প্রশ্নমালা–9(A)

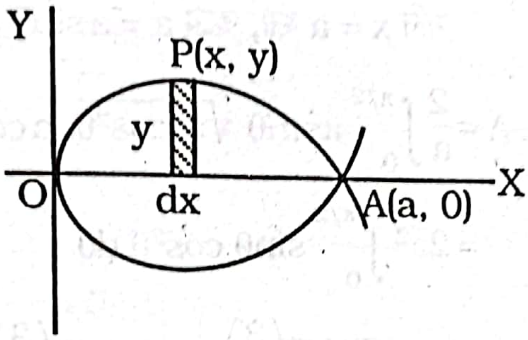
1(i). প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{3a}$ ··· (1)

যেহেতু (1) নং রেখাটি কেবলমাত্র y এর জোড়ঘাত ধারণ করে, কাজেই উহা x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $x(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, a$

সুতরাং রেখাটি O(0, 0) এবং A(a, 0) বিন্দুগামী।

যদি $x < 0$ হয়, তবে y কাল্পনিক হয়। কাজেই $x < 0$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নাই। রেখাটি $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।



যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^a y\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\int_0^a \sqrt{x}.\,(a-x)\,dx \text{ ; (1) নং দ্বারা।}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\int_0^a [ax^{1/2} - x^{3/2}]\,dx = \frac{2}{\sqrt{3a}}\left[\frac{ax^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\left[\frac{2}{3}aa^{3/2} - \frac{2}{5}a^{5/2} - 0\right] = \frac{2}{\sqrt{3a}}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right]a^{5/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}.\frac{4a^{5/2}}{15} = \frac{8a^2}{15\sqrt{3}} \text{ বর্গ একক।}$$

(ii). প্রদত্ত সমীকরণ $x^4 = a^2x^2 - a^2y^2$

বা $a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$

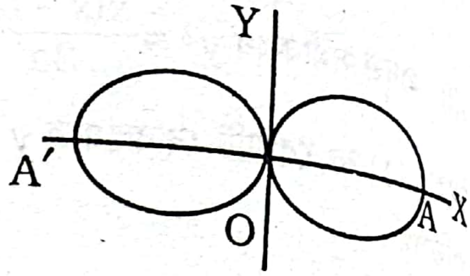
বা $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ ··· (1)

রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x^2(a^2 - x^2) \Rightarrow x = 0, \pm a$

সুতরাং রেখাটি O(0, 0), A(a, 0) এবং A′(–a, 0) বিন্দুগামী।

যদি একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে



$$A = 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\,dx;$$ (1) নং দ্বারা।

ধরি $x = a\sin\theta$, তবে $dx = a\cos\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\sin\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

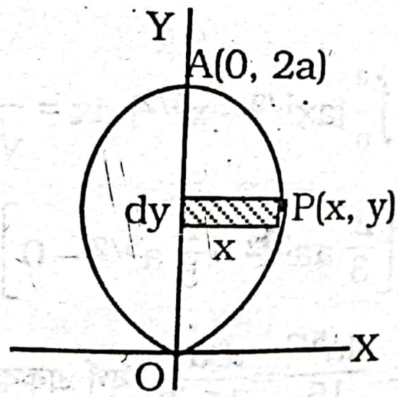
$$\therefore A = \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\,\sqrt{a^2\cos^2\theta}.\,a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = a^2\frac{1.\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}.\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2a^2}{3}$$ বর্গ একক।

(iii). প্রদত্ত সমীকরণ $a^2x^2 = y^3(2a - y) \cdots (1)$

যেহেতু (1) নং রেখাটি কেবলমাত্র x এর জোড়ঘাত ধারণ করে, কাজেই রেখাটি y অক্ষের সাথে প্রতিসম।



যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = y^3(2a - y)$

$\Rightarrow y = 0, 2a$

$\therefore$ রেখাটি O(0, 0) এবং A(0, 2a) বিন্দুগামী।

যদি $y < 0$ এবং $y > 2a$ হয়, তবে x কাল্পনিক হয়। সুতরাং $y < 0$ এবং $y > 2a$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নাই।

যেহেতু রেখাটি O(0, 0) এবং A(0, 2a) এর মধ্যে অবস্থান করে, কাজেই y এর সীমা 0 হইতে 2a.

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^{2a} x\,dy$$

$$= 2\int_0^{2a} \frac{y^{3/2}\sqrt{2a - y}}{a}\,dy;$$ (1) নং দ্বারা।

ধরি $y = 2a\sin^2\theta$ তবে $dy = 4a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = 2a\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $y = 2a$ হয়, তবে $2a = 2a\sin^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A = \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2} (2a\sin^2\theta)^{3/2}\sqrt{2a\cos^2\theta}.\, 4a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 32a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\, d\theta = 32a^2\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)}$$

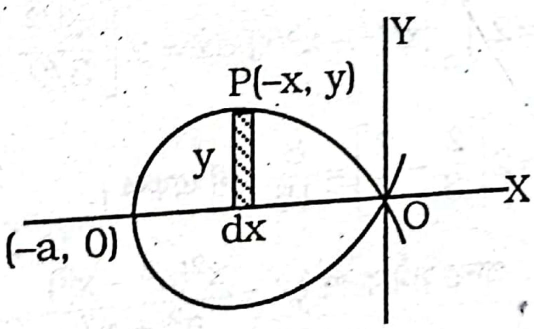
$$= 16a^2.\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3.2.1} = \pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

(iv). প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = x^2(x+a) \cdots (1)$

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x^2(x+a) \Rightarrow x = 0, -a$

$\therefore$ রেখাটি $(-a, 0)$ এবং $(0, 0)$ বিন্দুগামী। যদি $x < -a$ হয়, তবে y কাল্পনিক হয়। কাজেই $x < -a$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নাই। ফাঁসটি $x = -a$ এবং $x = 0$ এর মধ্যে অবস্থান করে।



যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^{-a} y\, dx = 2\int_0^{-a} x\sqrt{x+a}\, dx;\ (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

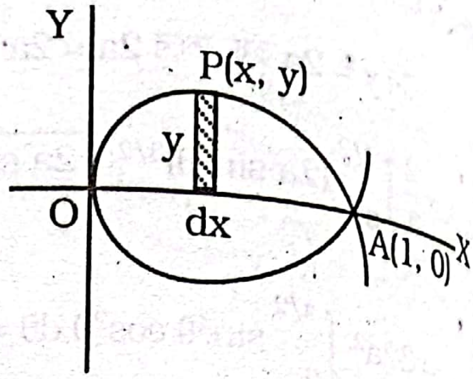
$$= 2\int_0^{-a}\{(x+a) - a\}\sqrt{x+a}\, dx$$

$$= 2\int_0^{-a}[(x+a)^{3/2} - a(x+a)^{1/2}]\, dx$$

$$= 2\left[\frac{(x+a)^{5/2}}{5/2} - \frac{a(x+a)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{-a}$$

$$= 2\left[\frac{2}{5}(0 - a^{5/2}) - \frac{2a}{3}(0 - a^{3/2})\right] = \frac{8a^{5/2}}{15} \text{ বর্গ একক।}$$

(v). প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = x(x-1)^2 \cdots (1)$



রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x(x-1)^2$

$$\Rightarrow x = 0, 1$$

$\therefore$ রেখাটি O(0, 0) এবং A(1, 0) বিন্দুগামী।

যদি $x < 0$ হয়, তবে y কাল্পনিক হয়। কাজেই $x < 0$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নাই। ফাঁসটি $x = 0$ এবং $x = 1$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

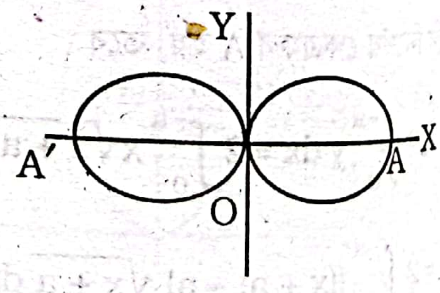
যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^1 y\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}\,dx \text{ ; (1) নং দ্বারা।}$$

$$= 2\int_0^1 [x^{1/2} - x^{3/2}]\,dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right] = \frac{8}{15} \text{ বর্গ একক।}$$

(vi). প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = \dfrac{x^2(a^2 - x^2)}{a^2 + x^2} \cdots (1)$



রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $x^2(a^2 - x^2) = 0,$

$$\Rightarrow x = 0, a, -a.$$

$\therefore$ রেখাটি A′(–a, 0), O(0, 0) এবং A(a, 0) বিন্দুগামী।

যেহেতু $x < -a$ এবং $x > a$ এর জন্য y কাল্পনিক হয়, কাজেই $x < -a$ এবং $x > a$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। একটি ফাঁস $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}\,dx; \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

ধরি $x^2 = a^2 \cos\theta$ তবে $2x\,dx = -a^2 \sin\theta\, d\theta$

এখন $\sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2(1-\cos\theta)}{a^2(1+\cos\theta)}} = \sqrt{\dfrac{2\sin^2\theta/2}{2\cos^2\theta/2}} = \dfrac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a^2\cos\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a^2 = a^2\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

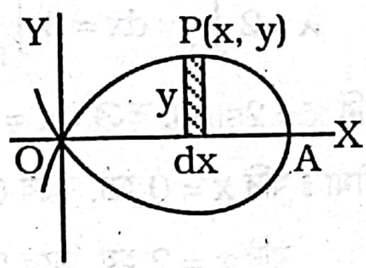
$$\therefore A = -a^2 \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} \cdot \sin\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} \cdot 2\sin\theta/2 . \cos\theta/2\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)\, d\theta = a^2\,[\theta - \sin\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= a^2\left[\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right] = a^2\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$ বর্গ একক।

(vii). প্রদত্ত সমীকরণ $ay^2 = x^2(a-x) \cdots (1)$



প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x^2(a-x)$

$$\Rightarrow x = 0, a$$

$\therefore$ রেখাটি O(0, 0) এবং A(a, 0) বিন্দুগামী।

যেহেতু $x > a$ এর জন্য y কাল্পনিক হয়, কাজেই $x > a$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। ফাঁসটি $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \frac{x\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}}\,dx;$$ (1) নং দ্বারা।

ধরি $x = a\sin^2\theta$ তবে $dx = 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\sin^2\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

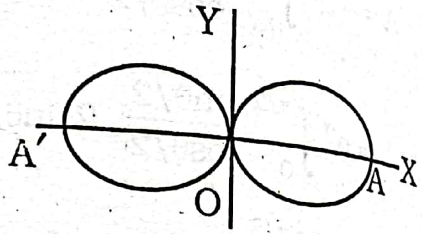
$$\therefore A = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\pi/2} a \sin^2\theta . \sqrt{a\cos^2\theta}\, 2a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^2\theta\, d\theta = 4a^2 \frac{\Gamma(2)\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

$$= 2a^2 \frac{1.\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{8a^2}{15}$$ বর্গ একক।

