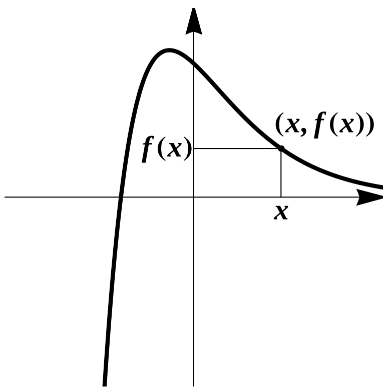
Osnovne osobine realnih funkcija jedne realne promenljive

Realna funkcija jedne realne promenljive je

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad X \subset \mathbb{R}\ , \qquad y = f(x).$$

Grafik funkcije f je skup

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in X\}.$$



Oblast definisanosti

Oblast definisanosti realne funkcije realne promenljive može da bude bilo koji podskup skupa $\mathbb{R}$. Najčešće su to intervali oblika

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$

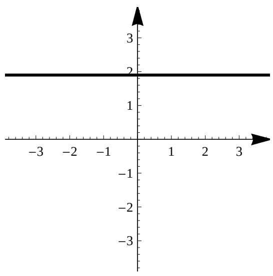
($a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) ili njihove unije, uključujući, eventualno, i izolovane tačke.

Ako je funkcija zadata formulom $y = f(x)$ ("analitički"), od posebnog interesa je *prirodna oblast definisanosti*, tj. najširi skup za koji ta formula ima smisla:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} .$$

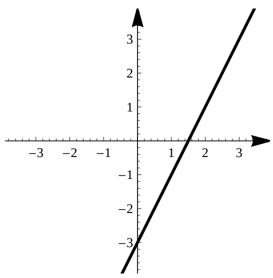
Primer 1. a) Konstantna funkcija

$f(x) = c$ ($c =$ const.), $\quad D_f = \mathbb{R}$

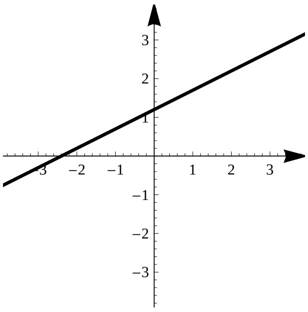


b) Linearna funkcija

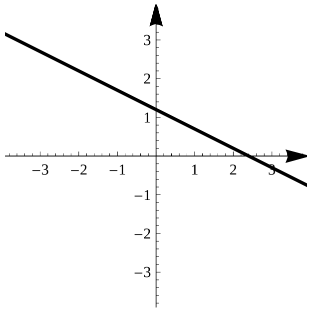
$f(x) = 2x - 3, \quad D_f = \mathbb{R}$



$f(x) = ax + b$



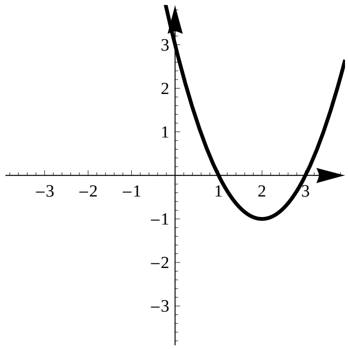
$a > 0$



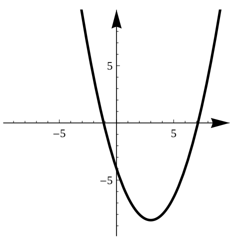
$a < 0$

b) Kvadratna funkcija

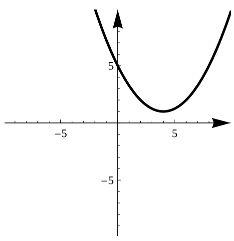
$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad D_f = \mathbb{R}$



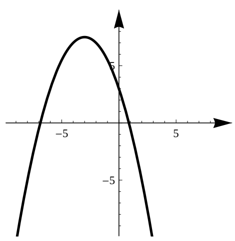
$f(x) = ax^2 + bx + c$



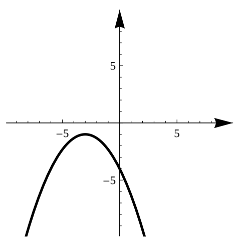
$a > 0,\ b^2 - 4ac > 0$



$a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$



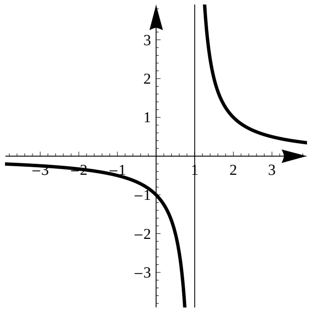
$a < 0,\ b^2 - 4ac > 0$



$a < 0,\ b^2 - 4ac < 0$

c) Racionalna funkcija

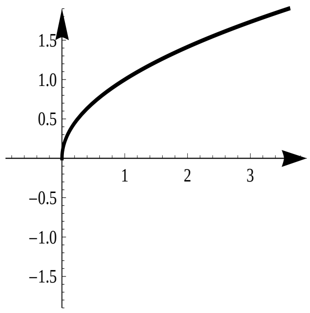
$f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

