АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

Целые числа

Множество целых чисел		
Z	N	Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: −1; −2; −3; ... и число 0 образуют множество целых чисел
	0	
	N_-	

Степень с натуральным показателем

Степень	
n-й степенью действительного числа a называется действительное число b, полученное в результате умножения числа a самого на себя n раз	
$b = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $n \in N$ a — основание степени, n — показатель степени $0^n = 0$ $(n > 0)$; $1^n = 1$; $a^1 = a$; 0^0 — не определено	
Степень с натуральным показателем	
$a^1 = a$; $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $a \in R$, $n \in N$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$; $0^7 = 0$; $1^{100} = 1$; $(-1)^{99} = -1$; $(-1)^{100} = 1$

Дроби, проценты, рациональные числа

Рациональные числа

<table>
<tr><th colspan="3">Множество рациональных чисел</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.
Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной</td></tr>
<tr><td>дроби</td></tr>
</table>

Дроби

Основное свойство дроби	
Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число (выражение), не равное нулю	$\frac{a(b-c)}{m(b-c)} = \frac{a}{m}$; $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$; $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$
Сравнение дробей	
Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше	$\frac{7}{13} < \frac{11}{13}$, т. к. $7 < 11$
Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше	$\frac{11}{21} < \frac{11}{15}$, т. к. $21 > 15$
Сложение и вычитание	
Если знаменатели равны, то числители складываются (вычитаются), а знаменатели сохраняются	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$; $\frac{13}{21} - \frac{7}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Окончание таблицы

Если знаменатели разные, то сначала дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, а потом складывают (вычитают) как дроби с одинаковыми знаменателями	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{27 + 28}{63} = \frac{55}{63}$
При сложении (вычитании) смешанных чисел можно сложить (вычесть) их целые и дробные части	$5\frac{1}{8} + 1\frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} =$ $= 6 + \frac{3 + 20}{24} = 6\frac{23}{24}$
Умножение дробей	
При умножении дробей перемножают их числители и знаменатели	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$
При умножении смешанных чисел их сначала превращают в неправильные дроби, а потом перемножают	$2\frac{2}{5} \cdot 7\frac{3}{8} = \frac{12}{5} \cdot \frac{59}{8} = \frac{177}{10} = 17\frac{7}{10}$
Деление дробей	
При делении двух дробей деление заменяют умножением делимого на дробь, обратную делителю	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} =$ $= \frac{16 \cdot 9}{3 \cdot 14} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$
Возведение дроби в степень	
При возведении дроби в степень возводят числитель и знаменатель дроби в эту степень	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

Проценты

Проценты	
Процент — это сотая часть некоторого числа (которое принимается за единицу)	$1\% = \frac{1}{100}$ 1% от числа a — это $\frac{1}{100}a$
Преобразования процентов	
Чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100%	$0{,}23 = 0{,}23 \cdot 100\% = 23\%$; $0{,}07 = 0{,}07 \cdot 100\% = 7\%$; $5 = 5 \cdot 100\% = 500\%$
Чтобы записать проценты в виде числа, нужно число, стоящее перед знаком $\%$, разделить на 100	$13\% = 13 : 100 = 0{,}13$; $2\% = 2 : 100 = 0{,}02$; $123\% = 123 : 100 = 1{,}23$
Нахождение процента от числа	
$p\%$ от числа a равно: $\frac{p}{100} \cdot a$	20% от числа 120 равно: $\frac{20 \cdot 120}{100} = 24$
Нахождение числа по данному проценту	
Если $p\%$ от некоторого числа равно m, то всё число a равно: $a = \frac{m \cdot 100}{p}$	Если 15% от некоторого числа равно 45, то всё число равно: $\frac{45 \cdot 100}{15} = 300$
Нахождение процентного отношения двух чисел	
Число a составляет от числа b: $\frac{a}{b} \cdot 100\%$	Число 22 составляет от числа 88: $\frac{22}{88} \cdot 100\% = 25\%$

Окончание таблицы

Увеличение (уменьшение) на $p\,\%$	
Число a увеличилось на $p\,\%$: $$a+\frac{p\,\%}{100\,\%}=a\left(1+\frac{p\,\%}{100\,\%}\right)$$	Число 110 увеличилось на $5\,\%$: $$110\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=110\cdot 1{,}05=$$ $$=115{,}5$$
Число a уменьшилось на $p\,\%$: $$a-\frac{p\,\%}{100\,\%}=a\left(1-\frac{p\,\%}{100\,\%}\right)$$	Число 110 уменьшилось на $5\,\%$: $$110\cdot\left(1-\frac{5}{100}\right)=110\cdot 0{,}95=$$ $$=104{,}5$$
Формула сложных процентов	
Если A_0 — начальный капитал (вклад), p — годовой процент, n — количество лет, то в конце n-го года капитал составит: $$A_n=A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$	Если начальный капитал — 5000 и годовой процент — 6, то в конце 3-го года капитал составит: $$5000\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)^3\approx 5955$$

Степень с целым показателем

Степень с целым показателем	
$a^0=1,\ a\neq 0;$ 0^0 — не определено; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},\ a\geq 0,\ n\in Z$	$(-3)^{-3}=\dfrac{1}{(-3)^3}=-\dfrac{1}{27};$ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4};$ $1{,}3^{-2}=\left(\dfrac{13}{10}\right)^{-2}=\left(\dfrac{10}{13}\right)^2=\dfrac{100}{169}$

Основные свойства степени

Умножение степеней	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4;$ $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$ $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
Деление степеней	
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-2} : 5^{-5} = 5^{-2-(-5)} = 5^{-2+5} = 5^3 = 125;$ $3^{2\sqrt{3}} : 3^{\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$
Возведение степени в степень	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$((-2)^2)^{-3} = (-2)^{2\cdot(-3)} = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64};$ $\left(7^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{6}}$
Возведение в степень произведения	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-3ab^3c)^3 = -27a^3b^9c^3;$ $0{,}5^7 \cdot (-2)^7 = (0{,}5 \cdot (-2))^7 = (-1)^7 = -1$
Возведение в степень дроби	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

Корень степени *n* > 1 и его свойства

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a: $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ b^2 = a \end{cases}$	$\sqrt{36}=6$, т. к. $6^2=36$, $6>0$; $\sqrt{25}\ne 8$, т. к. $8^2\ne 25$; $\sqrt{25}\ne(-5)$, т. к. $-5<0$; $\sqrt{-3}$ — не определён

Тождества	
$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a \ge 0$	$\left(\sqrt{121}\right)^2=121$; $\left(\sqrt{13}\right)^2=13$
$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$, $a \in R$	$\sqrt{3^2}=\lvert 3\rvert=3$; $\sqrt{(-21)^2}=\lvert -21\rvert=21$; $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=\left\lvert\sqrt{2}-\sqrt{3}\right\rvert=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
Основные свойства корня степени *n*	
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}$	$\sqrt{0,001}\cdot\sqrt{0,4}=\sqrt{0,001\cdot 0,4}=\sqrt{0,0004}=0,02$; $\sqrt{121\cdot 625\cdot 100}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{625}\cdot\sqrt{100}=$ $=11\cdot 25\cdot 10=2750$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $b\ne 0$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\left\lvert\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right\rvert$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$; $\sqrt{\dfrac{144}{169}}=\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}=\dfrac{12}{13}$
$\left(\sqrt{a}\right)^p=\sqrt{a^p}$; $\sqrt{a^p}=\left(\sqrt{\lvert a\rvert}\right)^p$	$\sqrt{9^3}=\left(\sqrt{9}\right)^3=3^3=27$

Окончание таблицы

Если $a > 1$, то $a > \sqrt{a}$ и $\sqrt{a} > 1$; если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a}$ и $0 < \sqrt{a} < 1$	$7 > \sqrt{7}$ и $\sqrt{7} > 1$; $\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}} < 1$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$\sqrt{3} > \sqrt{2}$, т. к. $3 > 2$

Арифметические корни n-й степени при $n \geq 2$, $n \in N$

Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a: $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a} = b \\ n \in N,\ a \geq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$	$\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$; $\sqrt[5]{1024} = 4$; $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$
Если $a < 0$, то $\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$; $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3} = -\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} =$ $= -\left(2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 2$
Корень чётной степени из отрицательного числа не определён	
Тождества	
Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$, $a \in R$; $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a$, $a \in R$;	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$; $\left(\sqrt[5]{\ \ 2}\right)^5 = -2$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert -2 \rvert = 2$; $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$

Основные свойства арифметического корня *n*-й степени	
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0,\ m \in Z,\ n \in N$	$\sqrt[6]{8^8} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16$; $\sqrt[12]{m^3} = \sqrt[4]{m}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \quad \sqrt[mn]{a}$, $a \geq 0,\ n \in N,\ n \neq 1$	$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} \quad \sqrt[15]{7}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0,\ k \in N$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $n \in N,\ n \geq 2,\ a \geq 0,\ b \geq 0$	$\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10$; $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $n \in N,\ n \geq 2,\ a \geq 0,\ b > 0$	$\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{5}{3}$; $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\dfrac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ и $\sqrt[n]{a} < a$; если $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt[n]{a} < 1$; $\sqrt[n]{a} > a$	$\sqrt[7]{5} > \sqrt[7]{3}$, т. к. $5 > 3$; $\sqrt[5]{2} > 1$, $\sqrt[5]{2} < 2$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} < 1$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} > \dfrac{1}{2}$

Степень с рациональным показателем и её свойства

Степень с рациональным показателем	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \neq 0,\ m \in Z,\ n \in N,$ $n > 2$	$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$; $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$; $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$; $32^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{32^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \dfrac{1}{4}$

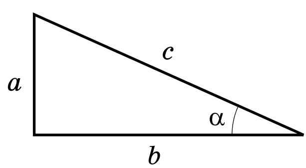
Свойства степени
с действительным показателем

Степень с иррациональным показателем	
a^k, где k — иррациональное число, $a \neq 0$	$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1,4142...} \approx 25,9$

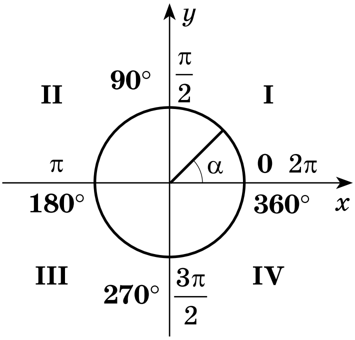
ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

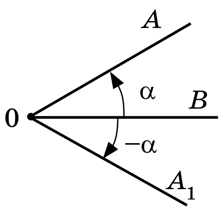
Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

	a, b — катеты; c — гипотенуза; α — острый угол
Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему	$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$
Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$

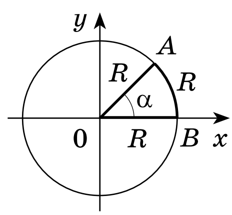
Углы в тригонометрии

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Оси координат Ox и Oy разбивают окружность на четыре четверти:
I четверть: $0° < \alpha < 90°$;
II четверть: $90° < \alpha < 180°$;
III четверть: $180° < \alpha < 270°$;
IV четверть: $270° < \alpha < 360°$</td>
</tr>
<tr>
<td>


$\angle AOB = \alpha$; $\angle A_1OB = -\alpha$
</td>
<td>В тригонометрии угол рассматривается как фигура, образованная вращением луча вокруг своей начальной точки O.
Вращение против часовой стрелки — положительное, по часовой — отрицательное</td>
</tr>
</table>

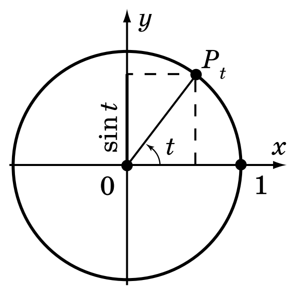
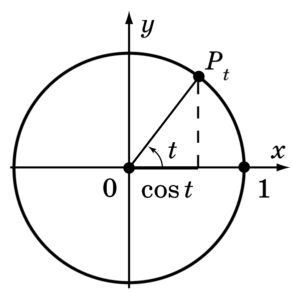
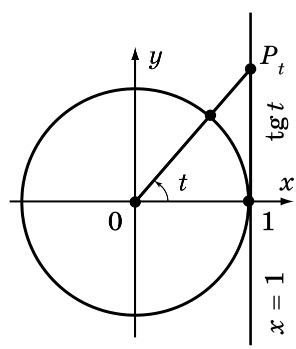
Радианная мера угла

<table>
<tr>
<th colspan="2">Углы измеряются в градусах и радианах</th>
</tr>
<tr>
<td>1° — это угол, который равен $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла.
$1° = 60'$ (60 минут)
$1' = 60''$ (60 секунд)
$$1° = \frac{\pi}{180°}$$
$$n° = \frac{\pi \cdot n}{180°}$$
$$135° = \frac{\pi \cdot 135°}{180°} = \frac{3\pi}{4}$$</td>
<td>


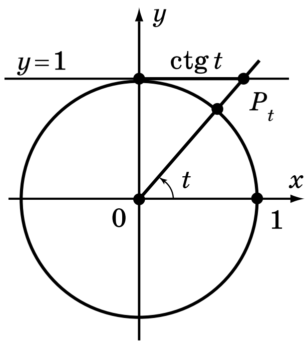
$\smile AB = R$, $\alpha = 1$
1 радиан — это центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная радиусу этой окружности.
$$1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi}$$
</td>
</tr>
</table>

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Синус, косинус, тангенс и котангенс числа

Синусом ($\sin t$) числа t называется ордината точки P_t единичной окружности. Наименьший положительный период $T=2\pi$	
Косинусом ($\cos t$) числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности. Наименьший положительный период $T=2\pi$	
Тангенсом ($\operatorname{tg} t$) числа t называют отношение $\sin t$ и $\cos t$. Ось тангенсов — прямая $x=1$. $\operatorname{tg} t$ — ордината соответствующей точки оси тангенсов: $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$. Наименьший положительный период $T=\pi$	

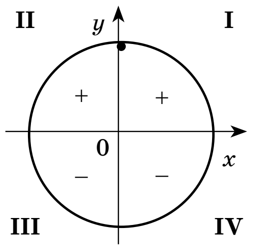
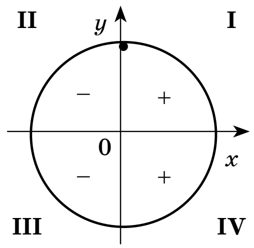
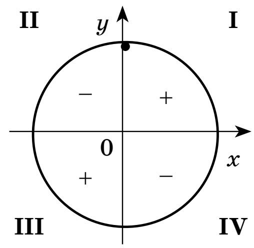
Окончание таблицы

Котангенсом ($\mathrm{ctg}\,t$) числа t называют отношение $\cos t$ и $\sin t$. Ось котангенсов — прямая $y=1$. $\mathrm{ctg}\,t$ — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов: $\mathrm{ctg}\,t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$. Наименьший положительный период $T=\pi$	

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

t, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t, градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$ / $\operatorname{ctg} t$
		

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, $\alpha \in R$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $a \neq \pi n,\ n \in Z$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,\ n \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, $a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$, $a \neq \pi n,\ n \in Z$

Сумма и разность тригонометрических фукций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

Формулы приведения

t	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin t$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos t$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,t$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\,t$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$

Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha,\ \beta,\ a \pm b \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha,\ \beta,\ a \pm b \neq \pi n,\ n \in Z$$

Синус и косинус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \qquad 2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифм числа

Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b*	
Обозначается: $\log_a b$ $a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$	**Читается:** логарифм *b* по основанию *a*

Показательное равенство		**Логарифмическое равенство**
$a^x = b$		$x = \log_a b$
x — показатель степени;	$\Leftrightarrow$	x — логарифм числа a по основанию b;
a — основание степени;		a — основание логарифма;
b — степень числа a		b — число, стоящее под знаком логарифма

$$2^7 = 128 \Leftrightarrow \log_2 128 = 7;$$

$$\log_3 = \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9};\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$$

Основное логарифмическое тождество	
$a^{\log_a b} = b$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	$5^{\log_5 3} = 3$; $3^{\log_3 5} = 5$; $10^{\lg 7} = 7$; $e^{\ln 3} = 3$
$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$, $a > 0,\ a \neq 1$	$\log_3 1 = 0$; $\lg 1 = 0$; $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$; $\ln 1 = 0$

Логарифм произведения, частного, степени

Логарифм произведения	
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, $c \neq 1$	$\log_8 2 + \log_8 4 =$ $= \log_8 2 \cdot 4 = \log_8 8 = 1$; $\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) =$ $= \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$
Логарифм частного	
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, $c \neq 1$	$\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = \log_3 3 = 1$; $\log_2 \frac{2}{7} = \log_2 2 - \log_2 7 = 1 - \log_2 7$
Логарифм степени	
$\log_c a^k = k \log_c a$; $a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$, $k \in \mathrm{R}$	$\log_3 3^{10} = 10 \log_3 3 = 10$; $\lg 10^p = p \lg 10 = p$; $3 \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$
$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$, $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$, $m,\ n \in \mathrm{R},\ m \neq 0$	$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Переход к новому основанию	
$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$; $a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,$ $c > 0,\ c \neq 1$	$\log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a}$; $\log_3 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 3}$
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$	$\log_{36} 6 = \dfrac{1}{\log_6 36} = \dfrac{1}{2}$
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$; $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,$ $b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1$	$8^{\log_2 5} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$
Сравнение логарифмов	
Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (знак неравенства не меняется)	$2 < 3,\ \lg 2 < \lg 3$
Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (знак неравенства меняется)	$2 < 3,\ \log_{0,5} 2 > \log_{0,5} 3$

Десятичный и натуральный логарифм, число *e*

Логарифмы по основанию 10 называют **десятичными**: $\log_{10} a = \lg a$	$\lg 10 = 1$; $\lg 0,1 = -1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 0,01 = -2$; $\lg 1000 = 3$; $\lg 0,001 = -3$
Логарифмы по основанию e называют **натуральными**: $\log_e a = \ln a$. $e = 2,718281...$ — иррациональное число; $e \approx 2,7$	$\ln e = 1$; $\ln \dfrac{1}{e} = -1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln \dfrac{1}{e^2} = -2$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Преобразование выражений, включающих арифметические операции

Числовые выражения. Действия с десятичными дробями	
Сложение и вычитание десятичных дробей: а) уравнять количество знаков после запятой, записать запятую под запятой; б) выполнить сложение, вычитание, не обращая внимания на запятую; в) поставить в ответе запятую под запятой	$0{,}37+26{,}5=26{,}87$ $\begin{array}{r} 0{,}37 \\ +\,26{,}50 \\ \hline 26{,}87 \end{array}$ $37-0{,}075=36{,}925$ $\begin{array}{r} 37{,}000 \\ -\,0{,}075 \\ \hline 36{,}925 \end{array}$
Умножение десятичных дробей: а) выполнить действие, не обращая внимания на запятую; б) отделить в произведении столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе	$\begin{array}{r} 0{,}\overset{\frown}{215} \\ \times\,0{,}03 \\ \hline 0{,}\overset{\frown}{00}\overset{\frown}{645} \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ \times\,0{,}\overset{\frown}{003} \\ \hline 0{,}045 \end{array}$
Деление десятичных дробей: 1. *На натуральное число:* а) разделить дробь на число, не обращая внимания на запятую; б) поставить в частном запятую после того, как закончено деление целой части; в) если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых. 2. *На десятичную дробь*: в делимом и делителе запятую перенести на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, и выполнить деление десятичной дроби на натуральное число	$\begin{array}{r\|l} -30{,}6 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{27} & 3{,}4 \\ -36 & \\ \underline{36} & \\ 0 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} -3{,}56 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{32} & 0{,}89 \\ -36 & \\ \underline{36} & \\ 0 & \end{array}$ $8{,}46:0{,}6=84{,}6:6=14{,}1;$ $0{,}00612:0{,}03=$ $=0{,}612:3=0{,}204;$ $27:0{,}15=2700:15=180$

