Čas 4

Zadatak 1. *Dokazati da za svaki povezan graf G važi:*

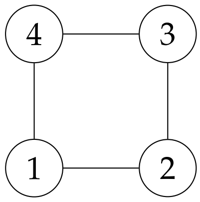
$$r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$$

gde $r(G)$ predstavlja radijus grafa G, a $d(G)$ njegov dijametar.

Rešenje. Kako radijus grafa predstavlja minimalni ekscentricitet nekog njegovog čvora, a dijametar maksimalni ekscentricitet, nejednakost $r(G) \leq d(G)$ je očigledna.

Što se tiče druge nejednakosti, ona se može dokazati ako posmatramo proizvoljan čvor čiji je ekscentricitet jednak radijusu grafa G, tj. $r(G)$. Neka je to čvor A. Ukoliko su data neka dva čvora B i C, tada znamo da važi $d(B, A) \leq r(G)$ i $d(C, A) \leq r(G)$. Konkatenacijom odgovarajućih puteva od B do A i od A do C, dobija se put od B do C čija dužina može biti ne veća od $r(G) + r(G)$. Odavde sledi $d(B, C) \leq 2r(G)$. Kako B i C predstavljaju bilo koja dva čvora, zaključujemo da svaka dva čvora imaju udaljenost ne veću od $2r(G)$, te mora biti $d(G) \leq 2r(G)$. ∎

Zadatak 2. *Dat je graf G predstavljen narednom slikom*



Koliko ovaj graf ima različitih:

(a) *puteva dužine* 10 *koji počinju u čvoru* 1 *i završavaju se u svakom od čvorova* 1, 2, 3 *i* 4*?*

(b) *puteva dužine* 9 *koji počinju u čvoru* 1 *i završavaju se u svakom od čvorova* 1, 2, 3 *i* 4*?*

Rešenje. Primetimo da kad god pređemo sa nekog čvora na bilo koji njegov susedni, parnost oznake čvora se menja. Ovo svojstvo je veoma bitno jer nam direktno govori da ukoliko krenemo iz nekog čvora, put parne dužine mora da nas dovede do čvora koji je iste parnosti, dok put neparne dužine mora kao krajnju tačku da ima čvor suprotne parnosti.

(a) Ukoliko put parne dužine kreće u čvoru 1, on mora da se završi ili u čvoru 1 ili u čvoru 3. Dakle, puteva dužine 10 koji počinju u čvoru 1, a završavaju se u čvoru 2 ili 4 ima 0.

Ukupan broj puteva dužine 10 koji počinju u čvoru 1 možemo lako da izbrojimo i ima ih $2^{10} = 1024$. Naime, nakon svakog posećenog čvora, moguće je odabrati tačno 2 grane kako bi se došlo do narednog čvora, te je ukupno neophodno 10 puta odabrati neku od 2 moguće grane. Svaki od ovih puteva mora da se završi u čvoru 1 ili čvoru 3. Takođe, svaki put dužine 10 može da se zamisli kao put dužine 9, koji se završava u čvoru 2 ili 4, na koji se zatim konkateniraju još jedna grana i čvor. Puteva dužine 9 ima $2^9 = 512$. U zavisnosti od toga koja se od dve moguće konačne grane odabere, odgovarajući put dužine 10 će se završiti ili u čvoru 1 (poslednja grana je $\{2, 1\}$ ili $\{4, 1\}$) ili u čvoru 3 (poslednja grana je $\{2, 3\}$ ili $\{4, 3\}$). Zaključujemo da ukoliko imamo odabranih prvih 9 grana, put koji se završava u 1 ili 3 je u potpunosti određen na osnovu toga koji čvor želimo da bude poslednji. Dakle, ukupan broj puteva koji se završavaju u 1 i 3 je međusobno jednak i jednak broju puteva dužine 9, tj. 512.

