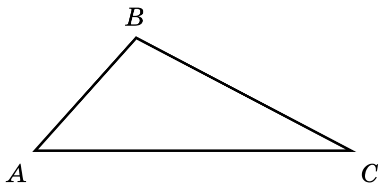
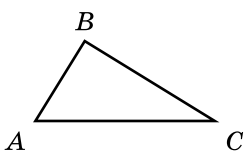
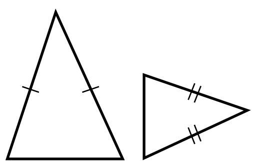
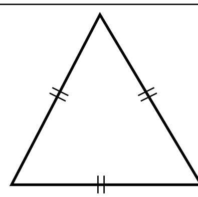
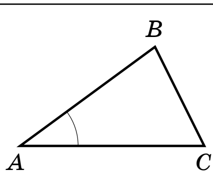
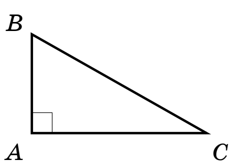
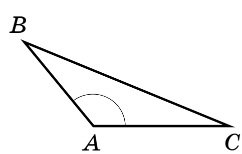
ГЕОМЕТРИЯ

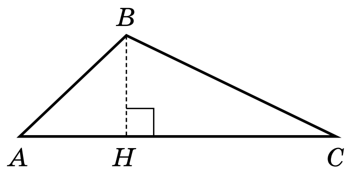
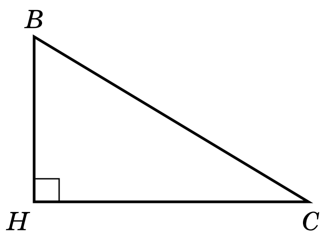
ПЛАНИМЕТРИЯ

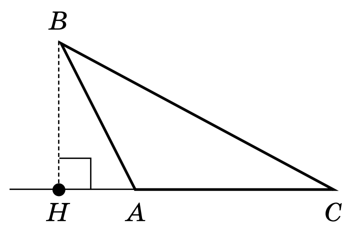
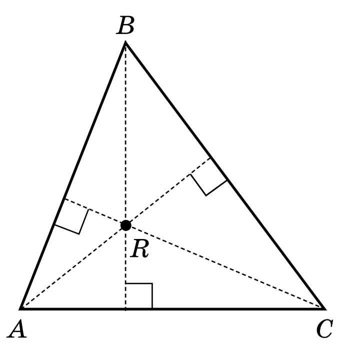
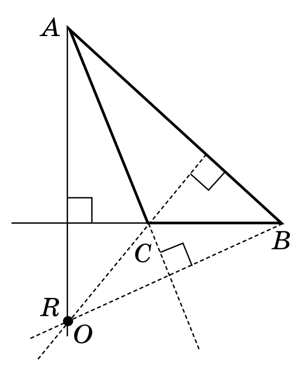
Треугольник

Треугольник — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют	 $\triangle ABC$, A, B, C — вершины; AB, BC, AC — стороны

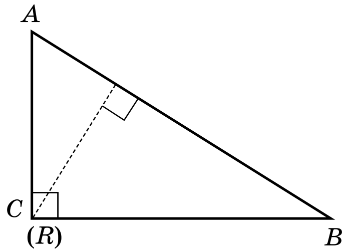
В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:		
		
разносторонний — все его стороны разные	**равнобедренный** — равны две стороны	**равносторонний (правильный)** — все стороны равны
В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:		
		
остроугольный (все углы острые)	**прямоугольный** (один из углов прямой)	**тупоугольный** (один из углов тупой)

Продолжение таблицы

<table>
<tr><td colspan="2">Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром. Положение ортоцентра R зависит от вида треугольника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>остроугольный
(внутри области треугольника)</td><td>тупоугольный
(вне области треугольника)</td></tr>
</table>

Окончание таблицы



прямоугольный (R совпадает с C)

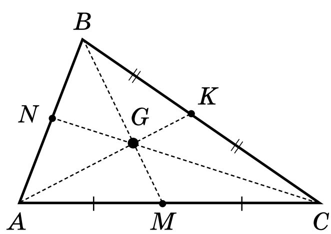
Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам.
То есть **наибольшая** высота проведена к **наименьшей** стороне, а **наименьшая** высота — к **наибольшей** стороне

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину с **серединой** противоположной стороны.

Свойство медианы треугольника

Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.
$BG : GM = 2 : 1$; $GC : GN = 2 : 1$; $AG : GK = 2 : 1$

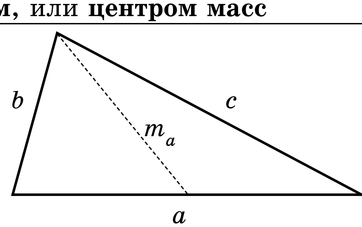
Задача.
а) $GM = 3$ см, BM — ?
Решение.
$GM = 3$ см, тогда $BG = 6$ см;
$BM = 6 + 3 = 9$ (см).
б) $AG = 12$ см, AK — ?
Решение.
$AG = 12$ см, $GK = 6$ см,
$AK = 12 + 6 = 18$ (см).
Ответ: а) 9 см; б) 18 см



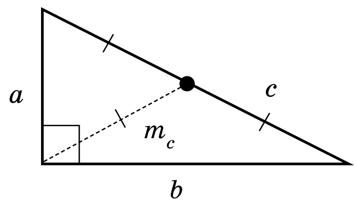
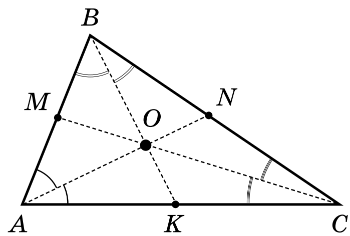
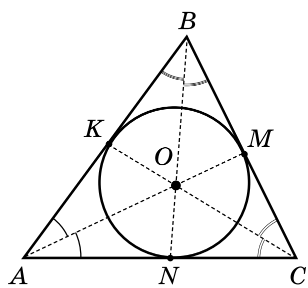
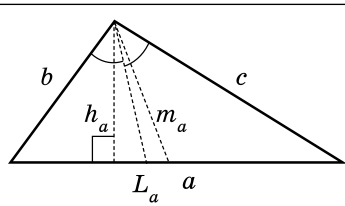
Медианы пересекаются в одной точке, она называется **центром**, или **центром масс**

Медиану можно вычислить по формуле:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$



Окончание таблицы

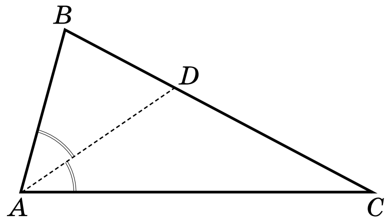
$m_c = \frac{1}{2}c$ Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна её половине	
Биссектриса угла треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны и **делящий угол пополам**	
Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Точка O — центр вписанной окружности, AM, CK и BN — биссектрисы	
Свойство биссектрисы треугольника Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$; AD — биссектриса
$m_a \geq L_a \geq h_a$, где m — медиана, L — биссектриса, h — высота	

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>

Задача.
$BD = 6$ см, $DC = 8$ см,
AD — биссектриса;
$P_{\triangle ABC} = 35$ см.
AB — ? AC — ?
Решение.
$AB + AC = P_{\triangle ABC} - BC =$
$= 35 - (6 + 8) = 21$ (см).
По свойству биссектрисы:
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$;
$\left.\begin{matrix} AB = 3x \\ AC = 4x \end{matrix}\right\} 21$
$7x = 21$; $x = 3$; $AB =$
$= 3 \cdot 3 = 9$ (см);
AC = 4 · 3 = 12 (см).
Ответ: 12 см

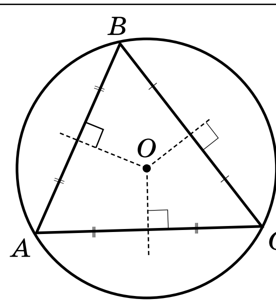
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Серединный перпендикуляр — прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.
Три серединных перпендикуляра в треугольнике пересекаются в одной точке.
Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**

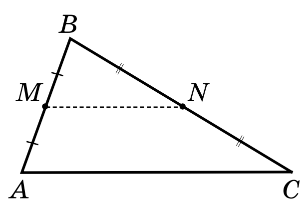
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.
Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне, а её длина равна половине третьей стороны

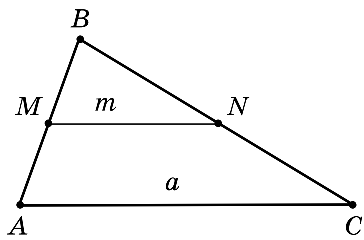
</td><td>

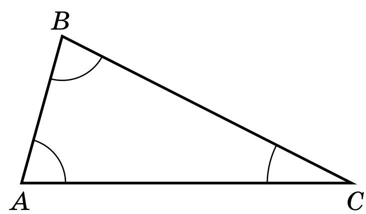
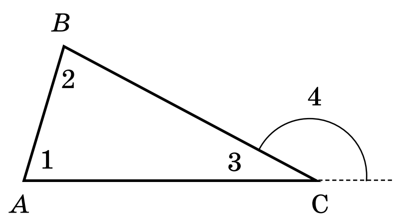


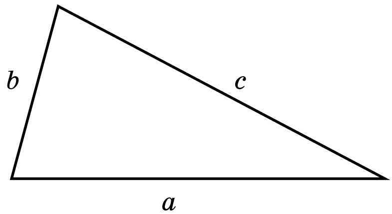
$MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$

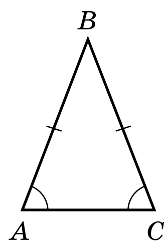
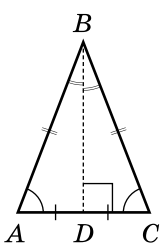
</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Задача. Средняя линия равностороннего треугольника равна 2,5 см. *Найти*: его периметр. *Решение.* По теореме о средней линии $m = 0{,}5a$, тогда $a = 2m = 5$ см. $P = 3a = 15$ см. *Ответ*: 15 см	

Свойства сторон и углов треугольника	
Сумма углов треугольника равна 180° $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	
Внешний угол треугольника	
Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника. $\angle 4$ — внешний (при вершине C)	
Свойства внешнего угла треугольника	
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним	$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним	$\angle 4 > \angle 1$, $\angle 4 > \angle 2$

<table>
<tr><th colspan="2">Неравенство треугольника</th></tr>
<tr><td>$a < b + c$
$a > |b - c|$</td><td>
</td></tr>
</table>

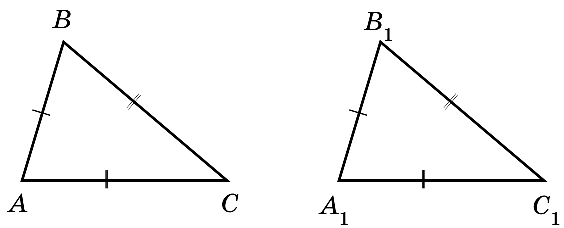
<table>
<tr><th colspan="3">Равнобедренный треугольник</th></tr>
<tr><td colspan="2">ΔABC — равнобедренный ($AB = BC$)
AC — основание, AB и BC — боковые стороны</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Свойства</td><td>Признаки</td></tr>
<tr><td>Если в ΔABC
$AB = BC$,
то $\angle A = \angle C$
(углы при основании равны)</td><td>Если в ΔABC
$\angle A = \angle C$,
то $AB = BC$
(равнобедренный треугольник)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Если ΔABC — равнобедренный и BD — медиана, проведённая к основанию, то BD — высота и биссектриса</td><td>Если в треугольнике совпадают:
а) высота и медиана
или
б) высота и биссектриса
или
в) медиана и биссектриса,
то треугольник является равнобедренным</td></tr>
</table>

Равенство треугольников

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ $\Leftrightarrow$

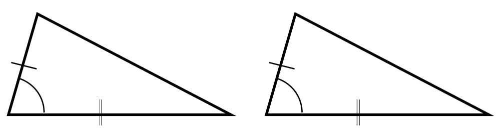
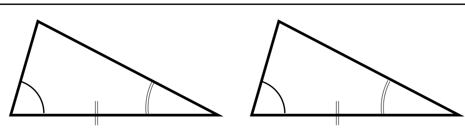
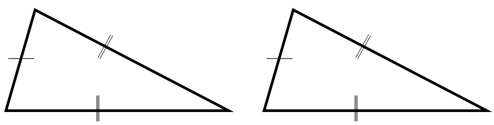
$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$
$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$
$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$

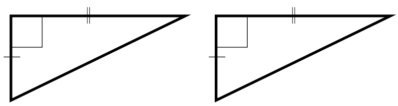
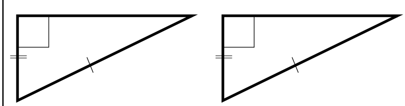
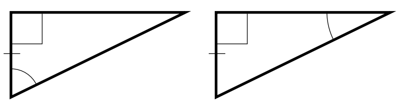
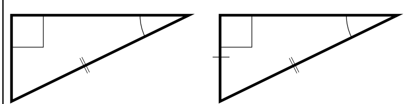


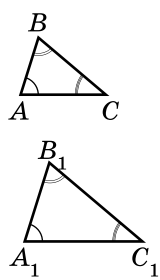
Свойства равных треугольников

1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.).
2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

Признаки равенства треугольников

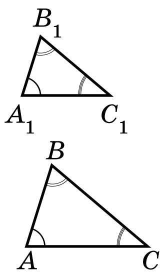
По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

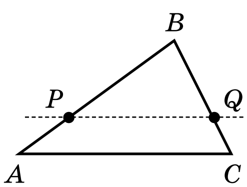
Признаки равенства прямоугольных треугольников	
По двум катетам	По гипотенузе и катету
	
По катету и острому углу	По гипотенузе и острому углу
	

Подобие треугольников	
Подобные треугольники — это треугольники, у которых соответствующие **углы равны,** а соответствующие **стороны пропорциональны.** $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$	

Свойства подобных треугольников	
$\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$	**Отношение периметров** равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия
$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$	**Отношение площадей** подобных треугольников равно **квадрату** коэффициента подобия

Признаки подобия треугольников

	Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум равным углам
	Если $\angle A = \angle A_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
	Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по трём пропорциональным сторонам

	Если $PQ \parallel AC$, то $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному

Задача.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; $AB : BC : AC = 2 : 6 : 7$.

$A_1C_1 - A_1B_1 = 35$ см.

Найти: A_1B_1; B_1C_1 и A_1C_1.

Решение.