Арифметические действия с рациональными числами	
Сложение чисел с одинаковыми знаками: сложить модули данных чисел, перед суммой поставить общий знак	а) $(-6)+(-3{,}7)=-(6+3{,}7)=-9{,}7$; б) $-5\frac{7}{8}+\left(-6\frac{3}{4}\right)=-\left(5\frac{7}{8}+6\frac{6}{8}\right)=$ $=-11\frac{13}{8}=-12\frac{5}{8}$
Сложение чисел с разными знаками: модуль суммы равен разности модулей слагаемых, знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль	а) $4+(-10)=-(10-4)=-6$; б) $5{,}6+(-4{,}1)=5{,}6-4{,}1=1{,}5$
Вычитание чисел: чтобы вычесть из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a-b=a+(-b)$	а) $-7-3=-7+(-3)=-10$; б) $-5-(-11{,}3)=-5+11{,}3=6{,}3$; в) $10-25=10+(-25)=-15$
Умножение и деление чисел: а) произведение (частное) чисел **одного знака** есть число **положительное;**	$-6\cdot(-2{,}1)=12{,}6$; $-22:\left(-\frac{11}{17}\right)=\frac{22\cdot 17}{11}=34$;
б) произведение (частное) двух чисел с **разными знаками** есть число **отрицательное**	$24:(-3)=-8$; $-5:8=-\frac{5}{8}$

Правила раскрытия скобок в числовых выражениях и выражениях с переменной	
1. Если перед скобками стоит **знак «+»**, то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «+»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, сохранив их знаки; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «+»	а) $-7{,}21+(3{,}5+7{,}21)=$ $=-7{,}21+3{,}5+7{,}21=3{,}5$; б) $3{,}7+(-2{,}3+5)=$ $=3{,}7-2{,}3+5=6{,}4$; в) $a+(b-2a)=a+b-2a=$ $=b-a$; г) $3x+(-x+2y)=$ $=3x-x+2y=2x+2y$
2. Если перед скобками стоит **знак «–»**, то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «–»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, поменяв знаки всех слагаемых на противоположные; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «–»	а) $-2{,}5-(5{,}6+2{,}5)=$ $=-2{,}5-5{,}6-2{,}5=-10{,}6$; б) $-7{,}8-(-3{,}2-6{,}8)=$ $=-7{,}8+3{,}2+6{,}8=2{,}2$; в) $a-(b-2a)=a-b+2a=$ $=3a-b$; г) $3x-(-x+2y)=$ $=3x+x-2y=4x-2y$

Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

Формулы сокращённого умножения	
Квадрат суммы	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Куб суммы	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3a^2b+b^3$
Куб разности	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Сумма кубов	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Разность квадратов	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
Разность кубов	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень	
Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$
Частное степеней с одинаковым показателем	$a^p : a^q = a^{p-q}$; $a^{p-q} = a^p : q^q = \dfrac{a^p}{a^q}$
Степень степени	$(a^p)^q = a^{pq}$; $a^{pq} = (a^p)^q = (a^q)^p$
Степень произведения и частного	$(ab)^p = a^p \cdot b^p$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$; $a^p \cdot b^p = (ab)^p$; $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$

Сравнение степеней	
Основания различны	**Основания одинаковы**
Если $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$, $a^r > b^r$ при $r < 0$, r — рациональное число	Если $r > p$, то $a^r > a^p$ при $a > 1$, $a^r < a^p$ при $0 < a < 1$, r, p — рациональные числа

Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени

Корень из произведения и произведение корней	Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
Корень из частного, частное корней	Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ и $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $n \in N$

Окончание таблицы

Корень из степени и степень из корня	Если $a > 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $n \in N$, $n \geq 2$; $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$
Корень степени m из корня степени n	Если $a \geq 0$, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \quad \sqrt[mn]{a}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, m, $n \in N$

Тождественные преобразования иррациональных выражений	
Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^m}$, $n \in N$, $n \geq 2$, $a \geq 0$
Внесение множителя под знак корня	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$
Приведение подкоренного выражения к целому виду (иррациональность в знаменателе)	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\dfrac{ab^{n-k}}{b^k b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\dfrac{ab^{n-k}}{b^n}} = \dfrac{1}{b}\sqrt{ab^{n-k}}$, $a \geq 0$, $b > 0$
Действия с корнями различных показателей	а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$; б) $\sqrt[3]{18} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 3^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$; в) $\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} =$ $= \sqrt[4]{\left(4+\sqrt{7}\right)^2}\sqrt[4]{\left(23-8\sqrt{7}\right)} =$ $= \sqrt[4]{\left(16+8\sqrt{7}+7\right)\left(23 \quad 8\sqrt{7}\right)} =$ $= \sqrt[4]{\left(23+8\sqrt{7}\right)\left(23-8\sqrt{7}\right)} =$ $= \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3$
Формула двойного радикала	$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Преобразование тригонометрических выражений

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Формулы	Примеры
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;$ $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	**Упрощение выражений** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

Тождество

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Доказательство:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}=\frac{2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$$

Формулы сложения

$\sin(\alpha\pm\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	**Вычисление значений выражений** $\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=$ $\cos60^\circ\cos45^\circ-\sin60^\circ\sin45^\circ=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}=\dfrac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$

Формулы сложения
Упрощение выражений $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+$ $+\sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$

Формулы двойного угла	
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\cos 2\alpha =$ $=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	**Нахождение тригонометрических функций двойного угла** $\sin\alpha = -0{,}6;\ 180° < \alpha < 270°;$ $\sin 2\alpha$ — ? $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} =$ $= -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8,$ т. е. $\cos\alpha<0$, т. к. $180°<\alpha<270°$. $\sin 2\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$
Упрощение выражений а) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) =$ $= 2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1;$ б) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha-(1-\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} =$ $= \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$	

Формулы приведения	
Для преобразования выражений вида: $\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right);\ \cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right);$ $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right);\ \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),$ $n \in Z$ используются правила:	**Нахождение значений выражений** а) $\sin\dfrac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right) =$ $= \sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right) =$ $= \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

а) перед приведённой функцией ставится знак исходной функции в этой четверти; б) функция не меняется на кофункцию, если n — чётное; меняется, если n — нечётное (кофункциями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ являются $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$ соответственно)	б) $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \mathrm{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\,330^\circ = \mathrm{ctg}(270^\circ + 60^\circ) = -\mathrm{tg}\,60^\circ = -\sqrt{3}$

Упрощение выражений

$$\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \mathrm{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha - \cos\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Преобразование суммы в произведение

$$\cos 40^\circ + \cos 10^\circ = 2\cos\frac{40^\circ + 10^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ - 10^\circ}{2} = 2\cos 25^\circ \cos 15^\circ$$

Окончание таблицы

Упрощение выражений
$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Дополнительные тригонометрические формулы
$\sin 3\alpha = 3\ \sin\alpha - 4\ \sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\ \cos^3\alpha - 3\ \cos\alpha$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha-\beta)$; $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\ \sin(\beta-\alpha)$; $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos(\alpha+\beta)\ \cos(\alpha-\beta)$; $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования

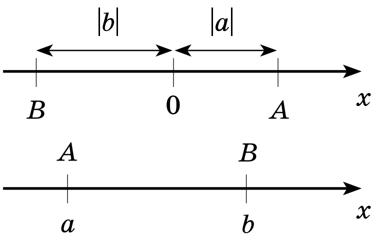
Логарифм произведения и сумма логарифмов	$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$; $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$, $x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1$
Логарифм частного и разность логарифмов	$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$; $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$, $x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Окончание таблицы

Логарифм степени и произведение числа и логарифма	$\log_a x^n = n \log_a x;$ $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x,$ $x > 0,\ a > 0,\ a \ne 1,\ k \ne 0;$ $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x,$ $x > 0,\ a > 0,\ a \ne 1,\ k \ne 0$
Формула перехода к новому основанию	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$ $a > 0,\ a \ne 1,\ b > 0,\ b \ne 1,\ x > 0;$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
Основное логарифмическое тождество	$a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \ne 1,\ b > 0$

Логарифмирование и потенцирование	
Нахождение логарифмов чисел или выражений называется **логарифмированием**	$x = \frac{3x^7\sqrt{y}}{2b^3},$ $x > 0,\ y > 0,\ b > 0,\ a > 0,\ a \ne 1$
$\log_a x = \log_a \frac{3x^7\sqrt{y}}{2b^3} = \log_a 3 + \log_a x^7 + \log_a \sqrt{y} - (\log_a 2 + \log_a b^3) =$ $= \log_a 3 + 7\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a 2 - 3\log_a b$	
Нахождение чисел или выражений по данным логарифмам называется **потенцированием**	$\lg x = \lg 5 - 3\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 9;$ $\lg x = \lg 5 - \lg 2^3 + \lg\sqrt{9};$ $\lg x = \lg\frac{5\cdot\sqrt{9}}{2^3};\ \lg x = \lg\frac{15}{8};\ x = \frac{15}{8}$

Модуль (абсолютная величина) числа

<table>
<tr>
<td>$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ -a, \text{ если } a < 0; \\ 0, \text{ если } a = 0 \end{cases}$$</td>
<td>$|3{,}7| = 3{,}7$; $\left|-\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$; $|0| = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если точка A имеет на числовой прямой координату a, то расстояние от точки A до точки O равно $|a|$,
т. е. $AO = |a|$.
Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на прямой равно $|a-b|$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Свойства модуля</td>
</tr>
<tr>
<td>$|a| \geq 0$
$|-a| = |a|$
$a \leq |a|$
$|a+b| \leq |a|+|b|$
$|a+b| \geq |a|-|b|$
$|a-b| \geq ||a|-|b||$
$|a-b| \leq ||a|+|b||$</td>
<td>$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
$|ab| = |a| \cdot |b|$
$|a^n| = |a|^n$, $n \in N$
$|a|^2 = a^2$; $|a|^{2k} = a^{2k}$
$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$</td>
</tr>
<tr>
<td>По определению модуля
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$</td>
<td>$$|a-2| = \begin{cases} a-2, \text{ если } a-2 \geq 0; \\ -(a-2), \text{ если } a-2 < 0, \end{cases}$$
т. е. $|a-2| = \begin{cases} a-2, \text{ если } a \geq 2; \\ -a+2, \text{ если } a < 2 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

УРАВНЕНИЯ

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа	$2x^2+5x-4=0$ $a=2$ — первый коэффициент; $b=5$ — второй коэффициент; $c=-4$ — свободный член
Если $a=1$, то уравнение $x^2+bx+c=0$ называется **приведённым**	$x^2-6c+8=0$
Если в уравнении $b=0$ и (или) $c=0$, то уравнение называют **неполным.** $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $ax^2=0$	$2x^2+3x=0$; $x^2-4=0$; $-5x^2=0$

Решение неполных квадратных уравнений

<table>
<tr><th colspan="2">Виды уравнений</th><th colspan="2">Примеры</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\boxed{c=0}$
$ax^2+bx=0$
$x(ax+b)=0$
$x_1=0$;
$x_2=-\frac{b}{a}$</td><td colspan="2">$2x^2-7x=0$
$x(2x-7)=0$
$x=0$ или $2x-7=0$
$x_1=0$;
$x_2=3,5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boxed{b=0}$
$ax^2+c=0$
$ax^2=-c$:</td><td rowspan="2">а) $3x^2-9=0$
$3x^2=9$
$x^2=3$
$x_1=\sqrt{3}$;
$x_2=-\sqrt{3}$</td><td rowspan="2">б) $x^2+16=0$
$x^2=-16$
корней нет</td></tr>
<tr><td>а) $c>0$,
корней нет;</td><td>б) $c<0$,
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

$\boxed{\mathbf{b = 0,\ c = 0}}$ $ax^2 = 0$ $x = 0$	$7x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$

Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$ по формуле

$D = b^2-4ac$	**Корни уравнения**
$D > 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$
$D < 0$	корней нет
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	

Частные формулы для решения квадратных уравнений	
Квадратное уравнение **с чётным вторым коэффициентом**	$ax^2+2kx+c = 0$ ($b = 2k$) $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$
Приведённое квадратное уравнение с чётным вторым коэффициентом	$x^2+2kx+c = 0$ ($a = 1,\ b = 2k$) $x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$
Квадратный трёхчлен	
Квадратный трёхчлен — это многочлен второй степени	ax^2+bc+c ($a \neq 0$)
Корень квадратного трёхчлена ax^2+bx+c	число x_0, для которого $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$
Корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Теорема Виета
Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ Если x_1 и x_2 — корни квадратного приведённого трёхчлена x^2+bx+c, то $x_1+x_2=-b$; $x_1\cdot x_2=c$

Разложение квадратного трёхчлена на множители	
Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то выполняется равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$2x^2-x-3$ имеет корни $x_1=1{,}5$ и $x_2=-1$, тогда $2x^2-x-3=2(x-1{,}5)(x+1)=$ $=(2x-3)(x+1)$

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Рациональные уравнения — уравнения, в которых левая и правая части представлены рациональными выражениями

⇓ ⇓

Целые — левая и правая части — целые выражения.
$3(x-1)=x+3$; $\frac{1}{3}x=\frac{x-2}{2}$

Дробные — уравнения, у которых хотя бы одна часть — дробное выражение.
$\frac{2x+1}{x}=4$ или $\frac{x}{x-1}=\frac{3}{x+1}$

Рациональные уравнения

Уравнение — равенство, содержащее переменную	$3x=0$; $x^2+3=8$; $x(x-2)=7$
Корень уравнения (решение) — значение переменной, при подстановке которой в уравнение получается верное равенство	$x^3+x=0$ — один корень: $x=0$; $(x-1)(x+2)=0$ — два корня: $x=1$ и $x=-2$;

Окончание таблицы

	$\sin x = \frac{1}{2}$ — бесчисленное множество корней; $x^2+x+1=0$ — нет корней; $x^2+2x+1=(x+1)^2$ — бесчисленное множество корней, $x \in R$
Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет	$2x-7=3$; $x=5$ $2x-1=2x$; корней нет
Равносильные уравнения — уравнения, имеющие одни и те же корни или не имеющие корней	$x-3=6$ и $\frac{x^2+81}{x+9}=0$

Свойства уравнений	
Если из одной части уравнения перенести слагаемые в другую часть и при этом изменить знак слагаемых на противоположный, получим уравнение, равносильное данному. При делении (умножении) обеих частей уравнения на одно и то же число, неравное нулю, получим уравнение, равносильное данному	$-2(2x-3)+3=17$; $-4x+6+3=17$; $-4x=17-6-3$; $-4x=8$; $x=8:(-4)$; $x=-2$

Линейные уравнения $ax=b$ (приводимые к виду $ax=b$)

$a \neq 0$	$a = b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
один корень $x = \frac{b}{a}$	бесчисленное множество корней $x \in R$	корней нет

$a \neq 0$	$a = b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
$2x = -7;\ x = -\frac{7}{2};$ $x = -3{,}5$	$0 \cdot x = 0;$ $x \in R$	$0 \cdot x = 7;$ корней нет

Дробно-рациональные уравнения

Алгоритм решения	Пример
1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение. 2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель. 3. Решить полученное целое уравнение. 4. Исключить из его корней те, которые обращают знаменатель в нуль	$\frac{x-2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{-3}{x(x-3)}$ *Решение*. Общий знаменатель: $x(x-3)$. Умножим на него обе части ($x \neq 0$ и $x \neq 3$): $\frac{(x-2) \cdot x(x-3)}{x-3} + \frac{1 \cdot x(x-3)}{x} =$ $= -\frac{3x(x-3)}{x(x-3)};$ $(x-2)x + x - 3 = -3;\ x^2 - x = 0;$ $x_1 = 0;\ x_2 = 1;$ но $x \neq 0$. *Ответ*: 1

Целые уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным

Метод решения	Пример
Разложение многочлена на множители	$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0;$ $x^2(x-1) - 9(x-1) = 0;$ $(x-1)(x^2-9) = 0;$ $(x-1)(x-3)(x+3) = 0;$ $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -3$
Замена переменной	Биквадратное уравнение: $x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$ *Решение*. Сделаем замену: $x^2 = t$. $t^2 + 5t - 36 = 0;\ t_1 = 4;\ x^2 = 4;$ $x_{1,2} = \pm 2;\ t_2 = -9;\ x^2 = -9;$ уравнение корней не имеет. *Ответ*: $-2;\ 2$

Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называется **иррациональным**	$\sqrt{x+3}=4$; $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}+2$
Особенности решения иррациональных уравнений	
1. У уравнения корни чётной степени — арифметические, поэтому значение корня и подкоренное выражение неотрицательно. 2. Решение уравнения начинают с нахождения области определения (**область определения** (или область допустимых значений) — это множество всех действительных чисел x, при которых одновременно имеют смысл все выражения, входящие в уравнение)	
Основные методы решения иррациональных уравнений	
Возведение обеих частей уравнения в степень	**Пример.** $\sqrt{9-x}=x+3$ *Решение.* Область определения функции: $9-x\geq 0,\ x\leq 9.\ \left(\sqrt{9-x}\right)^2=(x+3)^2$; $9-x=x^2+6x+9$; $x(x+7)=0;\ x_1=0;\ x_2=-7.$ Проверка показала, что $x=-7$ — посторонний корень. *Ответ*: 0
«Изоляция» корня	**Пример.** $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$ *Решение.* ОДЗ: $\begin{cases}x+2\geq 0;\\3-x\geq 0,\end{cases}$ $x\in[-2;\ 3].$ $\sqrt{x+2}=3-\sqrt{3-x}$; $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(3-\sqrt{3-x}\right)^2$;

Окончание таблицы

	$x+2=9-6\sqrt{3-x}+3-x$; $5-x=3\sqrt{3-x}$; $25-10x+x^2=9(3-x)$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$; $x_2=2$. Проверка показала, что оба корня являются корнями уравнения. *Ответ*: -1; 2
Уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$ возводят в степень, k — наименьшее общее кратное чисел m и n	**Пример.** $\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{x+3}$ *Решение.* ОДЗ: $x\geq 1$. Возведём обе части уравнения в шестую степень: $\left(\sqrt{x-1}\right)^6=\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^6$; $(x-1)^3=(x+3)^2$; $x^3-4x^2-3x-10=0$. Подбором находим $x=5$. $(x-5)(x^2+x+2)=0$; $x^2+x+2=0$ — корней не имеет. Проверка показала, что $x=5$ — корень уравнения. *Ответ*: 5

Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

$\boxed{\sin x=a}$ $\lvert a\rvert>1$ — корней нет; $\lvert a\rvert\leq 1$; $x=(-1)^n$ $\arcsin a+\pi n$, $n\in Z$; $\boxed{\sin x=0}$ $x=\pi k$, $k\in Z$;	а) $\sin x=\sqrt{3}$; корней нет, т. к. $\sqrt{3}>1$; б) $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; в) $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; г) $\sin x=\frac{1}{3}$; $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$;

Окончание таблицы

$\boxed{\sin x = 1}$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \notin Z;$ $\boxed{\sin x = -1}$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \notin Z$	д) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{7};$ $3x - \dfrac{\pi}{6} = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{1}{7} + \pi n;$ $3x = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{7} + \dfrac{\pi}{6} + \pi n;$ $x = (-1)^n \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{1}{7} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ — корней нет; $\lvert a\rvert \le 1;$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n,$ $n \in Z;$ $\boxed{\cos x = 0}$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \notin Z;$ $\boxed{\cos x = 1}$ $x = 2\pi k,\ k \in Z;$ $\boxed{\cos x = -1}$ $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	а) $\cos x = -15$; корней нет, т. к. $\lvert -15\rvert > 1;$ б) $\cos x = \dfrac{1}{2};\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ в) $\cos x = -\dfrac{1}{2};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ г) $\cos x = \dfrac{2}{3};\ x = \pm\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ д) $\cos x = -\dfrac{2}{3};$ $x = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{2}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$ е) $\cos\dfrac{x}{3} = 1;\ \dfrac{x}{3} = 2\pi n;\ x = 6\pi n,\ n \in Z$
$\boxed{\operatorname{tg} x = a}$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$ $k \in Z$	а) $\operatorname{tg} x = 3;\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\operatorname{tg} x = -4;\ x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n,\ n \in Z;$ в) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{4} = 1;\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{\pi}{4} + pn;\ x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z$
$\boxed{\operatorname{ctg} x = a}$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,$ $k \in Z$	а) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$ б) $\operatorname{ctg} x = -3;\ x = \pi - \operatorname{arcctg} 3 + \pi k,\ k \in Z;$ в) $\operatorname{ctg} x = -1;\ x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

<table>
<tr><th colspan="2">Основные методы решения тригонометрических уравнений</th></tr>
<tr><td colspan="2">Тригонометрические уравнения, приводимые к уравнениям от одной тригонометрической функции одной переменной, решаются (как правило) методом подстановки</td></tr>
<tr><td>$\sin^2 x+4\cos x = 2{,}75;$
$1-\cos^2 x+4\cos^2 x = 2{,}75;$
$\cos x = t,\ |t| \le 1;$
$t^2-4t+1{,}75 = 0;$
$t = \frac{1}{2};\ x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z;$
$t = \frac{7}{2} > 1$, решений нет</td><td>$\mathrm{tg}\,x+3\,\mathrm{ctg}\,x = 4;$
$\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{\mathrm{tg}\,x} = 4;$
$\mathrm{tg}\,x = t;\ t^2-4t+3 = 0;$
$t = 1,\ t = 3;$
$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n; \\ x = \mathrm{arctg}\,3 + \pi k, \end{array}\right. \quad n,\ k \in Z$</td></tr>
</table>

Обратные тригонометрические функции

<table>
<tr><th>Определение</th><th>Свойства</th></tr>
<tr><td>Арксинусом числа a называется угол (число) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.
$\boxed{\arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\varphi = a \end{cases}$
$|a| \le 1$</td><td>$\arcsin(-a) = -\arcsin a;$
$\sin(\arcsin a) = a;$
$\arcsin(\sin\varphi) = \varphi,$
если $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$</td></tr>
<tr><td>Арккосинусом числа a называется угол (число) из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.
$\boxed{\arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in [0; \pi] \\ \cos\varphi = a \end{cases}$
$|a| \le 1$</td><td>$\arccos(-a) = \pi-\arccos a;$
$\cos(\arccos a) = a;$
$\arccos(\cos\varphi) = \varphi,$
если $\varphi \in [0; \pi]$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Арктангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. $\boxed{\operatorname{arctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\varphi = a \end{cases}$	$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Арккотангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. $\boxed{\operatorname{arcctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in (0; \pi) \\ \operatorname{ctg}\varphi = a \end{cases}$	$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in (0; \pi)$
$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$; $\quad \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$	

Однородные тригонометрические уравнения и сводящиеся к ним	
$2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$; $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $2\sin x - \cos x = 0$. Корни уравнения $\cos x = 0$ не удовлетворяют этому уравнению. Делим на $\cos x \neq 0$. $2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$5\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2$; $5\sin^2 x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\cos x -$ $- 2\cos^2 x =$ $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$; $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$. $\cos x \neq 0$. Делим на $\cos^2 x$. $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 4 = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n; \\ x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi k, \end{array}\right. \quad n, k \in Z$

Разложение на множители	
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x - 2 = \cos x - 2\sqrt{2}\sin x$; $\sqrt{2}\sin x\cos x - \cos x - 2 + 2\sqrt{2}\sin x = 0$; $\cos x(\sqrt{2}\sin x - 1) - 2(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0$; $(\sqrt{2}\sin x - 1)(\cos x + 2) = 0$	
$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$	или $\cos x + 2 = 0$
$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos x = -2$
$x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	корней нет

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) называются **простейшими показательными**		
$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$ $\Updownarrow$ $f(x) = g(x)$	а) $3^{2x+4} = 9$ $3^{2x+4} = 3^2$ $2x+4 = 2$ $x = -1$	б) $2^{x+3} = -4$ корней нет, т. к. $-4 < 0$
$a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ $\Updownarrow$ $x = \log_a b$	$3^x = 9$ $x = 2$	$2^x = 7$ $x = \log_2 7$
	$2^x = -5$, корней нет	

Основные методы решения показательных уравнений	
Сведение обеих частей уравнения к одному основанию	$2^{x-3}\cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}$; $2^{x-3}\cdot 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-4x}$; $2^{x-3+2x} = 2^{\frac{1}{2}-4x}$; $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x$; $x = \frac{1}{2}$

Окончание таблицы

Вынесение за скобки общего множителя	$5^x-2\cdot5^{x-2}=23;\ 5^{x-2}(5^2-2)=23;$ $5^{x-2}\cdot23=23;\ 5^{x-2}=1;\ 5^{x-2}=5^0;$ $x-2=0;\ x=2$
Замена переменной	$4^{x+1}-3\cdot2^x-10=0;$ $4\cdot4^x-3\cdot2^x-10=0;$ $2^x=t,\ t>0;\ 4^x=2^{2x}=t^2;$ $4t^2-3t-10=0;$ $t=2$ и $t=-\frac{5}{4}$ — не удовлетворяет условию $t>0$; $2^x=2;\ x=1$
Однородные уравнения и сводящиеся к ним	$4^x+3\cdot6^x-4\cdot9^x=0;$ $2^{2x}+3\cdot2^x\cdot3^x-4\cdot3^{2x}=0.$ Делим обе части уравнения на $3^{2x}\neq0$. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-4=0;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=t;$ $t>0;\ t^2+3t-4=0;\ t_1=1,\ t_2=-4;$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1,\ x=0;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=-4$, корней нет

Логарифмические уравнения

Логарифмическими называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма	$\log_2(2x-3)=1;$ $\log_5x^2=\log_5(x+7);$ $\lg\lg x=3$

Основные виды логарифмических уравнений и методы их решения	
$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a^b \\ a>0, \\ a\neq1 \end{cases}$	$\log_2(x-3)=4;$ $\begin{cases} x-3=2^4, \\ x-3>0; \end{cases} x=19$

Продолжение таблицы

$\log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)^b = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\log_x(2x^2-3x-4) = 2;$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 4 = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4$
$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\log_3\left(x^2 - 4x - 5\right) =$ $= \log_3\left(7 - 3x\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x, \\ 7 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0, \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -3$
$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) = h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	$\log_x(3x-1) = \log_x(2x+5);$ $\begin{cases} 3x - 1 = 2x + 5, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$

Окончание таблицы

$\log_a f(x)+\log_a g(x)=$ $=\log_a h(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\cdot g(x)=h(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ h(x)>0\end{cases}$	$\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2;$ $\lg(x-9)(2x-1)=\lg 100;$ $\begin{cases}(x-9)(2x-1)=100,\\ x-9>0,\\ 2x-1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-19x+9=100,\\ x>0,\\ x>\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=13,\\ x=-3,5,\end{array}\right.\\ x>\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $x=13$
$\log_a f(x)-\log_a g(x)=$ $=\log_a h(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a\dfrac{f(x)}{g(x)}=\log_a h(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ h(x)>0\end{cases}$	$\log_2(x+1)=\log_2 8-\log_2(x+3);$ $\log_2(x+1)=\log_2\dfrac{8}{x+3};$ $\begin{cases}x+1=\dfrac{8}{x+3},\\ x+1>0,\\ x+3>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+4x-5=0,\\ x>-1;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-5,\end{array}\right.\\ x>-1;\end{cases}$ $x=1$

Равносильность уравнений, систем уравнений

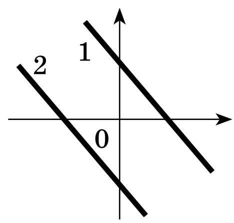
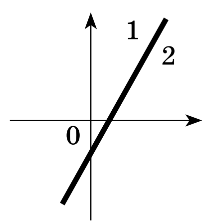
<table>
<tr><td>Два уравнения называются равносильными, если они имеют одни и те же корни</td><td>$\frac{x}{2} = 4$ и $2x - 16 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую (при этом знак слагаемого меняется на противоположный); прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа или функции; умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число или функцию, не равные нулю</td></tr>
<tr><td colspan="2">Две системы называются равносильными, если они имеют одинаковое множество решений или обе несовместны</td></tr>
</table>

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными

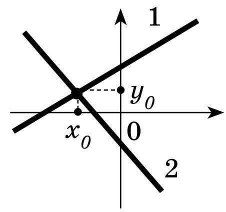
Определение	Примеры
Системой уравнений называют два или несколько уравнений, в которых необходимо найти все общие решения	$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$
Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ Решениями такой системы является упорядоченная пара чисел $(x; y)$	Пара чисел $(3; -1)$ является решением системы $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

Окончание таблицы

Определение	Примеры
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что их нет	
Количество решений линейной системы двух уравнений с двумя переменными в зависимости от коэффициентов при неизвестных: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	

Зависимость коэффициентов	Графическая интерпретация
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, система решений не имеет	 1) $a_1x+b_1y = c_1$; 2) $a_2x+b_2y = c_2$. Прямые параллельны, точек пересечения нет
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, система имеет бесчисленное множество решений (неопределённа)	 1) $a_1x+b_1y = c_1$; 2) $a_2x+b_2y = c_2$. Прямые совпадают, все точки прямых являются решениями

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ — одно решение</td>
<td>

1) $a_1x+b_1y = c_1$;
2) $a_2x+b_2y = c_2$.
Прямые пересекаются, точка пересечения $(x_0; y_0)$ — решение системы</td>
</tr>
</table>

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

<table>
<tr>
<td>Способ подстановки:
1) выразить одну переменную из какого-либо уравнения системы через другую;
2) подставить вместо этой переменной в другое уравнение полученное выражение;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти значение второй переменной;
5) записать ответ</td>
<td>а) $\begin{cases} 3x + 4y = -3, \\ y = 3x + 18. \end{cases}$
Решение.
$\begin{cases} y = 3x + 18, \\ 3x + 4(3x + 18) = -3; \end{cases}$
$3x+12x+72 = -3;\ x = -5;$
$y = 3\cdot(-5)+18 = 3.$
Ответ: $(-5; 3)$.
б) $\begin{cases} 2x + y = \pi, \\ \cos(3x - 2y) = 0,5 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} y = \pi - 2x, \\ \cos(3x - 2\pi + 4x) = 0,5; \end{cases}$
$\cos 7x = 0,5;$
$7x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ x = \pm\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}$,
$k \in Z;$</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы

	$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}, \\ y = \dfrac{19\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}, \\ y = \dfrac{23\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7}; \end{cases}$ $k \in Z$
Метод алгебраического сложения	$\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0. \end{cases}$ *Решение.* Сложим почленно и вычтем уравнения: $+\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0; \end{cases}$ $12 - 2xy = 0;$ $xy = 6;$ $-\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0; \end{cases}$ $2 - 2x + 2y = 0;$ $x - y = 1.$ Получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$ Решим её способом подстановки. *Ответ*: (–2; –3) и (3; 2)
Метод замены переменной	$\begin{cases} 5^x - 3^y = 16, \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$ *Решение.* Обозначим $5^{\frac{x}{2}} = t$, $3^{\frac{y}{2}} = z$ и получим систему алгебраических уравнений.

Окончание таблицы

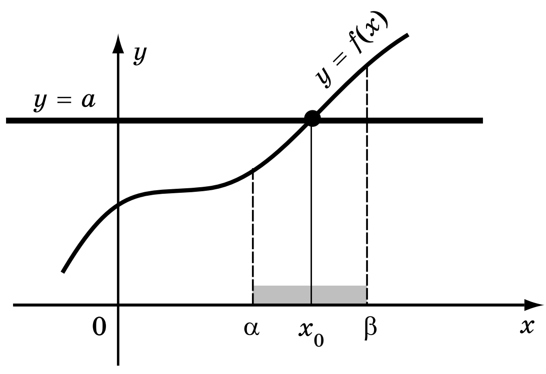
	$\begin{cases} t^2 - z^2 = 16, \\ t - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-z)(t+z) = 16, \\ t - z = 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} 2(t+z) = 16, \\ t - z = \mathbf{2}; \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow t = 5;\ z = 3;$ $5^{\frac{x}{2}} = 5$, $x = 2;$ $3^{\frac{y}{2}} = 3$, $y = 2.$ *Ответ*: (2; 2)

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

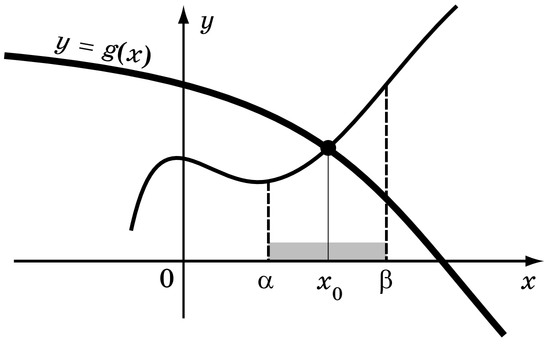
Ограниченность ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения, неравенства или системы состоит из ограниченного количества значений, то для решения уравнения достаточно проверить эти значения	$\sqrt{x^2 - 1} + x = 1 + \sqrt{2 - 2x^2}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0, \\ 2 - 2x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1;$ $x = \pm 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень уравнения. *Ответ*: 1
Оценка левой и правой частей уравнения	
$\left.\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge a \\ g(x) \le a \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$ Если при решении уравнения $f(x) = g(x)$ выяснилось, что $f(x) \ge a$ и $g(x) \le a$, то равенство достигается тогда, когда $f(x) = g(x) = a$	$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 + \lvert x \rvert}$; $f(x) = 1 - x^2 \le 1,$ а $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{\lvert x \rvert}} \ge 1.$ Тогда уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1 - x^2 = 1, \\ \sqrt{1 + \sqrt{\lvert x \rvert}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$ *Ответ*: 0

Окончание таблицы

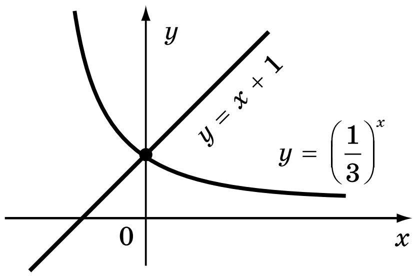
$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0;$ $\begin{cases} f_1(x)\ge 0 \\ f_2(x)\ge 0 \\ \ldots \\ f_n(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots \\ f_n(x)=0 \end{cases}$	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0;$ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\ge 0;$ $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\ge 0;$ $f_3(x)=(x^2-4)^2\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0; \end{cases}$ $x=2.$ *Ответ*: 2.

Использование возрастания и убывания функций
Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение имеет не более одного корня на этом промежутке
 Уравнение $\sqrt{x}+2x^3=3$ имеет один корень $x=1$ ($\sqrt{x}+2\cdot 1^3=3$, т. е. $3=3$), поскольку функция $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ возрастает на всей области определения $x\ge 0$

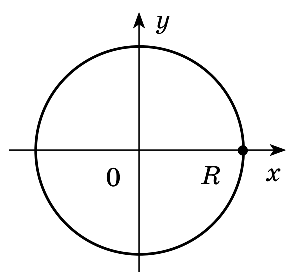
Окончание таблицы

Если в уравнении $f(x) = g(x)$ одна из функций возрастает, а вторая убывает на некотором промежутке, то уравнение имеет на нём не более одного корня
 Уравнение $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ имеет один корень $x = 1$ ($\sqrt{x} + 1^3 = 3 - 1$, т. е. $2 = 2$), поскольку $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ возрастает на всей области определения $x \geq 0$, а $g(x) = 3 - x$ убывает на множестве R и $x \geq 0$; $x = 1$

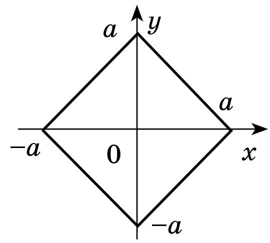
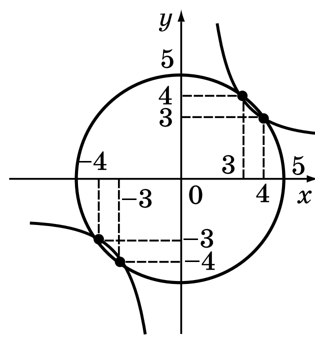
Использование ограниченности функций	
При решении тригонометрических уравнений используют ограниченность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$	$\cos\frac{x}{2} + \cos 2x = 2$, $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, сумма $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ равна 2 тогда и только тогда, когда $\begin{cases}\cos\frac{x}{2} = 1,\\ \cos 2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\pi n,\ n \in Z,\\ x = \pi k,\ k \in Z\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 4\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$

Использование графиков функций
Для решения уравнения $g(x)=f(x)$ нужно построить графики функций $y = g(x)$ и $y=f(x)$ и найти точку их пересечения
 Для решения уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$ построим графики функций $y = x+1$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Они имеют одну общую точку (0; 1). Уравнение имеет один корень: $x = 0$

Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем

Уравнения с двумя переменными — это уравнения вида $f(x; y) = 0$. Упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, которая превращает уравнение в верное равенство, называется **решением уравнения** $f(x; y) = 0$	 $x^2+y^2 = R^2$ Окружность с центром (0; 0) и радиусом R

Окончание таблицы

График уравнения с двумя переменными — это множество всех точек координатной плоскости $(x_0;\ y_0)$, где $(x_0;\ y_0)$ — решения уравнения	 $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert = a$ Квадрат с центром (0; 0), диагонали квадрата лежат на осях Ox и Oy
Система двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f_1(x;\ y) = g_1(x;\ y), \\ f_2(x;\ y) = g_2(x;\ y). \end{cases}$ Чтобы изобразить множество решений системы уравнения с двумя переменными, нужно построить их графики в одной системе координат и найти точки пересечения графиков	 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$ $x^2+y^2=25$ — окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 5 $xy = 12 \Leftrightarrow y = \dfrac{12}{x}$ — гипербола. Графики уравнений пересеклись в точках (4; 3), (3; 4), (−3; −4), (−4; −3)