(viii). প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = x^2 (4 - x^2) \cdots (1)$

রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।



যদি $y = 0$ হয়, তবে $x^2(4 - x^2) = 0$

$$\Rightarrow x = 0, 2, -2.$$

$\therefore$ রেখাটি $A'(-2, 0)$, $O(0, 0)$ এবং $A(2, 0)$ বিন্দুগামী।

কিন্তু $x > 2$ এবং $x < -2$ এর জন্য y কাল্পনিক হয়, কাজেই $x > 2$ এবং $x < -2$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। একটি ফাঁস $x = 0$ এবং $x = 2$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2 \int_0^2 y\, dx = 2 \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx \;;$$ (1) নং দ্বারা।

ধরি $x = 2\sin\theta$. তবে $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = 2\sin\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = 2$ হয়, তবে $2 = 2\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

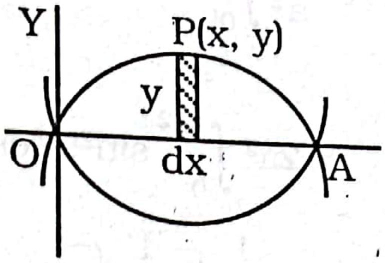
$$\therefore A = 2 \int_0^{\pi/2} 2\sin\theta \sqrt{4\cos^2\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= 16 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 16 \frac{\Gamma(1)\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$= 8. \frac{1.\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{16}{3}$$ বর্গ একক।

(ix). প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = x^2(4-x)^2 \cdots (1)$



রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x^2(4-x)$

$$\Rightarrow x = 0, 4$$

∴ রেখাটি O(0, 0) এবং A(4, 0) বিন্দুগামী।

ফাঁসটি $x = 0$ এবং $x = 4$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

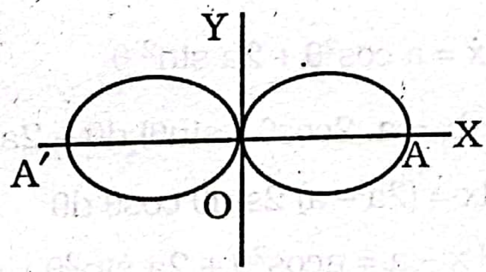
যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$A = 2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^4 x(4-x)\,dx$; (1) নং দ্বারা।

বা $A = 2\int_0^4 [4x - x^2]\,dx = 2\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$

$= 2\left[32 - \frac{64}{3}\right] = \frac{64}{3}$ বর্গ একক।

(x). প্রদত্ত সমীকরণ $a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2) \cdots (1)$



রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x^4(a^2 - x^2)$

$$\Rightarrow x = 0, a, -a$$

∴ রেখাটি $A'(-a, 0)$, $O(0, 0)$

এবং $A(a, 0)$ বিন্দুগামী।

কিন্তু $x < -a$ এবং $x > a$ এর জন্য y কাল্পনিক, কাজেই $x < -a$ এবং $x > a$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। একটি ফাঁস $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \frac{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\,dx$; (1) নং দ্বারা।

ধরি $x = a\sin\theta$ তবে $dx = a\cos\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\sin\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A = \frac{2}{a^2}\int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2\theta \sqrt{a^2\cos^2\theta}.\ a\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 2a^2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)}$$

$$= a^2\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.1} = \frac{\pi a^2}{8}$$ বর্গ একক।

(xi). প্রদত্ত সমীকরণ $a^2y^2 = x^2(x-a)(2a-x) \cdots (1)$

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $0 = x^2(x-a)(2a-x) \Rightarrow x = 0, a, 2a$

$\therefore$ রেখাটি $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ এবং $B(2a, 0)$ বিন্দুগামী।

কিন্তু $x < 0$ এবং $x > 2a$ এর জন্য y কাল্পনিক, কাজেই $x < 0$ এবং $x > 2a$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। AB ফাঁসটি $x = a$ এবং $x = 2a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_a^{2a} y\, dx = 2\int_a^{2a} x\sqrt{(x-a)(2a-x)}\, dx$$

ধরি $x = a\cos^2\theta + 2a\sin^2\theta$

$\therefore\ dx = a.\ 2\cos\theta(-\sin\theta)\, d\theta + 2a.\ 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

বা $dx = (2a-a)\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

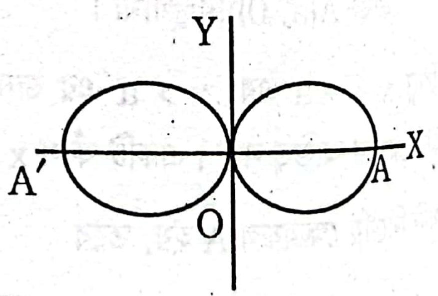
এখন $x - a = a\cos^2\theta + 2a\sin^2\theta - a$

বা $x - a = -a(1-\cos^2\theta) + 2a\sin^2\theta$

বা $x - a = (2a-a)\sin^2\theta$

$\Rightarrow \sqrt{x-a} = \sqrt{a}.\ \sin\theta$

অনুরূপভাবে $\sqrt{2a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$



সীমা ঃ যদি $x = a$ হয়, তবে $\sqrt{a} = \sqrt{a}\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = 2a$ হয়, তবে $0 = \sqrt{a}\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A = \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2} (a\cos^2\theta + 2a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta.\ \sqrt{a}\cos\theta.\ 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

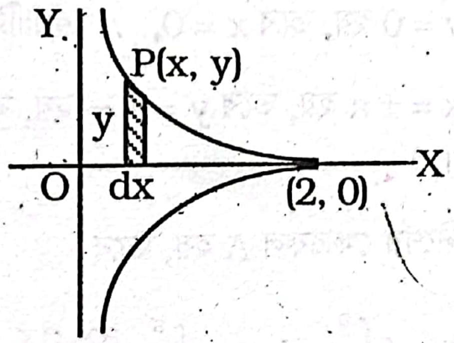
$$=4a^2\left[\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin^2\theta\,d\theta+2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta.\sin^4\theta\,d\theta\right]$$

$$=4a^2\left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)}+2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma(4)}\right]$$

$$=4a^2\left[\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1}+\frac{2.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1}\right]$$

$=4a^2\left[\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{16}\right]=\frac{3\pi a^2}{8}$ বর্গ একক।

...। প্রদত্ত সমীকরণ $y^2=\frac{4(2-x)}{x}$ ... (1)



...ত রেখাটি x অক্ষের সাথে

...। যদি $y=0$ হয়, তবে

$4(2-x)=0\Rightarrow x=2$

...রেখাটি (2, 0) বিন্দুগামী।

...দি $x=0$ হয় তবে $y=\pm\infty$

...জেই $x=0$[y অক্ষ] প্রদত্ত রেখার একটি অসীমতট। কিন্তু $x>2$ এর জন্য y ..., কাজেই $x>2$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। রেখাটি $x=0$ এবং $x=2$ এর মধ্যে ...করে।

...দি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$A=2\int_0^2 y\,dx=2\int_0^2 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}\,dx$; (1) নং দ্বারা।

...$x=2\sin^2\theta$ তবে $dx=4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

...ঃ যদি $x=0$ হয়, তবে $0=2\sin^2\theta\Rightarrow\theta=0$

যদি $x=2$ হয়, তবে $2=2\sin^2\theta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

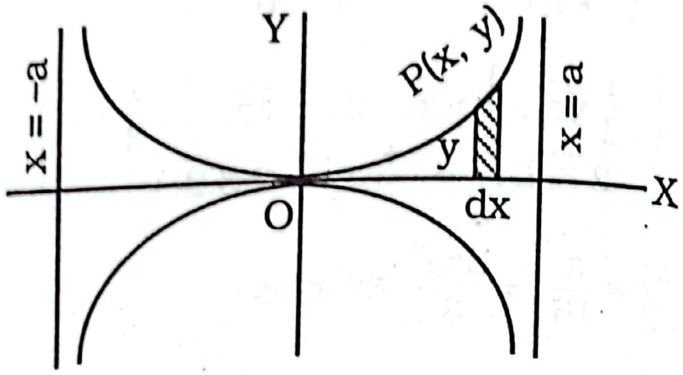
$$A=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}}\,4\sin\theta\cos\theta\,d\theta=16\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$=16.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)}=\frac{8.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\;\sqrt{\pi}}{1}=4\pi$ বর্গ একক।

(ii). প্রদত্ত সমীকরণ $x^2y^2 = a^2y^2 - a^2x^2$

$$\text{বা } a^2x^2 = y^2(a^2 - x^2)$$

$$\text{বা } y^2 = \frac{a^2x^2}{a^2 - x^2} \quad \cdots (1)$$



রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $x = 0$, $\therefore$ রেখাটি O(0, 0) বিন্দুগামী।

যদি $x = \pm a$ হয়, তবে $y = \pm\infty$ হয়, কাজেই $x = a$ এবং $x = -a$ প্রদত্ত রেখার দু অসীমতট।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{ax\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

ধরি $x = a\sin\theta$ তবে $dx = a\cos\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\sin\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A = 4a.\int_0^{\pi/2} \frac{a\sin\theta.\ a\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}} = 4a^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta$$

$$= 4a^2\,[-\cos\theta]_0^{\pi/2} = 4a^2\left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right] = 4a^2$$

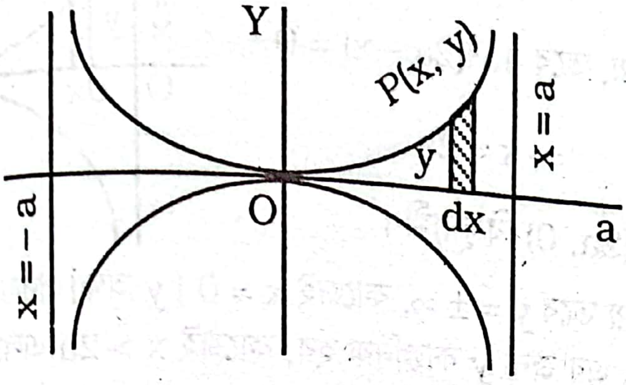
(iii). প্রদত্ত রেখা $x^4 + x^2y^2 = a^2y^2 - a^2x^2$

বা $x^2(a^2 + x^2) = y^2(a^2 - x^2) \Rightarrow y^2 = \dfrac{x^2(a^2 + x^2)}{a^2 - x^2} \quad \cdots (1)$

রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয় তবে $0 = x^2(a^2 + x^2) \Rightarrow x = 0$

$\therefore$ রেখাটি $O(0, 0)$ বিন্দুগামী।



যদি $x = \pm a$ হয় তবে $y = \pm \infty$, কাজেই $x = a$ এবং $x = -a$ প্রদত্ত রেখার দুইটি অসীমতট।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$$