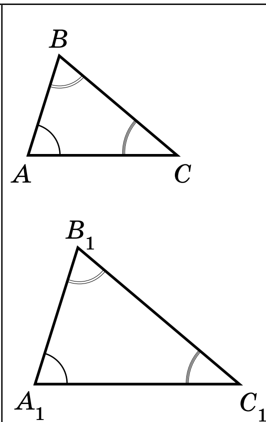
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 2 : 6 : 7$; $A_1B_1 = 2x$; $B_1C_1 = 6x$; $A_1C_1 = 7x$;

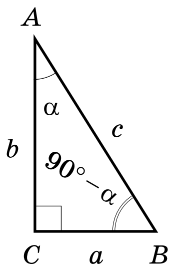
$7x - 2x = 35$; $x = 7$;

$A_1B_1 = 14$; $B_1C_1 = 42$ и $A_1C_1 = 49$.

Ответ: 14; 42; 49.



Соотношение между элементами прямоугольного треугольника



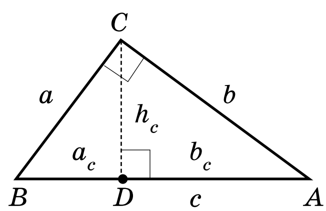
$\angle C = 90°$, a, b — катеты,
c — гипотенуза, $\angle A = \alpha$

$\boxed{a^2+b^2=c^2}$ — теорема Пифагора

$\boxed{\angle B = 90°-\alpha;\ c > a;\ c > b}$

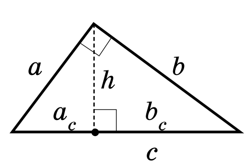
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$
$a = c\sin\alpha$	$b = c\cos\alpha$	$a = b\operatorname{tg}\alpha$	$b = a\operatorname{ctg}\alpha$

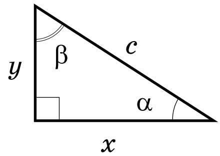
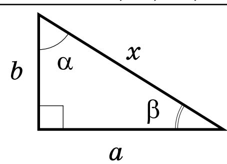
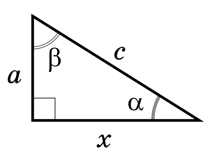
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$
$\Delta CBD \sim \Delta ABC$
$\Delta ACD \sim \Delta CBD$
CD — высота,
$AB = c$



$h^2 = a_c \cdot b_c$
$a^2 = c \cdot a_c$
$b^2 = c \cdot b_c$

Задача.
$a_c = 9$; $b_c = 16$; a, b, c, h — ?
Решение.
$h^2 = 9\cdot 16$; $h = \sqrt{9\cdot 16} = 3\cdot 4 = 12$;
$c = 9 + 16 = 25$;
$a^2 = a_c\cdot c$; $a = \sqrt{9\cdot 25} = 3\cdot 5 = 15$;
$b^2 = b_c\cdot c$; $b = \sqrt{16\cdot 25} = 4\cdot 5 = 20$.
Ответ: 15; 20; 25; 12



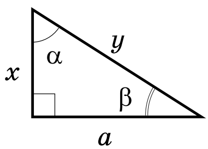
<table>
<tr><th colspan="3">Решение прямоугольных треугольников</th></tr>
<tr><th>Дано</th><th>Найти</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>
c — гипотенуза;
α — острый угол</td><td>x, y, β</td><td>$\beta = 90° - \alpha$;
$x = c\cos\alpha$;
$y = c\sin\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Пример 1.
Дано: $c = 2$, $\alpha = 20°$.
Найти: β, x, y.
Решение.
$\beta = 90° - 20° = 70°$; $x = c\cos 20° = 2 \cdot 0{,}9397 \approx 1{,}88$;
$y = c\sin 20° = 2 \cdot 0{,}3420 \approx 0{,}68$.
Ответ: 70°; 1,88; 0,68</td></tr>
<tr><td>
a — катет; b — катет</td><td>x, α, β</td><td>$x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a}$
или $\beta = 90° - \alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Пример 2.
Дано: $a = 11$, $b = 60$.
Найти: c, α, β.
Решение.
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{11}{60} \approx 0{,}833$.
По таблице Брадиса $\alpha \approx 10°$; $\beta = 90° - 10° = 80°$;
$c = \sqrt{11^2 + 60^2} = \sqrt{3721} = 61$.
Ответ: $c = 61$; $\alpha = 10°$; $\beta = 80°$</td></tr>
<tr><td>
c — гипотенуза;
a — катет</td><td>x, α, β</td><td>$x = \sqrt{c^2 - a^2}$;
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$
или $\beta = 90° - \alpha$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><td colspan="3">

Пример 3.
Дано: $a = 84$, $c = 85$. *Найти*: x, α, β.
Решение.
$x = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$; $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{84}{85} \approx 0,9882$;
$\alpha \approx 81°$; $\beta = 90° - 81° = 9°$.
Ответ: $x = 0,9882$; $\alpha = 81°$; $\beta = 9°$.

</td></tr>
<tr><td>



a — катет;
α — острый угол,
противолежащий a

</td><td>

x, y, β

</td><td>

$\beta = 90° - \alpha$;
$x = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;
$y = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Пример 4.
Дано: $a = 9$, $\alpha = 68°$. *Найти*: β, x, y.
Решение.
$\beta = 90° - 68° = 22°$; $y = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin 68°} \approx \dfrac{9}{0,9277} \approx 9,71$;
$x = a\ \mathrm{tg}\ 22° \approx 9 \cdot 0,4040 \approx 3,64$.
Ответ: 22°; 3,64; 9,71.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

</td></tr>
<tr><td>

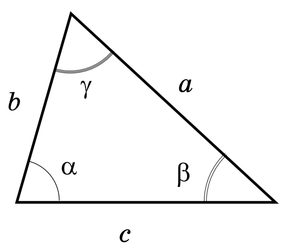
Теорема синусов
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2c\cos\beta;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\cos\alpha$$

</td><td>



R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c

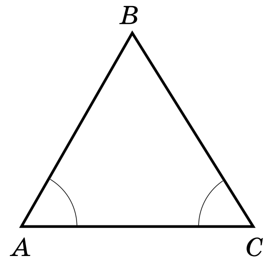
</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы

<table>
<tr>
<td>

Задача 1.
Дано: ΔABC,
$\angle A = \angle C = 67°30'$, $AC = 10\sqrt{2}$.
Найти: R.
Решение.
$\angle B = 180° - (67°30' + 67°30') = 45°$;
$R = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2\cdot\sin 45°} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 10$
Ответ: 10.

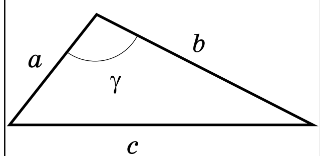
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Задача 2.
Дано: $a = 8$, $c = 13$, $\gamma = 120°$.
Найти: b.
Решение.
Пусть $b = x$, по теореме косинусов:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$;
$\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$;
$8^2 + x^2 - 2\cdot 8\cdot x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 13^2$;
$x^2 + 8x - 105 = 0$; $x = b = 15$.
Ответ: 15.

</td>
<td>

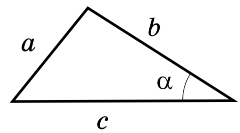


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

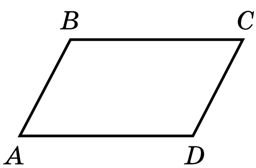
Следствия из теоремы косинусов
1. Косинус угла можно вычислить по формуле:
$\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.
2. Определение **вида треугольника** по теореме косинусов:
если $a^2 + b^2 < c^2$, γ — тупой угол, треугольник тупоугольный; если $a^2 + b^2 > c^2$, γ — острый угол, треугольник остроугольный;
если $a^2 + b^2 = c^2$, $\gamma = 90°$, то треугольник прямоугольный.
3. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне a, равна: $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$

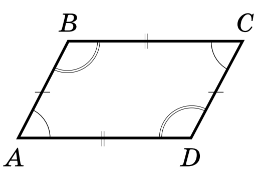
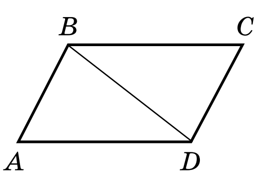
</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

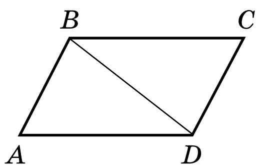
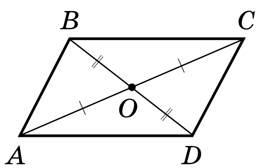
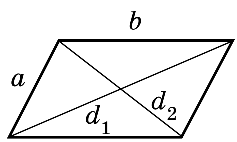
Задача 3. *Дано*: $a = 5$, $b = 5\sqrt{3}$; $c = 10$. *Найти*: α. *Решение*. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{10^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\angle\alpha = 30°$. *Ответ*: $30°$.	

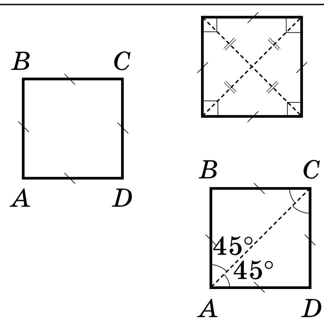
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

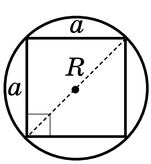
Параллелограмм	
	**Параллелограмм** — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Leftrightarrow$ $ABCD$ — параллелограмм

	Свойства	**Признаки**
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм. Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = DC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Если $ABCD$ — параллелограмм, BD — диагональ, то $\Delta ABD = \Delta CDB$	—

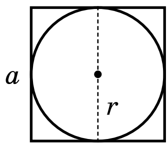
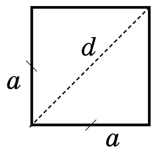
Окончание таблицы

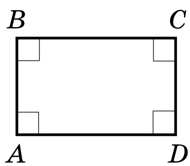
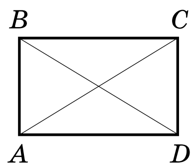
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A + \angle B = 180°$ (сумма соседних углов равна 180°)	—
	Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, то $AO = OC$; $BO = OD$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AO = OC$, $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов его смежных сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 =$ $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

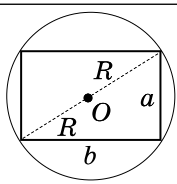
Квадрат	
	**Квадрат** — прямоугольник, у которого все стороны равны: $AB = BC = CD = AD$. Или **квадрат** — ромб, у которого все углы прямые: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

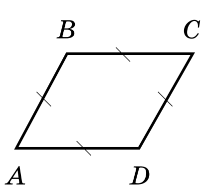
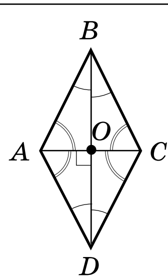
Свойства квадрата	
	Вокруг квадрата можно описать окружность: $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{d}{2}$

Окончание таблицы

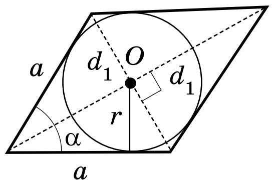
	В квадрат можно вписать окружность $r = \dfrac{a}{2}$
	Диагональ в $\sqrt{2}$ раз больше стороны, т. е. $d = a\sqrt{2}$ и $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$

Прямоугольник		
		**Прямоугольник** — параллелограмм, у которого все углы прямые

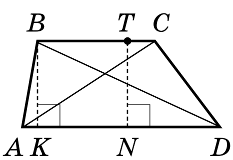
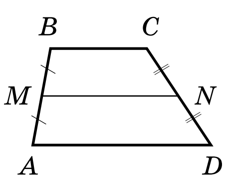
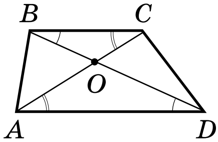
Свойства	**Признаки**
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (диагонали равны)	1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник. 2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник
	Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность: $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

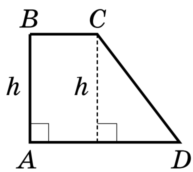
Ромб		
		**Ромб** — параллелограмм, у которого все стороны равны

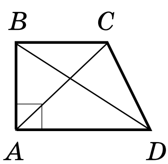
Окончание таблицы

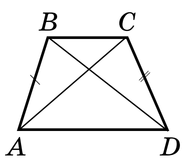
Свойства	**Признаки**
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, то: а) $AC \perp BD$; б) диагонали являются биссектрисами углов	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб
	В любой ромб можно вписать окружность: $r = \frac{h}{2} = \frac{a\sin\alpha}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}$

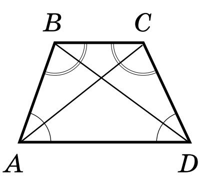
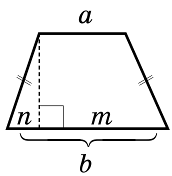
Трапеция

	**Трапеция** — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. $AD \parallel BC$, AD и BC — основания; AB и CD — боковые стороны; AC и BD — диагонали; BK и TN — высоты
Средняя линия трапеции	
	**Средняя линия трапеции** — отрезок, соединяющий середины боковых сторон. MN — средняя линия **Свойства:** $\begin{matrix} MN \parallel BC \\ MN \parallel AD \end{matrix}$; $MN = \frac{BC + AD}{2}$
	$\Delta BOC \sim \Delta DOA$; $\frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD}$

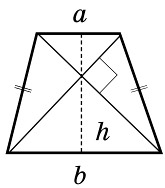
Прямоугольная трапеция	
	**Прямоугольная трапеция** — это трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям: $AB \perp AD$; $AB \perp BC$; $AB = h$

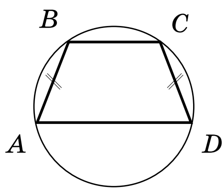
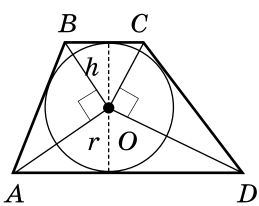
Свойства		
	**Разность квадратов диагоналей** равна разности квадратов оснований: $BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2$	**Сумма квадратов диагоналей** равна сумме квадратов оснований и удвоенного квадрата высоты: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB^2$

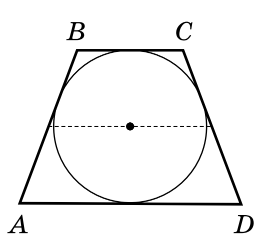
Равнобокая трапеция	
	**Равнобокая трапеция** — трапеция с равными боковыми сторонами

Свойства	
 	1. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$; углы при основании равны. 2. $AC = BD$; диагонали равны. Высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки m и n длиной $m = \dfrac{a+b}{2}$ (равен средней линии $n = \dfrac{b-a}{2}$)

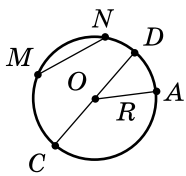
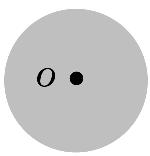
Окончание таблицы

