এখন (2) $\times \frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{z}{1+x}\right] = e^x$; ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি,

$$\frac{z}{1+x} = e^x + c, \text{ বা } \frac{\sin y}{1+x} = e^x + c.$$

(iii). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2\, ln x}{x}$, বা $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} = \frac{ln x}{x}$ ... (1)

ধরি $\frac{1}{y} = z$ তবে $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$,

$\therefore$ (1) $\Rightarrow -\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{ln x}{x}$, বা $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{ln x}{x}$ ... (2)

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-ln x} = e^{ln x^{-1}} = x^{-1} = 1/x.$

এখন (2) $\times \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{z}{x}\right] = -\frac{ln x}{x^2}$; ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি,

$$\frac{z}{x} = -\int\frac{ln x\, dx}{x^2} = -\left[ln x\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\right)dx\right]$$

বা $\frac{z}{x} = -\left[ln x\left(\frac{-1}{x}\right) + \int\frac{dx}{x^2}\right] = -\left[\frac{-ln x}{x} - \frac{1}{x}\right] + c$

বা $\frac{1}{xy} = \frac{ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$, বা $1 = y ln x + y + cxy.$

(iv). $-\frac{dy}{dx} + xy = y^3 e^{-x^2}$ বা $-\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y^2} = e^{-x^2}$ ... (1)

ধরি $\frac{1}{y^2} = z$ তবে $\frac{-2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ বা $-\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$.

$\therefore$ (1) $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = e^{-x^2}$ বা $\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2}$ ... (2)

$\therefore$ I. F. $= e^{\int 2x\, dx} = e^{x^2}.$

এখন (2) $\times e^{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}[ze^{x^2}] = 2$; ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি,

$$ze^{x^2} = 2x + c, \text{ বা } \frac{1}{y^2}e^{x^2} = 2x + c.$$

(v). $3\frac{dy}{dx} - y\cot x = -2e^x y^4$

বা $\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^3}\cot x = -2e^x$ ... (1)

ধরি $-\frac{1}{y^3} = z$ তবে $\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow \frac{dz}{dx} + z\cot x = -2e^x$ ... (2)

$\therefore$ I. F. $= e^{\int\cot x\, dx} = e^{ln(\sin x)} = \sin x$

এখন (2) × sinx $\Rightarrow \frac{d}{dx}[z \sin x] = -2e^x \sin x$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই

$$z\sin x = -2\int e^x \sin x\, dx = -2\left[\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{1^2+1^2}\right] - c$$

বা $-\frac{\sin x}{y^3} = -e^x(\sin x - \cos x) - c.$

(vi). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$, বা $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} = 1 \cdots (1)$

ধরি $\frac{1}{y} = z$ তবে $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$.

$\therefore (1) \Rightarrow -\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 1$, বা $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -1 \cdots (2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-lnx} = e^{lnx^{-1}} = x^{-1} = 1/x$

এখন (2) × $\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{z}{x}\right] = -\frac{1}{x}$; ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি,

$$\frac{z}{x} = -lnx + c, \quad \text{বা } \frac{1}{yx} = -lnx + c\,.$$

(vii). $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} = \frac{y^2}{x}$ বা $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdots (1)$

ধরি $\frac{1}{y^2} = z$ তবে $\frac{-2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ বা $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$

$\therefore (1) \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{1}{x}$ বা $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = -\frac{2}{x} \cdots (2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int\frac{2\,dx}{x}} = e^{-2lnx} = e^{lnx^{-2}} = x^{-2} = 1/x^2$

এখন (2) × $\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{z}{x^2}\right] = \frac{-2}{x^3}$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি, $\frac{z}{x^2} = \frac{1}{x^2} + c$, বা $\frac{1}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} + c.$

(viii). $\frac{1}{y(lny)^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{lny}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdots (1)$

ধরি $\frac{1}{lny} = z$ তবে $\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{(lny)^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$

$\therefore (1) \Rightarrow -\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}$ বা $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = \frac{-1}{x^2} \cdots (2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int\frac{1}{x}dx} = e^{-lnx} = e^{lnx^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ যাহার ডানপক্ষ শুন্য নয়

প্রশ্নমালা-5(1)

1(i). $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 20x \cdots (1)$

মনেকরি, $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \cdots (2)$ then]