ধরি $x^2 = a^2 \cos\theta$ তবে $2x\,dx = -a^2 \sin\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a^2 \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a^2 = a^2 \cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

এখন $\sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{a^2(1 + \cos\theta)}{a^2(1 - \cos\theta)}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\theta/2}{2\sin^2\theta/2}} = \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}$

$$\therefore A = -4\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\frac{a^2\sin\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\,.\,2\sin\theta/2.\,\cos\theta/2\,d\theta$$

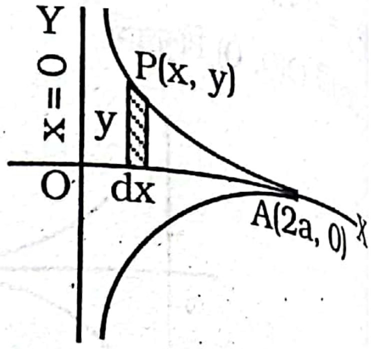
$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta/2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}(1 + \cos\theta)\,d\theta$$

$$= 2a^2\,[\theta + \sin\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= 2a^2\left[\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$= 2a^2\left[\frac{\pi}{2} + 1\right] = a^2\,[\pi + 2]$ বর্গ একক।

(iv). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \dfrac{4a^2(2a - x)}{x}$ ... (1)



রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $4a^2(2a - x) = 0$

$$\Rightarrow x = 2a$$

$\therefore$ রেখাটি $A(2a, 0)$ বিন্দুগামী।

যদি $x = 0$ হয় তবে $y = \pm \infty$, কাজেই $x = 0$ [y অক্ষ] প্রদত্ত রেখার একটি অ
কিন্তু $x > 2a$ এর জন্য y কাল্পনিক হয়, কাজেই $x > 2a$ এলাকায় রেখার অস্তি
রেখাটি $x = 0$ এবং $x = 2a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^{2a} y\, dx = 2\int_0^{2a} 2a\sqrt{\frac{2a - x}{x}}\, dx; \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

ধরি $x = 2a \sin^2\theta$ তবে $dx = 4a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = 2a\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = 2a$ হয়, তবে $2a = 2a \sin^2\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore A = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2a\cos^2\theta}{2a\sin^2\theta}}\, 4a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

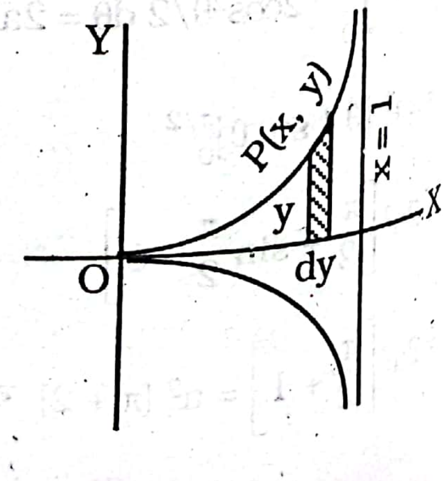
$$= 16a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = 16a^2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)}$$

$$= 8a^2\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = 4\pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

(v). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \dfrac{x}{1 - x}$ ... (1)

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম। যদি $y = 0$ হয় তবে $x = 0$, কাজেই $O(0, 0)$ বিন্দুগামী।

যদি $x < 0$ হয়, তবে y কাল্পনিক। সুতরাং $x < 0$ এলকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। যদি $x = 1$ হয়, তবে $y = \pm\infty$. কাজেই $x = 1$ সরল রেখাটি প্রদত্ত রেখার একটি অসীমতট।



রেখাটি $x = 0$ এবং $x = 1$ এর মধ্যে অবস্থিত।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^1 y\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx \text{ ; (1) নং দ্বারা।}$$

ধরি $x = \sin 2\theta$ তবে $dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = \sin 2\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $x = 1$ হয়, তবে $1 = \sin^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

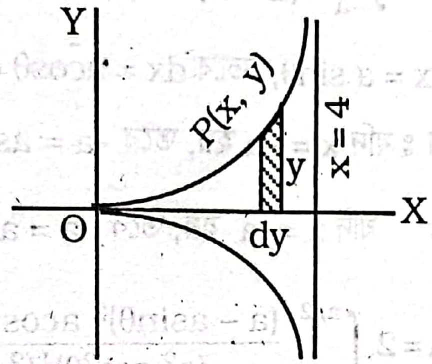
$$\therefore A = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \,.\, 2\sin\theta.\cos\theta\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{4.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2.1} = \pi \text{ বর্গ একক।}$$

(vi). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \frac{x^2}{4-x} \cdots (1)$

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।
যদি $y = 0$ হয়, তবে $x = 0$; কাজেই রেখাটি O(0, 0) বিন্দুগামী।

যদি $x = 4$ হয়, তবে $y = \pm\infty$.
সুতরাং $x = 4$ সরল রেখাটি (1) নং এর একটি অসীমতট।



রেখাটি $x = 0$ এবং $x = 4$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x}} \text{ ; (1) নং দ্বারা।}$$

ধরি $x = 4\sin^2\theta$, তবে $dx = 8\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = 4\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$

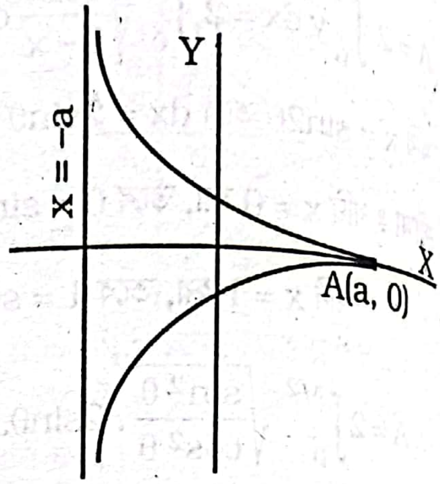
যদি $x = 4$ হয়, তবে $4 = 4\sin^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A = 2\int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^2\theta.\ 8\sin\theta.\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}} = 32\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{32\,\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{32.1.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2.\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{64}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

(vii). প্রদত্ত বক্র রেখা $y^2 = \dfrac{(a-x)^3}{a+x}$ ... (1)

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম। যদি $y = 0$ হয়, তবে $x = a$. কাজেই রেখাটি $A(a, 0)$ বিন্দুগামী।



যদি $x = -a$ হয়, তবে $y = \pm\infty$. সুতরাং $x = -a$ সরল রেখাটি (1) নং এর একটি অসীমতট। রেখাটি $x = -a$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_{-a}^{a} y\,dx = 2\int_{-a}^{a} \frac{(a-x)^{3/2}\,dx}{(a+x)^{1/2}}\text{; (1) নং দ্বারা।}$$

$$= 2\int_{-a}^{a} \frac{(a-x)^{3/2}(a-x)^{1/2}\,dx}{(a+x)^{1/2}(a-x)^{1/2}} = 2\int_{-a}^{a} \frac{(a-x)^2\,dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}$$

ধরি $x = a\sin\theta$, তবে $dx = a\cos\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = -a$ হয়, তবে $-a = a\sin\theta \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore A = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(a - a\sin\theta)^2\, a\cos\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta)^{1/2}} = 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin\theta)^2\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta]\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[1 - 2\sin\theta + \frac{1}{2}(1-\cos2\theta)\right] d\theta$$

$$= 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} - 2\sin\theta - \frac{\cos2\theta}{2}\right] d\theta$$

$$= 2a^2\left[\frac{3\theta}{2} + 2\cos\theta - \frac{\sin2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 2a^2\left[\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) - \left(\frac{-3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right)\right]$$

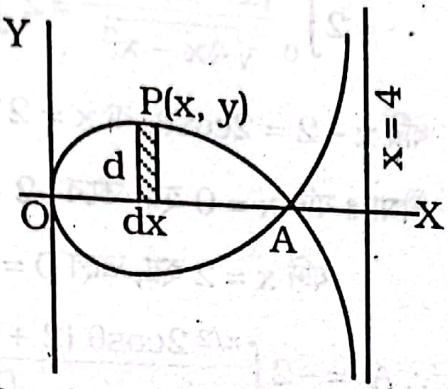
$= 3\pi a^2$ বর্গ একক।

3(i). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \dfrac{x^2(a-x)}{a+x} \cdots (1)$.

অতঃপর মূল বইয়ের 379 পৃষ্ঠায় উদা–3 দেখুন।

(ii). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \dfrac{x(x-2)^2}{4-x} \cdots (1)$

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।



যদি $y = 0$ হয়, তবে $x(x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0, 2$

$\therefore$ রেখাটি O(0, 0) এবং A(2, 0) বিন্দুগামী।

যদি $x = 4$ হয়, তবে $y = \pm\infty$.

সুতরাং $x = 4$ সরল রেখাটি (1) নং রেখার একটি অসীমতট। উপরে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।

যদি রেখা এবং ইহার অসীমতট দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A_1 হয়, তবে

$A_1 = 2\int_2^4 y\,dx = 2\int_2^4 (x-2)\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\,dx$; (1) নং দ্বারা।

বা $A_1 = 2\int_2^4 \dfrac{(x-2)\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{4-x}} = 2\int_2^4 \dfrac{(x-2)x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

$= 2\int_2^4 \dfrac{(x-2)x\,dx}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}$

ধরি $x - 2 = 2\cos\theta$, বা $x = 2 + 2\cos\theta$ তবে $dx = -2\sin\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 2$ হয়, তবে $0 = 2\cos\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

যদি $x = 4$ হয়, তবে $2 = 2\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

$\therefore A_1 = -2\int_{\pi/2}^0 \dfrac{2\cos\theta\,(2+2\cos\theta)\,2\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2^2\sin^2\theta}}$

$= 4\int_0^{\pi/2} [2\cos\theta + 2\cos^2\theta]\,d\theta$

$= 4\int_0^{\pi/2} [2\cos\theta + 1 + \cos 2\theta]\,d\theta$

$= 4\left[2\sin\theta + \theta + \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$= 4\left[\left(2.1 + \dfrac{\pi}{2} + 0\right) - 0\right] = 2[4 + \pi]$ বর্গ একক।

যদি ফাঁসের ক্ষেত্রফল A_2 হয়, তবে

$$A_2 = 2\int_0^2 y\,dx = 2\int_0^2 (x-2)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}\,dx \text{ ; (1) নং দ্বারা।}$$

$$= 2\int_0^2 \frac{(x-2)x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = 2\int_0^2 \frac{(x-2)x\,dx}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}$$

ধরি $x - 2 = 2\cos\theta$, বা $x = 2 + 2\cos\theta$, তবে $dx = -2\sin\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $-2 = 2\cos\theta \Rightarrow \theta = \pi$

যদি $x = 2$ হয়, তবে $0 = 2\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A_2 = -2\int_{\pi}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,(2+2\cos\theta).\,2\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2^2\sin^2\theta}}$$

$$= 4\int_{\pi/2}^{\pi} [2\cos\theta + 1 + \cos 2\theta]\,d\theta$$

$$= 4\left[2\sin\theta + \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 4\left[(0+\pi+0) - \left(2 + \frac{\pi}{2} + 0\right)\right]$$

$$= 4\left[\frac{\pi}{2} - 2\right] = 2[\pi - 4] = -2(4-\pi)$$

যেহেতু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না, কাজেই –ve চিহ্ন বর্জন করা হইল।

$\therefore A_2 = 2(4-\pi)$.

