D) $4x + 3y = 24$ $\ell = \frac{4}{24}$ $m = \frac{3}{24}$

$\frac{4}{24}x + \frac{3}{24}y = 1$ $\qquad \ell + m = \frac{7}{24}$

4. **Column - I** **Column - II**

(A) Number of positive integral values of b for which tangent parallel to line y = x + 1 can be drawn to hyperbola $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is — (p) 16

(B) The equation of the hyperbola with vertices (3, 0) and (–3, 0) and semi-latusrectum 4, is given by is $4x^2 - 3y^2 = 4k$, then k = — (q) 2

(C) The product of the lengths of the perpendiculars from the two focii on any tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{3} = 1$ is $\sqrt{k}$, then k is — (r) 4

(D) An equation of a tangent to the hyperbola, $16x^2 - 25y^2 - 96x + 100y - 356 = 0$ which makes an angle $\frac{\pi}{4}$ with the transverse axis is $y = x + \lambda$, $(\lambda > 0)$, then 2λ is — (s) 9

Sol. (A) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$y = x \pm \sqrt{5 - b^2}$

$\therefore$ b = 0, ±1, ±2

b can not be zero

$\therefore$ four values are possible

(B) We have, a = 3 and $\frac{b^2}{a} = 4 \Rightarrow b^2 = 12$

Hence, the equation of the hyperbola is $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = 36$

(C) The product of the lengths of the perpendiculars from the two focii on any tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{3} = 1$ is 3

$\therefore$ $3 = \sqrt{k}$, hence k = 9

(D) Equation of the hyperbola can be written as $\frac{X^2}{5^2} - \frac{Y^2}{4^2} = 1$

where X = x – 3 and Y = y – 2.

$\therefore$ tangent $Y = X \pm \sqrt{25 - 16}$

$\Rightarrow$ y = x + 2 or y = x – 4

स्तम्भ – I **स्तम्भ – II**

(A) रेखा y = x + 1 के समान्तर अतिपरवलय $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा खींचने के लिए b के धनात्मक पूर्णांक मानों की संख्या है – — (p) 16

(B) उस अतिपरवलय का समीकरण जिसके शीर्ष (3, 0) तथा (–3, 0) तथा अर्धनाभि लम्ब 4 है, $4x^2 - 3y^2 = 4k$ है, तो k = — (q) 2

(C) अतिपरवलय $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{3} = 1$ की किसी स्पर्श रेखा पर दो नाभियो से डाले गए लम्ब की लम्बाईयों का गुणनफल $\sqrt{k}$ हो, तो k का मान है – — (r) 4

(D) अतिपरवलय $16x^2 - 25y^2 - 96x + 100y - 356 = 0$ की उस स्पर्श रेखा — (s) 9

का समीकरण जो अनुप्रस्थ अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाती है,

$y = x + \lambda$ है $(\lambda > 0)$, तो $2\lambda =$

Ans. (A) - (q), (B) - (s), (C) - (s), (D) - (r)

Sol. (A) $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$

$y = x \pm \sqrt{5 - b^2}$

$\therefore$ $b = 0, \pm 1, \pm 2$

$b = 0, -1, -2$ rejected. $b = 1, 2 \Rightarrow$ two values

b शून्य नहीं हो सकता

$\therefore$ चार मान संभव है।

$b = 0, -1, -2$ rejected. $b = 1, 2 \Rightarrow$ two values

(B) हम जानते है, $a = 3$ तथा $\frac{b^2}{a} = 4 \quad \Rightarrow b^2 = 12$

अतः अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = 36$

(C) अतिपरवलय $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{3} = 1$ की किसी स्पर्श रेखा पर दो नाभियों से डाले गए लम्ब की लम्बाईयों का गुणनफल 3 है।

$\therefore$ $3 = \sqrt{k}$, अतः $k = 9$

(D) अतिपरवलय की समीकरण $\frac{X^2}{5^2} - \frac{Y^2}{4^2} = 1$

जहाँ $X = x - 3$ तथा $Y = y - 2$.

$\therefore$ स्पर्श रेखा $Y = X \pm \sqrt{25 - 16}$

$\Rightarrow$ $y = x + 2$ या $y = x - 4$

Exercise-2

✍ ***Marked questions are recommended for Revision.***
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. The vertex of a parabola is the point (a, b) and latus rectum is of length 1. If the axis of the parabola is along the positive direction of y-axis, then its equation is :
परवलय का शीर्ष बिन्दु (a, b) है तथा नाभिलम्ब की लम्बाई 1 है। यदि परवलय की अक्ष, y-अक्ष की धनात्मक दिशा की अनुदिश है तब इसकी समीकरण है–

(A) $(x + a)^2 = \frac{1}{2}(2y - 2b)$ (B*) $(x - a)^2 = \frac{1}{2}(2y - 2b)$

(C) $(x + a)^2 = \frac{1}{4}(2y - 2b)$ (D) $(x - a)^2 = \frac{1}{8}(2y - 2b)$

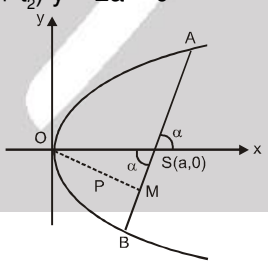
Sol. The equation of the parabola referred to its vertex as the origin is $X^2 = Y$; where $x = X + a$ and $y = Y + b$.
So the equation of the parabola refered to the point (a, b) as the vertex is
$(x - a)^2 = 1(y - b) \Rightarrow (x - a)^2 = (1/2)(2y - 2b)$

Hindi: परवलय जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है, का समीकरण $X^2 = Y$; जहाँ $x = X + a$ और $y = Y + b$. इसलिए परवलय जिसका शीर्ष (a, b) है, का समीकरण
$(x - a)^2 = 1(y - b) \Rightarrow (x - a)^2 = (1/2)(2y - 2b)$

2. ✍ Length of the focal chord of the parabola $y^2 = 4ax$ at a distance p from the vertex is:
परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष से p दूरी पर स्थित नाभीय जीवा की लम्बाई है–

(A) $\frac{2a^2}{p}$ (B) $\frac{a^3}{p^2}$ (C*) $\frac{4a^3}{p^2}$ (D) $\frac{p^2}{a}$

Sol. Distance of focal chord from (0, 0) is p
equation of chord ; $2x - (t_1 + t_2)y + 2a\,t_1 t_2 = 0$
$2x - (t_1 + t_2)y - 2a = 0$ ..... (i)



so perpendicular length from (0, 0)

$$\left|\frac{2a}{\sqrt{4+\left(t_1-\frac{1}{t_1}\right)^2}}\right| = p \Rightarrow \left|\frac{2a}{\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right)}\right| = p \Rightarrow \left(t_1+\frac{1}{t_1}\right) = \frac{2a}{p}$$

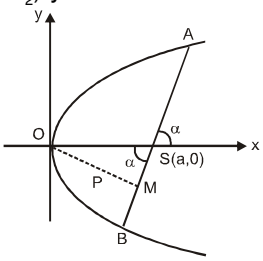
Now length of focal chord is $= a\left(t_1+\frac{1}{t}\right)^2$

$= a\frac{4a^2}{p^2} = \frac{4a^3}{p^2}$

Hindi (0, 0) से नाभिय दूरी p है

जीवा का समीकरण $2x - (t_1 + t_2)\, y + 2a\, t_1\, t_2 = 0$

$2x - (t_1 + t_2)\, y - 2a = 0$ ..... (i)



अतः (0, 0) से लम्बवत् दूरी

$$\left|\frac{2a}{\sqrt{4+\left(t_1-\frac{1}{t_1}\right)^2}}\right| = p \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2a}{\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right)}\right| = p \quad \Rightarrow \left(t_1+\frac{1}{t_1}\right) = \frac{2a}{p}$$

नाभिय जीवा की दूरी $= a\left(t_1+\frac{1}{t}\right)^2$

$= a\,\frac{4a^2}{p^2} = \frac{4a^3}{p^2}$

Alter :

Length of AB = $4a\,\text{cosec}^2\,\alpha$

AB की लम्बाई = $4a\,\text{cosec}^2\,\alpha$

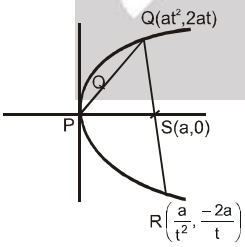
$\because\ \sin\alpha = \frac{P}{a} = \frac{4a^3}{P^2}$

3. The triangle PQR of area 'A' is inscribed in the parabola $y^2 = 4ax$ such that the vertex P lies at the vertex of the parabola and the base QR is a focal chord. The modulus of the difference of the ordinates of the points Q and R is:

परवलय $y^2 = 4ax$ में क्षेत्रफल A का त्रिभुज PQR इस प्रकार बनाया जाता है कि P परवलय के शीर्ष पर रहता हो और आधार QR नाभीय जीवा हो। बिन्दुओं Q और R की कोटियों के अन्तर का मापांक है–

(A) $\frac{A}{2a}$ (B) $\frac{A}{a}$ (C*) $\frac{2A}{a}$ (D) $\frac{4A}{a}$

Sol.



Equation of QR is (QR का समीकरण है) $2x - (t_1 + t_2)\, y + 2at_1t_2 = 0$

$$2x - \left(t - \frac{1}{t}\right) - 2a = 0 \qquad ...(1)$$

⊥r distance from (0, 0) to the line (1) is रेखा (1) पर (0, 0) से लम्बवत् दुरी है।

$$\left|\frac{2a}{4+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\right| = \left|\frac{2a}{\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right|$$

Area = $\frac{1}{2} \times QR \times \perp r$ distance from origin क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times QR \times \perp r$

$$= \frac{1}{2} a\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 \times \frac{2a}{\left(t+\frac{1}{t}\right)}$$

$$A = a^2\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Now the difference of ordinates अब कोटियों में अन्तर

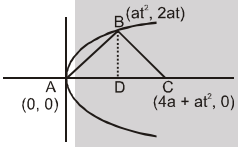
$$= \left|2at+\frac{2a}{t}\right| = \left|2a\left(t+\frac{1}{t}\right)\right| = 2a\frac{A}{a^2} = \frac{2A}{a}$$

4. AB is a chord of the parabola $y^2 = 4ax$ with vertex at A. BC is drawn perpendicular to AB meeting the axis at C. The projection of BC on the axis of the parabola is

शीर्ष A वाले परवलय $y^2 = 4ax$ की एक जीवा AB है। AB के लम्बवत् BC खींची जाती है जो अक्ष को C पर मिलती है। परवलय के अक्ष पर BC का प्रक्षेप है–

(A) a (B) 2a (C*) 4a (D) 8a

Sol.



Slope of AB = $\frac{2}{t}$ AB की प्रवणता = $\frac{2}{t}$

$BC = -\frac{t}{2}$

equation of BC ;BC का समीकरण

$y - 2at = -\frac{t}{2}(x - at^2)$

put $y = 0$ $y = 0$ रखने पर

$x = 4a + at^2$

in Δ BDC त्रिभुज BDC में

$DC^2 = BC^2 - BD^2 = 16a^2 + 4a^2t^2 - 4a^2t^2 = 16a^2$

$DC = 4a$

5. If P_1Q_1 and P_2Q_2 are two focal chords of the parabola $y^2 = 4ax$. then the chords P_1P_2 and Q_1Q_2 intersect on

(A) tangent at the vertex of the parabola (B*) the directrix of the parabola

(C) at $x = -2a$ (D) $y = 2a$ and $x = -2a$

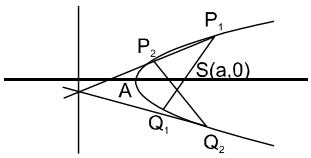
यदि P_1Q_1 और P_2Q_2 परवलय $y^2 = 4ax$ की दो नाभीय जीवाएं है। तब जीवाएं P_1P_2 और Q_1Q_2 किस पर प्रतिच्छेद करती है।

(A) परलवय के शीर्ष पर स्पर्श रेखा पर (B*) परवलय की नियता पर

(C) $x = -2a$ पर (D) $y = 2a$ और $x = -2a$ पर

Sol. Let co-ordinate of P_1 and P_2 be $(at_1^2, 2at_1)$ and $(at_2^2, 2at_2)$ then co-ordinate of Q_1 and Q_2 are

$\left(\frac{a}{t_1^2}, \frac{-2a}{t_1}\right)$ and $\left(\frac{a}{t_2^2}, \frac{-2a}{t_2}\right)$ respectively. ($\because$ P_1Q_1 and P_2Q_2 are focal chords)



$\therefore$ Equation of P_1P_2 is

$y(t_1 + t_2) = 2(x + at_1t_2)$ ...(i)

replacing t_1 by – 1/t then euation of Q_1Q_2 is

$$y\left(-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=2\left\{x+a\left(-\frac{1}{t_1}\right)\left(-\frac{1}{t_2}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$ $-y(t_1 + t_2) = 2(x\, t_1t_2 + a)$ ...(ii)

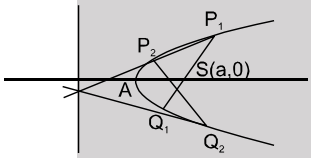
adding (i) & (ii) we get

$0 = 2(1 + t_1t_2)(x + a)$

$2(1 + t_1t_2) \neq 0$

$x + a = 0$

Hindi. माना P_1 और P_2 के निर्देशांक और हे



तब Q_1 और Q_2 के निर्देशांक क्रमशः

$\left(\frac{a}{t_1^2},\frac{-2a}{t_1}\right)$ और $\left(\frac{a}{t_2^2},\frac{-2a}{t_2}\right)$ है।

($\because$ P_1Q_1 और P_2Q_2 नाभीय जीवाएं है।)

$\therefore$ P_1P_2 का समीकरण है।

$y(t_1 + t_2) = 2(x + at_1t_2)$ ...(i)

t_1 को – 1/t से हटाने पर Q_1Q_2 का समीकरण है।

$$y\left(-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=2\left\{x+a\left(-\frac{1}{t_1}\right)\left(-\frac{1}{t_2}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$ $-y(t_1 + t_2) = 2(x\, t_1t_2 + a)$ ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

$0 = 2(1 + t_1t_2)(x + a)$

$2(1 + t_1t_2) \neq 0$

$x + a = 0$

6. The vertex of the locus of a point that divides a chord of slope 2 of the parabola $y^2 = 4x$ internally in the ratio 1 : 2 is

परवलय $y^2 = 4x$ की प्रवणता 2 की जीवा को 1 : 2 में अन्तविभाजित करने वाले बिन्दुओं के बिन्दुपथ का शीर्ष है–

(A) $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ (B) $\left(\frac{8}{9},\frac{1}{9}\right)$ (C*) $\left(\frac{2}{9},\frac{8}{9}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$

Sol. Let $P\left(t_1^2,2t_1\right)$ and $Q\left(t_2^2,2t_2\right)$ be exremities of the chord with slope 2.

$\therefore$ $\frac{2t_1-2t_2}{t_1^2-t_2^2} = 2$ $\Rightarrow$ $t_1 + t_2 = 1$ ...(i)

Let R (h, k) be co-ordinates of the point which divides PQ in the ratio 1:2 then

$\Rightarrow$ $h = \frac{2t_1^2+t_2^2}{3}$ and $k = \frac{4t_1+2t_2}{3}$

or $3h = 2t_1^2 + (1 - t_1)^2$ and $3k = 4t_1 + 2(1 - t_1)$ {from equation (i)}

Eliminating t_1, $3h = 3\left(\frac{3k-2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3k-2}{2}\right) + 1$

or $\quad 9k^2 - 16k - 4h + 8 = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - \frac{16k}{9} - \frac{4h}{9} + \frac{8}{9} = 0$

$\Rightarrow \quad \left(k - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(h - \frac{2}{9}\right)$

$\therefore$ Locus of R(h, k) is $\left(y - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(x - \frac{2}{9}\right)$

which is a parabola with vertex $\left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)$

Hindi. माना $P(t_1^2, 2t_1)$ और $Q(t_2^2, 2t_2)$ प्रवणता 2 की जीवा के सिरे है।

$\therefore \quad \frac{2t_1 - 2t_2}{t_1^2 - t_2^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = 1 \quad ...(i)$

माना R (h, k) बिन्दु के निर्देशांक है जो PQ को 1 : 2 में अन्तविभाजित करता है।

$\Rightarrow \quad h = \frac{2t_1^2 + t_2^2}{3}$ और $k = \frac{4t_1 + 2t_2}{3}$ या

$3h = 2t_1^2 + (1 - t_1)^2$ और $3k = 4t_1 + 2(1 - t_1)$ {समीकरण (i) से}

t_1 को विलोपित करने पर, $3h = 3\left(\frac{3k-2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3k-2}{2}\right) + 1$

या $\quad 9k^2 - 16k - 4h + 8 = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - \frac{16k}{9} - \frac{4h}{9} + \frac{8}{9} = 0$

$\Rightarrow \quad \left(k - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(h - \frac{2}{9}\right)$

$\therefore$ R(h, k) का बिन्दुपथ है $\left(y - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(x - \frac{2}{9}\right)$

which is a parabola with vertex $\left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)$

जो परवलय है जिसका शीर्ष $\left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)$

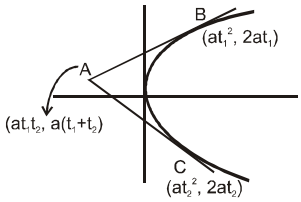
7. AB, AC are tangents to a parabola $y^2 = 4ax$. p_1, p_2 & p_3 are the lengths of the perpendiculars from A, B & C respectively on any tangent to the curve, then p_2, p_1, p_3 are in:

(A) A.P. (B*) G.P. (C) H.P. (D) none of these

AB और AC परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखाएँ है। बिन्दुओं A, B और C से वक्र की किसी स्पर्श रेखा पर लम्बों की लम्बाइयाँ क्रमशः p_1, p_2 व p_3 हो, तो p_2, p_1, p_3 किस श्रेढ़ी में है–

(A) स. श्रे. (B) गु. श्रे. (C) ह. श्रे. (D) इनमें से कोई नहीं

Sol.



Let the tangent is x = 0

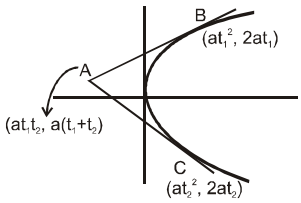
then, $\quad p_2 = |at_1^2|$

$p_3 = |at_2^2|$

$p_1 = |at_1t_2|$

$\therefore$ p_2, p_1, p_3 are in G.P.

Hindi.



माना स्पर्श रेखा $x = 0$

तब, $p_2 = |at_1^2|$

$p_3 = |at_2^2|$

$p_1 = |at_1t_2|$

$\therefore$ p_2, p_1, p_3 गुणोत्तर श्रेणी में है।

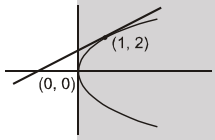
8. The mirror image of the parabola $y^2 = 4x$ in the tangent to the parabola at the point (1, 2) is

परवलय $y^2 = 4x$ के बिन्दु (1, 2) पर खींची गई स्पर्श रेखा में परवलय का दर्पण प्रतिबिम्ब है–

(A) $(x - 1)^2 = 4(y - 2)$ (B) $(x + 3)^2 = 4(y + 2)$

(C*) $(x + 1)^2 = 4(y - 1)$ (D) $(x - 1)^2 = 4 (y - 1)$

Sol.



Equation of tangent at(1, 2) is

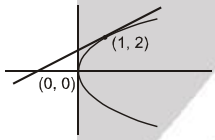
$2y = 2(x + 1)$

$x - y + 1 = 0$ ..... (i)

image of (0, 0) in the line (i) is (– 1, 1)

$\therefore$vertex of required parabola will be (– 1, 1)

Hindi.



बिन्दु (1, 2) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$2y = 2(x + 1)$

$x - y + 1 = 0$ ..... (i)

(0, 0) का रेखा (i) में प्रतिबिम्ब (– 1, 1) है।

$\therefore$ अभीष्ट परवलय का शीर्ष (– 1, 1) है।

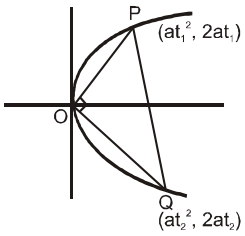
9. A normal chord of the parabola subtending a right angle at the vertex makes an acute angle θ with the x – axis, then θ =

(A) arc tan 2 (B*) arc tan $\sqrt{2}$ (C) arc cot $\sqrt{2}$ (D) arc cot2

परवलय के शीर्ष पर समकोण बनाने वाली अभिलम्ब जीवा, अक्ष के साथ न्यून कोण θ बनाती हो,तो θ =

(A) arc tan 2 (B*) arc tan $\sqrt{2}$ (C) arc cot $\sqrt{2}$ (D) arc cot2

Sol.



Slope of OP $\propto$ slope of OQ OP की प्रवणता $\propto$ OQ की प्रवणता

$t_1 t_2 = -4$ .....(1)

also तथा $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

$\frac{-4}{t_1} = \frac{-t_1^2 - 2}{t_1}$

$t_1^2 = 2$

$t_1 = \pm \sqrt{2}$

slope of normal at P = $-t_1$ $\Rightarrow$ $\tan\theta = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{2})$

P पर अभिलम्ब की प्रवणता = $-t_1$ $\Rightarrow$ $\tan\theta = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{2})$

10. If two normals to a parabola $y^2 = 4ax$ intersect at right angles then the chord joining their feet passes through a fixed point whose co-ordinates are:

(A) $(-2a, 0)$ (B*) $(a, 0)$ (C) $(2a, 0)$ (D) $(-a, 0)$

यदि परवलय $y^2 = 4ax$ के दो अभिलम्ब समकोण पर प्रतिच्छेद करते हो, तो उनके पादों को मिलाने वाली जीवा एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है, तो जिसके निर्देशांक है–

(A) $(-2a, 0)$ (B) $(a, 0)$ (C) $(2a, 0)$ (D) $(-a, 0)$

Sol. $y^2 = 4ax$ .....(i)

$\because$ slopes of the two normals at the points $P(t_1)$ and $Q(t_2)$ are $-t_1$ and $-t_2$ respectively

$\because$ $(-t_1)(-t_2) = -1$ $\Rightarrow$ $t_1t_2 = -1$

$\because$ equation of chord joining $P(t_1)$ and $Q(t_2)$ is

$2x - y(t_1 + t_2) + 2at_1t_2 = 0$

$\Rightarrow$ $2x - y(t_1 + t_2) - 2a = 0$

$\Rightarrow$ $(2x - 2a) - (t_1 + t_2)(y) = 0$ .....(ii)

(ii) will always pass through (a, 0)

Hindi. $y^2 = 4ax$ .....(i)

$\because$ बिन्दु $P(t_1)$ एवं $Q(t_2)$ पर अभिलम्बों की प्रवणताएँ क्रमशः $-t_1$ एवं $-t_2$ है।

$\because$ $(-t_1)(-t_2) = -1$ $\Rightarrow$ $t_1t_2 = -1$

$\because$ बिन्दु $P(t_1)$ एवं $Q(t_2)$ को मिलाने वाली जीवा का समीकरण

$2x - y(t_1 + t_2) + 2at_1t_2 = 0$

$\Rightarrow$ $2x - y(t_1 + t_2) - 2a = 0$ $\Rightarrow$ $(2x - 2a) - (t_1 + t_2)(y) = 0$ .....(ii)

जो कि सदैव (a, 0) से गुजरती है।

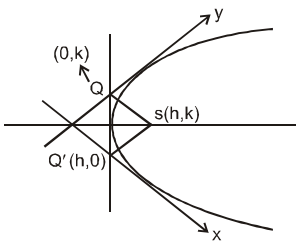
11. If a parabola whose length of latus rectum is 4a touches both the coordinate axes then the locus of its focus is

यदि कोई परवलय जिसके नाभिलम्ब की लम्बाई 4a इकाई है, निर्देशी अक्षों को स्पर्श करता हो, तो इसकी नाभि का बिन्दुपथ है–

(A) $xy = a^2(x^2 + y^2)$ (B*) $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$

(C) $x^2 - y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (D) $x^2y^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Sol.



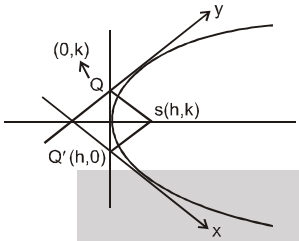
$\perp$r distance from s to the line QQ′ = a

line QQ′ : $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$

⊥r from focus to any tangent meet the tangent at vertex.

So $a = \left|\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{k^2}}}\right| \Rightarrow \dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{a^2}$ so locus is $a^2(x^2+y^2)=x^2y^2$

Hindi.



s से रेखा QQ′ पर लम्बवत् दूरी = a

रेखा QQ′ : $\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}=1$

किसी स्पर्श रेखा पर नाभि से लम्बवत् दूरी, शीर्ष पर स्पर्श रेखा को मिलती है।

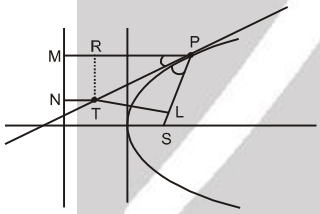
इसलिए $a = \left|\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{k^2}}}\right| \Rightarrow \dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{a^2}$ इसलिए बिन्दुपथ $a^2(x^2+y^2)=x^2y^2$

12. T is a point on the tangent to a parabola $y^2 = 4ax$ at its point P. TL and TN are the perpendiculars on the focal radius SP and the directrix of the parabola respectively. Then:

परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा पर कोई बिन्दु T स्थित है। TL और TN क्रमशः नाभीय त्रिज्या SP और परवलय की नियता पर लम्ब हो, तो–

(A) SL = 2 (TN) (B) 3 (SL) = 2 (TN) (C*) SL = TN (D) 2 (SL) = 3 (TN)

Sol.



Triangles PLT and PRT are congruent

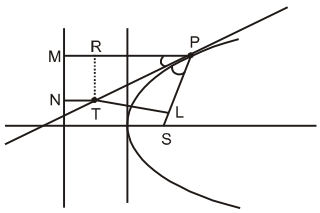
∴ PL = PR

and since PS = PM

⇒ SL = RM

SL = TN

Hindi.



त्रिभुज PLT एवं PRT सर्वांगसम है।

∴ PL = PR

चूँकि PS = PM

⇒ SL = RM

SL = TN

13. In the parabola $y^2 = 4ax$, the locus of middle points of all chords of constant length c is
परवलय $y^2 = 4ax$ में अचर लम्बाई c की सभी जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–

(A) $(4ax - y^2)(y^2 - 4a^2) = a^2c^2$ (B) $(4ax + y^2)(y^2 + 4a^2) = a^2c^2$
(C) $(4ax + y^2)(y^2 - 4a^2) = a^2c^2$ (D*) $(4ax - y^2)(y^2 + 4a^2) = a^2c^2$

Sol. Given $|AB| = c$

Let $A\left(at_1^2, 2at_1\right)$ and $B\left(at_2^2, 2at_2\right)$ If P(h, k) be the middle point of AB then

$$(h, k) = \left(\frac{at_1^2 + at_2^2}{2}, \frac{2at_1 + 2at_2}{2}\right)$$

or $\frac{2h}{a} = t_1^2 + t_2^2$ and $\frac{k}{a} = t_1 + t_2$

or $\frac{2h}{a} = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2$ or $2t_1t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{2h}{a}$ or $t_1t_2 = \frac{k^2 - 2ah}{2a^2}$ and $t_1 + t_2 = \frac{k}{a}$

since $|AB| = c$

or $\left(at_1^2 - at_2^2\right)^2 + (2at_1 - 2at_2)^2 = c^2$ $\Rightarrow$ $a^2(t_1 - t_2)^2\{(t_1 + t_2)^2 + 4\} = c^2$

$\Rightarrow$ $a^2\{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2\}\{(t_1 + t_2)^2 + 4\} = c^2$ $\Rightarrow$ $a^2\left\{\frac{k^2}{a^2} - \frac{4\left(k^2 - 2ah\right)}{2a^2}\right\}\left\{\frac{k^2}{a^2} + 4\right\} = c^2$

$\Rightarrow$ $a^2\left\{\frac{k^2 - 2k^2 + 4ah}{a^2}\right\}\left\{\frac{k^2 + 4a^2}{a^2}\right\} = c^2$ $\Rightarrow$ $(4ah - k^2)(k^2 + 4a^2) = a^2c^2$

Hence locus of mid point of AB is $(4ax - y^2)(y^2 + 4a^2) = a^2c^2$

Hindi: दिया गया है। $|AB| = c$

माना $A\left(at_1^2, 2at_1\right)$ and $B\left(at_2^2, 2at_2\right)$

यदि P(h, k), AB का मध्य बिन्दु है तब

$$(h, k) = \left(\frac{at_1^2 + at_2^2}{2}, \frac{2at_1 + 2at_2}{2}\right)$$

या $\frac{2h}{a} = t_1^2 + t_2^2$ and $\frac{k}{a} = t_1 + t_2$

या $\frac{2h}{a} = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2$ या $2t_1t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{2h}{a}$ या $t_1t_2 = \frac{k^2 - 2ah}{2a^2}$ and $t_1 + t_2 = \frac{k}{a}$

चूंकि $|AB| = c$

या $\left(at_1^2 - at_2^2\right)^2 + (2at_1 - 2at_2)^2 = c^2$ $\Rightarrow$ $a^2(t_1 - t_2)^2\{(t_1 + t_2)^2 + 4\} = c^2$

$\Rightarrow$ $a^2\{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2\}\{(t_1 + t_2)^2 + 4\} = c^2$ $\Rightarrow$ $a^2\left\{\frac{k^2}{a^2} - \frac{4\left(k^2 - 2ah\right)}{2a^2}\right\}\left\{\frac{k^2}{a^2} + 4\right\} = c^2$

$\Rightarrow$ $a^2\left\{\frac{k^2 - 2k^2 + 4ah}{a^2}\right\}\left\{\frac{k^2 + 4a^2}{a^2}\right\} = c^2$ $\Rightarrow$ $(4ah - k^2)(k^2 + 4a^2) = a^2c^2$

अतः AB के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ$(4ax - y^2)(y^2 + 4a^2) = a^2c^2$

14. Through the vertex 'O' of the parabola $y^2 = 4ax$, variable chords OP and OQ are drawn at right angles. If the variable chord PQ intersects the axis of x at R, then the distance OR is equal to

(A) 2a (B) 3a (C*) 4a (D) 8a

परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष 'O' से जाने वाली चर जीवाएँ OP एवं OQ समकोण बनाते हुए खींची जाती है। यदि चर जीवा PQ, x-अक्ष को बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करती है, तो सिद्ध कीजिए कि दुरी QR परवलय के नाभिलम्ब के बराबर है।

Sol. Let the equation of line PQ be $y = mx + c$
by homogenization

$y^2 = 4ax\left(\frac{y-mx}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 + \frac{4amx^2}{c} - \frac{4axy}{c} = 0$

It is the equation of $\perp^r$ lines passing through 0(0, 0), then coefficient of x^2 + coefficient of $y^2 = 0$

Hence $1 + \frac{4am}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{c} = -\frac{1}{4a}$ .....(1)

$y = mx + c$ cuts the x-axis

at $R\left(-\frac{c}{m}, 0\right) \quad \Rightarrow \quad OR = -\frac{c}{m} = 4a$ [from (i)]

Hence OR = 4a = Latus Rectum

Hindi. माना रेखा PQ का समीकरण $y = mx + c$ है

समघातीय करने पर

$y^2 = 4ax, \left(\frac{y-mx}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 + \frac{4amx^2}{c} - \frac{4axy}{c} = 0$

जो कि O(0, 0) से गुजरने वाली लम्बवत् रेखा का समीकरण है।

अतः $1 + \frac{4am}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{c} = -\frac{1}{4a}$ .....(1)

$y = mx + c$ x-अक्ष को $R\left(-\frac{c}{m}, 0\right)$ पर काटती है।

अतः (1) से OR = 4a = नाभिलम्ब

15. From the focus of the parabola, $y^2 = 8x$ as centre, a circle is described so that a common chord of the curves is equidistant from the vertex & focus of the parabola. The equation of the circle is

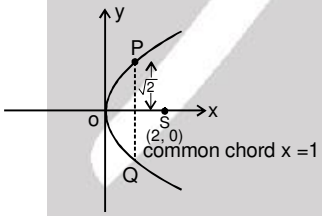
(A*) $(x-2)^2 + y^2 = 9$ (B) $(x-2)^2 + y^2 = 3$

(C) $(x-2)^2 + y^2 = 2$ (D) $(x-2)^2 + y^2 = 1$

परवलय $y^2 = 8x$ की नाभि को केन्द्र मानकर एक वृत्त इस प्रकार बनाया जाता है कि वक्र की एक उभयनिष्ठ जीवा परवलय की नाभि एवं शीर्ष से समान दूरी पर हो। वृत्त का समीकरण है–

Ans. $(x-2)^2 + y^2 = 9$

Sol



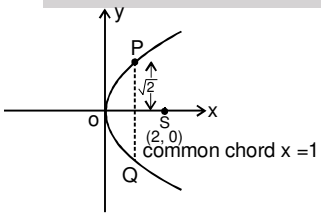
$\because$ $y^2 = 8x$

$\because$ focus : (2, 0)

$\therefore$ radius = SP = $\sqrt{1+8} = 3$

$\therefore$ equation of required circle is $(x-2)^2 + y^2 = 9$

Hindi



$\because$ $y^2 = 8x$

$\because$ नाभि : : (2, 0)

$\therefore$ त्रिज्या = SP = $\sqrt{1+8} = 3$

$\therefore$ अभीष्ट वृत्त का समीकरण $(x-2)^2 + y^2 = 9$

16. If from the vertex of a parabola $y^2 = 4ax$, a pair of chords be drawn at right angles to one another and with these chords as adjacent sides a rectangle be made, locus of the further angle of the rectangle is

(A) $y^2 = 8a(x - 8a)$. (B) $y^2 = 4a(x + 8a)$.

(C) $y^2 = -4a(x - 8a)$. (D*) $y^2 = 4a(x - 8a)$.

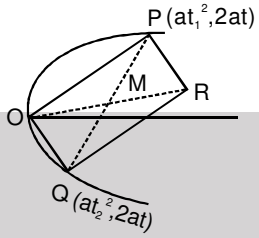
यदि परवलय के शीर्ष O से एक जीवा युग्म OA एवं OB जो एक दूसरे से समकोण बनाती है, खींचा जाता है। इन जीवाओं को आसन्न भुजाएँ लेकर एक आयत OACB बनाया जाता है। सिद्ध कीजिए कि आयत के शीर्ष O का बिन्दुपथ परवलय $y^2 = 4a(x - 8a)$ है।

Sol. Let the equation of the parabola be $y^2 = 4ax$ and O be the vertex of it. If OP and OQ be the two adjacent sides of the rectangle OPRQ and the co-ordinates of P and Q be $(at_1^2, 2at_1)$ and $(at_2, 2at_2)$ respectively ; then the equation of the line PQ will be

$$2x - y(t_1 + t_2) + 2at_1 t_2 = 0 \qquad ....(i)$$

The equation of the lines joining the origin the points of intersection of the parabola and (1) are obtained by making $y^2 = 4ax$ homogeneous with the help of (1) ; so, we get

$$y^2 = 4a.\,x.\left(\frac{y(t_1+t_2)-2x}{2at_1t_2}\right) \quad \Rightarrow \quad 2at_1t_2y^2 - 4a(t_1 + t_2)xy + 8ax^2 = 0.$$



If the lines are at right angles, then the sum of the coeff. of x^2 and y^2 should be zero, hence

$$2at_1t_2 + 8a = 0 \quad \text{or} \quad t_1t_2 + 4 = 0 \qquad ..... (2)$$

Let M is the mid-point of PR, then its co-ordinates will be

$$\left(\frac{at_1^2 + at_3^2}{2}, \frac{2at_1 + 2at_3}{2}\right)$$

Let the co-ordinates of the reqd. point R be (h, k) then M will be the mid-point of OR ; also as OPRQ is a rectangle, so, we get

$$\frac{h+0}{2} = \frac{at_1^2 + at_2^2}{2} \quad \text{or} \quad h = a(t_1^2 + t_2^2) \qquad ..... (3)$$

and $$\frac{k+0}{2} = \frac{2at_1 + 2at_1}{2} \quad \text{or} \quad k = 2a(t_1 + t_2) \qquad ..... (4)$$

To get the reqd. locus, we have to eliminate t_1 and t_2 from (2,) , (3) and (4), so squaring (4), we get

$$k^2 = 4a^2(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2) = 4a^2\left\{\frac{h}{a} + 2.(-4)\right\}$$

{as $t_1^2 + t_2^2 = h/a$ by (1) and $t_1t_2 = -4$ by (2)} or $k^2 = 4ah - 32a^2$

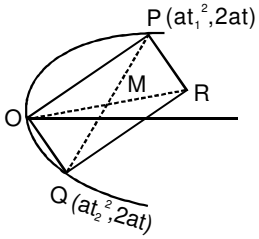
Generalising, we get the reqd. locus as $y^2 = 4a(x - 8a)$. Proved.

Hindi माना परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ है। तथा इसका शीर्ष O है। यदि आयत OPRQ की दो आसन्न भुजाएँ OP एवं OQ है तथा P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः $(at_1^2, 2at_1)$ एवं $(at_2, 2at_2)$ हो, तो रेखा PQ का समीकरण

$$2x - y(t_1 + t_2) + 2at_1 t_2 = 0 \qquad ....(i)$$

समी (1) एवं परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने पर प्राप्त रेखाओं के समीकरण (1) की सहायता से $y^2 = 4ax$ को समघात बनाने से प्राप्त होते हैं।

$$y^2 = 4a.\,x.\left(\frac{y(t_1+t_2)-2x}{2at_1t_2}\right) \Rightarrow 2at_1t_2y^2 - 4a(t_1 + t_2)xy + 8ax^2 = 0.$$



यदि रेखाएँ समकोण पर हो, तो x^2 के गुणांक एवं y^2 के गुणांक का योग शून्य होना चाहिए।

$$2at_1t_2 + 8a = 0 \quad \text{या} \quad t_1t_2 + 4 = 0 \qquad ..... (2)$$

माना PR का मध्यबिन्दु M हो, तो इसके निर्देशांक

$$\left(\frac{at_1^2 + at_3^2}{2}, \frac{2at_1 + 2at_3}{2}\right)$$

माना अभीष्ट बिन्दु R के निर्देशांक (h, k) है, तो OR का मध्यबिन्दु M होगा तथा OPRQ आयत होने के अनुसार

$$\frac{h+0}{2} = \frac{at_1^2 + at_2^2}{2} \quad \text{या} \quad h = a(t_1^2 + t_2^2) \quad \text{..... (3)}$$

एवं $$\frac{k+0}{2} = \frac{2at_1 + 2at_1}{2} \quad \text{या} \quad k = 2a\,(t_1 + t_2) \quad \text{..... (4)}$$

अभीष्ट बिन्दुपथ ज्ञात करने के लिए (2), (3) एवं (4) की सहायता से t_1 एवं t_2 को विलुप्त करना चाहिए

$$k^2 = 4a^2\,(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2) = 4a^2\left\{\frac{h}{a} + 2.(-4)\right\}$$

$\{t_1^2 + t_2^2 = h/a$ by (1) से एवं $t_1t_2 = -4$ by (2) से$\}$ या $k^2 = 4ah - 32a^2$

अभीष्ट बिन्दुपथ $y^2 = 4a\,(x - 8a)$.