$(2) \Rightarrow (m^2 - 9m + 20)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 9m + 20 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-4)(m-5) = 0 \Rightarrow m = 4, 5$

$\therefore y_c = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x}$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now (1) can be written in the following form]

$(D^2 - 9D + 20)y = 20x$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 9D + 20} 20x$$

$$= \frac{1}{20[1 - 9D/20 + D^2/20]} 20x$$

$$= \frac{1}{20}\left[1 - \left(\frac{9D}{20} - \frac{D^2}{20}\right)\right]^{-1} 20x$$

$$= \frac{1}{20}\left[1 + \frac{9D}{20} - \frac{D^2}{20} + \ldots\right]20x$$

$$= \frac{1}{20}\left[20x + \frac{9}{20} D(20x) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[20x + \frac{9}{20}(20)\right] = \frac{1}{20}[20x + 9] = x + 9/20$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান [General solution is] $y = y_c + y_p$

$\therefore y = c_1e^{4x} + c_2e^{5x} + x + 9/20$

(ii). $(D^2 + 2D + 1)y = 2x + x^2 \cdots (1)$

মনেকরি, $(D^2 + 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে $(2) \Rightarrow (m^2 + 2m + 1)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 + 2m + 1 = 0$, যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1, -1$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)e^{-x}$

(iv). $(D^2 - 4D + 4)y = x^3 \cdots (1)$

মনেকরি, $(D^2 - 4D + 4)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে $(2) \Rightarrow (m^2 - 4m + 4)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 - 4m + 4 = 0$, যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2, 2$$

$$\therefore \; y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$$

(1) নং হইতে পাই,

$$y_p = \frac{1}{(D-2)^2} x^3$$

$$= \frac{1}{4(1 - D/2)^2} x^3$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-2} x^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{D}{2}\right) + 3\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{D}{2}\right)^3 + \ldots\right] x^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + D + \frac{3}{4}D^2 + \frac{1}{2}D^3 + \ldots\right] x^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^3 + D(x^3) + \frac{3}{4}D^2(x^3) + \frac{1}{2}D^3(x^3) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}(6x) + \frac{1}{2}6\right]$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{4}\left[x^3 + 3x^2 + \frac{9x}{2} + 3\right]$$

$$= \frac{1}{8}[2x^3 + 6x^2 + 9x + 6]$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$

$\therefore y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + \frac{1}{8}[2x^3 + 6x^2 + 9x + 6]$.

(v). $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 5 + 2x \cdots (1)$

মনেকরি, $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (2m^2 + 5m + 2)e^{mx} = 0$

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos3x + \sin2x \cdots (1)$

মনেকরি, $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে $(2) \Rightarrow (m^2 + 9)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 + 9 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -9$, বা $m^2 = 9i^2 \Rightarrow m = \pm 3i$

$\therefore y_c = c_1 \cos3x + c_2 \sin3x$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$(D^2 + 9)y = \cos3x + \sin2x$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 9}[\cos3x + \sin2x]$$

$$= \frac{1}{D^2 + 9}\cos3x + \frac{1}{D^2 + 9}\sin2x$$

$$= x\frac{1}{2D}\cos3x + \frac{1}{-2^2 + 9}\sin2x$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\frac{\sin3x}{3} + \frac{1}{5}\sin2x$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = c_1 \cos3x + c_2 \sin3x + \frac{x}{6}\sin3x + \frac{1}{5}\sin2x$.

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin2x \sin x \cdots (1)$

মনেকরি, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে $(2) \Rightarrow (m^2 + 1)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 + 1 = 0$, যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -1$, বা $m^2 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$

$\therefore y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$(D^2 + 1)y = \frac{1}{2}[\cos(2x - x) - \cos(2x + x)]$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 1}\cdot\frac{1}{2}[\cos x - \cos3x]$$

বা $y_p = \frac{1}{D^2 + 1}\cdot\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{D^2 + 1}\cdot\frac{1}{2}\cos3x$

$$= x\frac{1}{2D}\cdot\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{-3^2+1}\cdot\frac{1}{2}\cos 3x$$

$$= \frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{4} x \sin x + \frac{1}{16}\cos 3x$.