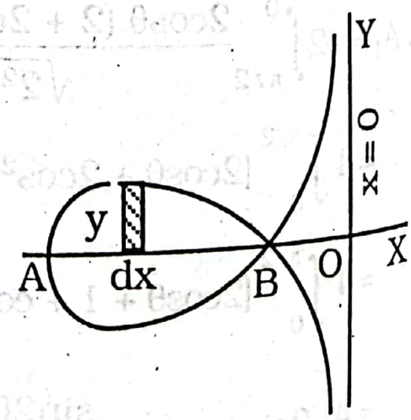
(iii). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \frac{-(x+a)^2\,(x+2a)}{x}$ ... (1)

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $(x+a)^2\,(x+2a) = 0$

$\Rightarrow x = -2a, -a$

$\therefore$ রেখাটি $A(-2a, 0)$ এবং $B(-a, 0)$ বিন্দুগামী।



যদি $x = 0$ হয়, তবে $y = \pm\infty$

সুতরাং $x = 0$ [y অক্ষ] (1) নং এর একটি অসীমতট।

যদি $y < -2a$ হয়, তবে y কাল্পনিক; কাজেই $x < -2a$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই

ফাঁসটি $x = -2a$ এবং $x = -a$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি ফাঁসের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_{-2a}^{-a} y\,dx = 2\int_{-2a}^{-a}(x+a)\sqrt{\frac{x+2a}{-x}}\,dx;$$ (1) নং দ্বারা।

ধরি $x + 2a = t$, বা $x = t - 2a$ তবে $dx = dt$

সীমা ঃ যদি $x = -2a$ হয়, তবে $t = 0$

যদি $x = -a$ হয়, তবে $t = a$

$$\therefore A = 2\int_0^a (t-a)\sqrt{\frac{-t}{t-2a}}\,dt = -2\int_0^a (a-t)\sqrt{\frac{t}{2a-t}}\,dt$$

$$= -2\int_0^a (a-t)\sqrt{\frac{a-(a-t)}{a+a-t}}\,dt$$

ধরি $a - t = a\cos\theta$ তবে $dt = a\sin\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $t = 0$ হয়, তবে $a = a\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

যদি $t = a$ হয়, তবে $0 = a\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore A = -2\int_0^{\pi/2} a\cos\theta\sqrt{\frac{a(1-\cos\theta)}{a(1+\cos\theta)}}\,a\sin\theta\, d\theta$$

$$= -2a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sqrt{\frac{2\sin^2\theta/2}{2\cos^2\theta/2}}\,2\sin\theta/2.\cos\theta/2\,d\theta$$

$$= -2a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta.\,2\sin^2\theta/2\,d\theta = -2a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= -2a^2\int_0^{\pi/2}\left[\cos\theta - \frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\right]d\theta$$

$$= -2a^2\left[\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -2a^2\left[1 - \frac{\pi}{4} - 0\right] = 2a^2\left[\frac{\pi}{4} - 1\right]$$ বর্গ একক।

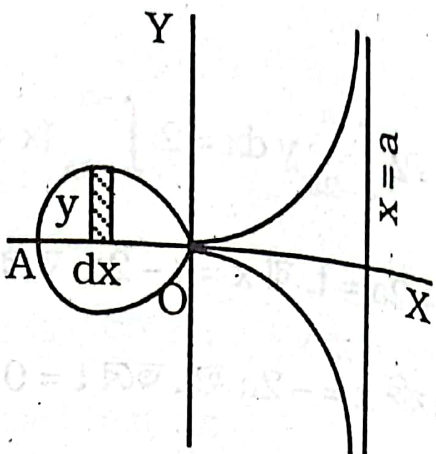
(iv). প্রদত্ত রেখা $y^2 = \dfrac{x^2(a+x)}{a-x}$ ... (1)

রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $x^2(a+x) = 0$

$\Rightarrow x = -a, 0$

$\therefore$ রেখাটি $A(-a, 0)$ এবং $O(0, 0)$ বিন্দুগামী।



যদি $x = a$ হয়, তবে $y = \pm\infty$, কাজেই $x = a$, (1) নং রেখার একটি অসীমতট। কিন্তু $x < -a$ এর জন্য y কাল্পনিক হয়। সুতরাং $x < -a$ এলাকায় রেখার অস্তিত্ব নাই। ফাঁসটি $x = -a$ এবং $x = 0$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি ফাঁসের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 2\int_{-a}^{0} y\,dx = 2\int_{-a}^{0} x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx \text{ ; (1) নং দ্বারা।}$$

ধরি $x = a\cos\theta$ তবে $dx = -a\sin\theta\, d\theta$

সীমা ঃ যদি $x = -a$ হয়, তবে $-a = a\cos\theta \quad \Rightarrow \theta = \pi$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\cos\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore A = -2\int_{\pi}^{\pi/2} a\cos\theta\sqrt{\frac{a(1+\cos\theta)}{a(1-\cos\theta)}}\, a\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2a^2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\sqrt{\frac{2\cos^2\theta/2}{2\sin^2\theta/2}}\, 2\sin\theta/2.\cos\theta/2\, d\theta$$

$$= 2a^2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta.\, 2\cos^2\theta/2\, d\theta = 2a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,(1+\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\left[\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]d\theta$$

$$= 2a^2\left[\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$\text{বা } A = 2a^2\left[\left(0+\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(1+\frac{\pi}{4}+0\right)\right]$$

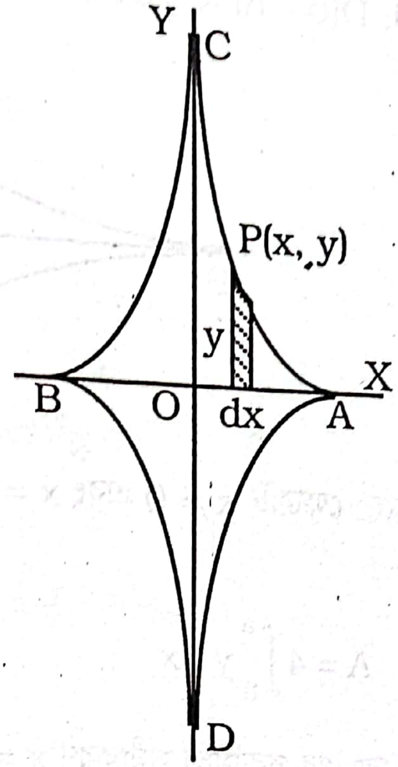
$$= 2a^2\left[\frac{\pi}{4} - 1\right] = -2a^2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$$

যেহেতু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না, কাজেই –ve চিহ্ন বর্জন করা হইল।

$$\therefore A = 2a^2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$$

4(i). প্রদত্ত রেখা $\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}=1 \cdots (1)$

যেহেতু x এর স্থলে –x এবং y এর স্থলে –y স্থাপন করিলে সমীকরণটি অপরিবর্তিত থাকে, কাজেই রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।



যদি (1) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে মিলিত হয়, তবে উহার y = 0 হয়।

অর্থাৎ $(1) \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}+0=1$

বা $\left(\frac{x}{2}\right)^{2}=1 \Rightarrow x=\pm 2$

$\therefore$ রেখাটি x অক্ষের সাথে A(2, 0)

এবং B(–2, 0) বিন্দুতে মিলিত হয়।

অনুরূপভাবে রেখাটি y অক্ষের সাথে C(0, 4) এবং D(0, –4) বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore$ OAC ক্ষেত্রটি x = 0 এবং x = 2 এর মধ্যে অবস্থান করে। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A=4\int_0^2 y\,dx$$

$\therefore$ (1) নং রেখার পরামিতি সমীকরণ $x=2\cos^3\theta,\ y=4\sin^3\theta$

$$\therefore dx=-6\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

সীমা ঃ যদি x = 0 হয়, তবে $0=2\cos^3\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

যদি x = 2 হয়, তবে $2=2\cos^3\theta \Rightarrow \theta=0$

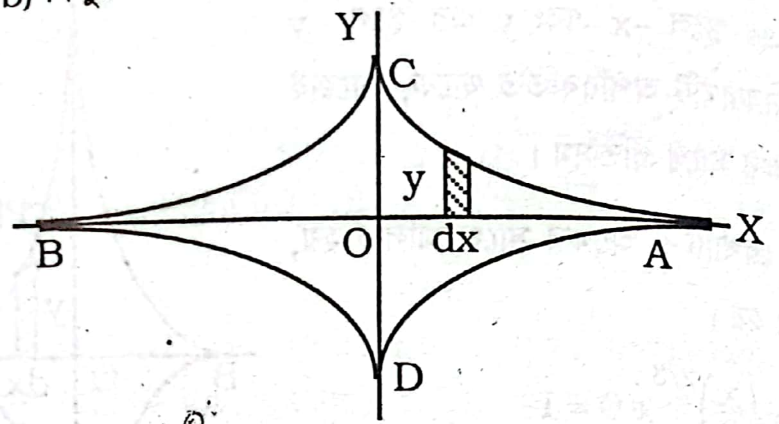
$$\therefore A=-4\int_{\pi/2}^{0}4\sin^3\theta.\,6\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=96\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{96\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)}=\frac{96.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1}=3\pi \text{ বর্গ একক।}$$

(ii). প্রদত্ত রেখা $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1 \cdots (1)$

রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

রেখাটি x অক্ষের সাথে A(a, 0) এবং B(– a, 0) বিন্দুতে এবং y অক্ষের সাথে C(0, b), D(0 – b) বিন্দুতে মিলিত হয়।



OAC ক্ষেত্রটি x = 0 এবং x = a এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 4\int_0^a y\, dx$$