(b) Rešenje je skoro apsolutno isto kao u prethodnom primeru. Pošto je put dužine 9 neparne dužine, sledi da ukupan broj puteva dužine 9 koji počinju u čvoru 1 i završavaju se u čvoru 1 ili čvoru 3 iznosi 0. Ukupan broj puteva dužine 9 biće jednak $2^9 = 512$, dok će ukupan broj onih koji se završavaju u 2 i onih koji se završavaju u 4 biti međusobno jednak i iznosiće 256.

■

Zadatak 3. *Dat je kompletan graf K_4. Koliko ovaj graf sadrži različitih ciklusa?*

Rešenje. Pošto graf ima ukupno 4 čvora, ima poente brojati samo cikluse dužine 3 i dužine 4. Ciklusa dužine 3 ima ukupno 4, pošto na $\binom{4}{3} = 4$ načina možemo da odaberemo 3 čvora od ukupno 4, a koristeći čvorova iz svakog tročlanog skupa čvorova može da se formira tačno jedan ciklus dužine 3.

Što se tiče ciklusa dužine 4, jasno je da svaki od njih mora da sadrži sva 4 čvora. Međutim, biranjem ovih čvorova u različitom redosledu moguće je dobiti različite cikluse. Naime, znamo da svaki ciklus dužine 4 može da se predstavi preko 8 zatvorenih puteva dužine 4 – moguća su 4 odabira početnog čvora uz 2 smera obilaženja ciklusa. Zatvorenih puteva dužine 4 ima ukupno $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, pošto je graf kompletan, pa se posle svakog odabranog čvora može bilo koji drugi odabrati kao sledeći. Dakle, ukupno postoje $\frac{24}{8} = 3$ ciklusa dužine 4. Ove cikluse možemo zapravo da razlikujemo po tome koji čvor se nalazi „preko puta“ kog.

Zaključujemo da ukupan broj različitih ciklusa kompletnog grafa K_4 iznosi $4 + 3 = 7$. ■

Zadatak 4 (2020, septembar)**.**

(a) *Koliko postoji različitih 2-regularnih grafova sa* 6 *čvorova?*

(b) *Koliko postoji različitih 2-regularnih grafova sa* 12 *čvorova?*

Napomena: *Dva grafa se smatraju različitim ukoliko nisu izomorfna.*

Rešenje. Glavno zapažanje koje možemo da napravimo za svaki 2-regularan graf jeste da svaka njegova komponenta povezanosti mora biti ciklus. Odavde sledi da su dva 2-regularna grafa sa istim brojem čvorova izomorfna ako i samo ako njihove komponente povezanosti odgovaraju ciklusima istih dužina. Na ovaj način problem brojanja različitih 2-regularnih grafova sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova svodimo na nalaženje broja načina na koji se prirodan broj n može predstaviti kao suma prirodnih brojeva ne manjih od 3, pošto dužina ciklusa ne može biti ispod 3. Redosled pojavljivanja sabiraka koji formiraju sumu nije bitan.

(a) Rešenje je jednako 2:

$$\begin{aligned} 6 &= 6 \\ 6 &= 3 + 3 \end{aligned}$$

(b) Rešenje je jednako 9:

$$\begin{aligned} 12 &= 12 \\ 12 &= 9 + 3 \\ 12 &= 8 + 4 \\ 12 &= 7 + 5 \\ 12 &= 6 + 6 \\ 12 &= 6 + 3 + 3 \\ 12 &= 5 + 4 + 3 \\ 12 &= 4 + 4 + 4 \\ 12 &= 3 + 3 + 3 + 3 \end{aligned}$$

■

Zadatak 5 (2020, jun 2). *Koliko najviše grana može imati graf koji se sastoji od bar $p \in \mathbb{N}$ komponenti povezanosti i koji sadrži tačno $n \in \mathbb{N},\ n \geq p$ čvorova?*

Rešenje. Posmatrajmo skup svih grafova koji zadovoljavaju svojstvo navedeno u zadatku, tj. koji se sastoje od $n \in \mathbb{N}$ čvorova i bar $p \in \mathbb{N}$ komponenti povezanosti, gde je $n \geq p$. Označimo ovaj skup sa W. Pošto svi grafovi koji su elementi skupa W imaju broj grana koji je nenegativan ceo broj, i sigurno nemaju više od $\dfrac{n(n-1)}{2}$ grana, sledi da postoji graf $G = (V, E)$ koji ima maksimalan broj grana. Drugim rečima, postoji graf $G \in W$ čiji je broj grana veći ili jednak od broja grana svih grafova koji su element skupa W. Naš zadatak biće da odredimo koliko graf G ima grana. Ovaj zadatak se može uraditi tako što za graf G ispitamo neka korisna svojstva i na taj način zaključimo više toga o njegovom izgledu.