(iv). $(D^2 + 1)y = \sin 3x \cos x \cdots (1)$

মনেকরি, $(D^2 + 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে $(2) \Rightarrow (m^2 + 1)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 + 1 = 0$, যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -1$, বা $m^2 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$

$\therefore y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(1) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\cdot\frac{1}{2}[\sin(3x+x) + \sin(3x-x)]$$

$$= \frac{1}{D^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{D^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{-4^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{-2^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{30}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 2x$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{30}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 2x$.

(v). $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x - \sin x \cdots (1)$

মনেকরি, $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

$\therefore$ তবে $(2) \Rightarrow (m^2 - 4)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 - 4 = 0$, যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m+2)(m-2) = 0 \Rightarrow m = -2, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$(D^2 - 4)\, y = e^x - \sin x.$$

তবে (2) $\Rightarrow (m^2 - 1)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 - 1 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m + 1)(m - 1) = 0 \Rightarrow m = -1, 1.$ $\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$

(1) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 1} e^x \cos x = e^x \frac{1}{(D + 1)^2 - 1} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 + 2D} \cos x = e^x \frac{1}{-1^2 + 2D} \cos x$$

বা $y_p = e^x \dfrac{(2D + 1)}{4D^2 - 1} \cos x = e^x \dfrac{[2D + 1]}{4(-1^2) - 1} \cos x$

$$= \frac{e^x}{-5} [2D(\cos x) + \cos x] = \frac{e^x}{-5} [-2\sin x + \cos x]$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \dfrac{e^x}{5} [2\sin x - \cos x].$

(viii). $D^2 y = e^x \cos x \cdots (1)$

মনেকরি, $D^2 y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে (2) $\Rightarrow m^2 e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

$\Rightarrow m = 0, 0.$ $\therefore y_c = c_1 + c_2 x$

(1) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2} e^x \cos x = e^x \frac{1}{(D + 1)^2} \cos x = e^x \frac{1}{D^2 + 2D + 1} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{-1^2 + 2D + 1} \cos x = e^x \frac{1}{2D} \cos x = \frac{e^x}{2} \sin x$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + \dfrac{1}{2} e^x \sin x$.

(ix). $(D^2 - 2D)y = e^x \sin x \cdots (1)$

মনেকরি, $(D^2 - 2D)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$

তবে (2) $\Rightarrow (m^2 - 2m)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 - 2m = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m(m - 2) = 0 \Rightarrow m = 0, 2.$ $\therefore y_c = c_1 + c_2 e^{2x}$

(1) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D} e^x \sin x = e^x \frac{1}{(D + 1)^2 - 2(D + 1)} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 - 1} \sin x = e^x \frac{1}{-1^2 - 1} \sin x = -\frac{1}{2} e^x \sin x$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^{2x} - \dfrac{1}{2} e^x \sin x$.

(3) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2+D}z = \frac{1}{D(1+D)}z = \frac{1}{D}(1+D)^{-1}z$$

$$= \frac{1}{D}[1-D+D^2-\cdots]z = \frac{1}{D}[z - D(z) + 0]$$

$$= \frac{1}{D}[z-1] = \frac{z^2}{2} - z$$

$$= \frac{1}{2}(ln x)^2 - ln x$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$

(iii). $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 12\, ln x \cdots (1)$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = ln x$, $\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$; (2) নং দ্বারা।

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$, বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$, যখন $D = \frac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y + Dy = 12z$

বা $(D^2 - D + D)y = 12z$, বা $D^2y = 12z \cdots (3)$

মনেকরি, $D^2y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$

তবে $(4) \Rightarrow m^2 e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

$$\Rightarrow m = 0, 0. \quad \therefore y_c = c_1 + c_2 z, \text{ বা } y_c = c_1 + c_2(ln x)$$

(3) নং হইতে পাই, $y_p = \frac{1}{D^2}12z = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D}12z = \frac{1}{D}.\, 12\frac{z^2}{2} = 12\frac{z^3}{6}$

বা $y_p = 2z^3 = 2(ln x)^3$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$

(iv). $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} + 6y = (ln x)^2 \cdots (1)$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = ln x$, $\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$; (2) নং দ্বারা।

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$, বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$, যখন $D = \frac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow D(D-1)y + 6Dy + 6y = z^2$

বা $(D^2 - D + 6D + 6)y = z^2$, বা $(D^2 + 5D + 6)y = z^2$ ⋯ (3)

মনেকরি, $(D^2 + 5D + 6)y = 0$ ⋯ (4) এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$