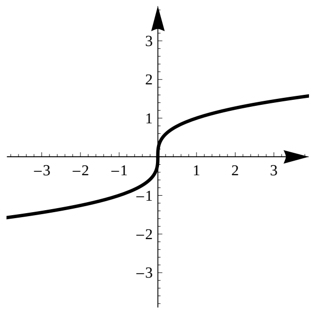


d) Korena funkcija

$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = [0, \infty)$

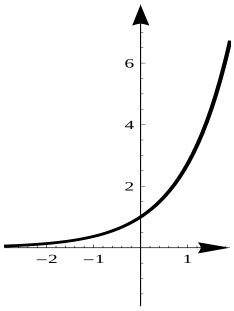
$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad D_f = \mathbb{R}$





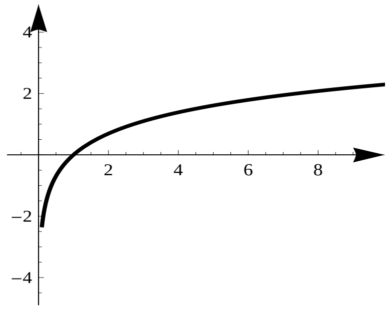
e) Eksponencijalna funkcija

$f(x) = e^x, \quad D_f = \mathbb{R}$



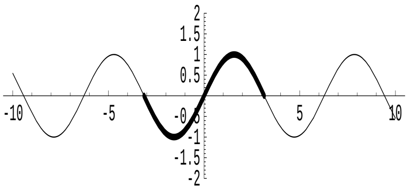
f) Logaritamska funkcija

$f(x) = \ln x, \quad D_f = (0, \infty)$

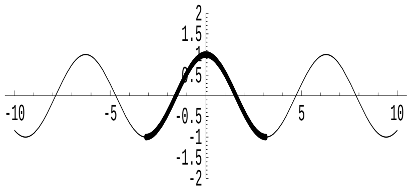


g) Trigonometrijske funkcije

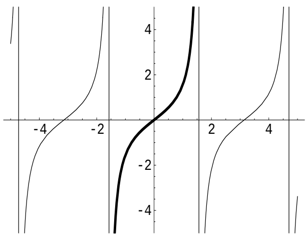
$f(x) = \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}$



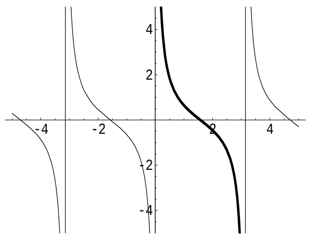
$f(x) = \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$



$f(x) = \operatorname{tg} x, \ D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \ \middle| \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

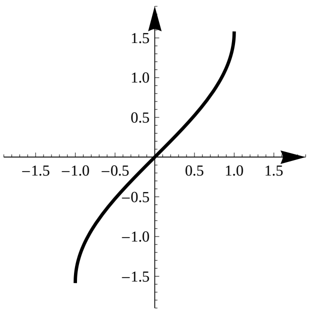


$f(x) = \operatorname{ctg} x, \ D_f = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \}$