17. A line of fixed length (a + b) moves so that its ends are always on two fixed perpendicular straight lines. The locus of the point which divided this line into portions of lengths a & b, is:

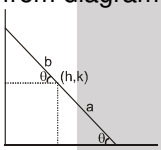
(A*) an ellipse (B) an hyperbola (C) a circle (D) a straight line

नियत लम्बाई (a + b) की एक रेखा इस प्रकार गति करती है कि इसके सिरे हमेशा दो स्थिर लम्बवत् रेखाओं पर रहते हैं। उस बिन्दु का बिन्दुपथ जो इस रेखा को a तथा b लम्बाई के भागों में विभाजित करता हो, है –

(A) दीर्घवृत्त (B) अतिपरवलय (C) वृत्त (D) सरल रेखा

Sol. Let the fixed lines are co-ordinate axes

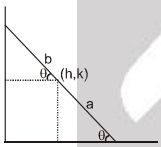
from diagram $h = b\cos\theta \quad \Rightarrow \quad k = a\sin\theta$



$$\Rightarrow \frac{h^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} = 1 \rightarrow \text{which is ellipse}$$

Hindi. माना निश्चित रेखाएँ निर्देश अक्ष ही है।

चित्रानुसार $h = b\cos\theta \quad \Rightarrow \quad k = a\sin\theta$



$$\Rightarrow \frac{h^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} = 1 \rightarrow$$ जो कि एक दीर्घवृत्त है।

18. Coordinates of the vertices B and C of a triangle ABC are (2, 0) and (8, 0) respectively. The vertex A is varying in such a way that $4\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2} = 1$. Then locus of A is

त्रिभुज ABC के शीर्षों B तथा C के निर्देशांक क्रमशः (2, 0) तथा (8, 0) है। शीर्ष A इस प्रकार गमन करता है कि $4\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$ हो, तो A का बिन्दुपथ है –

(A*) $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (B) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

(C) $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Sol. $$4\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 4\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = 1 \Rightarrow 4\frac{(s-a)}{s} = 1 \Rightarrow s = \frac{4a}{3} = 4\times\frac{6}{3} = 8$$

but लेकिन $2s = a + b + c = 16 \Rightarrow b + c = 10$

Hence locus is an ellipse having center $\equiv (5, 0)$

अतः बिन्दुपथ केन्द्र (5, 0) वाला एक दीर्घवृत्त होगा।

$2ae = 6$ and और $2a = 10$

$b^2 = a^2 - a^2e^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ Equation of ellipse दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

19. The locus of point of intersection of tangents to an ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at the points, the sum of whose eccentric angles is constant, is :

(A) a hyperbola (B) an ellipse (C) a circle (D*) a straight line

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित बिन्दुओं, जिनके उत्केन्द्रीय कोणों का योग अचर है, पर खीचीं गयी स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है –

(A) अतिपरवलय (B) दीर्घवृत्त (C) वृत्त (D) सरल रेखा

Sol. Point of intersection of tangent at point having eccentric angle 'α' & 'β' is

बिन्दुओं जिनके उत्केन्द्रता कोण 'α' एवं 'β' है, पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है–

$$h = \frac{a\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$k = \frac{b\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad \because \alpha + \beta = \text{constant स्थिरांक (let माना k)}$$

hence अतः $\frac{h}{k} = \frac{a}{b\tan k}$

hence locus is straight line. अतः बिन्दुपथ एक सरल रेखा होगी।

20. An ellipse with major axis 4 and minor axis 2 touches both the coordinate axis, then Locus of its centre is

एक दीर्घवृत्त की दीर्घअक्ष 4 तथा लघुअक्ष 2 है, निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करती है, तब इसके केन्द्र का बिन्दुपथ है–

(A) $x^2 - y^2 = 5$ (B) $x^2.y^2 = 5$ (C) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 5$ (D*) $x^2 + y^2 = 5$

Sol. Statement-1

Let the director circle is $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 + b^2$

origin lies on director circle

$\Rightarrow h^2 + k^2 = a^2 + b^2 = 5$

Locus is $x^2 + y^2 = 5$

Statement-2 true

Hindi. कथन -1

माना कि नियामक वृत्त $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 + b^2$ है।

मूलबिन्दु नियामक वृत्त पर स्थित है,

$\Rightarrow h^2 + k^2 = a^2 + b^2 = 5$

बिन्दुपथ $x^2 + y^2 = 5$

कथन -2 सत्य है।

21. An ellipse with major axis 4 and minor axis 2 touches both the coordinate axes, then locus of its focus is

एक दीर्घवृत्त जिसके दीर्घअक्ष एवं लघुअक्ष की लम्बाईयाँ क्रमशः 4 एवं 2 है, दोनों निर्देशी अक्षों को स्पर्श करता है इसकी नाभि का बिन्दुपथ होगा।

(A) $(x^2 - y^2)(1 + x^2y^2) = 16x^2y^2$ (B) $(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2) = 16x^2y^2$.

(C*) $(x^2 + y^2)(1 + x^2y^2) = 16x^2y^2$ (D) $(x^2 + y^2)(1 - x^2y^2) = 16x^2y^2$.

Sol. **Statement-1 :** Let focus of ellipse are (α, β) and (h, k)

कथन-1 : माना दीर्घवृत्त की नाभियाँ (α, β) एवं (h, k) है।

$\because$ Product of length of perpendicular dropped from focus on any tangent is b^2

$\because$ नाभियों से दीर्घवृत्त की किसी भी स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्बों की लम्बाइयों का गुणनफल b^2 के बराबर होता है।

$\therefore\ h\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{h}$

$k\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{k}$

Now distance between focii is 2 ae

दोनों नाभियों के मध्य दूरी 2 ae

$\therefore\ (h - \alpha)^2 + (k + \beta)^2 = \left(2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12$

$\left(h - \frac{1}{h}\right)^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 12$

After simplification हल करने पर $(h^2 + k^2)(1 + h^2k^2) = 16h^2k^2$

Hence the locus अतः बिन्दुपथ $(x^2 + y^2)(1 + x^2y^2) = 16x^2y^2$

Statement-2 Standard result. मानक परिणाम।

22. A series of concentric ellipses $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ are drawn such that E_n touches the extremities of the major axis of E_{n-1} and the foci of E_n coincide with the extremities of minor axis of E_{n-1}. If the eccentricity of the ellipses is independent of n, then the value of the eccentricity is

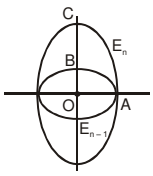
(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{16}$

(C*) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

संकेन्द्रीय दीर्घवृत्त $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ इस प्रकार खींचे गये हैं कि दीर्घवृत्त E_n, दीर्घवृत्त E_{n-1} के दीर्घ अक्ष के सिरों को स्पर्श करता है तथा E_n की नाभियाँ E_{n-1} के लघुअक्ष के सिरों से संपाती है। यदि दीर्घवृत्तों की उत्केन्द्रताएँ, n पर निर्भर नहीं करती है तो उत्केन्द्रता का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Sol. The figure shows two ellipses E_{n-1} and E_n.



The eccentricity is given to be independent of n, implies that the ratio of minor axis to the major axis, is same for all the ellipses.

For ellipse E_{n-1}, let

minor axis = b, major axis = a

For ellipse E_n, we have

minor axis = a, major axis = $\frac{OB}{e} = \frac{b}{e}$ [$\because$ B is the focus of E_n]

assuming e to be the eccentricity. Thus, we have

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b/e} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Rightarrow \quad e^2 + e - 1 = 0$$

gives $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ [$\because$ e must be + ve]

Hindi. चित्र में दो दीर्घवृत्त E_{n-1} एवं E_n दर्शाए गये हैं।
दिया है कि दीर्घवृत्तों की उत्केन्द्रताएँ n से स्वतन्त्र है जिसका अर्थ है कि सभी दीर्घवृत्तों के लिए दीर्घअक्ष एवं लघुअक्ष का अनुपात एक समान ही है।
दीर्घवृत्त E_{n-1} के लिये –
माना लघुअक्ष = b एवं दीर्घअक्ष = a है
दीर्घवृत्त E_n के लिए –
लघुअक्ष = a, दीर्घअक्ष $= \frac{OB}{e} = \frac{b}{e}$
[$\because$ E_n की नाभि B है]
उत्केन्द्रता को 'e' मानते हुए –

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b/e} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Rightarrow \quad e^2 + e - 1 = 0$$

दिया है $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ [$\because$ 'e' धनात्मक होना चाहिये]

23. If e and e′ are the eccentricities of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ and $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, then the point $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e'}\right)$ lies on the circle :

(A*) $x^2 + y^2 = 1$ (B) $x^2 + y^2 = 2$ (C) $x^2 + y^2 = 3$ (D) $x^2 + y^2 = 4$

यदि e व e′ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ व $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ की उत्केन्द्रताऐं हैं, तो बिन्दु $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e'}\right)$ किस वृत्त पर स्थित होगा–

(A*) $x^2 + y^2 = 1$ पर (B) $x^2 + y^2 = 2$ पर (C) $x^2 + y^2 = 3$ पर (D) $x^2 + y^2 = 4$ पर

Sol. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $(e')^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{e^2} + \frac{1}{(e')^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

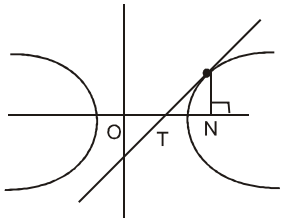
So the point lie on $x^2 + y^2 = 1$ (अतः बिन्दु $x^2 + y^2 = 1$ पर स्थित है।)

24. P is a point on the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, N is the foot of the perpendicular from P on the transverse axis. The tangent to the hyperbola at P meets the transverse axis at T. If O is the centre of the hyperbola, then OT. ON is equal to :

यदि P अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर कोई बिन्दु है तथा N बिन्दु P से अनुप्रस्थ अक्ष पर डाले गये लम्ब का पाद है। अतिपरवलय के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा, अनुप्रस्थ अक्ष को बिन्दु T पर मिलती है। यदि O अतिपरवलय का केन्द्र हो, तो OT. ON का मान है –

(A) e^2 (B*) a^2 (C) b^2 (D) b^2/a^2

Sol.



Equation of tangent at P (θ)

P (θ) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$$

$\therefore$ T ($a\cos\theta$, 0), N ($a\sec\theta$, 0)

OT. ON = $|a\cos\theta|\,|a\sec\theta| = a^2$

25. Tangent at any point on the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cut the axes at A and B respectively. If the rectangle OAPB (where O is origin) is completed then locus of point P is given by

(A*) $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ (B) $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ (C) $\frac{a^2}{y^2} - \frac{b^2}{x^2} = 1$ (D) none of these

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A तथा B पर काटती है। यदि आयत OAPB (जहाँ O मूल बिन्दु है) को पूर्ण किया जाए, तो P का बिन्दुपथ है –

(A*) $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ (B) $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ (C) $\frac{a^2}{y^2} - \frac{b^2}{x^2} = 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

tangent at point P ($a\sec\theta$, $b\tan\theta$)

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1 \text{ or } \frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{(-b\cot\theta)} = 1$$

Point A($a\cos\theta$, 0), B(0, $-b\cot\theta$)

Cordinate of point P is

(h, k) $\equiv$ ($a\cos\theta$, $-b\cot\theta$)

$\cos\theta = \frac{h}{a}$, $\cot\theta = -\frac{k}{b}$

$$\cot\theta = \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}} = -\frac{k}{b}$$

$$\frac{h^2}{a^2 - h^2} = \frac{k^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2}{h^2} - 1 = \frac{b^2}{k^2}$$

So locus is

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

Hindi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

बिन्दु P ($a\sec\theta$, $b\tan\theta$) पर स्पर्श रेखा है

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1 \text{ or } \frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{(-b\cot\theta)} = 1$$

बिन्दु A(acosθ, 0), B(0, – b cotθ)
बिन्दु P के निर्देशांक है
(h, k) ≡ (a cosθ, – b cotθ)

$\cos\theta = \frac{h}{a}$, $\cot\theta = -\frac{k}{b}$

$\cot\theta = \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}} = -\frac{k}{b}$

$\frac{h^2}{a^2 - h^2} = \frac{k^2}{b^2}$

$\frac{a^2}{h^2} - 1 = \frac{b^2}{k^2}$

अतः बिन्दुपथ $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ है।

26. If the chord of contact of tangents from two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ are at right angles, then $\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}$ is equal to

दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवाऐं परस्पर लम्बवत हो, तो $\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}$ का मान है –

(A) $-\frac{a^2}{b^2}$ (B) $-\frac{b^2}{a^2}$ (C) $-\frac{b^4}{a^4}$ (D*) $-\frac{a^4}{b^4}$

Sol. Equation of chord of contact from P (x_1, y_1)

$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$ ..... (1)

similarly from Q $(x_2\ y_2)$, $\frac{x x_2}{a^2} - \frac{y y_2}{b^2} = 1$ . ..... (2)

∴ Product of slopes = –1 ⇒ $\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = -\frac{a^4}{b^4}$

Hindi. P (x_1, y_1) से स्पर्श जीवा का समीकरण है

$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$ ..... (1)

समानतः Q $(x_2\ y_2)$ से, $\frac{x x_2}{a^2} - \frac{y y_2}{b^2} = 1$. ..... (2)

∴ ढ़ालों का गुणनफल = –1 ⇒ $\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = -\frac{a^4}{b^4}$

27. The sides AC and AB of a triangle ABC touch the conjugate hyperbola of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ at C and B respectively. If the vertex A lies on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, the side BC

(A*) must touch the ellipse

(B) must cut the ellipse at two distinct points

(C) may not touch the ellipse

(D) may cut the ellipse at two distinct points

त्रिभुज ABC की भुजाए AC और AB जो अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के संयुग्मी अतिपरवलय को स्पर्श करती है। यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर शीर्ष A स्थित है तब भुजा BC

(A*) दीर्घवृत्त अवश्य स्पर्श करती है।

(B) दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर दीर्घवृत्त प्रतिच्छेद करता है।

(C) दीर्घवृत्त को स्पर्श नहीं करता है।

(D) दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर दीर्घवृत्त प्रतिच्छेद कर सकता है।

Sol. Let the vertex A be (a cos θ, b sin θ). Since AC and AB touch the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, BC is the chord of contact. Its equation is

$$\frac{x\cos\theta}{a}-\frac{y\sin\theta}{b}=-1 \text{ or } -\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

$$\text{or } \frac{x\cos(\pi-\theta)}{a}+\frac{y\sin(\pi-\theta)}{b}=1$$

which is the equation of the tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at the point

[a cos (π – θ), b sin (π – θ)].

Hence BC touches the given ellipse.

Hindi: माना शीर्ष A (a cos θ, b sin θ). हैं। चूंकि AC और AB अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, को स्पर्श करती है।

$$\frac{x\cos\theta}{a}-\frac{y\sin\theta}{b}=-1 \text{ या } -\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

$$\text{या } \frac{x\cos(\pi-\theta)}{a}+\frac{y\sin(\pi-\theta)}{b}=1$$

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की बिन्दु [a cos (π – θ), b sin (π – θ)]. पर स्पर्श रेखा का समीकरण अतः दिया गया दीर्घवृत्त BC को स्पर्श करता है।

28. Tangents are drawn from any point on the hyperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ to the circle $x^2+y^2=9$, then the locus of mid-point of the chord of contact is

अतिपरवलय $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2=9$ पर स्पर्श रेखाऐं खींची जाती हैं। स्पर्श जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

(A*) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\left(\frac{x^2+y^2}{9}\right)^2$

(B) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\left(\frac{x^2+y^2}{9}\right)^2$

(C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\left(\frac{x^2-y^2}{9}\right)^2$

(D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\left(\frac{x^2-y^2}{9}\right)^2$

Sol. Let a point on given hyperbola
$(3\sec\theta, 2\tan\theta)$
Equation of chord of contact
$(3\sec\theta)x + (2\tan\theta)\, y = 9$ ..... (1)
Let (h,k) is mid point of chord of contact
then
$hx + ky - 9 = h^2 + k^2 - 9$
$hx + ky = h^2 + k^2$ ..... (2)
(1) & (2) represent same line, so

$$\frac{3\sec\theta}{h}=\frac{2\tan\theta}{k}=\frac{9}{h^2+k^2}$$

$$\sec\theta=\frac{3h}{h^2+k^2},\quad \tan\theta=\frac{9k}{2(h^2+k^2)}$$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$$\frac{9h^2}{(h^2+k^2)^2}-\frac{81k^2}{4(h^2+k^2)^2}=1$$

$$4h^2 - 9k^2 = \frac{4}{9}(h^2+k^2)^2$$

$$\frac{h^2}{9}-\frac{k^2}{4}=\frac{(h^2+k^2)^2}{81}$$

Locus of (h,k) is $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\left(\frac{x^2+y^2}{9}\right)^2$

Hindi. माना दिये गये अतिपरवलय पर एक बिन्दु $(3\sec\theta, 2\tan\theta)$ है।
स्पर्श जीवा का समीकरण
$(3\sec\theta)x + (2\tan\theta)\, y = 9$ .....(1)
माना स्पर्श जीवा के मध्य बिन्दु (h,k) है तो
$hx + ky - 9 = h^2 + k^2 - 9$
$hx + ky = h^2 + k^2$ .....(2)
(1) तथा (2) एक ही रेखा को प्रदर्शित करती है, अतः

$$\frac{3\sec\theta}{h}=\frac{2\tan\theta}{k}=\frac{9}{h^2+k^2}$$

$$\sec\theta=\frac{3h}{h^2+k^2},\quad \tan\theta=\frac{9k}{2(h^2+k^2)}$$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$$\frac{9h^2}{(h^2+k^2)^2}-\frac{81k^2}{4(h^2+k^2)^2}=1$$

$$4h^2 - 9k^2 = \frac{4}{9}(h^2+k^2)^2$$

$$\frac{h^2}{9}-\frac{k^2}{4}=\frac{(h^2+k^2)^2}{81}$$

(h,k) का बिन्दुपथ है $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\left(\frac{x^2+y^2}{9}\right)^2$

29. If AB is a double ordinate of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ such that ΔOAB (O is the origin) is an equilateral triangle, then the eccentricity 'e' of the hyperbola

(A*) is greater than $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (B) is less than $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(C) is equal to $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) is less than $\frac{1}{\sqrt{3}}$

यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की एक द्विकोटि AB इस प्रकार है कि त्रिभुज OAB (O मूलबिन्दु है) एक समबाहु त्रिभुज है, तो अतिपरवलय की उत्केन्द्रता e, है–

(A*) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ से अधिक (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ से कम

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ के बराबर है। (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ से कम

Sol. Let the hyperbola be $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ & If PQ is any double ordinate then

$P = (h,k)$, $Q = (h, -k)$ & O (0, 0) is the origin

$\because$ Δ POQ is equilateral $\Rightarrow$ $OP^2 = OQ^2 = PQ^2$

$\Rightarrow$ $h^2 = 3k^2$ ..... (i)

also (h, k) lies on given hyperbola

$\therefore$ $\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$ ..... (ii)

(i) & (ii)

$\Rightarrow$ $k^2 = \frac{a^2b^2}{3b^2-a^2} > 0$ $\Rightarrow$ $3b^2 - a^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{b^2}{a^2} > \frac{1}{3}$

$\therefore$ $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1 + \frac{1}{3}$ $\therefore$ $e^2 > \frac{4}{3}$ or $e > \frac{2}{\sqrt{3}}$

Hindi मानाकि अतिपरलवय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

यदि PQ कोई द्विकोटि है, तो $P = (h,k)$, $Q = (h, -k)$ एवं O(0, 0) केन्द्र है।

$\because$ Δ POQ समबाहु है। $\Rightarrow$ $OP^2 = OQ^2 = PQ^2$

$\Rightarrow$ $h^2 = 3k^2$ ..... (i)

बिन्दु (h, k) अतिपरवलय पर स्थित है।

$\therefore$ $\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$ ..... (ii)

(i) एवं (ii)

$\Rightarrow$ $k^2 = \frac{a^2b^2}{3b^2-a^2} > 0$ $\Rightarrow$ $3b^2 - a^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{b^2}{a^2} > \frac{1}{3}$

$\therefore$ $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1 + \frac{1}{3}$ $\therefore$ $e^2 > \frac{4}{3}$ or $e > \frac{2}{\sqrt{3}}$

30. Let two variable ellipse E_1 and E_2 touches each other externally at (0, 0). Their common tangent at (0, 0) is y = x. If one of the focus at E_1 & one of the focus of E_2 always lies or line y = 2x then find locus of other focus of E_1 & E_2.

माना दो चर दीर्घवृत्त E_1 और E_2 एक दुसरे को (0, 0) पर बाह्य स्पर्श करते है यदि (0, 0) पर बाह्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा y = x है। यदि E_1 पर एक नाभि तथा E_2 पर दुसरी नाभि सदैव रेखा y = 2x पर स्थित है तब E_1 और E_2 की अन्य नभियों का बिन्दुपथ है–

(A) y = 4x (B) y = –2x (C*) y = x/2 (D) y = –x/2

Sol. y = x is angle bisector of y = x/2 and y = 2x

y = x, y = x/2 और y = 2x का कोण अर्द्धक है।

PART - II : SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

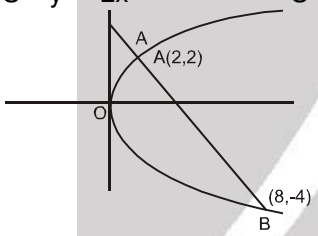
1. If range of values of a for which $(a^2, a-2)$ be a point interior to the region of the parabola $y^2 = 2x$ bounded by the chord joining the points (2, 2) and (8, – 4) is (p, q) then value of p + q is

यदि a के सभी मानों का परिसर जिसके लिए बिन्दुओं (2, 2) और (8, – 4) बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा के द्वारा परवलय $y^2 = 2x$ के क्षेत्र के अन्तर्गत बिन्दु $(a^2, a-2)$ हो, (p, q) है तब p+q का मान होगा–

Ans. 02.82

Sol. I.F. $(a^2, a-2)$

$S \equiv y^2 - 2x$ $S \equiv y^2 - 2x$



Equation of line AB (रेखा AB का समीकरण)

$y - 2 = \frac{-6}{6}(x-2)$

$y - 2 = -x + 2$

$L \equiv x + y - 4 = 0$

$S_1 \equiv (a-2)^2 - 2a^2 < 0$

$a^2 + 4 - 4a - 2a^2 < \quad \Rightarrow \quad a^2 + 4a - 4 > 0$

$-4a - a^2 + 4 < 0 \qquad a^2 + 4a + 4 > 8$

$L_1 < 0 \qquad (a+2)^2 > 8$

$a^2 + a - 6 < 0 \qquad a + 2 > 2\sqrt{2} \quad a + 2 < -2\sqrt{2}$

$-3 < a < 2 \qquad a > -2 + 2\sqrt{2} \quad a < -2\sqrt{2} - 2 \quad \Rightarrow \quad -2 + 2\sqrt{2} < a < 2$

so integral value of a is equal to 1 only.

(इसलिए a का पूर्णांक मान केवल 1 के बराबर है)

2. If ℓ is the distance between focus and directrix of the parabola $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 15y - 60 = 0$ then ℓ is :

यदि परवलय $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 15y - 60 = 0$ की नाभि और नियता के मध्य दुरी ℓ है तब ℓ बराबर है :

Ans **00.50**

Sol. Here $h^2 - ab = (-12)^2 - 9 \cdot 16 = 144 - 144 = 0$ Also $\Delta \neq 0$

$\therefore$ the equation represents a parabola

Now, the equation is $(3x - 4y)^2 = 5(4x + 3y + 12)$
Clearly, the lines $3x - 4y = 0$ and $4x + 3y + 12 = 0$ are perpendicular to each other. So let

$$\frac{3x-4y}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = Y, \quad \frac{4x+3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}} = X \qquad ...(i)$$

The equation of the parabola becomes $Y^2 = X = 4 \cdot \frac{1}{4}X$

$\therefore$ Here $a = 1/4$ in the standard equation

as $\ell = 2a = 1/2 \Rightarrow \quad 6\ell = 3$

Hindi: यहाँ $h^2 - ab = (-12)^2 - 9 \cdot 16 = 144 - 144 = 0$ तथा $\Delta \neq 0$

$\therefore$ परवलय का समीकरण

अब समीकरण $(3x - 4y)^2 = 5(4x + 3y + 12)$

स्पष्टतया रेखाएँ $3x - 4y = 0$ और $4x + 3y + 12 = 0$ एक दूसरे के लम्बवत् है। इसलिए माना

$$\frac{3x-4y}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = Y, \quad \frac{4x+3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}} = X \qquad ...(i)$$

परवलय का समीकरण है।

$Y^2 = X = 4 \cdot \frac{1}{4}X$

$\therefore$ यहाँ $a = 1/4$ मानक समीकरण में है।

as $\ell = 2a = 1/2 \Rightarrow \quad 6\ell = 3$

3. The number of integral values of a for which the point $(-2a, a + 1)$ will be an interior point of the smaller region bounded by the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the parabola $y^2 = 4x$, is :

Ans. 00.00

वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ और परवलय $y^2 = 4x$, से परिबद्ध छोटे क्षेत्र का आन्तरिक बिन्दु $(-2a, a + 1)$ होने के लिए a के पूर्णांक मानों की संख्या है–

Sol. The point $P(-2a, a + 1)$ will be an interior point of both the circle $x^2 + y^2 - 4 = 0$ and the parabola $y^2 - 4x = 0$.

$\therefore (-2a)^2 + (a + 1)^2 - 4 < 0$

i.e. $5a^2 + 2a - 3 < 0 \qquad ...(i)$

and $(a + 1)^2 - 4(-2a) < 0$

i.e. $a^2 + 10a + 1 < 0 \qquad ...(ii)$

The required values of a will satisfy both (i) and (ii)

From (i), $(5a - 3)(a + 1) < 0$

$\therefore$ by sign scheme we get $-1 < a < 3/5 \qquad ...(iii)$

Solving (ii), the corresponding equation is

$a^2 + 10a + 1 = 0$

or $a = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore$ by sign scheme for (ii)

$-5 - 2\sqrt{6} < a < -5 + 2\sqrt{6} \qquad ...(iv)$

The set of values of a satisfying (iii) and (iv) is

$-1 < a < -5 + 2\sqrt{6}$

Hindi: बिन्दु $P(-2a, a + 1)$, वृत्त $x^2 + y^2 - 4 = 0$ और परवलय $y^2 - 4x = 0$ के आन्तरिक भाग में स्थित होगा यदि

$\therefore (-2a)^2 + (a + 1)^2 - 4 < 0$

अर्थात् $5a^2 + 2a - 3 < 0 \qquad ...(i)$

और $(a + 1)^2 - 4(-2a) < 0$

अर्थात् $a^2 + 10a + 1 < 0 \qquad ...(ii)$

a के मान (i) और (ii) दोनों को संतुष्ट करते है।

(i) से $(5a - 3)(a + 1) < 0$ चिन्ह परीपाटी से

$\therefore\ -1 < a < 3/5$ ...(iii)

समीकरण (ii) को हल करने पर

$a^2 + 10a + 1 = 0$

या $a = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore$ (ii) से

$-5 - 2\sqrt{6} < a < -5 + 2\sqrt{6}$ ...(iv)

(iii) औश्र (iv) को संतुष्ट करने वाले a के मान

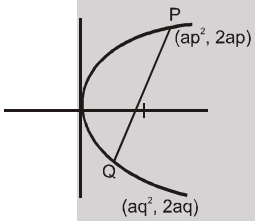
$-1 < a < -5 + 2\sqrt{6}$

4. A variable chord PQ of the parabola, $y^2 = 4x$ is drawn parallel to the line $10y = 7x$. If the parameters of the points P & Q on the parabola be p & q respectively, then $(p + q)$ equal to.

परवलय $y^2 = 4x$ की एक चर जीवा रेखा $10y = 7x$ के अनुदिश खींची गयी है। यदि परवलय के बिन्दु P तथा Q के प्राचल क्रमशः p तथा q हो, तो $p + q$ का मान है–

Ans. 02.85 or 02.86

Sol.



slope of PQ की प्रवणता $= \dfrac{2a(p-q)}{a(p-q)(p+q)} = 1$

5. The parabola whose axis is parallel to the y-axis and which passes through the points (0, 4), (1, 9) and (–2,6), also passes through $\left(\dfrac{7}{3}, \alpha\right)$ then the value of α is :

परवलय की अक्ष, y-अक्ष के समान्तर है तथा बिन्दुओं (0, 4), (1, 9) और (–2,6) से गुजरती है तथा $\left(\dfrac{7}{3}, \alpha\right)$ से भी गुजरती है तब α का मान होगा :

Ans. 21.88 or 21.89

Sol. As the axis is parallel to the y-axis, it will be $x - \alpha = 0$ for some α and the tangent to the vertex (which is perpendicular to the axis) will be $y - \beta = 0$ for some β.

Hence the equation of the parabola will be of the form

$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ ...(i)

when α, β, a are unknown constants, 4a being latus rectum.

(1) passes through (0, 4), (1, 9) and (–2, 6) so

$(0 - \alpha)^2 = 4a(4 - \beta)$,

i.e. $\alpha^2 = 4a(4 - \beta)$ ...(ii)

and $(1 - \alpha)^2 = 4a(9 - \beta)$

i.e. $1 - 2\alpha + \alpha^2 = 4a(9 - \beta)$ ...(iii)

and $(-2 - \alpha)^2 = 4a(6 - \beta)$

i.e. $4 + 4\alpha + \alpha^2 = 4a(6 - \beta)$ ...(iv)

$\therefore\ \alpha = -\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ a = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$ or $\beta = \dfrac{23}{8}$ $\therefore$ from (i), the equation of the parabola is

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^4 = 4\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(y-\frac{23}{8}\right) \text{ or } \quad x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{2}y-\frac{23}{16} \text{ or } \quad x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+2=0$$

$\therefore\ 2x^2+3x-y+4=0 \Rightarrow \quad y=2x^2+3x+4 \Rightarrow \quad \alpha = 2\times\left(\frac{7}{3}\right)^2+3\times\frac{7}{3}+4=\frac{197}{9}$

Hindi: चूंकि अक्ष, y-अक्ष के समान्तर है इसलिए यह $x-\alpha=0$ होगी। किसी α के लिए। तथा शीर्ष पर स्पर्श रेखा (जो अक्ष के लम्बवत् है।) $y-\beta=0$ होगी किसी β के लिए

अतः परवलय के समीकरण का रूप

$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ ...(i)

जब α, β, अज्ञात अचर है। 4a नाभि लम्ब है।

परवलय (1) बिन्दुओं (0, 4), (1, 9) (–2, 6) से गुजरता है।

$(0-\alpha)^2 = 4a(4-\beta)$,

अर्थात् $\alpha^2 = 4a(4-\beta)$ ...(ii)

और $(1-\alpha)^2 = 4a(9-\beta)$

अर्थात् $1-2\alpha+\alpha^2 = 4a(9-\beta)$ ...(iii)

और $(-2-\alpha)^2 = 4a(6-\beta)$

अर्थात् $4+4\alpha+\alpha^2 = 4a(6-\beta)$ ...(iv)

$\therefore \quad \alpha = -\frac{3}{4}$

$\therefore \quad a = \frac{5}{40}=\frac{1}{8}$ या $\beta = \frac{23}{8}$

$\therefore$ (i) से परवलय का समीकरण

$\left(x+\frac{3}{4}\right)^4 = 4\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(y-\frac{23}{8}\right)$ या $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{2}y-\frac{23}{16}$ या $x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+2=0$

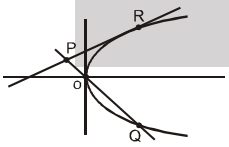
$\therefore\ 2x^2+3x-y+4=0 \Rightarrow \quad y=2x^2+3x+4 \Rightarrow \quad \alpha = 2\times\left(\frac{7}{3}\right)^2+3\times\frac{7}{3}+4=\frac{197}{9}$

6. Through the vertex O of the parabola $y^2 = 9x$, a perpendicular is drawn to any tangent meeting it at P & the parabola at Q, then the value of OP. OQ is

परवलय $y^2 = 9x$ के शीर्ष O से इसकी किसी स्पर्श रेखा पर लम्ब खींचा जाता है जो स्पर्श रेखा को P पर तथा परवलय को Q पर मिलता है। OP. OQ = का मान है–

Ans. 20.25

Sol.



$y = mx + \frac{a}{m}$ .... (i)

equation of OP is

$y = -\frac{1}{m}x$ .... (ii)

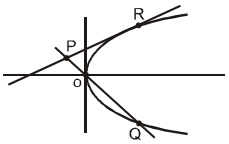
$OP = \frac{a/m}{\sqrt{1+m^2}}$

equation (ii) meets the parabola at Q

$\frac{1}{m^2}x^2 = 4ax \Rightarrow \quad x = 4am^2,\ y = -4am$

$\therefore \quad OQ = 4am\sqrt{1+m^2}, \quad OP.\ OQ = 4a^2$

Sol.



$y = mx + \frac{a}{m}$ .... (i)

OP का समीकरण

$y = -\frac{1}{m}x$ .... (ii)

$OP = \frac{a/m}{\sqrt{1+m^2}}$

समीकरण (ii) परवलय को Q पर मिलती है।

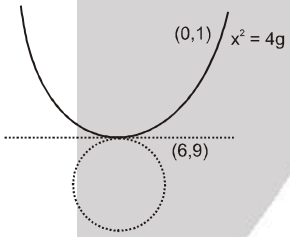
$\frac{1}{m^2}x^2 = 4ax \Rightarrow x = 4am^2, y = -4am$

$\therefore$ $OQ = 4am\sqrt{1+m^2}$, $OP.\ OQ = 4a^2$

7. The centre of the circle which passes through the focus of the parabola $x^2 = 4y$ & touches it at the point (6, 9) is (α, β) then $|\alpha - \beta|$ is

परवलय $x^2 = 4y$ की नाभि से गुजरने वाले तथा इसे बिन्दु (6, 9) पर स्पर्श करने वाले वृत्त का केन्द्र (α, β) है तब $|\alpha - \beta|$ है–

Ans. 23.00



Sol. $x\,x_1 = 2(y + y_1)$

$6x = 2(y + 9)$

$3x = y + 9$ $\quad 3x - y - 9 = 0$

from equation of family circle is $S + \lambda L = 0$

$S \equiv (x - 6)^2 + (y - 91^2 + k(3x - y - 9) = 0$

is passes through (0, 1)

$36 + 64 + k(-10) = 0$

$100 - 10k = 0$ $\quad k = 10$

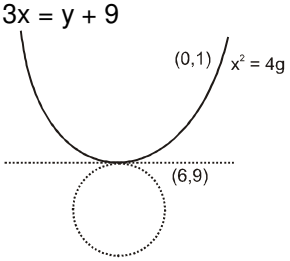
$x^2 + 36 - 12x + y^2 + 81 - 18y + 30x - 30y - 90 = 0$

$x^2 + y^2 + 18x - 28y + 27 = 0$

Hindi. $x\,x_1 = 2(y + y_1)$

$6x = 2(y + 9)$

$3x = y + 9$ $\quad 3x - y - 9 = 0$



वृत्तों के निकाय का समीकरण $S + \lambda L = 0$

$S \equiv (x - 6)^2 + (y - 91^2 + k(3x - y - 9) = 0$

(0, 1) से गुजरता है।

$36 + 64 + k(-10) = 0$

$100 - 10k = 0$ $\quad k = 10$

$x^2 + 36 - 12x + y^2 + 81 - 18y + 30x - 30y - 90 = 0$
$x^2 + y^2 + 18x - 28y + 27 = 0$

8. Points A, B & C lie on the parabola $y^2 = 4ax$. The tangents to the parabola at A, B & C, taken in pairs, intersect at points P, Q & R. the ratio of the areas of the triangles ABC & PQR is $\frac{\lambda}{\mu}$ where λ and μ are co-prime number then $\lambda + \mu$ is

बिन्दु A, B और C परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है। इन बिन्दुओं पर परवलय की स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। इन स्पर्श रेखाओं में से दो–दो को एक साथ लेने पर ये क्रमशः P, Q एवं R पर प्रतिच्छेद करती है। तो ΔABC एवं ΔPQR के क्षेत्रफलों का अनुपात $\frac{\lambda}{\mu}$ है जहाँ λ और μ सहअभाज्य संख्याएं है तब $\lambda + \mu$ है–

Ans. 03.00

Sol. Equation of parabola is $y^2 = 4ax$ .....(1)

Let $A \equiv (at_1^2, 2at_1)$ $B \equiv (at_2^2, 2at_2)$, $C \equiv (at_3^2, 2at_3)$

Equation of the tangents to parabola (1) at A, B, C are

$yt_1 = x + at_1^2$ .....(2)

$yt_2 = x + at_2^2$ .....(3)

and $yt_3 = x + at_3^2$ .....(4)

Let the points of intersection of lines (2), (3) be P; (3), (4) be Q and (2), (4) be R.

