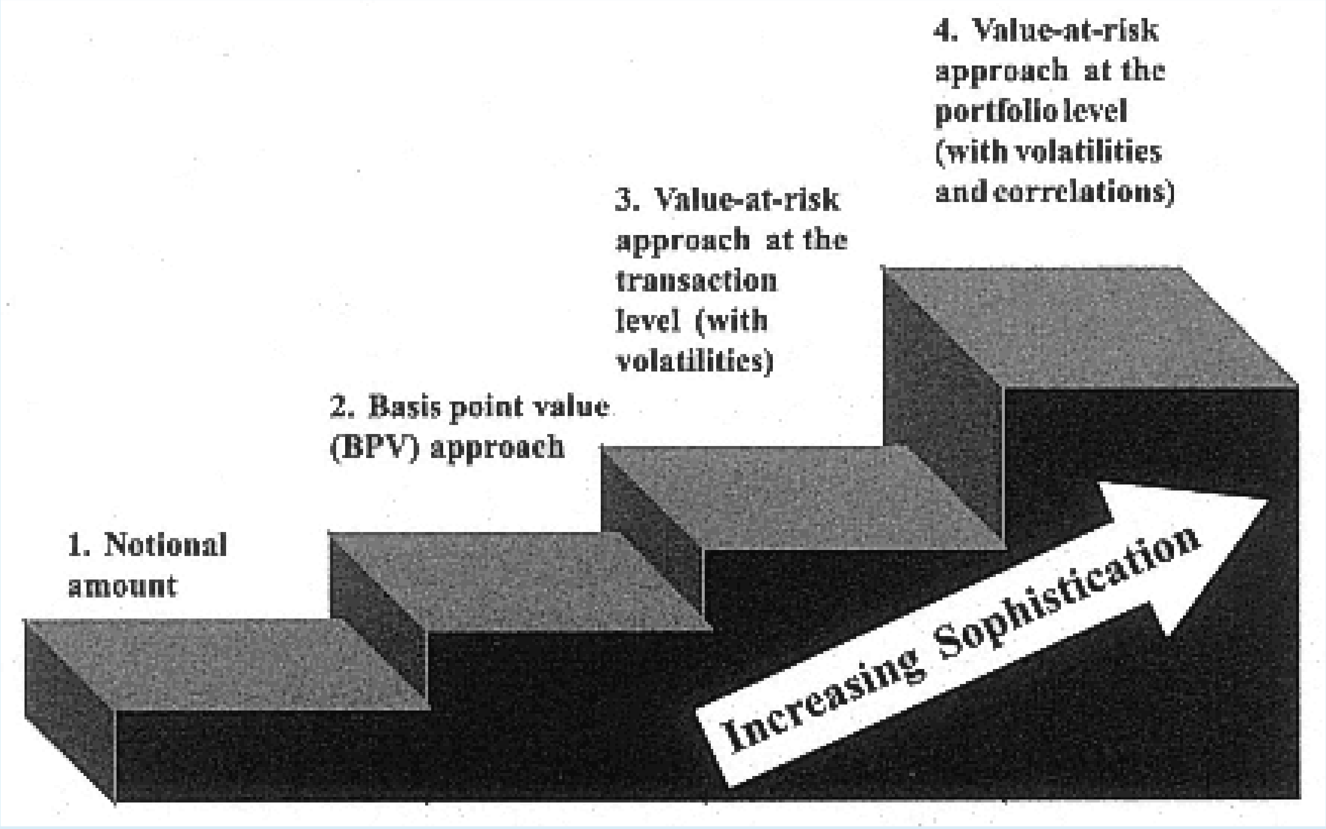
风险测度

主要内容

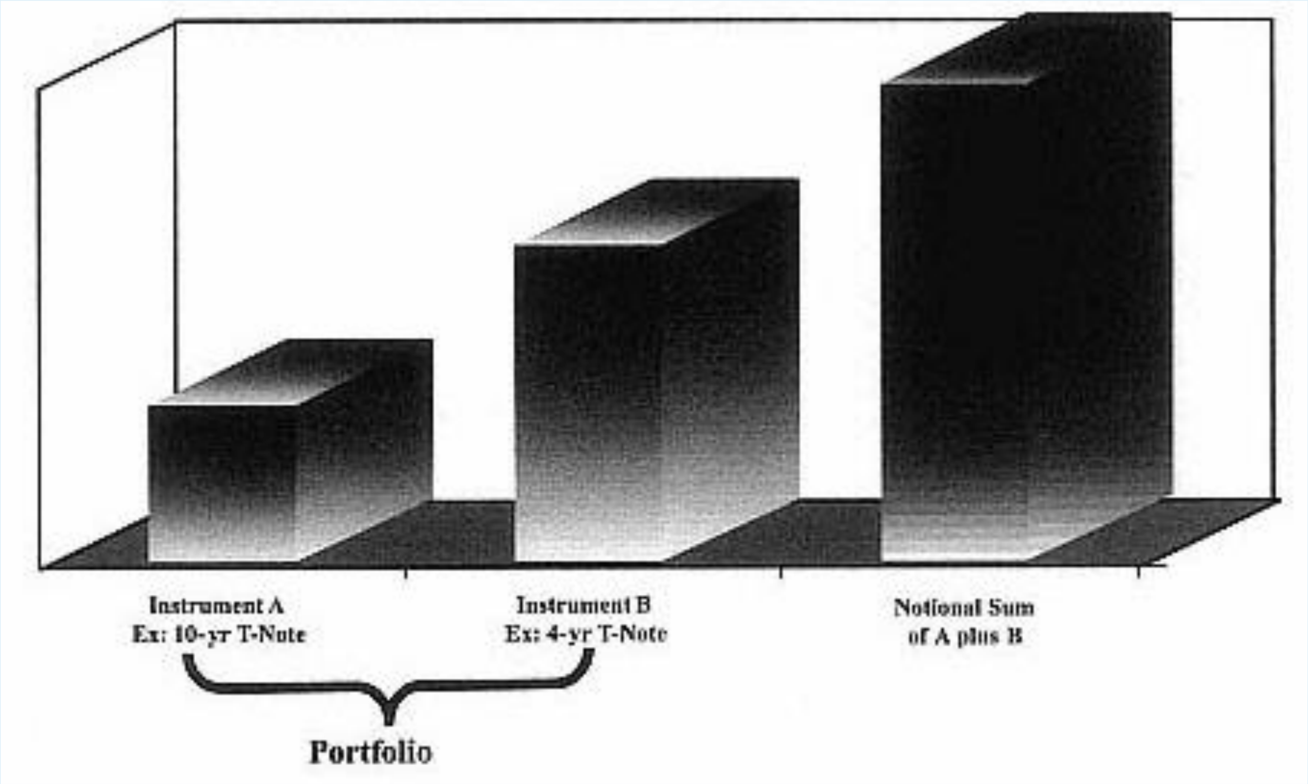
- 风险测度方法简介
- VaR的定义
- VaR的计算方法

测度风险： 历史回顾


4. Value-at-risk approach at the portfolio level (with volatilities and correlations)
3. Value-at-risk approach at the transaction level (with volatilities)
2. Basis point value (BPV) approach
1. Notional amount
Increasing Sophistication

一、名义数量法（*The Notional Amount Approach*）

- 名义数量法衡量债券和投资组合的名义数量，如价格，收益、损失等。如图
- 缺点在于
  - 无法区分短期和长期。
  - 没有区分多头和空头.
  - 无法反映价格的波动和价格之间的相关性。
  - 市场风险真正的数额和名义金额往往差异很大。


Instrument A
Ex: 10-yr T-Note
Instrument B
Ex: 4-yr T-Note
Notional Sum
of A plus B
Portfolio

二、波动性方法

假设某种金融资产收益率r为随机变量，该资产的风险可用收益率标准差σ即波动系数来度量。

σ越大说明该资产面临的市场风险越大，反之则反是。

资产组合风险的度量

(一)基本思路

用收益率的方差或标准差来度量资产组合的风险。

(二)相关的计算公式

1.数学期望

$$\mu_P = E(r_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$$

2.方差

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(r_i, r_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i \sigma_j$$

3.相关系数

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(r_{i,k} - \hat{\mu}_i)(r_{j,k} - \hat{\mu}_j)}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}$$