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений

<table>
<tr><td colspan="2">Прикладные задачи — это задачи, условия которых содержат нематематические понятия. Для решения такой задачи математическими методами составляют математическую модель</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модель — это специально созданный объект, который отображает свойства исследуемого объекта. Математические модели создают, используя математические понятия и отношения: геометрические фигуры, числа, выражения, а также функции, уравнения, неравенства и их системы</td></tr>
<tr><td>Решение прикладной задачи математическими методами осуществляется в три этапа:
1) создание математической модели данной задачи;
2) решение соответственной математической задачи;
3) анализ ответа, интерпретация результата, учёт реальных ограничений</td><td>Схематично этапы решения прикладной задачи выглядят так:
$A \to B \to C \to D$
A — данная прикладная задача;
B — её математическая модель;
C — ответ для модели;
D — ответ для данной прикладной задачи</td></tr>
<tr><td>Задача 1. Сколько досок потребуется для того, чтобы застелить пол в комнате размерами $7{,}5 \cdot 5$ м, если длина доски 6 м, а ширина 0,35 м?</td><td rowspan="2">Это прикладная задача, т. к. в ней говорится про поверхность пола — нематематическое понятие. Математическая модель — задача о нахождении площади прямоугольника.
Анализ результата — нахождение целочисленного решения путём округления с избытком</td></tr>
<tr><td>Решение.
Поверхность пола имеет форму прямоугольника. Найдём площадь этого прямоугольника:
$7{,}5 \cdot 5 = 37{,}5$ (м^2)</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><td colspan="2">Площадь одной доски, которая также представляет собой прямоугольник: $0{,}35 \cdot 6 = 2{,}1$ (м^2).
Значит, досок нужно: $37{,}5 : 2{,}1 = 17{,}86$.
Поскольку количество доски должно быть целым, очевидно, что досок потребуется 18 штук.
Ответ: 18</td></tr>
<tr><td>Задача 2. 30 %-й раствор борной кислоты смешали с 15 %-м раствором и получили 450 г 20 %-го раствора. Сколько граммов исходного раствора взято?</td><td>Раствор борной кислоты — нематематическое понятие.
Математическая модель — система линейных уравнений с двумя переменными</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение.
Взяли x г 30 %-го раствора, y г — 15 %-го раствора.
Масса смеси: $x+y = 450$.
Чистой борной кислоты: $0{,}3x+0{,}15y$ или $450 \cdot 0{,}2$.
Получили систему уравнений:
$\begin{cases} x + y = 450, \\ 0{,}3x + 0{,}15y = 450 \cdot 0{,}2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 150, \\ y = 300. \end{cases}$
Ответ: 15 %-го раствора 300 г, 30 %-го — 150 г</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">При выполнении вычислений с реальными данными результат часто необходимо округлить и выполнить оценку результата</td></tr>
<tr><td colspan="2">Округление чисел</td></tr>
<tr><td>Если число округляют до какого-либо разряда, то все последующие цифры за этим разрядом заменяют нулями, а если они стоят после запятой — отбрасывают</td><td>Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 5, 6, 7, 8, 9, то стоящую перед ним цифру увеличивают на 1.
Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 0, 1, 2, 3, 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменений</td></tr>
</table>

Оценка результатов измерений	
Абсолютная погрешность вычислений — модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением	$\lvert x - a\rvert$ x — точное значение, a — приближённое
При невозможности найти точное значение абсолютной погрешности можно дать **оценку абсолютной погрешности**	a — приближённое значение числа x. $\lvert x-a\rvert \le h$, т. е. число x равно числу a с точностью до h: $x = a \pm h$. Например, запись $x = 3{,}42 \pm 0{,}01$ означает, что x равно $3{,}42$ с точностью до $0{,}01$, т. е. $3{,}41 \le x \le 3{,}43$. Числа $3{,}41$ и $3{,}43$ — приближённые значения числа с недостатком и избытком
Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины, умноженное на $100\,\%$	

НЕРАВЕНСТВА

Квадратные неравенства

Квадратные неравенства — это неравенства, приводимые к виду: $ax^2+bx+c > 0$; $ax^2+bx+c \ge 0$; $ax^2+bx+c < 0$, $ax^2+bx+c \le 0$, $a \ne 0$	$3x^2-7x+1 \ge 0$; $5x^2-1 < 0$ $2x^2+3x-7 \le 0$; $2x^2-3x > 0$

Основные методы решения квадратных неравенств

1. Сведения к решению систем линейных неравенств

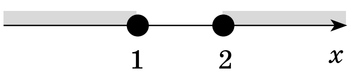
1. Разложить квадратный трёхчлен ax^2+bx+c на множители (x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена).
2. Решить совокупность соответствующих систем линейных неравенств

$$x^2-3x+2\le 0;$$

$$(x-1)(x-2)\le 0.$$

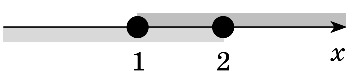
Произведение двух множителей неположительно, значит, множители имеют разные знаки:

$$\begin{cases} x-1\le 0, \\ x-2\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 1, \\ x\ge 2. \end{cases}$$



Система решений не имеет.

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x-2\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 2. \end{cases}$$

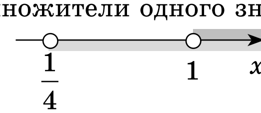


$$1\le x\le 2$$

$$4x^2-3x-1>0;$$

$$4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)>0.$$

Произведение множителей положительно, значит, множители одного знака.



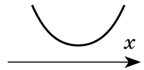
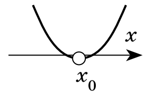
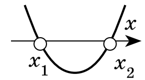
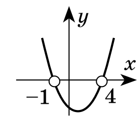
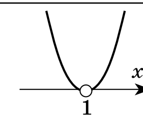
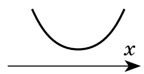
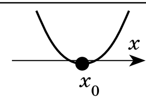
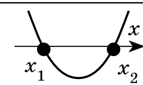
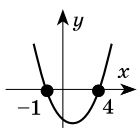
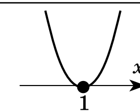
$$\begin{cases} x-1>0, \\ x+\frac{1}{4}>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1, \\ x>-\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1<0, \\ x+\frac{1}{4}<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<1, \\ x<-\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$$

2. Графический метод					
Для решения неравенства вычисляется дискриминант квадратного трёхчлена $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, $\boldsymbol{D = b^2-4ac}$ и его корни $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$					
	$D < \mathbf{0}$	$D = \mathbf{0}$	$D > \mathbf{0}$		
				а) $x^2-3x-4>0$; $D=5>0$; x_1 -1, x_2 4.	
$ax^2+bx+c<0$	решений нет	решений нет	$x \in (x_1;\ x^2)$	б) $x^2+5x+12>0$; $D=-17<0$; $x \in (-\infty;\ \infty)$	
$ax^2+bx+c>0$	$x \in R$	$x \in (-\infty;$ $x_0) \cup (x_0;$ $+\infty)$	$x \in (-\infty;\ x_1)$ $\cup (x_2;\ +\infty)$	в) $x^2-2x+1>0$; $D=0$; x_0 1; $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$	
				а) $x^2-3x-4 \le 0$; $D=5>0$; $x \in [-1;\ 4]$	
$ax^2+bx+c \le 0$	решений нет	$x = x_0$	$x \in [x_1;\ x_2]$	б) $x^2+5x+12 \le 0$; $D=-17<0$; решений нет	
$ax^2+bx+c \ge 0$	$x \in R$	$x \in R$	$x \in (-\infty;\ x_1]$ $\cup [x_2;\ +\infty)$	в) $x^2-2x+1 \le 0$; $D=0$; x_0 1; $x=1$	

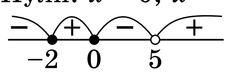
Рациональные неравенства

Неравенства вида $P_n(x) > 0$, $P_n(x) \ge 0$; $P_n(x) < 0$, $P_n(x) \le 0$, а также неравенства

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0, \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \ge 0$$

$$\text{и} \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0, \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \le 0,$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно, называются **рациональными**

Основные методы решения рациональных неравенств	
Метод интервалов 1. Найти область определения функции $F(x)$ и промежутки, на которых она непрерывна. 2. Найти нули функции $F(x)$. 3. Нанести на числовую ось найденные промежутки и нули. 4. Определить интервалы знакопостоянства. 5. Записать ответ	$\dfrac{x(x+2)}{x-5} \le 0.$ Рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{x(x+2)}{x-5}$. Область определения функции: $D(F) = (-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$. Нули: $x = 0$; $x = -2$.  *Ответ*: $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ 5)$
Метод замены переменной (метод подстановки)	$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 < 0.$ *Замена*: $t = x^2-x$; $t^2-8t+12 < 0.$ *Решение*: $2 < t < 6$. Получим систему: $\begin{cases} x^2 - x < 6, \\ x^2 - x > 2. \end{cases}$ Решением системы является объединение множества $x \in (-2;\ 1) \cup (2;\ 3)$. *Ответ*: $(-2;\ 1) \cup (2;\ 3)$

Показательные неравенства

Показательными называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение показательных неравенств	
$a^{f(x)} \underset{<}{>} a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$ Аналогично для $a^{f(x)} \underset{\le}{<} a^{g(x)}$	а) $2^x < \frac{1}{8}$; $2^x < 2^{-3}$; $x < -3$, т. к. $2 > 1$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $0 < \frac{1}{3} < 1$, поэтому $x \le \frac{1}{2}$
$a^{f(x)} \underset{\ge}{>} b,\ a > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b \le 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \begin{cases} b > 0,\ a > 1, \\ f(x) > \log_a b; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0,\ 0 < a < 1, \\ f(x) < \log_a b \end{cases}$	а) $2^x > 5$; $2^x > 2^{\log_2 5}$; $b = 5 > 0,\ a = 2 > 1$; $x > \log_2 5$; $x \in (\log_2 5; +\infty)$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \ge 4$; $\left(\frac{1}{7}\right)^x \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 4}$; $b = 4 > 0$, $a = \frac{1}{7} < 1$; $x \le \log_{\frac{1}{7}} 4$; $x \le \log_{7^{-1}} 4$; $x \le -\log_7 4$; $x \in (-\infty; -\log_7 4]$; в) $e^x > -3$; $x \in R$; г) $2^x \le -2$; нет решений

Продолжение таблицы

$a^{f(x)} \underset{\ge}{>} b^{(x)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > \phi(x)\log_a b; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < \phi(x)\log_a b \end{cases}$	$2^x \ge 3^{x^2}$; $\log_2 2^x \ge \log_2 3^{x^2}$; $x \ge x^2\log_2 3$; $x - x^2\log_2 3 \ge 0$; $x(1 - x\log_2 3) \ge 0$; $x(x\log_2 3 - 1) \le 0$; $x(x - \log_3 2) \le 0$; $+ \quad - \quad +$ $0 \quad \log_3 2$ $x \in [0; \log_3 2]$
Замена переменной в показательном неравенстве	$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$. *Замена*: $3^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - 12t + 27 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 < t < 9$. $3 < 3^x < 9$; $1 < x < 2$. $x \in (1; 2)$
Показательные неравенства, содержащие **однородные функции**	$4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$; $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$. Разделим почленно на $5^{2x} \ne 0$. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^{x} - 2 > 0$. *Замена*: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = t$, $t > 0$. $t^2 - t - 2 > 0$; $\left[\begin{array}{l} t < -1, \\ t > 2, \end{array}\right.$ но $t > 0$ $\Rightarrow t > 2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}$; $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$, т. к. $\frac{2}{5} < 1$. $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$

Окончание таблицы

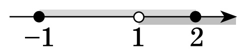
Разложение на множители (вынесение за скобку общего множителя)	$3^{x+1}+3^{x-1} \geq 21+3^x$; $3^{x+1}+3^{x-1}-3^x \geq 21$; $3^{x-1}(3^2+1-3^1) \geq 21$; $3^{x-1}\cdot 7 \geq 21$; $3^{x-1} \geq 3$; $3 > 1$; $x-1 \geq 1$; $x \geq 2$. $x \in [2; +\infty)$

Логарифмические неравенства

Логарифмическими называют неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма

Решение логарифмических неравенств

Использование определения логарифма при решении логарифмических неравенств	
$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) > a^b, \\ a > 1. \end{cases}$ Аналогично $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ a > 1 \end{cases}$	а) $\log_3(x-2) \geq 2$. Так как $3 > 1$, то $(x-2) \geq 3^2$; $x-2 \geq 9$; $x \geq 11$. $x \in [11; +\infty)$; б) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0$; $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_2 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_3 1 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_3 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} \leq x-1 < \frac{1}{2}$; $\frac{9}{8} \leq x < \frac{3}{2}$; $x \in \left[\frac{9}{8}; \frac{3}{2}\right)$

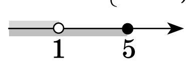
<table>
<tr><th colspan="2">Использование свойств логарифма
при решении логарифмических неравенств</th></tr>
<tr>
<td>
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$
или
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$
</td>
<td>
а) $\log_{0,5}(2x-4) \geq$
$\geq \log_{0,5}(x+1)$.
$0 < 0,5 < 1$, поэтому
$\begin{cases} 2x-4 \leq x+1, \\ 2x-4 > 0, \\ x+1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \leq x+1, \\ 2x-4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x > 2; \end{cases} x \in (2; 5]$;
б) $\log_2 x + \log_2 (x-1) \leq 1$.
Применим правило:
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$,
где $x > 0$, $y > 0$.
$\log_2 x(x-1) \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \leq 2^1, \\ x > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x > 1; \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \leq 0, \\ x > 1; \end{cases}$


$x \in (1; 2]$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Использование метода
замены переменной</td>
<td>
$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0$.
Замена: $\log_3 x = t$;
$t^2 - 2t - 3 \leq 0$;
$-1 \leq \log_3 x \leq 3$;
</td>
</tr>
</table>

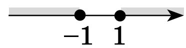
Окончание таблицы

	$\log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le$ $\le \log_3 3^3,\ 3 > 1;$ $\dfrac{1}{3} \le x \le 27;\ x \in \left[\dfrac{1}{3}; 27\right]$
Решение неравенств, содержащих переменную под знаком логарифма и в основании логарифма $\log_{\phi(x)} f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \phi(x) > 1, \\ f(x) > (\phi(x))^A > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \phi(x) < 1, \\ 0 < f(x) < (\phi(\boldsymbol{x}))^A \end{cases} \end{array}\right.$	$\log_x(x-2) \le 2.$ ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x>0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$ Значит, основание логарифма больше 1, тогда: $\log_x(x-2) \le 2;$ $\log_x(x-2) \le \log_x x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x-2 \le x^2, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 \ge 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2.$ $x \in (2; +\infty)$

Системы линейных неравенств. Системы неравенств с одной переменной

Системы неравенств	
Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему** неравенств, если ставится задача отыскать все значения переменной, удовлетворяющие **одновременно каждому** из этих неравенств	а) $\begin{cases} -3x+5>2, \\ 4x-5 \le 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 2-5, \\ 4x \le 15+5 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -3x > -3, \\ 4x \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \le 5; \end{cases}$  $x \in (-\infty; 1).$

Окончание таблицы

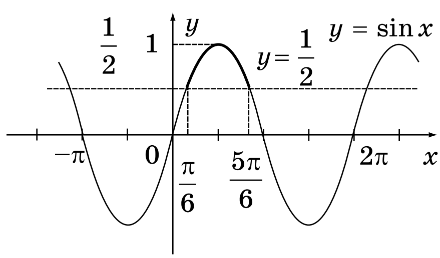
Чтобы **решить систему неравенств,** нужно: 1. Отдельно решить каждое неравенство. 2. Найти пересечение найденных решений	б) $\begin{cases} 5x + 6 \le 1, \\ 2x + 1 \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \le -5, \\ 2x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ x \ge 1; \end{cases}$  $x = \varnothing$ (решений нет)

Две системы неравенств называют **равносильными,** если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств (как и уравнений) обозначается «$\Leftrightarrow$»

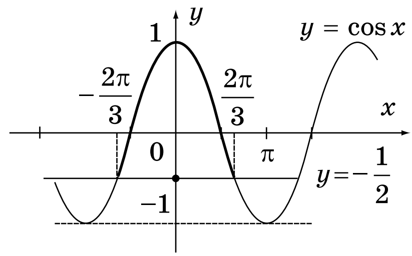
Равносильность неравенств, систем неравенств

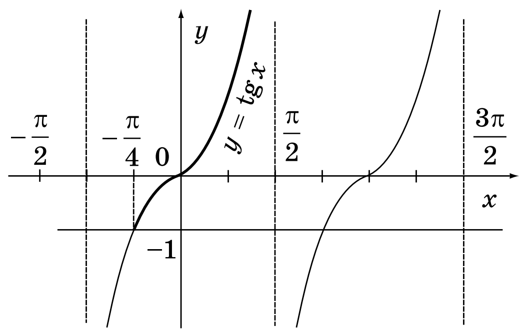
Два неравенства с одной переменной (две системы неравенств) называются **равносильными,** если множество решений этих неравенств (систем неравенств) совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений

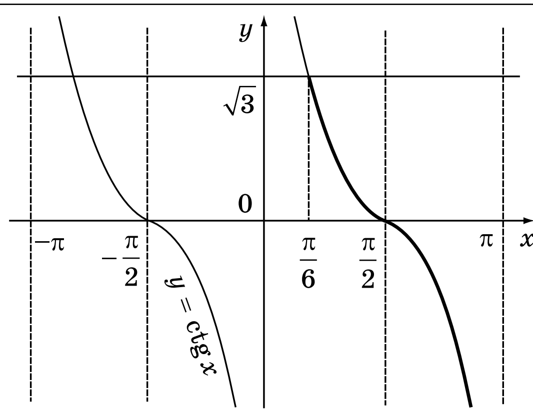
Использование свойств и графиков функций при решении неравенств

Решение тригонометрических неравенств с помощью графиков	
$\sin x > \dfrac{1}{2}$	 $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>$\cos x > -\frac{1}{2}$</td>
<td>


$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathrm{tg}\, x \geq -1$</td>
<td>


$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathrm{ctg}\, x < \sqrt{3}$</td>
<td>


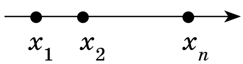
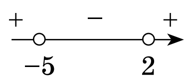
$\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Использование монотонности функций
для решения неравенств</th></tr>
<tr>
<td>
1. Записать неравенство в виде:
$f(x)\underset{\geq}{>}a$, $f(x)\underset{\leq}{<}a$,
$f(x)$ — некоторая функция, $a \in R$.
2. Найти область определения функции $D(f)$ и характер её монотонности (возрастает, убывает).
3. Если a принадлежит области значений $f(x)$, то существует число $x_0 \in D(f)$, при котором $f(x_0) = a$.
4. Исходное неравенство записать в виде:
$f(x)\underset{\geq}{>}f(x_0)$, $f(x)\underset{\leq}{<}f(x_0)$.
5. Решение исходного неравенства сводится к решению равносильной ему системы линейных неравенств:
$\begin{cases} x > x_0, \\ b < x < d, \end{cases}$
если $f(x)$ — возрастающая;
$\begin{cases} x < x_0, \\ b < x < d, \end{cases}$
если $f(x)$ — убывающая.
$(b;\ d)$ — область определения $f(x)$
</td>
<td>
а) $x^5+x^3+x \leq 42$.
Решение.
Обозначим $F(x) = x^5+x^3+x$. Функция определена и непрерывна на R, возрастающая, как сумма возрастающих функций:
$42 = F(2)$, т. е. $F(x) \leq F(2)$.
Тогда по свойству возрастающей функции из последнего неравенства следует, что $x \leq 2$.
Ответ: $x \in (-\infty;\ 2]$.