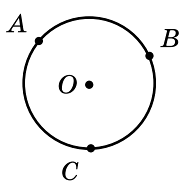
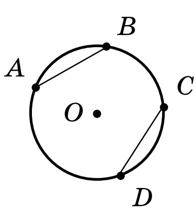
<table>
<tr><td></td><td>Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии: $h = \dfrac{a+b}{2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Трапеция и окружность</th></tr>
<tr><td></td><td>Если около трапеции описана окружность, эта трапеция равнобокая.
Обратно: около равнобокой трапеции можно описать окружность</td></tr>
<tr><td>
$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$
ΔAOB и ΔCOD —
прямоугольные</td><td>Если в трапецию вписана окружность, то:
1) сумма оснований равна сумме боковых сторон: $AB+CD = BC+AD$;
2) радиус окружности равен половине высоты: $r = \dfrac{h}{2}$;
3) если соединить центр окружности с вершинами трапеции, треугольники, прилежащие к боковым сторонам, будут прямоугольными</td></tr>
</table>

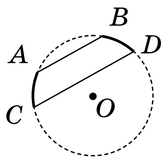
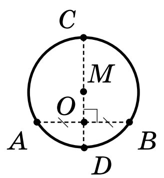
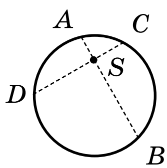
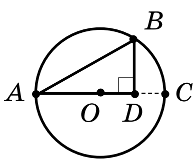
<table>
<tr><td>Задача.
В трапецию вписана окружность,
$AB = CD = 8$ см.
Найти: среднюю линию трапеции.
Решение. В трапецию вписана окружность, значит,
$AB + CD = BC + AD = 8 + 8 = 16$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Средняя линия составит: $\dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (см).
Ответ: 8 см</td></tr>
</table>

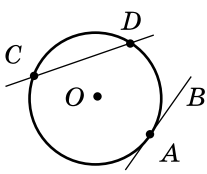
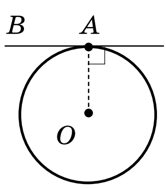
Окружность и круг

	**Окружность** — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково. O — центр окружности. **Радиус окружности** — расстояние от центра до точки на окружности. OA, OC, OD — радиусы. Обозначается R или r. **Хорда** — отрезок, соединяющий две точки на окружности. MN, CD — хорды. **Диаметр** — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d). $D = 2R$, $CD = 2OA$
	**Круг** — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

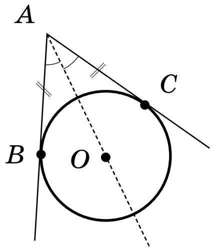
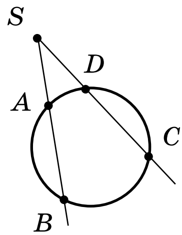
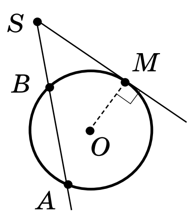
Окружность, хорды и дуги	
	**Дуга окружности** — часть окружности, ограниченная двумя её точками. $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$
Свойства	
	Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$. Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$

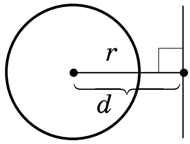
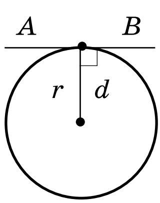
Окончание таблицы

	Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$
	CD — диаметр, AB — хорда. Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$; если $AM = MB$, то $CD \perp AB$
	Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$
	Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC;$ $BD^2 = AD \cdot DC$

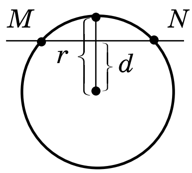
Окружность, касательные и секущие	
	**Касательная** — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. AB — касательная. **Секущая** — прямая, имеющая с окружностью две общие точки. CD — секущая
Свойства	
	$OA \perp AB$ Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

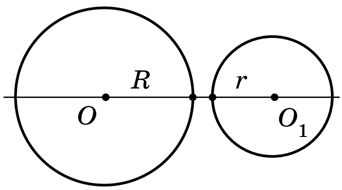
Окончание таблицы

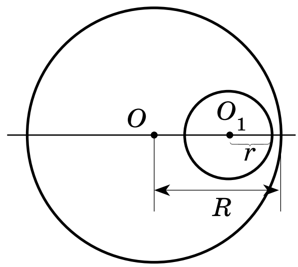
	$AB = AC$; OA — биссектриса $\angle BAC$. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то: а) отрезки касательных равны; б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности
	Если SB и SC — секущие, то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$
	Если SM — касательная, SA — секущая, то $SM^2 = SB \cdot SA$

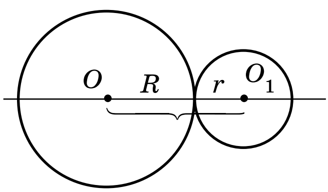
Взаимное расположение прямой и окружности	
d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности	
	$d > r$; общих точек нет
	$d = r$; одна общая точка; AB — касательная

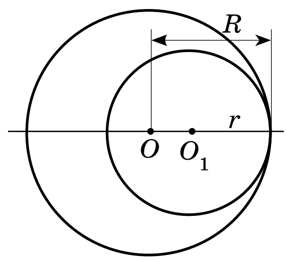
Окончание таблицы

<table>
<tr><td>
</td><td>$d < r$;
две общие точки;
MN — секущая</td></tr>
</table>

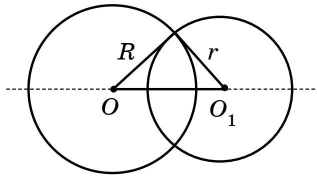
<table>
<tr><th colspan="2">Взаимное расположение двух окружностей</th></tr>
<tr><td colspan="2">OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Окружности не имеют общих точек</th></tr>
<tr><td>

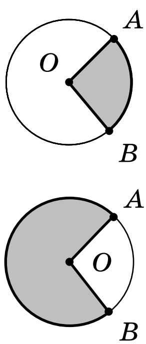
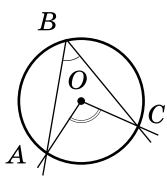
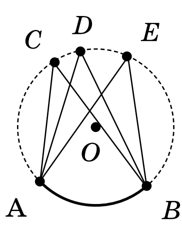
Окружности лежат одна вне другой
$R+r < OO_1$</td><td>

Одна окружность лежит внутри другой
$OO_1 < R-r$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Окружности касаются (одна общая точка)</th></tr>
<tr><td>

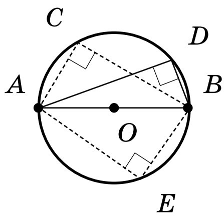
Касаются внешне
$OO_1 = R+r$</td><td>

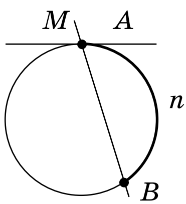
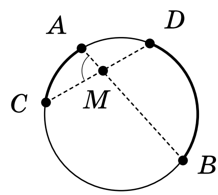
Касаются внутренне
$OO_1 = R-r$</td></tr>
</table>

Окружности пересекаются (две общие точки)
$R - r < OO_1 < R + r$


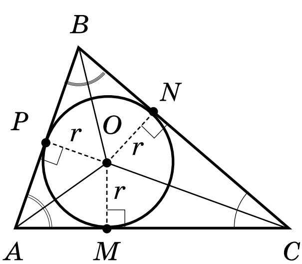
Углы в окружности	
	**Центральный угол** — плоский угол с вершиной в центре окружности. $\angle AOB$ — центральный угол. $\angle AOB = \cup AB$. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается
	**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её. $\angle ABC$ — вписанный. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, и половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$; $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$
	Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$

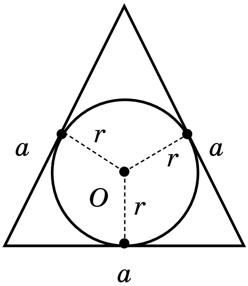
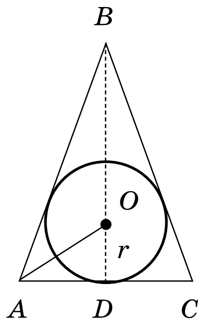
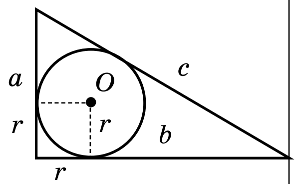
Окончание таблицы

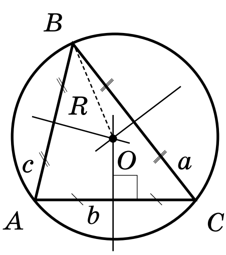
	Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$

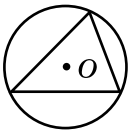
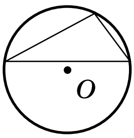
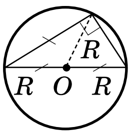
Угол между касательной и секущей	**Угол между хордами**
 MA — касательная; MB — секущая. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$	 AB и CD — хорды. $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

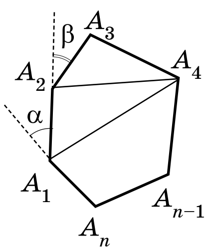
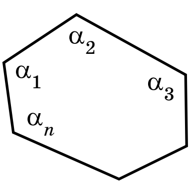
Вписанная окружность	
	Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон. Центр этой окружности — точка пересечения **биссектрис** углов треугольника. $r = \frac{2S}{a+b+c}$ или $r = \frac{S}{p}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, S — площадь треугольника, p — полупериметр, a, b, c — длины сторон

Равносторонний треугольник	**Равнобедренный треугольник**	**Прямоугольный треугольник**
 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот	 $AB = BC$ BD — высота, медиана, биссектриса, высота. $OD = r$	 a и b — катеты, c — гипотенуза $r = \frac{a+b+c}{2}$, $a+b = 2R+2r$, R — радиус описанной окружности

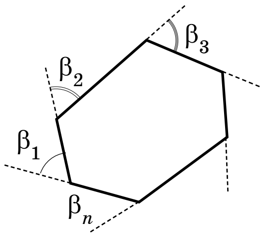
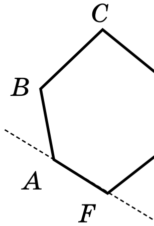
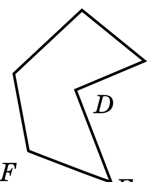
Описанная окружность	
	Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все **его вершины**. Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. $OA = OB = OC = R$
В произвольном треугольнике: $R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{a}{2\sin A}$. В равностороннем треугольнике: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. В прямоугольном треугольнике: $R = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза треугольника	

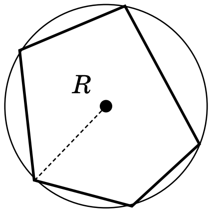
Положение точек описанной окружности в зависимости от вида треугольника	
Остроугольный	
	Центр — во внутренней области треугольника
Тупоугольный	
	Центр — вне области треугольника
Прямоугольный	
	Центр — совпадает с серединой гипотенузы $R = \frac{c}{2} = m_c$

Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника

Сумма углов выпуклого многоугольника	
	**Многоугольник** — простая замкнутая ломаная. Соседние звенья не лежат на одной прямой. A_1, A_2, ... A_{n-1}, A_n — вершины; A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — стороны; A_1A_4, ... A_nA_4 — диагонали; $\angle A_1$, $\angle A_2$, ..., $\angle A_n$ — внутренние углы; α, β, ... — внешние углы многоугольника
	Сумма углов выпуклого n-угольника $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_n = 180°(n-2)$

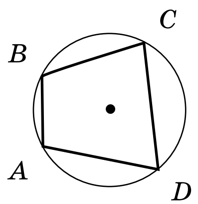
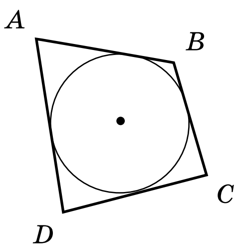
Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Сумма внешних углов n-угольника (по одному при вершине)
$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n = 360°$</td>
</tr>
<tr>
<td>Выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей сторону

</td>
<td>Невыпуклый многоугольник.
Прямая, содержащая сторону многоугольника, делит его плоскость на части.

</td>
</tr>
</table>

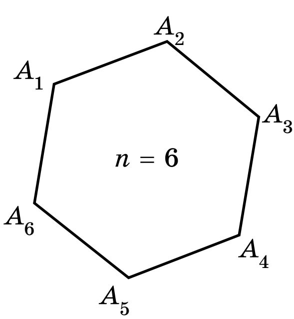
<table>
<tr>
<th colspan="2">Вписанные и описанные многоугольники</th>
</tr>
<tr>
<td>Вписанный многоугольник


Все вершины лежат на окружности</td>
<td>Описанный многоугольник

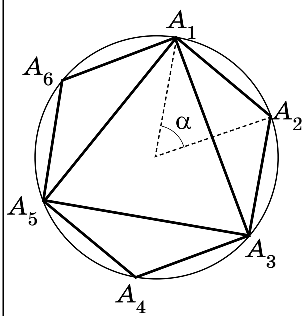

Все стороны — касательные к окружности.
$S = \dfrac{P \cdot r}{2}$,
где P — периметр, r — радиус окружности</td>
</tr>
</table>

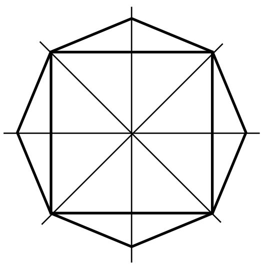
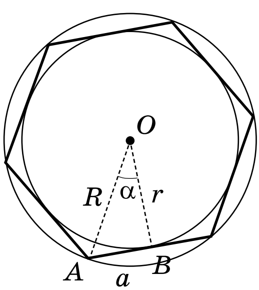
Вписанные и описанные четырёхугольники	
	$ABCD$ — вписанный четырёхугольник, тогда $\angle A+\angle C = 180°$ и $\angle B+\angle D = 180°$
	$ABCD$ — описанный четырёхугольник, тогда $AB+CD = AD+BC$

Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника

Правильные многоугольники	
	Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны и углы равны. Каждый угол правильного n-угольника равен: $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>

$n = 6$ и $n = 3$</td><td>Внешний угол правильного n-угольника равен $\beta_n = \dfrac{360^\circ}{n}$.
Периметр правильного n-угольника со стороной a: $P_n = a \cdot n$.
Площадь правильного n-угольника со стороной a: $S_n = \dfrac{na^2}{4\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)}$</td></tr>
<tr><td>
$n = 4$ и $n = 8$</td><td>Площадь правильных
а) треугольника $S_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
б) четырёхугольника (квадрата) $S_4 = a^2$;
в) шестиугольника $S_6 = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Вписанная окружность касается всех сторон правильного многоугольника.
Описанная окружность проходит через все вершины правильного треугольника</td></tr>
<tr><td colspan="2">R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности,
a — сторона правильного многоугольника, S_n — площадь, P_n — периметр</td></tr>
</table>