Then $P \equiv (at_1 t_2, a(t_1 + t_2))$, $Q \equiv (at_2t_3, a(t_2 + t_3))$, $R \equiv (at_1t_3, a(t_1 + t_3))$

Now area of ΔABC,

$$\Delta_1 = \text{modulus of } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \\ at_3^2 & 2at_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{modulus of } \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|$$

Area of ΔPQR

$$\Delta_2 = \text{modulus of } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1t_2 & a(t_1+t_2) & 1 \\ at_2t_3 & a(t_2+t_3) & 1 \\ at_3t_1 & a(t_3+t_1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{modulus of } \frac{a^2}{2}\begin{vmatrix} t_1t_2 & t_1+t_2 & 1 \\ t_2t_3 & t_2+t_3 & 1 \\ t_3t_1 & t_3+t_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{modulus of } \frac{a^2}{2}\begin{vmatrix} t_2(t_1-t_3) & t_1-t_3 & 0 \\ t_3(t_2-t_1) & t_2-t_1 & 0 \\ t_3t_1 & t_3+t_1 & 1 \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3]$$

$$= \text{modulus of } (t_1 - t_3)(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)$$

$$= \frac{a^2}{2} |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|$$

Clearly $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2}{1}$

Hindi. परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ .....(1)

माना $A \equiv (at_1^2, 2at_1)$ $B \equiv (at_2^2, 2at_2)$, $C \equiv (at_3^2, 2at_3)$

परवलय (1) के बिन्दु A, B, C पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$yt_1 = x + at_1^2$ .....(2)

$yt_2 = x + at_2^2$ .....(3)

तथा $yt_3 = x + at_3^2$ .....(4)

माना (2) , (3) का प्रतिच्छेदी बिन्दु P; (3), (4) का Q एवं (2) , (4) का R है।

तब $P \equiv (at_1 t_2, a(t_1 + t_2))$, $Q \equiv (at_2t_3, a(t_2 + t_3))$, $R \equiv (at_1t_3, a(t_1 + t_3))$

ΔABC का क्षेत्रफल

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \\ at_3^2 & 2at_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ का मापांक}$$

$$= \frac{1}{2}.\,a.\,2a\begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ का मापांक}$$

$= a^2\,|(t_1 - t_2)\,(t_2 - t_3)\,(t_3 - t_1)|$

ΔPQR का क्षेत्रफल

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1t_2 & a(t_1+t_2) & 1 \\ at_2t_3 & a(t_2+t_3) & 1 \\ at_3t_1 & a(t_3+t_1) & 1 \end{vmatrix} \text{ का मापांक}$$

$$= \frac{a^2}{2}\begin{vmatrix} t_1t_2 & t_1+t_2 & 1 \\ t_2t_3 & t_2+t_3 & 1 \\ t_3t_1 & t_3+t_1 & 1 \end{vmatrix} \text{ का मापांक}$$

$$= \frac{a^2}{2}\begin{vmatrix} t_2(t_1-t_3) & t_1-t_3 & 0 \\ t_3(t_2-t_1) & t_2-t_1 & 0 \\ t_3t_1 & t_3+t_1 & 1 \end{vmatrix} \text{ का मापांक} \quad [R_1 \to R_1 - R_2,\ R_2 \to R_2 - R_3]$$

$= (t_1 - t_3)\,(t_2 - t_1)\,(t_2 - t_3)$ का मापांक

$= |\,(t_1 - t_2)\,(t_2 - t_3)\,(t_3 - t_1)\,\frac{a^2}{2}|$ स्पष्टतयाः $= \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2}{1}$

9. A normal is drawn to a parabola $y^2 = 4ax$ at any point other than the vertex and it cuts the parabola again at a point whose distance from the vertex is not less than $\lambda\sqrt{2}a$, then the value of λ is

परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष के अलावा किसी अन्य बिन्दु पर खींचा गया अभिलम्ब, परवलय को पुनः एक ऐसे बिन्दु पर काटता है जिसकी शीर्ष से दूरी कभी भी $\lambda\sqrt{2}a$ से कम नहीं होती है। तब λ का मान है–

Ans. 06.92 or 06.93

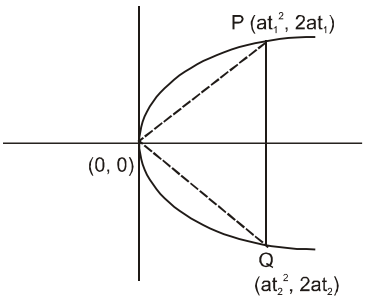
Sol. Equation of parabola परवलय का समीकरण

$y^2 = 4ax$

$OQ = \sqrt{a^2t_2^4 + 4a^2t_2^2} = a\,t_2\,\sqrt{t_2^2 + 4}$

$QQ \geq 2\sqrt{2}a.2\sqrt{3} \geq 4\sqrt{6}\,a$

as $t_2 = t_1 - \frac{2}{t_1}$ के अनुसार



10. If three normal are drawn through (c, 0) to $y^2 = 4x$ and two of which of perpendicular then the value of c is

$y^2 = 4x$ के लिए बिन्दु (c, 0) से तीन अभिलम्ब खींचे जाते है c का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अन्य दो अभिलम्ब लम्बवत् हो।

Ans. 03.00

Sol. $y = mx - 2am - am^3$ Here यहाँ $a = 1$

$0 = cm - 2m - m^3$

$m^3 + (2 - c)\, m = 0$

$m = 0 \qquad m^2 = c - 2 \qquad \Rightarrow \qquad c > 2$

sum योगफल $m_1 + m_2 + m_3 = 0$

$\Sigma m_1 m_2 = \dfrac{2a - h}{a}$

$m_1 m_2 m_3 = \dfrac{-k}{a}$

$m_1 m_2 = 2 - c$

$-1 = 2 - c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3$

11. P & Q are the points with eccentric angles θ & $\theta + \pi/6$ on the ellipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, then the area of the triangle OPQ is :

दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ के θ और $\theta + \pi/6$ उत्केन्द्र कोणों के बिन्दु P और Q है तब त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल है–

Ans. 03.75

Sol. $A = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a\cos\theta & b\sin\theta & 1 \\ a\cos(\theta+\alpha) & b\sin(\theta+\alpha) & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}ab\left[\cos\theta\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta\cos\theta(\theta+\alpha)\right]$

$= \dfrac{ab}{2}\sin\left[\theta + \alpha - \theta\right] = \dfrac{ab}{2}\sin\alpha$

as here $a = 5$, $b = 3$ and $\alpha = \pi/6$ so $A = \dfrac{15}{4}$

Hindi. अभीष्ट क्षेत्रफल $A = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a\cos\theta & b\sin\theta & 1 \\ a\cos(\theta+\alpha) & b\sin(\theta+\alpha) & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}ab\left[\cos\theta\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta\cos\theta(\theta+\alpha)\right]$

$= \dfrac{ab}{2}\sin\left[\theta + \alpha - \theta\right] = \dfrac{ab}{2}\sin\alpha$

चूंकि यहाँ $a = 5$, $b = 3$ और $\alpha = \pi/6$ इसलिए $A = \dfrac{15}{4}$

12. If P is a variable point on the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ whose focii are S and S′ and e_1 is the eccentricity and the locus of the incentre of $\Delta PSS'$ is an ellipse whose eccentricity is e_2 , then the value of $\left(1 + \dfrac{1}{e_1}\right)e_2^2$ is :

Ans. 02.00

यदि दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ पर चर बिन्दु P है जिसकी नाभियाँ S तथा S′है तथा उत्केन्द्रता e_1 है। और $\Delta PSS'$ के अन्तकेन्द्र का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त होगा जिसकी उत्केन्द्रता e_2 है तब $\left(1 + \dfrac{1}{e_1}\right)e_2^2$ का मान है–

Ans. 02.00

Sol. $PS = e\left(\frac{a}{e} - a\cos\theta\right) = a - ae\cos\theta$; $PS' = e\left(\frac{a}{e} + a\cos\theta\right) = a + ae\cos\theta$ and $SS^1 = 2ae$

Let incentre be (h, k)

$$h = \frac{-ae(a - ae\cos\theta) + ae(a + ae\cos\theta) + 2a^2e\cos\theta}{2a(1+e)} \Rightarrow h = \frac{2a^2e^2\cos\theta + 2a^2e\cos\theta}{2a(1+e)}$$

$$= \frac{ae^2\cos\theta + ae\cos\theta}{(1+e)} = ae\cos\theta$$

$$k = \frac{b\sin\theta \times 2ae}{2a(1+e)} = \frac{be\sin\theta}{1+e}$$ equation of ellipse $\left(\frac{h}{ae}\right)^2 + \left(\frac{k(1+e)}{be}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2e^2} + \frac{y^2(1+e)^2}{b^2e^2} = 1$

$$e' = \sqrt{1 - \frac{b^2e^2}{(1+e)^2a^2e^2}} = \sqrt{1 - \frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{2e}{1+e}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{e_1}\right)e_2^2 = 2$$

Hindi $PS = e\left(\frac{a}{e} - a\cos\theta\right) = a - ae\cos\theta$; $PS' = e\left(\frac{a}{e} + a\cos\theta\right) = a + ae\cos\theta$ तथा $SS^1 = 2ae$

मानाकि अन्तःकेन्द्र (h, k) है, तो

$$h = \frac{-ae(a - ae\cos\theta) + ae(a + ae\cos\theta) + 2a^2e\cos\theta}{2a(1+e)} \Rightarrow h = \frac{2a^2e^2\cos\theta + 2a^2e\cos\theta}{2a(1+e)}$$

$$= \frac{ae^2\cos\theta + ae\cos\theta}{(1+e)} = ae\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{h}{ae}$$

$$k = \frac{b\sin\theta \times 2ae}{2a(1+e)} = \frac{be\sin\theta}{1+e}$$ equation of ellipse $\left(\frac{h}{ae}\right)^2 + \left(\frac{k(1+e)}{be}\right)^2 = 1$

$\therefore$ (h, k) का बिन्दुपथ होगा $\frac{x^2}{a^2e^2} + \frac{y^2(1+e)^2}{b^2e^2} = 1$ जो एक दीर्घवृत्त ही है।

इसकी उत्केन्द्रता $= \sqrt{1 - \frac{b^2e^2}{(1+e)^2a^2e^2}} = \sqrt{1 - \frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{2e}{1+e}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{e_1}\right)e_2^2 = 2$

13. If $\left(0, 3+\sqrt{5}\right)$ is a point on the ellipse whose foci are (2, 3), (–2, 3) then the length of minor axis is :

यदि दीर्घवृत्त जिसकी नाभियाँ (2, 3), (–2, 3) है, पर एक बिन्दु $\left(0, 3+\sqrt{5}\right)$ है तब लघु अक्ष की लम्बाई है–

Ans. **04.47**

Sol. Let $P = \left(0, 3+\sqrt{5}\right)$ and foci S = (2, 3), S′ = (–2, 3).

P is a point one the ellipse if PS + PS′ = 2a

Now, $PS = \sqrt{(-2)^2 + \left(\sqrt{5}^2\right)} = \sqrt{9} = 3$, $PS' = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = 3 \Rightarrow PS + PS' = 6 = 2a$

$\Rightarrow a = 3$

Hindi. माना $P = \left(0, 3+\sqrt{5}\right)$ तथा नाभियां S = (2, 3), S′ = (–2, 3).

दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु P है यदि PS + PS′ = 2a

अब, $PS = \sqrt{(-2)^2 + \left(\sqrt{5}^2\right)} = \sqrt{9} = 3$, $PS' = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = 3 \Rightarrow PS + PS' = 6 = 2a$

$\Rightarrow a = 3$

14. A circle has the same centre as an ellipse & passes through the focii F_1 & F_2 of the ellipse, such that the two curves intersect at 4 points. Let 'P' be any one of their points of intersection. If the major axis of the ellipse is 17 & the area of the triangle PF_1F_2 is 30, then eccentricity of the ellipse is:

एक वृत्त का केन्द्र दीर्घवृत्त के केन्द्र के समान है तथा दीर्घवृत्त की नाभियों F_1 तथा F_2 से इस प्रकार गुजरता हैं कि दोनों वक्र 4 बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते है। माना कि 'P' उनका कोई एक प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष 17 है तथा त्रिभुज PF_1F_2 का क्षेत्रफल 30 हो, तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता का मान होगा–

Ans. 00.76

Sol. $PF_1 + PF_2 = 17$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} PF_1 \cdot PF_2 = 30$

$(F_1 F_2)^2 = PF_1^2 + PF_2^2 = 289 - 120 = 169$ $\Rightarrow$ $F_1 F_2 = 13$

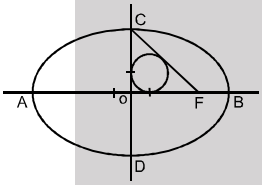
$2a = 17,\ 2ae = 13 \Rightarrow e = \frac{13}{17}$

15. Point 'O' is the centre of the ellipse with major axis AB & minor axis CD. Point F is one focus of the ellipse. If OF = 6 & the diameter of the inscribed circle of triangle OCF is 2, then the product (AB) (CD) is

बिन्दु O दीर्घवृत्त का केन्द्र है जिसका दीर्घ अक्ष AB तथा लघु अक्ष CD है। बिन्दु F दीर्घवृत्त की एक नाभि है। यदि OF = 6 तथा त्रिभुज OCF के अन्तर्गत निर्मित वृत्त का व्यास 2 हो, तो गुणनफल (AB) (CD) का मान है –

Ans. 65.00

Sol. $ae = 6$ $\Rightarrow$ $b^2 + 36 = (b + 4)^2$ $\Rightarrow$ $36 = 16 + 8b$



$b = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $a^2 = a^2e^2 + b^2 = 36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4}$

$a = \frac{13}{2}$ $\Rightarrow$ $(2a)\ (2b) = 65$

16. If 'r' be the radius of largest circle with centre (3, 0) that can be inscribed in the ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, then r^2 is equal to

केन्द्र (3,0) और त्रिज्या 'r' का अधिकतम वृत्त जो दीर्घवृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ के अन्तर्गत है तब r^2 का मान है

Ans. **03.93 or 03.94**

Sol. Largest circle will be that circle which touches the ellipse at any point $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$

$\Rightarrow$ Line joining points $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$ and (3, 0) will be perpendicular to tangent of ellipse at point $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$

so that $\frac{3\sin\theta}{5\cos\theta - 3} \times \frac{-3}{5}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -1$

or $\cos\theta = \frac{15}{16}$ and $\sin\theta = \frac{\sqrt{31}}{16}$

so that point on ellipse is $\left(\frac{75}{16}, \frac{3\sqrt{31}}{16}\right)$.

Hence radius of circle is $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Hindi अधिकतम वृत्त होगा जो दीर्घवृत्त को बिन्दु $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$ पर स्पर्श करता है

$\Rightarrow$ बिन्दुओं $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$ और $(3, 0)$ को मिलाने वाली रेखा, बिन्दु $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$ पर दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा के लम्बवत् होगी।

जबकि $\dfrac{3\sin\theta}{5\cos\theta-3}\times\dfrac{-3}{5}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-1$

या $\cos\theta=\dfrac{15}{16}$ और $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{31}}{16}$

जबकि दीर्घवृत्त पर बिन्दु $\left(\dfrac{75}{16},\dfrac{3\sqrt{31}}{16}\right)$ है

अतः वृत्त की त्रिज्या $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$ है।

17. Minimum length of the intercept made by the axes on the tangent to the ellipse $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}=1$ is equal to

Ans. **15.00**

दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}=1$ पर खींची गयी किसी स्पर्श रेखा पर अक्षों द्वारा काटे गये अन्तः खण्ड की न्यूनतम लम्बाई होगी।

Sol. Equation of a tangent to the given ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ .....(1)

can be chosen as $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ .....(2)

The coordinates of the intersection points of this tangent with the coordinate axes are

$$\left(0, \sqrt{a^2m^2+b^2}\right) \text{ and } \left(\frac{-\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m}, 0\right)$$

Length of the intercept made by the coordinate axes on the tangent is given by the equation

$$\ell^2 = \left(1+\frac{1}{m^2}\right)(a^2m^2+b^2)$$

The value of m for which ℓ is minimum (by calculus), is given by

$$\frac{d(\ell^2)}{dm} = -\left(\frac{2}{m^3}\right)(a^2m^2+b^2)+2a^2m\left(1+\frac{1}{m^2}\right)=0 \qquad .....(3)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2a^2}{m}-\frac{2b^2}{m^3}+2a^2m+\frac{2a^2}{m}=0$$

$$2m\left(a^2-\frac{b^2}{m^4}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad m=0, \text{ not possible}$$

$$m^4=\frac{b^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad m^2=+\frac{b}{a}$$

Putting this value of m^2 in equation (3), gives the minimum value of $\ell = a + b$.

Hindi. माना दिये गये दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ .....(1)

की स्पर्श रेखा $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ .....(2) है।

यह स्पर्श रेखा निर्देश अक्षों को जिन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, वें हैं– $\left(0, \sqrt{a^2m^2+b^2}\right)$ and $\left(\frac{-\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m}, 0\right)$

स्पर्श रेखा द्वारा निर्देश अक्षों पर बनाए गये अन्तःखण्ड की लम्बाई निम्न द्वारा दी जाती है

$$\ell^2 = \left(1+\frac{1}{m^2}\right)(a^2m^2 + b^2)$$

ℓ के न्यूनतम मान हेतु m का मान ज्ञात करने के लिए कलन विधि के प्रयोग से–

$$\frac{d(\ell^2)}{dm} = -\left(\frac{2}{m^3}\right)(a^2m^2 + b^2) + 2a^2m\left(1+\frac{1}{m^2}\right) = 0 \qquad .....(3)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2a^2}{m} - \frac{2b^2}{m^3} + 2a^2m + \frac{2a^2}{m} = 0$$

$$2m\left(a^2 - \frac{b^2}{m^4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0, \text{ not possible}$$

$$m^4 = \frac{b^2}{a^2}$$

लेकिन $m = 0$ सम्भव नहीं है। अतः $\Rightarrow$ $m^2 = +\frac{b}{a}$

m^2 का मान समीकरण (3) में रखने पर ℓ का न्यूनतम मान $\ell = a + b$ प्राप्त होता है।

18. If the distance of the centre of the ellipse $4(x - 2y + 1)^2 + 9(2x + y + 2)^2 = 25$ from the origin is λ times its eccentricity, then λ^2 is :

यदि दीर्घवृत्त $4(x - 2y + 1)^2 + 9(2x + y + 2)^2 = 25$ के केन्द्र की मूलबिन्दु से दूरी, इसकी उत्केन्द्रता की λ गुनी है तब λ^2 का मान है–

Ans. 01.80

Sol. $$\frac{\left(\frac{x-2y+1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{2x+y+2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{5}}{2}, b = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

equation of major axis is $2x + y + 2 = 0$, equation of minor exis is $x - 2y + 1 = 0$.

$\Rightarrow$ centre is $(-1, 0)$ and $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

as given $\sqrt{2} = \lambda.\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\Rightarrow$ $5\lambda^2 = 9$

Hindi. $$\frac{\left(\frac{x-2y+1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{2x+y+2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 1 \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{5}}{2}, b = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

दीर्घ अक्ष का समीकरण $2x + y + 2 = 0$, लघु अक्ष का समीकरण $x - 2y + 1 = 0$ है।

$\Rightarrow$ केन्द्र $(-1, 0)$ तथा $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ है।

तथा दिया गया है $\sqrt{2} = \lambda.\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\Rightarrow$ $5\lambda^2 = 9$

19. The radius of the largest circle with centre (1, 0) that can be inscribed in the ellipse $x^2 + 4y^2 = 16$ is r then r^2 is

दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 16$ के अन्दर (1, 0) केन्द्र वाले बड़े से बड़े अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या r हो तो r^2 का मान होगा–

Ans. 03.66 or 03.67

Sol. Equation of circle

$x-1 = r\cos\theta$

$y-0 = r\sin\theta$

lies in ellipse $\therefore$ $S < 0$

$\Rightarrow$ $(1+ r\cos\theta)^2 + 4(r\sin\theta)^2 - 16 < 0$

$\Rightarrow$ $3r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 15 - 4r^2 > 0$

$\because$ $a = 3r^2 > 0$ $\therefore$ $f(\theta) > 0$ $\forall\theta \in R$

$\therefore$ $D < 0$

$4r^2 - 4\times 3r^2(15-4r^2) < 0$

$4r^2[3r^2 - 11] < 0$

$4r^2[3r^2 - 11] < 0$

$\because$ $r^2 > 0$ $\therefore$ $3r^2 - 11 < 0$

$r^2 < \frac{11}{3}$

Hence equation of circle

$(x-1)^2 + y^2 = \frac{11}{3}$

Hindi. अभीष्ट वृत्त का समीकरण होगा

$x-1 = r\cos\theta$

$y-0 = r\sin\theta$ जबकि r वृत्त की त्रिज्या है।

यह वृत्त, दीर्घवृत्त के अन्दर स्थित है अतः $S < 0$

$\Rightarrow$ $(1+ r\cos\theta)^2 + 4(r\sin\theta)^2 - 16 < 0$

$\Rightarrow$ $3r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 15 - 4r^2 > 0$ $\Rightarrow f(\theta) > 0$ जबकि $f(\theta)$, $\cos\theta$ के पदों में द्विघात व्यंजक है

उपरोक्त में चूँकि $a = 3r^2 > 0$ $\therefore$ $f(\theta) > 0$ $\forall\theta \in R$

$\therefore$ $D < 0$

$\Rightarrow 4r^2 - 4\times 3r^2(15-4r^2) < 0$

$\Rightarrow 4r^2[3r^2 - 11] < 0$

$\Rightarrow 4r^2[3r^2 - 11] < 0$

$\because$ $r^2 > 0$ $\therefore$ $3r^2 - 11 < 0$

$r^2 < \frac{11}{3}$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण है

$(x-1)^2 + y^2 = \frac{11}{3}$

20. Common tangents are drawn to the parabola $y^2 = 4x$ & the ellipse $3x^2 + 8y^2 = 48$ touching the parabola at A & B and the ellipse at C & D, then the area of the quadrilateral ABCD is

परवलय $y^2 = 4x$ तथा दीर्घवृत्त $3x^2 + 8y^2 = 48$ पर खींची गई उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ परवलय को A एवं B पर तथा दीर्घवृत्त को C एवं D पर स्पर्श करती है, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल होगा–

Ans. 77.78

Sol. $y^2 = 4x$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$

For common tangent

$\frac{1}{m} = \pm\sqrt{6m^2 + 6}$

$\Rightarrow$ $m = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ Equation of tangent

$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + 2\sqrt{2}$ given $\frac{xx_1}{16} + \frac{yy_1}{6} = 1$

$yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\Rightarrow$ $x_1 = 8,\ y_1 = 4\sqrt{2}$ $x_3 = 2,$ $y_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $x_2 = 8,\ y_1 = -4\sqrt{2}$ $x_4 = -2,$ $y_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore A = \frac{1}{2} \times \left[8\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{2}}\right] \times (10)$

$= 55\sqrt{2}$

Hindi. दिया गया परवलय है $y^2 = 4x$,

दिया गया दीर्घवृत्त है $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$

परवलय एवं दीर्घवृत्त की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा हेतु

$\frac{1}{m} = \pm\sqrt{6m^2 + 6}$

$\Rightarrow$ $m = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण होगा–

$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + 2\sqrt{2}$ दिया है $\frac{xx_1}{16} + \frac{yy_1}{6} = 1$

$yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\Rightarrow$ $x_1 = 8,\ y_1 = 4\sqrt{2}$ $x_3 = 2,$ $y_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $x_2 = 8,\ y_1 = -4\sqrt{2}$ $x_4 = -2,$ $y_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore A = \frac{1}{2} \times \left[8\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{2}}\right] \times (10)$

$= 55\sqrt{2}$

21. A circle of radius r is concentric with the ellipse $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ and the common tangent is inclined to the major axis at an angle of $\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{r^2 - \beta^2}{\alpha^2 - r^2}\right)}$; $r \in (b, a)$ then the value of $|\alpha| + |\beta|$ is

एक r त्रिज्या का वृत्त, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ के संकेन्द्रीय है और उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दीर्घ अक्ष से $\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{r^2 - \beta^2}{\alpha^2 - r^2}\right)}$ कोण पर झुकी हुई है, जबकि $r \in (b, a)$ तब $|\alpha| + |\beta|$ का मान है–

Ans. **0**7.00

Sol. $x^2 + y^2 = r^2$ $\Rightarrow$ $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\Rightarrow$ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

For common tangent उभयनिष्ठस्पर्श रेखा के लिए

$r^2(1 + m^2) = a^2 m^2 + b^2$

$r^2 + r^2m^2 = a^2m^2 + b^2$

$$\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2} = m^2$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}}$$

22. If CF is perpendicular from the centre of the ellipse $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ to the tangent at P, and G is the point where the normal at P meets the major axis, then the product CF · PG is

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ के बिन्दु P पर खीचीं गयी स्पर्श रेखा पर केन्द्र से डाला गया लम्ब CF हैं तथा G वह बिन्दु है जहाँ P पर अभिलम्ब, दीर्घ अक्ष को मिलता है, तब गुणनफल CF · PG का मान है –

Ans. 09.00

Sol. Standard result (मानक परिणाम)

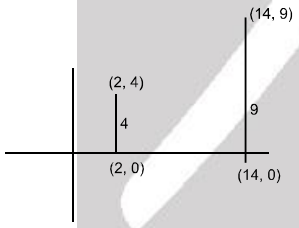
23. The eccentricity of an ellipse whose focii are (2, 4) & (14, 9) and touches x-axis is $\frac{\lambda}{\sqrt{313}}$ then the value of λ is

उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता, जिसकी नाभियाँ (2, 4) तथा (14, 9) है तथा जो x-अक्ष को स्पर्श करता है, $\frac{\lambda}{\sqrt{313}}$ है तब λ का मान है–

Ans. 13.00

Sol. $2\,ae = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = 13$

$b^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad ae = \frac{13}{2}$

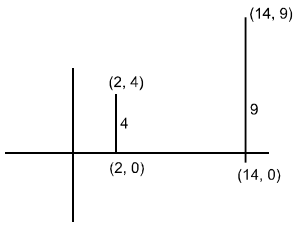


$b = 6$

$a^2 = \frac{169}{4} + 36 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{313}}{2} \qquad e = \frac{13}{\sqrt{313}}$

Hindi. $2\,ae = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = 13$

एवं $b^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad ae = \frac{13}{2}$



$b = 6$

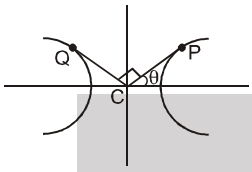
$a^2 = \frac{169}{4} + 36 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{313}}{2} \qquad e = \frac{13}{\sqrt{313}}$

24. If two points P & Q on the hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ whose centre is C be such that CP is perpendicular to CQ & a < b, then $\frac{1}{CP^2}+\frac{1}{CQ^2}=\lambda\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$ where λ is :

Ans. 01.00

यदि अतिपरवलय $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ पर दो बिन्दु P व Q इस प्रकार है कि CP एवं CQ लम्बवत् है एवं a < b (जहाँ C अतिपरवलय का केन्द्र है), तो $\frac{1}{CP^2}+\frac{1}{CQ^2}=\lambda\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$ जहाँ λ है–

Sol.



$CP \equiv = \frac{x-0}{\cos\theta} = \frac{y-0}{\sin\theta}\ r_1$ where $CP = r_1$

$\therefore$ $P(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$

Similarly $Q\left(r_2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), r_2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

$Q(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$

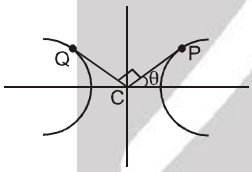
P & Q lies on Hyperbola

$\therefore\ r_1^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$

$\therefore\quad r_1^2=\frac{a^2b^2}{(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)}$ & $r_2^2=\frac{a^2b^2}{(b^2\sin^2\theta-a^2\cos^2\theta)}$

$\therefore\quad \frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ H.P.

Hindi.



$CP \equiv = \frac{x-0}{\cos\theta} = \frac{y-0}{\sin\theta}\ r_1$ जहाँ $CP = r_1$

$\therefore$ $P(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$

समानतः $Q\left(r_2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), r_2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

$Q(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$

P तथा Q अतिपरवलय पर स्थित है

$\therefore\ r_1^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$

$\therefore\quad r_1^2=\frac{a^2b^2}{(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)}$ तथा $r_2^2=\frac{a^2b^2}{(b^2\sin^2\theta-a^2\cos^2\theta)}$

$\therefore\quad \frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ इति सिद्धम।

25. If $x^2 + pxy + qy^2 + rx - sy + 11 = 0$ is the eqaution of the hyperbola whose one focus is (–1, 1), eccentricity = 3 and the equation of the corresponding directrix is $x - y + 3 = 0$, then the value of 's' is :

यदि $x^2 + pxy + qy^2 + rx - sy + 11 = 0$ अतिपरवलय का समीकरण है जिसकी नाभि (–1, 1), तथा उत्केन्द्रता e = 3 तथा संगत नियता का समीकरण $x - y + 3 = 0$ है तथा 's' का मान है–

Ans. 07.14

Sol. Let P(x, y) be any point on the hyperbola

Then by focus directrix property $\dfrac{\text{distance of P from the focus}}{\text{distance of P from the directrix}} = e = 3$

$$\therefore \left|\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}{\dfrac{x-y+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}}\right| = 3 \quad \text{or} \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \cdot \left(\frac{x-y+3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

or $7x^2 - 18xy + 7y^2 + 50x - 50y + 77 = 0$

Hindi. माना P(x, y) अतिपरवलय पर कोई बिन्दु है तब

नियता नाभि गुणधर्म से $\dfrac{\text{distance of P from the focus}}{\text{distance of P from the directrix}} = e = 3$

$$\therefore \left|\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}{\dfrac{x-y+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}}\right| = 3 \quad \text{या} \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \cdot \left(\frac{x-y+3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

या $7x^2 - 18xy + 7y^2 + 50x - 50y + 77 = 0$

26. The hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ passes through the point of intersection of the lines, $7x + 13y - 87 = 0$ & $5x - 8y + 7 = 0$ & the latus rectum is $32\sqrt{2}/5$. The value of $(a^2 + b^2)$ is :

अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ रेखाओं $7x + 13y - 87 = 0$ और $5x - 8y + 7 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरता है तथा नाभिलम्ब की लम्बाई $32\sqrt{2}/5$ है, $(a^2 + b^2)$ का मान है–

Ans. 28.50

Sol. $7x + 13y - 87 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 8y + 7 = 0$

On solving we get (5,4)

Now let hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\because$ Passes (5,4) $\quad \therefore \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1$ .....(i)

Also, $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{32\sqrt{2}}{5}$ ....(ii)

By (i), (ii) we get $a^2 = \dfrac{25}{2}$, $b^2 = 16$.

Hindi. $7x + 13y - 87 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 8y + 7 = 0$

हल करने पर हमें (5,4) प्राप्त होता है। अब माना अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\because$ (5,4) से गुजरता है $\quad \therefore \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1$ ... (i)

$\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{32\sqrt{2}}{5}$ ... (ii)

(i) तथा (ii) से हमें $a^2 = \frac{25}{2}$, $b^2 = 16$ प्राप्त होता है।

27. If θ is acute angle between tangents to the hyperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ which passes through the point of contact of $3x - 4y = 5$ and $x^2 - 4y^2 = 5$ then $\cot\theta$ is

Ans. 05.50

यदि θ अतिपरवलय $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ पर सरल रेखा $3x - 4y = 5$ तथा $x^2 - 4y^2 = 5$ के स्पर्श बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य न्यूनकोण हो तो गुजरती है, तो $\cot\theta$ का मान होगा–

Sol. Let (x_1, y_1) be the pt, of contact of tangent

$3x - 4y = 5$ to $x^2 - 4y^2 = 5$ Solving we have

$\Rightarrow$ $(x_1, y_1) = (3, 1)$

Now any tangent to $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ is

$y = mx \pm \sqrt{25m^2 - 16}$

$\Rightarrow$ $y^2 + m^2x^2 - 2mxy = 25m^2 - 16$ .....(i)

$\because$ (1) passes through (3, 1)

$\therefore$ $16m^2 + 6m - 17 = 0$ .....(ii)

Let m_1 & m_2 be the roots of (ii) and $m_1 + m_2 = -\frac{3}{8}$ and $m_1 m_2 = \frac{-17}{16}$

$\cot\theta = \left|\frac{1 - m_1m_2}{m_1 + m_2}\right| = \frac{33}{6}$

Hindi. मानाकि (x_1, y_1) स्पर्श बिन्दु है, तो

$3x - 4y = 5$ एवं $x^2 - 4y^2 = 5$ से

$(x_1, y_1) = (3, 1)$

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ की कोई स्पर्श रेखा $y = mx \pm \sqrt{25m^2 - 16}$ है।

$\Rightarrow$ $y^2 + m^2x^2 - 2mxy = 25m^2 - 16$ .....(i)

$\because$ (1) बिन्दु (3, 1) से गुजरती है।

$\therefore$ $16m^2 + 6m - 17 = 0$ .....(ii)

मानाकि समीकरण (ii) के मूल m_1 एवं m_2 है।

$m_1 + m_2 = -\frac{3}{8}$ तथा $m_1 m_2 = \frac{-17}{16}$

$\cot\theta = \left|\frac{1 - m_1m_2}{m_1 + m_2}\right| = \frac{33}{6}$

28. Tangents are drawn from the point $(\alpha, 2)$ to the hyperbola $3x^2 - 2y^2 = 6$ and are inclined at angles θ & ϕ to the x –axis . If $\tan\theta \cdot \tan\phi = 2$, then the value of α^2 is

बिन्दु $(\alpha, 2)$ से अतिपरवलय $3x^2 - 2y^2 = 6$ पर स्पर्श रेखाऐं खींची गई है और वे x-अक्ष से θ व ϕ कोण बनाती है। यदि $\tan\theta \cdot \tan\phi = 2$ हो, तो α^2 का मान है–

Ans **05.50**

Sol. $3x^2 - 2y^2 = 6$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Let the equation of tangent

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

passes through (α, β)

$(\beta - m\alpha)^2 = a^2m^2 - b^2$

$m^2\alpha^2 + \beta^2 - 2m\alpha\beta = a^2m^2 - b^2$

$m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\alpha\beta + \beta^2 + b^2 = 0$

$$m_1m_2 = \frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 - a^2} = 2$$

$2\alpha^2 - 2a^2 = \beta^2 + b^2$

or $2\alpha^2 - 4 = \beta^2 + 3$

$\beta^2 = 2\alpha^2 - 7$

Hindi $3x^2 - 2y^2 = 6$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

माना स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ है

जो (α, β) से गुजरती है।

$(\beta - m\alpha)^2 = a^2m^2 - b^2$

$m^2\alpha^2 + \beta^2 - 2m\alpha\beta = a^2m^2 - b^2$

$m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\alpha\beta + \beta^2 + b^2 = 0$

$$m_1m_2 = \frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 - a^2} = 2$$

$2\alpha^2 - 2a^2 = \beta^2 + b^2$

या $2\alpha^2 - 4 = \beta^2 + 3$

$\beta^2 = 2\alpha^2 - 7$

29. C the centre of the hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. The tangents at any point P on this hyperbola meets the striaght lines $4x - 3y = 0$ and $4x + 3y = 0$ in the points Q and R respectively. Then CQ. CR =

Ans. 0025

यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ का केन्द्र C है, तथा अतिपरवलय के किसी बिन्दु P पर स्पर्श रेखा खींची जाती है जो कि सरल रेखाओं $4x - 3y = 0$ तथा $4x + 3y = 0$ को क्रमशः Q एवं R पर मिलती है तो CQ . CR का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. P is $(3\sec\theta, 4\tan\theta)$

Tangent at P is $\frac{x}{3}\sec\theta - \frac{y}{4}\tan\theta = 1$

It meets $4x - 3y = 0$ i.e. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ in Q

$\therefore$ Q is $\left(\frac{3}{\sec\theta - \tan\theta}, \frac{4}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$

It meets $4x + 3y = 0$

i.e. $\frac{x}{3} = -\frac{y}{4}$ in R

$\therefore$ $R\left(\frac{3}{\sec\theta+\tan\theta}, \frac{-4}{\sec\theta+\tan\theta}\right)$ is

$\therefore$ $CQ.CR = \left(\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sec\theta-\tan\theta}\right)\left(\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sec\theta+\tan\theta}\right) = 25$

Hindi. बिन्दु P (3secθ, 4 tanθ) है।

बिन्दु P पर स्पर्श रेखा $\frac{x}{3}\sec\theta - \frac{y}{4}\tan\theta = 1$ है।

यह $4x - 3y = 0$ अर्थात् $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ को Q पर मिलती है।

$\therefore$ $Q\left(\frac{3}{\sec\theta-\tan\theta}, \frac{4}{\sec\theta-\tan\theta}\right)$ है।

यह $4x + 3y = 0$ अर्थात् $\frac{x}{3} = -\frac{y}{4}$ को R पर मिलती है।

$\therefore$ $R\left(\frac{3}{\sec\theta+\tan\theta}, \frac{-4}{\sec\theta+\tan\theta}\right)$ है।

$\therefore$ $CQ.CR = \left(\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sec\theta-\tan\theta}\right)\left(\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sec\theta+\tan\theta}\right) = 25$

30. If radii of director circles of $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ and $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ are 2r and r respectively and e_e and e_h be the eccentricities of the ellipse and the hyperbola respectively then $e_h^2 - e_e^2$ is equal to

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के नियामक वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 2r एवं r तथा उत्केन्द्रताएँ क्रमशः e_e एवं e_h है, तो $e_h^2 - e_e^2$ का मान है–

Ans **01.20**

Sol. Equation of director circles of ellipse and hyperbola are respectively.

दीर्घवृत्त तथा अतिपरवलय के नियामक वृत्तों की समीकरणें क्रमशः है–

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

and और $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

$a^2 + b^2 = 4r^2$ .....(1)

$a^2 - b^2 = r^2$ .....(2)

So इसलिए $2a^2 = 5r^2$

$a^2 = \frac{5r^2}{2}$

$b^2 = 4r^2 - \frac{5r^2}{2}$

$b^2 = \frac{3r^2}{2}$

$\because$ $e_e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $e_e^2 = 1 - \frac{3r^2}{2}\times\frac{2}{5r^2} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\because$ $e_h^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $e_h^2 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

So $e_h^2 - e_e^2 = \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$

31. The sum of lengths of perpendiculars drawn from focii to any real tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ is always greater than a, then find maximum value of a.

अतिपरवलय $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ की किसी स्पर्श रेखा से नाभियों पर लम्बों की लम्बाईयों का योगफल सदैव a से बड़ा है तब a का अधिकतम मान है।

Ans. **06.00**

Sol. Let S and S′ be the focii and b be the length of semi-minor axis of the hyperbola.

Let A and B be the feet of perpendiculars from the focii upon any tangent.

We have to prove that $AS + BS' \geq 2b$

We know that, $AS \times BS' = b^2$

Applying A. M $\geq$ G. M **[1]**

$$\frac{AS+BS'}{2} \geq \sqrt{b^2}$$

$AS + BS' \geq 2b$. **[1]**

Hindi माना S तथा S′ नाभियां है और b अतिपरवलय की अर्द्धलघु अक्ष की लम्बाई ह।

माना A और B से किसी स्पर्श रेखा पर नाभियों से डाले गये लम्बों के लम्बपाद् है।

चूंकि $AS + BS' \geq 2b$

हम जानते है कि, $AS \times BS' = b^2$

A. M $\geq$ G. M से **[1]**

$$\frac{AS+BS'}{2} \geq \sqrt{b^2}$$

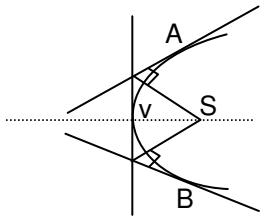
$AS + BS' \geq 2b$.

32. Let tangent at point A, B and vertex (V) of parabola is $x - 2y + 1 = 0$, $3x + y + 4 = 0$ and $y = x$ respectively. If focus of parabola is (a, b) then find the value of (5a + b).

माना A और B पर स्पर्शरेखा तथा परवलय का शीर्ष (V) क्रमशः $x - 2y + 1 = 0$ और $3x + y + 4 = 0$ और $y = x$ पर है यदि परवलय की नाभि (a, b) है तब (5a + b).का मान है–

Ans. 07.71

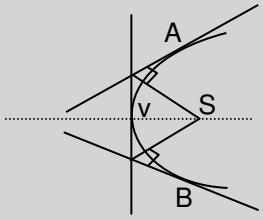
Sol. Tangent at A and tangent at v intersect at (1, 1) line $\perp$ to $x - 2y + 1 = 0$ & passing through (1, 1) is $2x + y - 3 = 0$. Tangent at B and tangent at v intersect at (–1, 1). Line $\perp$ to $3x + y + 4 = 0$ and passing through (–1, –1) is $x - 3y - 2 = 0$



Focus is point intersection of $2x + y - 3 = 0$ & $x - 3y - 2 = 0$ which is $\left(\frac{11}{7}, \frac{-1}{7}\right)$

Hindi. A पर स्पर्श रेखा तथा v पर स्पर्श रेखा, (1, 1) पर प्रतिच्छेद करती है। रेखा $x - 2y + 1 = 0$ के लम्बवत् तथा (1, 1) से गुजरने वाली रेखा $2x + y - 3 = 0$ है।

B पर स्पर्श रेखा और v पर स्पर्श रेखा (–1, 1) पर रेखा $3x + y + 4 = 0$ के लम्बवत् है तथा (–1, –1) से गुजरती है $x - 3y - 2 = 0$ है।



नाभि, $2x + y - 3 = 0$ और $x - 3y - 2 = 0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है। जो कि $\left(\frac{11}{7}, \frac{-1}{7}\right)$

33. If common tangent of $x^2 + y^2 = r^2$ and $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ forms square then find its area.

यदि वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ और दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ की उभयनिष्ठ जीवा एक वर्ग बनाती है, तब इसका क्षेत्रफल है–

Ans. 50

Sol. $16 + 9 = r^2 + r^2 \Rightarrow \quad r = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Area of square is वर्ग का क्षेत्रफल $\frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{10}{\sqrt{2}} = 50$

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

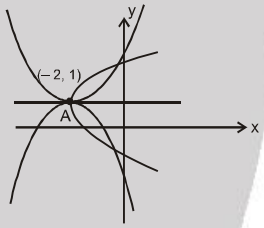
1. Let A be the vertex and L the length of the latus rectum of the parabola, $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$. The equation of the parabola with A as vertex, 2L the length of the latus rectum and the axis at right angles to that of the given curve is:

माना कि परवलय $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$ का शीर्ष A तथा नाभिलम्ब की लम्बाई L है। उस परवलय का समीकरण होगा जिसका शीर्ष A और नाभिलम्ब की लम्बाई 2L है तथा अक्ष दिये गये वक्र से समकोण अन्तरित करता है।

(A*) $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$ (B*) $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$

(C) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 4y + 8 = 0$

Sol. $y^2 - 2y = 4x + 7 \Rightarrow (y-1)^2 = 4x + 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 4(x+2)$



Equation of required parabolas is अभीष्ट परवलय का समीकरण

$(x+2)^2 = 8(y-1)$ & तथा $(x+2)^2 = -8(y-1)$

2. The locus of the mid point of the focal radii of a variable point moving on the parabola, $y^2 = 4ax$ is a parabola whose

(A*) Latus rectum is half the latus rectum of the original parabola

(B*) Vertex is (a/2, 0)

(C*) Directrix is y-axis

(D*) Focus has the co-ordinates (a,0)

परवलय $y^2 = 4ax$ पर गतिशील चर बिन्दु की नाभीय त्रिज्या के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ एक ऐसा परवलय होता है–

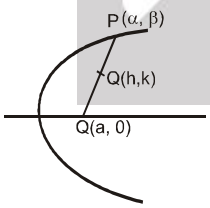
(A*) जिसका नाभिलम्ब, दिये गये परवलय के नाभिलम्ब का आधा होता है

(B*) जिसका शीर्ष (a/2, 0) है।

(C*) जिसकी नियता y-अक्ष है।

(D*) जिसकी नाभि के निर्देशांक (a,0) है।

Sol.



