

সাধারণ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ
Ordinary Differential Equation

সমাধান

(পাস ও অনাস)

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \Rightarrow I.F. = e^{\int pdx}$$

মোঃ আবু ইউসুফ

বাংলাদেশের সকল বিশ্ববিদ্যালয়ের বি. এসসি, পাস/সাবসিডিয়ারী, বি. এসসি অনার্স
[মেজর, নন-মেজর], প্রকৌশল ও কৃষি বিভাগের ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য লিখিত।

সাধারণ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ সমাধান

[Ordinary Differential Equations Solution]

প্রফেসর মোঃ আবু ইউসুফ

বি. এসসি, (অনার্স), এম. এসসি, ফার্ষ ক্লাশ সেকেন্ড ;

সাবেক চেয়ারম্যান, গণিত বিভাগ, জগন্নাথ বিশ্ববিদ্যালয়, ঢাকা।

সাবেক ডীন, বিজ্ঞান অনুষদ, জগন্নাথ বিশ্ববিদ্যালয়, ঢাকা।

প্রফেসর ও বিভাগীয় প্রধান, আনন্দমোহন কলেজ, ময়মনসিংহ।

সহযোগী অধ্যাপক ও বিভাগীয় প্রধান, জগন্নাথ বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, ঢাকা।

সহযোগী অধ্যাপক, গণিত বিভাগ, এডওয়ার্ড বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, পাবনা।

প্রাক্তন সহকারী অধ্যাপক, জগন্নাথ বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, ঢাকা।

দেবেন্দ্র বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, মানিকগঞ্জ।

লেকচারার, জগন্নাথ বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, ঢাকা।

খুলনা ইনজিনিয়ারিং কলেজ, খুলনা।

[বর্তমান নাম KUET]

মাসুন ব্রাদার্স

শিক্ষা বিষয়ক প্রকাশনালয়

৩৮, বাংলাবাজার (৩য় তলা), ঢাকা-১১০০

সাধারণ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ সমাধান
[Ordinary Differential Equations Solution]

গ্রন্থকার : মোঃ আবু ইউসুফ
৮২/১, জাফরাবাদ, রায়ের বাজার পুলপাড়
হোসেন সাহেব লেন, মুহাম্মদপুর, ঢাকা।
ফোন : 9123082, 01924-721593

প্রকাশ কাল	:	সেপ্টেম্বর	২০০০ ইং
দ্বিতীয় সংস্করণ	:	এপ্রিল	২০০৫ ইং
তৃতীয় সংস্করণ	:	মার্চ	২০১২ ইং
চতুর্থ সংস্করণ	:	সেপ্টেম্বর	২০১৪ ইং
পৃষ্ঠামুর্দ্ধণ	:	সেপ্টেম্বর	২০১৫ ইং

পুনর্মুদ্রণ : আনুমানিক ২০১৯ ইং

[লেখক কর্তৃক সর্বসত্ত্ব সংরক্ষিত]

মূল্য : দুইশত পঞ্চাশ টাকা মাত্র।

অঙ্কর বিন্যাস : ম্যাথ কম্পিউটারস্
মোবাইল : ০১৭১২-৩২৭৮৮২

মুদ্রনে : পাঞ্জেরী প্রিন্টিং প্রেস

প্রকাশনায় : আবদুল্লাহ আল-মাসউদ
গ্রাম ও পোঃ উত্তর শাহপুর,
থানা : গজারিয়া, জিলা : মুসীগঞ্জ।