Связь между P_n, R, r, S_n и a

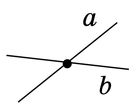
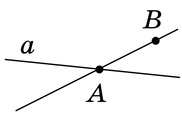
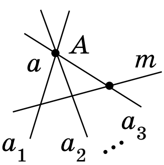
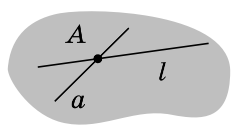
Количество сторон многоугольника	R	r	S
n	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$\dfrac{1}{2}P_n r$
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
6	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

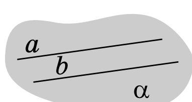
Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r

Количество сторон многоугольника	Зависимость a_n от R и n	Зависимость a_n от r и n
n	$a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \dfrac{2}{3}r\sqrt{3}$

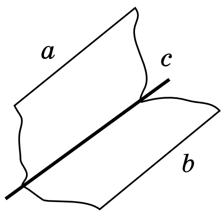
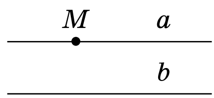
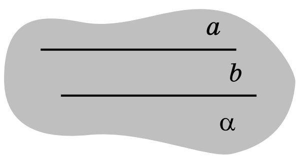
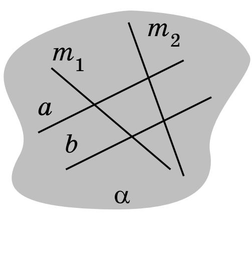
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

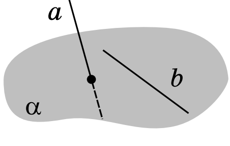
Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые

Пересекающиеся прямые	
	**Пересекающиеся прямые** — две прямые, имеющие только одну общую точку
Признаки	**Свойства**
Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая ей не принадлежит, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки, **пересекаются** 	Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много прямых, пересекающих данную прямую 
	 Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и при этом только одну

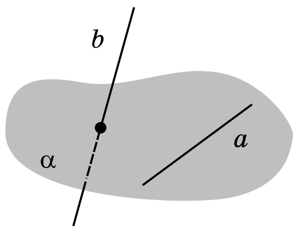
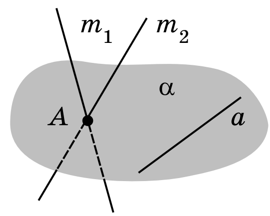
Параллельные прямые	
 $a \parallel b$	**Параллельные прямые** — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек

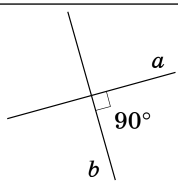
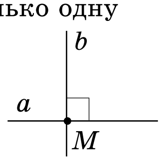
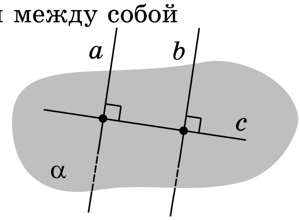
Окончание таблицы

Признаки	**Свойства**
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны. Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$ 	Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при этом только одну 
	Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при этом только одну
	Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат с ними в одной плоскости. $a \parallel b$; $m_1 \cap a$; $m_1 \cap b$; $m_2 \cap a$; $m_2 \cap b$; $a, b, m_1, m_2 \subset \alpha$

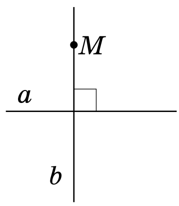
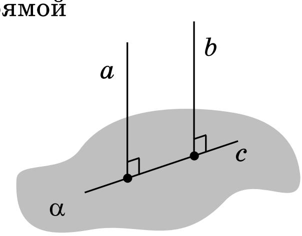
Скрещивающиеся прямые	
	**Скрещивающиеся прямые** — две прямые, не лежащие в одной плоскости

Окончание таблицы

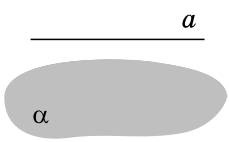
<table>
<tr><th>Признаки</th><th>Свойства</th></tr>
<tr><td>Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся
</td><td>1. Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много скрещивающихся прямых.

2. Для любых двух скрещивающихся прямых в пространстве существует третья прямая, которая является скрещивающейся для каждой из данных двух прямых</td></tr>
</table>

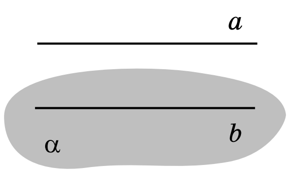
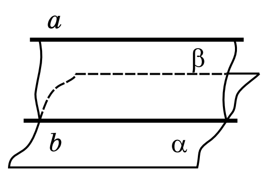
<table>
<tr><th colspan="2">Перпендикулярные прямые</th></tr>
<tr><td></td><td>Перпендикулярные прямые — две прямые, которые пересекаются под углом 90°</td></tr>
<tr><td>Существование и единственность</td><td>Перпендикулярность и параллельность</td></tr>
<tr><td>Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну
</td><td>Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой

$a \perp c,\ b \perp c \Rightarrow a \parallel b$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

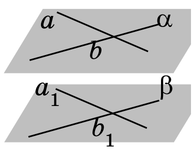
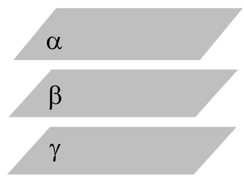
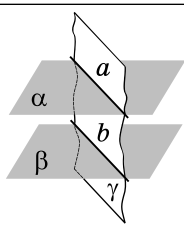
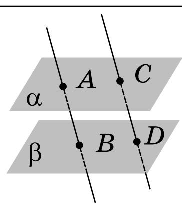
Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну  	Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой  $a \perp c,\ a \parallel b \Rightarrow b \perp c$

Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства

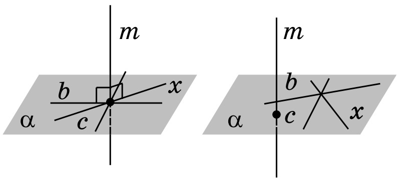
 	Прямая и плоскость **параллельны**, если они не имеют общих точек. $a \parallel \alpha$

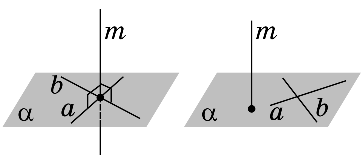
Признак	Свойство
 Если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel b$. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна всей плоскости	 Если $a \parallel \alpha$, β проходит через a, β пересекает α по b, то $a \parallel b$. Если через прямую, параллельную плоскости, провести вторую плоскость, которая пересекает первую, то прямая пересечения плоскостей будет параллельна первой прямой

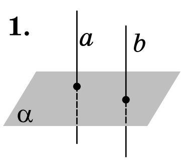
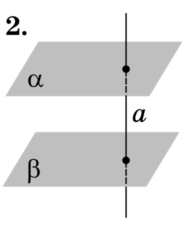
Параллельность плоскостей, признаки и свойства

Параллельность плоскостей	
	Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек. $\alpha \parallel \beta$
Признаки	**Свойства**
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны	Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой
Прямые обоих плоскостей пересекаются. Если $a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$ ($a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$), то $\alpha \parallel \beta$ 	Если $\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \gamma$ 
	Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны. Если $\alpha \parallel \beta$ и плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a, плоскость γ пересекает плоскость β по прямой b, то $a \parallel b$
	Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, равны. Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$, ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), то $AB = CD$

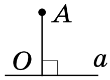
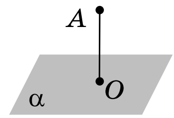
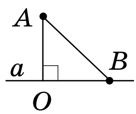
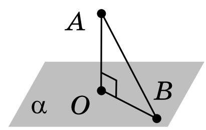
Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах

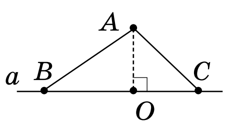
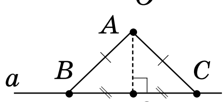
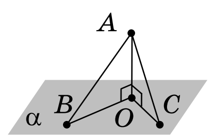
	Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна **любой** прямой, лежащей в этой плоскости: $m \perp \alpha \Leftrightarrow m \perp x$, x — любая прямая плоскости α

Признак перпендикулярности прямой и плоскости	
	Если $a \perp m$ и $b \perp m$ (a и b лежат в плоскости α и пересекаются), то $a \perp \alpha$. Если прямая перпендикулярна **двум** пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости		
1. 	Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой. Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $\alpha \perp b$	Если прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны. Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$
2. 	Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и второй. Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$	Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

Перпендикуляр и наклонная

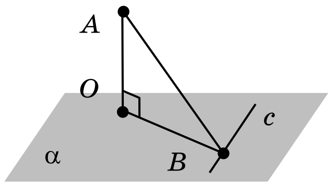
На плоскости	**В пространстве**
 $AO \perp a$, $O \in a$ AO — перпендикуляр из точки A к прямой a	 $AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$ AO — перпендикуляр из точки A на плоскость α
 AO — расстояние от точки A до прямой a; AB — наклонная	 AO — расстояние от точки A до плоскости α; AB — наклонная
Перпендикуляр короче всякой наклонной. $AO < AB$	

OB — проекция наклонной AB на прямую a		OB — проекция наклонной AB на плоскость α
 	$AB > AC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BO > OC$ $AB = AC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BO = OC$	

Если из одной точки к одной прямой (плоскости) проведены две наклонные, то:

- равные наклонные имеют равные проекции;
- если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;
- бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию;
- из двух наклонных больше та, у которой проекция больше

Теорема о трёх перпендикулярах

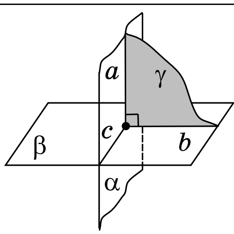


OB — проекция AB на плоскость α, c — прямая на плоскости α, $OB \perp c$	$\Leftrightarrow$	$AB \perp c$

Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.

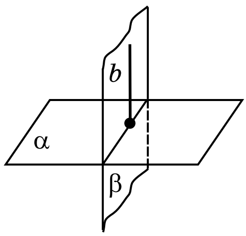
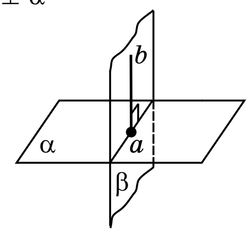
Обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции прямой

Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства

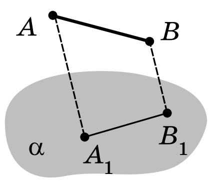
	$\alpha \perp \beta$	$\Leftrightarrow$	α пересекает β по прямой c γ пересекает α по прямой a γ пересекает β по прямой b $a \perp b$, $\gamma \perp c$

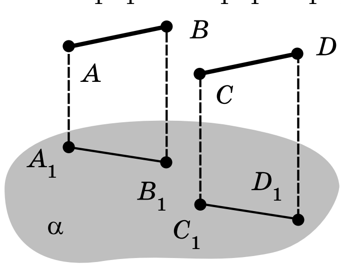
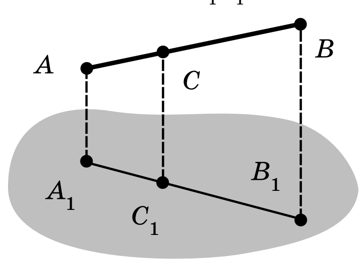
Две пересекающиеся плоскости называют **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой их пересечения, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым

Признак перпендикулярности плоскостей	Свойство
Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны	Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости

<table>
<tr><th>Признак перпендикулярности плоскостей</th><th>Свойство</th></tr>
<tr><td>Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$
</td><td>Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), то $b \perp \alpha$
</td></tr>
</table>

Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

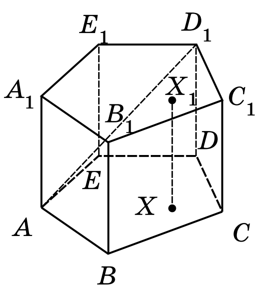
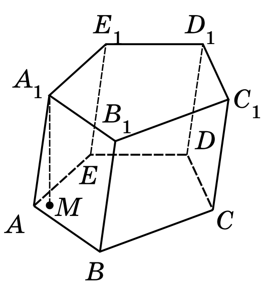
<table>
<tr><td></td><td>$AA_1 \parallel BB_1$.
Прямая AA_1 пересекает α в точке A_1, т. е. точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α.
$A \to A_1$; $B \to B_1$; $AB \to A_1B_1$.
Отрезок проектируется в отрезок $AB \to A_1B_1$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется.
Если $AB \parallel CD$ ($AB \to A_1B_1$; $CD \to C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$
</td><td>При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется.
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$
</td></tr>
</table>

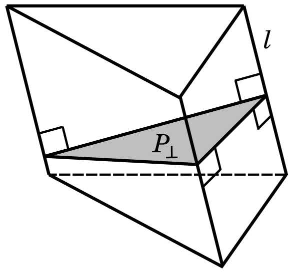
Следствие
Если C — середина AB, $AB \to A_1C_1$; $C \to C_1$, то C_1 — середина A_1B_1. Середина отрезка проектируется в середину отрезка

МНОГОГРАННИКИ

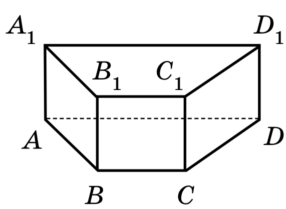
Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма

Призма	
 	**Призма** — многогранник, состоящий из плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы; AA_1, BB_1, CC_1, ... — боковые рёбра; ABB_1A_1, BB_1C_1C, ... — боковые грани; AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани; $A_1M \perp (ABC)$, $A_1M = H$ — высота)

Окончание таблицы

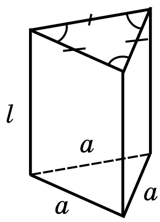
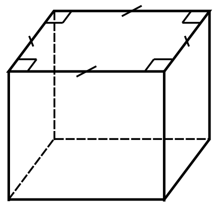
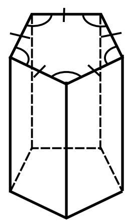
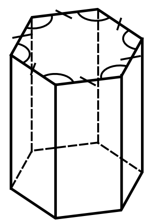
<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>1. Основания призмы равны.
2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.
3. Боковые рёбра параллельны и равны.
4. Боковые грани — параллелограммы</td><td>

Боковая поверхность — сумма площадей боковых граней или
$S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$,
где l — длина бокового ребра;
$P_{\perp}$ — сечение плоскостью, перпендикулярной к её боковым граням.
Полная поверхность — сумма боковой поверхности и площадей оснований:
$S = S_{бок} + 2S_{осн}$.
Объём призмы $V = S_{осн} \cdot H_{призмы}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Прямая призма</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Призма называется прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.
$AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, ...</td></tr>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>1. Высота равна боковому ребру.
2. Боковые грани — прямоугольники</td><td>Боковая поверхность:
$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$,
где $P_{осн}$ — периметр основания;
$H = AA_1$ — высота</td></tr>
</table>