$h = \frac{a+\alpha}{2}, k = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = 2h - a, \beta = 2k$

α, β satisfies the parabola α, β परवलय को संतुष्ठ करता है।

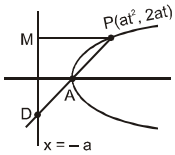
$\therefore \beta^2 = 4a\alpha \Rightarrow 4k^2 = 4a(2h - a) \Rightarrow y^2 = a(2x - a) \Rightarrow y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$

3. P is a point on the parabola $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ whose vertex is A. PA is produced to meet the directrix in D and M is the foot of the perpendicular from P on the directrix. If a circle is described on MD as a diameter then it intersects the x–axis at a point whose co–ordinates are:

एक बिन्दु P परवलय $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ जिसका शीर्ष A है, पर स्थित है। PA को इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि यह नियता को D पर मिलती है और P से नियता पर डाले गये लम्ब का पाद M हो, तो MD को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त x-अक्ष को जिन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है, उनके निर्देशांक है–

(A*) $(-3a, 0)$ (B) $(-a, 0)$ (C) $(-2a, 0)$ (D*) $(a, 0)$

Sol.



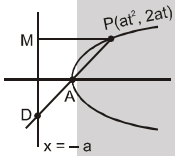
Equation of PA is

$y = \frac{2}{t}x$ ..... (i)

$D\left(-a, \frac{-2a}{t}\right)$ $M(-a, 2at)$

write the equation of circle with MD as diameter
and then solve with x - axis

Hindi



PA का समीकरण $y = \frac{2}{t}x$ ..... (i)

$D, \left(-a, \frac{-2a}{t}\right)$ $M(-a, 2at)$

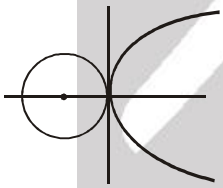
MD को व्यास मानकर वृत्त का समीकरण लिखिए तथा x- अक्ष के साथ हल कीजिए।

4. Let $y^2 = 4ax$ be a parabola and $x^2 + y^2 + 2bx = 0$ be a circle. If parabola and circle touch each other externally then:

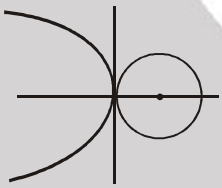
माना कि एक परवलय $y^2 = 4ax$ है और एक वृत्त $x^2 + y^2 + 2bx = 0$ है। यदि परवलय और वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हो, तो–

(A*) $a > 0, b > 0$ (B) $a > 0, b < 0$ (C) $a < 0, b > 0$ (D*) $a < 0, b < 0$

Sol.



$a > 0, b > 0$



$a < 0, b < 0$

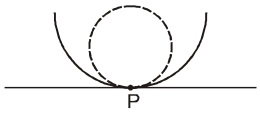
5. P is a point on the parabola $y^2 = 4x$ where abscissa and ordinate are equal. Equation of a circle passing through the focus and touching the parabola at P is: **[16JM110569]**

परवलय $y^2 = 4x$ पर स्थित कोई बिन्दु P है जहाँ भुज और कोटि बराबर है। नाभि से गुजरने वाले और परवलय को P पर स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है–

(A*) $x^2 + y^2 - 13x + 2y + 12 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 3x - 18y + 2 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 13x - 2y - 14 = 0$ (D*) $x^2 + y^2 - x = 0$

Sol. $at^2 = 2at$ point



$t = 0, t = 2$ $(0, 0), (4, 4)$

(I) when $P \equiv (0, 0)$

$x^2 + y^2 + \lambda(x) = 0$

pass the (1, 0)

$\lambda = -1$ equation tagent al (0, 0)

$y^2 = 4x$

Equ. $x^2 + y^2 - x = 0$ $y.\ y_1 = 2\ (x + x_1)$

$x = 0$

(II) when point (4, 4) $2x - 2y + 8 = 0$

$(x-4)^2 + (y-4)^2 + \mu\ (2x - 2y + 8) = 0$

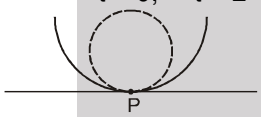
pass (1, 0)

Equation

$x^2 + y^2 - 13x + 2y + 12 = 0$

Hindi. $at^2 = 2at$ बिन्दु

$t = 0,\quad t = 2$ (0, 0), (4, 4)



(I) जब $P \equiv (0, 0)$

$x^2 + y^2 + \lambda\ (x) = 0$

बिन्दु (1, 0) से गुजरता है।

$\lambda = -1$ $y^2 = 4x$ के बिन्दु (0, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

समीकरण $x^2 + y^2 - x = 0$ $y.\ y_1 = 2\ (x + x_1)$

$x = 0$

(II) जब बिन्दु (4, 4) है। $2x - 2y + 8 = 0$

$(x-4)^2 + (y-4)^2 + \mu\ (2x - 2y + 8) = 0$

बिन्दु (1, 0) से गुजरता है।

समीकरण $x^2 + y^2 - 13x + 2y + 12 = 0$

6. Subset of complete set of values of m for which a chord of slope m of the circle $x^2 + y^2 = 4$ touches parabola $y^2 = 4x$, can be

m के मानों का सम्पूर्ण समुच्चय का उपसमुच्चय, जबकि वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की प्रवणता m की एक जीवा, परवलय $y^2 = 4x$ को स्पर्श करती है, अन्तराल में स्थित है–

(A*) $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ (B) (0 , 1/2)

(C*) $\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}, \infty\right)$ (D) (–1/2, 0)

Sol. Tangent of slope 'm' to the parabola $y^2 = 4x$ is

$y = mx + \dfrac{1}{m}$ it should be chord of the circle $x^2 + y^2 = 4$ whose centre (0, 0) and radius = 2 then

Line $y - mx - \dfrac{1}{m} = 0$ is a chord so $\left|\dfrac{0 - 0 - 1/m}{\sqrt{1+m^2}}\right| < 2$

$\dfrac{1}{m^2} < 4(1 + m^2)$

$\Rightarrow$ $4m^4 + 4m^2 - 1 > 0$

$m^2 = t$

$4t^2 + 4t - 1 > 0$ $\Rightarrow$ $t \in \left(-\infty, -\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, \infty\right)$

But $t = m^2$

hence $m^2 \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \infty\right)$

$$m \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \infty\right)$$

Hindi. 'm' प्रवणता वाली परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा $y = mx + \frac{1}{m}$ जो वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की जीवा है जबकि वृत्त का केन्द्र (0, 0) एवं त्रिज्या 2 है, तब रेखा $y - mx - \frac{1}{m} = 0$ जो कि जीवा है।

अतः $\left|\frac{0-0-1/m}{\sqrt{1+m^2}}\right| < 2$

$\frac{1}{m^2} < 4(1 + m^2)$

$\Rightarrow$ $4m^4 + 4m^2 - 1 > 0$

$m^2 = t$

$4t^2 + 4t - 1 > 0$

$$t \in \left(-\infty, -\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \infty\right)$$

लेकिन $t = m^2$ अतः $m^2 \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \infty\right)$

$$m \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \infty\right)$$

7. Locus of the centre of the circle passing through the vertex and the mid-points of perpendicular chords from the vertex of the parabola $y^2 = 4ax$ is.

(A) is a parabola with vertex (–a, a)

(B*) is a parabola with latus rectum a

(C*) is a parabola with vertex (2a,0)

(D) is a parabola with latus rectum $\frac{a}{2}$

परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष से लम्बवत् जीवाओं के मध्य बिन्दुओं और शीर्ष से गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होगा

(A) एक परवलय जिसका शीर्ष (–a, a) है।

(B*) एक परवलय जिसका नाभिलम्ब a है।

(C*) एक परवलय जिसका शीर्ष (2a,0) है।

(D) एक परवलय जिसका नाभिलम्ब $\frac{a}{2}$ है।

Sol. $t_1t_2 = -4$

$$\Rightarrow P \equiv \left(\frac{at_1^2}{2}, at_1\right) \ \& \ Q \equiv \left(\frac{at_2^2}{2}, at_2\right)$$

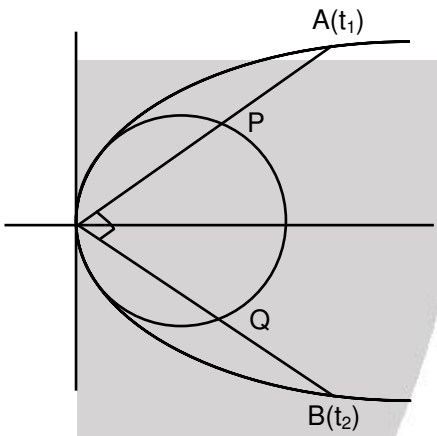
$$\Rightarrow h = \frac{a}{4}\left(t_1^2 + t_2^2\right) \ \& \ k = \frac{a}{2}\left(t_1 + t_2\right)$$

$\Rightarrow k^2 = \frac{a^2}{4}\left(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2\right)$

$\Rightarrow k^2 = a\left(\frac{a}{4}\right)\left(t_1^2 + t_2^2\right) - 2a^2$

$\Rightarrow k^2 + 2a^2 = ah$

$\Rightarrow k^2 = a(h - 2a)$



$\Rightarrow$ required locus is $y^2 = a(x - 2a)$.

$\Rightarrow$ required locus is अभीष्ट बिन्दु पथ $y^2 = a(x - 2a)$.

8. The equation, $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 43 = C$.

(A*) cannot represent a real pair of straight lines for any value of C

(B*) represents an ellipse, if $C > 0$

(C*) no locus, if $C < 0$

(D*) a point, if $C = 0$

समीकरण $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 43 = C$.

(A*) C के किसी भी मान के लिए वास्तविक सरल रेखा युग्म को प्रदर्शित नही करती है

(B*) एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करता है, यदि $C > 0$

(C*) कोई भी बिन्दुपथ प्रदर्शित नही करता, यदि $C < 0$

(D*) एक बिन्दु को प्रदर्शित करता है, यदि $C = 0$

Sol. $3(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = C$

if $C = 0$ a point

if $C > 0$ ellipse

if $C < 0$ no locus.

Hindi. दी गयी समीकरण है

$3(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = C$ ...(1)

यदि $C = 0$ तो समीकरण (1), एक बिन्दु को प्रदर्शित करेगी।

यदि $C > 0$ तो समीकरण (1), एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करेगी।

यदि $C < 0$ तो समीकरण (1), कोई बिन्दुपथ नहीं है।

9. If P is a point of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, whose focii are S and S′. Let $\angle PSS' = \alpha$ and $\angle PS'S = \beta$, then

(A*) $PS + PS' = 2a$, if $a > b$

(B*) $PS + PS' = 2b$, if $a < b$

(C*) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}$

(D) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\left[a-\sqrt{a^2-b^2}\right]$ when $a > b$

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ जिसकी नाभियाँ S तथा S′ है, पर एक बिन्दु P है। मानाकि $\angle PSS' = \alpha$ तथा $\angle PS'S = \beta$ हो, तो–

(A*) $PS + PS' = 2a$, यदि $a > b$

(B*) $PS + PS' = 2b$, यदि $a < b$

(C*) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}$

(D) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\left[a-\sqrt{a^2-b^2}\right]$ जब $a > b$

Sol. (A) Director circle नियामक वृत्त $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14$

(B) By definition परिभाषा से $2.b = 12$

(C) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-2ae)(s-b)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-2ae)(s-a)}{s(s-b)}}$

$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{s-2ae}{s} = \frac{a+ae-2ae}{a+ae} = \frac{a-ae}{a+ae} = \frac{1-e}{1+e}$

10. Let $A(\alpha)$ and $B(\beta)$ be the extremeties of a chord of an ellipse . If the slope of AB is equal to the slope of the tangent at a point $C(\theta)$ on the ellipse, then the value of θ, is

एक दीर्घवृत्त की किसी जीवा के सिरे क्रमशः $A(\alpha)$ तथा $B(\beta)$ है। यदि दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु $C(\theta)$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा की प्रवणता AB की प्रवणता के बराबर हो तो θ का मान होगा –

(A*) $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (B) $\frac{\alpha-\beta}{2}$ (C*) $\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi$ (D) $\frac{\alpha-\beta}{2}-\pi$

Sol. We have

Slope of AB = Slope of tangent at C

दिया है कि AB की प्रवणता = बिन्दु C पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$\Rightarrow \frac{b(\sin\beta-\sin\alpha)}{a(\cos\beta-\cos\alpha)} = \frac{-b\cos\theta}{a\sin\theta} \Rightarrow \frac{-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\alpha+\beta}{2} + n\pi\ (n \in I).$

11. Let F_1, F_2 be two focii of the ellipse and PT and PN be the tangent and the normal respectively to the ellipse at point P then

(A*) PN bisects $\angle F_1PF_2$ (B) PT bisects $\angle F_1PF_2$

(C*) PT bisects angle $(180° - \angle F_1PF_2)$ (D) None of these

माना F_1, F_2 नाभियों वाले दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर खींची गयी स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब क्रमशः PT एवं PN हो तो –

(A) PN कोण $\angle F_1PF_2$ को समद्विभाजित करता है।

(B) PT कोण $\angle F_1PF_2$ को समद्विभाजित करता है।

(C) PT कोण $(180° - \angle F_1PF_2)$ को समद्विभाजित करता है।

(D) इनमें से कोई नहीं

Sol. The tangent & normal at a point P on the ellipse bisect the external & internal angles between the focal distances of P.

So answer are (A) and (C)

Hindi. दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु P पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब, बिन्दु P की नाभीय दूरियों के मध्य बनें बाह्य एवं आन्तरिक कोणों के अर्धक होते हैं। अतः विकल्प (A) और (C) सही है।

12. If ℓ_1 be the equation of the common tangent in 1st quadrant to the circle $x^2 + y^2 = 16$ and ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ and λ_1 be the length of the intercept of the common tangent between the coordinate axes then

(A*) $\lambda_1 = \frac{14}{\sqrt{3}}$

(B*) Equation of ℓ_1 is $2x + \sqrt{3}y = 4\sqrt{7}$

(C) $\lambda_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

(D) Equation of ℓ_1 is $x + \sqrt{3}y = 4\sqrt{7}$

यदि वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ और दीर्घवृत $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ की प्रथम चतुर्थांश में उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण ℓ_1 है तथा निर्देशी अक्षों के मध्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा के अन्तखण्ड की लम्बाई λ_1 है तब

(A*) $\lambda_1 = \frac{14}{\sqrt{3}}$

(B*) ℓ_1 का समीकरण $2x + \sqrt{3}y = 4\sqrt{7}$

(C) $\lambda_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

(D) ℓ_1 का समीकरण $x + \sqrt{3}y = 4\sqrt{7}$

Sol. Equation of tangent to circle $y = mx + 4\sqrt{1+m^2}$

Equation of tangent to ellipse $y = mx + \sqrt{25m^2+4}$

Both represent the same line so

$$4\sqrt{1+m^2} = \sqrt{25m^2+4} \Rightarrow m = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

The tangent is at the point in first quadrant so $m < 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

So common tangent is $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + 4\sqrt{\frac{7}{3}}$

It meets the co-ordinate axis at $A(2\sqrt{7}, 0)$ and $B(0, 4\sqrt{7/3})$

So $AB = 14/\sqrt{3}$

Hindi. वृत्त की स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + 4\sqrt{1+m^2}$

दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \sqrt{25m^2+4}$

दोनों रेखाएँ एक ही रेखा को प्रदर्शित करती हैं इसलिए $4\sqrt{1+m^2} = \sqrt{25m^2+4} \Rightarrow m = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

प्रथम चतुर्थांश में स्थित बिंदु पर स्पर्श रेखा के लिए $m < 0$ $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

अतः उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + 4\sqrt{\frac{7}{3}}$

यह अक्षों को बिंदुओं $A(2\sqrt{7}, 0)$ और $B(0, 4\sqrt{7/3})$ पर काटती है।

इसलिए $AB = 14/\sqrt{3}$

13. Let E_1 and E_2 be two ellipses $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ and $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$ (where a is parameter) the locus of points of intersection of the ellipses E_1 and E_2 is a set of curves

माना E_1 और E_2 दो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ और $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$ (जहाँ a प्राचल है) तब दीर्घवृत्त E_1 और E_2 के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ किन वक्रो का समुच्चय है।

(A*) $y = x, y = -x, x^2 + y^2 = 1$

(B) $y = 2x, y = -2x, x^2 + y^2 = 4$

(C) $(4x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$

(D*) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

Sol. Let P (h, k) be the point of intersection of E_1 and E_2

$\Rightarrow \frac{h^2}{a^2}+k^2=1$

$\Rightarrow h^2 = a^2(1 - k^2)$ ... (1) **[1]**

and $\frac{h^1}{1}+\frac{k^2}{a^2}=1$

$\Rightarrow k^2 = a^2(1 - h^2)$ ... (2) **[1]**

Eliminating a from (1) and (2), we get

$\frac{h^2}{1-k^2}=\frac{k^2}{1-h^2} \Rightarrow h^2(1 - h^2) = k^2(1 - k^2)$

$\Rightarrow (h - k)(h + k)(h^2 + k^2 - 1) = 0$

Hence the locus is a set of curves consisting of the straight lines

$y = x, y = -x$ and circle $x^2 + y^2 = 1$. **[2]**

Hindi माना P (h, k), E_1 और E_2 का प्रतिच्छेद बिन्दु है

$\Rightarrow \frac{h^2}{a^2}+k^2=1$

$\Rightarrow h^2 = a^2(1 - k^2)$ ... (1) **[1]**

और $\frac{h^1}{1}+\frac{k^2}{a^2}=1$

$\Rightarrow k^2 = a^2(1 - h^2)$ ... (2) **[1]**

(1) और (2), से

$$\frac{h^2}{1-k^2} = \frac{k^2}{1-h^2} \Rightarrow h^2(1-h^2) = k^2(1-k^2)$$

$\Rightarrow (h-k)(h+k)(h^2+k^2-1) = 0$

अतः सरल रेखाओं $y = x$, $y = -x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ को रखने वाले वृक्र का बिन्दु पथ

14. If (5, 12) and (24, 7) are the foci of a conic, passing through the origin then the eccentricity of conic is

यदि (5, 12) व (24, 7) मूल बिन्दु से गुजरने वाले एक शांकव की नाभियाँ हैं, तो उस शांकव की उत्केन्द्रता है –

(A*) $\sqrt{386}/12$ (B) $\sqrt{386}/13$ (C) $\sqrt{386}/25$ (D*) $\sqrt{386}/38$

Sol. Distance between foci = $\sqrt{19^2+5^2} = \sqrt{386}$

Now by PS + S′P = 2a (for ellipse) (take point P at origin) we get a = 19

$\therefore$ $2ae = \sqrt{386} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{386}}{38}$

If conic is hyperbola $|PS - PS'| = 2a \Rightarrow a = 6$ by $2ae' = \sqrt{386}$

$e' = \frac{\sqrt{386}}{12}$

Hindi. नाभियों के मध्य दूरी = $\sqrt{19^2+5^2} = \sqrt{386}$

अब PS + S′P = 2a से (दीर्घवृत्त के लिए) (बिन्दु P मूल बिन्दु पर लेवें) हमें a = 19 प्राप्त होता है।

$\therefore$ $2ae = \sqrt{386} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{386}}{38}$

यदि शांकव अतिपरवलय है तो $|PS - PS'| = 2a \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2ae' = \sqrt{386}$ से

$e' = \frac{\sqrt{386}}{12}$

15. The equation of a hyperbola with co-ordinate axes as principal axes, if the distances of one of its vertices from the foci are 3 & 1 can be :

(A*) $3x^2 - y^2 = 3$ (B*) $x^2 - 3y^2 + 3 = 0$ (C) $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ (D) $x^2 - 3y^2 - 6 = 0$

निर्देशी अक्षों को मुख्य अक्ष लेते हुए एक अतिपरवलय का समीकरण, जिसके एक शीर्ष की नाभियों से दूरी क्रमशः 3 व 1 है, हो सकता है–

(A*) $3x^2 - y^2 = 3$ (B*) $x^2 - 3y^2 + 3 = 0$ (C) $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ (D) $x^2 - 3y^2 - 6 = 0$

Sol. Let one of the vertices be (a, 0)

Focii are (ae, 0) & (– ae, 0)

given that $ae - a = 1$ & $ae + a = 3$

$\Rightarrow$ $2ae = 4$ $\Rightarrow$ $ae = 2$

$\therefore$ $a = 1$ $\Rightarrow$ $e = 2$

$\therefore$ using $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $b^2 = 3$

$\therefore$ Required hyperbola is

$\therefore$ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$ $\Rightarrow$ $3x^2 - y^2 = 3$

Again, one more possibility is

$e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}$ $\Rightarrow$ $b^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore$ Hyperbola will be $x^2 - 3y^2 + 3 = 0$

Hindi. मानाकि एक शीर्ष (a, 0) है। नाभियाँ (ae, 0) एवं (– ae, 0) है।

दिया हुआ है $ae - a = 1$ तथा $ae + a = 3$

$\Rightarrow$ $2ae = 4$ $\Rightarrow$ $ae = 2$

$\therefore$ $a = 1$ $\Rightarrow$ $e = 2$

$\therefore$ $e^2 = 1 + \dfrac{b^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $b^2 = 3$

$\therefore$ अभीष्ट अतिपरवलय है

$\therefore$ $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ $\Rightarrow$ $3x^2 - y^2 = 3$ और एक संभावना है

$e^2 = 1 + \dfrac{a^2}{b^2}$ $\Rightarrow$ $b^2 = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ अतिपरवलय $x^2 - 3y^2 + 3 = 0$

16. A point moves such that the sum of the squares of its distances from the two sides of length 'a' of a rectangle is twice the sum of the squares of its distances from the other two sides of length 'b'. The locus of the point can be :

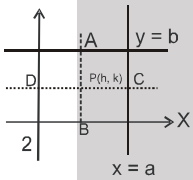
(A) a circle (B) an ellipse (C*) a hyperbola (D*) a pair of lines

एक बिन्दु इस प्रकार से गमन करता है कि उसकी किसी आयत की a लम्बाई की दो भुजाओं से दूरियों के वर्गों का योग b लम्बाई की शेष दो भुजाओं से दूरियों के वर्गों के योग का दुगना है, तो इस बिन्दु का बिन्दुपथ हो सकता है–

(A) एक वृत्त (B) एक दीर्घवृत्त (C*) एक अतिपरवलय (D*) एक रेखा युग्म

Sol. Let the two sides of the rectangle lie along x-axis & y axis as shown

Given that



$(PA)^2 + (PB)^2 = 2\ (PC^2 + PD^2)$ $\Rightarrow$ $k^2 + (k - b)^2 = 2\ (h^2 + (a - h)^2)$

$\Rightarrow$ $2k^2 - 2kb + b^2 = 4h^2 - 4ah + 2a^2$

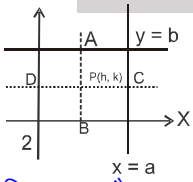
Replacing h by x and k by y

$\Rightarrow$ $2y^2 - 2by + b^2 = 4x^2 - 4ax + 2a^2$ $\Rightarrow$ $2(y^2 - by) + b^2 = 4(x^2 - ax) + 2a^2$

$$2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2} - a^2$$

Hence it is a hyperbola or pair of lines if $\dfrac{b^2}{2} - a^2 \neq 0$ or $\dfrac{b^2}{2} - a^2 = 0$ respectively.

Hindi. चित्र में दर्शाये अनुसार आयत की दो भुजाऐं x-अक्ष तथा y-अक्ष के सापेक्ष हैं।



दिया हुआ है।

$(PA)^2 + (PB)^2 = 2\ (PC^2 + PD^2)$ $\Rightarrow k^2 + (k - b)^2 = 2\ (h^2 + (a - h)^2)$

$\Rightarrow$ $2k^2 - 2kb + b^2 = 4h^2 - 4ah + 2a^2$

h को x से तथा k को y से प्रतिस्थापित करने पर

$\Rightarrow$ $2y^2 - 2by + b^2 = 4x^2 - 4ax + 2a^2 \Rightarrow 2(y^2 - by) + b^2 = 4(x^2 - ax) + 2a^2$

$$2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2} - a^2$$

अगर $\dfrac{b^2}{2} - a^2 \neq 0$ या $\dfrac{b^2}{2} - a^2 = 0$ हो, तो यह क्रमशः अतिपरवलय या एक रेखा युग्म होगा।

17. If $(3\sin\alpha, 2\cos\alpha)$ lies on the same side as that of origin w.r.t conic $2x^2 - 3y^2 = 6$, then $\sin\alpha$ may be

यदि $(3\sin\alpha, 2\cos\alpha)$, शांकव $2x^2 - 3y^2 = 6$ के सापेक्ष मूलबिन्दु की तरफ स्थित हो तो $\sin\alpha$ का मान हो सकता है।

(A) $-\sqrt{\frac{4}{5}}$ (B*) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (C*) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D*) $\frac{2}{15}$

Sol. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

$\Rightarrow$ $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha - 1 < 0 \Rightarrow 3\sin^2\alpha - 2 + 2\sin^2\alpha - 1 < 0$

$\Rightarrow$ $5\sin^2\alpha < 3 \Rightarrow |\sin\alpha| < \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{5}} < \sin\alpha < \sqrt{\frac{3}{5}}$

18. Which of the following equations in parametric form can represent a hyperbolic profile, where 't' is a parameter.

निम्न में से कौनसे प्राचलिक समीकरण एक अतिपरवलयिक वक्र को प्रदर्शित कर सकती हैं, जहाँ 't' एक प्राचल है –

(A*) $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ & $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ (B) $\frac{tx}{a} - \frac{y}{b} + t = 0$ & $\frac{x}{a} + \frac{ty}{b} - 1 = 0$

(C*) $x = e^t + e^{-t}$ & $y = e^t - e^{-t}$ (D*) $x^2 - 6 = 2\cos t$ & $y^2 + 2 = 4\cos^2\frac{t}{2}$

Sol. (A) $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ ....(i) i.e. $t + \frac{1}{t} = \frac{2x}{a}$

$y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ ....(ii) i.e. $t - \frac{1}{t} = \frac{2y}{b}$

adding $2t = \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b}$ $t = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{bx + ay}{ab}$

Put in (i) $x = \frac{a}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{ab}{bx + ay}\right)$ i.e. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

whereas (B) represents an ellipse

(C) $x = e^t + e^{-t}$ .....(i)
$y = e^t - e^{-t}$

i.e. $x + y = 2e^t$ $e^t = \frac{x+y}{2}$ put in (i)

$x = \frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y}$ i.e. $y^2 - x^2 = 4$ Hyperbola

(D) $x^2 - 6 = 2\cos t \Rightarrow y^2 + 2 = 4\cos^2\frac{t}{2} = 2(1 + \cos t) = 2\left(1 + \frac{x^2 - 6}{2}\right)$

$= 2\left(\frac{2 + x^2 - 6}{2}\right)$ $y^2 + 2 = x^2 - 4$ Hyperbola

Hindi (A) $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ ....(i) अर्थात् $t + \frac{1}{t} = \frac{2x}{a}$

$y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ ....(ii) अर्थात् $t - \frac{1}{t} = \frac{2y}{b}$

जोड़ने पर $2t = \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b}$ $t = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{bx + ay}{ab}$

(i) में रखने पर $x = \frac{a}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{ab}{bx + ay}\right)$ अर्थात् $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

जबकि (B) एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है।

(C) $x = e^t + e^{-t}$ .....(i)
$y = e^t - e^{-t}$

अर्थात्. $x + y = 2e^t$ $e^t = \frac{x+y}{2}$ (i) में रखने पर

$x = \frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y}$ अर्थात् $y^2 - x^2 = 4$ अतिपरवलय

(D) $x^2 - 6 = 2\cos t \Rightarrow y^2 + 2 = 4\cos^2\frac{t}{2} = 2(1+\cos t) = 2\left(1+\frac{x^2-6}{2}\right)$

$= 2\left(\frac{2+x^2-6}{2}\right)$ $y^2 + 2 = x^2 - 4$ अतिपरवलय

19. If two distinct tangents can be drawn from the point $(\alpha, 2)$ on different branches of the hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, then the range of α is subset of

यदि बिन्दु $(\alpha, 2)$ से अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, की दो विभिन्न शाखाओं पर दो विभिन्न स्पर्श रेखाऐं खीची जाती है, तब α के मानों का परिसर किसका उपसमुच्चय है –

(A*) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ (B*) $[-2,2]$ (C) $[-1,1]$ (D) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Sol. For two distinct tangents on different branches the point should lie on the line y = 2 and between A and B (where A and B are the points on the asymptotes).

Equation of asymptotes are $4x = \pm 3y$

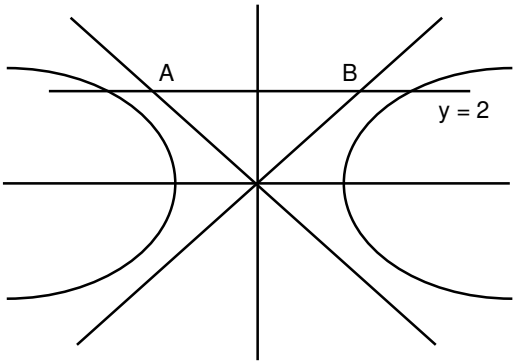
Solving with y = 2

$x = \pm \frac{3}{2}$

विभिन्न शाखाओं पर दो विभिन्न स्पर्श रेखाओं के लिए बिन्दु रेखा y = 2 पर और A और B के मध्य स्थित होना चाहिए (जहाँ A और B अनन्तस्पर्शीयों पर है) अतः अनन्तस्पर्शीयों का समीकरण $4x = \pm 3y$

y = 2 के साथ हल करने पर

$x = \pm \frac{3}{2}$



$\therefore -\frac{3}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

20. $x^2 + y^2 = 16$ is the auxilliary circle of
$x^2 + y^2 = 16$ किसका सहायक वृत्त होगा–

(A*) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ (B*) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$
(C*) $9(x - y)^2 - 16(x + y)^2 - 288 = 0$ (D*) $16(x - y)^2 - 9(x + y)^2 + 288 = 0$

Sol. (A) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ has auxiliary circle $x^2 + y^2 = 16$

(B) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ has auxiliary circle $x^2 + y^2 = 16$

(C) $\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{16} - \frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} = 1 \Rightarrow$ has auxilliary circle $x^2 + y^2 = 16$

(D) $\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} - \frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{16} = -1 \Rightarrow$ has auxilliary circle $x^2 + y^2 = 16$

Hindi. (A) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ का सहायक वृत्त $x^2 + y^2 = 16$

(B) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ का सहायक वृत्त $x^2 + y^2 = 16$

(C) $\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{16} - \frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} = 1 \Rightarrow$ का सहायक वृत्त $x^2 + y^2 = 16$

(D) $\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} - \frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{16} = -1 \Rightarrow$ का सहायक वृत्त $x^2 + y^2 = 16$

21. If the chord joining the points whose eccentric angles are 'α' and 'β' on the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is a focal chord then

यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर उत्केन्द्र कोण α और β है, को मिलाने वाली जीवा, एक नाभीय जीवा है तब,

(A*) $\pm e\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

(B) $\pm e\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(C*) $\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2) + \left(\frac{ke-1}{ke+1}\right) = 0$ where जहाँ $k = \pm 1$

(D*) $\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2) + \left(\frac{ke+1}{ke-1}\right) = 0$ where जहाँ $k = \pm 1$

Sol. (i) Points α and β on the hyperbola are $(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ and $(a\sec\beta, b\tan\beta)$.
Equation of chord joining α and β is

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

By hypothesis this chord is focal chord and is passing through $(\pm ae, 0)$

$\therefore \quad \pm e\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

(ii) Let $k = \pm 1$

$\therefore \quad ke\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\frac{ke}{1} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

By componendo and dividendo method

$$\left(\frac{ke-1}{ke+1}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{-2\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)}$$

$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \left(\frac{ke-1}{ke+1}\right) = 0$

Hindi. (i) अतिपरवलय पर बिन्दु α और β क्रमशः $(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ और $(a\sec\beta, b\tan\beta)$ है α और β को मिलाने वाली जीवा का समीकरण

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

यह नाभीय जीवा है जो $(\pm ae, 0)$ से गुजरती है।

$\therefore \quad \pm e\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

(ii) माना $k = \pm 1$

$\therefore \quad ke\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\frac{ke}{1} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

योगान्तरानुपात से

$$\left(\frac{ke-1}{ke+1}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{-2\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)}$$

$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \left(\frac{ke-1}{ke+1}\right) = 0$

22. If the normal at P to the rectangular hyperbola $x^2 - y^2 = 4$ meets the axes in G and g and C is the centre of the hyperbola, then

यदि आयतीय अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 4$ के बिन्दु P पर अभिलम्ब, अक्षों को G व g बिन्दुओं पर मिलता है तथा C अतिपरवलय का केन्द्र है, तो –

(A*) PG = PC (B*) Pg = PC (C*) PG = Pg (D) Gg = PC

Sol. Normal at $P(\theta) \equiv P(2\sec\theta, 2\tan\theta)$

$2x\cos\theta + 2y\cot\theta = 8$

$\Rightarrow \quad x\cos\theta + y\cot\theta = 4$

$\therefore \quad G(4\sec\theta, 0)$, $g(0, 4\tan\theta)$ and $c(0, 0)$

$PG = \sqrt{4\sec^2\theta + 4\tan^2\theta} = PC = Pg$

Hindi. $P(\theta) \equiv P(2\sec\theta, 2\tan\theta)$ पर अभिलम्ब

$2x\cos\theta + 2y\cot\theta = 8$

$\Rightarrow$ $x\cos\theta + y\cot\theta = 4$

$\therefore$ $G(4\sec\theta, 0)$, $g(0, 4\tan\theta)$ तथा $c(0, 0)$

$PG = \sqrt{4\sec^2\theta + 4\tan^2\theta} = PC = Pg$

23. Two confocal parabola intersect at A and B. If their axis are parallel to x-axis and y-axis respectively, then slope of chord AB can be :

दो सहनाभिय परवलय A और B पर प्रतिच्छेद करते है। यदि उनके अक्ष, क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष के समान्तर है तब जीवा AB की प्रवणता हो सकती है।

(A*) 1 (B*) –1 (C) 2 (D) –2

Sol. Let directrix are x-axis & y-axis respectively and they intersect in Ist quadrant.

Then A & B are of the type (α, α) & (β, β) $\Rightarrow$ slope of AB is 1

similarly slope can also be equal to –1.

माना नियता x-अक्ष और y-अक्ष है। तथा वे प्रथम चतुर्थांश में है। तब A और B प्रकार है

तब A और B प्रकार है (α, α)और (β, β) $\Rightarrow$ AB की प्रवणता = 1

इस प्रकार प्रवणता = –1

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1 (For Q.No. 1 to 3)

Consider three lines y axis, y = 2 and $\ell x + my = 1$ where (ℓ, m) lies on $y^2 = 4x$. answer the following :

1. Locus of circum centre of triangle formed by given three lines is a parabola whose vertex is

(A*) (–2, 3/2) (B) (2, –3/2) (C) (–2, –3/2) (D) (2, –5/2)

2. Area of triangle formed by vertex and end points of latus rectum of parabola obtained in questions (1) is

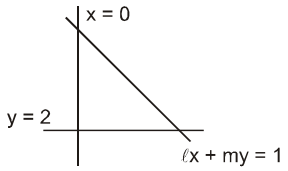
(A) $\frac{1}{2^8}$ (unit)^2 (B*) $\frac{1}{2^9}$ (unit)^2 (C) $\frac{1}{2^{10}}$ (unit)^2 (D) $\frac{1}{2^7}$ (unit)^2

3. Any point on the parabola obtained in question (1) can be represented as

(A) $\left(2+\frac{1}{32}t^2, \frac{3}{2}+\frac{t}{16}\right)$ (B) $\left(2+\frac{t^2}{32}, \frac{-3}{2}+\frac{1}{16}t^2\right)$ (C*) $\left(-2+\frac{1}{32}t^2, \frac{3}{2}+\frac{t}{16}\right)$ (D) $\left(-2+\frac{1}{16}t^2, \frac{3}{2}+\frac{t}{5}\right)$

Sol.(1 to 3)

Clearly triangle formed by given line is right triangle so circumcentre of triangle is mid point of hypotaneous which is $\left(\frac{1-2m}{2\ell}, \frac{1+2m}{2m}\right)$



$\therefore$ Now let P(h, k) be the circumcentre

$\therefore$ $h = \dfrac{1-2m}{2\ell}$, $k = \dfrac{1+2m}{2m}$ $\Rightarrow$ $m = \dfrac{1}{2k-2}$, $\ell = \dfrac{k-2}{2h(k-1)}$

$\therefore$ (ℓ, m) lies on $y^2 = 4x$

$\therefore$ $m^2 = 4\ell$ $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2k-2}\right)^2 = 4\left(\dfrac{k-2}{2h(k-1)}\right)$ $\Rightarrow$ $\left(k-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}(h+2)$

$\Rightarrow \left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}(x+2)$ ...(i)

$\therefore$ $V\left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$ length of L.R. $= 4a = \dfrac{1}{8}$

Required area of triangle $= \dfrac{1}{2}4a \times a = 2a^2 = \dfrac{1}{2^9}$ (unit)^2

also parametric form of (i) is $\left(-2+\dfrac{t^2}{32}, \dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{16}\right)$

अनुच्छेद # 1

(प्रश्न संख्या 1 से 3 के लिए)

माना कि तीन रेखाएँ y–अक्ष, $y = 2$ और $\ell x + my = 1$ जहाँ (ℓ, m) परवलय $y^2 = 4x$ पर स्थित है तब निम्न का उत्तर दीजिए–

1. दी गई तीनों रेखाओं से बने त्रिभुज के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ एक परवलय होता है जिसका शीर्ष है–

(A*) (–2, 3/2) (B) (2, –3/2) (C) (–2, –3/2) (D) (2, –5/2)

2. उपरोक्त प्रश्न से प्राप्त परवलय की नाभिलम्ब के सिरों तथा शीर्ष से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है–

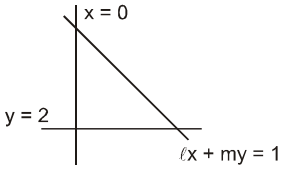
(A) $\dfrac{1}{2^8}$ वर्ग इकाई (B*) $\dfrac{1}{2^9}$ वर्ग इकाई (C) $\dfrac{1}{2^{10}}$ वर्ग इकाई (D) $\dfrac{1}{2^7}$ वर्ग इकाई

3. प्रश्न (1) से प्राप्त परवलय पर किसी बिन्दु के निर्देशांक निरूपित होते है–

(A) $\left(2+\dfrac{1}{32}t^2, \dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{16}\right)$ (B) $\left(2+\dfrac{t^2}{32}, \dfrac{-3}{2}+\dfrac{1}{16}t^2\right)$ (C*) $\left(-2+\dfrac{1}{32}t^2, \dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{16}\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol.(1 to 3)

स्पष्टतया दी गई रेखाओं से बना त्रिभुज समकोण त्रिभुज है इसलिए परिकेन्द्र, कर्ण का मध्य बिन्दु होगा, जो है– $\left(\dfrac{1-2m}{2\ell}, \dfrac{1+2m}{2m}\right)$



$\therefore$ अब माना P(h, k) परिकेन्द्र है

$\therefore$ $h = \dfrac{1-2m}{2\ell}$, $k = \dfrac{1+2m}{2m}$ $\Rightarrow$ $m = \dfrac{1}{2k-2}$, $\ell = \dfrac{k-2}{2h(k-1)}$

$\therefore$ (ℓ, m) परवलय $y^2 = 4x$ पर स्थित है–

$\therefore \quad m^2 = 4\ell \Rightarrow \left(\frac{1}{2k-2}\right)^2 = 4\left(\frac{k-2}{2h(k-1)}\right) \Rightarrow \left(k-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(h+2)$

$\Rightarrow \quad \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(x+2) \quad ...(i)$

$\therefore \quad V\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a = \frac{1}{8}$

अभिष्ट त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} 4a \times a = 2a^2 = \frac{1}{2^9}$ वर्ग इकाई

(i) का प्राचलिक रूप $\left(-2+\frac{t^2}{32}, \frac{3}{2}+\frac{t}{16}\right)$

Comprehension # 2 (Q.4 to Q.6)

अनुच्छेद # 2 (Q.4 to Q.6)

Let PQ be a variable focal chord of the parabola $y^2 = 4ax$ where vertex is A. Locus of, centroid of triangle APQ is a parabola 'P_1'

मानाकि परवलय $y^2 = 4ax$ की एक चर नाभीय जीवा PQ है, जहाँ शीर्ष A है। त्रिभुज APQ के केन्द्रक का बिन्दुपथ एक परवलय P_1 है–

4. Latus rectum of parabola P_1 is

परवलय P_1 का नाभिलम्ब है–

(A) $\frac{2a}{3}$ (B*) $\frac{4a}{3}$ (C) $\frac{8a}{3}$ (D) $\frac{16a}{3}$

Sol. If (x, y) is the centroid of triangle formed by A(0, 0), P(t) and $Q\left(-\frac{1}{t}\right)$ is

$3x = a\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$

$3y = 2a\left(t-\frac{1}{t}\right)$

Eliminating t we get

$9y^2 = 4a(3x-2a)$ or $y^2 = \frac{4a}{3}\left(x-\frac{2a}{3}\right)$

$\therefore$ length of latus rectum is $\frac{4a}{3}$

Hindi. दि बिन्दुओं A(0, 0), P(t) तथा $Q\left(-\frac{1}{t}\right)$ से निर्मित त्रिभुज का केन्द्रक (x, y) है।

$3x = a\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$

$3y = 2a\left(t-\frac{1}{t}\right)$

t को विलुप्त करने पर

$9y^2 = 4a(3x-2a)$ या $y^2 = \frac{4a}{3}\left(x-\frac{2a}{3}\right)$

$\therefore$ नाभिलम्ब की लम्बाई $\frac{4a}{3}$ है।

5. Vertex of parabola P_1 is

परवलय P_1 का शीर्ष है–

(A*) $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ (B) $\left(\frac{4a}{3}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{8a}{3}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{a}{3}, 0\right)$

Sol. Since $y^2 = \frac{4a}{3}\left(x - \frac{2a}{3}\right)$ is the equation of parabola P_1

hence vertex is $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$

Hindi चूंकि परवलय P_1 का समीकरण $y^2 = \frac{4a}{3}\left(x - \frac{2a}{3}\right)$ है।

अतः शीर्ष $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ है।

6. Let Δ_1 is the area of triangle formed by joining points T_1, T_2 and T_3 on parabola P_1 and Δ_2 be the area of triangle T formed by tangents at T_1, T_2 and T_3, then

(A) $\Delta_2 = 2\Delta_1$

(B) $\Delta_1 = 4\Delta_2$

(C*) orthocentre of triangle T lies on x = a/3.