সূচীপত্র
সাধারণ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ সমাধান

অধ্যায়	অধ্যায়ের বিষয়	পৃষ্ঠা
প্রশ্নমালা-1	ঃ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ গঠন	1
প্রশ্নমালা-2(1)	ঃ চলক প্রথকীকরণ	5
প্রশ্নমালা-2(2)	ঃ সমমাত্রিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ	13
প্রশ্নমালা-2(3)	ঃ সমমাত্রায় প্রকাশ যোগ্য সমীকরণ	25
প্রশ্নমালা-2(4)	ঃ প্রকৃত ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ	41
প্রশ্নমালা-2(5)	ঃ রৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ	67
প্রশ্নমালা-2(6)	ঃ অভিজ্ঞতার আলোকে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক	84
প্রশ্নমালা-2(7)	ঃ ট্রাজেকটরী	87
প্রশ্নমালা-3(1)	ঃ p এ সমাধান যোগ্য	99
প্রশ্নমালা-3(2)	ঃ y এ সমাধান যোগ্য	102
প্রশ্নমালা-3(3)	ঃ x এ সমাধান যোগ্য	106
প্রশ্নমালা-3(4)	ঃ ক্লাইরোর সমীকরণ	109
প্রশ্নমালা-3(5)	ঃ ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান	112
প্রশ্নমালা-4	ঃ ক্রবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ	122
প্রশ্নমালা-5(1)	ঃ রৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ যাহার ডানপক্ষ শুন্য নয়.....	132
প্রশ্নমালা-5(2)	ঃ ডানপক্ষ e^{ax} আকার	145
প্রশ্নমালা-5(3)	ঃ ডানপক্ষ $\sin ax$ অথবা $\cos ax$ আকার	156
প্রশ্নমালা-5(4)	ঃ ডানপক্ষ $x^m e^{ax}$, $e^{ax} \cos ax$ এবং $e^{ax} \sin bx$ আকার... 168	168
প্রশ্নমালা-6	ঃ চলক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সমমাত্রিক সমীকরণ	191
প্রশ্নমালা-7	ঃ অপারেশনাল উৎপাদকের পদ্ধতি.....	216
প্রশ্নমালা-8	ঃ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ জোট.....	226

অধ্যায়	অধ্যায়ের বিষয়	পৃষ্ঠা
প্রশ্নমালা-9(A)	ঃ আদি মান সমস্যা	300
প্রশ্নমালা-9(B)	ঃ বিদ্যমান এবং অনন্য সমাধান.....	329
প্রশ্নমালা-10	ঃ পর্যায়ক্রমিক আসন্ন মানের পদ্ধতি, পিকার্ডের পদ্ধতি.....	344
প্রশ্নমালা-11	ঃ প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ	362
প্রশ্নমালা-12(1)	ঃ দুই মাত্রার রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ.....	396
প্রশ্নমালা-12(2)	ঃ প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ.....	429
প্রশ্নমালা-12(3)	ঃ দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক ডিফানেরসিয়াল সমীকরণ	440
প্রশ্নমালা-12(4)	ঃ স্বাধীন চলক পরিবর্তনের পদ্ধতি	465
প্রশ্নমালা-13	ঃ রণক্ষিয়ান	481
প্রশ্নমালা-14	ঃ পরামিতি বা পরিমিতি পরিবর্তন.....	493
প্রশ্নমালা-15	ঃ অনিশ্চয় সহগ পদ্ধতি.....	555
প্রশ্নমালা-16(1)	ঃ ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি	602
প্রশ্নমালা-16(2)	ঃ ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি	623
প্রশ্নমালা-17(1)	ঃ রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের ধারায় সমাধান.....	656
প্রশ্নমালা-17(2)	ঃ বেসেল ফাংশন	734
প্রশ্নমালা-17(3)	ঃ লেজেন্ডার বহুপদী এবং ফাংশন	760
প্রশ্নমালা-17(4)	ঃ হারমাইট বহুপদী.....	780
প্রশ্নমালা-17(5)	ঃ ল্যাগুরি বহুপদী	790

ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন প্রশ্নমালা-১

1(i). প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] $y = A \cos x + \sin x \dots (1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -A \sin x + \cos x \dots (2)$$

$$(1) \text{ নং হইতে } [From (1)] y - \sin x = A \cos x, \text{ বা } A = \frac{y - \sin x}{\cos x} \dots (3)$$

(3) নং হইতে A এর মান (2) নং এ বসাইয়া পাই [From (3) putting the value of A in (2) we get]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y - \sin x) \sin x}{\cos x} + \cos x$$

$$\text{বা } \cos x \frac{dy}{dx} = -y \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\text{বা } \cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1.$$

(ii). $xy = c^2$ ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0, \text{ বা } x dy + y dx = 0$$

(iii). $y^2 = 4ax + 4a^2$ ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$2y \frac{dy}{dx} = 4a + 0, \text{ বা } y \frac{dy}{dx} = 2a$$

এখন $2a$ এর মান (1) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the value of $2a$ in (1) we get]

$$y^2 = 2x \cdot y \frac{dy}{dx} + y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \text{ বা } y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

(iv). $x^2 + y^2 = a^2$ ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \text{ বা } x dx + y dy = 0$$

(v). মনেকরি, সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ [Let the equation of concentric circle is]

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ যখন } a \text{ অবাধ ধ্রুবক } [\text{when } a \text{ is arbitrary constant}]$$

$$\therefore 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \text{ বা } x dx + y dy = 0.$$

(vi). x অক্ষকে মূলবিন্দুতে প্রশ্রকারী a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ [The equation of a circle whose radius is a and touches x -axis at the origin is]