特征风险、系统性风险与风险分散化

(一) 资产组合收益率方差

令 $w_i = 1/n$，且所有单个资产的风险相同，则可得资产组合收益率的方差为

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\rho_{ij}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}$$

(二) 讨论

1. 若 $\rho_{ij} = 0\ (i \neq j)$，则 $\sigma_P^2 = \sigma^2/n$，从而 $\lim_{n\to\infty}\sigma_P^2 = 0$。

2. 若 $\rho_{ij} = \rho$，则

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i\neq j}\rho_{ij} \to \rho\sigma^2,\quad n \to \infty$$

波动性方法的优缺点评述

1. 优点：含义清楚，应用也比较简单。
2. 缺点：
   - ✓ 仅描述资产组合未来收益的波动程度，并不能说明资产组合价值变化的方向;

三、敏感因子度量（*Factor Sensitivity Measures*）

基本思想可以通过基于Taylor展示式的资产组合价值随市场因子变化的二阶形式来展现：

$$\Delta P \approx \frac{\partial P}{\partial t}\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \cdot \partial x_j}\Delta x_i \cdot \Delta x_j$$

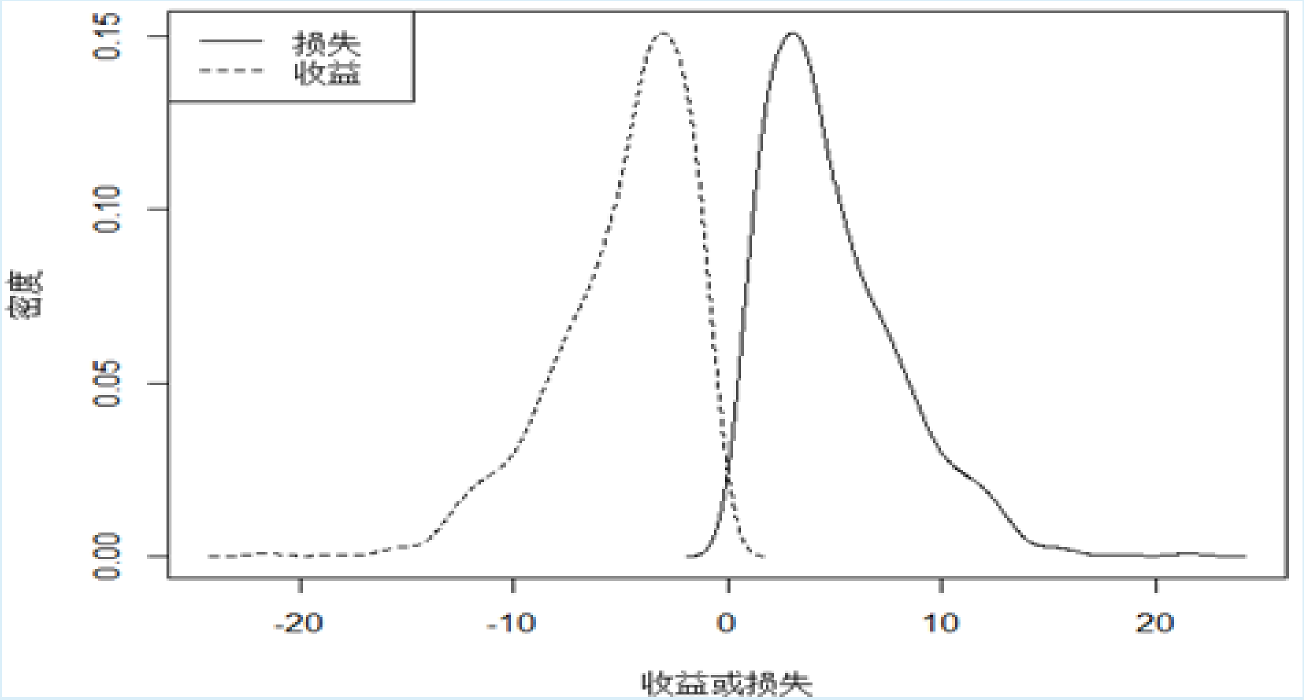
债券价格：利率风险，度量为久期、凸度
证券价格：市场风险，度量为Beta系数
期权：标的资产价格变动风险，度量为Delta、Gamma

主要内容

- 风险测度方法简介
- VaR的定义
- VaR的计算方法

一、VaR的定义

- VaR的含义是处于风险中的价值，“VaR(VauleatRiks)是指在市场的正常 波动下，在给定的置信水平下，某一金融资产或者证券投资组合在未来的特定的一段时间内的最大的可能的损失。
- 更正式的讲，VaR是描述一定目标时段下资产(或资产组合)的损益分布的分位点。
- 例如：某个敞口在99%的置信水平下的日VaR值为1000万美元。
- 损失和收益的关系可以由图表示，其中右侧的实线表示损失，左侧的实线表示收益。



损失
收益
0.15
0.10
0.05
0.00
密度
-20
-10
0
10
20
收益或损失

二、绝对VAR和相对VAR

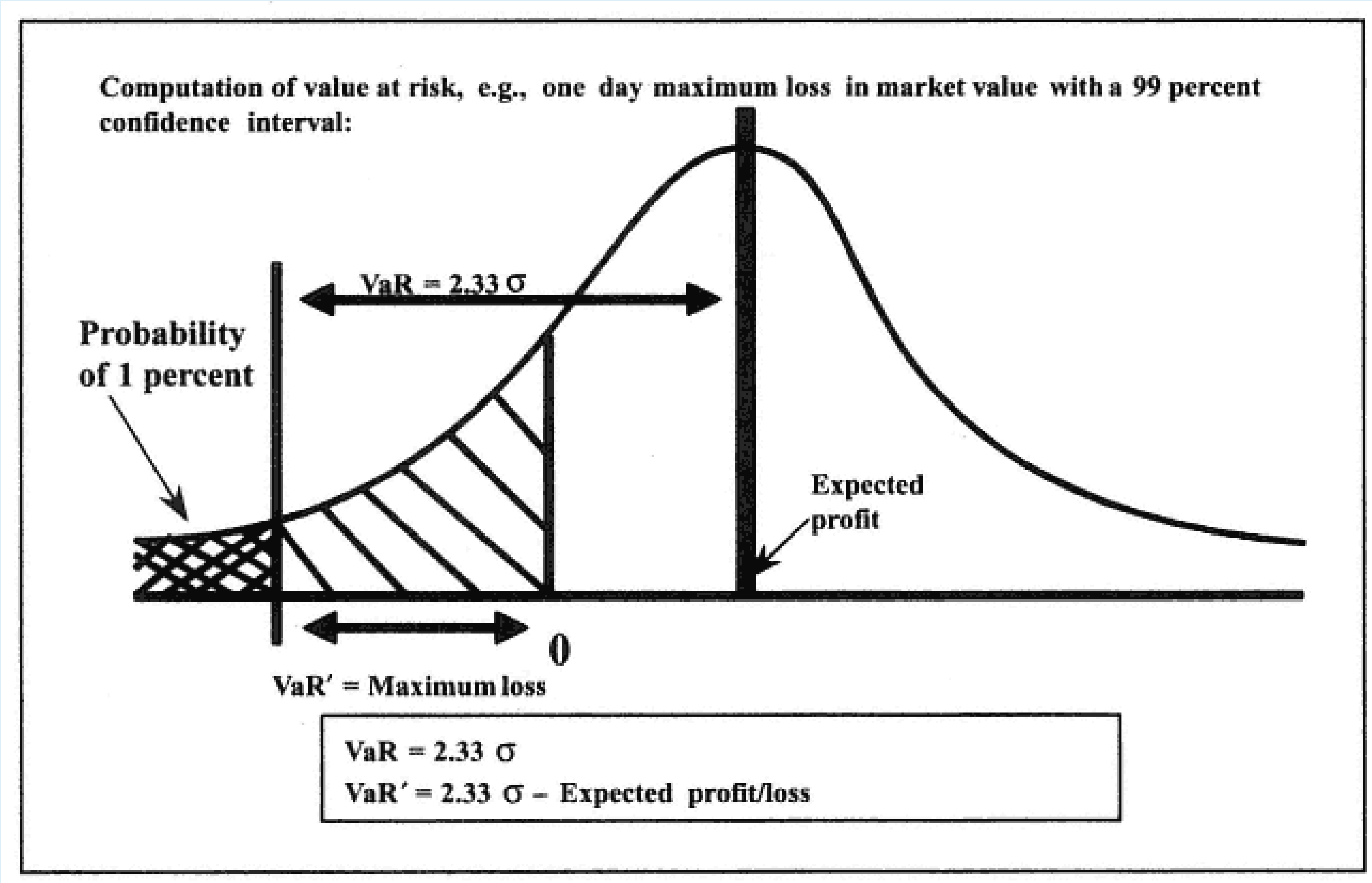
- VAR有两个定义
  - 绝对VAR， 给定置信水平（99%）下的最大损失， 也称VaR（零值）