Pre svega, graf G mora da ima tačno p komponenti povezanosti, ne može da ima više od p. U suprotnom, možemo da spojimo dva proizvoljna čvora iz različitih komponenti povezanosti, i na taj način da dobijemo graf koji ima 1 granu više od grafa G, a ponovo je element skupa W, jer sigurno nema manje od p komponenti povezanosti. Pošto graf G mora da ima maksimalan mogući broj grana, sledi on ne sme da ima više od p komponenti povezanosti, tako da mora da ima baš p.

Kod grafa G svaka dva čvora unutar iste komponente povezanosti mora da budu susedna. U suprotnom, mogli bismo da uzmemo neka dva koja nisu susedna i da ih spojimo granom. Na taj način bismo dobili graf koji je element skupa W, a ima 1 granu više od grafa G, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da graf G ima maksimalan mogući broj grana.

Pretpostavimo da graf G ima dve komponente povezanosti koje obe imaju bar 2 čvora. Neka one redom imaju a i b čvorova, gde je $a, b \in \mathbb{N},\ a \geq b \geq 2$. Ako uzmemo proizvoljan čvor iz komponente koja se sastoji od b čvorova, izbrišemo sve grane koje ga povezuju sa ostalim čvorovima i dodamo grane koje ga povezuju sa svim čvorovima iz komponente povezanosti koja ima a čvorova, onda dobijamo novi graf G_1 koji umesto komponenti povezanosti sa a i b čvorova ima komponente sa $a+1$ i $b-1$ čvorova. Graf G_1 pripada skupu W i ima $a - (b-1) = a - b + 1 \geq 1$ grana više od grafa G, sto nije moguće. Dakle, graf G ne može da ima dve komponente povezanosti koje imaju bar 2 čvora.

Možemo da zaključimo da graf G ima bar $p-1$ komponenti povezanosti koje se sastoje od samo 1 čvora. Dakle, njegove komponente povezanosti imaju redom $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p-1}, n-(p-1)$ čvorova i svaka dva čvora unutar iste komponente su povezana. Sledi da graf G mora da ima ukupno $\dfrac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ grana. Odavde dobijamo odgovor na pitanje postavljeno u zadatku – graf koji se sastoji od tačno $n \in \mathbb{N}$ čvorova i bar $p \in \mathbb{N}$ komponenti povezanosti može imati maksimalno $\dfrac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ grana. ■

Zadatak 6. *Neka je dat graf čiji je skup čvorova jednak $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ zajedno sa svojom matricom susedstva $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čiji redovi, odnosno kolone, redom odgovaraju čvorovima $1, 2, 3, \ldots, n$. Dokazati da u matrici A^t, gde je $t \in \mathbb{N}$, element koji se nalazi u i-tom redu i j-toj koloni predstavlja broj različitih puteva dužine t u ovom grafu koji počinju u čvoru i, a završavaju se u čvoru j, gde $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.*

Rešenje. Ovaj dokaz je najlakše odraditi postupkom matematičke indukcije. Pre svega, za slučaj matrice A^1, tvrđenje je očigledno – ukoliko su dva čvora susedna, tada između njih zaista postoji tačno 1 put dužine 1, a ako nisu, onda između njih nema puteva dužine 1.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za matricu A^t, za neko $t \in \mathbb{N}$. Dokazaćemo da onda mora da važi i za matricu A^{t+1}. Pre samog dokaza, uvedimo notaciju po kojoj su elementi matrice A^t za svako $t \in \mathbb{N}$ redom označeni na sledeći način:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11}^{(t)} & a_{12}^{(t)} & a_{13}^{(t)} & \cdots & a_{1n}^{(t)} \\ a_{21}^{(t)} & a_{22}^{(t)} & a_{23}^{(t)} & \cdots & a_{2n}^{(t)} \\ a_{31}^{(t)} & a_{32}^{(t)} & a_{33}^{(t)} & \cdots & a_{3n}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(t)} & a_{n2}^{(t)} & a_{n3}^{(t)} & \cdots & a_{nn}^{(t)} \end{bmatrix}$$