(1) নং এর পরামিতি সমীকরণ $x = a\cos^3\theta,\ \ y = b\sin^3\theta$

$$\therefore dx = -3a\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

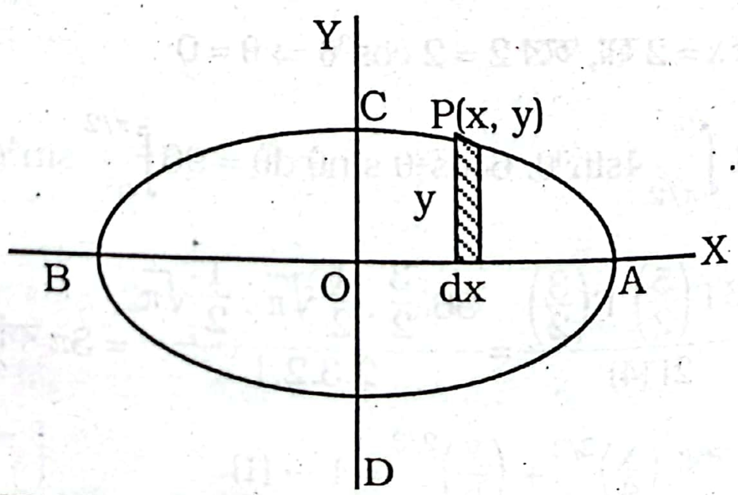
সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\cos^3\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\cos^3\theta \Rightarrow \theta = 0$

$$\therefore A = -4\int_{\pi/2}^{0} b\sin^3\theta .\ 3a\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = 12ab\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{12ab\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)} = \frac{12ab\,\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \frac{3\pi ab}{8}$$ বর্গ একক।

(iii). প্রদত্ত রেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$



রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম। রেখাটি x অক্ষের সাথে A(a, 0), B(–a, 0) বিন্দুতে এবং y অক্ষের সাথে C(0, b), D(0, –b) বিন্দুতে মিলিত হয়।

OAC ক্ষেত্রটি $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থান করে। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হয়, তবে $A = 4\int_0^a y\,dx$

(1) নং এর পরামিতি সমীকরণ $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

$$\therefore dx = -a\sin\theta\, d\theta$$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

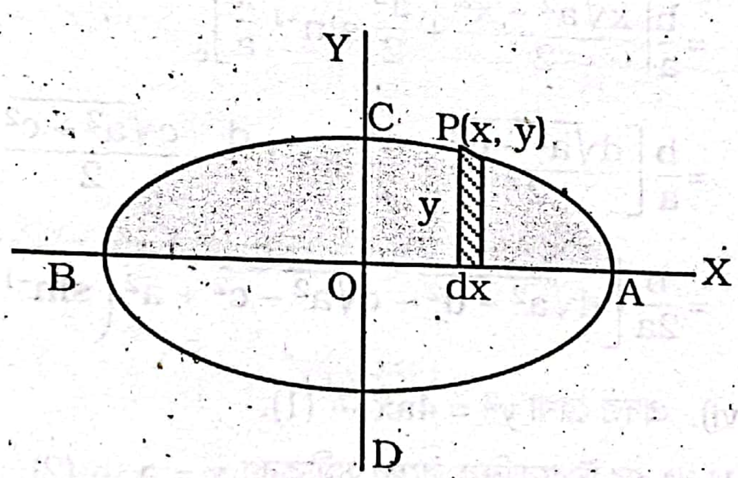
যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

$$\therefore A = -4\int_{\pi/2}^{0} b\sin\theta.\, a\sin\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4ab.\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{4ab.\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2.1} = \pi ab \text{ বর্গ একক।}$$

(iv). প্রদত্ত রেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম। রেখাটি অক্ষের সাথে $A(a, 0)$, $(-a, 0)$ বিন্দুতে এবং অক্ষের সাথে $C(0, b)$, $(0, -b)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।



OAC ক্ষেত্রটি $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে $A = 2\int_0^a y\,dx$

(1) নং এর পরামিতি সমীকরণ $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

$$\therefore dx = -a\sin\theta\, d\theta$$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

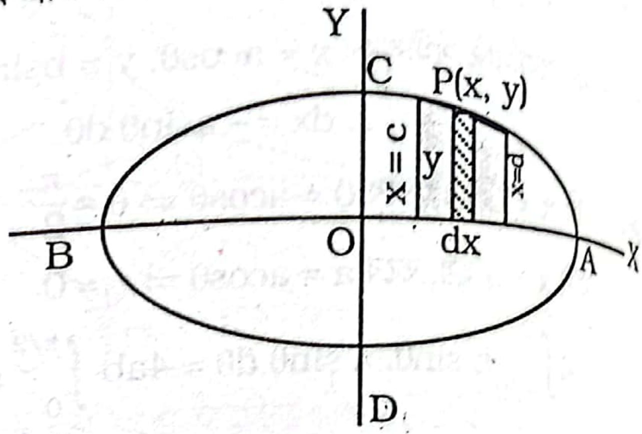
$$\therefore A = -2\int_{\pi/2}^{0} b\sin\theta\, a\sin\theta\, d\theta = 2ab\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2ab\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{2ab\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2.1} = \frac{\pi ab}{2} \text{ বর্গ একক।}$$

(v). প্রদত্ত রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots (1)$

রেখাটি উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম।

রেখাটি x অক্ষের সাথে A(a, 0), B(–a, 0) বিন্দুতে এবং y অক্ষের সাথে C(0, b), D(0, –b) বিন্দুতে মিলিত হয়।



যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A=\int_c^d y\,dx=\frac{b}{a}\int_c^d \sqrt{a^2-x^2}\,dx; \quad \text{যেহেতু } \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_c^d$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{d\sqrt{a^2-d^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{d}{a}-\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{c}{a}\right]$$

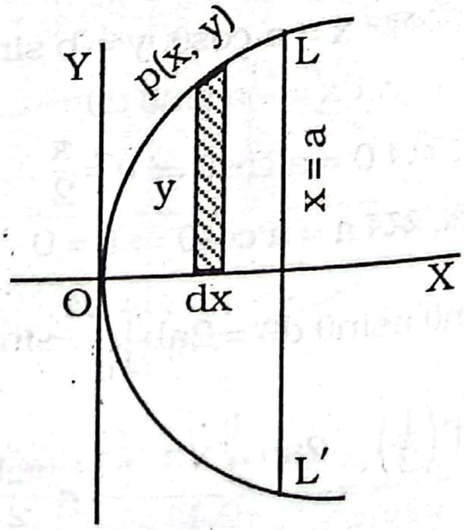
$$=\frac{b}{2a}\left[d\sqrt{a^2-d^2}-c\sqrt{a^2-c^2}+a^2\left(\sin^{-1}\frac{d}{a}-\sin^{-1}\frac{c}{a}\right)\right]$$

(vi). প্রদত্ত রেখা $y^2=4ax \cdots (1)$.

(1) নং এর উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x=a \cdots (2)$

এখন (2) নং হইতে x এর মান (1) নং এ বসাইয়া পাই

$$y^2=4aa \Rightarrow y=\pm 2a$$



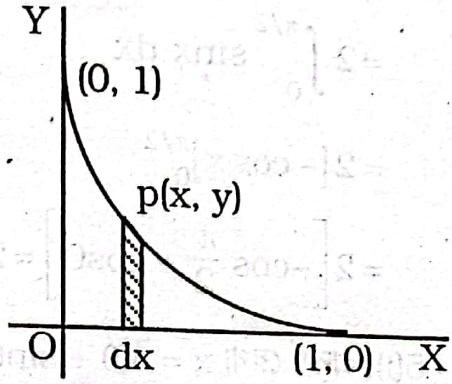
সুতরাং (1) নং এবং (2) নং এর ছেদবিন্দু L(a, 2a) এবং L′ (a, –2a). ক্ষেত্রটি $x=0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A=2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a 2a^{1/2}x^{1/2}\,dx;$$ (1) নং দ্বারা।

$$=4a^{1/2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right] = 4a^{1/2}\frac{2}{3}a^{3/2} = \frac{8a^2}{3}$$ বর্গ একক।

(vii). প্রদত্ত রেখা $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \cdots (1)$

রেখাটি x অক্ষকে (1, 0) বিন্দুতে এবং y অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে। রেখাটি $x=0$ এবং $x = 1$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে



$$A=\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\,dx$$

(1) নং দ্বারা।

$$=\int_0^1 [1-2x^{1/2}+x]\,dx = \left[x-\frac{2x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

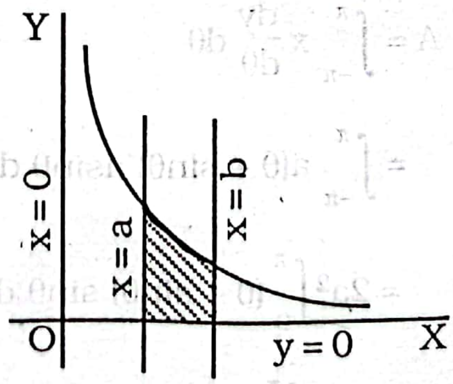
$$=\left[1-2.\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-0\right]=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$ বর্গ একক।

(viii). প্রদত্ত রেখা $xy = c^2 \cdots (1)$

ইহা একটি আয়তাকার হাইপারবোলা।

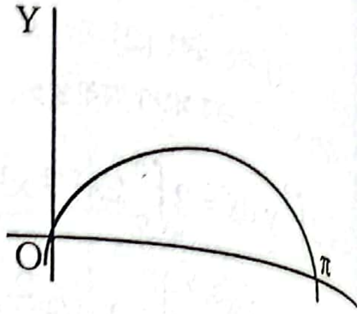
যেহেতু $x = 0$ এর জন্য $y = \infty$ এবং $y=0$ এর জন্য $x = \infty$ হয়। কাজেই $x = 0$ [y-অক্ষ] এবং $y = 0$[x-অক্ষ] (1) এর দুইটি অসীমতট।

মনেকরি $a > 0$, $b > a$ তবে ক্ষেত্রটি প্রথম এক-চতুর্থাংশে অবস্থান করিবে। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে



$$A=\int_a^b y\,dx = c^2\int_a^b \frac{dx}{x};$$ (1) নং দ্বারা।

$$=c^2\,[\ln x]_a^b = c^2\,[\ln b - \ln a] = c^2 \ln\frac{b}{a}$$ বর্গ একক।



(ix). প্রদত্ত রেখা $y = \sin x \cdots (1)$ যদি $y = 0$ হয়, তবে $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \cdots$

কাজেই (1) নং এর একটি চাঁপ $x = 0$ এবং $x = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx;$$ (1) নং দ্বারা।

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

$$= 2[-\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right] = 2$$

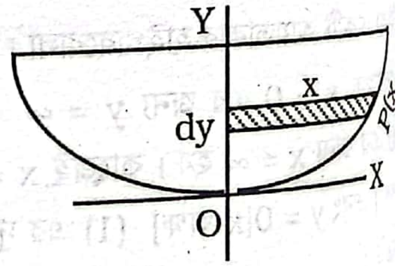
5(i). প্রদত্ত রেখা $x = a(\theta + \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta) \cdots (1)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta); \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1 + \cos\theta)} = \frac{2\sin\theta/2.\ \cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \tan\frac{\theta}{2}$$

