Domaći zadatak 1

Ristovski Nikola 19347

DOMAĆI 1

1. $e^x - 2 = \cos e^x - 2 \quad / +2$

$e^x = \cos e^x$

a)

x	-3	-2	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	1	2	3
e^x	0,994	0,991	0,9999	0,9998	0,998	0,9917	0,939
$\cos(e^x)$	0,0497	0,1353	0,3678	1	2,718	7,389	20,085

ZAKLJUČAK: KAKO SE IZMEĐU $x = -1$ I $x = 0$, VREDNOST F-JE e^x MENJA TAKO DA POSTAJE VEĆA OD F-JE $\cos(e^x)$, TU IMAMO PRESEK OVIH F-JA, TJ. JEDNO REŠENJE.

F-JA $\cos(e^x)$ JE OGRANIČENA NA SEGMENTU $[-1,1]$, A F-JA e^x TEŽI $+\infty$ KAD x TEŽI $+\infty$. TO ZNAČI DA ZA $x > 0$ NEMAMO PRESEK OVIH F-JA, PA NEMAMO NI REŠENJE JEDNAČINE.

F-JA e^x TEŽI 0 KAD x TEŽI $-\infty$. A KAKO ONA TEŽI 0, ONDA ĆE VREDNOST $\cos(e^x)$ TEŽITI VREDNOSTI 1. TO TAKOĐE ZNAČI DA NI ZA $x < -1$ NEMAMO REŠENJA.

DAKLE, IMAMO SAMO 1 REALNO REŠENJE.

b) IZ a), REŠENJE x^* PRIPADA SEGMENTU $[-1,0]$.

$x^* \in [-1,0]$.

c) $x^* \in [-1, 0]$

$e^x - 2 = \cos e^x - 2 \quad / + 2$

$e^x = \cos e^x \quad / \ln$

$\ln(e^x) = \ln(\cos e^x)$

$x = \ln(\cos(e^x)) \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \ln(\cos e^x)$

1°

$[-1, 0] \to [-1, 0]$?

$\phi(-1) = \ln(\cos e^{-1}) = -2.06 \cdot 10^{-5} \in [-1, 0]$ ✓

$\phi(0) = \ln(\cos e^0) = -1.52 \cdot 10^{-4} \in [-1, 0]$ ✓

2°

$\phi'(x) = (\ln(\cos e^x))' = \frac{1}{\cos e^x} \cdot (-\sin e^x) \cdot e^x =$

$= -\mathrm{tg}\, e^x \cdot e^x$

$\phi'(-1) = -0{,}00236$

$\Rightarrow \quad 0 < |\phi'(-1)| < 1$ ✓

$\phi'(0) = -0{,}0174$

$\Rightarrow \quad 0 < |\phi'(0)| < 1$ ✓

$\phi'(x) < 0 \quad , \; x \in [-1, 0] \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \searrow , x \in [-1, 0]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tg}(e^{-1}) = 0{,}0064 \\ \mathrm{tg}(e^0) = 0{,}0174 \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

KAKO SU e^x i $\mathrm{tg}\, x$ PRIMITIVNE F-JE, ZAKLJUČUJEMO DA JE $\phi'(x) < 0 \quad \forall x , x \in [-1, 0]$.

(NEMA LOKALNIH EKSTREMA, OPADAJUĆA JE).

$\Rightarrow \phi(x)$ KONVERGIRA!

3° $\phi(x) = \ln(\cos e^{x})$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2} = 0{,}05$

$x_0 = -1$ NPR.

$x_1 = \ln(\cos e^{-1}) = -0{,}0692$

⋮

x_0	-1
x_1	$-0{,}0692$
x_2	$-0{,}5186$
x_3	$-0{,}1888$
x_4	$-0{,}3909$
x_5	$-0{,}2486$
x_6	$-0{,}3410$
x_7	$-0{,}2774$
x_8	$-0{,}3196$

$|x_8 - x_7| = 0{,}042 < \varepsilon = 0{,}05$

$\Rightarrow \boxed{x^* = -0{,}3196}$

d) NJUTNOV METOD

$\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2} = 0{,}05$

KAKO JE $f(x) = \cos e^{x} - e^{x}$

I KAKO POSTOJI PRVI IZVOD:

$f'(x) = -\sin e^{x} \cdot e^{x} - e^{x}$

MOŽE SE PRIMENITI NJUTNOV METOD!

```
Trenutna vrednost x1  = -0.0692514 u iteraciji: 1 | greska : -0.930749
Trenutna vrednost x2  = -0.518602 u iteraciji: 2 | greska : 0.44935
Trenutna vrednost x3  = -0.188801 u iteraciji: 3 | greska : -0.3298
Trenutna vrednost x4  = -0.390991 u iteraciji: 4 | greska : 0.202189
Trenutna vrednost x5  = -0.248667 u iteraciji: 5 | greska : -0.142324
Trenutna vrednost x6  = -0.341046 u iteraciji: 6 | greska : 0.0923793
Trenutna vrednost x7  = -0.277478 u iteraciji: 7 | greska : -0.0635685
Trenutna vrednost x8  = -0.319622 u iteraciji: 8 | greska : 0.0421443 < 0.05!

Resenje je : x* = -0.319622
```