$$\mathrm{VAR(zero)} = W_0 - W^* = -W_0R^*$$

  - VAR（均值）

$$\mathrm{VAR(mean)} = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu)$$

第二种VaR定义方式与经济资本分配和风险调整后资本收益率（RAROC ）计算一致。



$$P(Y \leq VaR(p)) = 1 - p \tag{1.1}$$

程序实现：计算股票的VaR

- Apple <- read.table("Apple.csv", header = T, sep = ";")
- r <- log(head(Apple$Price,-1)/tail(Apple$Price,-1))
- m <- mean(r)
- s <- sd(r)
- VaR1 <- -qnorm(0.05, m, s)
- print(VaR1)

注：

- 大多数 VaR 都是短期风险，如1天、10天（监管者要求）
- 巴塞尔协议规定p=99%
- 对于内部资产，p=99.96%

三、VaR的性质

- 单调性：如果 $L_1 \leq L_2$ 在任何情况下都成立，则

$$VaR_\tau(L_1) \leq VaR_\tau(L_2)$$

- 正齐次性：对于任意正数 h，有

$$VaR_\tau(hl) = hVaR_\tau(L)$$

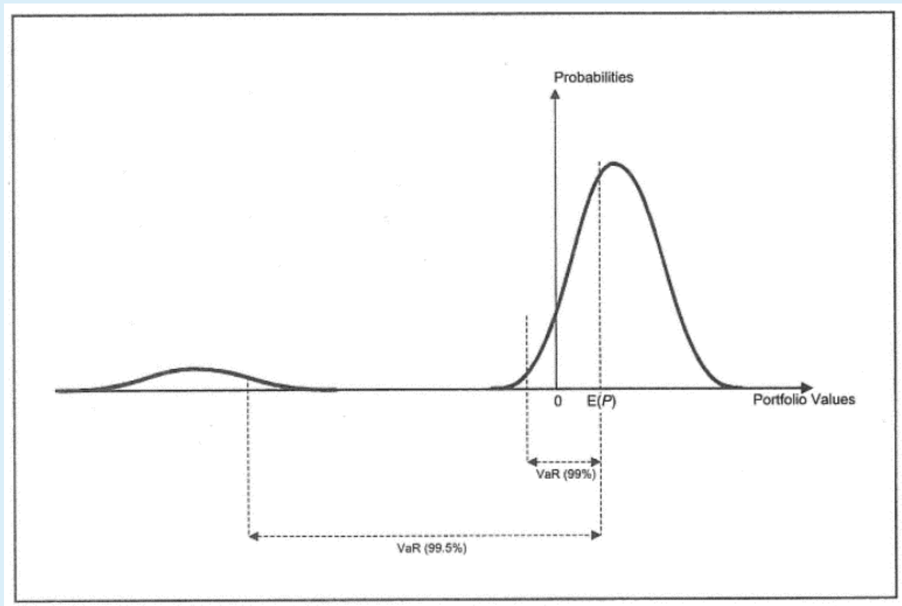
- 平移不变性：对于任意一个固定的常数α，有

$$VaR_\tau(L) = VaR_\tau(L) + \alpha$$

- 不满足次可加性

VaR不是一致风险测度

VaR不满足次可加性的例子



(Skewed loss distributions)

例 8-5

假定两个独立贷款项目在1年内均有0.02的概率损失1 000万美元，同时均有0.98的概率损失100万美元，任意一个单笔贷款在展望期为1年、97.5%的置信区间下的VaR为100万美元，将两个贷款叠加产生一个资产组合，组合有0.02 × 0.02 = 0.0004的概率损失2 000万美元，并且有2 × 0.02 × 0.98 = 0.039 2的概率损失1 100万美元，有0.98 × 0.98 = 0.960 4的概率损失200万美元。在展望期为1年，97.5%置信度下，组合的VaR为1 100万美元，单笔贷款所对应VaR的和为200万美元，贷款组合的VaR比贷款VaR的总和高900万美元，这违反了次可加性。

VaR的超可加性

- 不满足次可加性—超可加性

Superadditivity scenarios for VaR

Under the following scenarios, VaR_α is typically superadditive:

1) L_1, L_2 have skewed distributions;
2) Independent, light-tailed L_1, L_2 and small α;
3) L_1, L_2 have special dependence;
4) L_1, L_2 have heavy tailed distributions.

五、VaR与ES的定义

- ES（TVaR，CVaR， CED）
  - ES的定义
    - 对于金融资产损失函数 *L*， 在VaR的基础上，可以给出置信水平 100α% 的ES定义如下

      $ES_{\alpha}(L) = E\,[\,L_t\,/\,L_t > VaR_{\alpha}(L)\,]$
  - ES的性质
    - ES不但满足单调性、正齐次性、平移不变性，而且还满足次可加性，是一致性风险测度。

主要内容

- 风险测度方法简介
- VaR的定义
- VaR的计算方法

一、影响VaR计算的几个主要因素

- 上尾部概率τ
- 持有期 Δt
- 损失的累积分布函数
- 金融头寸的资产价值

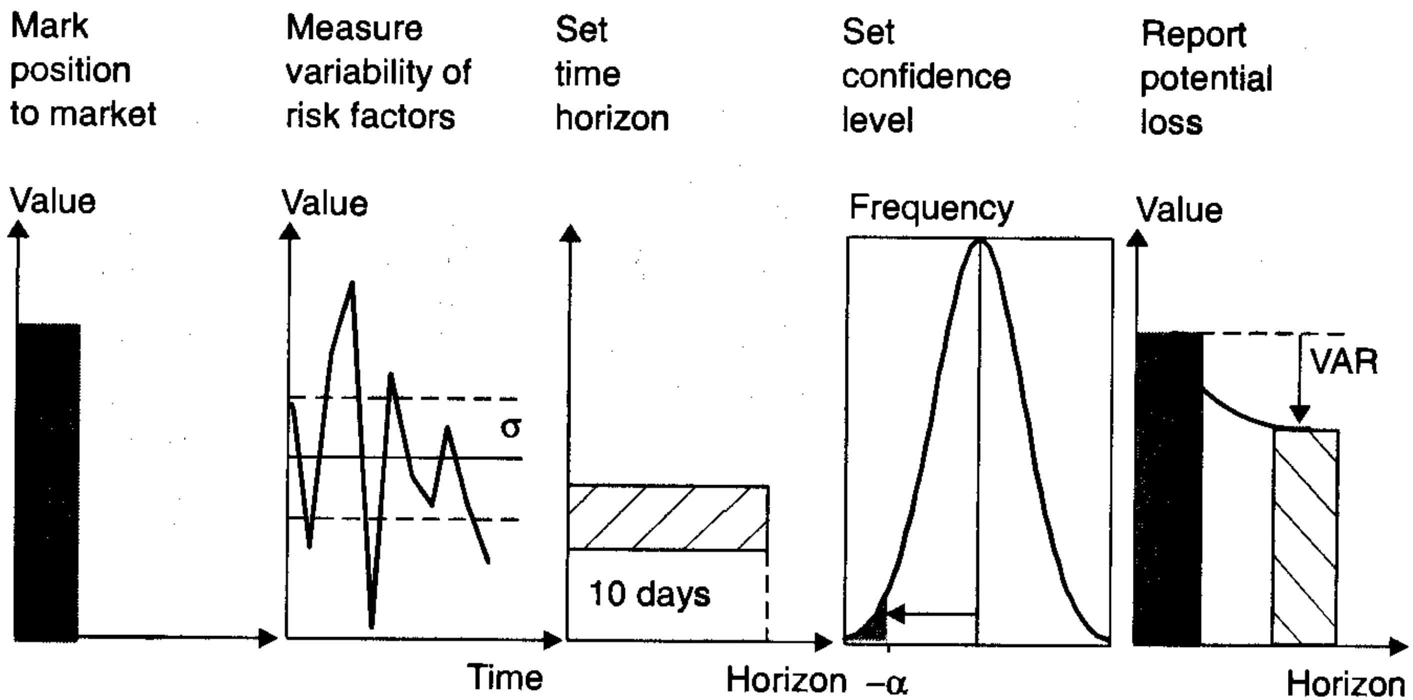
需要注意的是，空头头寸与多头头寸在实际分析过程中有明显不同。

二、计算VaR的步骤

- 逐日盯市确认投资组合的市值
- 衡量风险因素的变化率，如波动率15%
- 设定时间区域，样本观察时间段，如10天
- 设定置信水平，如99%，
- 假设分布，如正态分布
- 分析前面信息数据，得出收入的分布概率，计算潜在的最大损失，综合得出 VaR，如在99%的置信水平的VaR为700美元

FIGURE 5-1

Steps in computing VAR.