(D) Both (A) and (C) are correct.

मानाकि परवलय P_1 पर स्थित बिन्दुओं T_1, T_2 तथा T_3 को मिलाने से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ_1 है तथा बिन्दुओं T_1, T_2 तथा T_3 पर खींची गई स्पर्श रेखाओं से निर्मित त्रिभुज T का क्षेत्रफल Δ_2 हो, तो–

(A) $\Delta_2 = 2\Delta_1$

(B) $\Delta_1 = 4\Delta_2$

(C*) त्रिभुज T का लम्बकेन्द्र x = a/3 पर स्थित है।

(D) (A) तथा (C) दोनों सही है।

Sol. using property

$\Delta_1 = 2\Delta_2$

directrix of P_1 is

$x - \frac{2a}{3} = \frac{-a}{3}$

i.e. x = a/3 as orthocentre of T lies on the directrix of P_1

$\therefore$ orthocentre of T lies on $x = \frac{a}{3}$

Hindi गुणधर्म के प्रयोग से

$\Delta_1 = 2\Delta_2$

P_1 की नियता $x - \frac{2a}{3} = \frac{-a}{3}$

अर्थात् x = a/3 अतः त्रिभुज T का लम्बकेन्द्र परवलय P_1 की नियता पर स्थित है।

$\therefore$ त्रिभुज T का लम्बकेन्द्र x = a/3 पर स्थित है।

Comprehension # 3 (Q.7 to Q.9)

Two tangents PA and PB are drawn from a point P(h, k) to the ellipse E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b). Angle of the tangents with the positive x - axis are θ_1 and θ_2. Normals at A and B are intersecting at Q point.

On the basis of above information answer the following questions.

7. Locus of P, if $\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = 4$, is

(A) $\frac{y-b}{x-a} = 2(x+a)$ (B) $y^2 - b^2 = 2(x^2 + a^2)$ (C*) $\frac{y+b}{x+a} = \frac{4(x-a)}{y-b}$ (D) $\frac{y+b}{x-b} = \frac{x+a}{y-b}$

8. Circumcentre of ΔQAB is

(A) mid point of AB (B*) mid point of PQ (C) orthocentre of ΔPAB (D) can't say

9. Locus of P, if $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = \lambda$, is

(A*) $2xy = \lambda(y^2 - b^2)$ (B) $2xy - \lambda(b^2 - y^2) = 0$ (C) $xy = \lambda$ (D) $x^2 + xy = \lambda$

अनुच्छेद # 3 (Q.7 to Q.9)

किसी बिन्दु P(h, k) से दीर्घवृत्त $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींची जाती है। धनात्मक x-अक्ष के साथ स्पर्श रेखाओं का कोण θ_1 तथा θ_2 है। A एंव B पर खींचे गये अभिलम्ब बिन्दु Q पर मिलतें हैं।
उपरोक्त जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

7. यदि $\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = 4$ हो, तो P का बिन्दुपथ होगा–

(A) $\frac{y-b}{x-a} = 2(x+a)$ (B) $y^2 - b^2 = 2(x^2 + a^2)$ (C*) $\frac{y+b}{x+a} = \frac{4(x-a)}{y-b}$ (D) $\frac{y+b}{x-b} = \frac{x+a}{y-b}$

8. ΔQAB का परिकेन्द्र है–

(A) AB का मध्यबिन्दु (B*) PQ का मध्यबिन्दु (C) ΔPAB का लम्बकेन्द्र (D) कुछ कहा नहीं जा सकता।

9. यदि $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = \lambda$ हो, तो P का बिन्दुपथ होगा–

(A*) $2xy = \lambda(y^2 - b^2)$ (B) $2xy - \lambda(b^2 - y^2) = 0$ (C) $xy = \lambda$ (D) $x^2 + xy = \lambda$

Sol. **(7)** $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$k = mh \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$(k - mh)^2 = a^2 m^2 + b^2$

$m^2(h^2 - a^2) - 2mhk + k^2 - b^2 = 0$ $\because$ $(m_1 = \tan\theta_1,\ m_2 = \tan\theta_2)$

$$m_1m_2 = \frac{k^2 - b^2}{h^2 - a^2} = \tan\theta_1 \tan\theta_2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2} = 4 \quad \Rightarrow \left(\frac{y-b}{x-a}\right) = 4\left(\frac{x+a}{y+b}\right)$$

(8) $\because$ $\angle QAP = \angle PBQ = 90^\circ$

hence a circle drawn taking 'PQ' as diameter will pass through B,A,P,Q

अतः 'PQ' को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त बिन्दुओं B,A,P एवं Q से गुजरेगा।

$\therefore$ center will be mid point of PQ

अतः इन वृत्त का केन्द्र PQ का मध्य बिन्दु होगा।

(9) $$m_1 + m_2 = \frac{2hk}{h^2 - a^2}$$

and और $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = \lambda$

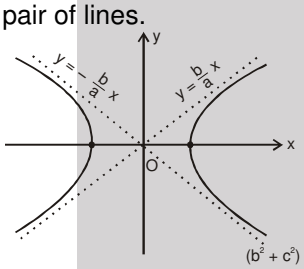
$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\theta_1} + \frac{1}{\tan\theta_2} = \lambda \quad \Rightarrow \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_1}{\tan\theta_1 \tan\theta_2} = \lambda \quad \Rightarrow \frac{\frac{2hk}{h^2 - a^2}}{\frac{k^2 - b^2}{h^2 - a^2}} = \lambda$$

$\Rightarrow$ $2hk = \lambda(k^2 - b^2)$

$2xy = \lambda(y^2 - b^2)$

Comprehension # 4 (Q.10 to Q.13)

Asymptotes are lines whose distance from the curve at infinity tends to zero Let $y = mx + c$ is asymptote of H $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. Solving the two equations, we have $(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mcx - a^2(b^2 + c^2) = 0$. Both roots of this equation must be infinite so $m = \pm\frac{b}{a}$ and $c = 0$ which implies that $y = \frac{b}{a}\pm x$ are asymptotes of $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Note that no real tangent can be drawn to the hyperbola from its centre and only one real tangent can be drawn from a point lying on its asymptote other than centre. Further combined equation of asymptotes is A = $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ and conjugate hyperbola C = $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$. Hence 2A = H + C, as we can see, equation of A, H and C vary only by a constant, for asymptotes which can be evaluated by applying condition of pair of lines.



10. The points of contact of tangents drawn to the hyperbola $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ from point (2, 1) are **[17JM110080]**

(A) (3, 2), (1, 5) (B*) (3, 2), $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (C) (1, 2), (3, 4) (D) (3, 2), (3, 4)

Sol. Equation of tangent is $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ where $a^2m^2 - b^2 > 0 \Rightarrow$ $y = mx \pm \sqrt{3m^2 - 2}$

As it passes through (2, 1) $\Rightarrow 1 = 2m \pm \sqrt{3m^2 - 2}$

$\Rightarrow$ $1 - 2m = \pm\sqrt{3m^2 - 2}$ $\Rightarrow$ $m = 1, 3$

so tangents are $y = x - 1$ and $y = 3x - 5$

The corresponding points of contact are (3, 2) and $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$

11. The number of real distinct tangents drawn to hyperbola $4x^2 - y^2 = 4$ from point (1, 2) is **[17JM110081]**

(A*) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Sol. Equation of tangent is $y - 2 = m(x - 1)$ $\Rightarrow$ $y = mx + (2 - m)$

it will be tangent if $c^2 = a^2m^2 - b^2$ provided $c \neq 0$

$\Rightarrow$ $(2 - m)^2 = m^2 - 4 \Rightarrow m = 2$ or $\infty \Rightarrow m = \infty$ $\Rightarrow$ tangent is $x = 1$

12. The number of real distinct tangents drawn from point (1, 2) to hyperbola $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ is **[17JM110082]**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D*) None of these

Sol. (1, 2) is centre of hyperbola so no real tangent can be drawn from it to hyperbola.

13. The asymptotes of $xy - 3y - 2x = 0$ is **[17JM110083]**

(A) $x + 2 = 0$ and $y + 3 = 0$ (B) $x - 2 = 0$ and $y - 3 = 0$

(C*) $x - 3 = 0$ and $y - 2 = 0$ (D) $x + 3 = 0$ and $y + 2 = 0$

Sol Since equation of a hyperbola and its asymptotes differ in constant terms only,

$\therefore$ Pair of asymptotes is given by $xy - 3y - 2x + \lambda = 0$

where λ is any constant such that it represents two straight lines.

$\therefore$ $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$\Rightarrow$ $0 + 2 \times -\frac{3}{2} \times -1 \times \frac{1}{2} - 0 - 0 - \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\therefore$ $\lambda = 6$

From (1), the asymptotes of given hyperbola are given by

$xy - 3y - 2x + 6 = 0$ or $(y - 2)(x - 3) = 0$

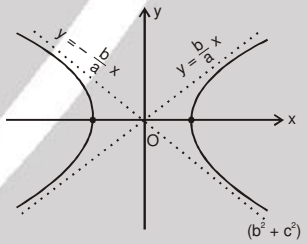
$\therefore$ Asymptotes are $x - 3 = 0$ and $y - 2 = 0$

अनुच्छेद # 4 (Q.10 to Q.13)

यदि अतिपरवलय के किसी बिन्दु से सरल रेखा पर लम्ब की लम्बाई शून्य की और है। तब सरल रेखा अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शी कहलाती है। हम कह सकते हे कि यह रेखा, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को अनन्त पर स्पर्श करती है।

माना रेखा $y = mx + c$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की अनन्त स्पर्शी है।

दोनों समीकरण को हल करने पर $(b^2 - a^2m^2)\,x^2 - 2a^2mcx - a^2(b^2 + c^2) = 0$ समीकरण के मूल अनन्त होगें इसलिए $m = \pm\frac{b}{a}$ और $c = 0$ जो $y = \frac{b}{a} \pm x$, की अनन्त स्पर्शी है। अतिपरवलय के केन्द्र से इस पर कोई वास्तविक स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है। अनन्त स्पर्शी पर स्थित बिन्दु (केन्द्र को छोड़कर) से इस पर केवल एक वास्तविक स्पर्श रेखा खीचीं जा सकती है। पुनः अनन्तस्पर्शी का संयुक्त समीकरण $A = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ है तथा संयुग्मी अतिपरवलय $C = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ है। अतः $2A = H + C$ A, H और C अचर से परिवर्तित होता है तथा अनन्तस्पर्शी के लिए रेखाओं के युग्म पर प्रतिबन्ध लगाकर ज्ञात किए जा सकते है।



10. बिन्दु (2, 1) से अतिपरवलय $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ पर खीचीं गई स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दु है

(A) (3, 2), (1, 5) (B*) (3, 2), $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (C) (1, 2), (3, 4) (D) (3, 2), (3, 4)

Sol. स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ जहाँ $a^2m^2 - b^2 > 0$ $\Rightarrow$ $y = mx \pm \sqrt{3m^2 - 2}$

यह (2, 1) से गुजरता है $1 = 2m \pm \sqrt{3m^2 - 2}$

$\Rightarrow$ $1 - 2m = \pm\sqrt{3m^2 - 2}$ $\Rightarrow$ $m = 1, 3$

इसलिए स्पर्श रेखाएँ $y = x - 1$ तथा $y = 3x - 5$

संगत स्पर्श बिन्दु (3, 2) और $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$ है।

11. बिन्दु (1, 2) से अतिपरवलय $4x^2 - y^2 = 4$ पर खींची गई विभिन्न वास्तविक स्पर्श रेखाओं की संख्या है

(A*) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Sol. स्पर्श रेखा का समीकरण $y - 2 = m(x - 1)$ $\Rightarrow$ $y = mx + (2 - m)$

यह स्पर्श रेखा होगी यदि $c^2 = a^2m^2 - b^2$ जबकि $c \neq 0$

$\Rightarrow$ $(2 - m)^2 = m^2 - 4$ $\Rightarrow$ $m = 2$ or ∞ $\Rightarrow$ $m = \infty$

$\Rightarrow$ स्पर्श रेखा का समीकरण $x = 1$

12. बिन्दु (1, 2) से अतिपरवलय $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ पर खींची गई वास्तविक विभिन्न स्पर्श रेखाओं की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D*) इनमें से कोई नहीं।

Sol. अतिपरवलय का केन्द्र (1, 2) है इसलिए कोई वास्तविक स्पर्श रेखा इस अतिपरवलय पर नहीं खींची जा सकती है।

13. $xy - 3y - 2x = 0$ की अनन्त स्पर्शी है–

(A) $x + 2 = 0$ और $y + 3 = 0$ (B) $x - 2 = 0$ और $y - 3 = 0$

(C*) $x - 3 = 0$ और $y - 2 = 0$ (D) $x + 3 = 0$ और $y + 2 = 0$

Sol चूंकि अतिपरवलय का समीकरण और इसकी अनन्त स्पर्शी में अन्तर का अन्तर रहता है

$\therefore$ अनन्तस्पर्शीयों के युग्म दिए गए है $xy - 3y - 2x + \lambda = 0$

जहाँ λ अचर है इस प्रकार है यह दो सरल रेखाओं को व्यक्त करती है।

$\therefore$ $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$\Rightarrow$ $0 + 2 \times -\frac{3}{2} \times -1 \times \frac{1}{2} - 0 - 0 - \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\therefore$ $\lambda = 6$

(1) से अतिपरवलय की अनन्तस्पर्शी है–

$xy - 3y - 2x + 6 = 0$ or $(y - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore$ अनन्तस्पर्शी $x - 3 = 0$ और $y - 2 = 0$ है।

Comprehension # 5 (Q.14 to Q.16)

Equation of the transverse and conjugate axis of a hyperbola are respectively $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y + 4 = 0$ and their respectively lengths are $\sqrt{2}$ and $\frac{2}{\sqrt{3}}$ then answer following :

14. If $x^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ is equation of given hyperbola where h, b, g, f, c all are integers then the sum $h + b + g + f + c =$

(A*) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

15. Equation of one of the directrix is

(A*) $2x - y + 4 + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$ (B) $x + 2y + 4 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$

(C) $2x - y = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (D) $2x - y + 4 + \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$

16. Coordinates of one of possible focus of hyperbola is

(A*) $\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (B) $\left(\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

(C) $\left(\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$ (D) $\left(\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

Sol.(14-16)

The equation of required hyperbola is

$$\frac{\left(\frac{2x - y + 4}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$$

$\therefore$ $h + b + g + f + c = -2 - 2 + 5 + 2 + 0 = 3$

Now let directrix of hyperbola $2x - y + \lambda = 0$ (as it is parallel to conjugate axis)

using distance between conjugate axis and directrix = $\left(\frac{a}{e}\right) = \frac{\text{semi T.A.}}{\text{Eccentricity}}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\lambda-4}{\sqrt{5}}\right| = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1/3}{1/2}\right)}} \Rightarrow \left|\frac{\lambda-4}{\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \lambda - 4 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \therefore \lambda = 4 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Since centre of hyperbola is intersection of axis C(–1, 2) and foci lies on T.A. at a distance ae from centre

$\therefore$ focus $((-1 \pm ae\cos\theta), (2 \pm ae\sin\theta))$ by transverse axis slope $-\frac{1}{2}$

we get $\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(-1 \mp \frac{2}{\sqrt{6}}, 2 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

अनुच्छेद # 5 (Q.14 to Q.16)

(प्रश्न संख्या 14 से 16 के लिए)

अतिपरवलय की मुख्य अक्ष तथा संयुग्मी अक्ष का समीकरण क्रमशः $x + 2y - 3 = 0$ और $2x - y + 4 = 0$ है। तथा उनकी क्रमशः लम्बाईयां $\sqrt{2}$ तथा $\frac{2}{\sqrt{3}}$ है, तब निम्न के उत्तर दीजिए–

14. यदि दिया गया अतिपरवलय का समीकरण $x^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है जहाँ h, b, g, f, c सभी पूर्णांक है तब

$h + b + g + f + c =$

(A*) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

15. नियता का एक समीकरण है–

(A*) $2x - y + 4 + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$ (B) $x + 2y + 4 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$

(C) $2x - y = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (D) इनमें से कोई नहीं

16. अतिपरवलय की संभावित एक नाभि के निर्देशांक है–

(A*) $\left(-1+\frac{2}{\sqrt{6}}, 2-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (B) $\left(\left(-1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(2-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

(C) $\left(\left(-1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(2+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol.(14-16)

अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{\left(\frac{2x-y+4}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$$

$\therefore h + b + g + f + c = -2 - 2 + 5 + 2 + 0 = 3$

अब अतिपरवलय की नियता $2x - y + \lambda = 0$ (चूंकि यह संयुग्मी अक्ष के समान्तर है)

संयुग्मी अक्ष और नियता के मध्य की दूरी = $\left(\frac{a}{e}\right) = \frac{\text{अर्ध मुख्य अक्ष}}{\text{उत्केन्द्रता}}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\lambda-4}{\sqrt{5}}\right| = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1/3}{1/2}\right)}} \Rightarrow \left|\frac{\lambda-4}{\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \lambda - 4 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \therefore \lambda = 4 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

चूंकि अतिपरवलय का केन्द्र, अक्षो का प्रतिच्छेद बिन्दु है। C(–1, 2) केन्द्र है और नाभि, मुख अक्ष पर केन्द्र से a दूरी पर स्थित है।

$\therefore$ नाभि $((-1 \pm ae\cos\theta), (2 \pm ae\sin\theta))$ मुख्य अक्ष की प्रवणता $-\frac{1}{2}$

$$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(-1 \mp \frac{2}{\sqrt{6}}, 2 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

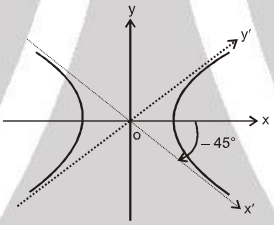
Comprehension # 6 (Q.17 to Q.19)

Rectangular hyperbola (equilateral hyperbola) : The particular kind of hyperbola in which the lengths of the transverse & conjugate axis are equal is called an Equilateral Hyperbola. Note that the eccentricity of the rectangular hyperbola is $\sqrt{2}$

Since $a = b$

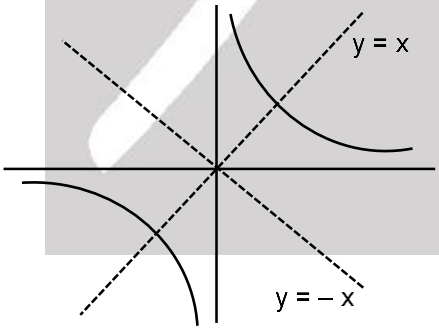
equation becomes $x^2 - y^2 = a^2$

$$e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



Rotation of this system through an angle of 45° in clockwise direction gives another form to the equation of rectangular hyperbola.

which is $xy = c^2$ where $c^2 = \frac{a^2}{2}$.



Parametric equation of $xy = c^2$ is $x = ct$, $y = c/t$, $t \in R - \{0\}$

17. The vertices and foci of $xy = 16$ is

(A) Vertices : (2,2), (–2, –2) & Foci : $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

(B*) Vertices : (4, 4), (–4, –4) & Foci : $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

(C) Vertices : (2,2), (–2, –2) & Foci : $(4,4)$, $(-4,-4)$

(D) Vertices : $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ & Foci : $(4,4)$, $(-4,-4)$

18. If the normal at $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ on the curve $xy = c^2$ meets the curve again at t′, then

यदि वक्र $xy = c^2$ के बिन्दु $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ पर अभिलम्ब वक्र को पुनः t' पर मिलता है, तो–

(A*) $t' = -\frac{1}{t^3}$ (B) $t' = \frac{1}{t}$ (C) $t' = \frac{1}{t^2}$ (D) $t'^2 = -\frac{1}{t^2}$

Sol. Curve $xy = c^2$

Point P $(ct, \frac{c}{t})$ Point Q $(ct', \frac{c}{t'})$

Equation of normal $xt^3 - yt = c(t^4 - 1)$

Point Q satisfy the equation $ct't^3 - \frac{c}{t'}t = c(t^4 - 1)$

$t't^3 - \frac{t}{t'} = t^4 - 1$

$(t')^2 t^3 - t = t'(t^4 - 1)$

$t'^2t^4 + t' - t - t't^4 = 0$

$\Rightarrow t'(t't^3 + 1) - t(1 + t't^3) = 0$

$t' = t$ or $t' = -\frac{1}{t^3}$

so only possibility $t' = -\frac{1}{t^3}$

Hindi वक्र $xy = c^2$

बिन्दु P $(ct, \frac{c}{t})$ बिन्दु Q $(ct', \frac{c}{t'})$

अभिलम्ब का समीकरण $xt^3 - yt = c(t^4 - 1)$

बिन्दु Q समीकरण को संतुष्ट करता है $ct't^3 - \frac{c}{t'}t = c(t^4 - 1)$

$t't^3 - \frac{t}{t'} = t^4 - 1$

$(t')^2 t^3 - t = t'(t^4 - 1)$

$t'^2t^4 + t' - t - t't^4 = 0$

$\Rightarrow t'(t't^3 + 1) - t(1 + t't^3) = 0$

$t' = t$ या $t' = -\frac{1}{t^3}$

अतः केवल संभावना $t' = -\frac{1}{t^3}$.

19. Let $x^2 + y^2 = r^2$ and $xy = 1$ intersect at A & B in first quadrant, If AB = $\sqrt{14}$ then find the value of r.

माना $x^2 + y^2 = r^2$ और $xy = 1$ प्रथम चतुर्थांश में A और B पर प्रतिच्छेद करते है। यदि AB = $\sqrt{14}$ तब r का मान ज्ञात कीजिए।

(A) 1 (B)2 (C*) 3 (D) 4

Sol. Let A is $\left(t, \frac{1}{t}\right)$, then B is $\left(\frac{1}{t}, t\right)$

Now $\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 = 14$

$$2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-4=14 \quad \Rightarrow \quad t^2+\frac{1}{t^2}=9=r^2 \quad \Rightarrow \quad r=3$$

Hindi. माना A, $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ है तब B, $\left(\frac{1}{t}, t\right)$ है अब $\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}-t\right)^2=14$

$$2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-4=14 \quad \Rightarrow \quad t^2+\frac{1}{t^2}=9=r^2 \quad \Rightarrow \quad r=3$$

High Level Problems (HLP)

SUBJECTIVE QUESTIONS

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. Prove that in a parabola the angle θ that the latus rectum subtends at the vertex of the parabola isindependent of the latus rectum and lies between $\frac{2\pi}{3}$ & $\frac{3\pi}{4}$

सिद्ध कीजिए कि किसी परवलय के नाभिलम्ब द्वारा उसके शीर्ष पर बनाया गया कोण θ नाभिलम्ब से स्वंतत्र है तथा $\frac{2\pi}{3}$ एवं $\frac{3\pi}{4}$ के मध्य है।

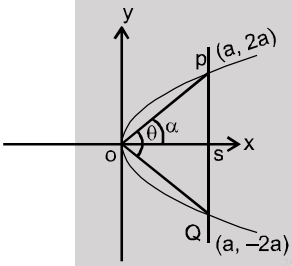
Sol. Let the parabola $y^2 = 4ax$, extremitis of latus rectum P(a, 2a) Q(a, – 2a)

$m_{OP} = \frac{2a}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad m_{OQ} = -2$

by symmetric $\theta = 2\alpha$ also $\tan\alpha = \frac{ps}{so} = \frac{2a}{a} = 2$

now $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{2} + 1$ i.e. $\tan\frac{\pi}{3} < 2 < \tan\frac{3\pi}{8}$

i.e. $\frac{\pi}{3} < \tan^{-1} 2 < \frac{3\pi}{8}$ so $\frac{2\pi}{3} < 2\tan^{-1} 2 < \frac{3\pi}{4}$ i.e. $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{4}$



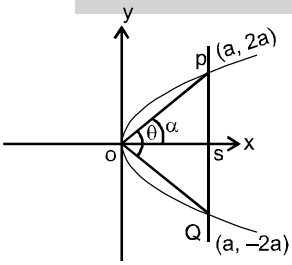
Hindi. माना परवलय $y^2 = 4ax$, नाभिलम्ब के सिरे P(a, 2a) एवं Q(a, – 2a) है।

$m_{OP} = \frac{2a}{a} = 2 \qquad m_{OQ} = -2$

सममिति से $\theta = 2\alpha$ तथा $\tan\alpha = \frac{ps}{so} = \frac{2a}{a} = 2$

अब $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{2} + 1$ अर्थात् $\tan\frac{\pi}{3} < 2 < \tan\frac{3\pi}{8}$ अर्थात् $\frac{\pi}{3} < \tan^{-1} 2 < \frac{3\pi}{8}$

अतः $\frac{2\pi}{3} < 2\tan^{-1} 2 < \frac{3\pi}{4}$ अर्थात् $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{4}$



2. A parabola is drawn to pass through A and B, the ends of a diameter of a given circle of radius a, and to have as directrix a tangent to a concentric circle of radius b; then axes being AB and a perpendicular diameter, prove that the locus of the focus of the parabola is $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2}=1$

a त्रिज्या के वृत के व्यास के सिरों A एवं B से गुजरते हुए एक परवलय खींचा जाता है जिसकी नियता, एक b त्रिज्या के संकेन्द्रीय वृत की कोई स्पर्श रेखा है। यदि AB एवं एक लम्बवत् व्यास निर्देशी अक्ष हो, तो सिद्ध कीजिए कि परवलय कीनाभि का बिन्दुपथ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2}=1$ है।

Sol. Let A = (–a, 0) and B = (a, 0) ;
The centre of the circle = (0, 0).
the equation of the concentric circle will be $x^2 + y^2 = b^2$.
Any tangent to $x^2 + y^2 = b^2$ is $y = mx + b\sqrt{1+m^2}$
which is the directrix of the parabola .
Let (α, β) be the focus.
Then by focus-directrix property, the equation of the parabola will be

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \left(\frac{y-mx-b\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

It passes through A(–a, 0) , B(a, 0) ; so

$$(a+\alpha)^2+\beta^2 = \left(\frac{ma-b\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}}\right) = \frac{m^2a^2+b^2(1+m^2)-2abm\sqrt{1+m^2}}{1+m^2} \quad .....(1)$$

$$(a-\alpha)^2+\beta^2 = \left(\frac{-ma-b\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 = \frac{m^2a^2+b^2(1+m^2)+2abm\sqrt{1+m^2}}{1+m^2} \quad .....(2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $2(a^2+\alpha^2+\beta^2) = 2\,.\,\frac{m^2a^2+b^2(1+m^2)}{1+m^2}$

or $a^2+\alpha^2+\beta^2 = \frac{m^2}{1+m^2}\,a^2+b^2$

(2) – (1) $\Rightarrow$ $-4a\alpha = \frac{4abm\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$ or $\alpha^2 = \frac{b^2m^2}{1+m^2}$

$\therefore$ $\frac{m^2}{1+m^2} = \frac{\alpha^2}{b^2}$

Putting in (3) from (4)

$$a^2+\alpha^2+\beta^2 = \frac{a^2\alpha^2}{b^2}+b^2$$

$\therefore$ $\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\alpha^2+\beta^2 = b^2-a^2$ or $\frac{b^2-a^2}{b^2}\,\alpha^2+\beta^2 = b^2-a^2$

$\therefore$ $\frac{\alpha^2}{b^2}+\frac{\beta^2}{b^2-a^2} = 1$

$\therefore$ the equation of the locus of the focus (α, β) is $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2} = 1$

Hindi. माना A = (–a, 0) तथा B = (a, 0) ; वृत्त का केन्द्र = (0, 0) . संकेन्द्रीय वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = b^2$ वृत्त $x^2 + y^2 = b^2$ की स्पर्श रेखा $y = mx + b\sqrt{1+m^2}$ जो परवलय की नियता है। माना (α, β) नाभि के निर्देशांक है। तब नाभि–नियता गुणधर्म से परवलय का समीकरण

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left(\dfrac{y - mx - b\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ यह A(–a, 0) , B(a, 0) से गुजरता है, अतः

$(a+\alpha)^2 + \beta^2 = \left(\dfrac{ma - b\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 = \dfrac{m^2a^2 + b^2(1+m^2) - 2abm\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$ .....(1)

$(a-\alpha)^2 + \beta^2 = \left(\dfrac{-ma - b\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 = \dfrac{m^2a^2 + b^2(1+m^2) + 2abm\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$ .....(2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $2(a^2 + \alpha^2 + \beta^2) = 2 \cdot \dfrac{m^2a^2 + b^2(1+m^2)}{1+m^2}$ या $a^2 + \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{m^2}{1+m^2}\ a^2 + b^2$

(2) – (1) $\Rightarrow$ $-4a\alpha = \dfrac{4abm\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$ या $\alpha^2 = \dfrac{b^2m^2}{1+m^2}$

$\therefore$ $\dfrac{m^2}{1+m^2} = \dfrac{\alpha^2}{b^2}$

समीकरण (4) से समीकरण (3) में रखने पर

$a^2 + \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{a^2\alpha^2}{b^2} + b^2$

$\therefore$ $\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)\alpha^2 + \beta^2 = b^2 - a^2$ या $\dfrac{b^2 - a^2}{b^2}\alpha^2 + \beta^2 = b^2 - a^2$

$\therefore$ $\dfrac{\alpha^2}{b^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2 - a^2} = 1$

$\therefore$ नाभि (α, β) का बिन्दुपथ $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2 - a^2} = 1$

3. Find the points of intersection of the curves whose parametric equations are $x = t^2 + 1$, $y = 2t$ and $x = 2s$, $y = 2/s$.
वक्रों, जिनके प्राचलिक समीकरण $x = t^2 + 1$, $y = 2t$ और $x = 2s$, $y = 2/s$ है, के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Ans. (2, 2)

Sol. eliminating t we get $y^2 = 4x - 4$

Put $x = 2s$, $y = \dfrac{2}{s}$ $\Rightarrow$ $2s^3 - s^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $(s-1)(2s^2 + s + 1) = 0$ $\Rightarrow s = 1$

$\therefore$ Put s = 1 in $x = 2s$ and $y = \dfrac{2}{s}$, we get $x = 2, y = 2$

Hindi. t का विलोप करने पर $y^2 = 4x - 4$

$x = 25$ रखने पर , $y = \dfrac{2}{s}$ $\Rightarrow 2s^3 - s^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $(s-1)(2s^2 + s + 1) = 0 \Rightarrow s = 1$

$\therefore$ s = 1 का मान $x = 2s$ तथा $y = \dfrac{2}{s}$ में रखने पर पाया कि $x = 2, y = 2$

4. If r_1, r_2 be the length of the perpendicular chords of the parabola $y^2 = 4ax$ drawn through the vertex, then show that $(r_1r_2)^{4/3} = 16a^2(r_1^{2/3} + r_2^{2/3})$.
यदि r_1, r_2 , परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष से खींची गई लम्बवत् जीवाओं की लम्बाइयाँ है तब दर्शाइये कि–

$(r_1r_2)^{4/3} = 16a^2(r_1^{2/3} + r_2^{2/3})$.

Sol. Since chords are perpendicular, therefore if one makes an angle θ then the other will make an angle $(90° - \theta)$ with x-axis

Let AP = r_1 and AQ = r_2

If $\angle PAX = \theta$

then $\angle QAX = 90° - \theta$

$\therefore$ Coordinates of P and Q are $(r_1 \cos\theta, r_1 \sin\theta)$ and $(r_2 \sin\theta, r_2 \cos\theta)$ respectively

Since P and Q lies on $y^2 = 4ax$

$\therefore$ $r_1^2 \sin^2\theta = 4ar_1 \cos\theta$ and $r_2^2 \cos^2\theta = 4ar_2 \sin\theta$

$\Rightarrow$ $r_1 = \dfrac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}$ and $r_2 = \dfrac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore$ $(r_1r_2)^{4/3} = \left(\dfrac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}.\dfrac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^{4/3} = \left(\dfrac{16a^2}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{4/3}$ ...(i)

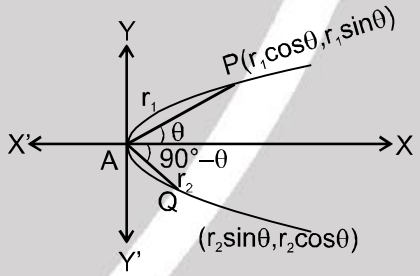
and $16a^2\left(r_1^{2/3} + r_2^{2/3}\right) = 16a^2\left\{\left(\dfrac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^{2/3}\right\}$

$= 16a^2.(4a)^{2/3}\left\{\dfrac{(\cos\theta)^{2/3}}{(\sin\theta)^{4/3}} + \dfrac{(\sin\theta)^{2/3}}{(\cos\theta)^{4/3}}\right\}$

$= 16a^2.(4a)^{2/3}\left\{\dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(\sin\theta)^{4/3}(\cos\theta)^{4/3}}\right\}$

$= \dfrac{16a^2.(4a)^{2/3}}{(\sin\theta\cos\theta)^{4/3}} = \left(\dfrac{16a^2}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{4/3}$

$= (r_1r_2)^{4/3}$ [from (i)]



Hindi. चूंकि जीवाऐ लम्बवत् है इसलिए यदि एक कोण θ बनाती है तो दुसरी, x-अक्ष के साथ $(90° - \theta)$ कोण बनाती है।

मानाAP = r_1 और AQ = r_2

यदि $\angle PAX = \theta$

तब$\angle QAX = 90° - \theta$

$\therefore$ P और Q के निर्देशांक $(r_1 \cos\theta, r_1 \sin\theta)$ and $(r_2 \sin\theta, r_2 \cos\theta)$ क्रमशः है।

चूंकि P और Q परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है।

$\therefore$ $r_1^2 \sin^2\theta = 4ar_1 \cos\theta$ और $r_2^2 \cos^2\theta = 4ar_2 \sin\theta$

$\Rightarrow$ $r_1 = \dfrac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}$ और $r_2 = \dfrac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore$ $(r_1r_2)^{4/3} = \left(\dfrac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}.\dfrac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^{4/3} = \left(\dfrac{16a^2}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{4/3}$ ...(i)

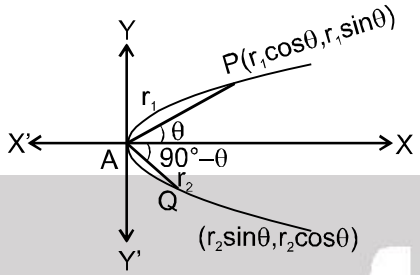
और $16a^2\left(r_1^{2/3} + r_2^{2/3}\right) = 16a^2\left\{\left(\dfrac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^{2/3}\right\}$

$$= 16a^2.(4a)^{2/3}\left\{\frac{(\cos\theta)^{2/3}}{(\sin\theta)^{4/3}}+\frac{(\sin\theta)^{2/3}}{(\cos\theta)^{4/3}}\right\}$$

$$= 16a^2.(4a)^{2/3}\left\{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(\sin\theta)^{4/3}(\cos\theta)^{4/3}}\right\}$$

$$= \frac{16a^2.(4a)^{2/3}}{(\sin\theta\cos\theta)^{4/3}} = \left(\frac{16a^2}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{4/3}$$

$= (r_1r_2)^{4/3}$ [(i) से]



5. Prove that the circle circumscribing the triangle formed by any three tangents to a parabola passes through the focus.

सिद्ध कीजिए कि परवलय की किन्हीं तीन स्पर्श रेखाओं से निर्मित त्रिभुज का परिवृत्त नाभि से गुजरता है।

Sol. Let P, Q and R be the points at which the tangents are drawn and let their coordinates be $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$, and $(at_3^2, 2at_3)$.

$\because$ tangents at Q and R intersect in the point

$\{at_2t_3, a(t_2 + t_3)\}$.

Similarly, the other pairs of tangents meet at the points

$\{at_3t_1, a(t_3 + t_1)\}$ and $\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}$.

Let the equation to the circle be

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{..... (1).}$$

Since it passes through the above three points, we have

$$a^2t_2^2t_3^2 + a^2(t_2 + t_3)^2 + 2gat_2t_3 + 2fa(t_2 + t_3) + c = 0 \quad \text{..... (2),}$$

$$a^2t_3^2t_1^2 + a^2(t_3 + t_1)^2 + 2gat_3t_1 + 2fa(t_3 + t_1) + c = 0 \quad \text{..... (3),}$$

and $$a^2t_1^2t_2^2 + a^2(t_1 + t_2)^2 + 2gat_1t_2 + 2fa(t_1 + t_2) + c = 0 \quad \text{..... (4),}$$

Subtracting (3) from (2) and dividing by $a(t_2 - t_1)$, we have

$$a\{t_3^2(t_1 + t_2) + t_1 + t_2 + 2t_3\} + 2gt_3 + 2f = 0.$$

Similarly, from (3) and (4), we have

$$a\{t_1^2(t_2 + t_3) + t_2 + t_3 + 2t_1\} + 2gt_1 + 2f = 0.$$

From these two equations we have

$$2g = -a(1 + t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2) \text{ and } 2f = -a(t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3)$$

Substituting these values in (2), we obtain

$$c = a^2(t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2).$$

The equation to the circle is therefore

$$x^2 + y^2 - ax(1 + t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2) - ay(t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3) + a^2(t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2) = 0.$$

Which clearly passes through the focus (a, 0).

Hindi. माना तीन बिन्दु P, Q एवं R है, जहाँ पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है तथा उनके निर्देशांक $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ एवं $(at_3^2, 2at_3)$.

$\because$ Q एवं R पर स्पर्श रेखाएँ बिन्दु $\{at_2t_3, a(t_2 + t_3)\}$ पर प्रतिच्छेद करती है।

इसी तरह स्पर्श रेखाओं के अन्य युग्मों के प्रतिच्छेद बिन्दु

$\{at_3t_1, a(t_3 + t_1)\}$, एवं $\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}$ है।

माना वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (1).