б) $\sqrt{7+x} \geq 7-2x$.
Решение.
Пусть $f(x) \geq \sqrt{7+x}+2x$ тогда $f(x) \geq 7$.
Функция определена на $[-7;\ +\infty)$, монотонно возрастает.
$f(2) = 7$. Тогда $f(x) \geq f(2)$.
Получим систему:
$\begin{cases} x \geq -7, \\ f(x) \geq f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq 2$.

Ответ: $[2;\ +\infty)$
</td>
</tr>
</table>

Метод интервалов

Метод интервалов	
$f(x) \geq 0$	$x^2+7x+10>0$
1. Найти корни уравнения $f(x)=0$: $x_1, x_2, ..., x_n$	Найдём корни уравнения $x^2+7x+10=0$: $x_1=-2$, $x_2=-5$
2. Нанести эти корни на числовую прямую, разбивая её на интервалы: 	Наносим корни на числовую прямую, получим три интервала: 
3. Если коэффициент при старшей степени $f(x)$ положителен, то на крайнем правом интервале функция сохраняет знак «+»; остальные знаки расставлены в порядке чередования	Коэффициент при x^2 равен $1>0$, поэтому на интервале $x>2$ функция сохраняет знак «+», остальные знаки ставим в порядке чередования
4. В ответ записать интервалы, соответствующие знаку неравенства	$x^2+7x+10>0$, поэтому в ответ пишем интервалы, где сохраняется знак «+». *Ответ*: $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

Обобщённый метод интервалов
Для решения неравенств вида $\varphi(x)>0$, $\varphi(x)\geq 0$, $\varphi(x)<0$ и $\varphi(x)\leq 0$, где $\phi(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots(x-a_n)^{k_n}$, a_1, a_2, ..., a_n — действительные, неравные друг другу числа; k_1, ..., k_n — целые положительные числа используют обобщённый метод интервалов

Окончание таблицы

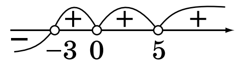
<table>
<tr>
<td>

1. Нанести на числовую ось числа $a_1, a_2, ..., a_n$.
2. В промежутке справа от наибольшего из них поставить знак «+», а затем, двигаясь справа налево при переходе через очередное число a_i $(i = \overline{1, n})$: **поменять знак**, если k_i — **нечётное число; сохранить знак**, если k_i — **чётное число**

</td>
<td>

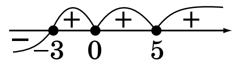
Пример 1

а) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 < 0.$



$x \in (-\infty; -3);$

б) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 \le 0.$



$x \in (-\infty; -3] \cup \{0\} \cup \{5\};$

в) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 > 0.$

$x \in (-3; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty);$

г) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 \ge 0.$

$x \in [-3; +\infty)$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

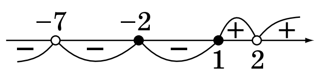
Приведённые рассуждения справедливы для неравенств вида

$$g(x) > 0,\ g(x) \ge 0,\ g(x) < 0,\ g(x) \le 0,$$

$$\text{где } g(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2},\ldots(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2},\ldots(x-b_p)^{m_p}}$$

Пример 2

а) $g(x) = \dfrac{(x-1)^3(x+2)^2(x-2)}{(x-2)^3(x+7)^6} \ge 0$



$x \in \{-2\} \cup [1; 2); \cup (2; +\infty);$

б) $g(x) \le 0.$ $x \in (-\infty; -7) \cup (-7; 1]$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td colspan="2">

Метод интервалов для решения уравнений и неравенств с модулем

</td>
</tr>
<tr>
<td>

1. Найти нули подмодульных выражений.
2. Разбить область допустимых значений переменных этими нулями на промежутки, на каждом из которых выражения,

</td>
<td>

Пример 1

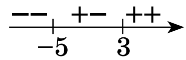
$|x+5|-|x-3| = 8.$

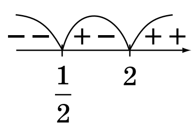
Решение.

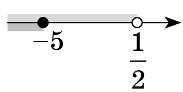
1. Нули подмодульных выражений: $x = -5$ и $x = 3$.

</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>стоящие под знаком модуля, сохраняют знак.
3. На каждом из найденных промежутков решить уравнение (неравенство) без знака модуля.
Совокупность (объединение) решений на указанном промежутке является решением рассматриваемого уравнения (неравенства)</td>
<td>2. Знаки подмодульных выражений:


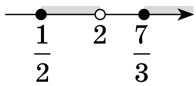
3. Уравнение на каждом промежутке:
а) $x<-5$;
$-(x+5)-(-(x-3))=8$;
$-8 = 8$; решений нет;
б) $-5 \le x < 3$; $x+5-(-x+3) =$
$= 8$;
$x = 3$ — не входит в рассматриваемый промежуток;
в) $x \ge 3$; $x+5-(x-3) = 8$;
$8 = 8$.
Получим верное равенство. Решением будет любое число из этого промежутка.
Ответ: $x \in [3; +\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Пример 2. $|2x-1|-|x-2| \ge 4$.
Решение.
1. Нули подмодульных выражений: $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$.
2. Знаки подмодульных выражений:


3. а) $x < \frac{1}{2}$; $-2x+1+x-2 \ge 4$; $x \le -5$.


На этом промежутке решением является x из промежутка $x \le -5$.</td>
</tr>
</table>

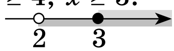
Окончание таблицы

б) $\frac{1}{2} \le x < 2;\ 2x-1+x-2 \ge 4;\ x \ge \frac{7}{3}$.



На этом промежутке решений нет.

в) $x > 2;\ (2x-1)-(x-2) \ge 4;\ x \ge 3$.

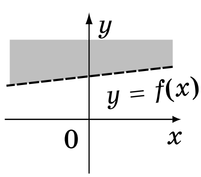
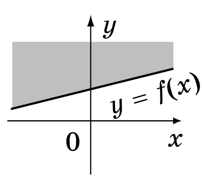
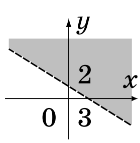
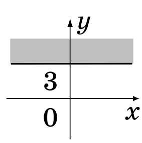
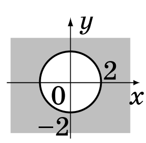
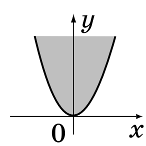


Решением будут все значения из промежутка $x \ge 3$.

4. Объединяем полученные решения: $\left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

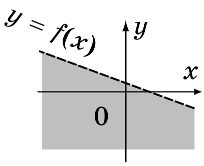
$x \in (-\infty;\ -5] \cup [3;\ +\infty)$

Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

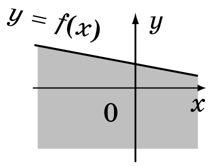
<table>
<tr><th colspan="4">Решение неравенств с двумя переменными</th></tr>
<tr><td colspan="4">График неравенства $y > f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся выше точек графика $y = f(x)$.

$y > f(x)$

$y \ge f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Решением неравенства $y \ge f(x)$ являются все точки координатной плоскости, которые находятся выше точек графика $y = f(x)$, включая точки графика $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td>
$2x+3y > 6$</td><td>
$y \ge 3$</td><td>
$x^2+y^2 \ge 4$</td><td>
$y \ge x^2$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

График неравенства $y < f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся **ниже** точек графика $y = f(x)$.

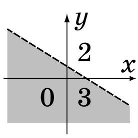
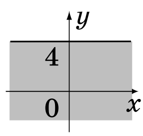
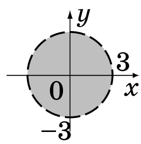
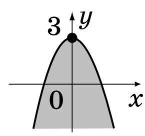


$y < f(x)$



$y \leq f(x)$

Решением неравенства $y \leq f(x)$ являются все точки координатной плоскости, которые находятся **ниже** точек графика $y = f(x)$, **включая** точки графика $y = f(x)$

			
$2x+3y < 6$	$y \leq 4$	$x^2+y^2 < 9$	$y \leq -x^2+3$

Решение систем неравенств с двумя переменными

Для решения систем неравенств

$$\begin{cases} F(x;\, y) \substack{\geq \\ \leq} 0, \\ Q(x;\, y) \substack{\geq \\ \leq} 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F(x;\, y) \substack{> 0 \\ < 0}, \\ Q(x;\, y) \substack{> 0 \\ < 0} \end{cases}$$

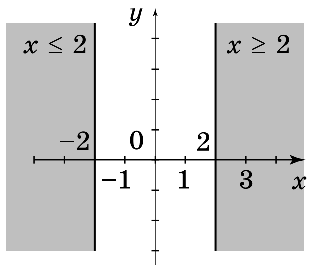
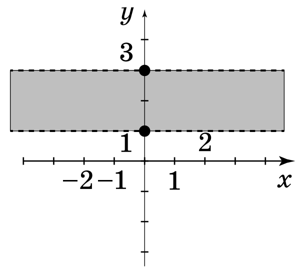
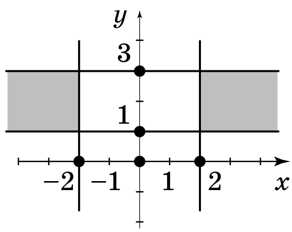
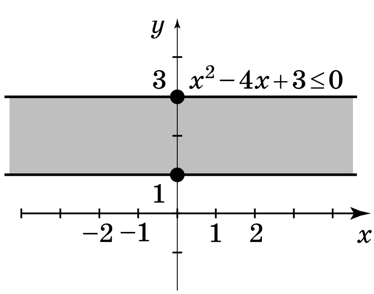
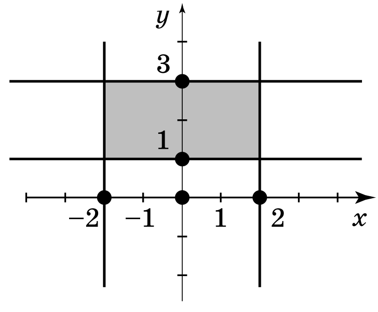
находим:

1) множество X_1 — точек плоскости, на котором выполняется первое неравенство;
2) множество X_2 — точек плоскости, на котором выполняется второе неравенство;
3) решение системы — пересечение множеств X_1 и X_2

Пример.
Изобразить на плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ y^2 - 4y + 3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0, \\ y^2 - 4y + 3 \leq 0 \end{cases}$

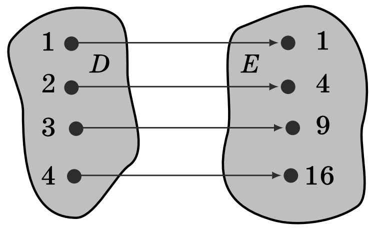
Окончание таблицы

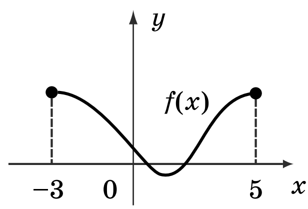
Решение. а) X_1: $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq -2; \end{array}\right.$  	X_2: $y^2 - 4y + 3 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < y < 3.$ 
Пересечение множеств X_1 и X_2:  	
б) X_1: $x_2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2;$ X_2: $y^2 - 4y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 1 \leq y \leq 3$  	Пересечение множеств X_1 и X_2: 

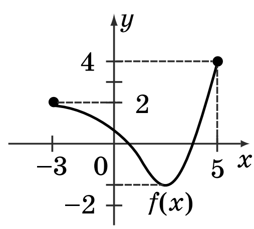
ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГРАФИК ФУНКЦИИ

Функция, область определения функции

<table>
<tr>
<td>Числовая функция с областью определения D — это зависимость, при которой каждому числу x из множества D соответствует единственное число y: $y = f(x)$</td>
<td>


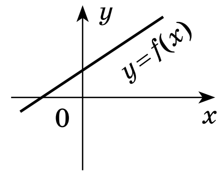
D — область определения;
E — область значений
</td>
</tr>
<tr>
<td>Область определения функции $D(f)$ — множество значений, которые может принимать x</td>
<td>


$D(f) = [-3;\ 5]$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Область значений функции $E(f)$ — множество значений $f(x)$, которые она может принимать при $x \in D(f)$</td>
<td>


$E(f) = [-2;\ 4]$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th colspan="2">Способы задания функции</th>
</tr>
<tr>
<td>Аналитический,
т. е. формулой: $y = f(x)$</td>
<td>$y = x^2;\ y = \dfrac{x-1}{x};$
$y = e^x;\ y = \cos x - \sin x$</td>
</tr>
</table>

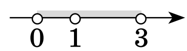
Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>Графический,
т. е. график $y = f(x)$
в системе координат xOy</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Табличный, т. е. соответствие между $D(f)$ и $E(f)$ задаётся с помощью таблицы:
<table>
<tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_{n-1}</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>y</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>...</td><td>y_{n-1}</td><td>y_n</td></tr>
</table></td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Область определения функции, заданной формулой
Областью определения функции $D(f)$, заданной формулой $y = f(x)$, называют множество значений x, при которых формула имеет смысл (все действия, заданные формулой, можно выполнить)

Функция	**$D(f)$**	**Пример нахождения $D(f)$**
Многочлен $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$	R	$y = x^3 - 7x^2 + 5x - 1$; $x \in R$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены	$g(x) \neq 0$	$y = \dfrac{x^2}{x(x-3)}$; $x(x-3) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq 3$. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$
$y = \sqrt[2n]{f(x)}$, $n \in N$	$f(x) \geq 0$	$y = \sqrt[4]{4 - x^2}$; $4 - x^2 \geq 0$; $x^2 - 4 \leq 0$; $-2 \leq x \leq 2$; $D(f) = [-2; 2]$

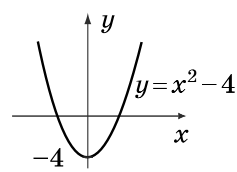
Продолжение таблицы

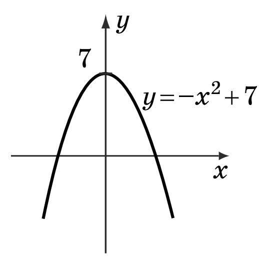
$y = \dfrac{1}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$	$y = \dfrac{1}{\lvert x\rvert - 3}$; $\lvert x\rvert - 3 \neq 0$; $\lvert x\rvert \neq 3$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{array}\right.$ $D(f) = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3)$ $\cup (3;\ +\infty)$
$y = \log_a f(x)$, $a > 0,\ a \neq 1$	$f(x) > 0$	$y = \log_3(2x-3)$; $2x-3 > 0$; $x > 1{,}5$; $D(f) = (1{,}5;\ +\infty)$
$y = \log_{f(x)} g(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$y = \log_x(3-x)$; $\begin{cases} 3 - x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$  $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ 3)$
$y = \operatorname{tg} f(x)$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$y = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{3}$; $\dfrac{2x}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3\pi n}{2}$, $n \in Z$
$y = \operatorname{ctg} f(x)$	$f(x) \neq \pi n$, $n \in Z$	$y = \operatorname{ctg} 5x$; $5x \neq \pi n$, $x \neq \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in Z$
$y = \arcsin f(x)$ $y = \arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$ $-1 \leq f(x) \leq 1$	$y = \arcsin\dfrac{3-x}{2}$; $-1 \leq \dfrac{3-x}{2} \leq 1$; $-2 \leq 3 - x \leq 2$; $-5 \leq -x \leq -1$; $1 \leq x \leq 5$
$y = x^a$, $\alpha \in Z$	$x \in R$	$y = x^5$, $x \in R$

Окончание таблицы

$y = x^a$, α — целое отрицательное число или 0	$x \neq 0$	$y = x^{-3}$, $x \neq 0$
$y = x^a$, $\alpha > 0$, α — не целое число	$x \geq 0$	$y = x^{\frac{3}{4}}$, $x \geq 0$
$y = x^a$, $\alpha < 0$, α — отрицательное число	$x > 0$	$y = x^{-\frac{1}{2}}$, $x > 0$

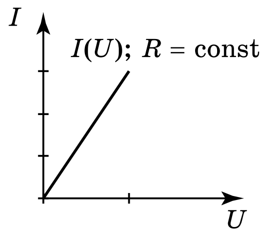
Множество значений функции

<table>
<tr><th colspan="2">Множество значений функции, заданной формулой</th></tr>
<tr><td colspan="2">Множеством значений функции $E(f)$ называется множество тех значений, которые может принимать сама функция при всех значениях аргумента из области определения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чтобы найти $E(f)$, необходимо найти все значения a, для которых $f(x) = a$ имеет единственное решение</td></tr>
<tr><td>$E(f)$ многочлена чётной степени является:
а) промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение многочлена</td><td>

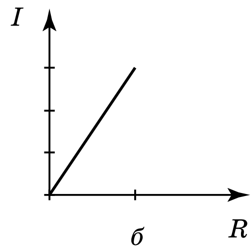
$y = x^2 - 4$
$E(f) = [-4; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>б) промежуток $(-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этой функции</td><td>

$y = -x^2 + 7$
$E(f) = (-\infty; 7]$</td></tr>
</table>

График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях



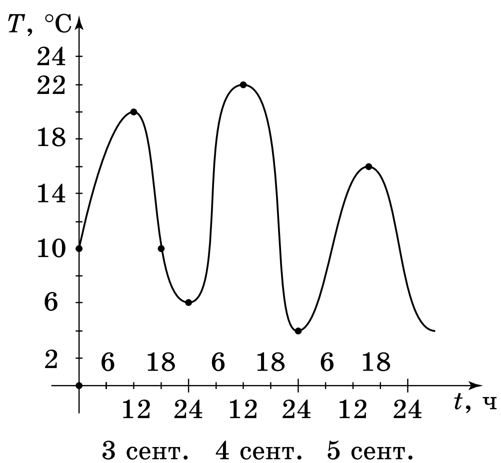
а



б

Закон Ома: сила тока I в цепи прямо пропорциональна напряжению U и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению участка цепи R (*а*).

Обратная зависимость, т. е. $I = \dfrac{U}{R}$ — гипербола (*б*)

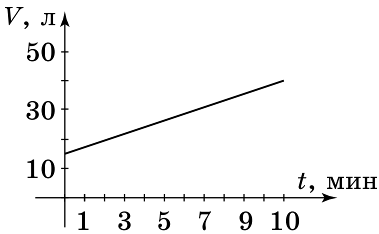
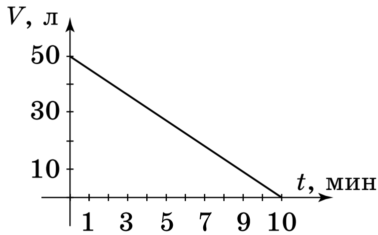


Изменение температуры воздуха на протяжении суток 3, 4 и 5 сентября.