Rešenje zadatka 1 primenom opšteg iterativnog metoda

```
Trenutna vrednost x1  = 0.131539 u iteraciji: 1 | greska : 1.13154
Trenutna vrednost x2  = -0.20082 u iteraciji: 2 | greska : -0.332359
Trenutna vrednost x3  = -0.2957 u iteraciji: 3 | greska : -0.0948796
Trenutna vrednost x4  = -0.302128 u iteraciji: 4 | greska : -0.00642793 < 0.05!

Resenje je : x* = -0.302128
```

Rešenje zadatka 1 primenom Njutnovog metoda

$x_0 = -1$

$$\left[\, x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \right.$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{\cos e^{-1} - e^{-1}}{-\sin e^{-1} \cdot e^{-1} - e^{-1}} =$$
$$= 0{,}1315$$

$\vdots$

x_0	-1
x_1	$0{,}1315$
x_2	$-0{,}2008$
x_3	$-0{,}2957$
x_4	$-0{,}3021$

$\} \; |x_4 - x_3| = 0{,}0064 < \varepsilon = 0{,}05$

$$\Rightarrow \boxed{x^* = -0{,}3021}$$

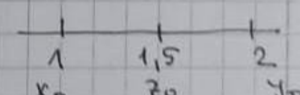
2. $f(x) = \max\{\underbrace{x^3 - 5x + 1}_{g(x)}, \underbrace{8 - 5x - x^4}_{e(x)}\}$

$\varepsilon = 10^{-2} = 0{,}01$

$x^* \in [1, 2]$

KORISTIM METOD POLOVLJENJA INTERVALA.

$[x_0, y_0] = [1, 2]$



$x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = 2$

$1^\circ \quad \dfrac{|y_0 - x_0|}{2} = \dfrac{|2-1|}{2} = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}01$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$f(x_0) = \max\{x_0^3 - 5x + 1, 8 - 5x_0 - x_0^4\} = \max\{-3, 2\} = 2$

$f(y_0) = \max\{y_0^3 - 5y_0 + 1, 8 - 5y_0 - y_0^4\} = \max\{-1, -18\} = -1$

$$f(z_0) = \max\{z_0^3 - 5z_0 + 1,\ 8 - 5z_0 - z_0^4\} = \max\{-3{,}125,\ -4{,}5625\} = -3{,}125$$

KAKO JE $f(x_0) \cdot f(z_0) < 0$,

$1 \cdot (-3{,}125) < 0$,

ZA SLEDEĆI SEGMENT UZIMAMO $[x_0, z_0] = [x_1, y_1] = [1,\ 1{,}5]$, JER TU F-JA MENJA ZNAK.

$$\frac{|y_1 - x_1|}{2} = \frac{|z_0 - x_0|}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 > \varepsilon = 0{,}01$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{y_1 + x_1}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$$

⋮

$x_6 = 1{,}1875$

$y_6 = 1{,}2031$

KAKO JE $\frac{|y_6 - x_6|}{2} = 0{,}00781 < \varepsilon = 0{,}01$

$$\Rightarrow \boxed{x^*} = \frac{x_6 + y_6}{2} = z_6 = \boxed{1{,}1953}$$

```
x0 = 1 y0 = 2 z0 = 1.5 greska: 0.5 | iteracija 0
x1 = 1 y1 = 1.5 z1 = 1.25 greska: 0.25 | iteracija 1
x2 = 1 y2 = 1.25 z2 = 1.125 greska: 0.125 | iteracija 2
x3 = 1.125 y3 = 1.25 z3 = 1.1875 greska: 0.0625 | iteracija 3
x4 = 1.1875 y4 = 1.25 z4 = 1.21875 greska: 0.03125 | iteracija 4
x5 = 1.1875 y5 = 1.21875 z5 = 1.20312 greska: 0.015625 | iteracija 5
x6 = 1.1875 y6 = 1.20312 z6 = 1.19531 greska: 0.0078125 | iteracija 6


Resenje je: x* = z6 = 1.19531
```

Rešenje zadatka 2

3. $\varepsilon = 10^{-2}$

$$f_1: \begin{cases} e^{-1-y^2} - x = 0 \\ \log(x^2+10) - 1 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ln(x^2+10) - 1 - y = 0$$
$f_2:$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-1-y^2} - x\right) = -1 \;;\; \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-1-y^2} - x\right) = -2ye^{-1-y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2+10) - 1 - y\right) = \frac{2x}{x^2+10} \;;\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x^2+10) - 1 - y\right) = -1$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} -1 & -2ye^{-1-y^2} \\ \frac{2x}{x^2+10} & -1 \end{bmatrix}$$

