Lekcija 6

6 Stabla

6.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Svaki graf koji ne sadrži nijedan ciklus naziva se aciklični graf ili šuma.*

Definicija 2. *Svaki povezan aciklični graf koji sadrži $n \geq 2$ čvorova naziva se stablo ili drvo.*

Na osnovu ove definicije lako je zaključiti da su komponente povezanosti svake šume stabla ili izolovani čvorovi.

Sledeća teorema je fundamentalna za stabla:

Teorema 1. *Neka je G dati graf koji sadrži $n \geq 2$ čvorova. Tada su sledeći izrazi medjusobno ekvivalentni:*

1. *Graf G je povezan i ne sadrži nijedan ciklus;*
2. *Graf G ne sadrži nijedan ciklus i ima $n-1$ granu;*
3. *Graf G je povezan i sadrži $n-1$ granu;*
4. *Graf ne sadrži nijedan ciklus, ali dodavanjem nove grane izmedju proizvoljna dva njegova čvora, obrazuju ciklus;*
5. *Graf je povezan, ali udaljavanjem proizvoljne njegove grane on postaje nepovezan;*
6. *Svaka dva čvora u grafu G su spojena tačno jednim elementarnim putem.*

Napomena: Svaki iskaz u Teoremi 1 može se iskoristiti formiranje definicije stabla, a da se ostali iskazi dokažu kao (posebne) teoreme. Tako je, na primer, na osnovu iskaza 1. je formirana Definicija 2.

Domaći zadatak:

Na osnovu iskaza 2. do 6. formirati nove definicije stabla.

Teorema 2. *Svako stablo sadrži bar dva čvora stepena 1.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $|E| = n - 1$, dato stablo. Pretpostavimo da stablo G ne sadrži nijedan čvor stepena 1, već da je $d(x_i) \geq 2$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada na osnovu jednakosti

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(x_i)\,,$$

važi

$$2m = 2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n\,,$$

što je nemoguće.

Pretpostavimo da stablo sadrži jedan čvor stepena 1. Na primer, neka je $d(x_1) = 1$. Tada bi važilo

$$2m = 2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = d(x_1) + \sum_{i=2}^{n} d(x_i) \geq 1 + \sum_{i=2}^{n} 2 = 1 + 2(n-1)\,,$$

što je nemoguće.

Zaključujemo da graf sadrži bar dva čvora stepena 1. □

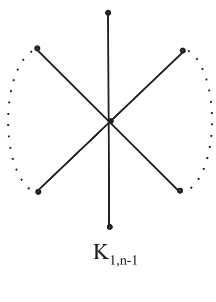
Čvor u stablu koji ima stepen 1 naziva se list.

Čvor u stablu čiji je stepen veći ili jednak 3 naziva se račvište (čvor u kome se stablo račva).

Put dužine n, u oznaci P_n, je jedino stablo koje sadrži dva , i samo dva čvora stepena 1, a ostali su stepena 2.

P_5

Zvezda od n čvorova, u oznaci $K_{1,n-1}$ je jedino stablo koje sadrži jedan čvor stepena $n-1$, a ostali su stepena 1.



$K_{1,n-1}$

Definicija 3. *Broj nezavisnih prostih ciklusa u datom grafu (multigrafu) G, u oznaci $\gamma(G)$, naziva se ciklomatski broj.*

NAPOMENA: Ciklomatski broj grafa G jednak je broju grana koje treba odstraniti iz grafa da bi se formirala šuma (stablo).

Definicija 4. *Broj grana u jednoj šumi, u oznaci $r(G)$, naziva se rang šume. Rang stabla je broj grana u stablu.*

Teorema 3. *Svaki multigraf (graf) sadrži šumu kao delimični graf.*

Teorema 4. *Neka graf (multigraf) ima n čvorova, m grana i p komponenti povezanosti. Tada važe jednakosti*

$$r(G) = n - p \quad \text{i} \quad \gamma(G) = m - n + p\,.$$

Dokaz. Pretpostavimo da svaka komponenta povezanosti datog grafa (multigrafa) sadrži n_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, čvorova, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. Da bi svaka komponenta povezanosti bila stablo ona mora da ima $n_i - 1$ grana. To znači da je ukupan broj grana u odgovarajućoj sprežnoj šumi

$$r(G) = \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1) = n - p\,.$$

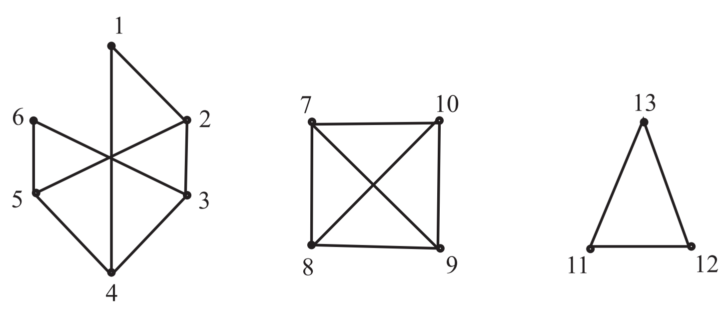
Kako dati graf (multigraf) ima m grana, prilikom formiranja sprežne šume (stabla) odstranjeno je

$$\gamma(G) = m - r(G) = m - n + p\,,$$

grana, što je ciklomatski broj, tj. broj neazivisnih ciklusa u grafu (multigrafu). □

Primer 1. Graf $G = (V, E)$ definisan je skupovima $V = \{1, 2, \ldots, 13\}$, $E = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{7,8\}, \{7,9\}, \{7,10\}, \{8,9\}, \{8,10\}, \{9,10\}, \{11,12\}, \{11,13\}, \{12,13\}\}$. Naći rang i ciklomatski broj grafa. Dati primer sprežne šume datog grafa.