যেহেতু $\theta = -\pi$ এবং $\theta = \pi$ এর জন্য $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$

কাজেই (1) নং সাইক্লয়েড এ θ এর সীমা $-\pi$ হইতে π



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হইলে

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta + \sin\theta)\,a\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi} (\theta + \sin\theta)\sin\theta\,d\theta;$$ যেহেতু $(\theta + \sin\theta)\sin\theta$ যুগ্ম ফাংশন

$$= 2a^2\int_0^{\pi} \theta\sin\theta\,d\theta + 2a^2\int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\,[\theta(-\cos\theta) - (1)(-\sin\theta)]_0^{\pi} + 4a^2\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta$$

বা $A = 2a^2\left[-\theta\cos\theta + \sin\theta\right]_0^{\pi} + \dfrac{4a^2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)}$

$= 2a^2\left[-\pi(-1) + 0\right] + \dfrac{4a^2\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{2.1}$

$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$ বর্গএকক।

(ii). প্রদত্ত রেখা $x = a(\theta + \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta) \cdots (1)$

$\therefore \dfrac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta),\ \dfrac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \dfrac{-a\sin\theta}{a(1 + \cos\theta)}$

$= \dfrac{-2\sin\theta/2.\ \cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = -\tan\dfrac{\theta}{2}$

যেহেতু $\theta = -\pi$ এবং $\theta = \pi$ এর জন্য $\dfrac{dy}{dx} = \pm\infty$

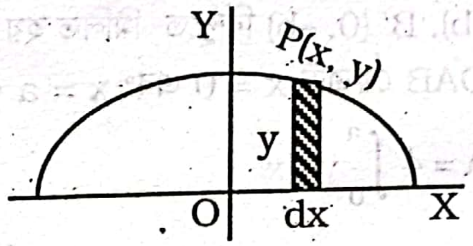
কাজেই (1) নং সাইক্লয়েড এ θ এর সীমা $-\pi$ হইতে π

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$A = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} a(1 + \cos\theta)\,a(1 + \cos\theta)\,d\theta;$ (1) নং দ্বারা।

$= 2a^2\displaystyle\int_0^{\pi}(1 + \cos\theta)^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi}(2\cos^2\theta/2)^2\,d\theta$

$= 8a^2\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4\theta/2\,d\theta$



ধরি $\dfrac{\theta}{2} = t$ তবে $d\theta = 2dt$

সীমা ঃ যদি $\theta = 0$ হয়, তবে $t = 0$

যদি $\theta = \pi$ হয়, তবে $t = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore A = 8a^2.\,2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = \dfrac{16a^2\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3)}$

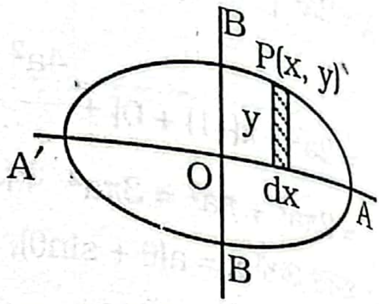
$= \dfrac{16a^2.\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{2.2} = 3\pi a^2.$ বর্গ একক।

(iii). প্রদত্ত রেখা $x = a\cos\theta,\ \ y = b\sin\theta \cdots (1)$

(1) নং এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(1) নং রেখাটি x-অক্ষের সাথে A(a, 0), A′ (–a, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষের সাথে
B(0, b), B′ (0, – b) বিন্দুতে মিলিত হয়।

OAB ক্ষেত্রটি x = 0 এবং x = a এর মধ্যে অবস্থিত।



যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$A = 4\int_0^a y\,dx$$

যেহেতু $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ $\therefore dx = -a\sin\theta\,d\theta$

সীমা ঃ যদি x = 0 হয়, তবে $0 = a\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

যদি x = a হয়, তবে $a = a\cos\theta \Rightarrow \theta = 0$

$$\therefore A = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin\theta\,(-a\sin\theta)\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4ab\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{4ab\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{2.1} = \pi ab \text{ বর্গ একক।}$$

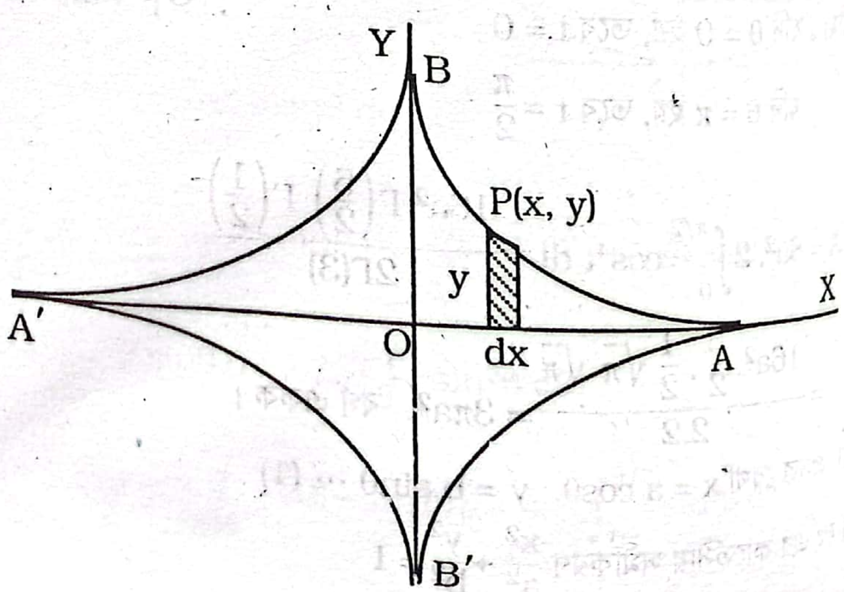
(iv). প্রদত্ত রেখা $x = a\cos^3t,\ y = b\sin^3t \ \cdots\ (1)$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2t\,\sin t$$

(1) নং এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$

(1) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে A(a, 0), A′ (–a, 0) বিন্দুতে এবং y অক্ষের
B(0, b), B′ (0, –b) বিন্দুতে মিলিত হয়।

OAB ক্ষেত্রটি x = 0 এবং x = a এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A
তবে $A = 4\int_0^a y\,dx$



যেহেতু $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$

$\therefore dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt$

সীমা ঃ যদি $x = 0$ হয়, তবে $0 = a\cos^3 t \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a = a\cos^3 t \Rightarrow t = 0$

$$\therefore A = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$= 12ab\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

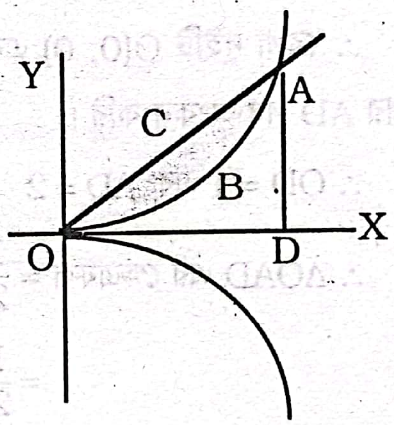
$$= \frac{12ab\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)}$$

$$= \frac{12ab\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \frac{3\pi ab}{8}$$ বর্গ একক।

6(i). প্রদত্ত রেখা $y = x \cdots (1)$ এবং $y^2 = x^3 \cdots (2)$

(2) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

ছেদবিন্দুর জন্য (1) নং হইতে y এর মান (2) নং স্থাপন করিয়া পাই



$x^2 = x^3,$

বা $x^2(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $y = 0$

যদি $x = 1$ হয়, তবে $y = 1$

$\therefore$ রেখা দুইটি O(0, 0) এবং A(1, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু হইতে অক্ষের উপর AD লম্ব অংকন করি।

$\therefore OD = 1$ এবং $AD = 1$

$\therefore \Delta OAD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}$ ভূমি. উচ্চতা

$$= \frac{1}{2}.OD.AD = \frac{1}{2}1.1 = \frac{1}{2}$$

আবার ODABO এর ক্ষেত্রফল $= \displaystyle\int_0^1 y\,dx;$ যখন $y = x^{3/2}$

$$= \int_0^1 x^{3/2}\,dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

যদি OBACO এর ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = ΔOAD এর ক্ষেত্রফল – ODABO এর ক্ষেত্রফল

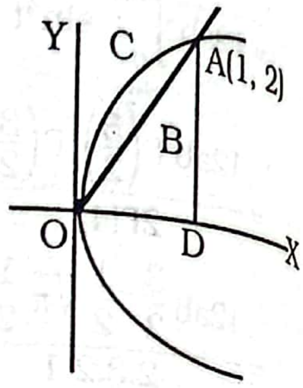
$= \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10}$

$= \frac{1}{10}$ বর্গ একক।

(ii). প্রদত্ত রেখা $y = 2x \cdots (1)$ এবং $y^2 = 4x \cdots (2)$

এখানে (2) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

ছেদবিন্দুর জন্য (1) নং হইতে y এর মান (2) নং এ স্থাপন করিয়া পাই,



$4x^2 = 4x,$

বা $4x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $y = 0$

যদি $x = 1$ হয়, তবে $y = 2$

$\therefore$ রেখা দুইটি O(0, 0) এবং A(1, 2) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু হইতে x অ
উপর AD লম্ব অংকন করি।

$\therefore$ OD = 1 এবং AD = 2

$\therefore$ ΔOAD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.$ OD. AD

$= \frac{1}{2}.1.2 = 1$

আবার ODACO এর ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 y\, dx$; যখন $y = \sqrt{4x}$

$$= \int_0^1 2x^{1/2}\, dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$= 2.\frac{2}{3}[1^{3/2} - 0] = \frac{4}{3}$$

যদি OBACO এর ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = ODACO এর ক্ষেত্রফল –ΔODA এর ক্ষেত্রফল,

$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ বর্গ একক।

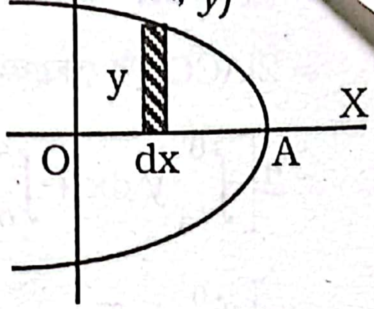
(iii). প্রদত্ত রেখা $y^2 = 4 - x$ ... (1)

(1) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি $y = 0$ হয়, তবে $x = 4$

$\therefore$ (1) নং এর শীর্ষবিন্দু A(4, 0)

(1) নং রেখাটি y অক্ষকে (0, 2) এবং (0, −2) বিন্দুতে ছেদ করে।



ক্ষেত্রটি $x = 0$ এবং $x = 4$ এর মধ্যে অবস্থিত। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$A = 2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^4 (4-x)^{1/2}\,dx$; (1) নং দ্বারা।