UZMIMO ZA $(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow J_0 = \begin{bmatrix} -1 & -2\cdot 0 \cdot e^{-1\cdot 0^2} \\ \frac{2\cdot 0}{0^2+10} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_0^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix} \Rightarrow f(X_0) = \begin{bmatrix} e^{-1-0^2} - 0 \\ \ln(0^2+10) - 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}368 \\ 1{,}303 \end{bmatrix}$$

POSTUPAK:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left(J(X^{(k)})\right)^{-1} \cdot f(X^{(k)})$$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.368 \\ 1{,}303 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 \\ 1{,}303 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\| X_1 - X_0 \|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.368 \\ 1.303 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{0.368, 1.303\} =$$
$$= 1.303 > \varepsilon = 10^{-2}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2\cdot 1{,}303\cdot e^{-1-(1{,}303)^2} \\ \dfrac{2\cdot 0{,}368}{(0.368)^2+10} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.175 \\ 0{,}072 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_1^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} -0{,}987 & 0.173 \\ -0.071 & -0.987 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(x_1) = \begin{bmatrix} -0.301 \\ 0.013 \end{bmatrix}}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0.368 \\ 1.303 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.987 & 0.173 \\ -0.071 & -0.987 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.301 \\ 0.013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.068 \\ 1.294 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\| x_2 - x_1 \|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.068 - 0.368 \\ 1.294 - 1.303 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.009 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.3 > 0.01$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2\cdot 1.294\cdot e^{-1-(1.294)^2} \\ \dfrac{2\cdot 0.068}{(0.068)^2+10} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.178 \\ 0.014 & -1 \end{bmatrix}$$

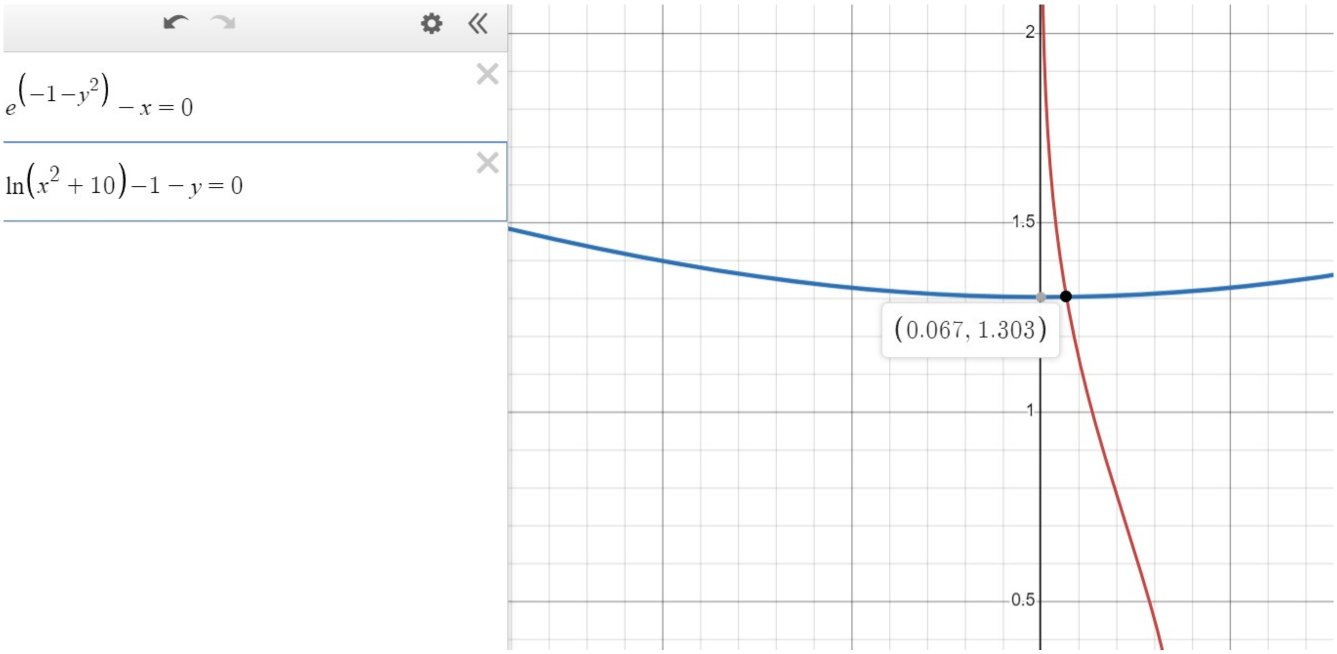
$$\Rightarrow J_2^{-1} = \begin{bmatrix} -0.997 & 0.177 \\ -0.014 & -0.997 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(x_2) = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.009 \end{bmatrix}}$$

x_3 JE REŠENJE

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.068 \\ 1.294 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.997 & 0.177 \\ -0.014 & -0.997 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.009 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0.067 \\ 1.303 \end{bmatrix}}$$

$$\| x_3 - x_2 \|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.067 - 0.068 \\ 1.303 - 1.294 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.009 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.009 < \varepsilon$$



Kao što vidimo sa grafika, rešenje se poklapa sa presečnom tačkom ovih funkcija.