Sample computation:

$100M	×	15%	×	$\sqrt{(10/252)}$	×	2.33	=	$7M

三、常见的VaR计算方法

1. 非参数法：使用历史数据，计算经验分布和经验分位数。
   - 历史模拟法
2. 参数法：假定收益率服从某种分布，估计参数，计算分布的分位数。
   - 正态分布
   - T分布
   - 极值分布
3. 随机模拟

1、历史模拟法（Historical Simulation Approach）

- 首先选择风险因子的历史数据，例如500个交易日数据。
- 其次，用历史数据计算资产组合的价值和价值的变化.
- 最后，构建直方图，找到1%的分位点，即第5个最坏的损失。计算VAR。

采用代数符号描述这一过程，我们将某市场变量在第 i 天所对应的数值记为 v_i，假定今天为第 n 天，市场变量在明天所对应的第 i 个情景为

$$v_n \frac{v_i}{v_{i-1}} \tag{14-1}$$

```r
Apple <- read.table("Apple.csv", header = T, sep = ";")
r <- log(head(Apple$Price,-1)/tail(Apple$Price,-1))

VaR2 <- -quantile(r, 0.05)
print(VaR2)
```

案例：历史模拟法计算投资组合VaR

- 考虑一个美国投资者，在2008年9月25日持有价值1000万的投资组合（如图），组合中有4个股票指数，指数价格以美元计算，下面显示了4个 指数的收盘价格的历史数据（可下载 ）

表 14-1 用于演示 VaR 计算过程的投资组合

指数	组合价值（以 1 000 美元计）
DJIA	4 000
FTSE 100	3 000
CAC 40	1 000
Nikkei 225	2 000
总计	10 000

表 14-2 采用历史模拟法计算 VaR 所需的股票指数数据（以美元计）

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	Aug. 7, 2006	11 219.38	11 131.84	6 373.89	131.77
1	Aug. 8, 2006	11 173.59	11 096.28	6 378.16	134.38
2	Aug. 9, 2006	11 076.18	11 185.35	6 474.04	135.94
3	Aug. 10, 2006	11 124.37	11 016.71	6 357.49	135.44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	Sept. 24, 2008	10 825.17	9 438.58	6 033.93	114.26
500	Sept. 25, 2008	11 022.06	9 599.90	6 200.40	112.82

表 14-3 由表 14-2 数据产生的对于 2008 年 9 月 26 日的市场变量的不同情景

情景数据	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225	组合价值（千美元）	损失（千美元）
1	10 977. 08	9 569. 23	6 204. 55	115. 05	10 014. 334	-14. 334
2	10 925. 97	9 676. 96	6 293. 60	114. 13	10 027. 481	-27. 481
3	11 070. 01	9 455. 16	6 088. 77	112. 40	9 946. 736	53. 264
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	10 831. 43	9 383. 49	6 051. 94	113. 85	9 857. 465	142. 535
500	11 222. 53	9 763. 97	6 371. 45	111. 40	10 126. 439	-126. 439

注：所有指数均以美元计。

在 2008 年 9 月 25 日，DJIA 的取值为 11 022. 06，在 2006 年 8 月 7 日的取值为 11 219. 38，在 2006 年 8 月 8 日下跌为 11 173. 59，因此，DJIA 在情景 1 下的取值为

$$11\,022.06 \times \frac{11\,173.59}{11\,219.38} = 10\,977.08$$

与此类似，在情景 1 下，FTSE 100，CAC 40，Nikkei 225 的取值分别为 9 569. 23，6 204. 55 和 115. 05。因此在情景 1 下，组合资产价值为（以 1 000 计）

$$4\,000 \times \frac{10\,977.08}{11\,022.06} + 3\,000 \times \frac{9\,569.23}{9\,599.90} + 1\,000 \times \frac{6\,204.55}{6\,200.40} + 2\,000 \times \frac{115.05}{112.82} = 10\,014.334$$

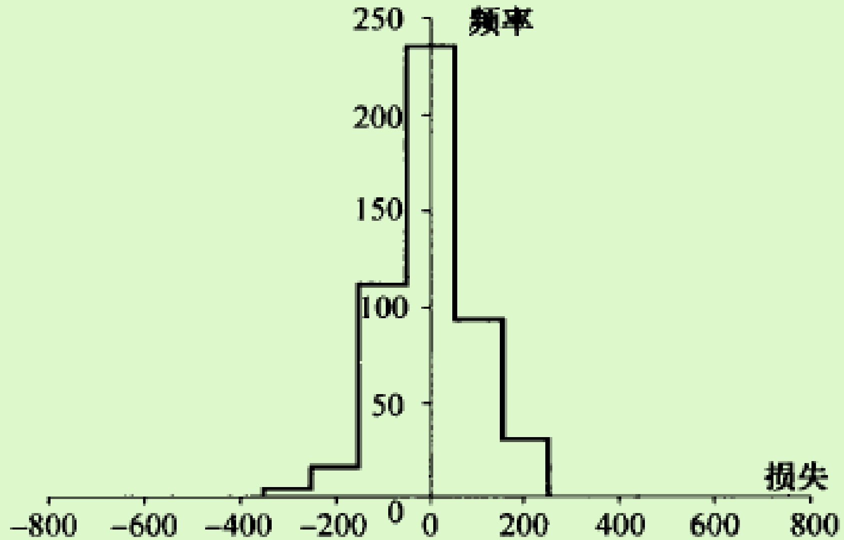


图 14-1　2008 年 9 月 25 日和 26 日之间损失分布的直方图（频率图）

表 14-4　对应 500 个情景损失的排序

情景编号	损失数量（千美元）	情景编号	损失数量（千美元）
494	477.841	473	191.269
339	345.435	306	191.050
349	282.204	477	185.127
329	277.041	495	184.450
487	253.385	376	182.707
227	217.974	237	180.105
131	205.256	365	172.224
238	201.389	⋮	⋮

- 10天VaR

$$\sqrt{10} \times 253\,385 = 801\,274$$

2、参数法

（1）、-正态分布：

$$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(R-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\text{Prob}(R < R^*) = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR = \text{Prob}\left(Z < \frac{R^* - \mu}{\sigma}\right) = 1 - c \quad (8)$$

Z = (*R* – μ)/s denotes a standard normal variable, *N*(0,1),

$$-\alpha = \frac{-|R^*|-\mu}{\sigma}$$

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu$$

$$\text{VAR(mean)} = -W_0\,(R^* - \mu) = W_0\,\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$\text{VAR(zero)} = -\,W_0\,R^* = W_0\,(\alpha\,\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t)$$

不同置信水平 对应的 临界值

TABLE 5.2
Threshold Limits, α, as a Function of the Confidence Level

c	$\alpha = \frac{R^{*} - \mu}{\sigma}$
99.97%	–3.43
99.87%	–3.00
99%	–2.33
95%	–1.65