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2, \text{ বা } x^2 + y^2 = 2ay \dots (1)$$

$$\therefore 2x \, dx + 2y \, dy = 2a \, dy$$

$$\Rightarrow 2xy \, dx + 2y^2 \, dy = 2ay \, dy \quad [\text{y দ্বারা গুণ করা হইয়াছে}] \quad [\text{Multiplying by } y]$$

$$\text{বা } 2xy \, dx + 2y^2 \, dy = (x^2 + y^2) \, dy; \quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (x^2 - y^2) \, dy - 2xy \, dx = 0$$

$$2(i). \quad y = Ae^{2x} + Be^{-2x} \dots (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x} = 4(Ae^{2x} + Be^{-2x}) = 4y; \quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$$

$$(ii). \quad y = Ae^{3x} + Be^{-2x} + \sin 5x \dots (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x} + 5\cos 5x \dots (2)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 9Ae^{3x} + 4Be^{-2x} - 25\sin 5x \dots (3)$$

$$\text{এখন } (3) - (2) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 6[Ae^{3x} + Be^{-2x}] - 25\sin 5x - 5\cos 5x$$

$$\text{বা } \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 6[y - \sin 5x] - 25\sin 5x - 5\cos 5x; \quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = -31\sin 5x - 5\cos 5x$$

$$(iii). \quad y = e^x(A \cos x + B \sin x) \dots (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x(-A \sin x + B \cos x) + e^x(A \cos x + B \sin x)$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = e^x(-A \sin x + B \cos x) + y \dots (2); \quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-A \cos x - B \sin x) + e^x(-A \sin x + B \cos x) + \frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা } \frac{d^2y}{dx^2} = -e^x(A \cos x + B \sin x) + \frac{dy}{dx} - y + \frac{dy}{dx}; \quad (2) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } \frac{d^2y}{dx^2} = -y + 2\frac{dy}{dx} - y, \quad \text{বা } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

$$(iv). xy = ae^x + be^{-x} + x^2 \dots (1)$$

$$\therefore x \frac{dy}{dx} + y = ae^x - be^{-x} + 2x$$

$$\Rightarrow x \frac{d^2y}{dx^2} + 1 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = ae^x + be^{-x} + 2$$

$$\text{ବା } x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = xy - x^2 + 2; \quad (1) \text{ ନଂ ଦ୍ୱାରା [by (1)]}$$

$$(v). xy = ae^x + be^{-x} \dots (1)$$

$$\therefore x \frac{dy}{dx} + y = ae^x - be^{-x}$$

$$\Rightarrow x \frac{d^2y}{dx^2} + 1 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = ae^x + be^{-x}$$

$$\text{ବା } x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = xy; \quad (1) \text{ ନଂ ଦ୍ୱାରା [by (1)]}$$

$$(vi). y = a \sinhx + b \coshx \dots (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a \coshx + b \sinhx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = a \sinhx + b \coshx$$

$$\text{ବା } \frac{d^2y}{dx^2} = y; \quad (1) \text{ ନଂ ଦ୍ୱାରା [by (1)]}$$

$$(vii). y = ax + bx^2 \dots (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a + 2bx \text{ ଏବଂ } \frac{d^2y}{dx^2} = 2b$$

$$\text{ବା } \frac{dy}{dx} = a + x \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ ବା } a = \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2}.$$

ଏଥିନେ a ଏବଂ b ଏର ମାନ (1) ନଂ ଏ ବସାଇଯା ପାଇ [Now putting the values of a and b in (1) we get]

$$y = x \left[\frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2} \right] + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ବା } y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} x^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$(viii). y = a \ln x + b$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + 0, \quad \text{ବା } x \frac{dy}{dx} = a \Rightarrow x \frac{d^2y}{dx^2} + 1 \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(ix). V = \frac{A}{r} + B, \quad \text{ବା } V_r = A + Br \dots (1)$$

$$\therefore r \frac{dV}{dr} + V = 0 + B, \Rightarrow r \frac{d^2V}{dr^2} + 1 \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0.$$

(x). $x = a \cos t + b \sin t \dots (1)$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -a \sin t + b \cos t$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t - b \sin t = -(a \cos t + b \sin t)$$

বা $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$; (1) নং দ্বারা।

3. $y = ax + \frac{b}{x}$, বা $xy = ax^2 + b \dots (1)$

$$\therefore x \frac{dy}{dx} + 1y = 2ax \Rightarrow x \frac{d^2y}{dx^2} + 1 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2a$$

$$\text{বা } x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 2a \Rightarrow x \frac{d^3y}{dx^3} + 1 \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