चूँकि यह उपरोक्त तीनों बिन्दुओं से गुजरता है।

$a^2t_2^2t_3^2 + a^2(t_2 + t_3)^2 + 2gat_2t_3 + 2fa(t_2 + t_3) + c = 0$ ..... (2),

$a^2t_3^2t_1^2 + a^2(t_3 + t_1)^2 + 2gat_3t_1 + 2fa(t_3 + t_1) + c = 0$ ..... (3),

तथा $a^2t_1^2t_2^2 + a^2(t_1 + t_2)^2 + 2gat_1t_2 + 2fa(t_1 + t_2) + c = 0$ ..... (4),

(2) में से (3) को घटानें एवं $a(t_2 - t_1)$ से विभाजित करने पर

$a\{t_3^2(t_1 + t_2) + t_1 + t_2 + 2t_3\} + 2gt_3 + 2f = 0.$

इसी प्रकार (3) एवं (4) से $a\{t_1^2(t_2 + t_3) + t_2 + t_3 + 2t_1\} + 2gt_1 + 2f = 0.$

इन दो समीकरणों से $2g = -a(1 + t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2)$ एवं $2f = -a(t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3)$

इन मानों को (2) में रखने पर $c = a^2(t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2).$

वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - ax(1 + t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2) - ay(t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3) + a^2(t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2) = 0.$

जो कि स्पष्टतः (a, 0) से गुजरता है।

6. A chord is a normal to a parabola and is inclined at an angle θ to the axis; prove that the area of the triangle formed by it and the tangents at its extremities is $4a^2 \sec^3\theta \operatorname{cosec}^3\theta$

परवलय की एक जीवा अभिलम्ब है तथा अक्ष से θ कोण पर झुकी है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा एवं इसके सिरों पर स्पर्श रेखाओं से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $4a^2 \sec^3\theta \operatorname{cosec}^3\theta$ है।

Sol. Let the extremities of the normal chord be P and Q and the tangents at P and Q to the parabola say $y^2 = 4ax$ meet in T. Let the co-ordinates of T be (x_1, y_1).

PQ will be the chord of contact for T with respect to the parabola so area of triangle TPQ will be

$$= \frac{(y_1^2 - 4ax_1)^{3/2}}{2a} \quad \text{..... (1)}$$

The equation to the chord of contact of T will be

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

or $$y = \frac{2ax}{y_1} + \frac{2ax_1}{y_1} \quad \text{..... (2)}$$

Equation to any normal to $y^2 = 4ax$ is

$$y = mx - 2am - am^3 \quad \text{.....(3)}$$

So (2) and (3) must be identical. As the coefficients of y are equal, others must also be equal, so

$$m = \frac{2a}{y_1} \text{ and } -2am - am^3 = \frac{2ax_1}{y_1}$$

when $$y_1 = \frac{2a}{m} \text{ and } x_1 = (-2a - am^2).$$

If the inclination of the chord of contact, i.e., the normal is θ; then

$$m = \tan\theta$$

So $$y_1 = \frac{2a}{m} = 2a\cot\theta \text{ and } x_1 = (-2a - a\tan^2\theta).$$

Substituting in (1), we get

Area of the triangle $= \dfrac{[4a^2\cot^2\theta - 4a(-2a - a\tan^2\theta)]^{3/2}}{2a}$

$$= \frac{1}{2a}\left[4a^2\cot^2\theta + 8a^2 + 4a^2\tan^2\theta\right]^{3/2} = \frac{1}{2a}\left[4a^2\left(\cot^2\theta + 2 + \tan^2\theta\right)\right]^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(4a^2\right)^{3/2}\left\{(\cot\theta + \tan\theta)^2\right\}^{3/2}$$

$$\left[\because \cot\theta + \tan\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} = \sec\theta.\operatorname{cosec}\theta\right]$$

$= 4a^2 \sec^3\theta \,.\, \operatorname{cosec}^3\theta$. Proved

Hindi. माना अभिलम्ब जीवा के सिरे P एवं Q है तथा परवलय माना $y^2 = 4ax$ के बिन्दु P एवं Q पर स्पर्श रेखाएँ T पर मिलती है। माना T के निर्देशांक (x_1, y_1) है।

PQ परवलय के सापेक्ष T के लिए स्पर्शी जीवा है अतः त्रिभुज TPQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{(y_1^2 - 4ax_1)^{3/2}}{2a} \qquad \text{..... (1)}$$

T की स्पर्श जीवा का समीकरण

$$yy_1 = 2a\,(x+x_1)$$

या $$y = \frac{2ax}{y_1} + \frac{2ax_1}{y_1} \qquad \text{..... (2)}$$

$y^2 = 4ax$ के किसी अभिलम्ब का समीकरण

$$y = mx - 2am - am^3. \qquad \text{..... (3)}$$

अतः (2) एवं (3) समान होना चाहिए। y के गुणांक समान होने के अनुसार

$$m = \frac{2a}{y_1} \text{ एवं } \quad -2am - am^3 = \frac{2ax_1}{y_1}$$

जब $y_1 = \frac{2a}{m}$ एवं $x_1 = (-2a - am^2)$.

यदि स्पर्शी जीवा का झुकाव θ हो, तो $m = \tan\theta$

अतः $y_1 = \frac{2a}{m} = 2a\cot\theta$ एवं $x_1 = (-2a - a\tan^2\theta)$.

(1) में रखने पर

त्रिभुज का क्षेत्रफल =

$$= \frac{1}{2a}\left[4a^2\cot^2\theta + 8a^2 + 4a^2\tan^2\theta\right]^{3/2} = \frac{1}{2a}\left[4a^2\left(\cot^2\theta + 2 + \tan^2\theta\right)\right]^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(4a^2\right)^{3/2}\left\{\left(\cot\theta + \tan\theta\right)^2\right\}^{3/2}$$

$$\left[\because \quad \cot\theta + \tan\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} = \sec\theta.\operatorname{cosec}\theta\right]$$

$= 4a^2\sec^3\theta\,.\,\operatorname{cosec}^3\theta$. Proved

7. From an external point P, pair of tangent lines are drawn to the parabola, $y^2 = 4x$. If θ_1 & θ_2 are the inclinations of these tangents with the axis of x such that, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4}$, then find the locus of P .

किसी बाह्य बिन्दु P से परवलय $y^2 = 4x$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची गई है। यदि यह स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष से θ_1 और θ_2 कोण इस प्रकार बनाती है कि $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4}$, तो P का बिन्दुपथ है:

Ans. $x - y - 1 = 0$

Sol. P (h, k)

$SS_1 = T^2$

$(y^2 - 4x)(k^2 - 4h) = (yk - 2(x + h))^2$

$\Rightarrow \quad y^2k^2 - 4hy^2 - 4xk^2 + 16xh = y^2k^2 + 4(x + h)^2 - 4yk(x + h)$

$\Rightarrow \quad -hy^2 - xk^2 + 4hx = (x^2 + h^2 + 2xh) - yk(x + h)$

$\Rightarrow \quad x^2 + hy^2 + x(k^2 - 2h) - kxy - khy = 0$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

now $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1m_2}$

now the homogeneous part is $x^2 + hy^2 - kxy = 0$

divide by x^2 and put $\frac{y}{x} = m$

we have $hm^2 - km + 1 = 0$

i.e. $m_1 + m_2 = \frac{k}{h}$ and $m_1 . m_2 = \frac{1}{h}$ putting we have

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{-\left(\frac{-k}{h}\right)}{1-\frac{1}{h}} = \frac{k}{h-1} \Rightarrow x - y = 1$$

Hindi. P (h, k)

$SS_1 = T^2$

$(y^2 - 4x)(k^2 - 4h) = (yk - 2(x + h))^2$

$\Rightarrow \quad y^2 k^2 - 4hy^2 - 4xk^2 + 16xh = y^2 k^2 + 4(x + h)^2 - 4yk(x + h)$

$\Rightarrow \quad -hy^2 - xk^2 + 4hx = (x^2 + h^2 + 2xh) - yk(x + h)$

$\Rightarrow \quad x^2 + hy^2 + x(k^2 - 2h) - kxy - khy = 0$

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$

समघात भाग $x^2 + hy^2 - kxy = 0$ है।

x^2 से विभाजित एवं $\frac{y}{x} = m$ रखने पर

$hm^2 - km + 1 = 0$

अर्थात् $m_1 + m_2 = \frac{k}{h}$ एवं $m_1 . m_2 = \frac{1}{h}$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{-\left(\frac{-k}{h}\right)}{1-\frac{1}{h}} = \frac{k}{h-1} \Rightarrow x - y = 1$$

8. TP and TQ are tangents to the parabola and the normals at P and Q meet at a point R on the curve ; prove that the centre of the circle circumscribing the triangle TPQ lies on the parabola $2y^2 = a(x - a)$.

परवलय की स्पर्श रेखाएँ TP एवं TQ है तथा P एवं Q पर अभिलम्ब बिन्दु R पर वक्र को मिलते है। सिद्ध कीजिए कि TPQ के परिवृत्त का केन्द्र परवलय $2y^2 = a(x-a)$ पर स्थित है।

Sol. Let the parabola be $y^2 = 4ax$ and co-ordinates of P, Q and R be $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ and $(at_3^2, 2at_3)$ respectively.

Since equation of tangent $P(t_1)$ is $t_1 y = x + at_1^2$ and

equation of tangent $Q(t_2)$ is $t_2 y = x + at_2^2$

Sp $\quad t_1 + \frac{2}{t_1} = t_2 + \frac{2}{t_2} = -t_3 \quad$ ..... (1)

$\because$ point of intersection of tangents at P and Q is $T(at_1t_2, a(t_1 + t_2))$

Since normals at $P(t_1)$ and $Q(t_2)$ meet at a point R (t_3) on the parabola

$\therefore \quad t_1t_2 = 2$ ....(i) and $t_2 + t_2 + t_3 = 0$ .....(ii)

$\because$ TPRQ is a cyclic quadrilateral

$\therefore$ centre of the circle circumscribing TPRQ will be the mid-point of TR

Let centre be (h, k)

$\therefore \quad 2h = at_1t_2 + at^2_3 \qquad \because \quad t_1t_2 = 2$

$\Rightarrow \quad 2h = 2a + at_3^2$ .....(ii)

and $\quad 2k = a(t_1 + t_2) + 2at_3 \qquad \because \quad t_2 + t_2 + t_3 = 0$

$\therefore \quad 2k = at_3$ .....(iii)

Now by eliminating t_1, t_2 from (ii) and (iii), we get

$2k^2 = a(h - a)$

$\therefore$ required locus is $2y^2 = a(x - a)$

Hindi. माना परवलय $y^2 = 4ax$ है तथा P, Q एवं R के निर्देशांक क्रमशः $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ एवं $(at_3^2, 2at_3)$ है।

चूँकि $P(t_1)$ पर स्पर्श रेखा $t_1y = x + at_1^2$ एवं $Q(t_2)$ पर स्पर्श रेखा $t_2y = x + at_2^2$ है–

$$t_1 + \frac{2}{t_1} = t_2 + \frac{2}{t_2} = -t_3 \qquad \text{..... (i)}$$

अतः P एवं Q पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $T(at_1t_2, a(t_1 + t_2))$ है।

चूँकि $P(t_1)$ एवं $Q(t_2)$ पर अभिलम्ब R (t_3) पर परवलय को मिलता है।

$\therefore$ $t_1t_2 = 2$ ....(i) एवं $t_2 + t_2 + t_3 = 0$ .....(ii)

$\because$ TPRQ चक्रीय चतुर्भुज है। $\therefore$ TPRQ के परिवृत्त का केन्द्र TR का मध्यबिन्दु होगा।

माना केन्द्र (h, k) है।

$\therefore$ $2h = at_1t_2 + at^2_3$ $\qquad \because$ $t_1t_2 = 2$

$\Rightarrow$ $2h = 2a + at_3^2$ .....(ii)

एवं $2k = a(t_1 + t_2) + 2at_3$ $\qquad \because$ $t_2 + t_2 + t_3 = 0$

$\therefore$ $2k = at_3$ .....(iii)

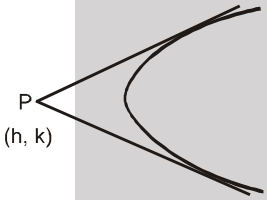
(ii) एवं (iii) की सहायता से t_1, t_2 को विलुप्त करने पर

$2k^2 = a(h - a)$ $\qquad \therefore$ अभीष्ट बिन्दुपथ $2y^2 = a(x - a)$

9. From an external point P, tangents are drawn to the parabola; find the equation of the locus of P when these tangents make angles θ_1 and θ_2 with the axis, such that $\cos\theta_1$ $\cos\theta_2 = \mu$, which is constant.

एक परवलय पर बाह्य बिन्दु P से स्पर्शी रेखाएँ खींची जाती है जो उसके अक्ष से θ_1 तथा θ_2 कोण अन्तरित करती हो, तो बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि $\cos\theta_1 \cos\theta_2 = \mu$, जो एक अचर है।

Ans. $x^2 = \mu^2\{(x - a)^2 + y^2\}$



Sol.

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

$$k = mh + \frac{a}{m}$$

$$m^2h - mk + a = 0$$

$$m_1 = \tan\theta_1$$

$$m_2 = \tan\theta_2$$

$$m_1 + m_2 = \frac{k}{h} \qquad \text{..... (i)}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{h} \qquad \text{.... (ii)}$$

from (i) $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{k}{h}$ ..... (iii) (i) से $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{k}{h}$ ..... (iii)

from (ii) $\tan\theta_1 . \tan\theta_2 = \frac{a}{h}$ ..... (iv) (ii) से $\tan\theta_1 . \tan\theta_2 = \frac{a}{h}$ ..... (iv)

$\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \mu$ (given) ..... (v)

from (iii) $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\mu\ k}{h}$ ..... (vi) (iii) से $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\mu\ k}{h}$ ..... (vi)

from (iv) $\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 = \frac{\mu\ a}{h}$ (iv) से $\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 = \frac{\mu\ a}{h}$

$\therefore \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) = \mu - \frac{\mu\ a}{h}$ ..... (vii)

squaring and adding (vi) & (vii) we get the required locus $\frac{\mu^2k^2}{h^2} + \left(\mu - \frac{\mu a}{h}\right)^2 = 1$

(vi) एवं (vii) का वर्ग करके जोड़ने पर अभीष्ट बिन्दुपथ $\frac{\mu^2k^2}{h^2} + \left(\mu - \frac{\mu a}{h}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{\mu^2}{h^2}\left[k^2 + (h-a)^2\right] = 1$

$\Rightarrow \mu^2 [y^2 + (x - a)^2] = x^2.$

10. A pair of tangents are drawn to the parabola which are equally inclined to a straight line whose inclination to the axis is α ; prove that the locus of their point of intersection is the straight line $y = (x - a) \tan 2\alpha$.

एक परवलय पर खींची गयी एक स्पर्श रेखा युग्म उस रेखा से समान कोण पर झुकी हुई है जिसका परवलय के अक्ष से झुकाव α है। सिद्ध करो की उन रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ सरल रेखा $y = (x - a) \tan 2\alpha$. है।

Sol. Let Parabola be $y^2 = 4ax$

Slope of the given line is $m = \tan \alpha$

Let point of intersection be P(h, k) and

$Q(t_1)$ and $R(t_2)$ be the points of tangency then

$h = at_1t_2$ and $k = a(t_1 + t_2)$

Slopes of tangent at $Q(t_1)$ and $R(t_2)$ are $m_1 = \frac{1}{t_1}$ and $m_2 = \frac{1}{t_2}$

$\Rightarrow \quad h = \frac{a}{m_1m_2}$

$k = a \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \Rightarrow k = a\ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1\ \ m_2}$

$k = h(m_1 + m_2)$

$\frac{m_1 - m}{1 + m_1\ \ m} = \frac{m - m_2}{1 + m\ \ m_2}$ as tangent make equal angle with line of slope m.

$\Rightarrow \quad m_1 + mm_1m_2 - m - m^2 m_2 = m + m_1m^2 - m_2 - m_1 m_2m$

$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2) + 2\ mm_1\ m_2 - 2m - m^2 (m_1 + m_2) = 0$

put $m_1 + m_2 = \frac{k}{h}$ and $m_1.m_2 = \frac{a}{h}$ we get

$\Rightarrow \quad \frac{k}{h} + 2m\ \frac{a}{h} - 2m - m^2 \left(\frac{k}{h}\right) = 0$

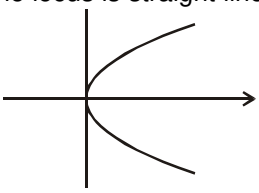
$\Rightarrow \quad k + 2ma - m^2k - 2mh = 0$

$\Rightarrow \quad y(1 - m^2) = 2m(x - a)$

$y = \frac{2m}{1 - m^2}\ (x - a)$ (given $m = \tan \alpha$)

$\Rightarrow \quad y = \tan (2\alpha)\ (x - a)$

Hence the locus is straight line



Hindi. माना परवलय $y^2 = 4ax$

दी गयी रेखा की प्रवणता $m = \tan\alpha$

माना प्रतिच्छेदी बिन्दु $P(h, k)$ एवं स्पर्शी बिन्दु

$Q(t_1)$ एवं $R(t_2)$ हो, तो

$h = at_1t_2$ तथा $k = a(t_1 + t_2)$

बिन्दु $Q(t_1)$ एवं $R(t_2)$ पर प्रवणताएँ $m_1 = \frac{1}{t_1}$ तथा $m_2 = \frac{1}{t_2}$ $\Rightarrow$ $h = \frac{a}{m_1m_2}$

$$k = a\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \quad \Rightarrow \quad k = a\,\frac{(m_1+m_2)}{m_1\ \ m_2}$$

$$k = h(m_1 + m_2)$$

$$\frac{m_1 - m}{1+m_1\ \ m} = \frac{m - m_2}{1+m\ \ m_2} \quad \Rightarrow \quad m_1 + mm_1m_2 - m - m^2\, m_2$$

$$= m + m_1m^2 - m_2 - m_1\, m_2m$$

$\Rightarrow$ $(m_1 + m_2) + 2\,mm_1\, m_2 - 2m - m^2\,(m_1 + m_2) = 0$

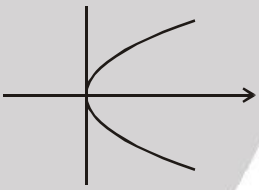
put $m_1 + m_2 = \frac{k}{h}$ and $m_1.m_2 = \frac{a}{h}$ we get

$\Rightarrow$ $\frac{k}{h} + 2m\,\frac{a}{h} - 2m - m^2\left(\frac{k}{h}\right) = 0$

$\Rightarrow$ $k = 2ma - m^2k - 2mh = 0$ (दिया गया है कि $m = \tan\alpha$)

$\Rightarrow$ $y(1 - m^2) = 2m(x - a)$

$y = \frac{2m}{1-m^2}(x - a)$ $\Rightarrow$ $y = \tan(2\alpha)\,(x - a)$



11. Prove that the normals at the points, where the straight line $\ell x + my = 1$ meets the parabola $y^2 = 4ax$, meet on the normal at the point $\left(\frac{4am^2}{\ell^2}, \frac{4am}{\ell}\right)$ on the parabola.

सिद्ध कीजिए की रेखा $\ell x + my = 1$ परवलय $y^2 = 4ax$ को जिन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है वहाँ पर अभिलम्ब, बिन्दु $\left(\frac{4am^2}{\ell^2}, \frac{4am}{\ell}\right)$ पर अभिलम्ब को परवलय पर मिलती है।

Sol. The line is $\ell x + my = 1$ .....(1)

and the parabola is $y^2 = 4ax$.

Let (1) cuts the parabola in P and Q such that

$P \equiv (at_1^2, -2at_1)$ and $Q \equiv (at_2^2, -2at_2)$.

Now equation of PQ is $(t_1 + t_2)\,y + 2x + 2at_1t_2 = 0$. .....(2)

Since the lines (1) and (2) represent the same line, so comparing the coefficients, we get

$$\frac{t_1 + t_2}{m} = \frac{2}{\ell} = \frac{2at_1t_2}{-1} \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = \frac{2m}{\ell} \qquad .....(3)$$

and $t_1t_2 = \frac{-1}{a\ell}$ .....(4)

Again, the normal at $(at^2, -2at)$ is $y = tx - 2at - at^3$, or $at^3 + t\,(2a - x) + y = 0$.

The roots of this equation will be t_1, t_2 and t_3, such that $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

So $t_3 = -(t_1 + t_2) = \frac{-2m}{\ell}$ [by (3)] .....(5)

As the third point on the parabola is $(at_3^2, -2at_3)$, so putting the value of t_3 from (5), we get the required point as $\left(\frac{4am^2}{\ell^2}, \frac{4am}{\ell}\right)$

Hindi. रेखा $\ell x + my = 1$ .....(1)

एवं परवलय $y^2 = 4ax$ है।

माना (1) परवलय को P एवं Q पर मिलती है

ताकि $P \equiv (at_1^2, -2at_1)$ एवं $Q \equiv (at_2^2, -2at_2)$.

अब PQ की समीकरण $(t_1 + t_2)\, y + 2x + 2at_1t_2 = 0$. .....(2)

चूँकि रेखा (1) एवं (2) एक ही रेखा को प्रदर्शित करती है अतः गुणांकों की तुलना करने पर

$$\frac{t_1 + t_2}{m} = \frac{2}{\ell} = \frac{2at_1t_2}{-1} \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = \frac{2m}{\ell} \qquad .....(3)$$

एवं $$t_1t_2 = \frac{-1}{a\ell}. \qquad .....(4)$$

पुनः $(at^2, -2at)$ पर अभिलम्ब $y = tx - 2at - at^3$ या $at^3 + t(2a - x) + y = 0$.

समीकरण के मूल t_1, t_2 एवं t_3 ताकि $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

अतः $$t_3 = -(t_1 + t_2) = \frac{-2m}{\ell} \qquad [(3) \text{ से}] \quad .....(5)$$

तृतीय बिन्दु परवलय पर होने के अनुसार $(at_3^2, -2at_3)$ है। अतः t_3 की (5) में रखने पर अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{4am^2}{\ell^2}, \frac{4am}{\ell}\right)$ प्राप्त होता है।

12. Prove that the equation to the circle, which passes through the focus and touches the parabola $y^2 = 4ax$ at the point $(at^2, 2at)$, is $x^2 + y^2 - ax(3t^2 + 1) - ay(3t - t^3) + 3a^2t^2 = 0$.
Prove also that the locus of its centre is the curve $27ay^2 = (2x - a)(x - 5a)^2$.

सिद्ध कीजिए कि वृत्त जो परवलय $y^2 = 4ax$ को बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श करता है तथा नाभि से गुजरता हो, का समीकरण $x^2 + y^2 - ax(3t^2 + 1) - ay(3t - t^3) + 3a^2t^2 = 0$ है।

यह भी सिद्ध कीजिए कि उसके केन्द्र का बिन्दुपथ वक्र $27ay^2 = (2x - a)(x - 5a)^2$ है।

Sol. If the circle touches the parabola $y^2 = 4ax$ at $(at^2, 2at)$, they must have a common tangent at that point, and hence a common normal. The centre of the circle must lie on that normal. Let (h, k) be the co-ordinates of the centre and r be the radius of the circle. Then its equation can be written as

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + c = 0 \qquad .... (1)$$

The equation to the normal at $(at^2, 2at)$ is

$$y = -tx + 2at + at^3 \qquad .... (2)$$

As the centre (h, k) lies on the normal (2), hence

$$k = -th + 2at + at^3. \qquad .... (3)$$

Focus of the parabola is (a, 0)

As the circle passes through (a, 0) and $(at^2, 2at)$, the distance of these

$$r^2 = (h - a)^2 + k^2 = (h - at^2)^2 + (k - 2at)^2$$

or $$-2ah + a^2 = -2aht^2 - 4akt + a^2t^4 + 4a^2t^2$$

or $$4kt = 2h(1 - t^2) + at^4 + 4at^2 - a \qquad .... (4)$$

Solving (3) and (4), $2h = a(3t^2 + 1)$ .... (5)

and $2k = a(3t - t^3)$ .... (6)

Putting the value of h and k in (1), the equation to the circle is

$$x^2 + y^2 - a(3t^2 + 1)x - a(3t - t^3)y + c = 0 \qquad .... (7)$$

As (7) passes through the focus (a, 0), the co-ordinates will satisfy it; hence $a^2 - a^2(3t^2 + 1) + c = 0$;

$\therefore$ $c = 3a^2t^2$.

Putting the value of 'c' in (7) the circle is

$x^2 + y^2 - ax(3t^2 + 1) - ay(3t - t^3) + 3a^2t^2 = 0$. proved

(ii) To get the locus of the centre, we have to eliminate t from (5) and (6).

Multiplying (5) by t and (6) by 3 and adding, we get $2th + 6k = 10at$; hence $t = \left(\frac{3k}{5a - h}\right)$.

Substituting the value of 't' in (5), we have $(2h - a) = 3a\left(\frac{3k}{5a-h}\right)^2$.

Simplifying and generalising, the locus of centre (h, k)is

$(2x - a)(x - 5a)^2 = 27\,ay^2$ Proved.

Hindi. यदि वृत्त परवलय $y^2 = 4ax$ को $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श करता हो, तो उनकी इस बिन्दु पर एक स्पर्श रेखा एवं एक उभयनिष्ट अभिलम्ब होने चाहिए। वृत्त का केन्द्र इस अभिलम्ब पर स्थित होना चाहिए। माना केन्द्र के निर्देशांक (h, k) है एवं त्रिज्या r है। तब इसके समीकरण को लिखा जा सकता है।

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + c = 0$ .... (1)

$(at^2, 2at)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$y = -tx + 2at + at^3$ .... (2)

केन्द्र (h, k) अभिलम्ब पर स्थित होने के अनुसार

$k = -th + 2at + at^3$. .... (3)

परवलय की नाभि (a, 0)

वृत्त (a, 0) एवं $(at^2, 2at)$ से गुजरता है अतः इनकी दूरी

$r^2 = (h - a)^2 + k^2 = (h - at^2)^2 + (k - 2at)^2$

या $-2ah + a^2 = -2aht^2 - 4akt + a^2t^4 + 4a^2t^2$

या $4kt = 2h(1-t^2) + at^4 + 4at^2 - a$ .... (4)

(3) एवे (4) से $2h = a(3t^2 + 1)$ .... (5)

एवं $2k = a(3t - t^3)$ .... (6)

h एवं k का मान समीकरण (1) में रखने पर वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 - a(3t^2 + 1)x - a(3t - t^3)y + c = 0$ .... (7)

इसके नाभि (a, 0) से गुजरने के अनुसार

$a^2 - a^2(3t^2 + 1) + c = 0$ $\therefore$ $c = 3a^2t^2$.

c का मान (7) में रखने पर वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 - ax(3t^2 + 1) - ay(3t - t^3) + 3a^2t^2 = 0$.

(ii) वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात करने के लिए (5) एवं (6) से t विलुप्त करने पर

(5) को t से एवं (6) को 3 से गुणा करके जोड़ने पर $2th + 6k = 10$

अतः $t = \left(\frac{3k}{5a-h}\right)$.

t का मान (5) में रखने पर $(2h - a) = 3a\left(\frac{3k}{5a-h}\right)^2$

सरल करने पर केन्द्र (h, k) का बिन्दुपथ $(2x - a)(x - 5a)^2 = 27\,ay^2$

13. Two tangents to the parabola $y^2 = 8x$ meet the tangent at its vertex in the points P & Q. If PQ = 4 units, prove that the locus of the point of the intersection of the two tangents is $y^2 = 8(x + 2)$.

परवलय $y^2 = 8x$ की दो स्पर्श रेखाएँ इसके शीर्ष पर स्पर्श रेखा को बिन्दु P एवं Q पर मिलती है। यदि PQ = 4 इकाई हो, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ $y^2 = 8(x + 2)$ है।

Sol. $y^2 = 8x$ .....(i)

Let T_1 $(at_1^2, 2at_1)$ and T_2 $(at_2^2, 2at_2)$ be any two points on parabola (i) and R(h, k) be the point of intersection of tangents at T_1 and T_2

$\therefore$ $h = at_1t_2$ .....(ii)

and $k = a(t_1 + t_2)$ .....(iii)

Tangents at T_1 and T_2 intersect the tangent at its vertex at the points P and Q.

$\therefore$ let $P(0, at_1)$ and $Q(0, at_2)$

$\because$ PQ = 4 $\Rightarrow$ $a(t_1 - t_2) = 4$

$\Rightarrow$ $a^2[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2] = 16$ .....(iv)

from (ii) and (iii) we have

$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}$ and $t_1t_2 = \frac{h}{a}$

$\therefore$ equation (iv) will become

$a^2 \left[\frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a}\right] = 16$

$k^2 - 4ah = 16$

$\Rightarrow$ $k^2 = 4ah + 16$ $\because$ $a = 2$

$\therefore$ $k^2 = 8h + 16$

$\therefore$ locus of R(h, k) is $y^2 = 8(x + 2)$

Hindi. माना परवलय $y^2 = 8x$ .....(i)

पर कोई दो बिन्दु T_1 $(at_1^2, 2at_1)$ एवं T_2 $(at^2_2, 2at_2)$ है तथा T_1 एवं T_2 पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु R(h, k) है।

$\therefore$ $h = at_1t_2$ .....(ii)

एवं $k = a(t_1 + t_2)$ .....(iii)

T_1 एवं T_2 पर स्पर्श रेखाएँ इसके शीर्ष पर स्पर्श रेखा को P एवं Q पर मिलती है।

$\therefore$ माना $P(0, at_1)$ एवं $Q(0, at_2)$ $\because$ PQ = 4 $\Rightarrow$ $a(t_1 - t_2) = 4$

$\Rightarrow$ $a^2 [(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2] = 16$ .....(iv)

(ii) एवं (iii) से $t_1 + t_2 = \frac{k}{a}$ एवं $t_1t_2 = \frac{h}{a}$

$\therefore$ समीकरण (iv) से $a^2 \left[\frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a}\right] = 16$

$k^2 - 4ah = 16$ $\Rightarrow$ $k^2 = 4ah + 16$ $\because$ $a = 2$

$\therefore$ $k^2 = 8h + 16$ $\therefore$ R(h, k) का बिन्दुपथ $y^2 = 8(x + 2)$

14. Find locus of a point P if the three normals drawn from it to the parabola $y^2 = 4ax$ are such that two of them make complementry angles with the axis of the parabola

यदि बिन्दु P से परवलय $y^2 = 4ax$ पर तीन अभिलम्ब इस प्रकार खींचे जाते है कि इनमें से दो परवलय के अक्ष के साथ पूरक कोण बनाते हो, तो बिन्दु P का बिन्दुपथ है :

Ans. $y^2 = a(x - a)$

Sol. Let point P be (h, k). equation of normal

$y = mx - 2am - am^3$

$k = mh - 2a.m - am^3$

$am^3 + m(2a - h) + k = 0$ .....(1)

$m_1 + m_2 + m_3 = 0$

$\sum m_1 \quad m_2 = \frac{2a - h}{a}$

$m_1 m_2 m_3 = -\frac{k}{a}$

given $m_1 m_2 = 1$ as if $m_1 = \tan\theta$, then $m_2 = \tan(90 - \theta) = \cot\theta$

$m_3 = -\frac{k}{a}$ in equation .....(2)

putting (2) in (1)

$-a\frac{k^3}{a^3} - \frac{k}{a}(2a - h) + k = 0$

$\Rightarrow$ $-\frac{k}{a^2}(k^2 + a(2a - h) - a^2) = 0$ $(\because k \neq 0)$

$y^2 = a(x - a)$

Hindi. माना P (h, k) है

अतः अभिलम्ब का समीकरण

$y = mx - 2am - am^3$
$k = mh - 2a.m - am^3$
$am^3 + m(2a - h) + k = 0$ .....(1)
$m_1 + m_2 + m_3 = 0$

$$\sum m_1 \quad m_2 = \frac{2a-h}{a}$$

$$m_1 m_2 m_3 = -\frac{k}{a}$$

दिया हुआ है $m_1 m_2 = 1$

$m_3 = -\frac{k}{a}$ समीकरण में .....(2)

(2) से (1) में $-a\frac{k^3}{a^3} - \frac{k}{a}(2a - h) + k = 0$

$\Rightarrow \quad -\frac{k}{a^2}(k^2 + a(2a - h) - a^2) = 0 \qquad (\because \quad k \neq 0)$

$y^2 = a(x - a)$

15. Prove that the orthocentre of any triangle formed by three tangents to a parabola lies on the directrix.
सिद्ध करो कि परवलय पर खींची गई तीन स्पर्श रेखाओं से निर्मित त्रिभुज का लम्बकेन्द्र परवलय की नियता पर स्थित होता है।

Sol. Let parabola be $y^2 = 4ax$.
Tangents at $P(t_1)$, $Q(t_2)$ and $R(t_3)$ are
$t_1 y = x + a t_1^2$ .....(1)
$t_2 y = x + at_2^2$ .....(2)
$t_3 y = x + at_3^2$ .....(3)
Points of intersection of these tangents
are $A(at_1t_2 , a(t_1 + t_2))$
$B(at_2 t_3 , a(t_2 + t_3))$
$C(at_3t_1 , a(t_3 + t_1))$
orthocenter is point of intersection of altitudes
So altitude from vertex A is
$\therefore \quad y - a(t_1 + t_2) = -t_3 (x - at_1t_2)$ .....(4)
Similarly altitude from B is
$y - a(t_2 + t_3) = -t_1(x - at_2 t_3)$ .....(5)
$\Rightarrow$ So the orthocentre is the point of intersection of (4) and (5).
Hence by solving (4) and (5), we get
$(x, y) \equiv (-a, a(t_1 + t_2 + t_3) + at_1 t_2 t_3)$
Which is on the directrix , proved

Hindi. माना परवलय $y^2 = 4ax$ है
$P(t_1)$, $Q(t_2)$ तथा $R(t_3)$ पर स्पर्श रेखाएँ
$t_1 y = x + a t_1^2$ .....(1)
$t_2 y = x + at_2^2$ .....(2)
$t_3 y = x + at_3^2$ .....(3)
इन स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिन्दु
$A(at_1t_2 , a(t_1 + t_2))$
$B(at_2 t_3 , a(t_2 + t_3))$
$C(at_3t_1 , a(t_3 + t_1))$
लम्बकेन्द्र, शीर्षलम्बों का प्रतिच्छेदी बिन्दु है।
अतः शीर्ष A से शीर्षलम्ब का समीकरण
$\therefore \quad y - a(t_1 + t_2) = -t_3 (x - at_1t_2)$ .....(4)
इसी प्रकार B से शीर्षलम्ब का समीकरण

$y - a(t_2 + t_3) = -t_1(x - at_2 t_3)$ .....(5)

$\Rightarrow$ अतः (4) एवं (5) का प्रतिच्छेद बिन्दु लम्बकेन्द्र है। जो नियता $x = -a$ पर स्थित है

$(x, y) \equiv (-a, a(t_1 + t_2 + t_3) + at_1 t_2 t_3)$

16. If tangent drawn at a point $(t^2, 2t)$ on the parabola $y^2 = 4x$ is same as the normal drawn at a point $(\sqrt{5}\cos\phi, 2\sin\phi)$ on the ellipse $4x^2 + 5y^2 = 20$. Find the values of t & ϕ.

परवलय $y^2 = 4x$ के बिन्दु $(t^2, 2t)$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा दीर्घवृत्त $4x^2 + 5y^2 = 20$ पर स्थित बिन्दु $(\sqrt{5}\cos\phi, 2\sin\phi)$ पर खींचा गया अभिलम्ब ही है तो t एवं ϕ के मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $\phi = \pi - \tan^{-1}2,\ t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\phi = \pi + \tan^{-1}2,\ t = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\phi = \pm\frac{\pi}{2},\ t = 0$

Sol. The equation of the tangent at $(t^2, 2t)$ to the parabola $y^2 = 4x$ is

$2ty = 2(x + t^2)$

$\Rightarrow$ $ty = x + t^2$ $\Rightarrow$ $x - ty + t^2 = 0$ .....(1)

The equation of the normal at point $\left(\sqrt{5}\cos\phi,\ 2\sin\phi\right)$ on the ellipse $4x^2 + 5y^2 = 20$ is

$(\sqrt{5}\sec\phi)x - (2\,\text{cosec}\,\phi)y = 5 - 4$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{5}\sec\phi)x - (2\,\text{cosec}\,\phi)y - 1 = 0$ .....(2)

equation (1) and (2) represents same line

So $\frac{\sqrt{5}\sec\phi}{1} = \frac{-2\,\text{cosec}\phi}{-t} = -\frac{1}{t^2}$

$t = \frac{2\,\text{cosec}\ \phi}{\sqrt{5}\sec\phi}$ and $t = -\frac{1}{2\,\text{cosec}\ \phi}$

$t = \frac{2}{\sqrt{5}}\cot\phi$ and $t = -\frac{1}{2}\sin\phi$

so $\frac{2}{\sqrt{5}}\cot\phi = -\frac{1}{2}\sin\phi$ $\Rightarrow$ $4\cos\phi = -\sqrt{5}\sin^2\phi$

$4\cos\phi = -\sqrt{5}(1 - \cos^2\phi)$

$\sqrt{5}\cos^2\phi - 4\cos\phi - \sqrt{5} = 0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{5}\cos^2\phi - 5\cos\phi + \cos\phi - \sqrt{5} = 0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{5}\cos\phi(\cos\phi - \sqrt{5}) + 1(\cos\phi - \sqrt{5}) = 0$

$\cos\phi = \sqrt{5}$ or $\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

when ϕ is in IInd quadraint $\sin\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\phi = -2$ $\Rightarrow$ $\phi = \pi - \tan^{-1}2$

Now $t = -\frac{1}{2}\sin\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

when ϕ is in IIIrd quadrant

$\sin\phi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\phi = 2$ $\Rightarrow$ $\phi = \pi + \tan^{-1}2$

and $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Hindi. परवलय $y^2 = 4x$ के बिन्दु $(t^2, 2t)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है –

$2ty = 2(x + t^2)$

$\Rightarrow$ $ty = x + t^2$ $\Rightarrow$ $x - ty + t^2 = 0$ .....(1)

दीर्घवृत्त $4x^2 + 5y^2 = 20$ के बिन्दु $\left(\sqrt{5}\cos\phi,\ 2\sin\phi\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है–

$(\sqrt{5}\sec\phi)x - (2\,\text{cosec}\,\phi)y = 5 - 4$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{5}\ \sec\phi)\, x - (2\ \text{cosec}\ \phi)\, y - 1 = 0$ .....(2)

समीकरण (1) और (2) एक ही रेखा को प्रदर्शित करती है अतः

$$\frac{\sqrt{5}\sec\phi}{1} = \frac{-2\,\text{cosec}\phi}{-t} = -\frac{1}{t^2}$$

$t = \dfrac{2\,\text{cosec}\ \phi}{\sqrt{5}\sec\phi}$ और $t = -\dfrac{1}{2\,\text{cosec}\ \phi}$

$t = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cot\phi$ और $t = -\dfrac{1}{2}\sin\phi$ अतः $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cot\phi = -\dfrac{1}{2}\sin\phi$

$\Rightarrow \quad 4\cos\phi = -\sqrt{5}\sin^2\phi$

$4\cos\phi = -\sqrt{5}\ (1 - \cos^2\phi)$

$\sqrt{5}\cos^2\phi - 4\cos\phi - \sqrt{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5}\cos^2\phi - 5\cos\phi + \cos\phi - \sqrt{5} = 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{5}\cos\phi\,(\cos\phi - \sqrt{5}) + 1\,(\cos\phi - \sqrt{5}) = 0$

$\cos\phi = \sqrt{5}$ या $\cos\phi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

जब ϕ द्वितीय चतुर्थांश में है, तो

$\sin\phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\phi = -2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi - \tan^{-1}2$

अब $t = -\dfrac{1}{2}\sin\phi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

जब ϕ तृतीय चतुर्थांश में है, तो

$\sin\phi = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\phi = 2 \Rightarrow \quad \phi = \pi + \tan^{-1}2$

तथा $t = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

17. Find the locus of centre of a family of circles passing through the vertex of the parabola $y^2 = 4ax$, and cutting the parabola orthogonally at the other point of intersection.

परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष से गुजरने वाले और दुसरे प्रतिच्छेद बिन्दु पर परवलय को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता है। वृत्तों के निकाय के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $2y^2(2y^2 + x^2 - 12ax) = ax(3x - 4a)^2$

Sol. Let $P(at^2, 2at)$ be any point on $y^2 = 4ax$. Then vertex A(0, 0). The equation of tangent at P is

$ty = x + at^2$ ...(i)

Tangent at P will be normal to the circle, AP is a chord whose mid point is $\left(\dfrac{at^2}{2}, at\right)$ and slope is $\dfrac{2}{t}$

$\therefore$ Equation of the line passing through mid point of AP and perpendicular to AP is

$$y - at = -\frac{t}{2}\left(x - \frac{at^2}{2}\right)$$

$tx + 2y = \dfrac{at^3}{2} + 2at$ ...(ii)

(i) and (ii) both pass through (x_1, y_1) which is the centre of the circle

$ty_1 = x_1 + at^2$ ...(iii)

$2tx_1 + 4y_1 = at^3 + 4at$ ...(iv)

Multiplying (iii) by t and subtracting (iv), we have

$t_2y_1 + t(4a - 3x_1) - 4y_1 = 0$ ...(v)

also from (iii),

$at^2 - ty_1 + x_1 = 0$ ...(vi)

Eliminating t from (v) and (vi)

$$\frac{t^2}{x_1(4a-3x_1)-4y_1^2} = \frac{t}{-4ay_1 - x_1y_1} = \frac{1}{-y_1^2 - a(4a-3x_1)}$$

on simplyfying, we get

$$2y_1^2\left(2y_1^2 + x_1^2 - 12ax_1\right) = ax_1(3x_1 - 4a)^2$$

Hence required locus is $2y^2(2y^2 + x^2 - 12ax) = ax(3x - 4a)^2$

Hindi. माना $P(at^2, 2at)$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर कोई बिन्दु है तब शीर्ष $A(0, 0)$ है। P पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$ty = x + at^2$ ...(i)

P पर स्पर्श रेखा, वृत्त का अभिलम्ब होगा। AP एक जीवा है जिसका मध्य बिन्दु $\left(\frac{at^2}{2}, at\right)$ और प्रवणता $\frac{2}{t}$ है।

$\therefore$ AP के मध्य बिन्दु से गुजरने वाले तथा AP के लम्बवत् रेखा का समीकरण है–

$$y - at = -\frac{t}{2}\left(x - \frac{at^2}{2}\right)$$

$tx + 2y = \frac{at^3}{2} + 2at$ ...(ii)

(i) और (ii) दोनो (x_1, y_1) से गुजरते है। जो वृत्त का केन्द्र है।

$ty_1 = x_1 + at^2$ ...(iii)

$2tx_1 + 4y_1 = at^3 + 4at$ ...(iv)

t से (iii) का गुणा करके और (iv) से घटाने पर

$t_2y_1 + t(4a - 3x_1) - 4y_1 = 0$ ...(v)

(iii) से,

$at^2 - ty_1 + x_1 = 0$ ...(vi)

(v) और (vi) से t हटाने पर

$$\frac{t^2}{x_1(4a-3x_1)-4y_1^2} = \frac{t}{-4ay_1 - x_1y_1} = \frac{1}{-y_1^2 - a(4a-3x_1)}$$

सरल करने पर

$$2y_1^2\left(2y_1^2 + x_1^2 - 12ax_1\right) = ax_1(3x_1 - 4a)^2$$

अतः अभीष्ट बिन्दुपथ $2y^2(2y^2 + x^2 - 12ax) = ax(3x - 4a)^2$

18. Let A, B, C be three points on the parabola $y^2 = 4ax$. If the orthocentre of the triangle ABC is at the focus then show that the circumcircle of ΔABC touches the y-axis.

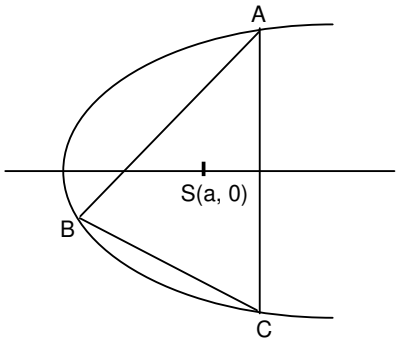
माना A, B, C परवलय $y^2 = 4ax$ पर तीन बिन्दु है यदि ΔABC का लम्ब केन्द्र नाभि पर है तब दर्शाइयें कि ΔABC के परिगत वृत्त, y-अक्ष पर स्पर्श करता है।

Sol. Since S(a, 0) is the orthocentre of the triangle ABC, $SC \perp AB$

$$\Rightarrow \frac{2}{t_1 + t_2} = -\frac{t_3^2 - 1}{2t_3}$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{4t_3}{1 - t_3^2}$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = \frac{5t_3 - t_3^3}{1 - t_3^2}$$



Similarly, we get $t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{5t_2 - t_2^3}{1 - t_2^2}$ and $t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{5t_1 - t_1^3}{1 - t_1^2}$

$\Rightarrow$ t_1, t_2, t_3 are the roots of the equation

$t^3 - \lambda t^2 - 5t + \lambda = 0$, where $\lambda = t_1 + t_2 + t_3$

$\Rightarrow$ $t_1 + t_2 + t_3 = \lambda = -t_1t_2t_3$ .....(1)

and $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -5$ .....(2)

Let $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ be the circumcircle of ΔABC and let $D\left(at_4^2,\ 2at_4\right)$ be the fourth point where the circle meets the parabola.

$\Rightarrow$ t_1, t_2, t_3, t_4 are the roots of the equation

$a^2t^4 + (4a^2 - 2ah)t^2 - 4akt + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$

$\Rightarrow$ $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ $\Rightarrow$ $t_4 = -(t_1 + t_2 + t_3) = t_1t_2t_3$ (from (1))

also, $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = \dfrac{4ak}{a^2}$

$t_1t_2t_3 + t_4(-5) = \dfrac{4ak}{a^2}$ $\Rightarrow$ $t_1t_2t_3 = \dfrac{-k}{a}$

Now, $t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = \dfrac{h^2 + k^2 - r^2}{a^2}$

$\Rightarrow$ $(t_1\ \ t_2\ \ t_3)^2 = \dfrac{h^2 + k^2 - r^2}{a^2}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{k^2}{a^2} = \dfrac{h^2 + k^2 - r^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $h^2 = r^2$

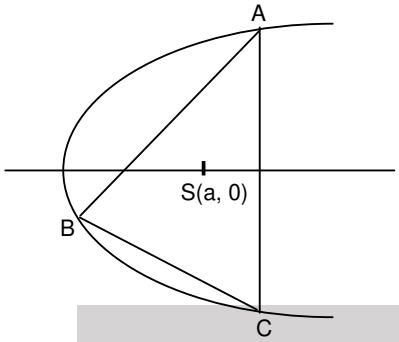
$\Rightarrow$ The circumcircle touches the y-axis.

Hindi चूंकि S(a, 0) त्रिभुज ABC का लम्बकेन्द्र है $SC \perp AB$

$\Rightarrow$ $\dfrac{2}{t_1 + t_2} = -\dfrac{t_3^2 - 1}{2t_3}$

$$\Rightarrow \quad t_1 + t_2 = \frac{4t_3}{1 - t_3^2}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 + t_2 + t_3 = \frac{5t_3 - t_3^3}{1 - t_3^2}$$



इसीप्रकार हम प्राप्त करते है $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{5t_2 - t_2^3}{1 - t_2^2}$ तथा $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{5t_1 - t_1^3}{1 - t_1^2}$

$\Rightarrow$ t_1, t_2, t_3 समीकरण के मूल है $t^3 - \lambda t^2 - 5t + \lambda = 0$, जहाँ $\lambda = t_1 + t_2 + t_3$

$\Rightarrow$ $t_1 + t_2 + t_3 = \lambda = -t_1t_2t_3$ .....(1)

और $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -5$ .....(2)

माना $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, ΔABC का परिवृत्त है और माना $D\left(at_4^2,\ 2at_4\right)$ चौथा बिन्दु है जो परवलय को वृत्त पर मिलता है

$\Rightarrow$ t_1, t_2, t_3, t_4 समीकरण $a^2t^4 + (4a^2 - 2ah)t^2 - 4akt + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ के मूल है

$\Rightarrow$ $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ $\Rightarrow$ $t_4 = -(t_1 + t_2 + t_3) = t_1t_2t_3$ ((1) से)

तथा, $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = \frac{4ak}{a^2}$

$t_1t_2t_3 + t_4(-5) = \frac{4ak}{a^2}$ $\Rightarrow$ $t_1t_2t_3 = \frac{-k}{a}$

अब, $t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = \frac{h^2 + k^2 - r^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \quad (t_1\ \ t_2\ \ t_3)^2 = \frac{h^2 + k^2 - r^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k^2}{a^2} = \frac{h^2 + k^2 - r^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad h^2 = r^2$$

$\Rightarrow$ परिगत वृत्त y-अक्ष को स्पर्श करता है।

19. If α, β are eccentric angles of the extremities of a focal chord of an ellipse, then eccentricity of the ellipse is

किसी दीर्घवृत्त की नाभीय जीवा के सिरों के उत्केन्द्रीय कोण क्रमशः α एवं β हो तो इस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता होगी –

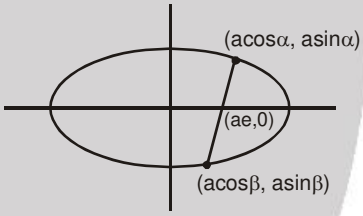
Ans. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Sol. Let equation of ellipse is $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$

Here chord is given by $\dfrac{x}{a}\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+\dfrac{y}{b}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

it passes through (ae, 0) $\therefore$ $e\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$e=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$



Hindi. माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ है ; $(a>b)$ इसकी जीवा का समीकरण है–

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

यह बिन्दु (ae, 0) से गुजरती है अतः

$$e\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Rightarrow e=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

20. If circumcentre of an equilateral triangle inscribed in $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, with vertices having eccentric angles α, β, γ respectively is (x_1, y_1), then find $\Sigma\cos\alpha\cos\beta+\Sigma\sin\alpha\sin\beta$.

Ans. $\dfrac{9x_1^2}{2a^2}+\dfrac{9y_1^2}{2b^2}-\dfrac{3}{2}$

दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ में बनें अन्तर्गत (inscribed) समबाहु त्रिभुज जिसके शीर्षों के उत्केन्द्र कोण क्रमशः α, β, γ है, के परिकेन्द्र के निर्देशांक (x_1, y_1) है, तो $\Sigma\cos\alpha\cos\beta+\Sigma\sin\alpha\sin\beta$ बराबर होगा–

Sol. Now $x_1=\dfrac{a}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$

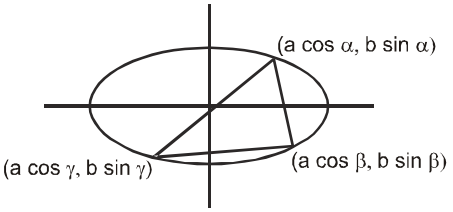
$y_1=\dfrac{b}{3}[\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma]$

$$\Rightarrow\quad\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^2+\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad\frac{9x_1^2}{a^2}+\frac{9y_1^2}{b^2}=1+1+1+2[\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha$$

$+ \sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha]$

$\Rightarrow \quad \sum \cos\alpha \cos\beta + \sum \sin\alpha \sin\beta = \frac{9x_1^2}{2a^2} + \frac{9y_1^2}{2b^2} - \frac{3}{2}$



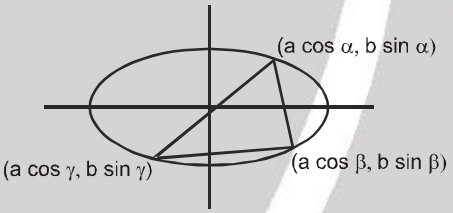
Hindi. $x_1 = \frac{a}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$

$y_1 = \frac{b}{3}[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma]$

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \frac{9x_1^2}{a^2} + \frac{9y_1^2}{b^2} = 1 + 1 + 1 + 2[\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha + \sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha]$

अतः $\quad \sum \cos\alpha \cos\beta + \sum \sin\alpha \sin\beta = \frac{9x_1^2}{2a^2} + \frac{9y_1^2}{2b^2} - \frac{3}{2}$ **Ans.**



21. Find the locus of extremities of latus rectum of the family of ellipse $b^2x^2 + y^2 = a^2b^2$ where b is a parameter ($b^2 < 1$).

दीर्घवृत्त निकाय $b^2x^2 + y^2 = a^2b^2$ के नाभिलम्ब के सिरों का बिन्दुपथ होगा जबकि b एक प्रॉचल है –($b^2 < 1$)

Ans. $x^2 \pm ay = a^2$

Sol. The given ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2b^2} = 1$ has eccentricity $e = \sqrt{1-b^2}$

Thus, if P(h, k) be the ends of the latus rectum of the ellipse, then we have

$h = \pm ae = \pm a\sqrt{1-b^2}$ .....(1) and $k = \pm \frac{a^2b^2}{a} = \pm ab^2$ .....(2)

Eliminating b from equations (1) and (2), we have $1 - \frac{h^2}{a^2} = \pm\frac{k}{a}$ i.e. $h^2 \pm ak = a^2$

Hence, equation of the required locus is $x^2 \pm ay = a^2$

Hindi. दिया गया दीर्घवृत्त है $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2b^2} = 1$

जिसकी उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1-b^2}$

इस प्रकार यदि P(h, k) दीर्घवृत्त के नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक है तो

$h = \pm ae = \pm a\sqrt{1-b^2}$ .....(1) और $k = \pm \frac{a^2b^2}{a} = \pm ab^2$ .....(2)

समीकरण (1) एवं (2) से b को हटाने पर $1 - \frac{h^2}{a^2} = \pm\frac{k}{a} \quad \Rightarrow \quad h^2 \pm ak = a^2$

अतः अभीष्ट बिन्दुपथ का समीकरण $x^2 \pm ay = a^2$ है।

22. A point moves such that the sum of the square of the distances from two fixed straight lines intersecting at angle 2α is a constant. Prove that the locus is an ellipse of eccentricity

$\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$ if $\alpha < \frac{\pi}{4}$ and $\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$ if $\alpha > \frac{\pi}{4}$

कोई बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि दो निश्चित रेखाओं जिनके मध्य कोण 2α है, से उसकी दूरियों के वर्गों का योग अचर रहता है। सिद्ध कीजिए कि इस बिन्दु का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त होगा जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$ होगी यदि $\alpha < \frac{\pi}{4}$ हो तथा $\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$ होगी यदि $\alpha > \frac{\pi}{4}$ हो।

Sol. Let us choose the intersection point of the given lines as the origin and their angular bisector as the x-axis. Equation of the two lines will then be

$y = mx$ and $y = -mx$

where $m = \tan\alpha$.

Let P(h, k) be the point whose locus is to be found,
then according to the given condition

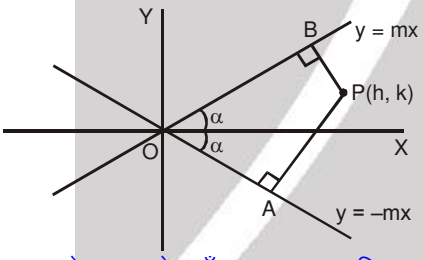
$PA^2 + PB^2 = \text{constant} \Rightarrow \frac{(k-mh)^2}{1+m^2} + \frac{(k+mh)^2}{1+m^2} = c$ (c is a constant)

i.e. $2(k^2 + m^2h^2) = c(1 + m^2)$

Therefore, the locus of P is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ where $a^2 = \frac{c(1+m^2)}{2m^2}$ and $b^2 = \frac{c(1+m^2)}{2}$

If $\alpha < \pi/4$, then $m < 1$, then $a^2 > b^2$, and hence eccentricity $= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-m^2} = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$

If $\alpha > \pi/4$, then $m > 1$, then $a^2 < b^2$, and hence eccentricity $= \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{m^2}} = \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.



Hindi. माना दो सरल रेखाएँ परस्पर मूल बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है तथा उनके मध्य बने कोण का अर्धक x-अक्ष है। तब इन रेखाओं के समीकरण होगें–

$y = mx$ और $y = -mx$

जबकि $m = \tan\alpha$.

माना गतिशील बिन्दु P(h, k) है जिसका बिन्दुपथ ज्ञात करना है

तब दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार

$PA^2 + PB^2 =$ नियतांक

अर्थात् $\frac{(k-mh)^2}{1+m^2} + \frac{(k+mh)^2}{1+m^2} = c$ (c एक नियतांक है) $\Rightarrow 2(k^2 + m^2h^2) = c(1 + m^2)$

अतः P का बिन्दुपथ है $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

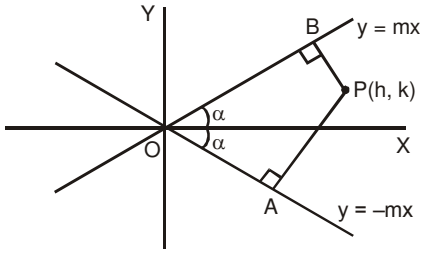
जहाँ $a^2 = \frac{c(1+m^2)}{2m^2}$ और $b^2 = \frac{c(1+m^2)}{2}$

यदि $\alpha < \pi/4$, तब $m < 1$, तब $a^2 > b^2$

इस प्रकार उत्केन्द्रता $= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-m^2} = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$

यदि $\alpha > \pi/4$, तब $m > 1$, तब $a^2 < b^2$, और

इस प्रकार उत्केन्द्रता $= \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{m^2}} = \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.



23. A straight line PQ touches the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ and the circle $x^2 + y^2 = r^2 (b < r < a)$. RS is a focal chord of the ellipse. If RS is parallel to PQ and meets the circle at points R and S. Find the length of RS.

एक सरल रेखा PQ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ और वृत्त $x^2 + y^2 = r^2 (b < r < a)$ का स्पर्श करता है। RS दीर्घवृत्त की नाभीय जीवा है। यदि RS, PQ के समान्तर है तथा वृत्त को R तथा S बिन्दुओं पर मिलता है। तब RS की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans. RS = 2b

Sol. $y = mx + \sqrt{(a^2m^2+b^2)}$ is a tangent to the ellipse this tangent also touches the circle $x^2 + y^2 = r^2$

then $\pm r = \frac{0-0+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$

we get, $m = \sqrt{\left(\frac{r^2-b^2}{a^2-r^2}\right)}$ $(\because b < r < a)$

The line RS passes through (ae, 0) and parallel to PQ is

$y - 0 = m(x - ae)$

$\Rightarrow$ $mx - y - ane = 0$

let T be the feet of the perpendicular dropped from the origin on RS

$OT = \frac{ame}{\sqrt{1+m^2}}$

$(RT)^2 = (OR)^2 - (OT)^2$

$= r^2 - \frac{a^2m^2e^2}{1+m^2} = r^2 - (r^2 - b^2) = b^2$

$\therefore$ RT = b $\therefore$ RS = 2b

Hindi. $y = mx + \sqrt{(a^2m^2+b^2)}$ दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा है। यह स्पर्श रेखा, वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ को भी स्पर्श करती है।

तब $\pm r = \frac{0-0+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$

$m = \sqrt{\left(\frac{r^2-b^2}{a^2-r^2}\right)}$ पर $(\because b < r < a)$

रेखा RS, (ae, 0) से गुजरती है तथा PQ के समान्तर है।

$y - 0 = m(x - ae)$

$\Rightarrow \quad mx - y - ane = 0$

माना मूल बिन्दु से RS पर खींचा गया लम्ब का लम्बपाद T है।

$$OT = \frac{ame}{\sqrt{1+m^2}}$$

$(RT)^2 = (OR)^2 - (OT)^2$

$$= r^2 - \frac{a^2m^2e^2}{1+m^2} = r^2 - (r^2 - b^2) = b^2$$

$\therefore \quad RT = b \qquad \therefore \quad RS = 2b$

24. Prove that the sum of the eccentric angles of the extremities of a chord of an ellipse, which is drawn in a given direction is constant and is equal to twice the eccentric angle of the point at which the tangent is parallel to the given direction.

सिद्ध कीजिये कि एक दीर्घवृत्त के लिये, किसी दी गयी दिशा में खींची गयी जीवा के सिरों के उत्केन्द्र कोणों का योग अचर रहता है तथा यह उस बिन्दु के उत्केन्द्र कोण का दुगना होता है जिस पर खींची गयी स्पर्श रेखा, दी गयी दिशा के समान्तर होती है।

Sol. Let any chord of slope equal to m intersect the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at points A and B whose eccentric angles are ϕ_1 and ϕ_2

The coordinates of A and B are $(a \cos \phi_1, b \sin \phi_1)$ and $(a \cos \phi_2, b \sin \phi_2)$ respectively, therefore we have

slope of AB = m

$$\frac{b(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)}{a(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)} = m$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) = \frac{-b}{am} = \text{constant} \quad .....(i)$$

$\Rightarrow \quad \phi_1 + \phi_2 = \text{constant}$

Slope of the tangent at any point on the ellipse is given by $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$

Let ϕ be the eccentric angle of a point on the ellipse such that the slope of the tangent at this point is equal to m, then

$$m = \frac{-b\cos\phi}{a\sin\phi}$$

Putting this value in equation (1), we have

$$\tan\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) = \tan\phi$$

which proves $\phi_1 + \phi_2 = 2\phi$.

Hindi. माना कोई जीवा जिसकी प्रवणता 'm' है, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है जिनके उत्केन्द्र कोण क्रमशः ϕ_1 एवं ϕ_2 है। बिन्दुओं A एवं B के निर्देशांक क्रमशः $(a \cos \phi_1, b \sin \phi_1)$ एवं $(a \cos \phi_2, b \sin \phi_2)$ है अतः

AB की प्रवणता = m

$$\Rightarrow \quad \frac{b(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)}{a(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)} = m \qquad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) = \frac{-b}{am} = \text{नियतांक}$$

$\Rightarrow \quad \phi_1 + \phi_2 =$ नियतांक

दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$

माना उस बिन्दु का उत्केन्द्र कोण ϕ है जिस पर खींची गयी स्पर्श रेखा की प्रवणता 'm' के बराबर है तब –

$$m = \frac{-b\cos\phi}{a\sin\phi}$$

'm' का यह मान समीकरण (1) में रखने पर –

$$\tan\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) = \tan\phi$$ जिससे सिद्ध होता है कि $\phi_1 + \phi_2 = 2\phi$.

25. If the normals at $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ on an ellipse are concurrent, prove that $(\sum\cos\alpha)(\sum\sec\alpha) = 4$

यदि एक दीर्घवृत्त के बिन्दुओं $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ पर खींचे गये अभिलम्ब संगामी है तो सिद्ध कीजिये कि $(\sum\cos\alpha)(\sum\sec\alpha) = 4$

Sol. Let the equation of the ellipse be

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equation of a normal at any point P (θ) on the above ellipse, is

$$(a\sec\theta)x - (b\,\text{cosec}\,\theta)\,y = a^2e^2$$

Let normal is passing through a point A(h, k)

$\Rightarrow$ $(ah\sec\theta - a^2e^2)^2 = (bk\,\text{cosec}\,\theta)^2$

$\Rightarrow$ $a^2h^2\sec^2\theta - 2a^3e^2h\sec\theta + a^4e^4 = b^2k^2\,\text{cosec}^2\theta = b^2k^2\left(\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}\right)$

$\Rightarrow$ $a^2h^2\sec^4\theta - 2a^3e^2h\sec^3\theta + (a^4e^4 - a^2h^2 - b^2k^2)\sec^2\theta + 2a^3e^2h\sec\theta - a^4e^4 = 0$ ..... (1)

If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ be the roots of the above equation, then

$$\sum\sec\alpha = \frac{2a^3e^2h}{a^2h^2} = \frac{2ae^2}{h}$$

Multiplying equation (1) by $\cos^4\theta$, it reduces to

$$a^4e^4\cos^4\theta - 2a^3e^2h\cos^3\theta - (a^4e^4 - a^2h^2 - b^2k^2)\cos^2\theta + 2a^3e^2h\cos\theta - a^2h^2 = 0 \quad ....(2)$$

Then $\sum\cos\alpha = \frac{2a^3e^2\ h}{a^4e^4} = \frac{2h}{ae^2}$

Hence, we have

$$(\sum\sec\alpha)(\sum\cos\alpha) = \frac{2ae^2}{h}\cdot\frac{2h}{ae^2} = 4$$

which is the desired result.

Hindi. माना दीर्घवृत्त का समीकरण है–

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

इस दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु P (θ) पर अभिलम्ब का समीकरण है–

$$(a\sec\theta)x - (b\,\text{cosec}\,\theta)\,y = a^2e^2$$

माना अभिलम्ब एक बिन्दु A(h,k) से गुजरता है, तो

$$(ah\sec\theta - a^2e^2)^2 = (bk\,\text{cosec}\,\theta)^2$$

$\Rightarrow$ $a^2h^2\sec^2\theta - 2a^3e^2h\sec\theta + a^4e^4 = b^2k^2\,\text{cosec}^2\theta = b^2k^2\left(\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}\right)$

$\Rightarrow$ $a^2h^2\sec^4\theta - 2a^3e^2h\sec^3\theta + (a^4e^4 - a^2h^2 - b^2k^2)\sec^2\theta + 2a^3e^2h\sec\theta - a^4e^4 = 0$ ..... (1)

यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ उपरोक्त समीकरण के मूल हैं, तो–

$$\sum\sec\alpha = \frac{2a^3e^2h}{a^2h^2} = \frac{2ae^2}{h}$$

समीकरण (1) को $\cos^4\theta$ से गुणा करने पर –

$$a^4e^4\cos^4\theta - 2a^3e^2h\cos^3\theta - (a^4e^4 - a^2h^2 - b^2k^2)\cos^2\theta + 2a^3e^2h\cos\theta - a^2h^2 = 0$$

.....(2)

तब $\sum\cos\alpha = \frac{2a^3e^2}{a^4e^4}\ h = \frac{2h}{ae^2}$ अतः $(\sum\sec\alpha)(\sum\cos\alpha) = \frac{2ae^2}{h}\cdot\frac{2h}{ae^2} = 4$

जो अभीष्ट परिणाम है।

26. Show that the equation of the pair of tangents to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at the points of intersection with the line, $px + qy + 1 = 0$ is $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\cdot(p^2a^2+q^2b^2-1) = (px+qy+1)^2$.

प्रदर्शित कीजिए कि रेखा $px + qy + 1 = 0$ और दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)(p^2a^2+q^2b^2-1) = (px+qy+1)^2$ है।

Sol. Chord of contact

$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ .....(i)

given $px + qy = -1$ .....(ii)

comparing (i) and (ii)

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{p} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{q} = \frac{1}{-1}$$

$x_1 = -a^2p$

$y_1 = -b^2q$

Equation of pair of tangent using $SS_1 = T^2$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{a^4p^2}{a^2}+\frac{b^4q^2}{b^2}-1\right) = \left(\frac{x}{a^2}(-a^2p)+\frac{y}{b^2}(-b^2q)-1\right)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(a^2p^2+b^2q^2-1\right) = (px+qy+1)^2$$

Hindi. माना स्पर्श रेखा युग्म परस्पर बिन्दु (x_1, y_1) पर प्रतिच्छेद करती है।

अतः बिन्दु (x_1, y_1) की दीर्घवृत्त के सापेक्ष स्पर्श जीवा का समीकरण

$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$.....(i)

लेकिन $px + qy = -1$ .....(ii) भी स्पर्श जीवा ही है

अतः (i) व (ii) की तुलना करने पर

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{p} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{q} = \frac{1}{-1}$$

Þ $x_1 = -a^2p$

एवं $y_1 = -b^2q$

अतः बिन्दु (x_1, y_1) से दीर्घवृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण ($SS_1 = T^2$ से)

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{a^4p^2}{a^2}+\frac{b^4q^2}{b^2}-1\right) = \left(\frac{x}{a^2}(-a^2p)+\frac{y}{b^2}(-b^2q)-1\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(a^2p^2+b^2q^2-1\right) = (px+qy+1)^2$$

27. A tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ meets the ellipse $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$ at the points P and Q; prove that the tangents at P and Q are at right angles.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर एक स्पर्श रेखा, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$ को बिन्दुओं P तथा Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ एक दूसरे से समकोण पर है।

Sol. Let Point of intersection of tangents at

P & Q be (h, k), chord of contact for ellipse $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$ is

T = 0

$$\frac{hx}{a(a+b)}+\frac{ky}{b(a+b)}=1$$

is tangent to ellipse $\frac{b^2(a+b)^2}{k^2}=a^2\times\left(\frac{bh}{ak}\right)^2+b^2$

Locus is $x^2 + y^2 = (a + b)^2$ $\Rightarrow$ $h^2 + k^2 = (a + b)^2$
which is director circle

Hindi. मानाकि P एवं Q पर खींची गई स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु (h, k) है।
अतः बिन्दु (h, k) के सापेक्ष दीर्घवृत्त की स्पर्श जीवा PQ का समीकरण–

T = 0

$$\Rightarrow \quad \frac{hx}{a(a+b)}+\frac{ky}{b(a+b)}=1$$

जो कि दीर्घवृत्त की स्पर्शरेखा है। (दिया गया है)

$$\frac{b^2(a+b)^2}{k^2}=a^2\times\left(\frac{bh}{ak}\right)^2+b^2$$

$\Rightarrow$ $h^2 + k^2 = (a + b)^2$

अतः (h, k) का बिन्दुपथ है। $x^2 + y^2 = (a + b)^2$

जोकि दीर्घवृत्त का नियामक वृत्त ही है।

28. Find the locus of the point, the chord of contact of the tangents drawn from which to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ touches the circle $x^2 + y^2 = c^2$, where $c < b < a$.

उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिससे दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ को स्पर्श करती है, जहाँ $c < b < a$.

Ans. $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{c^2}$

Sol. Let point be (h, k) equation of chord of contact

$\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=1$ touches the circle $x^2 + y^2 = c^2$

then $\left(\frac{b^2}{k}\right)^2=c^2\times\left(\frac{b^4}{a^4}\frac{h^2}{k^2}+1\right)$

Locus $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{c^2}$

Hindi. मानाकि बिन्दु (h, k) है।

इस बिन्दु के सापेक्ष स्पर्शजीवा का समीकरण होगा –

$$\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=1$$

यह स्पर्श जीवा, वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ को स्पर्श करती है।

अतः $$\left(\frac{b^2}{k}\right)^2 = c^2 \times \left(\frac{b^4}{a^4}\frac{h^2}{k^2}+1\right)$$

अतः बिन्दु (h, k) का बिन्दुपथ है–

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{c^2}$$

29. A chord of ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ whose eccentric angles of extremities are α and β, intersects its director circle at point A and B. Tangents at A and B intersect at point P. Find the equation of circumcircle of triangle ABP.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की एक जीवा जिसके सिरे के उत्केन्द्र कोण α और β है जो बिन्दु A और B पर इसके नियामक वृत्त को प्रतिच्छेद करता है। A और B पर स्पर्श रेखाऐं बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती है। त्रिभुज ABP के परिगत वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Sol. Equation of line AB is $\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Family of circle passing through point A and B is

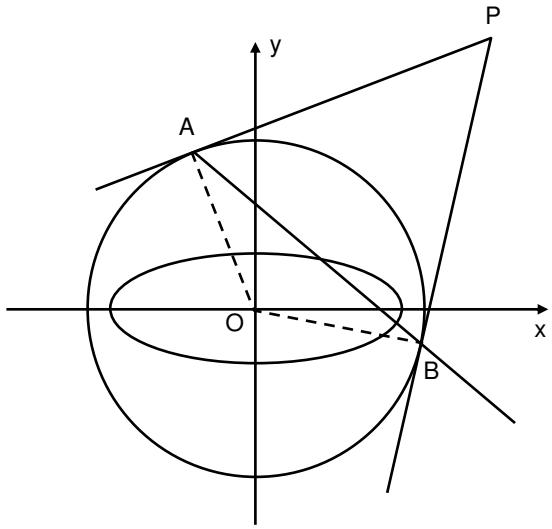
$$x^2+y^2-(a^2+b^2)+\lambda\left(\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=0 \quad \text{.....(1)} \quad \textbf{[1]}$$

$\angle OAP = \angle OBP = \frac{\pi}{2}$. **[1]**

Therefore AOBP is a cyclic quadrilateral i.e. circumcircle of ΔAPB will also pass through origin. Satisfying equation (1) by origin, we get

$$\lambda = \frac{-(a^2+b^2)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

Since the equation of circumcircle of ΔABP is



$$x^2+y^2-(a^2+b^2)-\frac{a^2+b^2}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=0.$$ **[2]**

Hindi: रेखाAB का समीकरण $\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

बिन्दु A और B से गुजरने वाले वृत्त के निकाय का समीकरण

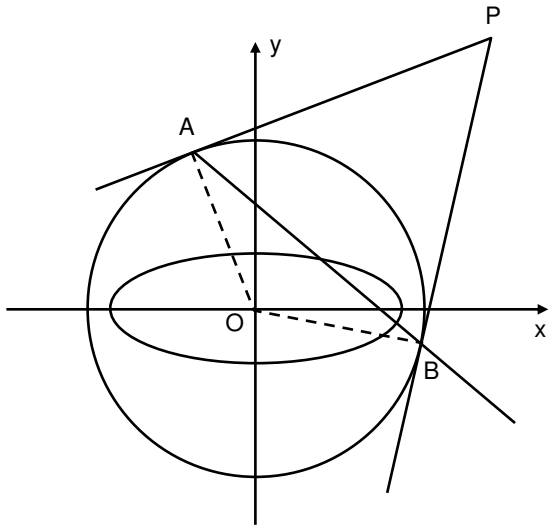
$$x^2+y^2-(a^2+b^2)+\lambda\left(\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=0 \quad \text{.....(1)}$$ **[1]**

$\angle OAP = \angle OBP = \frac{\pi}{2}$. **[1]**

इसलिए AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है तथा ΔAPB के परिगत वृत्त से गुजरता है जो मूल बिन्दु से भी गुजरता है तथा समीकरण (1) को मूल बिन्दु पर संतुष्ट करता है।

$$\lambda = \frac{-(a^2+b^2)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

चूंकि ΔABP के परिगत वृत्त का समीकरण



$$x^2+y^2-(a^2+b^2)-\frac{a^2+b^2}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=0.$$ **[2]**

30. A tangent is drawn at any fixed point P on the ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ and if chord of contact of the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ with respect to any point on this tangent passes through a fixed point, then prove that the line joining this fixed point to the point P never subtends right angle at the origin.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ पर किसी स्थिर बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींची जाती है। यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ की स्पर्श जीवा इस स्पर्श रेखा के सापेक्ष किसी स्थिर बिन्दु से गुजरती है तब सिद्ध कीजिए कि इस स्थिर बिन्दु से बिन्दु P को मिलाने वाली रेखा मूल बिन्दु पर कभी भी समकोण अन्तरित नहीं करती है।

Sol. Let any fixed point P be (h, k)

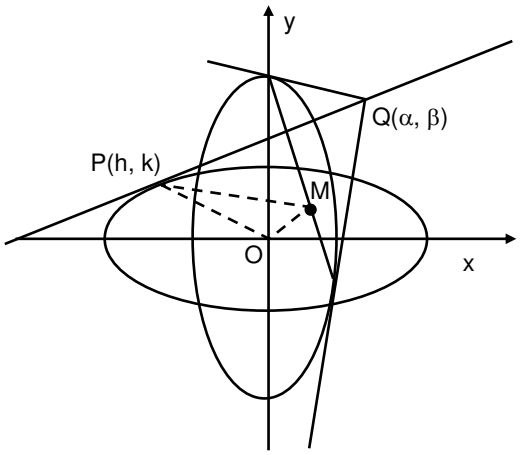
equation of tangent at P (h, k) to the ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ is

$$\frac{hx}{16}+\frac{ky}{9}=1 \qquad \text{.....(1)}$$

Let any point Q (α, β) be on tangent represented by equation (1)

$$\Rightarrow \frac{h\alpha}{16}+\frac{k\beta}{9}=1$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{9}{k}\left(1-\frac{h\alpha}{16}\right) \qquad \text{.....(2)}$$ **[1]**



Now chord of contact of ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ w.r.t. Q (α, β) is $\frac{\alpha x}{9}+\frac{\beta y}{16}=1$

$\Rightarrow \frac{\alpha x}{9}+\frac{9y}{16k}\left(1-\frac{h\alpha}{16}\right)=1$ (from equation (2))

$\Rightarrow \left(\frac{9y}{16k}-1\right)+\alpha\left(\frac{x}{9}-\frac{9hy}{256k}\right)=0$ .....(3) **[2]**

Clearly equation (3) represents a family of lines passes through a fixed point and coordinate of that fixed point is given by M $\left(\frac{9h}{16}, \frac{16k}{9}\right)$.

Now, slope of OM, $M_{OM} = \frac{256k}{81h}$ and slope of OP, $M_{OP} = \frac{k}{h}$

$\Rightarrow M_{OM} \times M_{OP} = \frac{256k}{81h} \times \frac{k}{h} = \left(\frac{16k}{9h}\right)^2 \geq 0$.

Clearly $M_{OM} \times M_{OP} \neq -1 \Rightarrow$ the line PM never subtends right angle at origin. **[2]**

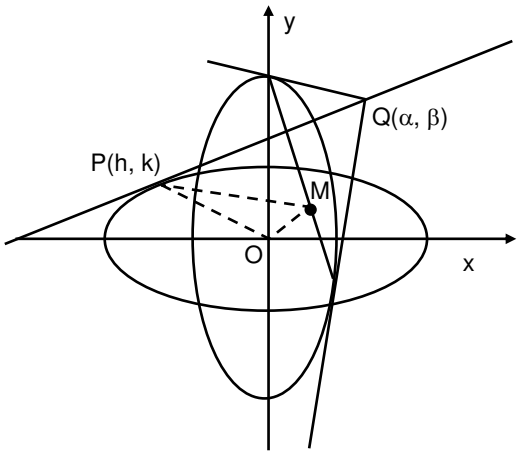
Hindi माना कोई स्थिर बिन्दु P (h, k) है।

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ की P (h, k) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $\frac{hx}{16}+\frac{ky}{9}=1$ .....(1)

माना कि कोई बिन्दु Q (α, β) पर स्पर्श रेखा समीकरण (1) से व्यक्त होती है।

$\Rightarrow \frac{h\alpha}{16}+\frac{k\beta}{9}=1$

$\Rightarrow \beta=\frac{9}{k}\left(1-\frac{h\alpha}{16}\right)$ .....(2) **[1]**



अब दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ की स्पर्श जीवा Q (α, β) के सापेक्ष $\frac{\alpha x}{9}+\frac{\beta y}{16}=1$ है

$\Rightarrow \frac{\alpha x}{9}+\frac{9y}{16k}\left(1-\frac{h\alpha}{16}\right)=1$ ((2) से)

$\Rightarrow \left(\frac{9y}{16k}-1\right)+\alpha\left(\frac{x}{9}-\frac{9hy}{256k}\right)=0$ .....(3) **[2]**

स्पष्टतयः समीकरण (3) स्थिर बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं के निकाय को व्यक्त करती है तथा

स्थिर बिन्दु के निर्देशांक M $\left(\frac{9h}{16}, \frac{16k}{9}\right)$ है।

अब, OM की प्रवणता $M_{OM} = \frac{256k}{81h}$ और तथा OP की प्रवणता $M_{OP} = \frac{k}{h}$

$\Rightarrow M_{OM} \times M_{OP} = \frac{256k}{81h} \times \frac{k}{h} = \left(\frac{16k}{9h}\right)^2 \geq 0$.