$= 2.\left[\frac{(4-x)^{3/2}}{(-1)3/2}\right]_0^4 = -2.\frac{2}{3}[0-(4)^{3/2}]$

$= \frac{4}{3}(2^2)^{3/2} = \frac{4}{3}.2^3 = \frac{4}{3}8 = \frac{32}{3}$ বর্গ একক।

7(i). প্রদত্ত রেখা $y^2 = 4a(x + a)$ ... (1)

এবং $y^2 = -4a(x - a)$ ... (2)

এখানে উভয় রেখাই x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

যদি (1) নং এ $y = 0$ হয়, তবে $0 = 4a(x + a) \Rightarrow x = -a$

$\therefore$ (1) নং এর শীর্ষবিন্দু A(−a, 0)

আবার যদি (2) নং এ $y = 0$ হয়, তবে $0 = -4a(x - a) \Rightarrow x = a$

$\therefore$ (2) নং এর শীর্ষবিন্দু B(a, 0)

এখন ছেদবিন্দুর জন্য (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই

$4a(x + a) = -4a(x - a)$

বা $x + a = -x + a$

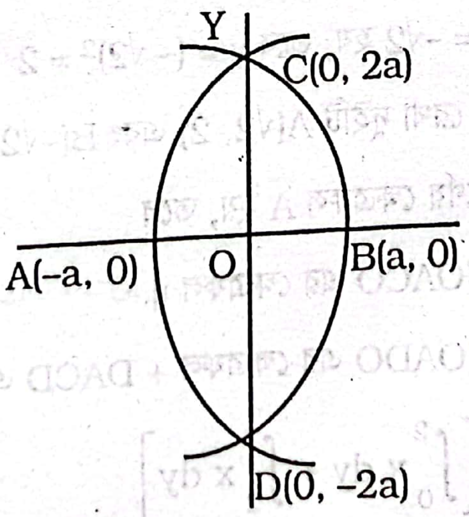
বা $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

যদি $x = 0$ হয়

তবে $y^2 = 4a(0 + a)$

$\Rightarrow y = \pm 2a$

সুতরাং (1) নং এবং (2) নং রেখা দুইটি C(0, 2a) এবং D(0, − 2a) বিন্দুতে ছেদ করে। যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে



A = 2[ABCA এর ক্ষেত্রফল]

= 2[ACO এর ক্ষেত্রফল + OCB এর ক্ষেত্রফল]

$$= 2\left[\int_{-a}^{0} y\,dx + \int_{0}^{a} y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_{-a}^{0} 2\sqrt{a}\,(x+a)^{1/2}\,dx + \int_{0}^{a} 2\sqrt{a}\,(a-x)^{1/2}\,dx\right]$$

(1) নং এবং (2) ন

$$= 4\sqrt{a}\left[\frac{(x+a)^{3/2}}{3/2}\right]_{-a}^{0} + 4\sqrt{a}\left[\frac{(a-x)^{3/2}}{(-1)3/2}\right]_{0}^{a}$$

বা $A = 4\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,[a^{3/2} - 0] - 4\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,[0 - a^{3/2}]$

$= \frac{8a^2}{3} + \frac{8a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$ বর্গ একক।

(ii). প্রদত্ত রেখা $x^2 = y \cdots (1)$ এবং $x^2 = 4 - y \cdots (2)$

এখানে উভয় রেখাই y অক্ষের সাথে প্রতিসম।

$\therefore$ (1) নং এর শীর্ষবিন্দু O(0, 0) এবং (2) নং এর শীর্ষ বিন্দু C(0, 4).

ছেদবিন্দুর জন্য (1) নং হইতে y এর মান (2) নং এ বসাইয়া পাই

$x^2 = 4 - x^2$

বা $2x^2 = 4$

বা $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

যদি $x = \sqrt{2}$ হয়, তবে $y = (\sqrt{2})^2 = 2$

যদি $x = -\sqrt{2}$ হয়, তবে $y = (-\sqrt{2})^2 = 2$

সুতরাং রেখা দুইটি $A(\sqrt{2}, 2)$ এবং $B(-\sqrt{2}, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = 2[OACO এর ক্ষেত্রফল।]

= 2[OADO এর ক্ষেত্রফল + DACD এর ক্ষেত্রফল]

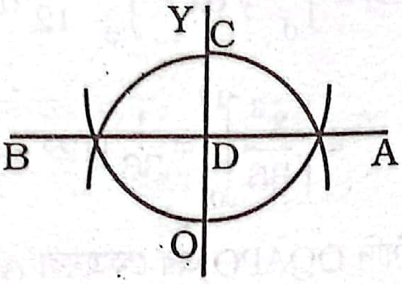
$$= 2\left[\int_{0}^{2} x\,dy + \int_{2}^{4} x\,dy\right]$$

$$=2\left[\int_0^2 y^{1/2}\,dy + \int_2^4 (4-y)^{1/2}\,dy\right];\ \text{(1) নং এবং (2) নং দ্বারা।}$$

$$=2\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 + 2\left[\frac{(4-y)^{3/2}}{(-1)3/2}\right]_2^4$$

$$=2.\frac{2}{3}[2^{3/2}-0] - 2.\frac{2}{3}[0-2^{3/2}]$$

$$=\frac{4}{3}2\sqrt{2} + \frac{4}{3}2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ বর্গ একক।}$$



(iii). প্রদত্ত রেখা $y^2 = 12x \cdots (1)$ এবং $x^2 = 12y \cdots (2)$

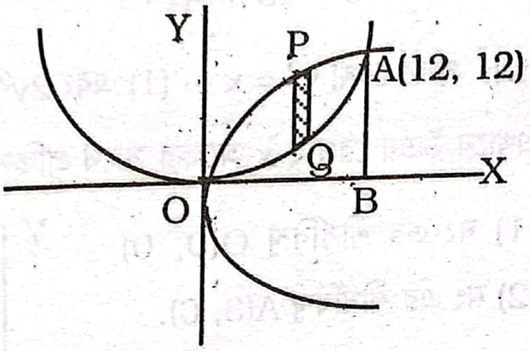
(1) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে

(2) নং রেখাটি y অক্ষের সাথে

...।

ছেদবিন্দুর জন্য (2) নং হইতে

y মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া



$$\left(\frac{x^2}{12}\right)^2 = 12x,\ \text{বা } x^4 = 12^3x,\ \text{ বা } x(x^3-12^3)=0$$

বা $x(x-12)(x^2+12x+144) = 0 \Rightarrow x = 0, 12$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $y = \frac{0}{12} = 0$

যদি $x = 12$ হয়, তবে $y = \frac{12^2}{12} = 12$

∴ (1) নং এবং (2) নং রেখা দুইটি O(0, 0) এবং A(12, 12) বিন্দুতে ছেদ করে।

যদি OPABO এর ক্ষেত্রফল A_1 হয়, তবে

$$A_1 = \int_0^{12} y\,dx = \int_0^{12}\sqrt{12x}\,dx;\ \text{(1) নং দ্বারা।}$$

$$=2\sqrt{3}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{12} = 2\sqrt{3}\,\frac{2}{3}\,[(12)^{3/2}-0]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}[12\sqrt{12}]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}12.\,2\sqrt{3} = 96 \text{ বর্গ একক।}$$

যদি OQABO এর ক্ষেত্রফল A_2 হয়, তবে

$$A_2 = \int_0^{12} y\,dx = \int_0^{12} \frac{x^2}{12}\,dx; \text{ (2) নং দ্বারা।}$$

$$= \left[\frac{x^3}{36}\right]_0^{12} = \frac{1}{36}[12^3 - 0] = \frac{12.12.12}{12.3} = 48 \text{ বর্গএকক।}$$

যদি OQAPO এর ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

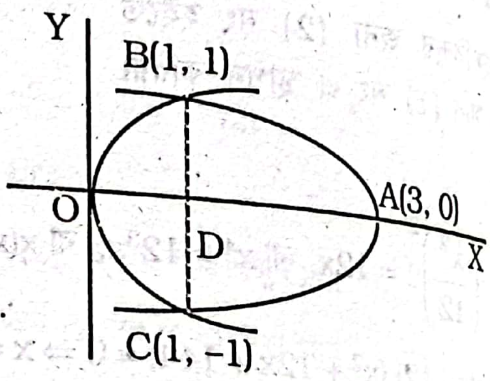
A = [OPABO এর ক্ষেত্রফল –OQABO এর ক্ষেত্রফল]

= 96 – 48 = 48 বর্গএকক।

(iv). প্রদত্ত রেখা $y^2 = x \cdots (1)$ এবং $2y^2 = 3 - x \cdots (2)$

এখানে উভয় রেখাই x অক্ষের সাথে প্রতিসম।

(1) নং এর শীর্ষবিন্দু O(0, 0) এবং (2) নং এর শীর্ষবিন্দু A(3, 0).



ছেদবিন্দুর জন্য (1) নং হইতে y^2 এর মান (2) নং এ স্থাপন করি

$2x = 3 - x$

বা $3x = 3 \Rightarrow x = 1$

যদি x = 1 হয়, তবে $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

∴ অধিবৃত্তদ্বয় B(1, 1) এবং C(1, –1) বিন্দুতে ছেদ করে।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হইলে

A = 2 [OBDO এর ক্ষেত্রফল + BDAB এর ক্ষেত্রফল]

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^3 y\,dx\right]$$

$$A = 2\left\{\int_0^1 x^{1/2}\,dx + \int_1^3 \frac{(3-x)^{1/2}}{\sqrt{2}}\right\}; \text{ (1) নং এবং (2) নং দ্বারা।}$$

$$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\frac{(3-x)^{3/2}}{(-1)3/2}\right]_1^3$$

$= \frac{4}{3}[1-0] - \frac{4}{3\sqrt{2}}[0 - 2^{3/2}] = \frac{4}{3} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}$

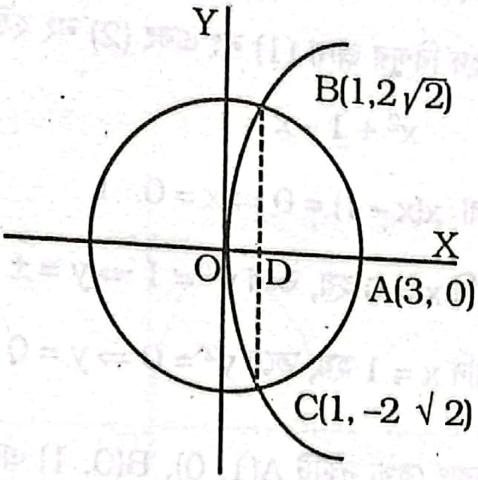
$= \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$ বর্গ একক।

৪(i). প্রদত্ত রেখা $x^2 + y^2 = 9 \cdots (1)$ এবং $y^2 = 8x \cdots (2)$

এখানে (1) নং একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3

এবং (2) নং একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষবিন্দু $O(0, 0)$