4(i). $r = a(1 - \cos\theta)$, উভয় পক্ষে \ln গ্রহণ করি

$$\ln r = \ln a + \ln(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}, \text{ বা } (1 - \cos\theta) \frac{dr}{d\theta} = r \sin\theta$$

(ii). $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, উভয় পক্ষে \ln গ্রহণ করি

$$2 \ln r = 2 \ln a + \ln(\cos 2\theta)$$

$$\therefore \frac{2}{r} \frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{-2 \sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\text{বা } \cos 2\theta \frac{dr}{d\theta} + r \sin 2\theta = 0.$$

(iii). $r = a + b \cos\theta$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = 0 - b \sin\theta \dots (1) \text{ এবং } \frac{d^2r}{d\theta^2} = -b \cos\theta \dots (2)$$

(1) নং হইতে b এর মান (2) নং এ বসাইয়া পাই

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{dr}{d\theta} \cos\theta, \text{ বা } \frac{d^2r}{d\theta^2} = \cot\theta \frac{dr}{d\theta}.$$

চলক পৃথকীকরণ

প্রশ্নমালা-2(1)

1(i). $\frac{dy}{y^2 - 1} = dx$; ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrate this we get]

$$\frac{1}{2} \ln \frac{y-1}{y+1} = x + \frac{c}{2}, \quad \text{বা } \ln \frac{y-1}{y+1} = 2x + c.$$

(ii). $\frac{dy}{\cot y} = \frac{dx}{\tan x}$, বা $\tan y dy = \cot x dx$; ইনটিগ্রেট করি

$$-\ln(\cos y) + \ln c = \ln(\sin x), \quad \text{বা } \ln(\sin x) + \ln(\cos y) = \ln c$$

$$\text{বা } \ln(\sin x \cdot \cos y) = \ln c \Rightarrow \sin x \cdot \cos y = c.$$

(iii). $\sqrt{1-x^2} dy + \sqrt{1-y^2} dx = 0, \quad \text{বা } \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$$\text{ইনটিগ্রেট করিয়া পাই, } \sin^{-1} y + \sin^{-1} x = c.$$

(iv). $y(2\ln y + 1) dy = (\sin x + x \cos x) dx$

$$\text{বা } 2y \ln y dy + y dy = \sin x dx + x \cos x dx$$

$$\text{বা } d(y^2 \ln y) = d(x \sin x), \text{ ইনটিগ্রেট করিয়া পাই}$$

$$\therefore y^2 \ln y = x \sin x + c.$$

(v). $\frac{dy}{1 + 2\sin y + \cos y} = \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$

$$\text{বা } \frac{dx}{1 + \frac{2.2\tan y/2}{1 + \tan^2 y/2} + \frac{1 - \tan^2 y/2}{1 + \tan^2 y/2}} = \frac{dy}{3 + \frac{2.2\tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} + \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}}$$

$$\text{বা } \frac{\sec^2 y/2 dy}{2 + 4\tan y/2} = \frac{\sec^2 x/2 dx}{2\tan^2 x/2 + 4\tan x/2 + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 y/2 dy}{1 + 2\tan y/2} = \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 x/2 dx}{\tan^2 x/2 + 2\tan x/2 + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 y/2 dy}{1 + 2\tan y/2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}; \quad \text{যখন } t = \tan x/2.$$

$$\text{বা } \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 y/2 dy}{1 + 2\tan y/2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1^2}$$

$$\text{বা } \frac{1}{2} \ln(1 + 2\tan y/2) = \tan^{-1}(t+1) + c$$

$$\text{বা } \frac{1}{2} \ln(1 + 2\tan y/2) = \tan^{-1}(1 + \tan x/2) + c.$$

(vi). $\frac{dx}{(1+x^2) \tan^{-1}x} + \frac{dy}{y} = 0.$

বা $\frac{d(\tan^{-1}x)}{\tan^{-1}x} + \frac{dy}{y} = 0,$ ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$$\ln(\tan^{-1}x) + \ln y = \ln c, \text{ বা } \ln(y \tan^{-1}x) = \ln c$$

(viii). $(\cos x - \sin x)dx + (\sin x + \cos x)dy = 0$

বা $\frac{(\cos x - \sin x) dx}{\sin x + \cos x} + dy = 0;$ ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$$\ln(\sin x + \cos x) + y = \ln c$$

বা $\ln(\sin x + \cos x) + \ln e^y = \ln c$

বা $\ln\{(\sin x + \cos x)e^y\} = \ln c \Rightarrow e^y [\sin x + \cos x] = c.$

(vii). $x \ln x dy + \sqrt{1+y^2} dx = 0$

বা $\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{dx}{x \ln x} = 0, \text{ বা } \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{d(\ln x)}{\ln x} = 0$

ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই, $\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + \ln(\ln x) = \ln c$

বা $\ln\{(y + \sqrt{1+y^2}) \ln x\} = \ln c \Rightarrow (y + \sqrt{1+y^2}) \ln x = c.$

2(i). $y dx - x dy = xy dx, \text{ বা } y(1-x) dx = x dy$

বা $\frac{(1-x)dx}{x} = \frac{dy}{y}; \text{ বা } \frac{dx}{x} - dx = \frac{dy}{y},$ ইন্টিগ্রেট করি

$$\ln x - x = \ln y + c, \text{ বা } \ln x - \ln y = x + c, \text{ বা } \ln \frac{x}{y} = x + c.$$

(ii). $x(y^2 + 1) dx + y(x^2 + 1) dy = 0.$

বা $\frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{y dy}{y^2 + 1} = 0$

বা $\frac{1}{2} \cdot \frac{2x dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y dy}{y^2 + 1} = 0$

ইন্টিগ্রেট করি, $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln c$

বা $\ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) = \ln c$

বা $\ln\{(x^2 + 1)(y^2 + 1)\} = \ln c \Rightarrow (x^2 + 1)(y^2 + 1) = c.$

(iii). $x(y+1) dy = y(x+1) dx$

বা $\frac{(y+1)dy}{y} = \frac{(x+1)dx}{x}$

বা $\left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

ইন্টিগ্রেট করি, $y + \ln y = x + \ln x + \ln c$

বা $y - x = \ln c + \ln x - \ln y, \text{ বা } y - x = \ln \frac{cx}{y}.$

(iv). $(1 - x^2)(1 - y) dx = xy(1 + y) dy$

বা $\frac{(1 - x^2)dx}{x} = \frac{y(1 + y) dy}{1 - y}$

বা $\left[\frac{1}{x} - x \right] dx = \frac{[-y(1 - y) - 2(1 - y) + 2] dy}{1 - y}$

বা $\left[\frac{1}{x} - x \right] dx = \left[-y - 2 + \frac{2}{1 - y} \right] dy$; ইনটিগ্রেট করি

বা $\ln x - \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} - 2y - 2\ln(1 - y) + C.$

(v). $x\sqrt{y} dx + (1 + y)\sqrt{1 + x} dy = 0$

বা $\frac{x dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{(1+y) dy}{\sqrt{y}} = 0$

বা $\frac{[(1+x)-1] dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{(1+y) dy}{\sqrt{y}} = 0$

বা $[(1+x)^{1/2} - (1+x)^{-1/2}] dx + [y^{-1/2} + y^{1/2}] dy = 0$ ইনটিগ্রেট করি

$\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} - \frac{(1+x)^{1/2}}{1/2} + \frac{y^{1/2}}{1/2} + \frac{y^{3/2}}{3/2} = \frac{2C}{3}.$

বা $\frac{2(1+x)^{3/2}}{3} - 2(1+x)^{1/2} + 2y^{1/2} + \frac{2y^{3/2}}{3} = 2\frac{C}{3}.$

বা $(1+x)^{3/2} - 3(1+x)^{1/2} + 3y^{1/2} + y^{3/2} = C$

বা $\sqrt{1+x}[1+x-3] + \sqrt{y}[3+y] = C.$

(vi). $y\sqrt{x^2-1} dx + x\sqrt{y^2-1} dy = 0$

বা $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx + \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} dy = 0$

বা $\frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{(y^2-1)dy}{y\sqrt{y^2-1}} = 0$

বা $\frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{y dy}{\sqrt{y^2-1}} - \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = 0$, ইনটিগ্রেট করি,

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2-1} - \sec^{-1}x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{y^2-1} - \sec^{-1}y = C.$

(viii). $xy(1+x^2) dy - (1+y^2) dx = 0$

বা $\frac{y dy}{1+y^2} - \frac{dx}{x(1+x^2)} = 0$, বা $\frac{y dy}{1+y^2} - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right] dx = 0$

$$\text{ইন্টিগ্রেট করি, } \frac{1}{2} \ln(1+y^2) - \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \frac{1}{2} \ln c$$

$$\text{বা } \ln(1+y^2) + \ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln c = \ln x^2 + \ln c$$

$$\text{বা } \ln\{(1+x^2)(1+y^2)\} = \ln(cx^2) \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2) = cx^2$$

$$(viii). x(1+y^2) dx = y(1+x^2) dy, \text{ বা } \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{y dy}{1+y^2}$$