Dakle, pošto je $A^{t+1} = A^t A^1$, na osnovu pravila množenja matrica znamo da važi

$$a_{ij}^{(t+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(t)} a_{kj}^{(1)}$$

Broj $a_{kj}^{(1)}$ potiče iz matrice A i ima vrednost 1 ili 0, u zavisnosti od toga da li između čvorova k i j postoji grana ili ne. Zbog toga prethodno sumiranje možemo da zapišemo na drugačiji način

$$a_{ij}^{(t+1)} = \sum_{k\sim j} a_{ik}^{(t)}$$

tako da se sumiranje vrši samo po čvorovima k koji su incidentni sa čvorom j.

Svaki put dužine $t+1$ koji potiče u čvoru i, a završava se u čvoru j, kao prethodni čvor pre j mora da ima neki čvor k koji je incidentan sa j. Dakle, u zavisnosti od toga koji je to konkretan čvor k, dobijamo različite disjunktne skupove puteva dužine $t+1$. Za neko fiksirano k, očigledno je da možemo da napravimo bijekciju između svih puteva dužine $t+1$ od i do j koji neposredno pre čvora j prolaze kroz čvor k, i svih puteva dužine t od i do k. Odavde sledi da ukupan broj puteva dužine $t+1$ od i do j, gde je pretposlednji čvor jednak k, iznosi upravo $a_{ik}^{(t)}$. Konačno dobijamo da se ukupan broj puteva dužine $t+1$ od i do j određuje upravo po formuli $\sum_{k\sim j} a_{ik}^{(t)}$, te je on jednak $a_{ij}^{(t+1)}$. Ovim je dokaz završen. ■

Zadatak 7 (2020, oktobar). *Dat je proizvoljan graf čija je matrica susedstva jednaka A. Ukoliko važi*

$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}$$

dokazati da je tada broj različitih ciklusa dužine 4 *u ovom grafu jednak*

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\alpha_{i,j}^2 - \alpha_{i,j} \right).$$

Rešenje. Nek zadati graf ima $C_4 \in \mathbb{N}_0$ ciklusa dužine 4. Brojanje ovih ciklusa možemo da svedemo na brojanje zatvorenih puteva dužine 4 oblika $A - B - C - D - A$, gde A, B, C, D predstavljaju čvorove grafa, kod kojih važe dodatna ograničenja $A \neq C$ i $B \neq D$. Ako ovakvih puteva ukupno ima $X \in \mathbb{N}_0$, tada znamo da važi $C_4 = \frac{1}{8}X$, uzevši u obzir da brojanjem svih ovakvih puteva svaki ciklus dužine 4 zapravo brojimo tačno 8 puta – postoje 4 mogućnosti za odabir početnog čvora i 2 mogućnosti da odabir smera, te je $8 = 4 \cdot 2$.

Označimo čvorove prirodnim brojevima $1, 2, \ldots, n$ tako da svaki čvor nosi vrednost indeksa vrste, odnosno kolone, matrice A^2 koja se odnosi na njega. Pri brojanju zatvorenih puteva dužine 4 oblika $A - B - C - D - A$ gde važi $A \neq C$ i $B \neq D$, recimo da važi $A = i$ i $C = j$. U tom slučaju $A - B - C$ i $A - D - C$ predstavljaju puteve dužine 2 od A do C, i to dva različita puta dužine 2, pošto važi $B \neq D$. Broj načina na koji možemo da odaberemo čvorove B i D pri fiksiranim čvorovima $A = i$ i $C = j$ jednak je broju načina na koji možemo da odaberemo dva različita puta dužine 2 od A do C, pri čemu je redosled bitan. Ovaj broj iznosi $\alpha_{i,j} \cdot (\alpha_{i,j} - 1)$, imajući u vidu da element $\alpha_{i,j}$ matrice A^2 određuje broj različitih puteva dužine 2 od čvora i do čvora j.

