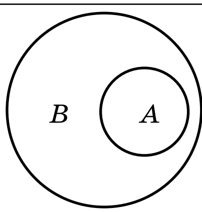
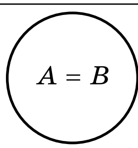
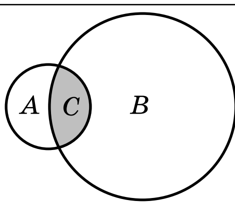
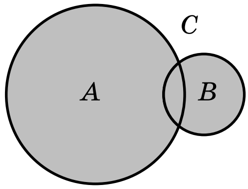
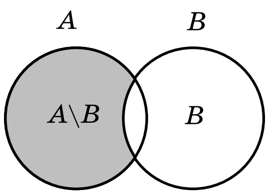
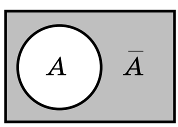
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Поочерёдный и одновременный выбор

Понятие множества и его элементов	
Множество — совокупность некоторых объектов, объединённых по определённому признаку	Элемент a принадлежит множеству $A \Leftrightarrow a \in A$. Элемент b не принадлежит множеству $A \Leftrightarrow b \notin A$. В множестве нет элементов $\Leftrightarrow \varnothing$
Подмножество ($\subset$)	
	$A \subset B \Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$
Равенство множеств (=)	
	Если $x \in A$, то $x \in B$ Если $x \in B$, то $x \in A$
Пересечение множеств ($\cap$)	
	$C = A \cap B$ $x \in C \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$

Окончание таблицы

Объединение множеств (∪)	
	$A \cup B = C$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$
Разность множеств (\\)	
	$C = A \setminus B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$
Дополнение множеств	
	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Простейшие комбинаторные задачи: перебор вариантов, правило суммы и произведения	
В простейших комбинаторных задачах осуществляют перебор всех возможных комбинаций и строится **дерево возможных вариантов**	
Поочерёдный и одновременный выбор	
Правило суммы (одновременный выбор)	**Правило произведения (поочерёдный выбор)**
Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A или B можно выбрать $m+n$ способами	Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами

В комбинаторных задачах изучаются способы выбора и размещения элементов конечного множества. Такие группы элементов называют **соединениями**

Соединения

Все элементы полученного множества разные	Элементы полученного множества повторяются
Соединения без повторений	Соединения с повторениями

Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона

Основные виды соединений без повторений	
Перестановка из n элементов (различают порядком следования элементов)	$P_n = n!$ $n!$ (факториал) $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $0! = 1$
Размещения из n элементов по m (различаются или порядком, или элементами)	$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Сочетания из n элементов по m (отличаются лишь элементами)	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{P_m}$, $C_n^0 = 1$. Свойство сочетания $C_n^m = C_n^{n-m}$

Бином Ньютона						
Двучлен вида $a+x$ называют биномом	**Треугольник Паскаля**					
$(a+x)^0 = 1$; $(a+x) \neq 0$	1					
$(a+x)^1 = a+x$	1	1				
$(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$	1	2	1			
$(a+x)^3 = a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$	1	3	3	1		
$(a+x)^4 =$ $= a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$	1	4	6	4	1	
$(a+x)^5 = a^5+5a^4x+10a^3x^2+$ $+\ 10a^2x^3+5ax^4+x^5$	1	5	10	10	5	1

Общая формула бинома Ньютона

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots$$
$$+ C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n$$

Общий член разложения $T_{n+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$ **($k = 0, 1, 2, \ldots n$).**
C_n^k называют **биномиальными коэффициентами**

Свойства биномиальных коэффициентов	
Число биномиальных коэффициентов (a равно n слагаемых в разложении) равно $n+1$	Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
Коэффициенты членов, равноудалённых от начала и конца разложения, равны между собой: $C_n^k = C_n^{k-1}$	Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечётных местах

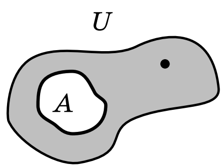
ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Числовые характеристики рядов данных