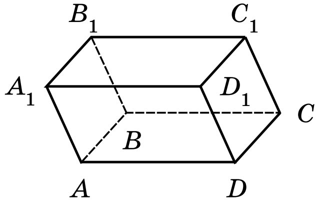
Окончание таблицы

	Полная поверхность: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. **Объём:** $V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$

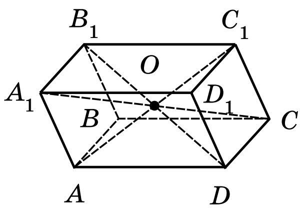
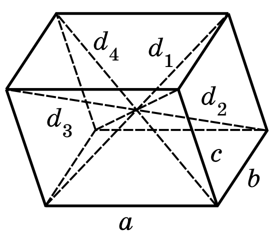
Правильная призма			
Прямая призма называется **правильной,** если её основания — правильные многоугольники			
			
треугольная	четырёх-угольная	пяти-угольная	шести-угольная

Площадь боковой поверхности правильной призмы	
$S_{\text{бок}} = S_{\text{гр}} \cdot n = aln$	$S_{\text{гр}}$ — площадь грани; n — количество граней; a — сторона основания; l — длина бокового ребра

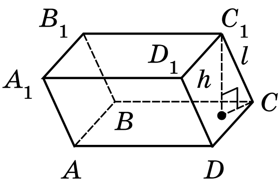
Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде

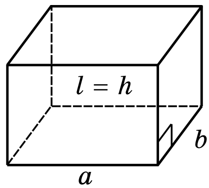
Параллелепипед	
	**Параллелепипед** — призма, в основании которой лежит параллелограмм

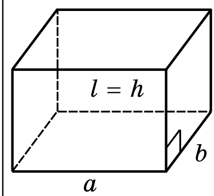
Окончание таблицы

	**Свойства:** 1. Все грани — параллелограммы. 2. Противолежащие грани параллельны и равны. 3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D. 4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда
	Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер. $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$. Существует три вида параллелепипедов. 1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы. 2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники. 3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы

Виды параллелепипедов

<table>
<tr><th>Наклонный</th><th>Прямой</th><th>Прямоуголь-ный</th></tr>
<tr>
<td>

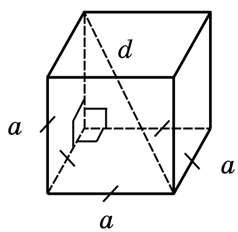
1. Боковые рёбра **не перпендикулярны** плоскостям основания.
2. Высота **не совпадает** с боковым ребром.
3. Все боковые грани — **параллелограммы**</td>
<td>

1. Боковые рёбра **перпендикулярны** основаниям.
2. Боковое ребро **совпадает** с высотой.
3. В основаниях — **параллелограммы.**
4. Все боковые грани — **прямоугольники**</td>
<td>

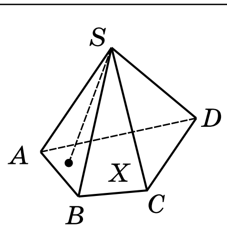
1. Боковые рёбра **перпендикулярны** основаниям.
2. Боковое ребро **совпадает** с высотой.
3. Оба основания и боковые грани — **прямоугольники**</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Площадь боковой поверхности параллелепипеда</td></tr>
<tr>
<td>$S_{бок} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B})$</td>
<td>$S_{бок} = 2(a+b)\cdot l$</td>
<td>$S_{бок} = 2(a+b)\cdot l$</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Площадь полной поверхности параллелепипеда</td></tr>
<tr>
<td>$S_{полн} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B} + S_{ABCD})$</td>
<td>$S_{полн} = 2(a+b)\cdot l + 2S_{осн}$</td>
<td>$S_{полн} = 2(ab+al+bl)$</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Объём параллелепипеда</td></tr>
<tr>
<td>1. Произведение площади основания $S_{осн}$ на высоту h: $V = S_{осн}\cdot h$</td>
<td>Произведение площади основания $S_{осн}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{осн}\cdot l$</td>
<td>Произведение трёх измерений: $V = abl$</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

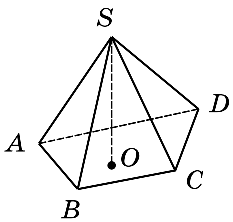
Наклонный	Прямой	Прямоугольный
2. Произведение площади перпендикулярного сечения $S_{\perp}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\perp} \cdot l$		

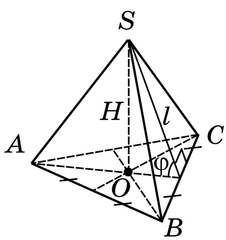
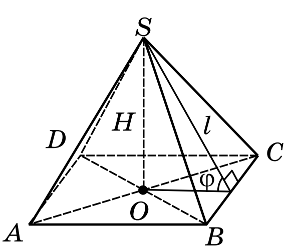
Куб	
 	**Куб** — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны. **Свойство:** Все боковые грани — квадраты. **Формулы** 1. Диагональ: $d = a\sqrt{3}$. 2. Площадь: $S_{\text{бок}} = 4a^2$; $S_{\text{полн}} = 6a^2$. 3. Объём: $V = a^3$ или $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида

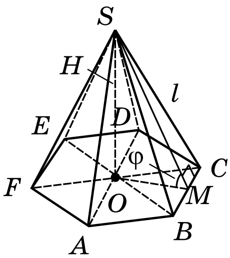
Пирамида	
 	**Пирамидой** называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания
$ABCD$ — основание пирамиды; S — вершина пирамиды; SA, SB, SC, SD — боковые рёбра; $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ — боковые грани	

Окончание таблицы

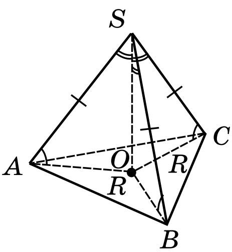
	**Высота пирамиды** — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. SO — высота пирамиды; $SO = H$ ($SO \perp (ABCD)$). $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$; $S_{\text{бок.пир}} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta CSD} + S_{\Delta ASD}$; $S_{\text{полн.пир}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

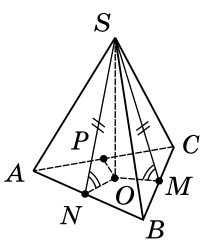
Правильная пирамида	
Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника	
Некоторые виды правильных пирамид	
	**Треугольная** ΔABC — правильный; O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей
	**Четырёхугольная** $ABCD$ — квадрат; O — точка пересечения диагоналей

Окончание таблицы

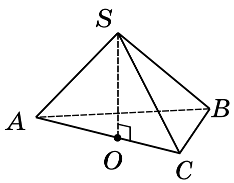
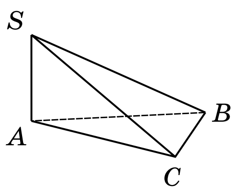
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Шестиугольная
$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;
O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$;
O — центр основания).
SM — апофема правильной пирамиды (высота боковой грани, $SM \perp BC$)</td>
</tr>
</table>

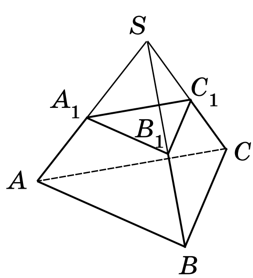
Свойства	Формулы
1. Боковые рёбра равны, одинаково наклонены к плоскости основания. $SA = SB = SC = \ldots$; $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$ 2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники. $\Delta ASB = \Delta BSC = \ldots$ Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом	**Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SM = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$, где l — апофема или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$, где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$. **Объём:** $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, $H = SO$, H — высота пирамиды

<table>
<tr><th colspan="2">Положение высоты в некоторых видах пирамид</th></tr>
<tr><td></td><td>1. Если в пирамиде:
а) все боковые рёбра равны
или
б) все боковые рёбра составляют одинаковые углы с плоскостью основания
или
в) боковые рёбра составляют одинаковые углы с высотой пирамиды, то высота проходит через центр окружности, описанной около основания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: высота пирамиды может располагаться внутри пирамиды, на боковой грани или вне пирамиды, в зависимости от размещения центра описанной окружности. Около такой пирамиды можно описать конус</td></tr>
</table>

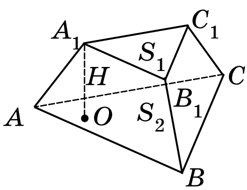
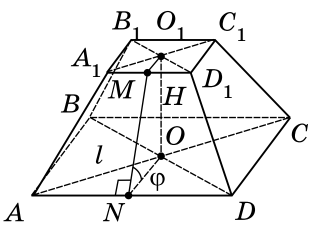
<table>
<tr><td></td><td>2. Если в пирамиде:
а) все двугранные углы при основании равны
или
б) все высоты боковых граней равны
или
в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней,
то высота проходит через центр окружности, вписанной в основание</td></tr>
<tr><td colspan="2">В такую пирамиду можно вписать конус.
Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все двугранные углы при основании равны α, можно вычислять по формуле: $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

	3. Если **одна боковая грань** пирамиды перпендикулярна **плоскости основания,** то **высотой пирамиды является высота этой грани.** Если в $SABC$ $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$ $(O \in AC)$, то SO — высота пирамиды, $SO \perp (ABC)$
	4. Если **две смежные боковые** грани перпендикулярны плоскости основания, то **высотой пирамиды является их общее боковое ребро.** Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$, то SA — высота пирамиды $(SA \perp (ABC))$

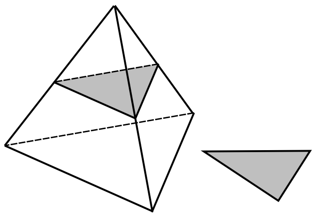
Усечённая пирамида	
	**Образование усечённой пирамиды** Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды $((A_1B_1C_1) \parallel (ABC))$, то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. (С коэффициентом подобия $k = \dfrac{SA_1}{SA} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$)
Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется **усечённой пирамидой.** Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — **основания** $((ABC) \parallel (A_1B_1C_1))$. Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — **боковые грани**	

Окончание таблицы

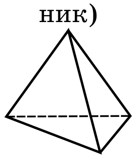
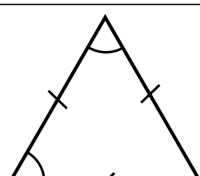
	**Высотой** усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований. $A_1O \perp (ABC)$; $A_1O = H$ — высота. $V_{\text{усеч. пир}} = \dfrac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$, где S_1, S_2 — площади оснований
	**Площадь** поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности: $S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$. **Правильная усечённая пирамида** — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды. **Апофема** — высота боковой грани. $MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$; MN — апофема

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды	
$S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l$, где P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема	$S_{\text{бок}} = \dfrac{S_1 - S_2}{\cos\varphi}$, где S_1 и S_2 — площади оснований; φ — угол наклона боковой грани к бóльшему основанию

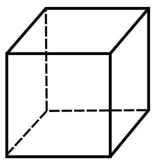
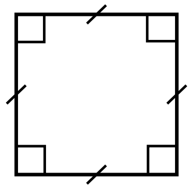
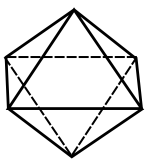
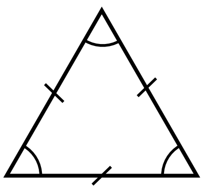
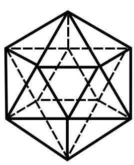
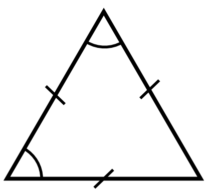
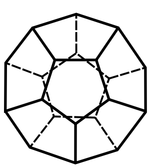
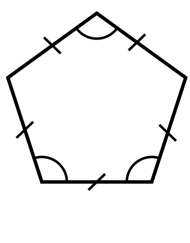
Сечения куба, призмы, пирамиды

<table>
<tr><td></td><td>Секущая плоскость геометрического тела — это любая плоскость, по обе стороны от которой — точки данного тела.
Сечение геометрического тела — фигура, составленная общими точками секущей плоскости и данного тела</td></tr>
<tr><td>Методы построения сечений:
а) метод следов;
б) метод внутреннего проектирования;
в) метод переноса секущей плоскости</td><td>Секущая плоскость может быть задана:
а) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
б) прямой и точкой, не лежащей на ней;
в) двумя пересекающимися прямыми</td></tr>
</table>

Представления о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)

<table>
<tr><td colspan="6">Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одинаковым количеством сторон и к каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер</td></tr>
<tr><th>№</th><th>Многогранник</th><th>Многоугольник</th><th>Число граней</th><th>Число вершин</th><th>Число рёбер</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Правильный тетраэдр (четырёхгранник)
</td><td></td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

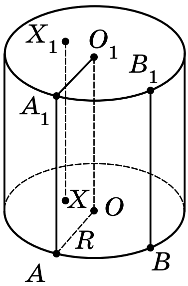
№	Многогранник	Многоугольник	Число граней	Число вершин	Число рёбер
2	Гексаэдр (шестигранник), куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

Площадь поверхности, объём, радиусы вписанной и описанной сфер

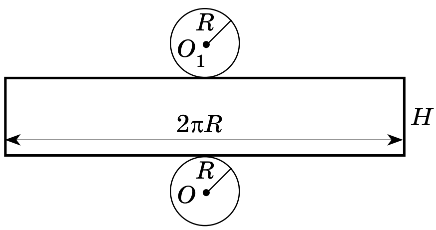
Тип многогранника	Площадь поверхности	Объём	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}H=\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}H=\frac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$	$\frac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$

ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

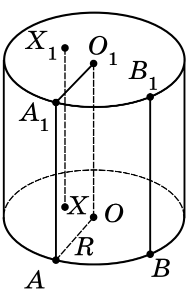
Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка

	**Цилиндр (круговой цилиндр)** — тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки окружностей, лежащих в основаниях этих цилиндров. **Основания** цилиндра — круги. **Образующие** — отрезки, соединяющие точки окружностей. AA_1, BB_1 — образующие

Развёртка цилиндра

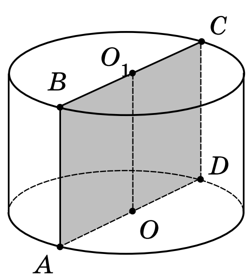


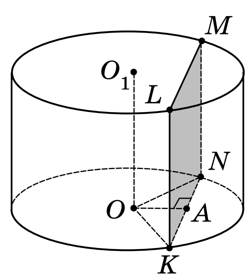
Развёртка цилиндра — **прямоугольник** со сторонами $2\pi R$ и H (боковая поверхность) и **два круга** радиусами R (основания цилиндра)

	Свойства	Формулы
	1. Основания цилиндра равны и параллельны: $AO = O_1A_1 = R$; $(AOB) \parallel (A_1O_1B_1)$. 2. Образующие цилиндра равны и параллельны $AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = BB_1$	**Площадь основания:** $S_{осн} = \pi R^2$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = 2\pi RH$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$; $S_{полн} = 2\pi R(H + R)$