$$\text{ইন্টিগ্রেট করি, } \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln c = \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$$

$$\text{বা } \ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln c$$

$$\text{বা } \ln(1+y^2) = \ln\{c(1+x^2)\}.$$

$$(ix). \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} dx + xy dy = 0$$

$$\text{বা } \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x} + \frac{y dy}{\sqrt{y^2-1}} = 0$$

$$\text{বা } \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{y dy}{\sqrt{y^2-1}} = 0$$

$$\text{বা } \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{y dy}{\sqrt{y^2-1}} = 0, \text{ ইন্টিগ্রেট করি}$$

$$\frac{1}{2} 2\sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x + \frac{1}{2} 2\sqrt{y^2-1} = c.$$

$$3(i). \cos y \ln(\sec x + \tan x) dx = \cos x \ln(\sec y + \tan y) dy$$

$$\text{বা } \ln(\sec x + \tan x) \sec x dx = \ln(\sec y + \tan y) \sec y dy \dots (1)$$

$$\text{ধরি } \ln(\sec x + \tan x) = u \text{ এবং } \ln(\sec y + \tan y) = v$$

$$\therefore \frac{(\sec x \tan x + \sec^2 x) dx}{\sec x + \tan x} = du \text{ এবং } \frac{(\sec y \tan y + \sec^2 y) dy}{\sec y + \tan y} = dv$$

$$\text{বা } \sec x dx = du \text{ এবং } \sec y dy = dv.$$

$$\therefore (1) \Rightarrow u du = v dv; \text{ ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই, } \frac{u^2}{2} = \frac{v^2}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\text{বা } u^2 - v^2 = c, \text{ বা } [\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c.$$

$$(ii). 3e^x \tan y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0$$

$$\text{বা } \frac{3e^x dx}{1-e^x} + \frac{\sec^2 y dy}{\tan y} = 0, \text{ বা } -3 \frac{(-e^x dx)}{1-e^x} + \frac{\sec^2 y dy}{\tan y} = 0$$

$$\text{ইন্টিগ্রেট করি, } -3 \ln(1-e^x) + \ln(\tan y) + \ln c = 0$$

$$\text{বা } \ln c + \ln(\tan y) = 3 \ln(1-e^x)$$

$$\text{বা } \ln(c \tan y) = \ln(1-e^x)^3 \Rightarrow c \tan y = (1-e^x)^3.$$

(iii). $(e^y + 1) \cos x dx + e^y \sin x dy = 0$

বা $\frac{\cos x dx}{\sin x} + \frac{e^y dy}{e^y + 1} = 0$, ইনটিগ্রেট করিয়া পাই

$\ln(\sin x) + \ln(e^y + 1) = \ln c$, বা $\ln\{\sin x(e^y + 1)\} = \ln c$.

(iv). $y \sec^2 x dx + (y + 7) \tan x dy = 0$

বা $\frac{\sec^2 x dx}{\tan x} + \frac{(y + 7)dy}{y} = 0$, বা $\frac{\sec^2 x dx}{\tan x} + \left(1 + \frac{7}{y}\right) dy = 0$

ইনটিগ্রেট করি, $\ln(\tan x) + y + 7 \ln y = \ln c$

বা $\ln(\tan x) + \ln y^7 = \ln c - y$

বা $\ln(y^7 \tan x) = \ln c + \ln e^{-y}$

বা $\ln(y^7 \tan x) = \ln(c e^{-y}) \Rightarrow y^7 \tan x = c e^{-y}$.

4(i). $y - x \frac{dy}{dx} = b \left(1 + x^2 \frac{dy}{dx}\right)$

বা $y dx - x dy = b dx + bx^2 dy$

বা $(y - b) dx = (x + bx^2) dy$

বা $\frac{dx}{x(1 + bx)} = \frac{dy}{y - b}$

বা $\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{1 + bx}\right) dx = \frac{dy}{y - b}$; ইনটিগ্রেট করিয়া পাই

$\ln x - \ln(1 + bx) = \ln(y - b) + \ln c$

বা $\ln x = \ln(1 + bx) + \ln(y - b) + \ln c$

বা $\ln x = \ln\{(1 + bx)(y - b)c\} \Rightarrow x = c(y - b)(1 + bx)$.

(ii). $x(e^y + 4)dx + e^x e^y dy = 0$, বা $x e^{-x} dx + \frac{e^y dy}{e^y + 4} = 0$

$\Rightarrow \int x e^{-x} dx + \int \frac{e^y dy}{e^y + 4} = 0$

বা $x(-e^{-x}) - (1)(e^{-x}) + \ln(e^y + 4) = c$

বা $\ln(e^y + 4) = (x + 1)e^{-x} + c$.