তবে (4) $\Rightarrow (m^2 + 5m + 6)\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 + 5m + 6 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

বা $(m+2)(m+3) = 0 \Rightarrow m = -2, -3$

$\therefore y_c = c_1 e^{-2z} + c_2 e^{-3z}$, বা $y_c = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3}$

(3) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 5D + 6} z^2 = \frac{1}{6(1 + 5D/6 + D^2/6)} z^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5D}{6} + \frac{D^2}{6}\right)\right]^{-1} z^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 - \left(\frac{5D}{6} + \frac{D^2}{6}\right) + \left(\frac{5D}{6} + \frac{D^2}{6}\right)^2 - \cdots\right] z^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[z^2 - \frac{5}{6}D(z^2) + \left(\frac{25}{36} - \frac{1}{6}\right)D^2(z^2) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[z^2 - \frac{5}{6}.2z + \frac{19}{36}(2)\right] = \frac{1}{6}\left[z^2 - \frac{5z}{3} + \frac{19}{18}\right]$$

$$= \frac{1}{108}[18z^2 - 30z + 19] = \frac{1}{108}[18(lnx)^2 - 30lnx + 19]$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$.

(v). $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + 2y = xlnx$ ⋯ (1)

ধরি $x = e^z$ তবে $z = lnx$, $\therefore \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}$ ⋯ (2)

এখন $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx}$, বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dz}$; (2) নং দ্বারা।

বা $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}$, বা $x\dfrac{dy}{dx} = Dy$; যখন $D = \dfrac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow D(D-1)y - Dy + 2y = ze^z$

বা $(D^2 - D - D + 2)y = ze^z$, বা $(D^2 - 2D + 2)y = ze^z$ ⋯ (3)

মনেকরি, $(D^2 - 2D + 2)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$

তবে $(4) \Rightarrow (m^2 - 2m + 2))\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2 - 2m + 2 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

$$\therefore m = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$\therefore y_c = e^z [c_1 \cos z + c_2 \sin z]$$

$$= x [c_1 \cos(lnx) + c_2 \sin(lnx)] .$$

(3) নং হইতে পাই

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 2} ze^z = e^z \frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 2} z$$

$$= e^z \frac{1}{D^2 + 1} z = e^z [1 + D^2]^{-1} z = e^z [1 - D^2 + \cdots] z$$

$$= e^z [z - 0] = e^z . z = x\, lnx$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$.

(vi). $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + 4y = 2x\, lnx \cdots (1)$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = lnx$ কাজেই $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdots (2)$

[We put $x = e^z$ then $z = lnx$ so $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \dfrac{dz}{dx}$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} . \dfrac{1}{x}$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}$

বা $x \dfrac{dy}{dx} = Dy$ যখন [when] $D = \dfrac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় [Similarly it can be prove that]

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y + Dy + 4y = 2ze^z$

বা $(D^2 - D + D + 4)y = 2ze^z$

বা $(D^2 + 4)y = 2ze^z \cdots (3)$

মনেকরি $(D^2 + 4)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 + 4)y = 0 \cdots (4)$ then]

$Dy = me^{mz}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mz}$

$(4) \Rightarrow (m^2+4)e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2+4=0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

বা $m^2 = -4$, বা $m^2 = 4i^2$, বা $m = \pm 2i$

$$\therefore y_c = c_1 \cos 2z + c_2 \sin 2z$$

$$= c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)$$

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$y_c = \frac{1}{D^2+4} 2ze^z = e^z \frac{1}{(D+1)^2+4} 2z$$

$$= e^z \frac{1}{D^2+2D+5} 2z = 2e^z \frac{1}{5(1+2D/5+D^2/5)} z$$

$$= \frac{2e^z}{5}\left[1+\left(\frac{2D}{5}+\frac{D^2}{5}\right)\right]^{-1} z = \frac{2e^z}{5}\left[1-\left(\frac{2D}{5}+\frac{D^2}{5}\right)+\cdots\right] z$$

$$= \frac{2e^z}{5}\left[z - \frac{2}{5}Dz - 0\right] = \frac{2e^z}{5}\left[z-\frac{2}{5}\right] = \frac{2x}{5}\left[\ln x - \frac{2}{5}\right]$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x) + \frac{2x}{5}\left[\ln x - \frac{2}{5}\right]$.