स्पष्टतयाः $M_{OM} \times M_{OP} \neq -1 \Rightarrow$ रेखा PM मूल बिन्दु पर कभी भी समकोण अन्तरित नहीं करती है।

31. If the parabola $y^2 = 4ax$ cuts the ellipse $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ in three distinct points then show that the eccentricity of the ellipse e belongs to $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

यदि परवलय $y^2 = 4ax$ दीर्घवृत्त $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को तीन विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तब दर्शाइयें कि दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता e अन्तराल $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ में स्थित है।

Sol. Solving $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ and $y^2 = 4ax$

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{4ax}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+1-\frac{2ax}{a^2}+\frac{4ax}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+2ax\left[\frac{2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right]=0$$

$$\frac{x}{a^2}=-2a\left[\frac{2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right]$$

[as root should be positive]

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{b^2}>0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}>\frac{2}{b^2}$$

$b^2 > 2a^2$ .....(1)

Also $e^2=1-\frac{a^2}{b^2}$

use (1)

$$e \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$$

Hindi समीकरण $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ और $y^2 = 4ax$ को हल करने पर

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{4ax}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+1-\frac{2ax}{a^2}+\frac{4ax}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+2ax\left[\frac{2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right]=0$$

$$\frac{x}{a^2}=-2a\left[\frac{2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right]$$

मूल धनात्मक होने चाहिए

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{b^2}>0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}>\frac{2}{b^2}$$

$b^2 > 2a^2$ .....(1)

तथा $e^2=1-\frac{a^2}{b^2}$

(1) से

$e \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

32. Find the number of integral points lying on or inside the ellipse $2x^2 + 6xy + 6y^2 - 1 = 0$.

दीर्घवृत्त $2x^2 + 6xy + 6y^2 - 1 = 0$ के अन्दर या इस पर स्थित पूर्णांक बिन्दुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. $x = \frac{-6y \pm \sqrt{36y^2 - 4.2(6y^2 - 1)}}{2 \times 2}$

$x = \frac{-3y \pm \sqrt{9y^2 - 12y^2 + 2}}{2}$

$x = \frac{-3y \pm \sqrt{2 - 3y^2}}{2}$

$2 - 3y^2 \geq 0 \Rightarrow 3y^2 \leq 2$

$-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq y \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = 0$

let माना $2x^2 + 6xy + 6y^2 - 1 \leq 0$

$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 \leq 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 0$ so (0,0) is the only point lying on or inside the ellipse.

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 0$ इसलिए (0,0) केवल दीर्घवृत्त के अन्दर या इस पर स्थिर बिन्दु है।

33. The equations of the transverse and conjugate axes of a hyperbola are respectively $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y + 4 = 0$, and their respective lengths are $\sqrt{2}$ and $2/\sqrt{3}$. Then find the equation of the hyperbola .

एक अतिपरवलय की अनुप्रस्थ व संयुग्मी अक्ष की समीकरणें क्रमशः $x + 2y - 3 = 0$ एवं $2x - y + 4 = 0$ है तथा उनकी लम्बाइयाँ क्रमशः $\sqrt{2}$ व $2/\sqrt{3}$ है, तो अतिपरवलय की समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{2}{5}(2x - y + 4)^2 - \frac{3}{5}(x + 2y - 3)^2 = 1$

Sol. We have equation of hyperbola as $\frac{\left(\frac{2x - y + 4}{\sqrt{2^2 + 1}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x + 2y - 4}{\sqrt{1 + 2^2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

$\frac{2(2x - y + 4)^2}{5} - \frac{3.(x + 2y - 3)^2}{5} = 1$

Hindi. अतिपरवलय का समीकरण $\dfrac{\left(\dfrac{2x-y+4}{\sqrt{2^2+1}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \dfrac{\left(\dfrac{x+2y-4}{\sqrt{1+2^2}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ होगा।

$$\frac{2(2x-y+4)^2}{5} - \frac{3.(x+2y-3)^2}{5} = 1$$

34. If P is any point common to the hyperbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ and the circle having line segment joining its focii as diameter then find the sum of focal distances of point P.

यदि कोई बिन्दु P अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ और वृत्त, जिसका व्यास अतिपरवलय की नाभियों को मिलाने वाला रेखाखंड है, का उभयनिष्ठ बिन्दु है तो बिन्दु P की नाभिय दूरियों का योग ज्ञात कीजिए।

Ans. $2\sqrt{66}$

Sol. Focii of hyperbola are $(\pm\sqrt{41}, 0)$

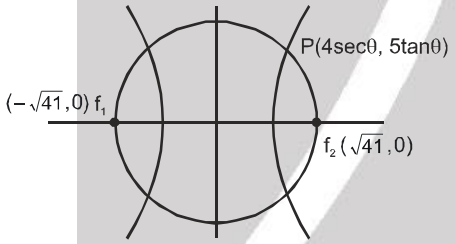
$\because$ P lies on the circle $x^2 + y^2 = 41$

Any point on hyperbola is $\Rightarrow$ $16\sec^2\theta + 25\tan^2\theta = 41$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$ and $\sec\theta = \sqrt{\dfrac{66}{41}}$

$\therefore$ $pf_1 + pf_2 = e\left(4\sec\theta - \dfrac{a}{e}\right) + e\left(4\sec\theta + \dfrac{a}{e}\right)$

where $e = \dfrac{\sqrt{41}}{4} = 2\sqrt{66}$



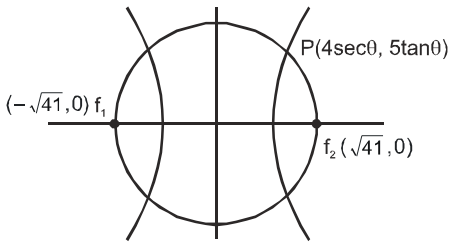
Hindi. अतिपरवलय की नाभियाँ $(\pm\sqrt{41}, 0)$ है।

$\because$ बिन्दु P वृत्त $x^2 + y^2 = 41$ पर स्थित है। $\Rightarrow$ $16\sec^2\theta + 25\tan^2\theta = 41$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$ और $\sec\theta = \sqrt{\dfrac{66}{41}}$

$\therefore$ $pf_1 + pf_2 = e\left(4\sec\theta - \dfrac{a}{e}\right) + e\left(4\sec\theta + \dfrac{a}{e}\right)$

जहाँ $e = \dfrac{\sqrt{41}}{4} = 2\sqrt{66}$

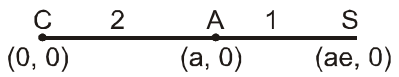


35. The transverse axis of a hyperbola is of length 2a and a vertex divides the segment of the axis between the centre and the corresponding focus in the ratio 2 : 1. Find the equation of the hyperbola.

एक अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 2a है व एक शीर्ष, केन्द्र व संगत नाभि के मध्य अक्ष के रेखाखण्ड को 2 : 1 में विभाजित करता है, तो अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $5x^2 - 4y^2 = 5a^2$

Sol.



Clearly $\frac{2ae}{3} = a \quad \Rightarrow \quad e = \frac{3}{2}$

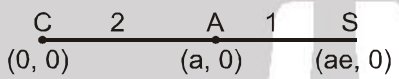
$\therefore \quad S = \left(\frac{3a}{2}, 0\right)$

Directrix is $\quad x = \frac{2a}{3}$

$\therefore$ equation of hyperbola will be $\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2$

Which reduces to $5x^2 - 4y^2 = 5a^2$

Hindi.



स्पष्टतया $\frac{2ae}{3} = a \quad \Rightarrow \quad e = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad S = \left(\frac{3a}{2}, 0\right)$

नियता $\quad x = \frac{2a}{3}$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण $\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 = 5a^2$

36. If $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, a variable chord of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$ subtends a right angle at the centre of the hyperbola, then the chords touch a fixed circle, find the radius of the circle.

यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$ की एक चर जीवा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ इस प्रकार है कि यह अतिपरवलय के केन्द्र पर समकोण बनाती है, तो यह जीवा एक स्थिर वृत्त को स्पर्श करती है तब वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Ans. $\sqrt{2}\,a$

Sol. Homogenizing the equation of hyperbola with the help of line

We have $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{p}\right)^2$

Now this subtends an angle of 90° at origin

so coefficient of x^2 + coefficient of $y^2 = 0$ i.e. $\quad \frac{1}{a^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{p^2} - \frac{1}{2a^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{p^2} = 0$

So $\quad \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{p^2} \qquad p = \sqrt{2}\,a$

Hindi. रेखा की सहायता से अतिपरवलय की समीकरण का समघातीयकरण करने पर

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{p}\right)^2$$

यह मूल बिन्दु पर समकोण अन्तरित करती है।

अतः x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0 अर्थात् $\frac{1}{a^2} - \frac{\cos^2\alpha}{p^2} - \frac{1}{2a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{p^2} = 0$

इसलिए $\frac{1}{2a^2} = \frac{1}{p^2}$ $p = \sqrt{2}\ a$

37. If the distance between the centres of the hyperbolas :
$x^2 - 16xy - 11y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$ ..... (i)
$9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ ..... (ii) is d then $125\ d^2 =$ .....
यदि अतिपरवलयों
$x^2 - 16xy - 11y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$ ..... (i)
$9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ ..... (ii)
के केन्द्रों के बीच की दूरी d है, तो $125\ d^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 0025

Sol. Let $f(x, y) = x^2 - 16\ xy - 11y^2 - 12\ x + 6\ y + 21$
& $g(x, y) = 9x^2 - 16\ y^2 - 18x - 32\ y - 151$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ x - 16y - 12 = 0$ ..... (i)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -16x - 22y + 6 = 0$ .....(ii)

Solving (i) & (ii) we get $C_1\left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

Where C_1 is the centre of 1st hyperbola

Similarly $C_2 = (1, -1)$

given that $C_1\ C_2 = d \quad \Rightarrow \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = d^2 = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad 125\ d^2 = 25$

Hindi. माना $f(x, y) = x^2 - 16\ xy - 11y^2 - 12\ x + 6\ y + 21$
& $g(x, y) = 9x^2 - 16\ y^2 - 18x - 32\ y - 151$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ x - 16y - 12 = 0$ ..... (i)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -16x - 22y + 6 = 0$ .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर पाया $C_1\left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

जहाँ C_1 प्रथम अतिपरवलय का केन्द्र है।

इसी प्रकार $C_2 = (1, -1)$

तथा दिया हुआ है $C_1\ C_2 = d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = d^2 = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad 125\ d^2 = 25$

38. Find an equation of the hyperbola whose directrix is the normal to circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ having slope is 2 and eccentricity is equal to radius of given circle where focus of hyperbola is point of contact of given circle with y-axis.
अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नियता, वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ का अभिलम्ब है तथा प्रवणता 2 है और उत्केन्द्रता दिये हुए वृत्त की त्रिज्या है जबकि अतिपरवलय की नाभियाँ वृत्त का केन्द्र है।

Ans. $11x^2 - y^2 - 16xy - 16x + 38y - 41 = 0$

Sol. Let equation of directrix be $y = 2\ x + C$ .....(i)

$\because$ (1) passes through centre (2, 3) of the circle

$\Rightarrow \quad C = -1$

$\therefore$ (i) reduces to $y = 2\ x - 1$

$\therefore$ equation of required hyperbola will be

$$\sqrt{(x)^2+(y-3)^2} = 2\left(\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right)$$

which reduces to $\Rightarrow 11x^2 - y^2 - 16xy - 16x + 38y - 41 = 0$

Hindi. मानाकि नियता का समीकरण $y = 2x + C$ .....(i)

$\because$ समीकरण (1), वृत्त के केन्द्र (2, 3) से गुजरती है।

$\Rightarrow$ $C = -1$

$\therefore$ समीकरण (i) से

$y = 2x - 1$

$\therefore$ अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 2\left(\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow 11x^2 - y^2 - 16xy - 16x + 38y - 41 = 0$$

39. PQ is the chord joining the points whose eccentric angles are ϕ_1 and $\phi_2$on the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$, If $\phi_1 - \phi_2 = 2\alpha$, where α is constant, prove that PQ touches the hyperbola $\cos^2\alpha\,\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$.

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ पर उत्केन्द्र कोणों ϕ_1 और ϕ_2 बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा PQ है। यदि $\phi_1 - \phi_2 = 2\alpha$, जहाँ α अचर है तो सिद्ध कीजिए कि अतिपरलवय $\cos^2\alpha\,\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा PQ है

Sol. Given hyperbola is $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ ....(1)

Equation of the chord PQ to the hyperbola (1) is

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right) - \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) \qquad (\text{Given } \phi_1 - \phi_2 = 2\alpha)$$

i.e., $$y = \frac{b}{a}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}\,x + \frac{b\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} \quad ...(2)$$

Comparing this line with $y = mx + c$

$$m = \frac{b}{a}.\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$

and $$c = \frac{b\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$

For line $y = mx + c$ to be tangent on $\frac{x^2}{a^2}\cos^2 a - \frac{y^2}{b^2} = 1$, we have

$$c^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}m^2 - b^2$$

$$\text{LHS} = c^2 = \frac{b^2\cos^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$

$$\text{RHS} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\, m^2 - b^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} \times \frac{b^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} - b^2 = \frac{b^2}{\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} - b^2$$

$$= \frac{b^2\cos^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$ Hence proved.

Hindi. दिया गया अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ....(1)

अतिपरवलय (1) की जीवा PQ का समीकरण

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right) - \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$ (दिया गया है $\phi_1 - \phi_2 = 2\alpha$)

अर्थात, $$y = \frac{b}{a}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}x + \frac{b\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} \quad ...(2)$$

$y = mx + c$ से तुलना करने पर

$$m = \frac{b}{a}.\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$

और $$c = \frac{b\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$

$\frac{x^2}{a^2}\cos^2 a - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिए रेखा स्पर्श $y = mx + c$ यहाँ

$$c^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}m^2 - b^2$$

$$\text{LHS} = c^2 = \frac{b^2\cos^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$

$$\text{RHS} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}m^2 - b^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} \times \frac{b^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} - b^2 = \frac{b^2}{\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} - b^2$$

$$= \frac{b^2\cos^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}$$ इतिसिद्धम

40. Find the locus of the mid-points of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ which subtend a right angle at the origin is

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ होगा जो मूलबिन्दु पर समकोण बनाती है, तो का मान है

Sol. Let (h, k) be the mid-point of the chord of the hyperbola. Then its equation is

$$\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}-1=\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}-1$$

$$\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2} \qquad ....(1)$$

or

The equation of the lines joining the origin to the points of intersection of the hyperbola and the chord (1) is obtained by making homogeneous hyperbola with the help of (1)

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\left(\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2x^2-\frac{1}{b^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2y^2=\frac{h^2}{a^4}x^2+\frac{k^2}{b^4}y^2\ \frac{2hk}{a^2b^2}-xy \qquad ...(2)$$

The line represented by (2) will be at right angle if

Coefficient of x^2 + Coefficient of y^2 = 0

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2-\frac{h^2}{a^4}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2-\frac{k^2}{b^4}=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{h^2}{a^4}+\frac{k^2}{b^4}$$

hence, the locus of (h,k) is $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}$

Hindi. माना अतिपरवलय की जीवा का मध्यबिन्दु (h, k) है तब इसकी समीकरण है।

$$\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}-1=\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}-1$$

$$\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2} \qquad ....(1)$$

या

अतिपरवलय और जीवा (1) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूलबिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण प्राप्त करने के लिए (1) की सहायता से अतिपरवलय को समघात बनाया जाता है।

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\left(\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2x^2-\frac{1}{b^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2y^2=\frac{h^2}{a^4}x^2+\frac{k^2}{b^4}y^2\ \frac{2hk}{a^2b^2}-xy \qquad ...(2)$$

रेखा (2) मूलबिन्दु पर समकोण पर होगी यदि

x^2 गुणांक + y^2 गुणांक = 0

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2-\frac{h^2}{a^4}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2-\frac{k^2}{b^4}=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{h^2}{a^4}+\frac{k^2}{b^4}$$

अतः (h,k) का बिन्दुपथ $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}$ है।

41. If a chord joining the points P (a sec θ, a tan θ) & Q (a sec ϕ, a tan ϕ) on the hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$ is a normal to it at P, then show that $\tan\phi = \tan\theta\,(4\sec^2\theta - 1)$.

यदि अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ पर बिन्दुओं P (a sec θ, a tan θ) व Q (a sec ϕ, a tan ϕ) को मिलाने वाली जीवा बिन्दु P पर अभिलंब है, तो प्रदर्शित कीजिए कि $\tan\phi = \tan\theta\,(4\sec^2\theta - 1)$

Sol. The equation of normal at p is

$x\cos\theta + y\cot\theta = 2a$ solving this with the hyperbola

$x^2 - y^2 = a^2$ we have

$$\left(\frac{2a - y\cot\theta}{\cos\theta}\right)^2 - y^2 = a^2$$

$y^2(\text{cosec}^2\theta - 1) - 4ay\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta + 4a^2\sec^2\theta - a^2 = 0$

i.e. product of roots $y_1 y_2 = \dfrac{4a^2\sec^2\theta - a^2}{\text{cosec}^2\theta - 1}$

Now, $y_1 = a\tan\theta$ $y_2 = a\tan\phi$

so $a^2\tan\theta\tan\phi = a^2(4\sec^2\theta - 1)\tan^2\theta$

$\tan\phi = (\tan\theta)\,4(\sec^2\theta - 1)$

Hindi. p पर अभिलम्ब का समीकरण है

$x\cos\theta + y\cot\theta = 2a$

इसे अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ के साथ हल करने पर पाया कि

$$\left(\frac{2a - y\cot\theta}{\cos\theta}\right)^2 - y^2 = a^2$$

$y^2(\text{cosec}^2\theta - 1) - 4ay\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta + 4a^2\sec^2\theta - a^2 = 0$

अर्थात् मूलों का गुणनफल $y_1 y_2 = \dfrac{4a^2\sec^2\theta - a^2}{\text{cosec}^2\theta - 1}$ अब $y_1 = a\tan\theta$ $y_2 = a\tan\phi$

इसलिए $a^2\tan\theta\tan\phi = a^2(4\sec^2\theta - 1)\tan^2\theta$

$\tan\phi = (\tan\theta)\,4(\sec^2\theta - 1)$

42. Chords of the hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ are tangents to the circle drawn on the line joining the foci as diameter . Find the locus of the point of intersection of tangents at the extremities of the chords .

यदि अतिपरवलय $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ की जीवाऐं, नाभियों को मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त की स्पर्श रेखाऐं हो, तो जीवाओं के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}=\dfrac{1}{a^2+b^2}$

Sol.

Circle $x^2 + y^2 = a^2e^2$ ..... (1)

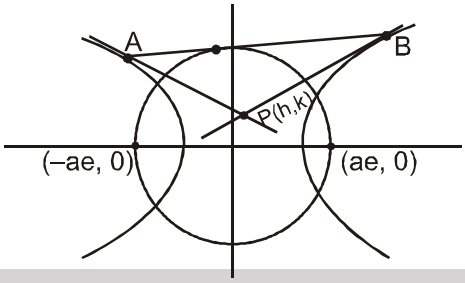
For P, AB is

given by T = 0 $\Rightarrow \frac{xh}{a^2} - \frac{yk}{b^2} = 1$

It is tangent to (1)

So, by p = r we get

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{a^4} + \frac{k^2}{b^4}}} = ae \quad ; \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad \text{H.P.}$$



Hindi.

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2e^2$ ...(1)

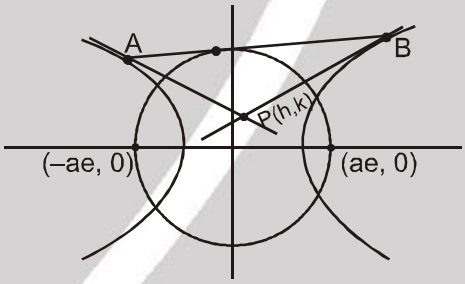
P के लिए AB का समीकरण T = 0 द्वारा दिया जाता है

$\Rightarrow \frac{xh}{a^2} - \frac{yk}{b^2} = 1$ यह (1) पर स्पर्श रेखा है

इसलिए, p = r से

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{a^4} + \frac{k^2}{b^4}}} = ae$$

$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$ इति सिद्धम।



43. From any point on the hyperbola $H_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangents are drawn to the hyperbola $H_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2$. Then find the area cut-off by the chord of contact on the asymptotes of H_2.

अतिपरवलय $H_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु से अतिपरवलय $H_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। स्पर्श जीवा और H_2 की अनंतस्पर्शियों के मध्य का क्षेत्रफल होगा –

Ans. 4 ab

Sol. Let $P(x_1, y_1)$ be a point on $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

Chord of contact of $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2$ from (x_1, y_1) is

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=2 \qquad .....(1)$$

equations of asymptotes are $\quad - = 0$ and $\quad + = 0$

pts. of Intersection of (1) with two asymptotes are

$$x_1=\frac{2a}{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}, \; y_1=\frac{2b}{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}$$

$$x_2=\frac{2a}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}, \; y_2=\frac{-2b}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}$$

$$\therefore \quad \text{or } \Delta=\frac{1}{2}(x_1 y_2-x_2 y_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{4ab\times 2}{\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}\right)=4ab$$

Hindi. मानाकि बिन्दु $P(x_1, y_1)$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ पर है। $\Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$

बिन्दु (x_1, y_1) से $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2$ पर स्पर्श जीवा

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=2 \text{ है।} \qquad .....(1)$$

अनंतस्पर्शियों का समीकरण $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ तथा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$

समीकरण (1), का दोनों अनंतस्पर्शियों से प्रतिच्छेद बिन्दु

$$x_1=\frac{2a}{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}, \; y_1=\frac{2b}{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}$$

$$x_2=, \frac{2a}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}} \; y_2=\frac{-2b}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}} \qquad \therefore \quad \Delta=\frac{1}{2}(x_1 y_2-x_2 y_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{4ab\times 2}{\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}\right)=4ab$$

44. The chord PQ of the rectangular hyperbola $xy = a^2$ meets the x-axis at A; C is the mid point of PQ & 'O' is the origin. Then prove that the Δ ACO is isosceles.

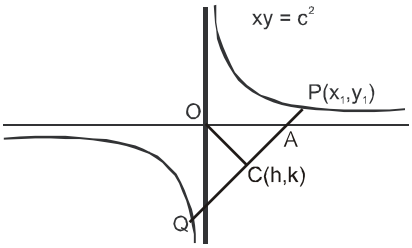
आयतीय अतिपरवलय $xy = a^2$ की जीवा PQ, x-अक्ष को बिन्दु A पर मिलती है। C, PQ का मध्य बिन्दु है और O मूल बिन्दु है तब सिद्ध कीजिए कि Δ ACO समद्विबाहु है।

Sol. Equation of chord with mid point (h, k) will be $kx + hy = 2hk$

This cuts x - axis at $x = 2h$ i.e. A(2h, 0)

Clearly $OC=\sqrt{h^2+k^2}$ and $AC=\sqrt{(2h-h)^2+(0-k)^2}=\sqrt{h^2+k^2}$

Hence isosceles



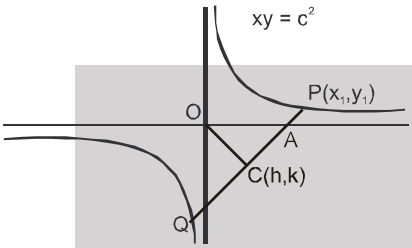
Hindi (h, k) मध्य बिन्दु वाली जीवा का समीकरण

$kx + hy = 2hk$ होगा।

यह x - अक्ष को $x = 2h$ पर प्रतिच्छेद करती है अर्थात् A(2h, 0)

स्पष्टतया $OC = \sqrt{h^2+k^2}$ और $AC = \sqrt{(2h-h)^2+(0-k)^2} = \sqrt{h^2+k^2}$

$\therefore$ समद्विबाहु त्रिभुज है।



45. If the normals at (x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4 on the rectangular hyperbola, $xy = c^2$, meet at the point (α, β) show that

(i) $\Sigma x_i = \alpha$ (ii) $\Sigma y_i = \beta$ (iii) $\Pi x_i = \Pi y_i = -c^4$,

(iv) $\Sigma x_i^2 = \alpha^2$ (v) $\Sigma y_i^2 = \beta^2$

यदि आयतीय अतिपरवलय $xy = c^2$ के बिन्दु (x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4 पर खींचे गए अभिलम्ब बिन्दु (α, β) पर मिलते है तब दशाइये कि

(i) $\Sigma x_i = \alpha$ (ii) $\Sigma y_i = \beta$ (iii) $\Pi x_i = \Pi y_i = -c^4$,

(iv) $\Sigma x_i^2 = \alpha^2$ (v) $\Sigma y_i^2 = \beta^2$

Sol. Let $(x_i, y_i) = \left(ct_i, \frac{c}{t_i}\right)$, i = 1, 2, 3, 4 are the points on the rectangular hyperbola $xy = c^2$

Equation of normal to the hyperbola

$$xy = c^2 \text{ at } \left(ct\frac{c}{t}\right) \text{ is}$$

$$ct^4 - t^3\alpha + t\beta - c = 0$$

It passes through (α, β), then

$$ct^4 - t^3\alpha + t\beta - c = 0$$

Its biquadratic equation in t. Let the roots of this equation are t_1, t_2, t_3, t_4 then

$$\Sigma t_1 = \frac{\alpha}{c},$$

$$\Sigma t_1t_2 = 0, \Sigma t_1t_2t_3 = -\beta/c, t_1t_2t_3t_4 = -1$$

Now (i) $\Sigma x_i = c\Sigma t_1 = \alpha$

$$\Sigma x_i = c\left(\Sigma\frac{1}{t_1}\right)$$

(ii) $\Sigma y_i = c\left(\Sigma\frac{1}{t_1}\right) = c\left(\frac{\Sigma t_1t_2t_3}{t_1t_2t_3t_4}\right) = \beta$

(iii) $\Pi x_i = c^4\Pi t_i = -c^4$

and $\Pi y_i = c^4\left(\frac{1}{\Pi t_i}\right) = -c^4$

(iv) $\Sigma x_i^2 = c^2(\Sigma t_1^2) = c^2\{(\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_1 t_2\} = \alpha^2$

(v) $\Sigma y_i^2 = (\Sigma y_1^2) - 2\Sigma y_1 y_2$

$= \beta^2 - 2c^2\Sigma\left(\frac{1}{t_1 t_2}\right)$

$= \beta^2 - 2c^2.\ \frac{\Sigma t_1 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4} = \beta^2.$

Hindi. माना $(x_i, y_i) = \left(ct_i, \frac{c}{t_i}\right)$, i = 1, 2, 3, 4 आयतीय अतिपरवलय $xy = c^2$ के बिन्दु है।

अतिपरवलय के लिए अभिलम्ब का समीकरण

$xy = c^2$ at $\left(ct\frac{c}{t}\right)$ is

$ct^4 - t^3\alpha + t\beta - c = 0$

यह (α, β) से गुजरती है तब

$ct^4 - t^3\alpha + t\beta - c = 0$

यह t मे चार घातीय समीकरण है। माना इस समीकरण के मूल t_1, t_2, t_3, t_4 है तब

$\Sigma t_1 = \frac{\alpha}{c}$,

$\Sigma t_1 t_2 = 0,\ \Sigma t_1 t_2 t_3 = -\beta/c,\ t_1 t_2 t_3 t_4 = -1$

अब (i) $\Sigma x_i = c\Sigma t_1 = \alpha$

$\Sigma x_i = c\left(\Sigma\frac{1}{t_1}\right)$

(ii) $\Sigma y_i = c\left(\Sigma\frac{1}{t_1}\right) = c\left(\frac{\Sigma t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 t_3 t_4}\right) = \beta$

(iii) $\Pi x_i = c^4\Pi t_i = -c^4$

और $\Pi y_i = c^4\left(\frac{1}{\Pi t_i}\right) = -c^4$

(iv) $\Sigma x_i^2 = c^2(\Sigma t_1^2) = c^2\{(\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_1 t_2\} = \alpha^2$

(v) $\Sigma y_i^2 = (\Sigma y_1^2) - 2\Sigma y_1 y_2$

$= \beta^2 - 2c^2\Sigma\left(\frac{1}{t_1 t_2}\right)$

$= \beta^2 - 2c^2.\ \frac{\Sigma t_1 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4} = \beta^2.$

46. If α, β, γ & δ be the eccentric angles of feet of four co–normal points of a hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ from any point in its plane then prove that $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ is odd integral multiple of π.

यदि समतल में किसी बिन्दु से अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिए खीचें गये अभिलम्बों के सहअभिलम्ब बिन्दुओं के उत्केन्द्र कोण α, β, γ और δ है, तो सिद्ध कीजिए की $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, π का विषम पूर्णांक गुणज है–

Sol. Let P (θ) be a point on

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ then normal on it be

x a cos θ + b y cot θ = a^2e^2

$\Rightarrow \quad ax\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + by\frac{(1-t^2)}{(2t)} = a^2e^2$

where t = tan θ/2

$\Rightarrow \quad x\,a\,(2t - 2t^3) + by\,(1 - t^4) = a^2e^2\,(2t + 2t^3)$

$\Rightarrow \quad t^4\,(by) + t^3\,(2a^2e^2 + 2ax) + t\,(2a^2e^2 - 2xa) - by = 0$

four degree equation

whose roots are t_1, t_2, t_3, t_4

given by $\tan\frac{\alpha}{2}, \tan\frac{\beta}{2}, \tan\frac{\gamma}{2}, \tan\frac{\delta}{2}$ respectively, Now

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4}$$

by using sum, product of roots

we get $1 - S_2 + S_4 = 0$

Hence $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2} = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = (2n + 1)\pi$

$n \in I$ H.P.

Hindi. माना $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर एक बिन्दु P(θ) है तो इस पर अभिलम्ब

x a cos θ + b y cot θ = a^2e^2

$\Rightarrow \quad ax\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + by\frac{(1-t^2)}{(2t)} = a^2e^2$

जहाँ t = tan θ/2

$\Rightarrow \quad x\,a\,(2t - 2t^3) + by\,(1 - t^4) = a^2e^2\,(2t + 2t^3)$

$\Rightarrow \quad t^4\,(by) + t^3\,(2a^2e^2 + 2ax) + t\,(2a^2e^2 - 2xa) - by = 0$

चार घातीय समीकरण जिसके मूल t_1, t_2, t_3, t_4 क्रमशः $\tan\frac{\alpha}{2}, \tan\frac{\beta}{2}, \tan\frac{\gamma}{2}, \tan\frac{\delta}{2}$ द्वारा दिये जाते है

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4}$$

मूलों का योग, गुणनफल का उपयोग करके हमें प्राप्त होता है

$1 - S_2 + S_4 = 0$

47. Prove that a normal to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cannot be normal to its conjugate hyperbola.

सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलम्ब इसके संयुग्मी अतिपरवलय का अभिलम्ब नहीं हो सकता है।

Sol. The normal to the given hyperbola at $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ is

$ax\cos\theta + by\cot\theta = a^2 + b^2$ .....(1)

The normal to the conjugate hyperbola at $(a\tan\phi, b\sec\phi)$ is

$ax\cot\phi + by\cos\phi = a^2 + b^2$ .....(2) **[1]**

(1) and (2) represent the same line if $\cos\theta = \cot\phi$ and $\cos\phi = \cot\theta$ so that $\sec\theta = \tan\phi$ and $\sec\phi = \tan\theta$

$$\Rightarrow \tan^2\phi = \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sec^2\phi \Rightarrow 2 = 0$$

which is not possible. **[1]**

Hindi दिये गये अतिपरवलय का बिन्दु $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर अभिलम्ब

$$ax\cos\theta + by\cot\theta = a^2 + b^2 \qquad .....(1)$$

संयुग्मी अतिपरलय का $(a\tan\phi,\ b\sec\phi)$ पर अभिलम्ब है।

$$ax\cot\phi + by\cos\phi = a^2 + b^2 \qquad .....(2)$$ **[1]**

(1) और (2) समान रेखा को व्यक्त करता है। यदि $\cos\theta = \cot\phi$ और $\cos\phi = \cot\theta$ जबकि $\sec\theta = \tan\phi$ और $\sec\phi = \tan\theta$

$$\Rightarrow \tan^2\phi = \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sec^2\phi \Rightarrow 2 = 0$$

जो कि संभव नहीं है।

48. Let P be a point from where perpendicular tangents are drawn to the circle $2x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$. Let a line from P perpendicular to OP is drawn which intersect hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$ at Q and R. Find number of all possible positions of P such that product of ordinates of points Q and R is.

माना कि P एक बिन्दु है जहाँ वृत्त $2x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$ पर खीची गई स्पर्श रेखाऐं लम्बवत्त है। माना P से रेखा पर लम्ब OP खीचां जाता है जो अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ को Q और R पर प्रतिच्छेद करता है। तब P की सभी संभावित स्थितियों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि बिन्दु Q और R की कोटियों का गुणनफल है।

(i) $\frac{3}{2}a^2$ (ii) a^2 (iii) $\frac{a^2}{2}$

Ans. (i) 4 (ii) 2 (iii) 0

Sol. Clearly P lies on $x^2 + y^2 = a^2$ and QR is tangent to this circle.

so from $x^2 - y^2 = a^2$ and $x\cos\theta - y\sin\theta = a$

$\Rightarrow (y\sin\theta + a)^2 - y^2\cos^2\theta = a^2\cos^2\theta$

$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)y^2 - 2a\sin\theta.y - a^2\sin^2\theta = 0$

$$y_1y_2 = \frac{-a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{3a^2}{2}$$

$2\sin^2\theta = -3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

$\sin^2\theta = 3\cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 3$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \pi \pm \frac{\pi}{3}$$

Hindi स्पष्टतय : P वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित है और QR इस वृत्त की स्पर्श रेखा है।

इसलिए $x^2 - y^2 = a^2$ और $x\cos\theta - y\sin\theta = a$

$\Rightarrow (y\sin\theta + a)^2 - y^2\cos^2\theta = a^2\cos^2\theta$

$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)y^2 - 2a\sin\theta.y - a^2\sin^2\theta = 0$

$$y_1y_2 = \frac{-a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{3a^2}{2}$$

$2\sin^2\theta = -3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

$\sin^2\theta = 3\cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 3$

$\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \pi \pm \frac{\pi}{3}$

49. A rectangular hyperbola circumscribe a triangle ABC, then prove that it will always pass through its orthocenter

त्रिभुज ABC के परिगत एक आयतीय अतिपरवलय खींचा जाता है तो सिद्ध कीजिए कि यह सदैव लम्बकेन्द्र से गुजरता है।

Sol. Let $A\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $B\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$, $C\left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right)$

then orthocentre be $H\left(\frac{-c}{t_1t_2t_3}, -ct_1t_2t_3\right)$ which lies on $xy = c^2$

Hindi. माना $A\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $B\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$, $C\left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right)$

तो लम्बकेन्द्र $H\left(\frac{-c}{t_1t_2t_3}, -ct_1t_2t_3\right)$

जोकि $xy = c^2$ पर स्थित है।

50. If $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ and $S(x_4, y_4)$ are four concyclic points on the rectangular hyperbola $xy = c^2$, then prove that coordinates of orthocentre of the ΔPQR is $(-x_4, -y_4)$.

यदि बिन्दु $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ व $S(x_4, y_4)$ आयतीय अतिपरवलय $xy = c^2$ पर सम वृत्तीय हो, तो सिद्ध कीजिए कि ΔPQR के लम्बकेन्द्र के निर्देशाँक $(-x_4, -y_4)$ है।

Sol. Let the circle on which
P, Q, R, S lie be
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C_1 = 0$

How let $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ lie on it

$\Rightarrow c^2t^4 + 2gct^3 + C_1t^2 + 2fct + c^2 = 0$

where $t_1, t_2, t_3\ t_4$ represents the parameters for P, Q, R, S

$\therefore t_1t_2t_3t_4 = 1$

also since orthocentre of ΔPQR be

$\left(\frac{-c}{t_1t_2t_3}, -ct_1t_2t_3\right) \Rightarrow (-x_4, -y_4)$

Hindi. माना वृत्त जिस पर P, Q, R, S स्थित है
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C_1 = 0$

अब माना $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ इस पर स्थित है।

$\Rightarrow c^2t^4 + 2gct^3 + C_1t^2 + 2fct + c^2 = 0$

जहाँ P, Q, R, S के प्राचाल $t_1, t_2, t_3\ t_4$ द्वारा निरूपित किये जाते हैं।

$\therefore t_1t_2t_3t_4 = 1$

चूँकि ΔPQR का लम्बकेन्द्र

$$\left(\frac{-c}{t_1t_2t_3}, -ct_1t_2t_3\right) \quad \Rightarrow \quad (-x_4, -y_4)$$

51. If a circle and the rectangular hyperbola $xy = c^2$ meet in the four points t_1, t_2, t_3 & t_4, then prove that

(i) $t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = 1$

(ii) The arthmetic mean of the four points bisects the distance between the centres of the two curves.

(iii) the centre of the circle through the points t_1, t_2 & t_3 is :

$$\left\{\frac{c}{2}\left(t_1 + t_2 + t_3 + \frac{1}{t_1\ t_2\ t_3}\right), \frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + t_1\ t_2\ t_3\right)\right\}$$

यदि एक वृत्त और आयतीत अतिपरवलय $xy = c^2$ चार बिन्दुओं t_1, t_2, t_3 और t_4 पर मिलता है तब सिद्ध कीजिए कि

(i) $t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = 1$

(ii) चारों बिन्दुओं का समान्तर माध्य, दोनों वक्रों के केन्द्रों के मध्य दुरी को समद्विभाजित करता है।

(iii) बिन्दुओं t_1, t_2 और t_3 गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र है।

$$\left\{\frac{c}{2}\left(t_1 + t_2 + t_3 + \frac{1}{t_1\ t_2\ t_3}\right), \frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + t_1\ t_2\ t_3\right)\right\}$$

Sol. Let the equation of the circle is

(A) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0$

and the equation of the rectangular hyperbola is $xy = c^2$

put $x = ct$ and $y = \frac{c}{t}$

$$c^2\ t^2 + \frac{c^2}{t^2} + 2gct + \frac{2fc}{t} + k = 0$$

$$c^2\ t^4 + 2gct^3 + kt^2 + 2fct + c^2 = 0$$

$$t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

(B) A.M. of 4 points is $\left(\frac{ct_1 + ct_2 + ct_3 + ct_4}{4}, \left(\frac{\frac{c}{t_1} + \frac{c}{t_2} + \frac{c}{t_3} + \frac{c}{t_4}}{4}\right)\right)$

$$\left(\frac{c}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4), \frac{c}{4}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4}\right)\right)$$

$$\left(\frac{-g}{2}, \frac{-f}{2}\right)$$

mid-point of centre of circle $(-g, -f)$ and hyperbola $(0, 0)$ is $\left(\frac{-g}{2}, \frac{-f}{2}\right)$

(C) Centre of circle is $(-g, -f)$

$$\left(\frac{c}{2}\left(\frac{-2g}{c}\right),\frac{c}{2}\left(\frac{-2f}{2}\right)\right)\equiv\left(\frac{c}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4),\frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)\right)$$

$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1$

$$\left(\frac{c}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\frac{1}{t_1t_2t_3}\right),\frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+t_1t_2t_3\right)\right)$$

Hindi. माना वृत्त का समीकरण

(A) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0$ है।

और अतिपरवलय का समीकरण $xy = c^2$ है।

put $x = ct$ और $y = \frac{c}{t}$ रखने पर

$$c^2 t^2 + \frac{c^2}{t^2} + 2gct + \frac{2fc}{t} + k = 0$$

$$c^2 t^4 + 2gct^3 + kt^2 + 2fct + c^2 = 0$$

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

(B) चारों बिन्दुओं का समान्तर माध्य $\left(\frac{ct_1+ct_2+ct_3+ct_4}{4},\left(\frac{\frac{c}{t_1}+\frac{c}{t_2}+\frac{c}{t_3}+\frac{c}{t_4}}{4}\right)\right)$

$$\left(\frac{c}{4}(t_1+t_2+t_3+t_4),\frac{c}{4}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)\right)$$

$$\left(\frac{-g}{2},\frac{-f}{2}\right)$$

वृत्त का केन्द्र $(-g, -f)$ और अतिपरलवय $(0, 0)$ का मध्य बिन्दु $\left(\frac{-g}{2},\frac{-f}{2}\right)$ है–

(C) वृत्त को केन्द्र $(-g, -f)$ है

$$\left(\frac{c}{2}\left(\frac{-2g}{c}\right),\frac{c}{2}\left(\frac{-2f}{2}\right)\right)\equiv\left(\frac{c}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4),\frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)\right)$$

$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1$

$$\left(\frac{c}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\frac{1}{t_1t_2t_3}\right),\frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+t_1t_2t_3\right)\right)$$