По оси абсцисс — время суток в часах, t (ч).

По оси ординат — значение температуры в градусах, T °C

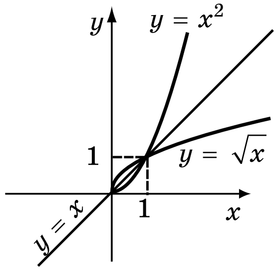
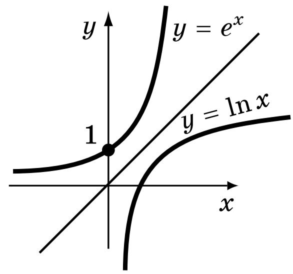
Окончание таблицы

 $V(t) = 15+2{,}5t$ *а*	 $V(t) = 50-5t$ *б*
График, на котором изображён процесс наполнения бака водой (*а*). График, на котором изображён процесс вытекания воды из бака (*б*). По оси абсцисс — время t в минутах, по оси ординат — объём бака V в литрах	

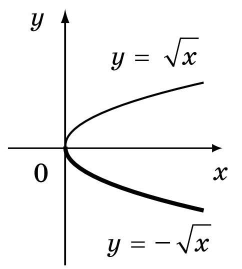
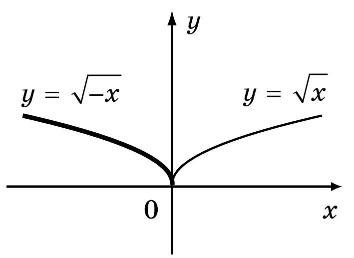
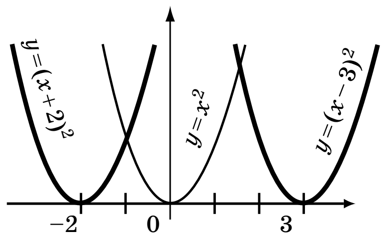
Обратная функция. График обратной функции

Обратная функция — это некоторая функция $y = g(x)$, которая получается из данной функции $y=f(x)$, если в отношении $x = f(y)$ выразить y через x	$y = x+8$ и $y = x-8$ $y = e^x$ и $y = \ln x$
Чтобы найти функцию, обратную для $f(x)$, нужно: 1) в соотношении $y = f(x)$ заменить x на y, а y на x; $x = f(y)$; 2) в выражении $x = f(y)$ выразить y через x. Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны	Для функции $y = 11-5x$ найдём обратную: $x = 11-5y$; $5y = 11-x$; $y = \dfrac{11-x}{5}$. Функции $y = 11-5x$ и $y = \dfrac{11-x}{5}$ взаимно обратные
Условие обратимости функции — её монотонность (убывает или возрастает)	$y = x^2$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Обратная для неё: $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$ или $y = -\sqrt{x}$, $x \in (-\infty; 0]$

Окончание таблицы

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$	
	

Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

$\boxed{y = -f(x)}$ Симметрия относительно оси абсцисс	
$\boxed{y = f(x)}$ Симметрия относительно оси ординат	
$\boxed{g = f(x+a)}$ Перенос графика $y = f(a)$ по оси абсцисс на $-a$ единиц	

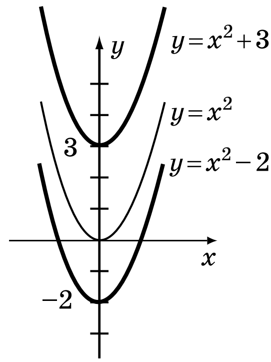
Продолжение таблицы

<table>
<tr><td>

$\boxed{y = f(x)+b}$

Перенос графика $y = f(a)$ по оси ординат на b единиц

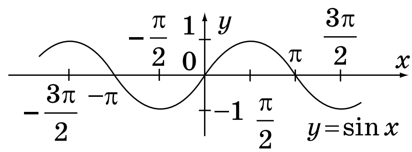
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

$\boxed{f(kx),\ k > 0}$

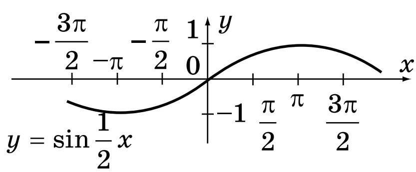
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

а) при $0 < k < 1$ — растяжение от точки (0; 0) вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз;

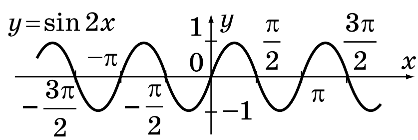
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

б) при $k > 1$ — сжатие к точке (0; 0) вдоль оси абсцисс в k раз

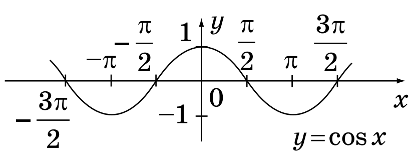
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

$\boxed{y = kf(x),\ k > 0}$

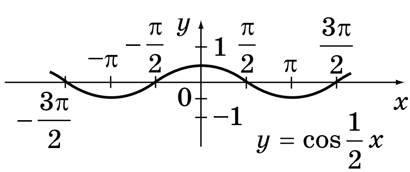
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

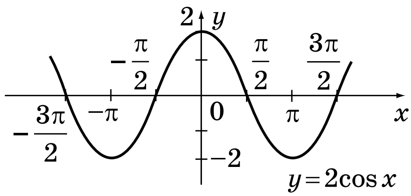
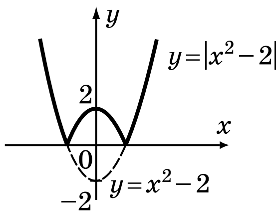
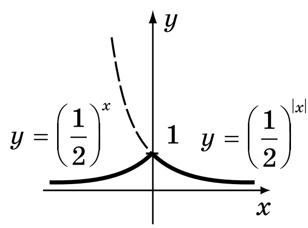
а) при $0 < k < 1$ сжатие к точке (0; 0) вдоль оси ординат;

</td><td>



</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

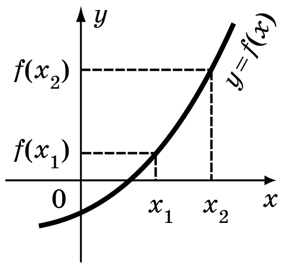
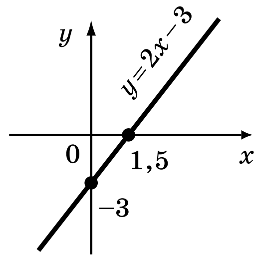
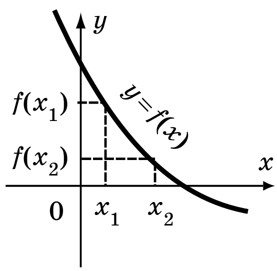
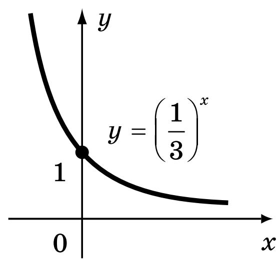
б) при $k > 1$ растяжение от точки (0; 0) вдоль оси ординат	
$\boxed{y = \|f(x)\|}$ Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс — без изменения; часть графика в нижней полуплоскости — **симметрия относительно** оси Ox	
$\boxed{y = f(\|x\|)}$ Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат — без изменения; вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy	

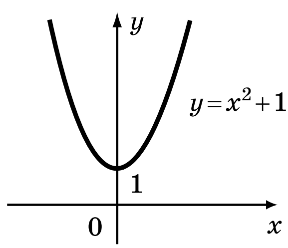
ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на числовом промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функция $y = f(x)$ называется убывающей на числовом промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X:
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется монотонной на этом промежутке</td></tr>
</table>

Чётность и нечётность функции

Функция $f(x)$ называется **чётной,** если для любого значения x из её области определения функции значение $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется $f(-x) = f(x)$

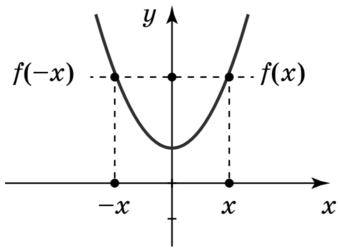
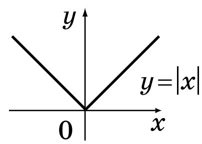
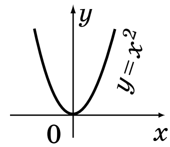
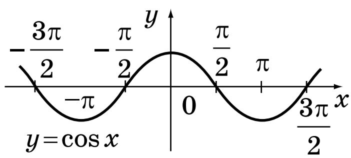


График симметричен относительно оси Oy







Функция $f(x)$ называется **нечётной,** если для любого значения x из её области определения значение $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется $f(-x) = -f(x)$

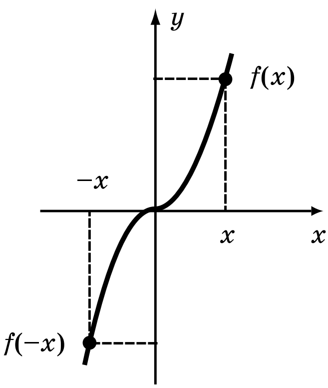
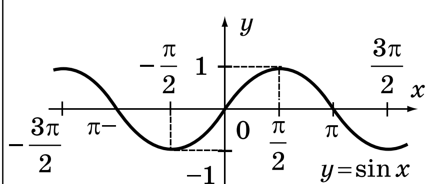
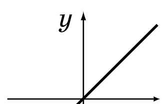
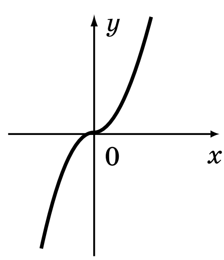


График симметричен относительно начала координат



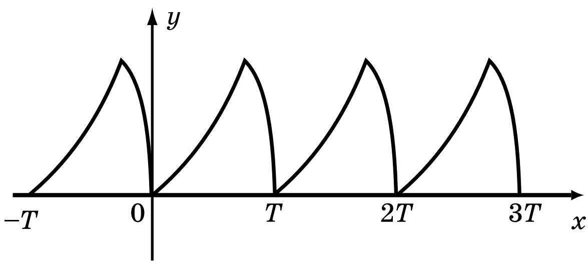




Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x-T)$ и $(x+T)$ также принадлежит этой области и выполняется равенство:

$f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, где T — период функции



Если функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то функция $y = f(kx+b)$ имеет период $T_1 = \dfrac{T}{|k|}$

Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на всей области определения $D(f)$, если существует такое число C, что $|f(x)| \leq C$ для каждой точки $x \in D(f)$.

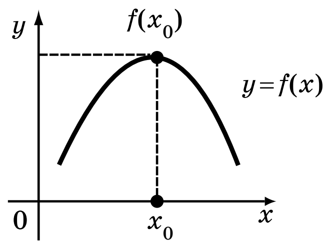
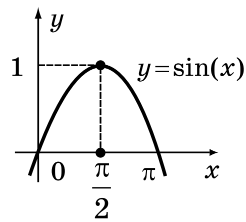
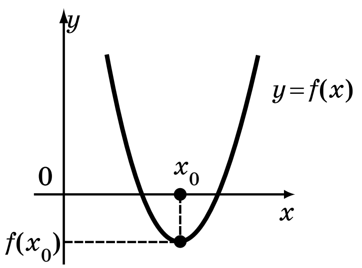
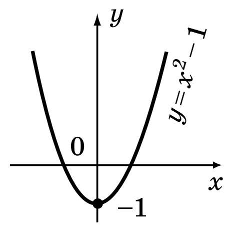
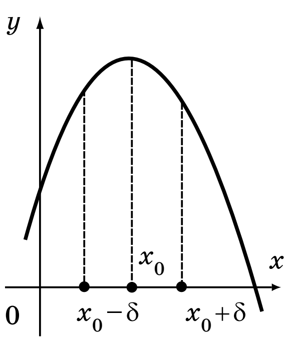
Функция, ограниченная на множестве $x \in D(f)$, может быть неограниченной на всей области определения

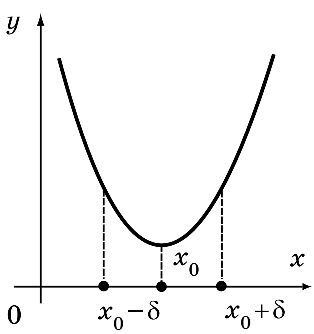
Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции

Точки экстремума — общий термин, объединяющий точки минимума и максимума

Точка x_0 — **точка максимума**, если для этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме точки x_0) выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$, где x_0 — точка максимума; $f(x_0)$ — максимум функции

Продолжение таблицы

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Точка x_0 — точка минимума, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме точки x_0), выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ x_0 — точка минимума; $f(x_0)$ — минимум функции</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке $(x_0-\delta;\ x_0)$ и убывает (возрастает) на некотором промежутке $[x_0;\ x_0+\delta)$, то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

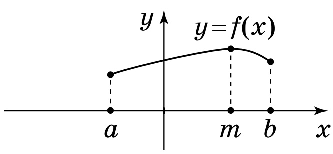

</td></tr>
</table>

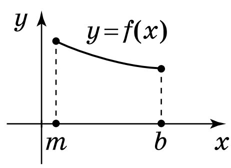
Окончание таблицы

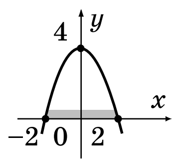
Нахождение экстремумов функции (максимума и минимума) для функции $y=f(x)$:

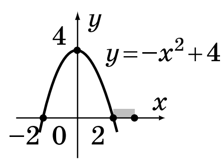
1) если x_{min} — точка минимума функции, то минимум этой функции $f_{min}=f(x_{min})$;
2) если x_{max} — точка максимума функции, то максимум этой функции $f_{max}=f(x_{max})$

Наибольшее и наименьшее значения функции

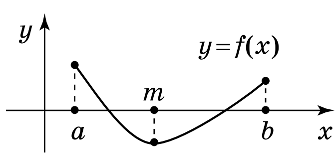


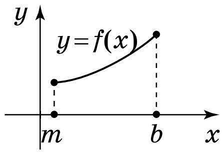


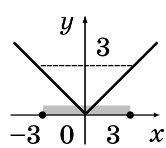


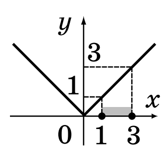


Функция $y = f(x)$, определённая на некотором промежутке, достигает своего **наибольшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x этого промежутка выполняется неравенство $f(x) \leq f(m)$









Окончание таблицы

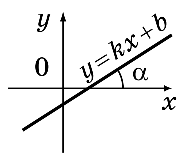
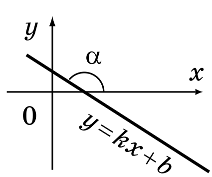
Функция $y = f(x)$, определённая на некотором промежутке, достигает своего **наименьшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x промежутка выполняется неравенство $f(x) \geq f(m)$
Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, нужно: 1) вычислить значение функции в каждой точке минимума (максимума) на этом отрезке; 2) вычислить значение функции на концах отрезка; 3) из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее)

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

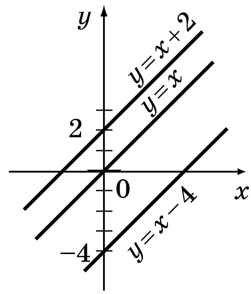
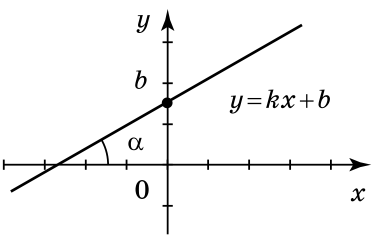
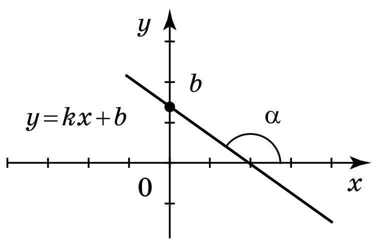
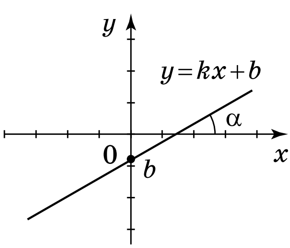
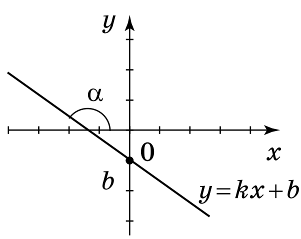
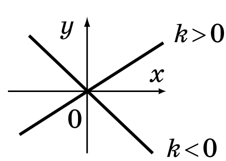
Линейная функция, её график

Функция вида $y = kx+b$, где k и b — числа, а x — переменная, называется **линейной.** Графиком любой линейной функции является прямая

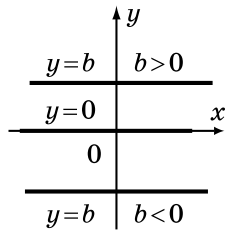
Геометрический смысл коэффициентов *k* и *b*

Коэффициент *k* (угловой коэффициент) отвечает за наклон графика функции: а) $k > 0 \Leftrightarrow 0° < \alpha < 90°$ функция возрастает; б) $k < 0 \Leftrightarrow 90° < \alpha < 180°$ функция убывает	 при $k > 0$  при $k < 0$

Продолжение таблицы

Коэффициент *b* отвечает за сдвиг графика вдоль оси Oy: а) $b > 0$, $y = kx+b$ получается путём сдвига графика $y = kx$ **вверх** на b единиц вдоль оси Oy; б) $b < 0$, $y = kx+b$ получается путём сдвига графика $y = kx$ на $\lvert b \rvert$ единиц **вниз** вдоль оси Oy	
Получаем четыре ситуации	
1. $k > 0$, $b > 0$; $0° < \alpha < 90°$ 	**2. $k<0$, $b>0$; $90°<\alpha< 180°$** 
3. $k>0$, $b<0$; $0°<\alpha< 90°$ 	**4. $k<0$, $b<0$; $90°<\alpha< 180°$** 
$y = kx$ $y = kx+b$; $b = 0$; $k \neq 0$. График прямой пропорциональности. Прямая проходит через начало координат	

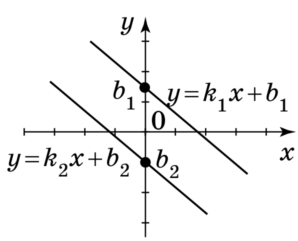
Окончание таблицы

а) $y = b$ $y = kx+b$; $b \neq 0$; $k = 0$. Прямая, параллельная оси Ox; б) $y = kx+b$; $b = 0$; $k = 0$; $y = 0$. Прямая совпадает с осью Ox	

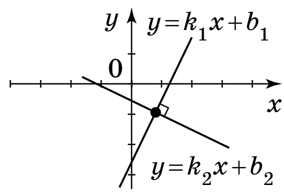
Свойства графика линейной функции

Свойства	$k > 0$	$k < 0$
1. Область определения функции состоит из всех чисел	$y = 3x-2$ $x \in R$	$y = -2x+3$
2. Область значений ($k \neq 0$) состоит из всех чисел. Если $k = 0$, то $y = b$ — единственное значение	$y \in R$	
3. $k > 0$ — возрастает; $k < 0$ — убывает	возрастает	убывает
4. Если $b = 0$, то $y = kx$ — функция нечётная	экстремумов нет	
5. Пересекает ось Oy в точке $(0; b)$; ось Ox — в точке $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$, $k \neq 0$	точки пересечения с осями: $(0; -2)$; $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$	$(0; 3)$; $(1{,}5; 0)$

Взаимное расположение графиков линейных функций

Условие параллельности двух прямых $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$: графики этих функций параллельны, если $k_1 = k_2$	

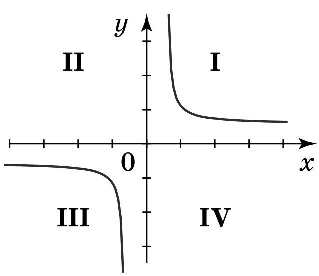
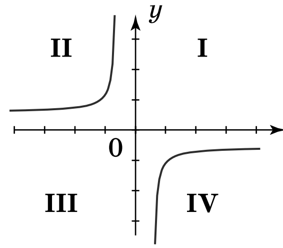
Окончание таблицы

Условие перпендикулярности прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: графики этих функций перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$; $k_2 = -\frac{1}{k_1}$	

Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график

Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость
Функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — некоторое число, отличное от нуля, называется обратной пропорциональностью

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

$k > 0$	$k < 0$
	
1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	

Окончание таблицы

$k > 0$	$k < 0$
2. Множество значений — множество всех действительных чисел, кроме $y = 0$. $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	
3. Нечётная. График симметричен относительно начала координат	
4. График функции — **гипербола**. Состоит из двух ветвей	
5. График лежит в I и III координатных четвертях. При $x > 0$, $y > 0$; при $x < 0$, $y < 0$	5. График лежит во II и IV координатных четвертях. При $x > 0$, $y < 0$; при $x < 0$, $y > 0$
6. Функция убывает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	6. Функция возрастает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

Дробно-линейная функция, её свойства и график

Функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где a, b, c, d — постоянные, причём $c \neq 0$, называется **дробно-линейной.**

Функция определена всюду, кроме $x = -\dfrac{d}{c}$.