如何选择c和时间段Δt

- 公司范围内不同市场风险的比较，99%，1天
- 潜在损失的衡量
- 满足资本充足率
- 回溯标准

1日VaR 和10日 VaR

假设市场是有效的，每日收益R_t是独立同分布的，服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则10日收益率

$$R(10)=\sum_{t=1}^{10} R_t$$

也是服从正态分布，均值10μ，方差是$10\sigma^2$

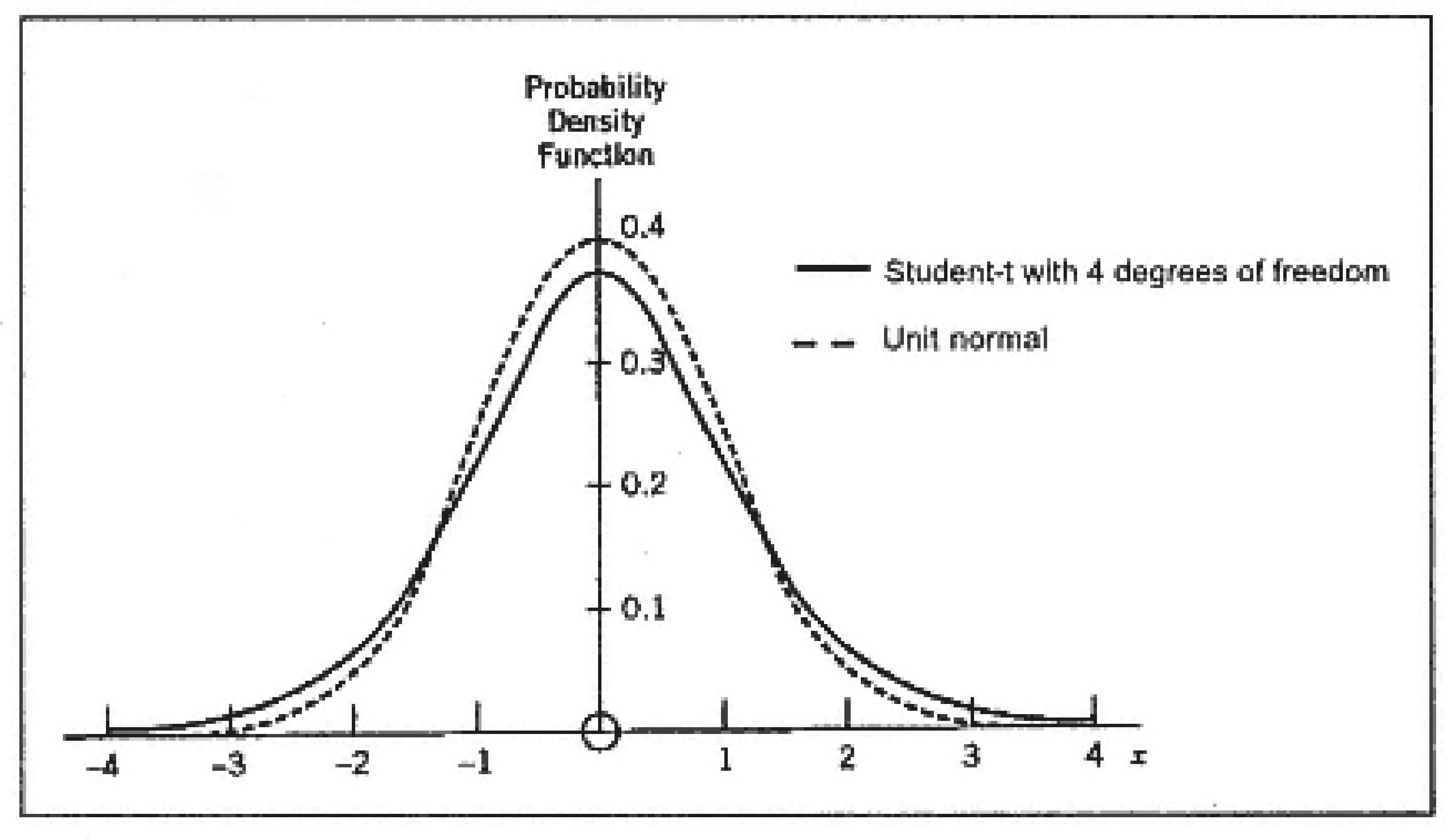
$$\mathrm{VaR}\,(10;c)=\sqrt{10}\,\mathrm{VaR}\,(1;c) \tag{12}$$

（2）t分布

大多数收益率是“胖尾”的。可使用t分布来描述，用三个指标

- 均值μ、方差σ^2和自由度v
- V描述了胖尾形， v越小， 尾部越胖；v越大，t分布越趋于正态分布。对于金融时间序列，v的取值常在4和8之间。

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma t_\nu^{-1}(\alpha).$$


Probability
Density
Function
0.4
0.3
0.2
0.1
Student-t with 4 degrees of freedom
Unit normal
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x

例：

Example 2.9 (A comparison of VaR and ES for stock returns)

- Consider Example 2.2 with a portfolio consisting of a single stock $V_t = S_t = 10\,000$. In this case, $L_{t+1}^{\Delta} = -S_t X_{t+1}$, where $X_{t+1} = \log(S_{t+1}/S_t)$.
- Let $\sigma = 0.2/\sqrt{250}$ (annualized volatility of 20%) and assume

1) $X_{t+1} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow L_{t+1}^{\Delta} \sim \mathrm{N}(0, S_t^2\sigma^2)$;

2) $X_{t+1} \sim t_\nu(0, \sigma^2\frac{\nu-2}{\nu})$, $\nu > 2$ (so that $\mathrm{var}\, X_{t+1}$ is also σ^2). Then

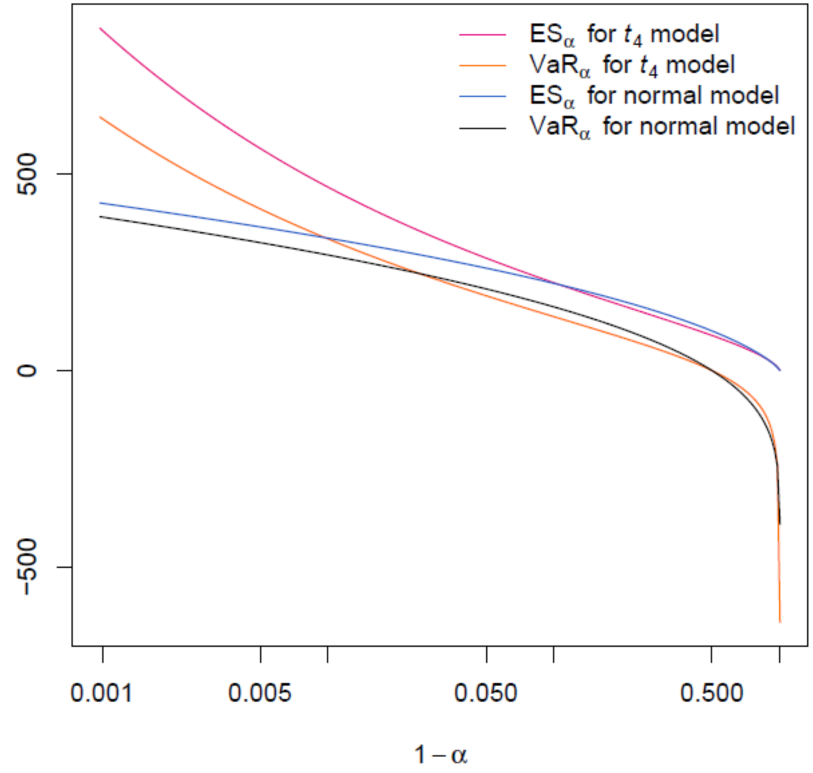
$$X_{t+1} = \sqrt{\sigma^2\frac{\nu-2}{\nu}}Y \quad \text{for} \quad Y \sim t_\nu.$$

$$\Rightarrow L_{t+1}^{\Delta} = -S_t\sqrt{\sigma^2\frac{\nu-2}{\nu}}Y \sim t_\nu(0, S_t^2\sigma^2\tfrac{\nu-2}{\nu})\ (\mathrm{var}(L_{t+1}^{\Delta}) = S_t^2\sigma^2).$$

- 作业：用R语言实现t分布和正态的VaR值，画出以下图形

Consider $\nu = 4$ and note that $\mathrm{VaR}_\alpha^{t_4} \geq \mathrm{VaR}_\alpha^{\text{normal}}$ and $\mathrm{ES}_\alpha^{t_4} \geq \mathrm{ES}_\alpha^{\text{norm}}$

only hold for sufficiently large α.



$\Rightarrow$ The t_4 model is not always “riskier” than the normal model.