(iii). $dy = (e^x e^{-y} + x^2 e^{-y}) dx$, বা $dy = e^{-y}(e^x + x^2) dx$

বা $e^y dy = e^x dx + x^2 dx$, ইনটিগ্রেট করি, $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + \frac{c}{3}$.

(iv). $\ln\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$, বা $\frac{dy}{dx} = e^{ax+by}$

বা $dy = e^{ax} e^{by} dx$, বা $e^{-by} dy = e^{ax} dx$; ইনটিগ্রেট করি

$\frac{e^{-by}}{-b} = \frac{e^{ax}}{a} + c_1$, বা $-ae^{-by} = be^{ax} + abc_1$, বা $ae^{-by} + be^{ax} + c = 0$.

$$5(i). \frac{dy}{dx} = \sqrt{y-x} \dots (1) \text{ ধরি } y-x = z^2 \text{ তবে } \frac{dy}{dx} - 1 = 2z \frac{dz}{dx}.$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = 1 + 2z \frac{dz}{dx} \dots (2). \text{ এখন (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই}$$

$$1 + 2z \frac{dz}{dx} = z, \text{ বা } 2z \frac{dz}{dx} = z - 1, \text{ বা } \frac{2z dz}{z-1} = dx$$

$$\text{বা } \frac{\{2(z-1) + 2\} dz}{z-1} = dx, \text{ বা } \left(2 + \frac{2}{z-1}\right) dz = dx; \text{ ইন্টিগ্রেট করি,}$$

$$2z + 2\ln(z-1) = x + c, \text{ বা } 2\sqrt{y-x} + 2\ln(\sqrt{y-x}-1) = x + c.$$

$$(ii). \frac{dy}{dx} = (x+y)^2 \dots (1) \text{ ধরি } x+y = z \text{ তবে } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \dots (2) \text{ এখন (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই}$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2, \text{ বা } \frac{dz}{dx} = 1 + z^2, \text{ বা } \frac{dz}{1+z^2} = dx; \text{ ইন্টিগ্রেট করি}$$

$$\tan^{-1}z = x + c, \text{ বা } z = \tan(x+c) \Rightarrow x+y = \tan(x+c).$$

$$(iii). \frac{dy}{dx} = (2x+3y-5)^2 \dots (1) \text{ ধরি } 2x+3y-5 = z.$$

$$\text{তবে } 2+3 \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \text{ বা } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left[\frac{dz}{dx} - 2 \right] \dots (2)$$

$$(1) \text{ নং এবং (2) নং হইতে পাই, } \frac{1}{3} \left[\frac{dz}{dx} - 2 \right] = z^2$$

$$\text{বা } \frac{dz}{dx} - 2 = 3z^2, \text{ বা } \frac{dz}{dx} = 2 + 3z^2, \text{ বা } \frac{dz}{3z^2+2} = dx$$

$$\text{বা } \frac{dz}{3(z^2+2/3)} = dx, \text{ বা } \frac{1}{3} \cdot \frac{dz}{z^2+(\sqrt{2/3})^2} = dx; \text{ ইন্টিগ্রেট করি}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{2/\sqrt{3}}} = x + c, \text{ বা } \frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \frac{z\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = x + c.$$

$$(iv). (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2 \dots (1) \text{ ধরি } x+y = z, \text{ তবে } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \dots (2) \text{ এখন (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই}$$

$$z^2 \left[\frac{dz}{dx} - 1 \right] = a^2, \text{ বা } \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{a^2}{z^2}, \text{ বা } \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{a^2}{z^2}$$

$$\text{বা } \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 + a^2}{z^2}, \quad \text{বা } \frac{z^2 dz}{z^2 + a^2} = dx, \quad \text{বা } \frac{\{(z^2 + a^2) - a^2\} dz}{z^2 + a^2} = dx$$

$$dz - \frac{a^2 dz}{z^2 + a^2} = dx; \text{ ইন্টিগ্রেট করি, } z - \frac{a^2}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a} = x - c.$$

$$\text{বা } x + y - a \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right) = x - c, \text{ বা } y + c = a \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right).$$

(v). $\sqrt{x+y+1} \frac{dy}{dx} = 1 \dots (1)$ ধরি $x+y+1 = z^2$

তবে $1 + \frac{dy}{dx} = 2z \frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = 2z \frac{dz}{dx} - 1 \dots (2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই, $z \left[2z \frac{dz}{dx} - 1 \right] = 1$