Дробно-линейную функцию можно привести к виду:

$y = n + \dfrac{k}{x + m}$, где $m = \dfrac{d}{c}$, $n = \dfrac{a}{c}$.

Таким образом, график дробно-линейной функции — это **гипербола**, которую можно получить **сдвигом** гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ на $-m$ единиц вдоль оси Ox и на n единиц вдоль оси Oy

Окончание таблицы

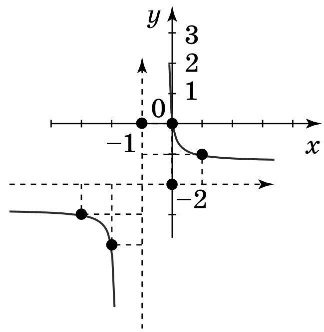
<table>
<tr>
<td>
График функции $y = \dfrac{-2x}{x+1}$, $x \neq -1$.

$\dfrac{-2x}{x+1} = \dfrac{-2x - 2 + 2}{x+1} =$
$= \dfrac{-2(x+1)}{x+1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} - 2$.

То есть график $y = \dfrac{-2x}{x+1}$ или

$y = \dfrac{2}{x+1} - 2$ получается из

графика $y = \dfrac{2}{x}$ путём сдвига по

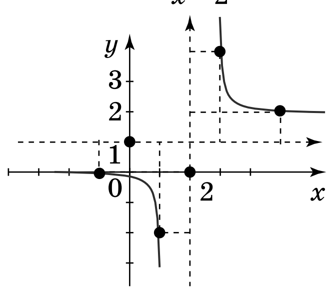
оси Ox на 1 единицу влево и по оси Oy на 2 единицы вниз
</td>
<td>
$y = \dfrac{-2x}{x+1}$


</td>
</tr>
<tr>
<td>
График функции $y = \dfrac{x+1}{x-2}$,
$x \neq 2$.

$\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x - 2 + 2 + 1}{x-2} =$
$= \dfrac{x-2}{x-2} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$.

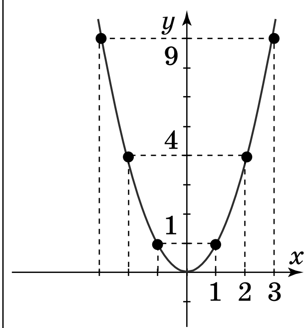
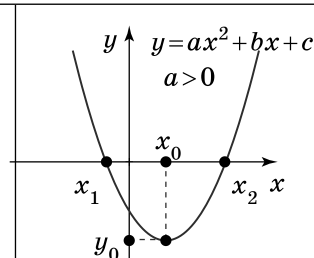
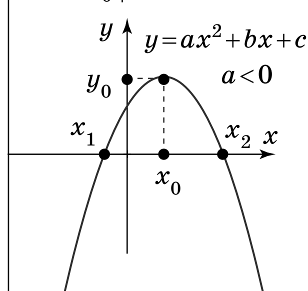
График $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ или

$y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ получается путём

сдвига на 2 единицы вправо вдоль оси Ox и на 1 единицу вверх вдоль оси Oy ($x \neq 2$)
</td>
<td>
$y = \dfrac{x+1}{x-2}$


</td>
</tr>
</table>

Квадратичная функция, её график

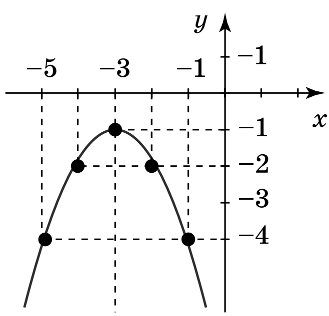
Функция вида $y = ax^2+bx+c$, где a, b, c — некоторые числа ($a \neq 0$), x — переменная, называется **квадратичной**	
Свойства функции $y = x^2$	
1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$. 2. Множество значений $E(f) = [0; +\infty)$. 3. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — $(0; 0)$. 4. $f(x)>0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; отрицательных значений нет. 5. Чётная функция, график симметричен относительно оси Oy. 6. Возрастает при $x \in [0; +\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 0]$	
Свойства функции $y = ax^2+bx+c$	
1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$. 2. Область значений: если $a > 0$, то $E(f)$: $[y_0; +\infty)$; если $a < 0$, то $E(f)$: $(-\infty; y_0]$, где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы. 3. При $b = 0$ функция $y = ax^2+c$ — чётная, $b \neq 0$ — общего вида. 4. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — точка $(m; n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. Координату точки n можно записать и так: $n = am^2+bm+c$.	

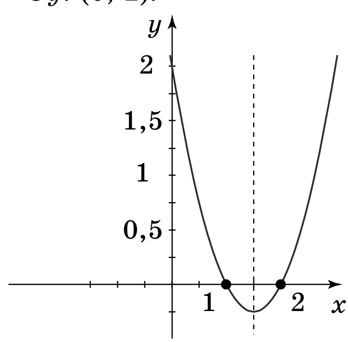
Окончание таблицы

5. При $a>0$ функция убывает на $(-\infty;\ x_0]$ и возрастает на $[x_0;\ +\infty)$, где $x_0 = m = -\frac{b}{2a}$. 6. Ось симметрии параболы: $x = m = -\frac{b}{2a}$. 7. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, $a < 0$ — ветви параболы направлены вниз	

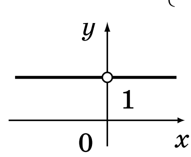
Основные способы построения параболы

Построение графика квадратичной функции методом выделения полного квадрата и параллельным переносом	
Функцию $y = ax^2+bx+c$ привести к виду $y = a(x-m)^2+n$. Далее — параллельный перенос графика $y = ax^2$ на m единиц вдоль оси Ox, на n единиц по оси Oy	$y = -x^2-6x-10$; $-x^2-6x-10 = -(x^2+6x+10) =$ $=-(x^2+6x+9+1) = -(x+3)^2-1$. Параллельный перенос графика $y = -x^2$ на -3 единицы вдоль оси Ox и на -1 по оси Oy



Построение графика квадратичной функции по четырём характеристическим точкам (вершина, нули, точка пересечения с осью Oy)	
Алгоритм	**Пример**
1. Построить вершину параболы $(m;\ n)$, вычислив m и n по формулам: $m = -\dfrac{b}{2a}$ и $n = am^2+bm+c$. 2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy, ось симметрии параболы, $x = m$. 3. Нули функции: $ax^2+bx+c = 0$. x_1 и x_2 — корни уравнения. 4. Точка пересечения с осью Oy: $(0;\ c)$. Отметить её на оси Oy. 5. При необходимости найти дополнительные точки. 6. Построить график через найденные точки	Построить график $y = x^2-3x+2$ 1. $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$; $n = 1{,}5^2-3\cdot 1{,}5+2 = -0{,}25$. 2. Ось симметрии: $x = 1{,}5$. 3. Нули функции: $x^2-3x+2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. 4. Точка пересечения с осью Oy: $(0;\ 2)$. 

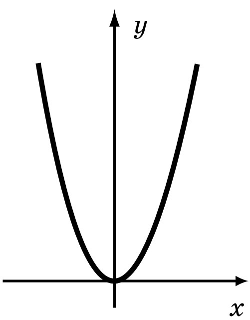
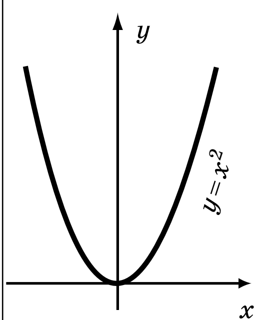
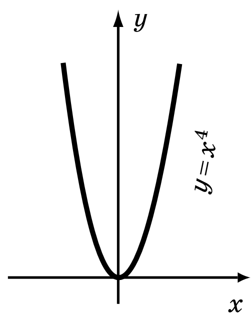
Степенная функция с натуральным показателем, её график

Функция вида $y = x^a$, где α — действительное число, называется **степенной**	Если $\alpha = 0$, то $y = \begin{cases} x^0 = 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$ 

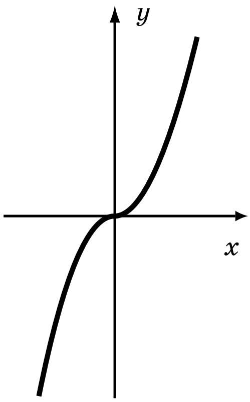
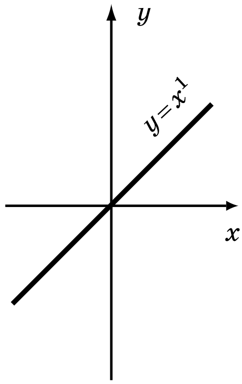
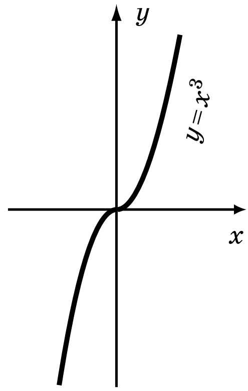
Окончание таблицы

Для описания свойств степенной функции рассматриваются характеристики: 1) область определения: $D(y)$; 2) область значений: $E(y)$; 3) чётность или нечётность; 4) возрастание и убывание функции на области определения

Графики и свойства функции $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$)

<table>
<tr><td colspan="4">1. $y = x^{\alpha}$, α — чётное натуральное число ($y = x^{2n}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^{2n}$, $n \in N$

</td><td>$y = x^2$, $n = 1$

</td><td>$y = x^4$, $n = 2$

</td></tr>
<tr><td>**$D(y)$**</td><td>**$E(y)$**</td><td>**чётность и нечётность**</td><td>**возрастание, убывание**</td></tr>
<tr><td>R</td><td>$[0; +\infty)$</td><td>чётная</td><td>убывает $x \in (-\infty; 0]$;
возрастает $x \in [0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. $y = x^{\alpha}$, α — нечётное натуральное число ($y = x^{2n+1}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^{2n+1}$, $n \in N$</td><td>$n = 1$, $y = x^1$</td><td>$n = 3$, $y = x^3$</td></tr>
</table>

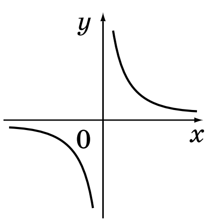
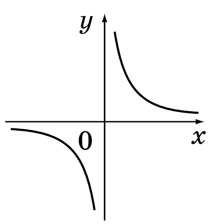
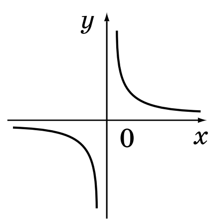
Продолжение таблицы

***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
R	R	нечётная	возрастает

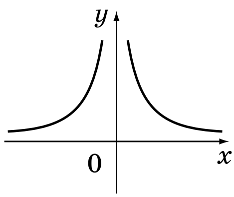
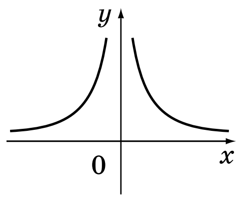
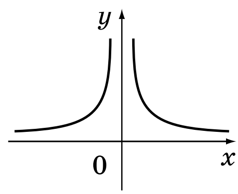
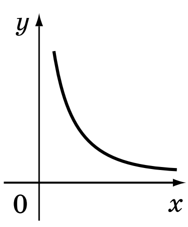
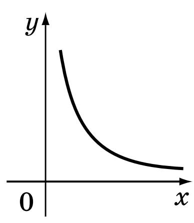
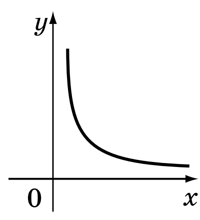
3. $y = x^{\alpha}$, α — нечётное целое отрицательное число

$$\left(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}},\ n \in Z\right)$$

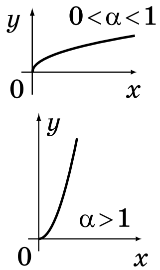
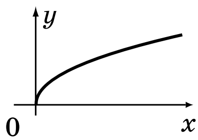
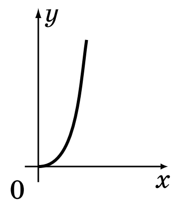
$y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$	$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$
		

***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечётная	убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

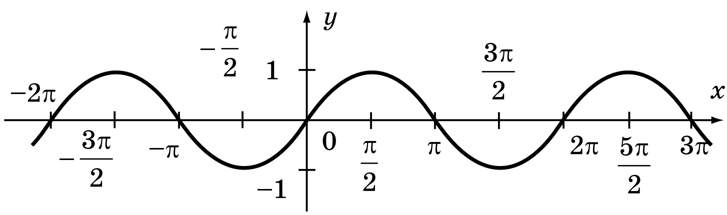
Продолжение таблицы

4. $y = x^{\alpha}$, α — чётное отрицательное число $\left(y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}},\ n \in Z\right)$			
$y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$		$y = \dfrac{1}{x^2}$	$y = \dfrac{1}{x^4}$
			
***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$x \neq 0$	$(0;\ +\infty)$	чётная	возрастает $x \in (-\infty;\ 0)$; убывает $x \in (0;\ +\infty)$
5. $y = x^a$, α — нецелое отрицательное число			
$y = x^{\alpha}$, $\alpha < 0$		$y = x^{-\frac{1}{2}}$	$y = x^{-\frac{3}{2}}$
			
***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$	ни чётная, ни нечётная	убывает
6. $y = x^a$, α — нецелое положительное число			
$0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$		$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{\frac{3}{2}}$

Окончание таблицы

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D(y)</td><td>E(y)</td><td>чётность
и нечётность</td><td>возрастание,
убывание</td></tr>
<tr><td>[0; +∞)</td><td>[0; +∞)</td><td>ни чётная,
ни нечётная</td><td>возрастает</td></tr>
</table>

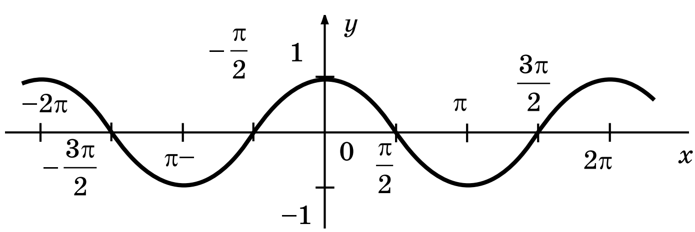
Тригонометрические функции, их графики

<table>
<tr><td colspan="2">График функции y = sinx (синусоида)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства функции y = sinx</td></tr>
<tr><td>1. Область определения</td><td>$x \in R$ (x — любое число)</td></tr>
<tr><td>2. Область значений</td><td>$y \in [-1; 1]$</td></tr>
<tr><td>3. Функция нечётная</td><td>$\sin(-x) = -\sin x$</td></tr>
<tr><td>4. Периодическая функция</td><td>$T = 2\pi$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

5. Точки пересечения с осями координат	$(\pi k;\ 0)$, $k \in \mathrm{Z}$
6. Промежутки знакопостоянства	$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k,\ \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания $y = \sin x$	Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$
8. Наибольшее значение функции	1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$
9. Наименьшее значение функции	-1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$

График функции $y = \cos x$ (косинусоида)

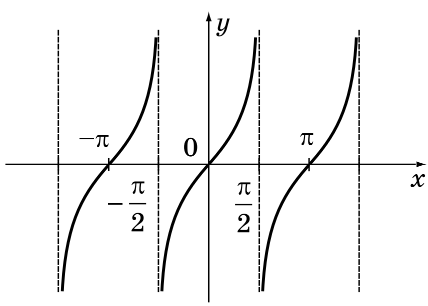


Свойства функции $y = \cos x$

1. Область определения	$x \in R$
2. Область значений	$y \in [-1;\ 1]$

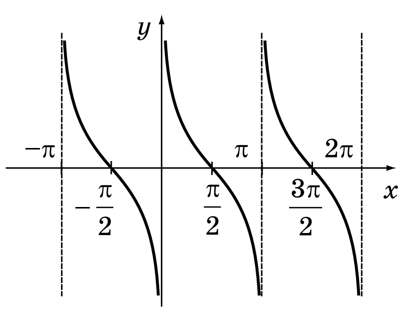
Окончание таблицы

3. Функция чётная	$\cos(-x) = \cos x$
4. Периодическая функция	$T = 2\pi$
5. Точки пересечения с осями координат	$(0;\ 1)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right)$, $k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	$\cos x$ возрастает на $[\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k]$, $k \in Z$; $\cos x$ убывает на $[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$, $k \in Z$
8. Наибольшее значение функции	1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$
9. Наименьшее значение функции	-1 при $x = \pi+2\pi k$, $k \in Z$

График функции $y = \mathrm{tg}\,x$ (тангенсоида)


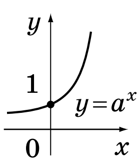
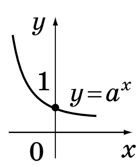
Свойства функции $y = \mathrm{tg}\,x$ (тангенсоида)	
1. Область определения	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
2. Область значений	$y \in R$
3. Функция нечётная	$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x$
4. Периодическая	$T = \pi$
5. Точки пересечения с осями координат	$(\pi k;\ 0),\ k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\mathrm{tg}\,x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$; $\mathrm{tg}\,x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	$\mathrm{tg}\,x$ возрастает на каждом промежутке области определения $\left(-\frac{\pi}{2} \cancel{+ \pi k}; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$
8. Наибольшего и наименьшего значения	нет