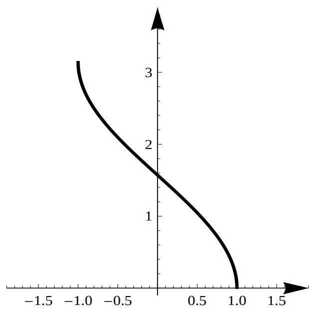


h) Inverzne trigonometrijske funkcije

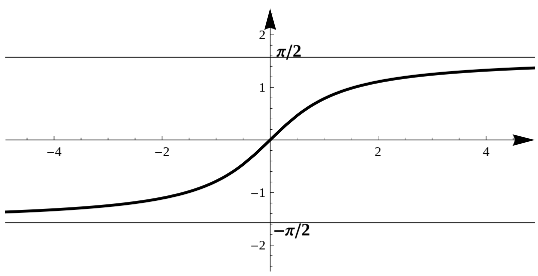
$f(x) = \arcsin x, \quad D_f = [-1, 1]$



$f(x) = \arccos x, \quad D_f = [-1, 1]$

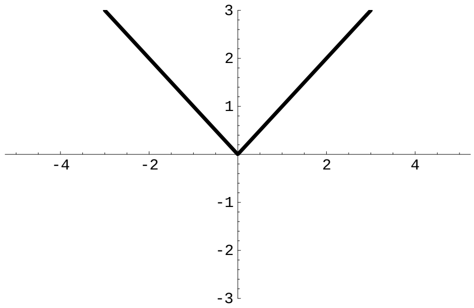


$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad D_f = \mathbb{R}$



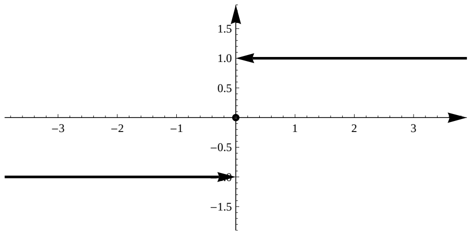
Primer 2. **a)** $f(x) = |x|, \quad D_f = \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



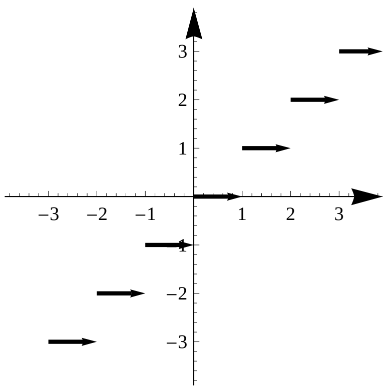
b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad D_f = \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



c) $f(x) = [x], \quad D_f = \mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$

$$[x] = k, \qquad x \in [k, k+1).$$



Ograničenost

Definicija. Funkcija $f(x)$ je *ograničena na skupu* D ($D \subseteq D_f$) ako je ograničen skup $f(D)$, tj. ako postoje $m, M \in \mathbb{R}$ tako da je

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in D\ .$$

Funkcija $f(x)$ je *ograničena odozdo* ako postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je

$$f(x) \geq m, \qquad \forall x \in D\ .$$

Funkcija $f(x)$ je *ograničena odozgo* ako postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je

$$f(x) \leq M, \qquad \forall x \in D\ .$$

Ako postoji $a \in D$ tako da je $f(x) \geq f(a)$ za svako $x \in D$, tada je $f(a)$ *minimum* funkcije $f(x)$ na skupu D, a a je tačka u kojoj se on dostiže.

Ako postoji $b \in D$ tako da je $f(x) \leq f(b)$ za svako $x \in D$, tada je $f(b)$ *maksimum* funkcije $f(x)$ na skupu D, a b je tačka u kojoj se on dostiže.

Primer. a) Funkcija $f(x) = \sin x$ je ograničena na $\mathbb{R}$, jer:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ona dostiže svoj maksimum 1 u beskonačno mnogo tačaka $x_k = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i svoj minimum -1 u beskonačno mnogo tačaka $x_k = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je ograničena na $\mathbb{R}$, jer je

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ipak, funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ni u jednoj tački $x \in \mathbb{R}$ ne dostiže ni minimum ni maksimum.

c) Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je ograničena odozdo, ali nije ograničena na $\mathbb{R}$, jer je

$$x^2 + 1 \geq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$(\forall M > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 + 1 > M.$$

Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ dostiže svoj minimum 1 u tački $x = 0$.

Parnost i neparnost

Neka je D_f skup simetričan u odnosu na koordinatni početak, tj. skup takav da važi $\quad x \in D_f \ \Rightarrow \ -x \in D_f$.

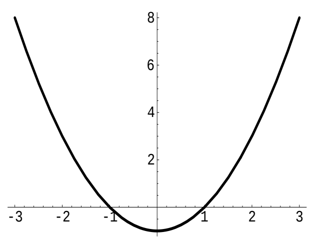
Definicija. Ako za svako $x \in D_f$ važi:
$f(-x) = f(x)$, funkcija $f(x)$ je *parna*;
$f(-x) = -f(x)$, funkcija $f(x)$ je *neparna*.

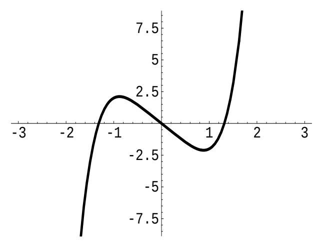
Primer. a) $f(x) = x^2 - 1$

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \text{funkcija } f(x) \text{ je parna;}$$

b) $f(x) = x^5 - 3x$

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x) = -x^5 + 3x = -f(x) \Longrightarrow \quad \text{funkcija} \quad f(x) \text{ je neparna;}$$





c) $f(x) = x^4 - x$

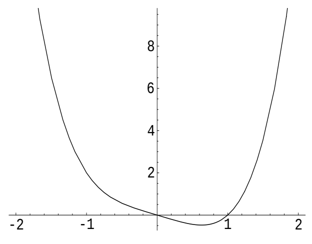
$$f(-x) = (-x)^4 - (-x) = x^4 + x \quad \Longrightarrow \quad \text{funkcija } f(x) \text{ nije ni parna ni neparna.}$$