বা $2z \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{1}{z}$, বা $2z \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z}$

বা $2z \frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{z}$, বা $\frac{2z^2 dz}{z+1} = dx$

বা $\frac{\{2z(z+1) - 2(z+1) + 2\} dz}{z+1} = dx$

বা $\left[2z - 2 + \frac{2}{z+1} \right] dz = dx$; ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$z^2 - 2z + 2\ln(z+1) = x + c.$

বা $x+y+1 - 2\sqrt{x+y+1} + 2\ln(\sqrt{x+y+1} + 1) = x+c.$

(vi). $(x+y)(dx-dy) = dx+dy$

বা $dx - dy = \frac{dx + dy}{x+y}$, ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$x - y + c = \ln(x+y).$

(vii). $x \frac{dy}{dx} - y = x\sqrt{x^2 + y^2}$, বা $x dy - y dx = x \sqrt{x^2 + y^2} dx$

বা $\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} dx$, বা $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x \sqrt{1 + y^2/x^2}}{x} dx$

বা $\frac{d(y/x)}{\sqrt{1 + (y/x)^2}} = dx$; ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$\ln(y/x + \sqrt{1 + y^2/x^2}) = x + c$, বা $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = e^{x+c}.$

(viii). $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y) \dots (1)$

ধরি $x+y = z$ তবে $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \dots (2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই, $\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z + \cos z$

বা $\frac{dz}{dx} = 1 + \sin z + \cos z$, বা $\frac{dz}{1 + \sin z + \cos z} = dx$

বা $\frac{dz}{\frac{2\tan z/2}{1 + \tan^2 z/2} + \frac{1 - \tan^2 z/2}{1 + \tan^2 z/2}} = dx$

$$\text{বা } \frac{(1 + \tan^2 z/2) dz}{2 + 2\tan z/2} = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 z/2 dz}{1 + \tan z/2} = \int dx$$

$$\text{বা } \ln(1 + \tan z/2) = x + c, \text{ বা } 1 + \tan z/2 = e^{x+c} = e^x \cdot e^c = ae^x.$$

$$(ix). \left(\frac{x+y-a}{x+y-b} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+a}{x+y+b} \dots (1)$$

$$\text{ধরি } x+y = z \text{ তবে } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \text{ বা } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \dots (2)$$

$$\text{এখন (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই, } \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \left(\frac{dz}{dx} - 1 \right) = \frac{z+a}{z+b}$$

$$\text{বা } \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{(z+a)(z-b)}{(z-a)(z+b)}, \text{ বা } \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{(z+a)(z-b)}{(z-a)(z+b)}$$

$$\text{বা } \frac{dz}{dx} = \frac{2[z^2 - ab]}{z^2 - (a-b)z - ab}, \text{ বা } \frac{[z^2 - (a-b)z - ab] dz}{z^2 - ab} = 2dx$$

$$\text{বা } \left[1 - \frac{(a-b)z}{z^2 - ab} \right] dz = 2dx; \text{ ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই}$$

$$z - \frac{(a-b)}{2} \ln(z^2 - ab) = 2x + \frac{c}{2}$$

$$\text{বা } 2z - (a-b) \ln(z^2 - ab) = 4x + c$$

$$\text{বা } 2(x+y) - (a-b) \ln\{(x+y)^2 - ab\} = 4x + c$$

$$\text{বা } (b-a) \ln\{(x+y)^2 - ab\} = 2(x-y) + c.$$

$$(x). \frac{xdx + ydy}{xdy - ydx} = \frac{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dots (1)$$

$$\text{ধরি } x = r \cos\theta, y = r \sin\theta \text{ তবে } x^2 + y^2 = r^2$$

$$dx = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta, dy = \sin\theta dr + r \cos\theta d\theta$$

$$\frac{r \sin\theta}{r \cos\theta} = \frac{y}{x}, \text{ বা } \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} xdx + ydy &= r\cos\theta (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + r\sin\theta (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) dr - r^2 \cos\theta \sin\theta d\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= r dr. \end{aligned}$$

$$\text{এবং } xdy - ydx = r^2 d\theta$$

$$(1) \Rightarrow \frac{rdr}{r^2 d\theta} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}, \text{ বা } \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = d\theta, \text{ ইন্টিগ্রেট করি}$$

$$\sin^{-1} \frac{r}{a} = \theta + c, \text{ বা } \frac{r}{a} = \sin(\theta + c), \text{ বা } r = a \sin(\theta + c).$$

$$\text{বা } \sqrt{x^2 + y^2} = a \sin(c + \tan^{-1} y/x).$$