График функции $y = \mathrm{ctg}\,x$ (котангенсоида)



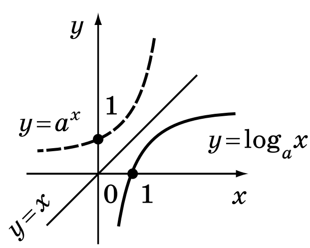
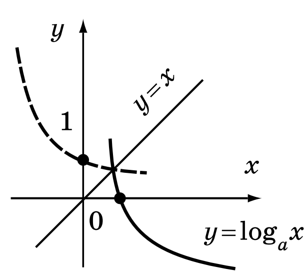
Свойства функции $y = \mathrm{ctg}\,x$ (котангенсоида)	
1. Область определения	$x \neq \pi k,\ k \in Z$
2. Область значений	$y \in R$
3. Функция нечётная	$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\,x$
4. Функция периодическая	$T = \pi$
5. Точки пересечения с осями координат	с осью Oy — нет; с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right),\ k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\mathrm{ctg}\,x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z;$ $\mathrm{ctg}\,x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right),\ k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	функция $\mathrm{ctg}\,x$ убывает на каждом из промежутков своей области определения: $(\pi k;\ \pi + \pi k),\ k \in Z$
8. Наибольшего и наименьшего значения	нет

Показательная функция, её график

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$	
График показательной функции	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

<table>
<tr><th colspan="2">Свойства показательной функции</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Область определения: $D(a^x) = R$.
2. Область значений: $E(a^x) = (0; +\infty)$, т.е. $y > 0$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Точки пересечения с осями координат:
с осью Oy: (0; 1); с осью Ox — нет.
5. Промежутки возрастания и убывания</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>При $a > 1$ функция возрастает на всей области определения</td><td>При $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Для всех $x \in R$ ($y > 0$).
Наибольшего и наименьшего значения нет</td></tr>
</table>

Логарифмическая функция, её график

<table>
<tr><td colspan="2">Логарифмической функцией называется функция вида
$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$</td></tr>
<tr><th colspan="2">График логарифмической функции</th></tr>
<tr><td colspan="2">Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) взаимно обратные, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Свойства логарифмической функции	
1. Область определения: $x > 0$; $D(\log_a x) = (0; +\infty)$. 2. Область значений: $y \in R$; $E(\log_a x) = R$. 3. Функция ни чётная, ни нечётная. 4. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — нет; с осью Ox — (1; 0)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
Функция $\log_a x$ **возрастает** при $a > 1$ на всей области определения	Функция $\log_a x$ **убывает** при $0 < a < 1$ на всей области определения
5. Промежутки знакопостоянства	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > 0$ при $x > 1$; $\log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$; $\log_a x < 0$ при $x > 1$
6. Наибольшего и наименьшего значения нет	

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРОИЗВОДНАЯ

Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

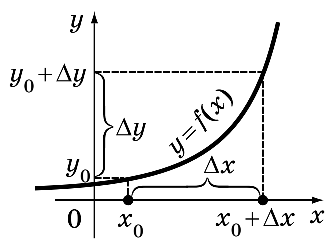
<table>
<tr><th colspan="2">Определение производной</th></tr>
<tr><td>

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что Δx стремится к нулю.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

</td><td>

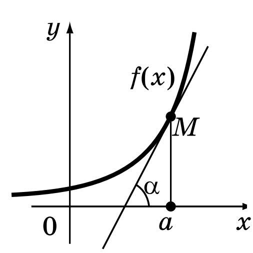


x_0 — начальное значение аргумента;
Δx — приращение аргумента;
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Операция нахождения производной функции называется дифференцированием</td></tr>
<tr><th colspan="2">Геометрический смысл производной.
Уравнение касательной</th></tr>
<tr><td>

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ — угловой коэффициент касательной:
$k = f'(a)$; $f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$

</td><td>



</td></tr>
</table>

Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком

Производная характеризует **скорость изменения функций** при изменении аргумента. Если процесс протекает по закону $s = s(t)$, то $s'(t)$ — скорость протекания процесса в момент времени t	$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени; $v = s'(t)$ — скорость прямолинейного движения; $a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения

Уравнение касательной к графику функции

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$	
Уравнение прямой имеет вид: $y = kx+b$. $k = f'(a)$, тогда уравнение касательной в точке $x = a$ $y = f(a)+f'(a)(x-a)$	
Составление уравнения касательной	
$y = f(x)$. Составить уравнение касательной в точке $x_0 = a$	$y = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$
1. Вычислить $f(a)$	$f(a) = f(1) = \sqrt{1} = 1$
2. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a) = f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$
3. Подставить найденные значения в формулу $y = f(a)+f'(a)(x-a)$	$y = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)$; $y = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ или $y = -0,5x+1,5$

	$C \cdot (u(x))' = C \cdot u'(x)$
Производная суммы функций равна сумме их производных	$(u+v)' = u' + v'$
Производная произведения	$(u \cdot v)' = u'v + v'u$
Производная дроби	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$ $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Производная сложной функции	$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Способы вычисления производной	
Постоянный множитель можно выносить за знак производной	$(7x^5)' = 7 \cdot (x^5)' = 7 \cdot 5x^4 = 35x^4$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$x^{25} = 25 \cdot x^{25-1} = 25x^{24}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^{10}}\right)' = -\frac{10}{x^{10+1}} = -\frac{10}{x^{11}}$
$(u+v)' = u' + v'$	$\left(\cos x + \sqrt{x}\right)' = (\cos x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = -\sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(u \cdot v)' = u'v + v'u$	$(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x^2 =$ $= 2x \sin x + x^2 \cos x$

Продолжение таблицы

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$	$\left(\dfrac{3x+2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(3x+2)'\sin x - (\sin x)'(3x+2)}{\sin^2 x} = \dfrac{3\sin x - (3x+2)\cos x}{\sin^2 x}$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin 17x)' = \cos 17x \cdot (17x)' = 17\cos 17x$ $\left(\sin\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)' \cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)' = -\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$
$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$; $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{tg} 4x)' = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$; $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{1}{x^2+2x}\right) = -\dfrac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2} = -\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)' = \dfrac{(x^2+2x+5)'}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$
$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$	$\left(\dfrac{1}{(3x+7)^6}\right)' = \dfrac{-6\cdot(3x+7)'}{(3x+7)^7} = \dfrac{-6\cdot 3}{(3x+7)^7} = -\dfrac{18}{(3x+7)^7}$

Окончание таблицы

$(a^{ux})' =$ $= u'(x)\cdot a^{u(x)}\cdot \ln a$	$(a^{\cos x})' = a^{\cos x} \ln a\cdot(\cos x)' = -a^{\cos x}$ $\ln a\cdot \sin x$
$(\log_a u(x))' =$ $= \dfrac{u'(x)}{u\cdot \ln a}$	$(\log_3(x^2-3x+1))' = \dfrac{(x^2-3x+1)'}{(x^2-3x+1)\ln 3} =$ $= \dfrac{2x-3}{(x^2-3x+1)\ln 3}$

Производные основных элементарных функций

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Функция** $f(x)$	**Производная** $f'(x)$
C (const)	0	$\cos x$	$-\sin x$
$kx+b$	k	$\mathrm{tg}\,x$, $x \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathrm{ctg}\,x$, $x \ne \pi n$, $n \in Z$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin x$, $\lvert x\rvert \le 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x}$, $x \uparrow 0$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arccos x$, $\lvert x\rvert \le 1$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $x \ne 0$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{arctg}\,x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arcctg}\,x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$

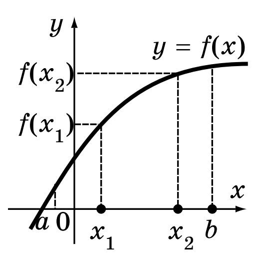
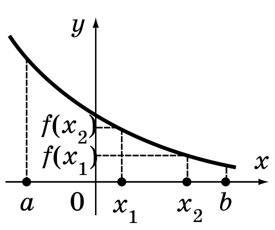
Вторая производная и её физический смысл

Вторая производная — это производная от производной	$y = f(x)$ $y' = f'(x)$ $y'' = (f'(x))' = (y')'$
Если уравнение движения задано функцией, то **первая производная** этой функции даст **скорость**, заданную функцией, а **вторая производная** даст **ускорение**, заданное функцией $a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения	$a = v'(t) = s''(t)$

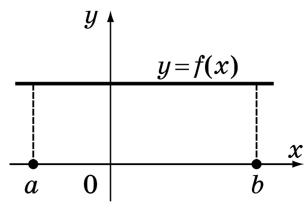
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

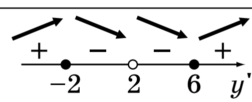
Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Исследование функции на монотонность

Возрастание и убывание функции на промежутке	
	Функция $y = f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a; b)$, если $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для всех x_1, $x_2 \in (a; b)$
	Функция $y = f(x)$ **убывает** на промежутке $(a; b)$, если $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) > fx_2)$ для всех x_1, $x_2 \in (a; b)$

Окончание таблицы

Достаточное условие возрастания (убывания) функции	Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;\ b)$. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;\ b)$
Необходимое и достаточное условие постоянства функции	 Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f(x)$ **постоянна** на промежутке $(a;\ b)$

Нахождение промежутков возрастания и убывания функции	
$y = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$	
1. Найти область определения функции	$D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
2. Найти производную, разложить на множители (если возможно)	$y' = \dfrac{(2x+6)(x-2) - (x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$
3. Исследовать знак производной методом интервалов	
4. Выбрать промежутки, где $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (6;\ +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-2;\ 2) \cup (2;\ 6)$

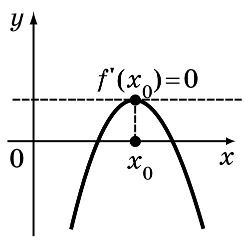
Окончание таблицы

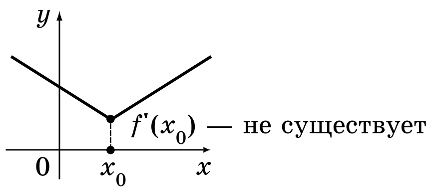
5. Если функция непрерывна на концах промежутка, их можно присоединить к промежутку возрастания (убывания)	Возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[6; +\infty)$. Убывает на $[-2; 2)$ и $(2; 6]$

Экстремумы функции

Критические точки функции

Если $y = f(x)$ непрерывна, а точка $x_0 \in D(y)$, то если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует, x_0 — критическая точка

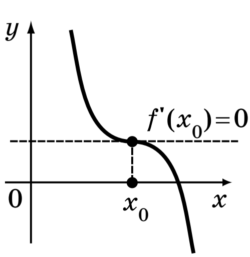


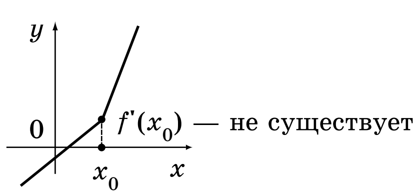


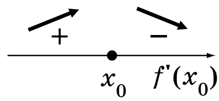
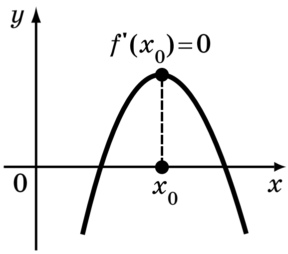
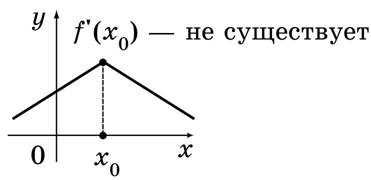
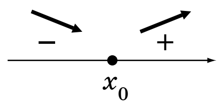
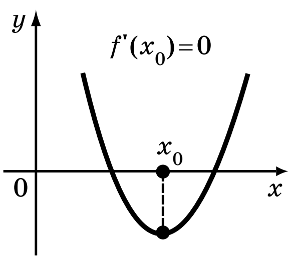
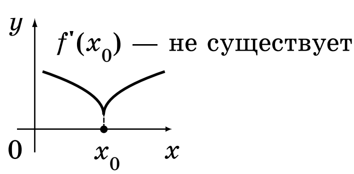
Необходимые условия экстремума

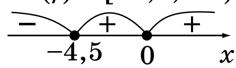
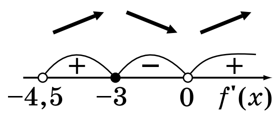
Если $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то x_0 — **критическая точка.** Однако не каждая критическая точка является точкой экстремума.

$f'(x_0) = 0$ и $f'(x_0)$ — не существует, но x_0 не является точкой экстремума

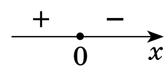
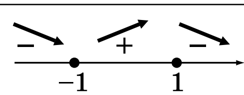
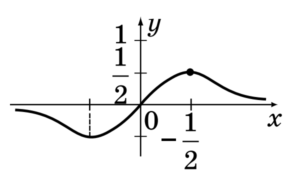




<table>
<tr><td colspan="2">Достаточное условие экстремума</td></tr>
<tr><td colspan="2">Первый признак экстремума
Если x_0 — критическая точка функции $y = f(x)$ ($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует) и</td></tr>
<tr><td>а) при переходе через x_0 производная $f'(x_0)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>б) при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Второй признак экстремума
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума</td></tr>
</table>

Нахождение точек экстремума и экстремумов функций	
$f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$	
1. Найти область определения функции	$2x^3+9x^2 \geq 0$; $x^2(2x+9) \geq 0$; $D(f) = [-4,5;\ +\infty)$ 
2. Найти производную	$f'(x) = \dfrac{6x^2 + 18x}{2\sqrt{2x^3 + 9x^2}} = \dfrac{3x(x+3)}{\sqrt{x^2(2x+9)}}$
3. Найти критические точки	$f'(x)$ не существует, если $x = 0$. $x = -4,5$ не является внутренней точкой области определения. $f'(x) = 0$ при $x = -3$
4. Определить знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения	
5. Найти точки экстремума	$x = -3$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума
6. Найти экстремумы	$f_{\max} = f(-3) = 3\sqrt{3}$; $f_{\min} = f(0) = 0$

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических задачах

Схема исследования функции	
$y = \dfrac{x}{x^2+1}$	
1. Область определения функции $D(f)$	$D(f) = R$
2. Точки пересечения с осями координат $(x_0;\ 0)$ и $(0;\ y_0)$. Промежутки знакопостоянства	С осью Ox (нули): $(0;\ 0)$; с осью Oy: $(0;\ 0)$  $f(x) > 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$
3. Чётность / нечётность, периодичность	Нечётная, $f(x) = -f(x)$ $\dfrac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1}$, непериодическая
4. Производная и критические точки	$y' = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ y' существует при $x \in R$; $y' = 0$ при $x = \pm 1$
5. Промежутки монотонности, точки экстремума	 Возрастает при $x \in [-1;\ 1]$; убывает при $x \in (-\infty;\ -1)$ и $x \in (1;\ +\infty)$
6. Поведение функции на концах области определения. Построение графика	

Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах	
Понятие производной используется для изучения изменяющихся величин, быстроты происходящих изменений	Физические производные величины
	$v(t) = x'(t)$ — скорость; $a(t) = v'(t)$ — ускорение; $I(t) = q'(t)$ — сила тока; $C(t) = Q'(t)$ — теплоёмкость; $d(l) = m'(l)$ — линейная плотность; $k(t) = l'(t)$ — коэффициент линейного расширения; $w(t) = \varphi'(t)$ — угловая скорость; $a(t) = w'(t)$ — угловое ускорение; $N(t) = A'(t)$ — мощность

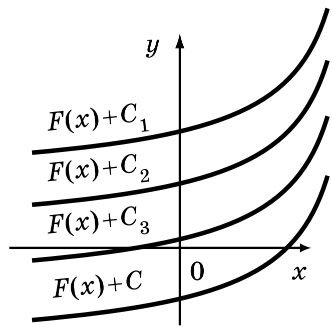
ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Первообразные элементарных функций

Первообразная. Основные свойства первообразной		
Первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется функция $F(x)$, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$		
$f(x)$	$F(x)$	Доказать, что $F(x)$ — первообразная $f(x)$
$2x$	x^2, $x \in R$	$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x),\ x \in R$
x	$\dfrac{x^2}{2}$	$F'(x) = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = \dfrac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x),\ x \in R$
x^a, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$F'(x) = \left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \dfrac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^{\alpha} = f(x)$, $x \in R,\ \alpha \neq -1$

Основное свойство первообразной

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$	то $\Leftrightarrow$	$F(x)+C$ — первообразная для $f(x)$, C — произвольная постоянная

Геометрическая интерпретация основного свойства первообразной: графики всех первообразных можно получить из любого графика путём параллельного переноса вдоль оси Oy	 $F(x)+C$ — общий вид первообразных для $f(x)$
Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке называется **неопределённым интегралом** от функции f на этом промежутке	

Правила вычисления первообразной (неопределённого интеграла)	
1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$; $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная для $f(x)+g(x)$	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $CF(x)$ — первообразная для функции $Cf(x)$	$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

Окончание таблицы

3. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ и $k \neq 0$, $b \in R$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$	$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$, $k \neq 0,\ b \in R$

Таблица первообразных (неопределённых интегралов)

Функция $f(x)$	**Первообразная $F(x)$**	$\int f(x)dx$
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x+C$	$\int dx = x+C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\|+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

Окончание таблицы

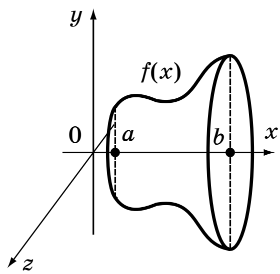
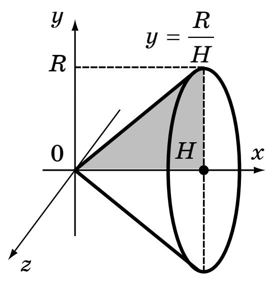
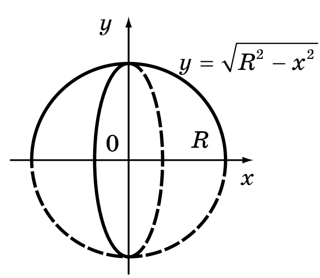
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Определённый интеграл. Основные свойства определённого интеграла	
Определённым интегралом от a до b непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $[a; b]$, называется прирост первообразной $F(x)$ для этой функции	Формула Ньютона — Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big\vert_a^b$ $f(x)$ — подынтегральная функция a и b — верхние и нижние пределы интегрирования

Основные правила и свойства определённого интеграла		
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$	$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$	$\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$
$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$	$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$	
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $c \in [a; b]$	$\int\limits_a^b f(kx + t)dx = \frac{1}{k}\int\limits_{ka+l}^{kb+l} f(t)dt$	

Физический (механический) смысл определённого интеграла
Если функция $v = f(t)$ обозначает **мгновенную скорость** движения тела в каждый момент времени t на $[a; b]$, то **определённый интеграл** $\int_a^b f(x)dx$ равен **пути,** пройденному за отрезок времени $t = b - a$

Геометрический смысл определённого интеграла	
Криволинейная трапеция (вокруг оси Ox): $V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)dx$	
Конус $V_к = \pi\int_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big\|_0^H$ $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	 $y = \frac{R}{H}x$
Шар $V_ш = \pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx =$ $= 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^R$ $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$	 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$