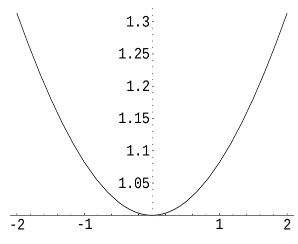
d) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{e^x - 1}$

$$f(x) = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)},$$

$$f(-x) = \frac{-x(e^{-x} + 1)}{2(e^{-x} - 1)} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{-x(1 + e^x)}{2(1 - e^x)} = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{funkcija } f(x) \text{ je parna.}$$





Periodičnost

Definicija. Ako postoji $T > 0$ tako da za svako $x \in D_f$ važi $f(x+T) = f(x)$, tada je $f(x)$ *periodična* funkcija sa *periodom* T.

Primer. a) Funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ su periodične sa periodom $T = 2\pi$, jer:

$$f(x + 2k\pi) = \sin(x + 2k\pi) = \sin x = f(x),$$
$$g(x + 2k\pi) = \cos(x + 2k\pi) = \cos x = g(x).$$

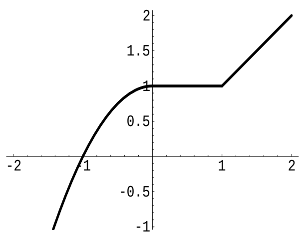
b) Funkcije $f(x) = \mathrm{tg}x$ i $g(x) = \mathrm{ctg}x$ su periodične sa periodom $T = \pi$.

Monotonost

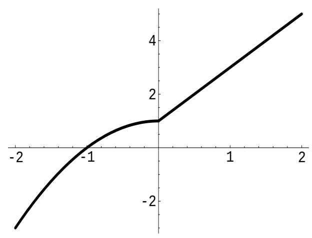
Neka je $D \subset D_f$ interval.

Definicija. Ako za svako $x_1, x_2 \in D$ važi

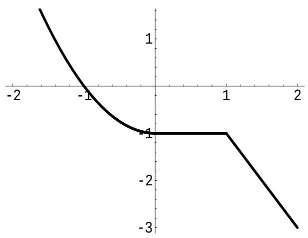
$$\begin{array}{llll} x_1 < x_2 & \Rightarrow & f(x_1) \leq f(x_2), & \text{funkcija } f(x) \text{ je } \textit{neopadajuća} \text{ na } D, \\ x_1 < x_2 & \Rightarrow & f(x_1) < f(x_2), & \text{funkcija } f(x) \text{ je } \textit{rastuća} \text{ na } D, \\ x_1 < x_2 & \Rightarrow & f(x_1) \geq f(x_2), & \text{funkcija } f(x) \text{ je } \textit{nerastuća} \text{ na } D, \\ x_1 < x_2 & \Rightarrow & f(x_1) > f(x_2), & \text{funkcija } f(x) \text{ je } \textit{opadajuća} \text{ na } D. \end{array}$$



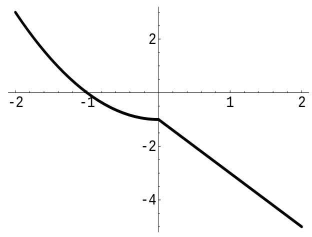
neopadajuća funkcija



rastuća funkcija



nerastuća funkcija



opadajuća funkcija

Ako funkcija f ima neku od ovih osobina, kaže se da je *monotona* na D.

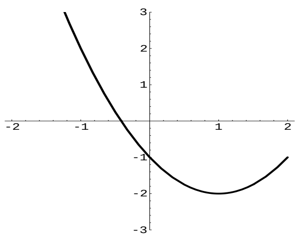
Konveksnost

Neka je $D \subset D_f$ interval.

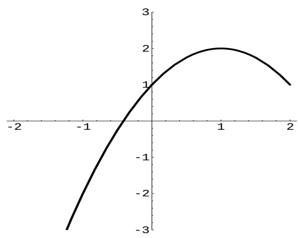
Definicija. Ako za svako $x_1, x_2 \in D$ i $\lambda \in [0,1]$ važi

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, funkcija $f(x)$ je *konveksna* na D,
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, funkcija $f(x)$ je *konkavna* na D.

U slučaju strogih nejednakosti, funkcija $x \mapsto f(x)$ je strogo konveksna ili strogo konkavna.



konveksna funkcija



konkavna funkcija