(vii). $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \ln x \cdots (1)$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$, $\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$; (21) নং দ্বারা।

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$, বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$, যখন $D = \frac{d}{dz}$

অনুরুপভাবে $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y - Dy - 3y = z(e^z)^2$

বা $(D^2-2D-3)y = ze^{2z} \cdots (3)$

মনেকরি, $(D^2-2D-3)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$

তবে $(4) \Rightarrow (m^2-2m-3)e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহাঃ সমীকরণ $m^2-2m-3=0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

বা $(m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, 3$.

$\therefore y_c = c_1 e^{-z} + c_2 e^{3z}$, বা $y_c = c_1 x^{-1} + c_2 x^3$

$$\therefore \frac{1}{D^2-6D+6} z\sin z = \frac{2}{3721}(191\cos z + 27\sin z) + \frac{z}{61}(5\sin z + 6\cos z)$$

$$\therefore (5) \Rightarrow y_p = \frac{2e^{-z}}{3721}(191\cos z + 27\sin z) + \frac{ze^{-z}}{61}(5\sin z + 6\cos z) + \frac{e^{-z}}{6}$$

$$= \frac{2x^{-1}}{3721}[191\cos(lnx) + 27\sin(lnx)] + \frac{x^{-1}lnx}{61}[5\sin(lnx) + 6\cos(lnx)] + \frac{x^{-1}}{6}$$

$\therefore$ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$.

(iv). $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(lnx) \cdots (1)$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = lnx$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[we put $x = e^z$ then $z = lnx$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$, (1) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$, যখন [when] $D = \frac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় [similarly it can be prove that]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y - 3Dy + 5y = (e^z)^2\sin z$

বা $(D^2 - D - 3D + 5)y = e^{2z}\sin z$

বা $(D^2 - 4D + 5)y = e^{2z}\sin z \cdots (3)$

মনেকরি $(D^2 - 4D + 5)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 - 4D + 5)y = 0 \cdots (4)$ then]

$Dy = me^{mz}$ এবং $D^2y = m^2e^{mz}$

$\therefore (4) \Rightarrow (m^2 - 4m + 5)e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 4m + 5 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

$$\therefore m = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$\therefore y_c = e^{2z}[c_1\cos z + c_2\sin xz]$

বা $y_c = x^2[c_1\cos(lnx) + c_2\sin(lnx)]$

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 5} e^{2z} \sin z$$
$$= e^{2z} \frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 5} \sin z$$
$$= e^{2z} \frac{1}{D^2 + 4D + 4 - 4D - 8 + 5} \sin z$$
$$= e^{2z} \frac{1}{D^2 + 1} \sin z = e^{2z}.z \frac{1}{2D} \sin z = \frac{ze^{2z}}{2} \int \sin z \, dz$$
$$= -\frac{ze^{2z} \cos z}{2} = -\frac{1}{2} x^2 \ln x . \cos(\ln x)$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = x^2[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] - \frac{1}{2} x^2 \ln x . \cos(\ln x)$.

(v). $(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)\frac{dy}{dx} + y = 4\cos \ln(1+x) \cdots (1)$

ধরি $1 + x = e^z$ তবে $z = \ln(1+x)$, $\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x} \cdots (2)$

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dy}{dz}$; (2) নং দ্বারা।

বা $(1+x)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$, বা $(1+x)\frac{dy}{dx} = Dy$, যখন $D = \frac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে $(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y + Dy + y = 4\cos z$

বা $(D^2 - D + D + 1)y = 4\cos z$

বা $(D^2 + 1)y = 4\cos z \cdots (3)$

মনেকরি, $(D^2 + 1)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$

তবে $(4) \Rightarrow (m^2 + 1) e^{mz} = 0$

∴ সহাঃ সমীকরণ $m^2 + 1 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

বা $m^2 = -1$, বা $m^2 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$

$\therefore y_c = c_1 \cos z + c_2 \sin z,$
$= c_1 \cos\{\ln(1+x)\} + c_2 \sin\{\ln(1+x)\}$

(3) নং হইতে পাই, $y_p = \frac{1}{D^2 + 1} 4\cos z$

$$= z \frac{1}{2D} 4\cos z = 2z \frac{1}{D} \cos z = 2z \int \cos z \, dz = 2z \sin z$$
$$= 2\ln(1+x) \sin\{\ln(1+x)\}$$

∴ সাঃ সমাধান $y = y_c + y_p$.