Example 2.10 (Example 2.6 continued; ES_α for $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ and $t_\nu(\mu,\sigma^2)$)

1) Let $\tilde{L} \sim \mathrm{N}(0,1)$. Then $\mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{L}) = 0 + 1 \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$ and thus

$$\mathrm{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u)\,du \underset{x=\Phi^{-1}(u)}{=} \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty x\varphi(x)\,dx,$$

where $\varphi(x) = \Phi'(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$. Note that $x\varphi(x) = -\varphi'(x)$, so that

$$\mathrm{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{-[\varphi(x)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty}{1-\alpha} = \frac{-(0-\varphi(\Phi^{-1}(\alpha)))}{1-\alpha} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

This implies that $L \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ has expected shortfall

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\,\mathrm{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \mu + \sigma\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

2) Let $L \sim t_\nu(\mu,\sigma^2)$, $\nu > 1$. Similarly as above, one obtains that

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\frac{f_{t_\nu}(t_\nu^{-1}(\alpha))(\nu + t_\nu^{-1}(\alpha)^2)}{(1-\alpha)(\nu-1)},$$

where f_{t_ν} denotes the density of t_ν; see Example 2.6.

（3）极值分布

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布的随机变量序列，

记 $M_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\},n>2$，如果存在规范化常数列 {an>0},{bn}与某一非退化分布函数H(x)，使得下式成立，

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x) = H(x)$$

则Fisher-Tippett定理指出，H(x)必为广义极值分布，其分布函数形式为

$$H_\xi(x)=\begin{cases} exp\{-e^{-x}\}, & \xi=0;\ x\in R \\ exp\left\{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & \xi\neq 0;\ 1+\xi x>0 \end{cases}$$

- 更广义的极值分布

$$H_{\xi}(x)=\begin{cases}\exp(-e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})}) & \xi=0\\ \exp(-(1+\xi\frac{(x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi} & \xi\neq 0\end{cases}$$

极值分布参数ξ的含义

- 如果ξ> 0，则分布是Fr'echet型GEV分布。 Fr'echet类型的GEV分布具有遵循幂律的尾部，来自学生的t分布，帕累托分布或者L'evy分布
- 如果ξ = 0，则分布是Gumbel型GEV分布。 这里，尾部将是指数的，如正态分布和伽马分布及其近亲。
- 如果ξ <0，则分布是威布尔型GEV分布。 这有一个快速下降尾巴，实际上有一个有限的右端点的分布，如beta，均匀和三角分布

α=0 and β =1

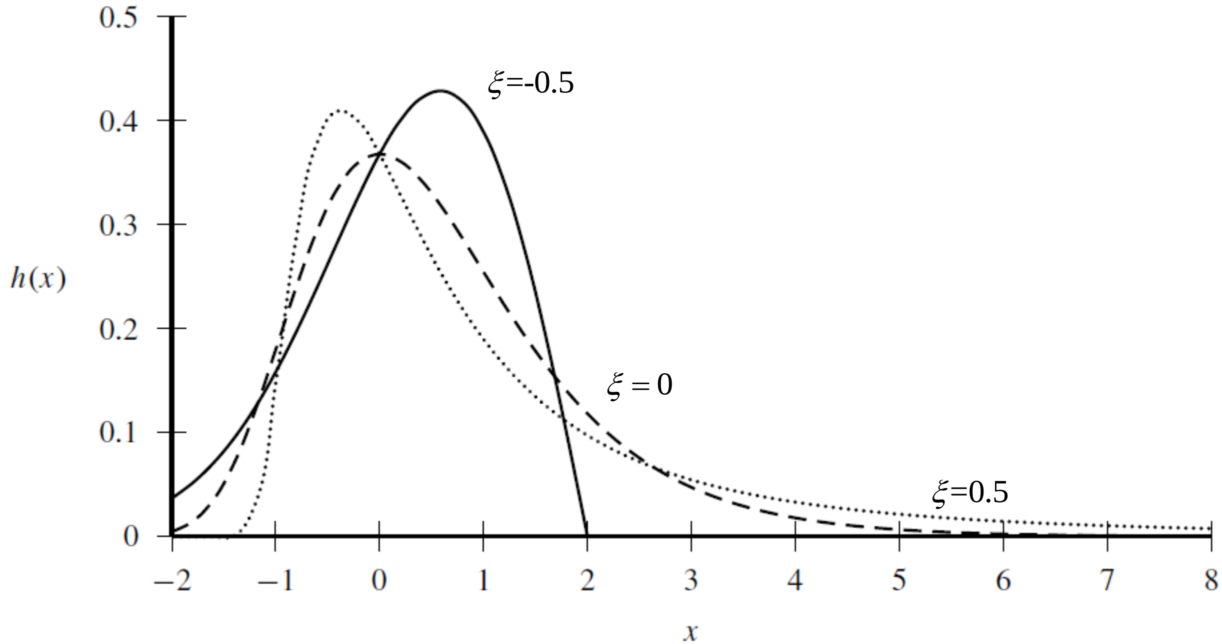


Figure 12.2 Various GEV density functions

GEV分布估计方法

- 块最大值法***The Block Maxima Method***
  - 我们用M_{nj}表示第j个块的块最大值，所以我们的数据是M_{n1}，……，M_{nm}。GEV分布可以使用各种方法拟合，包括最大似然

$$
\begin{aligned}
& l(\xi, \mu, \sigma; M_{n1}, \ldots, M_{nm}) \\
& \quad = \sum_{i=1}^{m} \ln h_{\xi,\mu,\sigma}(M_{ni}) \\
& \quad = -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{m} \ln\left(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}
\end{aligned}
$$

条件

$$1 + \xi(M_{ni} - \mu)/\sigma > 0$$

- 如何确定m、n的值？
- R软件包？ extRemes
- GEV方法的主要缺点是通过在每个数据块中仅使用最大值或多个值，它忽略了许多可能有用的信息。例如，如果使用返回级别方法并且每个块有一千个观察，则99.9％的信息被丢弃。
- 因此，广义帕累托分布更常用。