Окончание таблицы

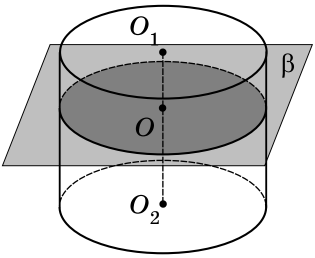
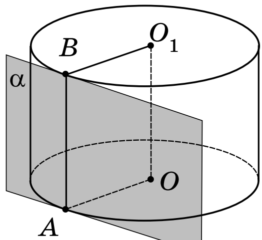
	3. Высота цилиндра равна образующей: $H_{осн} = AA_1 = OO_1$ При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр	**Объём:** $V = S_{осн} \cdot H$; $V = \pi R^2 H$; OMM_1O_1 — прямоугольник; OO_1 — ось цилиндра; $R_{цил} = OM = O_1M_1$; $H_{цил} = MM_1 = OO_1$

<table>
<tr><th colspan="2">Сечение цилиндра плоскостями</th></tr>
<tr><th>Осевое сечение</th><th>Сечение плоскостью, параллельной оси</th></tr>
<tr><td>


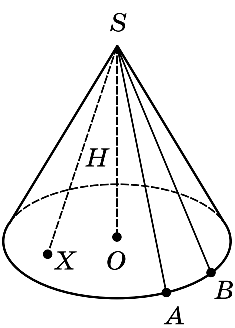
</td><td>


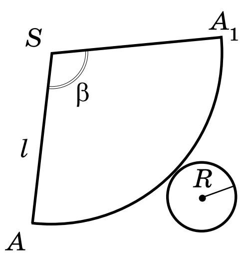
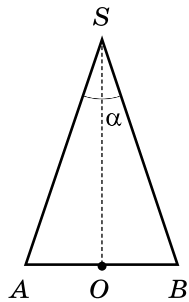
</td></tr>
<tr><td>$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1);
$ABCD$ — прямоугольник;
$AD = d_{осн} = 2R$;
$AB = CD = H_{цил}$;
AB и CD — образующие</td><td>$(KLMN) \parallel OO_1$;
$KLMN$ — прямоугольник;
KL и MN — образующие;
$KL = H_{цил}$, KN — хорда;
OA — расстояние от основания высоты до хорды NK</td></tr>
</table>

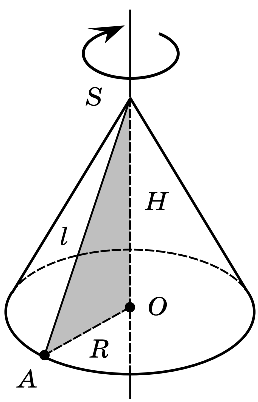
Окончание таблицы

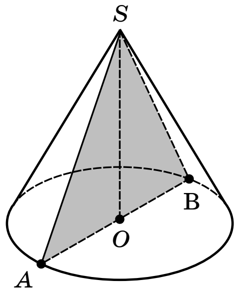
Сечение плоскостью, параллельной основанию	**Касательная плоскость**
	
Плоскость, параллельная основанию, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания: $R_{сеч} = R_{осн}$	**Касательная плоскость** — плоскость, проходящая через образующую и перпендикулярная плоскости осевого сечения, проходящего через эту образующую. α — касательная плоскость, AB — образующая, α проходит через AB: $\alpha \perp (AOO_1B)$

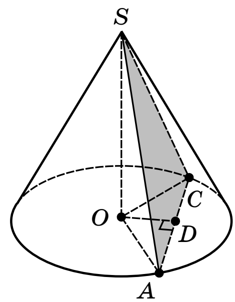
Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка

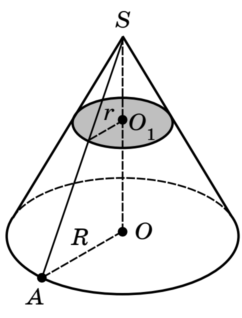
	**Конус** (круговой конус) — тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками окружности основания. **Основание конуса** — круг, т. S — вершина конуса. SA и SB — образующие (отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания)

Развёртка конуса		
		**Развёртка** конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, длина дуги — длине окружности основания. $SA = SA_1 = l$; $\cup AA_1 = 2\pi R$. $\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса. $\angle ASB = \alpha$ — угол при вершине осевого сечения, $\beta = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}$; $\alpha = 2 \arcsin \frac{\beta}{2\pi}$

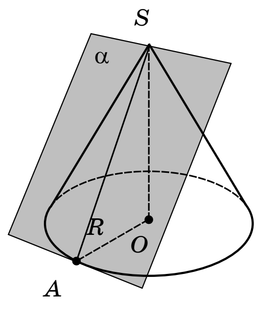
	Свойства	Формулы
	1. Образующие конуса равны: $SA = SB = \ldots$ 2. $H_{кон} = SO$, $SO \perp (AOB)$ При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус. ΔAOS — прямоугольный. SO — ось симметрии, AS — образующая. $R_{кон} = AO$; $H_{кон} = SO$; $AS = l$	**Площадь основания:** $S_{осн} = \pi R^2$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \pi R l$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$; $S_{полн} = \pi R(l + R)$. **Объём:** $V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$; $V_{кон} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$

<table>
<tr><th colspan="2">Сечение конуса плоскостями</th></tr>
<tr><th>Осевое сечение</th><th>Сечение, проходящее через вершину</th></tr>
<tr><td>


ΔSAB — осевое сечение (проходит через ось SO);
ΔSAB — равнобедренный;
$SA = SB = l$ — образующие
</td><td>


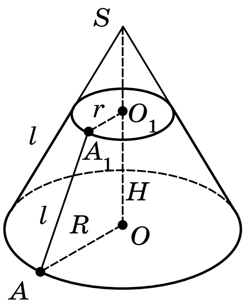
ΔASC — равнобедренный;
$AS = SC = l$ — образующие;
AC — хорда, $OA = OC = R$;
OD — расстояние от основания высоты до хорды AC;
$OD^2 = AO^2 - AD^2$
</td></tr>
<tr><th>Сечение плоскостью, параллельной основанию</th><th>Касательная плоскость</th></tr>
<tr><td>


Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

$$\frac{r_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$$
</td><td>


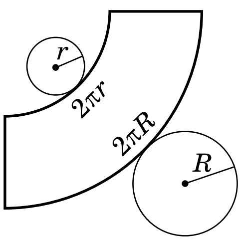
Касательная плоскость — это плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую.
α — касательная плоскость;
SA — образующая, α проходит через SA; $\alpha \perp (SAO)$
</td></tr>
</table>

Усечённый конус

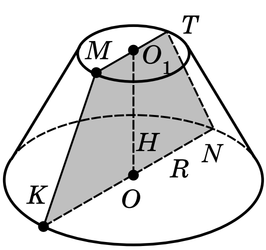


Усечённый конус — часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.
Основания — круги с центрами O и O_1.
l — образующая, $AA_1 = l$;
$OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований

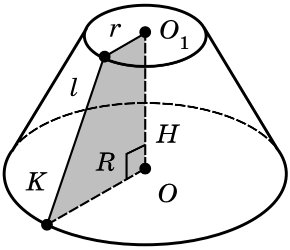
Развёртка усечённого конуса



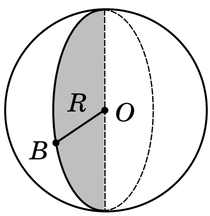
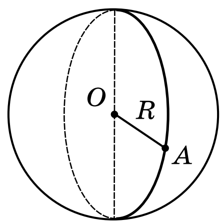
Два круга — верхнее и нижнее основания радиусами r и R; часть кольца — боковая поверхность

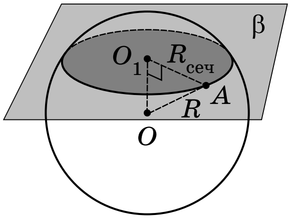
Свойства	Формулы
 Осевое сечение — равнобокая трапеция. $MKNT$ — осевое сечение. $MT \parallel KN$ и $MK = TN$. $MT = 2r$; $KN = 2R$. $OO_1 \perp KN$. $OO_1 = H$	**Площадь боковой поверхности:** $S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l$. **Площадь полной поверхности:** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{1\text{осн}} + S_{2\text{осн}}$. **Объём:** $V_{\text{ус.кон}} = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$; R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований; l — образующая

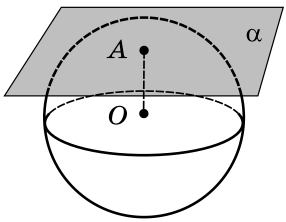
Окончание таблицы

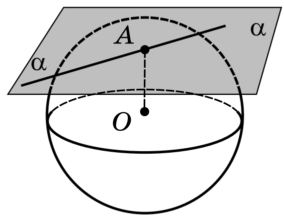
	При вращении прямоугольной трапеции около оси, проходящей через меньшую боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усечённый конус

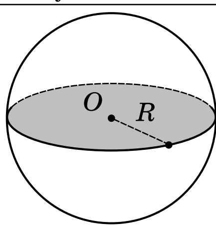
Шар и сфера, их сечения

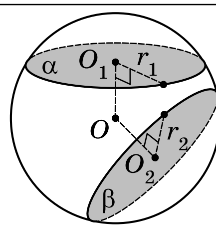
Шар	**Сфера**
 **Шар** — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O). O — центр шара; OB — радиус шара; $OB = R$. Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра. **Объём шара:** $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$	 **Сфера** — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O). O — центр сферы; OA — радиус сферы; $AO = R$. При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу. **Площадь поверхности сферы:** $S_{сф} = 4\pi R^2$

<table>
<tr><th colspan="2">Сечение шара плоскостью</th></tr>
<tr>
<td>

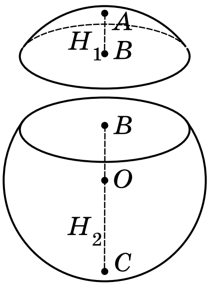
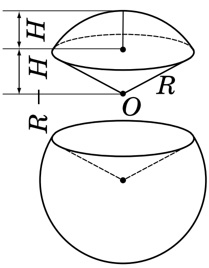
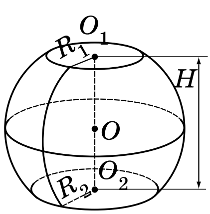
O — центр шара;
O_1 — центр круга сечения;
$OO_1 \perp \beta$</td>
<td>Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
Из ΔOO_1A:
$$R_{\text{сеч}} = \sqrt{R^2_{\text{шара}} - OO_1^2}$$</td>
</tr>
<tr><th>Большой круг</th><th>Сечение двумя плоскостями</th></tr>
<tr>
<td>

Касательная плоскость к шару — это плоскость, проходящая через точку сферы, перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку. $OA \perp \alpha$</td>
<td>

Касательная к шару — это прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания.
$OA \perp \alpha$; $OA \perp a$; $a \in \alpha$</td>
</tr>
<tr>
<td>

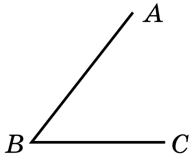
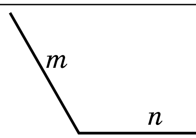
Большой круг — сечение шара, проходящее через центр.
$R_{\text{сеч}} = R_{\text{шара}}$</td>
<td>

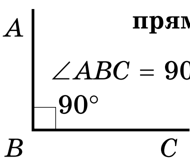
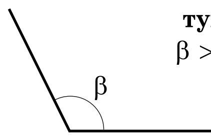
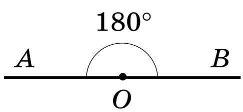
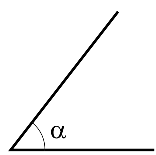
$OO_1 \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$;
r_1 и r_2 — радиусы кругов сечения.
$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$;
$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$;
$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$</td>
</tr>
</table>

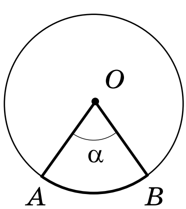
Части шара		
	**Шаровой сегмент** — часть шара, которую отсекает секущая плоскость. Плоскость делит шар на два сегмента: $AB = H_1$ — высота меньшего сегмента; $BC = H_2$ — высота большего сегмента	**Основные формулы** Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$. Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = \pi H(4R - H)$. Объём: $V_{\text{сегм}} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$
	**Шаровой сектор** — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса	**Основные формулы** Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} =$ $= \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R - H)}\right)$. Объём: $V_{\text{сек}} = \frac{2}{3}\pi R^2 H$
	**Шаровой слой** — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями. H — расстояние между секущими плоскостями; R_1 и R_2 — радиусы оснований	**Основные формулы** Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$; R — радиус шара. Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} =$ $= \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2)$. Объём: $V =$ $= \frac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

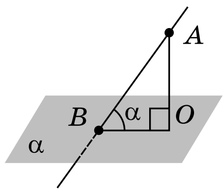
Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

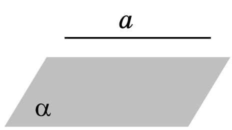
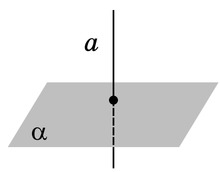
Угол. Величина угла, градусная мера угла		
 $\angle ABC$	 $\angle(m,\ n)$	**Угол** — фигура, состоящая из точки (вершины угла) и двух различных лучей, исходящих из этой точки
Углы измеряют в градусах. $1^\circ = \dfrac{1}{180}$ развёрнутого угла		

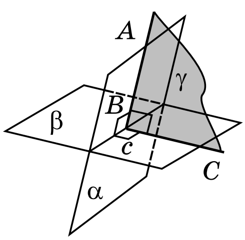
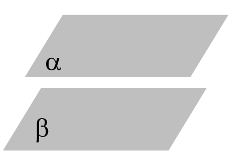
Виды углов	
прямой  $\angle ABC = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ рад	**тупой** $\beta > 90^\circ$ 
развёрнутый $\angle AOB = 180^\circ$ 	**острый** $\alpha < 90^\circ$ 

Дуга	
	**Дуга** — часть окружности между двумя точками. **Градусная мера дуги** — градусная мера соответствующего центрального угла. Длина дуги 1°: $l_{1^\circ} = \dfrac{\pi R}{180^\circ}$. Длина дуги n°: $l_{n^\circ} = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$.

