Anastasia August, Andreas Reiter, Andreas Prahs, Britta Nestler HsKa und KIT

Praktikum zur Vorlesung
Modellierung und Simulation im SS 2022

Praktikum 5: 1D-Wärmeleitungsgleichung

Sie leben in einer 1D-Welt in einem Zimmer mit der Länge von $L = 10$ Längeneinheiten. An der rechten Wand ($x = 10$) steht ein Ofen, der durch einen Thermostat auf der konstanten Temperatur T_{ofen} gehalten wird. An der linken Wand ($x = 0$) ist ein Fenster, für das der Einfachheit halber angenommen werden soll, dass durch dieses ein konstanter (vorgegebener) Wärmefluss $\partial_x T(x = 0) = \dot{q}$ abfließt (dies ist physikalisch sehr fragwürdig, soll Ihnen aber die Arbeit vereinfachen). Sie bekommen Besuch, weswegen Sie noch kurz vorher lüften, wodurch sich die Temperatur im gesamten Zimmer auf 0.6 reduziert. Die Leute verteilen sich gut über das Zimmer und sollen vereinfacht als eine gleichmäßige Wärmequelle der Größe $f = 0.6$ betrachtet werden.

Ziel dieser Aufgabe ist es unter den obigen Annahmen die zeitliche Entwicklung der Temperatur im Raum abzubilden. Die Wärmeausbreitung folgt dem Wärmeleitungsgesetz:

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} + f, \tag{1}$$

wobei T für die Temparatur steht, $\frac{\partial T}{\partial t}$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$ deren partielle Ableitungen nach der Zeit und nach dem Ort darstellen und f der Quellterm ist. Um die Wärmeausbreitung in dem Zimmer zu simulieren, wird die obere Gleichung diskretisiert.

Räumliche Diskretisierung: In einem ersten Schritt soll zunächst die räumliche Diskretisierung insbesondere der Randbedingungen näher betrachtet werden. Hierfür bietet es sich an als Vereinfachung die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}\, x^2} = f(x) \tag{2}$$

zu betrachten, welche aus Gleichung (1) durch Unterdrücken der Abhängigkeit von t entsteht. Das Intervall $[0, L]$ wird hierfür in N Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{L}{N}$ zerlegt und die unbekannte Temperatur über die $N+1$ Werte $T_0 = T(x = 0)$ bis $T_N = T(L = N\Delta x)$ diskretisiert. Im „Inneren“ des Gebietes, also für $i = 1, \cdots, N-1$, soll die zweite räumliche Ableitung über das zentrale Differenzenschema diskretisiert werden, wodurch Gleichung (2) in die diskrete Form

$$-\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}\, x^2} \approx -\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} = f \tag{3}$$

gebracht wird. Für die beiden Randwerte T_0 und T_N hingegen müssen geeignete Randbedingungen implementiert werden. Insgesamt führt diese Approximation auf ein lineares Gleichungssystem in tridiagonaler Form

$$
\begin{pmatrix}
* & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} & -\frac{1}{(\Delta x)^2} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & *
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} * \\ f \\ \vdots \\ f \\ * \end{pmatrix},
$$

wobei die mit $*$ gekennzeichneten Einträge noch über die gewählte Randbedingungen zu besetzen sind. Hier sollen zwei verschiedene Varianten zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand verglichen werden.
Verwenden Sie zur Lösung den Thomas-Algorithmus der bereits in der Funktion `solveTridiagonalSystem` implementiert ist. Hierzu müssen lediglich die Diagonal- bzw. unteren und oberen Nebendiagonaleinträge in die dafür angelegten Vektoren d, b und c geschrieben werden. Durch Übergabe der berechneten Temperatur an die Funktion `calcNormDiffT` kann anschließend eine Näherung des Wert $\int_0^L (T - T_{exakt})^2 \mathrm{d}x$ zum Einschätzen des Fehlers berechnet werden.

Setzen Sie folgende Arbeitsschritte um:

1. Schreiben Sie die oben bereits angegebenen Werte in die entsprechenden Stellen in b (untere Nebendiagonale), c (obere Nebendiagonal) und d (Diagonale).

2. Befüllen Sie die fehlenden Eintrage in der letzten Zeile durch Diskretisierung der Randbedingung $T(L) = T_{ofen}$.

3. Für die Diskretisierung der Randbedingung $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \dot{q}$ sollen zwei Varianten betrachtet werden. Betrachten Sie dazu die Abbildung 1.

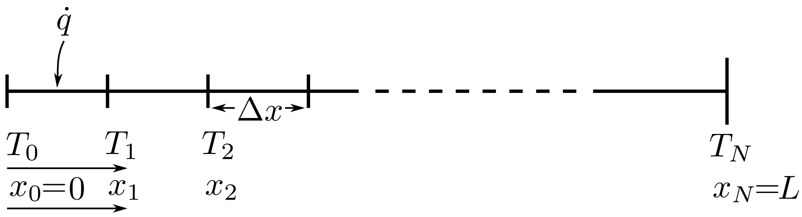

Abbildung 1: Position der physikalischen Größen innerhalb des 1D-Welt Zimmers.

a) Die einfachste Diskretisierung ergibt sich indem die Bedingung $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \dot{q}$ an der Stelle $\frac{1}{2}\Delta x$ über eine zentrale Differenz mittels der Werte T_0 und T_1 diskretisiert wird. Befüllen Sie dementsprechend die fehlenden Einträge in der ersten Reihe des Gleichungssystems. Bestimmen Sie anschließend die Temperatur durch Aufruf der Funktion `solveTridiagonalSystem` und untersuchen Sie den Fehler der Diskretisierung mit Hilfe der Funktion `calcNormDiffT`. Welche Ordnung erwarten Sie für die Diskretiserung der Ableitungen und welche Ordnung beobachten Sie für das Gesamtproblem?

b) Die zweite Variante kann über ein Interpretieren der zweiten Ableitung als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$, also als Ableitung der ersten Ableitung, motiviert werden. In Abhängigkeit von T kann diese an der Stelle $\frac{1}{2}\Delta x$ wie oben mittels der Werte T_0 und T_1 diskretiseiert werden, während Sie bei $x = 0$ durch die Randbedingung vorgegeben ist. Mittels dieser beiden Ableitungswerte an den Stellen $x = 0$ und $x = \frac{\Delta x}{2}$ kann die (negative) zweite Ableitung als

$$-\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}\,x^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}\,x}\right) \approx -\frac{1}{\frac{\Delta x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) - \dot{q}\right) = f \qquad (4)$$

approximiert werden. Befüllen Sie erneut die fehlenden Einträge der ersten Reihe, diesmal aber indem entsprechend dieser Interpretation die Gleichung (4) verwendet wird. Wie groß ist hier der Fehler?

Zeitdiskretisierung: In einem zweiten Schritt soll das dynamische Problem betrachtet werden. Setzen Sie hierfür folgende Arbeitsschritte um:

1. Wählen Sie die Ihnen sinnvoller erscheinende räumliche Diskretisierung aus der letzten Teilaufgabe. Schreiben Sie hiermit die 1D Wärmeleitungsgleichung in diskreter Form, indem Sie die zeitliche Ableitung zusätzlich mit einer Vorwärtsdifferenz approximeren.

2. Implementieren Sie die Anfangsbedingungen.

3. In der Funktion `calc` soll die Berechnung der neuen Werte, `Tneu[k]`, mit Hilfe der alten Werten `T[k]` und des vorgegebenen Zeitschrittes `DELTA_T` implementiert werden. Was passiert wenn Sie `DELTA_T` "groß"wählen?