Ранжирование ряда чисел. Чтобы вычислять статистические характеристики, ряд чисел, полученных в результате сбора данных, надо ранжировать, т. е. расположить числа в порядке **неубывания** (каждое следующее число не меньше предыдущего)	
Числовые характеристики рядов данных	
Размах (*R*) — разница между наибольшим и наименьшим значением ряда чисел. Размах находят, если необходимо определить, как велик разброс данных в ряду	**Среднее значение ряда чисел** (среднее арифметическое) — частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых. **Среднее значение** — это значение величины, которое получается, если сумма всех наблюдаемых значений распределяется поровну между единицами наблюдения
Мода (*Mo*) — число, которое встречается в данном ряду чаще всего	**Медиана** — так называемое серединное значение ранжированного ряда чисел:
Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь её совсем. Моду ряда чисел находят, когда хотят выяснить некоторый типичный показатель	а) если количество чисел в ряду **нечётное**, то медиана — это число, записанное посередине; б) если количество чисел в ряду **чётное**, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине

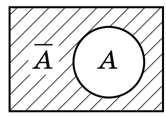
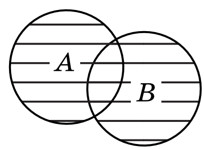
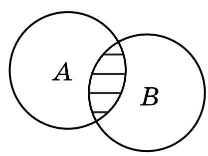
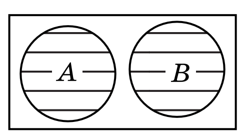
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятности событий

<table>
<tr>
<td>Классическое определение вероятности</td>
<td>Вероятность $P(A)$ случайного события A — это отношение числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству пространства элементарных событий: $P(A) = \frac{m}{n}$,
где n — число всех событий пространства; m — число событий пространства, способствующих событию A.
<table>
<tr><th>Событие</th><th>Его вероятность $P(A)$</th></tr>
<tr><td>Невозможно</td><td>$P(A) = 0$</td></tr>
<tr><td>Случайно</td><td>$0 < P(A) < 1$</td></tr>
<tr><td>Вероятно</td><td>$P(A) = 1$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Статистическое определение вероятности</td>
<td>Статистическая вероятность $P(A)$
Событие A — предел, к которому приближается относительная частота $\frac{m}{n}$
(n — количество всех испытаний серии, m — количество испытаний, в которых происходит событие A).
Появление события A при неограниченном увеличении числа всех испытаний:
$P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$

U — площадь фигуры на плоскость;
$S(U)$ — площадь фигуры U;
A — часть фигуры U ($A \subset U$);
$S(A)$ — площадь фигуры A.
Событие A — попадание точек U в фигуру A</td>
</tr>
</table>

Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

Операции над событиями

Определение	Теоретико-множественная иллюстрация
Противоположное событие	
Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	 U — достоверное событие $P(U) = 1$
Сумма событий	
Суммой (или объединением) событий A и B называется событие $A+B$ (или $A \cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B	 $A+B$ или $A \cup B$
Произведение событий	
Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие $A \cdot B$ (или $A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B	 $A \cdot B$ или $A \cap B$
Несовместные события	
Два события A и B называются **несовместными**, если их произведение является невозможным событием, т. е. $A \cdot B = \varnothing$ (или $A \cap B = \varnothing$)	 $A \cdot B = \varnothing$

Окончание таблицы

Определение	Теоретико-множественная иллюстрация
Вероятность суммы двух несовместных событий	
Если события A и B несовместные, то $P(A+B) = P(A)+P(B)$	

Вероятность сложных событий

Теоремы сложения вероятностей	
События A и B совместимы	
нет	да
$P(A+B) = P(A) + P(B)$	$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$
Следствия сложения вероятностей	
Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, которые образуют полную группу и попарно несовместимы, равна 1: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) = 1$	Сумма вероятностей **противоположных** событий равна 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$