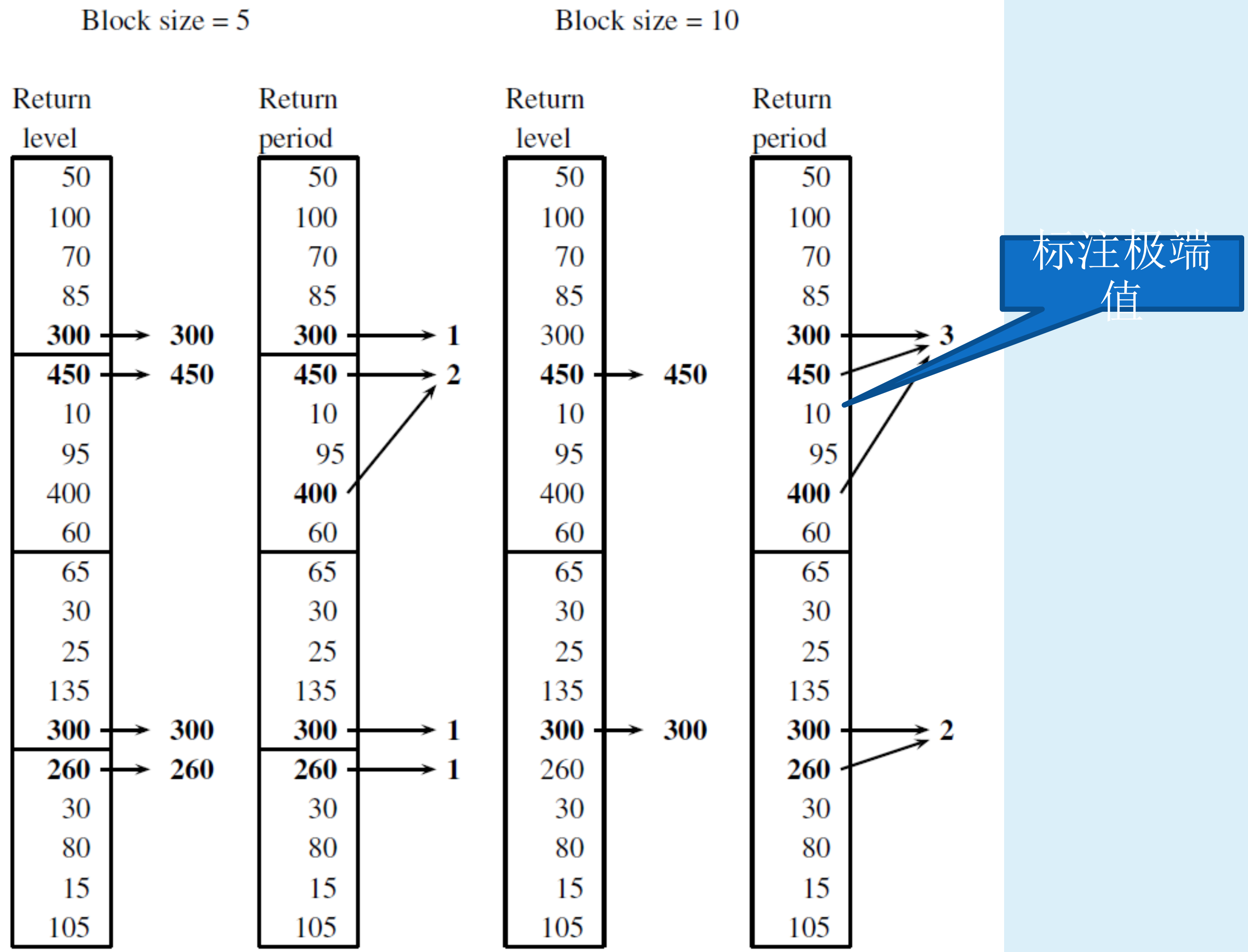


Figure 12.3 Comparison of GEV approaches and block sizes

Balkema-Haan-Pickands定理

x_F

- 设随机变量的分布为F(x)，右端点为x_F, 称分布函数 $F_u(x) = P(X - u \le x \mid X > u), x \ge 0$ 为随机变量X超出量分布函数；定义平均超额函数

$$e(u) = E(X - u \mid X > u)$$

- 当u足够大，F_u（x）可以用GPD分布来 近似。

$$G(x) = \Pr(X - u \le x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

$$= \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{x}{\beta\gamma}\right)^{-\gamma} & \text{if } \gamma \neq 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{if } \gamma = 0. \end{cases}$$

(16

- Balkema-Haan-Pickands定理表明当且仅当分布F属于GEV的最大值吸引域时，GPD就是超出量分布的极限分布。
- 确定阈值u是POT建模的前提，若阈值选取过低，超出量分布不能显著收敛于极限分布；同时u不能过大，否则落入阈值以上的数据可能很少，导致信息很少。

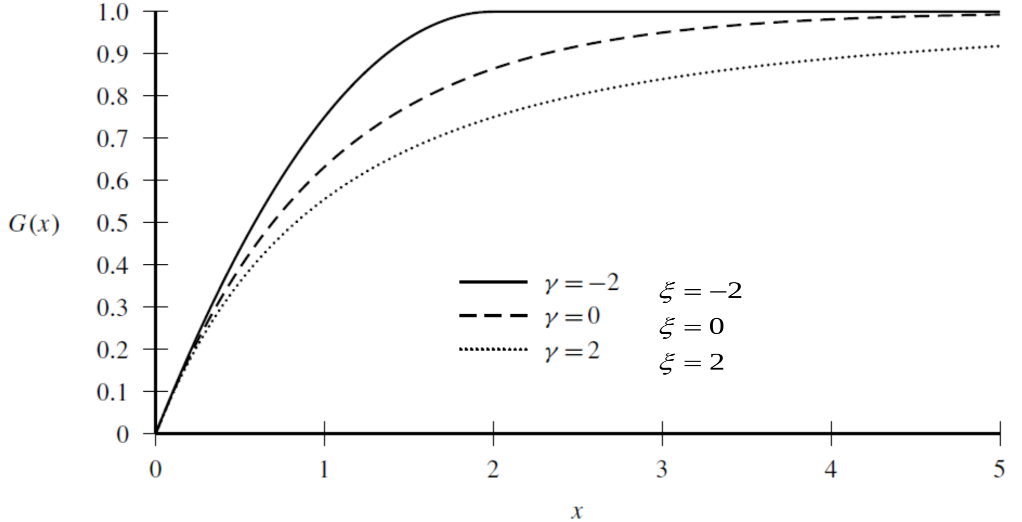


Figure 12.4 Various generalised Pareto distribution functions

$\beta = 1$

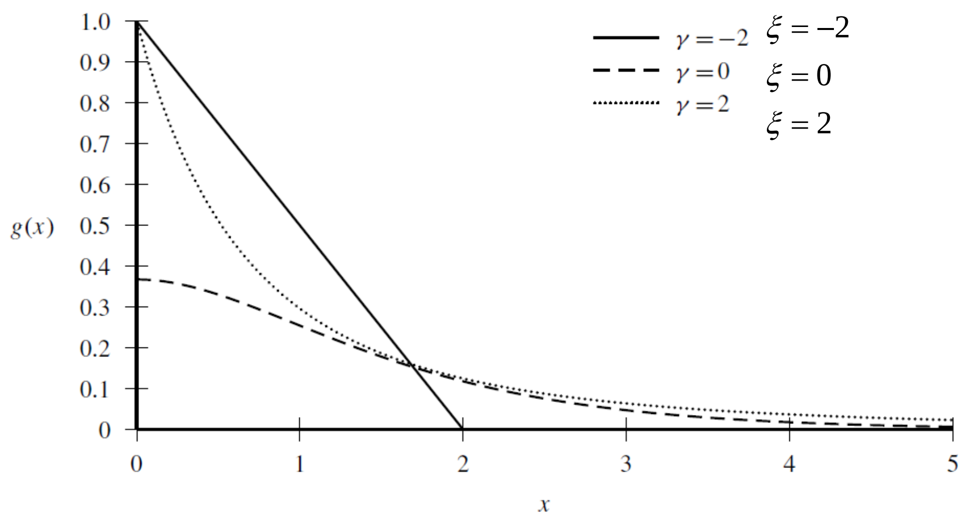


Figure 12.5 Various generalised Pareto density functions

- 确定阈值的方法
  - 平均超额函数法

$$e_n(u)=\frac{\sum_1^n (x_i-u)_+}{\sum_1^n I_{\{x_i>u\}}} \qquad e(u)=\frac{\sigma+\xi u}{1-\xi}$$

当u达到某临界值u_0以后，若经验平均超出量函数$e_n u$ 呈线性变化，则可以确定u_0为阈值。

  - Hill图法

$$H_{k,n}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln\frac{x_{(i)}}{x_{(k)}},$$

$$\{(k,H_{k,n}^{-1});k=1,2,\cdots,n\}$$

在Hill图形中，尾部稳定区域的起点横坐标k所对应的次序统计量$x(k)$可以作为阈值u。

- 极值分布和正态分布的VaR比较图

FIGURE 5-8

Distribution of S&P 500 lower-tail returns: 1984–2004.