Dakle, ukupan broj zatvorenih puteva dužine 4 oblika $A - B - C - D - A$ uz $A \neq C$ i $B \neq D$ se može izračunati tako što se izraz $\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} - 1) = \alpha_{i,j}^2 - \alpha_{i,j}$ sumira po svim mogućim parovima vrednosti i i j za koje važi $i \neq j$. Drugim rečima:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\alpha_{i,j}^2 - \alpha_{i,j} \right)$$

Ovo sumiranje se vrši po svim parovima indeksa (i, j) koji odgovaraju elementima van dijagonale matrice A^2. Ako uzmemo u obzir da je ova matrica simetrična, onda se vrednost X može svesti na dvostruko sumiranje odgovarajućih parova indeksa koji odgovaraju elementina iznad glavne dijagonale matrice, odnosno:

$$X = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\alpha_{i,j}^2 - \alpha_{i,j} \right)$$

Sledi:

$$C_4 = \frac{1}{8}X = \frac{1}{8} \cdot 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\alpha_{i,j}^2 - \alpha_{i,j} \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\alpha_{i,j}^2 - \alpha_{i,j} \right)$$

■

Zadatak 8. *Dat je kompletan graf K_n, gde je $n \in \mathbb{N}$. Izračunati spektar njegove matrice susedstva i odrediti višestrukost svih njenih sopstvenih vrednosti, kao i odgovarajuće sopstvene potprostore.*

Rešenje. Matrica susedstva kompletnog grafa K_n, bez obzira na to koji redosled čvorova odaberemo, data je sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Neka je $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ neki njen sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda \in \mathbb{R}$ (za realne simetrične matrice je poznato da svaka sopstvena vrednost predstavlja realan broj). Tada važi $Av = \lambda v$, odakle nadalje sledi niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} v_2 + v_3 + \cdots + v_n \\ v_1 + v_3 + \cdots + v_n \\ v_1 + v_2 + v_4 + \cdots + v_n \\ \vdots \\ v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} S - v_1 \\ S - v_2 \\ S - v_3 \\ \vdots \\ S - v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \\
S - v_k &= \lambda v_k \qquad (\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}) \\
S &= (\lambda + 1) v_k \qquad (\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\})
\end{aligned}$$

gde je $S = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

Ukoliko važi $\lambda \neq -1$, iz poslednje jednakosti jasno sledi $v_k = \dfrac{S}{\lambda+1}$ za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. U tom slučaju je $v_1 = v_2 = \cdots = v_k$, te se dobija $S = nv_1$, a zatim i $nv_1 = (\lambda+1)v_1$, odnosno $(\lambda + 1 - n)v_1 = 0$. Da bi λ predstavljao sopstvenu vrednost, jednakost $(\lambda + 1 - n)v_1 = 0$ mora da važi čak i kad $v_1 \neq 0$. Dakle, mora biti $\lambda = n - 1$. Ova sopstvena vrednost će tada imati sopstveni potprostor određen sa

$$\left\{\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

te je njena višestrukost jednaka 1.

Sa druge strane, ako $\lambda = -1$, tada uslov da vektor $v \in \mathbb{R}^n$ predstavlja sopstveni vektor koji odgovara vrednosti $\lambda = -1$ postaje obična jednakost $S = 0$, odnosno $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n = 0$. Ovom jednakošću je određen vektorski potprostor koji predstavlja ortogonalni komplement sopstvenog potprostora koji odgovara sopstvenoj vrednosti $n - 1$. Dakle, druga sopstvena vrednost jeste -1 i njen sopstveni potprostor je

$$\left\{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T : v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} v_k = 0\right\}$$

Višestrukost sopstvene vrednosti -1 iznosi $n - 1$. ■