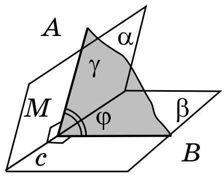
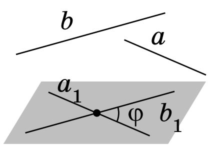
Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями

Угол между прямой и плоскостью	
	Угол между прямой и пересекающей её плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. $\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α; BO — проекция AB на α, $AO \perp \alpha$

Особые случаи	
 $a \parallel \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\ \alpha) = 0$	 $a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\ \alpha) = 90°$

Угол между плоскостями (двугранный угол)	
	**Углом между плоскостями** α и β, пересекающимися по прямой c, называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ, перпендикулярная их линии пересечения, пересекает плоскости α и β. $\angle ABC$ — угол между плоскостями α и β, т. е. $AB \perp c$; $BC \perp c$, $AB \subset \alpha$; $BC \subset \beta$
	**Угол между параллельными плоскостями** равен 0°. $\angle(\alpha;\ \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$

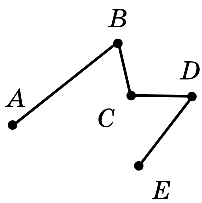
Окончание таблицы

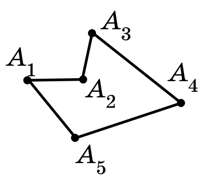
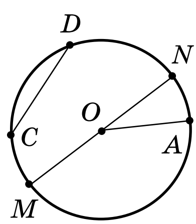
<table>
<tr><td>
</td><td>Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.
α и β — грани двугранного угла,
c — ребро двугранного угла.
$AM \perp c$, $BM \perp c$, $AM \subset \alpha$, $MB \subset \beta$.
$\angle AMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства
Плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла.
$(AMB) \perp \alpha$ и $(AMB) \perp \beta$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Угол между скрещивающимися прямыми</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся.
$a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$; $\angle(a;\, b) = \angle(a_1;\, b_1) = \varphi$;
$0° < \varphi < 90°$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90°, то они называются перпендикулярными</td></tr>
</table>

Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника

<table>
<tr><td>
</td><td>Отрезок — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя её точками — концами отрезка</td></tr>
<tr><td colspan="2">Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой его точкой: $AB = AK + KB$</td></tr>
</table>

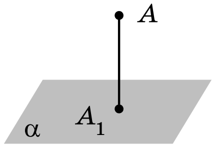
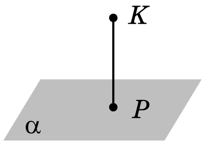
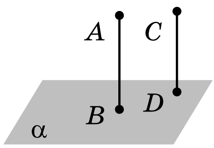
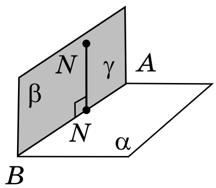
Окончание таблицы

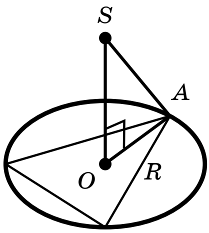
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Ломаная — геометрическая фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой (вершин), соединённых отрезками (звеньями).
Длина ломаной равна сумме длин её звеньев</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.
Многоугольник называется выпуклым, если каждая из его диагоналей лежит внутри многоугольника</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Число диагоналей выпуклого многоугольника:
$$n_d = \frac{n(n-3)}{2},$$
n — число сторон многоугольника.
Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон:
$$P_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).
$OA = R$ — радиус;
$MN = D = 2R$ — диаметр;
CD — хорда;
$\smile AN$, $\smile AM$ — дуги</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Длина окружности:
$$C = 2\pi R,$$
где R — радиус; число π — отношение длины окружности к диаметру:
$$\pi = \frac{C}{2R} \approx 3,14$$</td>
</tr>
</table>

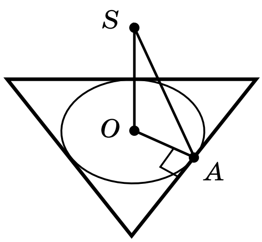
Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями

Расстояние в пространстве

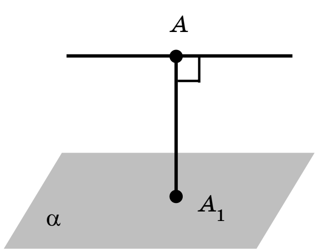
Расстояние от точки до плоскости (r — расстояние)	
	**Расстояние от точки до плоскости** — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость
Способы построения	
	Провести $KP \perp \alpha$; $P \in \alpha$. $KP = \rho(K; \alpha)$, где ρ — расстояние от точки до плоскости
	$AB \perp \alpha$. Провести $CD \parallel AB \Rightarrow CD \perp \alpha$. $CD = \rho(C; \alpha)$
	Провести $\beta \perp \alpha$ через точку M (β пересекает α по AB). Провести $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp \alpha$. $MN = \rho(N; \alpha)$

<table>
<tr><th colspan="2">Частные случаи нахождения расстояния
от точки до плоскости (до прямой)</th></tr>
<tr><td>


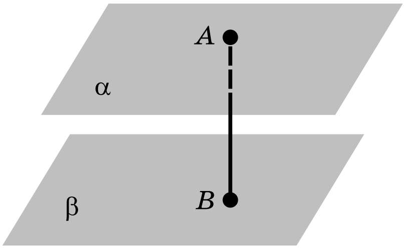
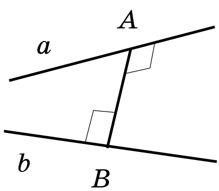
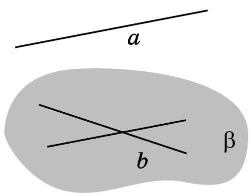
SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $OA = R$ — радиус описанной окружности; SA — расстояние от точки до вершины многоугольника
</td><td>
Свойство точки, равноудалённой от всех вершин многоугольника
Если точка вне плоскости многоугольника равноудалена от всех его вершин, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром окружности, описанной около многоугольника
</td></tr>
</table>

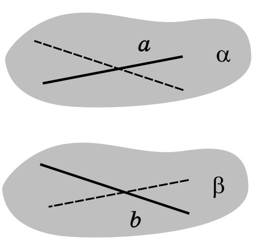
<table>
<tr><td>


SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $AO = r$ — радиус окружности, вписанной в многоугольник
</td><td>
Свойство точки, равноудалённой от сторон многоугольника
Если точка вне плоскости многоугольника равноудалена от его сторон, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром окружности, вписанной в многоугольник.
SA — расстояние от точки до стороны многоугольника
</td></tr>
</table>

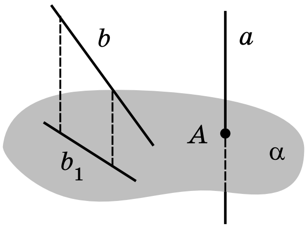
<table>
<tr><th colspan="2">Расстояние между параллельными прямой и плоскостью</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
Выбрать на прямой a произвольную точку A и найти расстояние от этой точки до плоскости α.
$a \parallel \alpha$, $A \in a$;
$\rho(a;\ \alpha) = \rho(A;\ \alpha) = AA_1$
</td></tr>
</table>

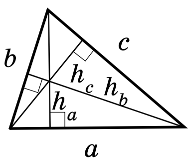
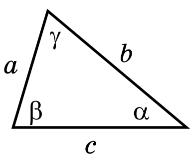
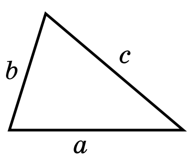
Расстояние между параллельными плоскостями	
 	Выбрать в плоскости произвольную точку A и найти расстояние от точки A до плоскости β. $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$ $\rho(\alpha;\ \beta) = \rho(A;\ \beta) = AB$
Расстояние между скрещивающимися прямыми	
 	**Расстояние между скрещивающимися прямыми** — это длина **общего перпендикуляра** к этим прямым. $AB \perp a$; $AB \perp b$; $\rho(a;\ b) = AB$; прямые a и b скрещиваются
Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми	
 $\rho(a;\ b) = \rho(a;\ \beta)$	Провести через прямую b плоскость $\beta \parallel a$

 $\rho(a;\ b) = \rho(\alpha;\ \beta)$	Провести через a и b параллельные плоскости α и β

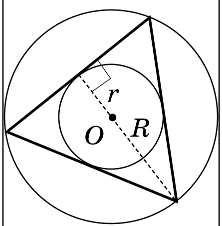
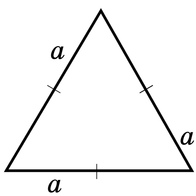
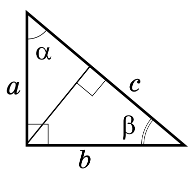
Окончание таблицы

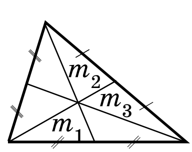
 $\rho(a;\ b) = \rho(A;\ b_1)$	Провести $\alpha \perp a$, спроектировать a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$

Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

Площадь треугольника	
	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
	$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
	Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ или $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

Окончание таблицы

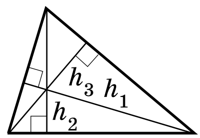
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Нахождение площади через радиусы вписанной и описанной окружностей r и R.
$S = p \cdot r$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; $S = \dfrac{a+b+c}{2}r$,
где r — радиус вписанной окружности;
$S = \dfrac{abc}{4R}$ или
$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$,
где R — радиус описанной окружности</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Площадь равностороннего треугольника:
$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Площадь прямоугольного треугольника:
$S = \dfrac{1}{2}ab$; $S = \dfrac{1}{2}ch_c$;
$S = \dfrac{1}{2}ac\sin\alpha = \dfrac{1}{2}bc\sin\beta$.
Следствие: $h_c = \dfrac{ab}{c}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Дополнительные формулы для площади треугольника</th></tr>
<tr><td>Через медианы треугольника m_1, m_2, m_3:
$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(-m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)}$$

</td></tr>
</table>

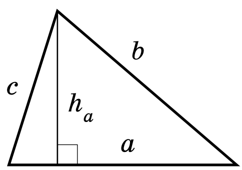
Окончание таблицы

Через высоты треугольника h_1, h_2, h_3:

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)}$$



Нахождение высоты произвольного треугольника методом площадей

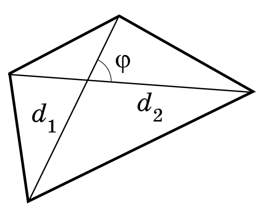


Метод площадей заключается в нахождении площади различными способами. Далее из этого равенства находят различные элементы треугольника, например высоту

$$S = \frac{1}{2}ah_a \text{ или } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

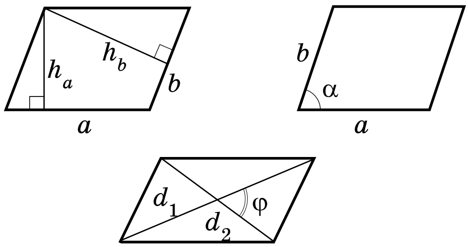
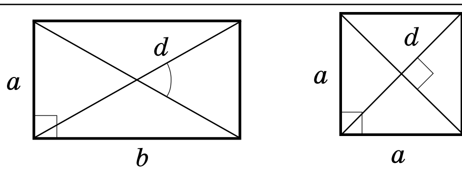
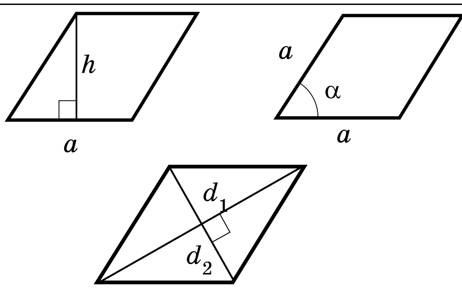
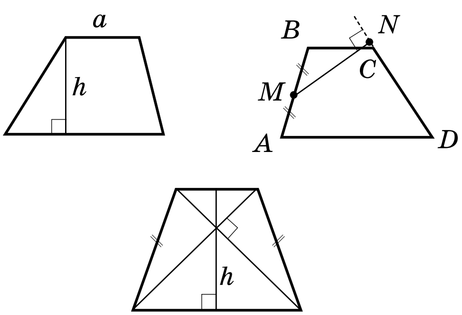
Площадь четырёхугольника



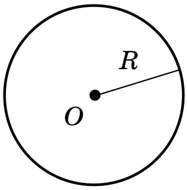
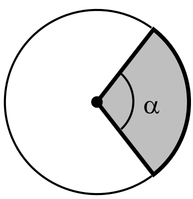
Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

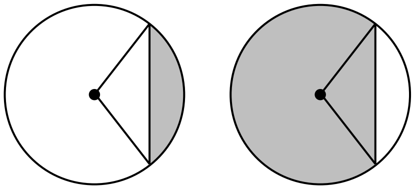
$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$

Окончание таблицы

	**Площадь параллелограмма:** $S = ah_a = bh_b$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
	**Площадь прямоугольника и квадрата:** $S_{пр} = ab$; $S_{пр} = \dfrac{1}{2}d^2\sin\varphi$; $S_{кв} = a^2$. $S_{кв} = \dfrac{d^2}{2}$
	**Площадь ромба:** $S_р = ah$; $S_р = a^2\sin\alpha$; $S_р = \dfrac{1}{2}d_1d_2$
	**Площадь трапеции:** $S_{тр} = \dfrac{a+b}{2}\cdot h$ или $S_{тр} = m\cdot h$, где $m = \dfrac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции, $S_{тр} = CD\cdot MN$

В равнобокой трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями площадь равна квадрату высоты: $S_{тр} = h^2$

<table>
<tr><th colspan="2">Площадь круга и его частей</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Круг — фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. Точка O — центр круга,
данное расстояние R — радиус круга</td></tr>
<tr><td colspan="2">Площадь круга:
$S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, где D — диаметр</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла</td></tr>
<tr><td colspan="2">Площадь кругового сектора:
$S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$,
где n° — градусная мера соответствующего центрального угла.
$S_{\text{сект}} = \dfrac{\alpha R^2}{2}$,
где α — радианная мера соответствующего центрального угла</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Круговой сегмент —
общая часть круга
и полуплоскости</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

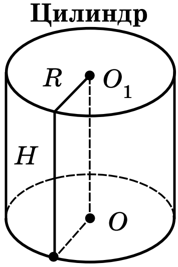
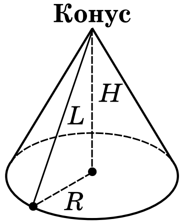
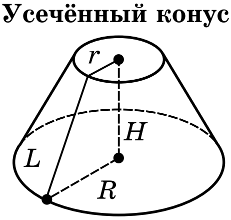
Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\triangle,$$

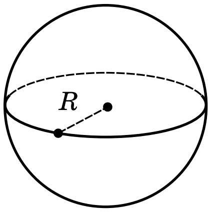
где n° — градусная мера соответствующего центрального угла;

$S_\triangle$ — площадь треугольника с вершиной в центре круга; «+», если $n^\circ > 180^\circ$; «−», если $n^\circ < 180^\circ$