ছেদবিন্দুর জন্য (1) নং এবং (2) নং হতে পাই



$x^2 + 8x - 9 = 0$

বা $(x-1)(x+9) = 0$

$\Rightarrow x = 1; x \neq -9$

[কারণ $x = -9$ এলাকায় রেখা দুইটির অস্তিত্ব নাই।]

যদি $x = 1$ হয়, তবে $y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$

∴ রেখা দুইটি $B(1, 2\sqrt{2})$ এবং $C(1, -2\sqrt{2})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = 2 [OBDO এর ক্ষেত্রফল + DBAD এর ক্ষেত্রফল]

$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^3 y\,dx\right]$

$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{8x}\,dx + \int_1^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx\right]$; (2) নং এবং (1) নং দ্বারা।

$= 2.2\sqrt{2}\int_0^1 x^{1/2}\,dx + 2\int_1^3 \sqrt{3^2 - x^2}\,dx$

$= 4\sqrt{2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 + 2\left[\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{3^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_1^3$

$= 4\sqrt{2}.\frac{2}{3}[1-0] + \frac{2}{2}\left[(0 + 9\sin^{-1}1) - \left(1\sqrt{8} + 9\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$

বা $A = \frac{8\sqrt{2}}{3} + 9\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} - 9\sin^{-1}\frac{1}{3}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{9\pi}{2} - 9\sin^{-1}\frac{1}{3}$ বর্গ একক।

(ii). প্রদত্ত রেখা $y^2 = 1 - x \cdots (1)$ এবং $x^2 + y^2 = 1 \cdots (2)$

এখানে (1) নং একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষবিন্দু A(1, 0). এবং (2) নং একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র O(0, 0), ব্যাসার্ধ 1.

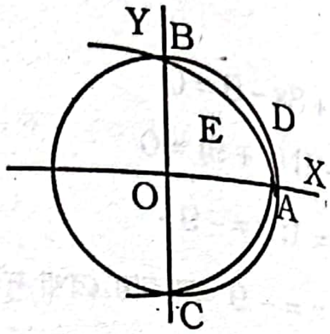
ছেদ বিন্দুর জন্য (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই

$x^2 + 1 - x = 1$

বা $x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

যদি $x = 1$ হয়, তবে $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$



সুতরাং রেখা দুইটি A(1, 0), B(0, 1) এবং C(0, –1) বিন্দুতে ছেদ করে।

ADBEA এর ক্ষেত্রফল = ADBOA এর ক্ষেত্রফল –AEBOA এর ক্ষেত্রফল।

$$= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1 + \left[\frac{(1 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}1 - 0 + \frac{2}{3}[0 - 1^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

$$= 4\left[\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1$$

$$= 4\left[0 + \frac{1}{2}\sin^{-1} - 0\right] = 4\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \pi$$

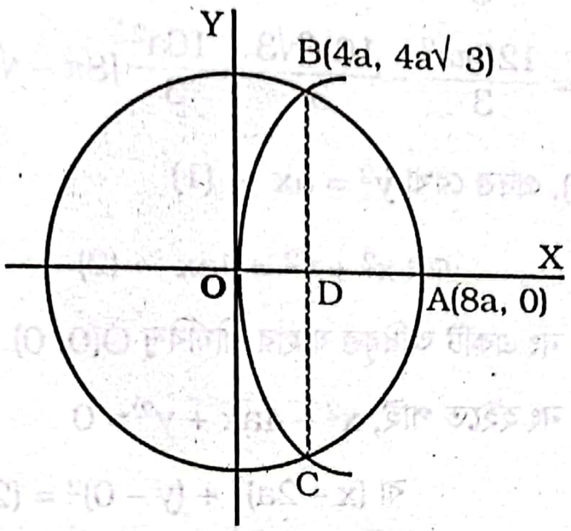
যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = বৃত্তের ক্ষেত্রফল −2[ADBEA এর ক্ষেত্রফল]

$= \pi - 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right] = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$ বর্গ একক।

(iii). প্রদত্ত রেখা $x^2 + y^2 = 64a^2 \cdots (1)$ এবং $y^2 = 12ax \cdots (2)$



এখানে (1) নং একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র O(0, 0), ব্যাসার্ধ 8a এবং (2) একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষবিন্দু (0, 0).

ছেদ বিন্দুর জন্য (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই,

$x^2 + 12ax - 64a^2 = 0$

বা $(x + 16a)(x - 4a) = 0$

$\Rightarrow x = 4a$; $x \neq -16a$

কারণ $x = -16a$ এলাকায় রেখা দুইটির অস্তিত্ব নাই।]

যদি $x = 4a$ হয়, তবে $y^2 = 48a^2 \Rightarrow y = \pm 4a\sqrt{3}$

∴ রেখা দুইটি $B(4a, 4a\sqrt{3})$ এবং $C(4a, -4a\sqrt{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ (1) নং বৃত্তের ক্ষেত্রফর $= \pi(8a)^2 = 64\pi a^2$

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = বৃত্তের ক্ষেত্রফল −2[OBADO এর ক্ষেত্রফল)

$= 64\pi a^2 - 2$[OBDO এর ক্ষেত্রফল + BDAB এর ক্ষেত্রফল]

$$= 64\pi a^2 - 2\left[\int_0^{4a} \sqrt{12ax}\, dx + \int_{4a}^{8a} \sqrt{(8a)^2 - x^2}\, dx\right]$$

$$= 64\pi a^2 - 2.2\sqrt{3}\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a}$$

$$- 2\left[\frac{x\sqrt{64a^2 - x^2}}{2} + \frac{64a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{8a}\right]_{4a}^{8a}$$

$$= 64\pi a^2 - 4\sqrt{3}\sqrt{a}.\ \frac{2}{3}[(4a)^{3/2} - 0] - \left[(0 + 32a^2 \sin^{-1}1) - \left(4a\sqrt{48a^2} + 32a^2 \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 64\pi a^2 - 4\sqrt{3}\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,4a.\ 2\sqrt{a} - 32a^2\frac{\pi}{2} + 4a.\ 4a\sqrt{3} + 32a^2\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{128\pi a^2}{3} - \frac{64a^2\sqrt{3}}{3} + 16a^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{128\pi a^2}{3} - \frac{16a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{16a^2}{3}[8\pi - \sqrt{3}]$$ বর্গ একক।

(iv). প্রদত্ত রেখা $y^2 = ax \cdots (1)$

এবং $x^2 + y^2 = 4ax \cdots (2)$

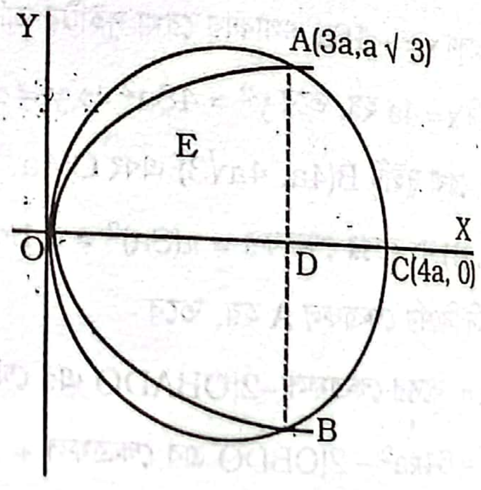
(1) নং একটি অধিবৃত্ত যাহার শীর্ষবিন্দু $O(0, 0)$

(2) নং হইতে পাই, $x^2 - 4ax + y^2 = 0$

বা $(x - 2a)^2 + (y - 0)^2 = (2a)^2$

$\therefore$ (2) নং একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র $(2a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $2a$.

ছেদ বিন্দুর জন্য (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই;



$x^2 + ax = 4ax$

বা $x(x - 3a) = 0 \Rightarrow x = 0, 3a$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $y = 0$

যদি $x = 3a$ হয়, তবে $y^2 = 3a^2$

$\Rightarrow y = \pm a\sqrt{3}$.

$\therefore$ রেখা দুইটি $O(0, 0)$, $A(3a, a\sqrt{3})$ এবং $B(3a, -a\sqrt{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

যদি নির্ণেয় ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

A = 2[OEADO এর ক্ষেত্রফল + DACD এর ক্ষেত্রফল]

$$\int^{3a}\sqrt{ax}\,dx + \int_{3a}^{4a}\sqrt{4ax - x^2}\,dx\Big]$$

$= 2\sqrt{a}\int_0^{3a} x^{1/2}\,dx + 2\int_{3a}^{4a}\sqrt{(2a)^2-(x-2a)^2}\,dx$

$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{3a} + 2\left[\frac{(x-2a)\sqrt{4ax-x^2}}{2}+\frac{4a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-2a}{2a}\right]_{3a}^{4a}$

$= 2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}(3a)^{3/2} + (0+4a^2\sin^{-1}1) - \left(a\sqrt{3a^2}+4a^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{4\sqrt{a}}{3}3a\sqrt{3a} + 4a^2\frac{\pi}{2} - a.a\sqrt{3} - 4a^2\frac{\pi}{6}$

$= \frac{12a^2\sqrt{3}}{3} - a^2\sqrt{3} + 2\pi a^2 - \frac{2\pi a^2}{3}$

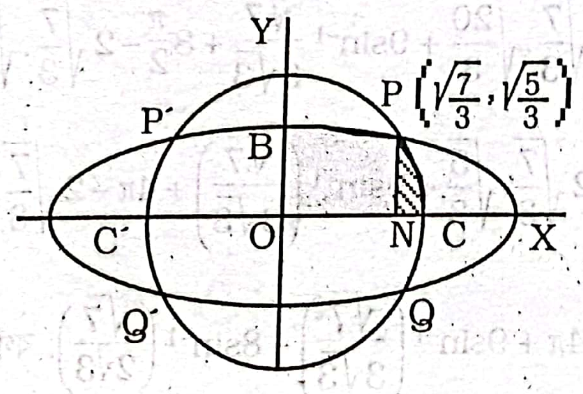
$= 3a^2\sqrt{3} + \frac{4\pi a^2}{3}$

$= a^2\left[3\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right]$ বর্গ একক।

9(j). প্রদত্ত রেখা $x^2+y^2=4 \cdots (1)$ এবং $x^2+4y^2=9 \cdots (2)$

ছেদ বিন্দুর জন্য (1) নং হইতে

...র মান (2) নং এ বসাইয়া পাই,



$4-y^2+4y^2=9$

বা $3y^2=5$,

বা $y^2=\frac{5}{3}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

যদি $y^2=\frac{5}{3}$ হয় তবে $x^2+\frac{5}{3}=4$,

বা $x^2=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

রেখাদ্বয় $P\left(\sqrt{\frac{7}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $P'\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

$Q\left(\sqrt{\frac{7}{3}},-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $Q'\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।