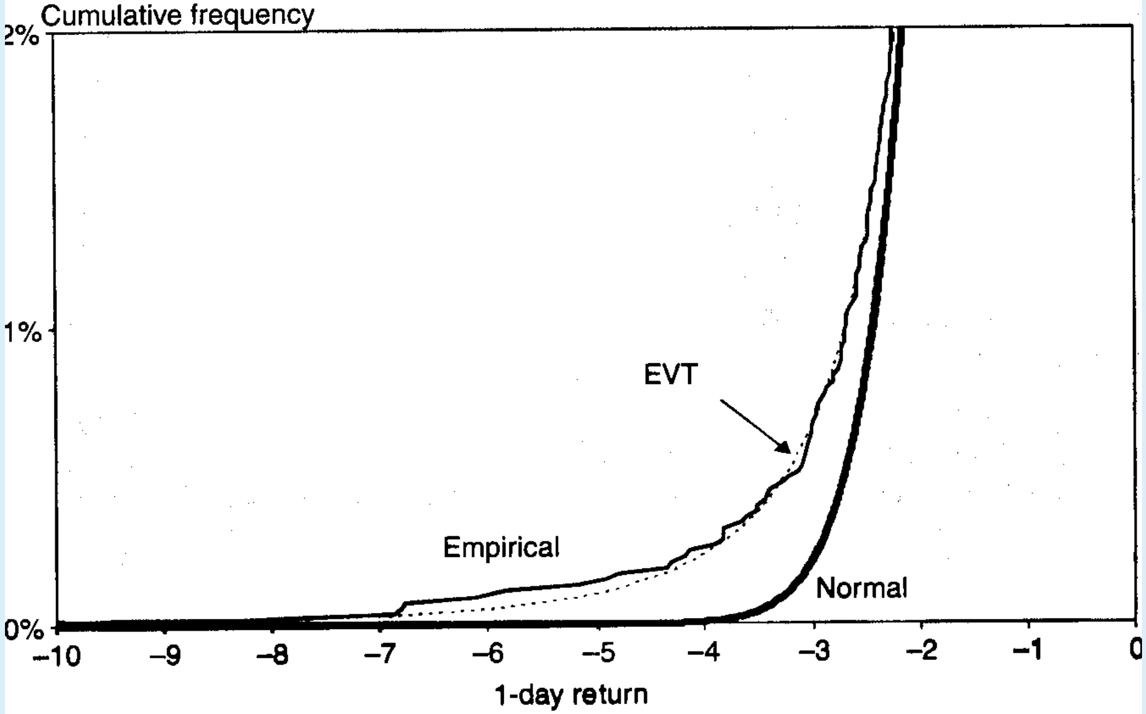


TABLE 5-5

The Effect of Fat Tails and Multiple Periods on VAR

	Confidence				
	95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
Extreme value					
1-day	0.9	1.5	1.7	2.5	3.0
10-day	1.6	2.5	3.0	4.3	5.1
Normal					
1-day	1.0	1.4	1.6	1.9	2.0
10-day	3.2	4.5	4.9	5.9	6.3

Source: Danielsson and de Vries (1997).

运用极值理论估计VaR

- 对应于置信水平为θ的VaR，我们对F(VaR)=q求解

$$q = 1 - \frac{n_u}{n}\left(1 + \xi\frac{VaR - u}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

修改符号与前面一致

- 因此

$$V\widehat{a}R = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left\{[(n/n_u)(1-q)]^{-\hat{\xi}} - 1\right\}$$

$$\widehat{\mathrm{ETL}} = \frac{\widehat{\mathrm{VAR}}}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}$$

案例：用极值分布计算投资组合VaR

表 12-1 用于演示 VaR 计算过程的投资组合

指数	组合价值（以 1 000 美元计）
DJIA	4 000
FTSE 100	3 000
CAC 40	1 000
Nikkei 225	2 000
总计	10 000

表 12-2 采用历史模拟法计算 VaR 所需要的数据

天数	日期	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	Aug. 7，2006	11 219. 38	5 828. 8	4 956. 34	15 154. 06
1	Aug. 8，2006	11 173. 59	5 818. 1	4 967. 95	15 464. 66
2	Aug. 9，2006	11 076. 18	5 860. 5	5 025. 15	15 656. 59
3	Aug. 10，2006	11 124. 37	5 823. 4	4 976. 64	15 630. 91
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	Sept. 24，2008	10 825. 17	5 095. 6	4 114. 54	12 115. 03
500	Sept. 25，2008	11 022. 06	5 197. 0	4 226. 81	12 006. 53

表 12-3　由表 12-2 数据产生的对于 2008 年 9 月 26 日的市场变量的不同情景

情形数码	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225	组合价值（千美元）	损失（千美元）
1	10 977.08	5 187.46	4 236.71	12 252.62	10 021.502	−21.502
2	10 925.97	5 234.87	4 275.48	12 155.54	10 023.327	−23.327
3	11 070.01	5 164.10	4 186.01	11 986.84	9 985.478	14.522
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
409	10 831.43	5 057.36	4 117.75	12 030.80	9 828.450	171.550
500	11 222.53	5 300.42	4 342.14	11 899.00	10 141.826	−141.826

$$v_n \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

$$11\,022.06 \times \frac{11\,173.59}{11\,219.38} = 10\,977.08$$

$$4\,000 \times \frac{10\,977.08}{11\,022.06} + 3\,000 \times \frac{5\,187.46}{5\,197.0} + 1\,000 \times \frac{4\,236.71}{4\,226.81} + 2\,000 \times \frac{12\,252.62}{12\,006.53} = 10\,021.502$$

表 12-4　对应 500 个情形损失的排序

情形编号	损失数量（以 1 000 计）
494	499.395
339	359.440
329	341.366
349	251.943
487	247.571
131	241.712
227	230.265
495	227.332
441	225.051
376	217.945
306	211.797
365	202.970
242	200.116
238	199.467
477	188.758
⋮	⋮

表 12-8　对于表 12-4 的极值理论计算

情形数码	损失（以 1 000 美元计）	排序	$\ln\left[\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\xi(v_i-u)}{\beta}\right)^{-1/\xi-1}\right]$
494	499.395	1	−8.79
339	359.440	2	−7.10
329	341.366	3	−6.82
299	251.943	4	−5.11
487	247.571	5	−5.01
131	241.712	6	−4.87
227	230.265	7	−4.58
495	227.332	8	−4.50
441	225.051	9	−4.43
376	217.945	10	−4.24
306	211.797	11	−4.06
365	202.970	12	−3.78
242	200.116	13	−3.69
总计			−66.98

EVT 系数试验计算估计

ξ	β
0.3	40

注：$u=200$、$\beta=40$、及 $\xi=0.3$。

令 $u=200$，$n_u=13$。采用Excel计算中的Solve程序，可求得使似然函数达到最大值的参数值为

$$\beta = 43.526 \quad 和 \quad \xi = 0.371$$

在99%的置信水平下的VaR值为

$$200+\frac{43.526}{0.371}\left[\left(\frac{500}{13}(1-0.99)\right)^{-0.371}-1\right]=249.9$$

作业

有关u的选择

- 经验法则：保证u近似等于实证分布中的95%的分位数。

三、蒙特卡罗模拟

- 采用蒙特卡罗模拟法，计算交易组合一天展望期的VaR：
  - 利用当前的市场变量对交易组合进行定价
  - 从Δx_i服从的多元正态分布中进行一次抽样
  - 由Δx_i的抽样计算出在交易日末的市场变量
  - 利用新产生的市场变量来对交易组合重新定价
  - 计算ΔP
  - 重复2-5步的计算，得出ΔP的概率分布

随机模拟的R语言实现

```
sim_norm_return <- rnorm(10000, m, s)
VaR3 <- -quantile(sim_norm_return, 0.05)
print(VaR3)


sim_return <- r[ceiling(runif(10000)*251)]
VaR4 <- -quantile(sim_return, 0.05)
print(VaR4)
```

随机模拟计算股票组合的VaR

- 首先，选择所有风险因子，设定其动态模型（可能需要估计均值、方差和相关系数等变量），例如股票价格服从如下随机过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{27}$$

- 其次，构造价格路径，例如上述随机微分方程的解为

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right] \tag{28}$$

with W_t denoting the cumulative innovations from 0 to t.

将上述过程离散化，

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \Delta t Z\right] \quad (29)$$

Δt = time interval between t and $t - 1$
Z = standard normal variable $N(0,1)$ such that

$$W_t = W_{t-1} + \sqrt{\Delta t} Z$$

利用均匀分布随机数，可以得出构造价格路径所需要的随机数据。

- 当有多个风险资产 $S_t^1, \ldots, S_t^n$ 从式（27）的几何布朗运动随机过程，相关系数为ρ_{ij}，均值为μ_i，方差为$\sigma_{i,}$ 可将多变量方程写为

$$E[W_t^i W_t^j] = \rho_{ij} t$$

$$S_t^i = S_0^i \exp\left[\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t + \sqrt{t}\sigma_i X_i\right] \qquad (30)$$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$是多元正态随机向量，均值等于0，方差矩阵为Σ，$\Sigma_{ij} = E(XX^T) = \rho_{ij}$,

- 产生随机向量$X = (X_1, . . . , X_n)$的方法
  - 先产生n个正态随机变量随机数
  - 计算矩阵A，使得$\Sigma = AA^T$，例如

$$\sum = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & (1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & (1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

  - 产生随机向量

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & (1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = Y^1$$
$$X^2 = \rho Y^1 + (1-\rho^2)^{1/2} Y^2$$

- 最后，计算资产组合的价格和VAR

模拟10000次的价格路径，得到资产组合的价格经验分布，计算1%的分位数。

第一次作业

- 用R语言编程完成以下任务：
  – 比较正态分布、t分布的VaR的差异
  – 用极值分布计算投资组合的VaR
  – 随机模拟计算投资组合的VaR