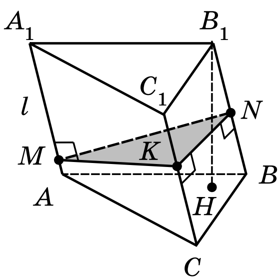
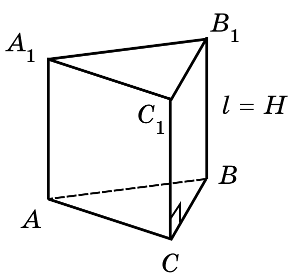
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы

<table>
<tr><th>Вид тела вращения</th><th>Боковая поверхность</th><th>Полная поверхность</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Цилиндр
</td><td>$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$</td><td>$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$
$S_{\text{полн}} = 2\pi R(H+R)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">R — радиус основания;
L — образующая;
H — высота; $L = H$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Конус
</td><td>$S_{\text{бок}} = \pi RL$</td><td>$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$
$S_{\text{полн}} = \pi R(L+R)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">R — радиус основания;
L — образующая;
H — высота</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Усечённый конус
</td><td>$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)L$</td><td>$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">R и r — радиусы большего и меньшего оснований;
L — образующая;
H — высота</td></tr>
</table>

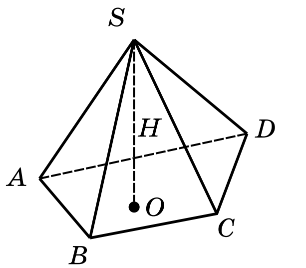
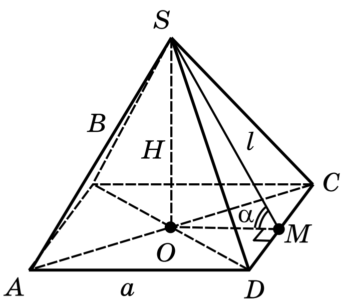
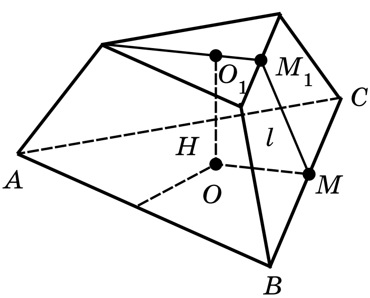
Окончание таблицы

Шар и сфера	**Площадь сферы** $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$
	R — радиус шара

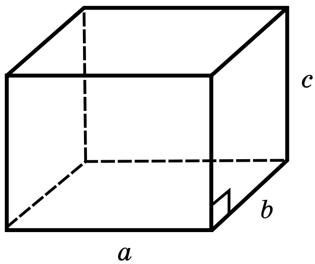
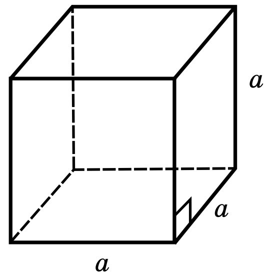
Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

Вид многогранника	**Объём**
Наклонная призма 	$V_{\text{н.пр.}} = S^{\wedge} \cdot l$ или $V_{\text{н.пр.}} = S_{\text{осн}} \cdot H$ MNK — перпендикулярное сечение; $S^{\wedge}$ — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра; $S_{\text{осн}}$ — площадь основания; H — высота
Прямая призма 	$V = S_{\text{осн}} \cdot H$ или $V = S_{\text{осн}} \cdot l$ Длина высоты совпадает с длиной бокового ребра

Продолжение таблицы

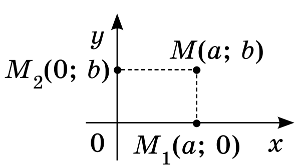
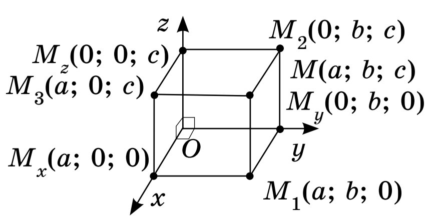
Пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
Правильная пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ $S_{осн}$ — площадь основания; H — высота; l — апофема; a — сторона основания; α — угол наклона боковой грани
Правильная усечённая пирамида 	$V = \frac{1}{3} H(S_{осн_1} + \sqrt{S_{осн_1} \cdot S_{осн_2}} + S_{осн_2})$

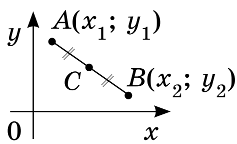
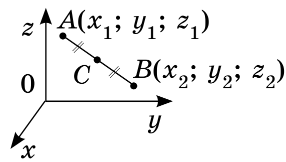
Окончание таблицы

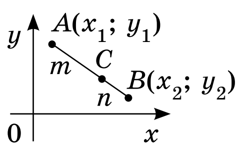
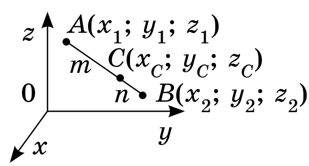
Прямоугольный параллелепипед	**Куб**
 $V = abc$	 $V = a^3$

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Декартовы координаты	
Декартовы координаты на плоскости	**Декартовы координаты в пространстве**
 O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат	 O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат; Oz — ось аппликат

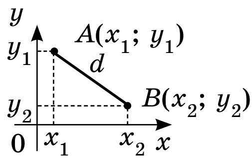
Координаты середины отрезка	
$C(x_C;\ y_C)$ — середина отрезка AB  $x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2};\ y_C = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	$C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ — середина отрезка AB  $x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2};\ y_C = \dfrac{y_1 + y_2}{2};$ $z_C = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении	
	
Даны точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. Точка $C(x_C;\ y_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. Тогда координаты точки C: $x_C = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n};\ y_C = \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}$	$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Точка $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. $x_C = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n};\ y_C = \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n};$ $z_C = \dfrac{nz_1 + mz_2}{m + n}$

Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы

Формула расстояния между точками

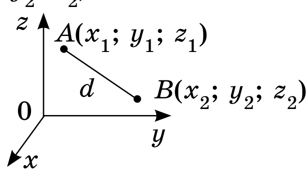
$A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$



Расстояние d между точками A и B:

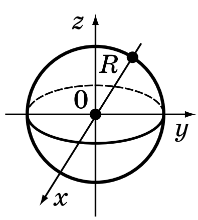
$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

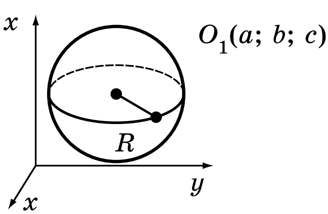
$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$



Расстояние d между точками A и B:

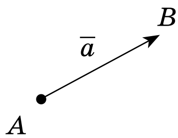
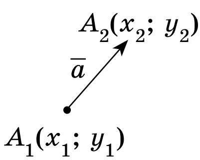
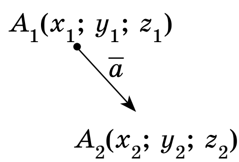
$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

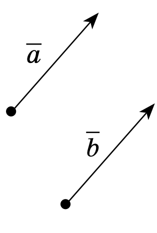
<table>
<tr><th colspan="2">Уравнение сферы</th></tr>
<tr><th>с центром в начале координат</th><th>с центром в произвольной точке</th></tr>
<tr><td>


$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
Центр сферы $O(0;\ 0;\ 0)$
</td><td>


$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Центр сферы $O_1(a;\ b;\ c)$,
радиус R
</td></tr>
</table>

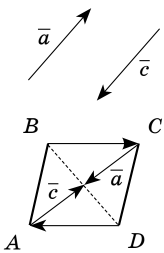
Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число

Векторы на плоскости	Векторы в пространстве
	**Вектором** называется направленный отрезок: $\overline{AB} = \overline{a}$ Длина этого отрезка называется **длиной (модулем, абсолютной величиной)** вектора: $\lvert\overline{a}\rvert = AB$
Координаты вектора на плоскости	**Координаты вектора в пространстве**
 $\overline{a}(a_1;\ a_2)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$. $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	 $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$. $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Равные векторы
 $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{b}\rvert \\ \text{векторы } \overline{a} \text{ и } \overline{b} \text{ одинаково направлены} \end{cases}$

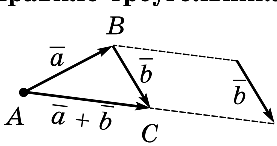
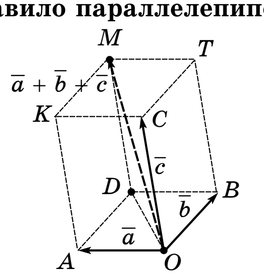
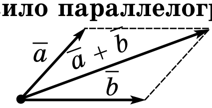
Окончание таблицы

В координатах
$\bar{a}(a_1;\, a_2) = \bar{b}(b_1;\, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$ $\bar{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) = \bar{b}(b_1;\, b_2;\, b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

Противоположные векторы	
	**Противоположные векторы** — векторы, имеющие одинаковую длину и противоположное направление. Векторы $\overline{AO}$ и $\overline{CO}$; $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ — противоположные. $\lvert\bar{a}\rvert = \lvert\bar{c}\rvert$; $\bar{a} = -\bar{c}$

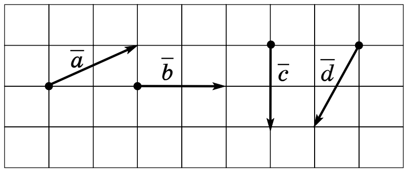
Операции над векторами

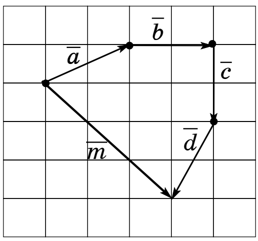
Сумма векторов	
На плоскости	**В пространстве**
$\bar{a}(a_1;\, a_2) + \bar{b}(b_1;\, b_2) =$ $= \bar{c}(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2)$	$\bar{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) + \bar{b}(b_1;\, b_2;\, b_3) =$ $= \bar{c}(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2;\, a_3 + b_3)$

Правило треугольника	**Правило параллелепипеда**
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	 $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$
Правило параллелограмма 	

Окончание таблицы

Найти сумму векторов





$$
\begin{array}{rl}
 & \overline{a}(2;\ 1) \\
 & \overline{b}(2;\ 0) \\
+ & \overline{c}(0;\ -2) \\
 & \overline{d}(-1;\ -2) \\
\hline
 & \overline{m}(3;\ -3)
\end{array}
$$

Правило многоугольника

Пусть даны векторы $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$; $\overline{d}$.

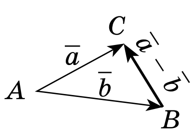
а) от произвольной точки строим вектор $\overline{a}$;

б) от конца вектора $\overline{a}$ строим вектор $\overline{b}$;

в) от конца вектора $\overline{b}$ строим вектор $\overline{c}$;

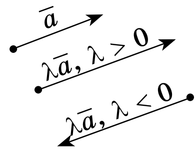
г) от конца вектора $\overline{c}$ строим вектор $\overline{d}$;

д) вектор-сумма $\overline{m}$ — его начало совпадает с началом вектора $\overline{a}$, конец — с концом вектора $\overline{d}$

Разность векторов	
$\overline{a}(a_1;\ a_2) - \overline{b}(b_1;\ b_2) =$ $= \overline{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$	$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3) - \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) =$ $= \overline{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$
	$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$

Умножение вектора на число	
$\lambda \cdot (\overline{a_1;\ a_2}) = (\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$	$\lambda \cdot (a_1;\ a_2;\ a_3) = (\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3})$

Окончание таблицы

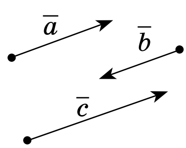
	При $\lambda > 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ одинаково направлен с вектором $\overline{a}$. При $\lambda < 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ противоположно направлен с вектором $\overline{a}$. $\lvert\lambda\overline{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\overline{a}\rvert$

Векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ коллинеарны

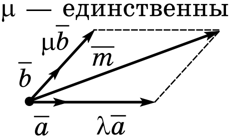
Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ $\Leftrightarrow$ Если $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — коллинеарны

Свойства действий над векторами	
Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и любых чисел γ и μ:	
1) $\overline{a} + b = \overline{b} + \overline{a}$; 2) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (a + b) + \overline{c}$; 3) $\overline{a} + 0 = \overline{a}$; 4) $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-1) \cdot \overline{b}$; 5) $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$; 6) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{a}$;	7) $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$; 8) $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$; 9) $\lvert\lambda\overline{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\overline{a}\rvert$; 10) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$; 11) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$;

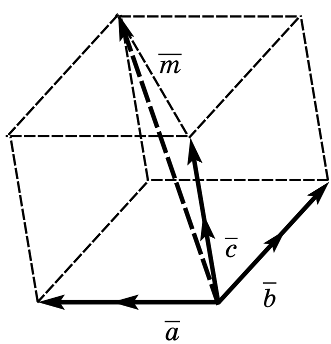
Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Коллинеарные векторы	
	Ненулевые векторы называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы направлены одинаково или противоположно

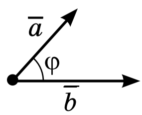
Условие коллинеарности векторов	
$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1;\ a_2)$; $\overline{b}(b_1;\ b_2) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$	$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$; $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

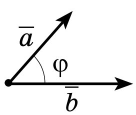
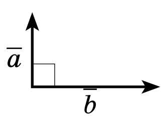
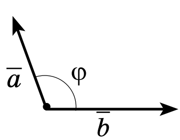
Разложение вектора на плоскости: по двум неколлинеарным векторам
$\overline{m}$ — произвольный вектор плоскости; $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарные векторы. Всегда существует разложение: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где λ и μ — единственные числа  Векторы $\overline{a}(a_1; a_2)$ и $\overline{b}(b_1; b_2)$ неколлинеарны, если $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$

Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам

В пространстве: по трём неколлинеарным векторам
$\overline{m}$ — произвольный вектор пространства; $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — некомпланарные (т. е. не параллельные одной плоскости) векторы. Всегда существует разложение: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$, где λ, μ и ν — единственные числа 
Условие компланарности векторов
Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — компланарны, если $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$

Координаты вектора; скалярное произведение векторов, угол между векторами

Скалярное произведение векторов на плоскости	**Скалярное произведение векторов в пространстве**
$\overline{a}(a_1;\ a_2);\ \overline{b}(b_1;\ b_2)$ $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$	$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3);\ \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$
	**Теорема о скалярном произведении векторов** $\overline{a}\cdot\overline{b} = \lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert\cos\varphi$, где φ — угол между векторами

Следствия из теоремы о скалярном произведении	
Численное значение скалярного произведения характеризует величину угла между векторами:	
	$\overline{a}\cdot\overline{b} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \le \varphi < 90^\circ$ Угол между векторами — **острый**
	**Условие перпендикулярности векторов** $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\perp\overline{b}$ Угол между векторами 90° (векторы перпендикулярны)
	$\overline{a}\cdot\overline{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \varphi < 180^\circ$ Угол между векторами — **тупой**
Косинус угла между векторами вычисляется по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$	