Rešenje Dati graf ima $n = 13$ čvorova, $m = 17$ grana i $p = 3$ komponenti povezanosti, što je prikazano na sledećoj slici



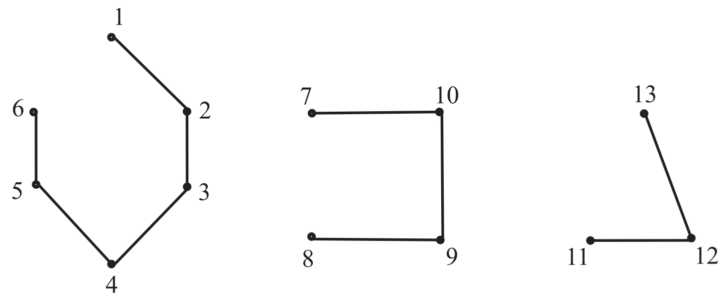
Rang datog grafa je

$$r(G) = n - p = 13 - 3 = 10\,.$$

Ciklomatski broj dataog grafa, tj. ukupan broj nezavisnih prostih ciklusa u njemu je

$$\gamma(G) = m - r(G) = m - n + p = 7\,.$$

Primer sprežne šume dat je na sledećoj slici



Zadatak. Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, povezan graf. Odrediti ciklomatski broj ovog grafa.

Rešenje: Sprežno stablo bi imalo $n - 1$ granu. To znači da je ciklomatski broj

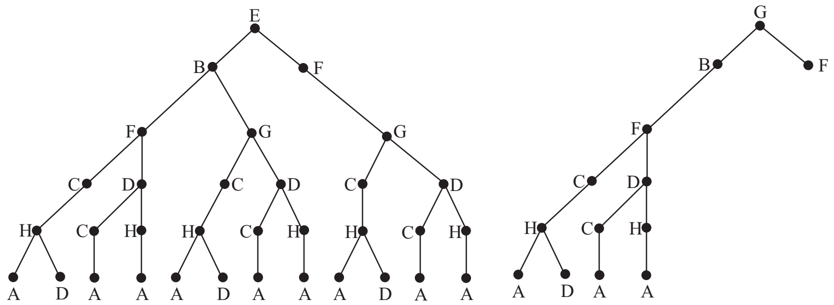
$$\gamma(G) = m - n + 1\,.$$

6.2 Korensko stablo

Stablo u kome je jedan čvor posebno označen, najčešće punim kružićem, naziva se *korensko stablo*, a sam označeni čvor *koren*. Ovo je značajno kada se stablo koristi za neko pretraživanje ili se pretražuje u stablu, jer znamo odakle se kreće.

Primer 2. Za članove polarne ekspedicije od 8 kandidata, obeleženih sa A, B, C, D, E, F, G, H, treba odabrati 6. Pri tome u ekspediciji mora biti po jedan biolog, hidrolog, metereolog, vezista, mehaničar i lekar, i dve ili više poslova ne može obavljati isti čvovek. Za poslove biologa konkurisali su kandidati E i G, hidrologa B i F, metereologa F i G, veziste C i D, mehaničara C i H, lekara A i D. Kandidati su imali i neke specijalne zahteve. Kandidat F neće učestvovati u ekspediciji sa kandidatom G, a A sa kandidatom B. Ako se ovi zahtevi uvažavaju, da li je moguće, i ako jeste na koliko različitih načina, formirati željenu ekspediciju.

Rešenje Za rešenje zadatka iskoristićemo stabla. Krenućemo od kandidata za biologa, pa redom po profesijama, pri čemu ćemo voditi računa da se na istom putu ne nađe jedan te isti kandidat. Ovom prilikom, specijalne uslove kandidata nećemo razmatrati.



Na osnovu ovih stabala postoji 16 mogućnosti za formiranje željene ekspedicije. To su

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \{E,\, B,\, F,\, C,\, H,\, A\}\,, & m_2 = \{E,\, B,\, F,\, C,\, H,\, D\}\,,\\
m_3 &= \{E,\, B,\, F,\, D,\, C,\, A\}\,, & m_4 = \{E,\, B,\, F,\, D,\, H,\, A\}\,,\\
m_5 &= \{E,\, B,\, G,\, C,\, H,\, A\}\,, & m_6 = \{E,\, B,\, G,\, C,\, H,\, D\}\,,\\
m_7 &= \{E,\, B,\, G,\, D,\, C,\, A\}\,, & m_8 = \{E,\, B,\, G,\, D,\, H,\, A\}\,,\\
m_9 &= \{E,\, F,\, G,\, C,\, H,\, A\}\,, & m_{10} = \{E,\, F,\, G,\, C,\, H,\, D\}\,,\\
m_{11} &= \{E,\, F,\, G,\, D,\, C,\, A\}\,, & m_{12} = \{E,\, F,\, G,\, D,\, H,\, A\}\,,\\
m_{13} &= \{G,\, B,\, F,\, C,\, H,\, A\}\,, & m_{14} = \{G,\, B,\, F,\, C,\, H,\, D\}\,,\\
m_{15} &= \{G,\, B,\, F,\, D,\, C,\, A\}\,, & m_{16} = \{G,\, B,\, F,\, D,\, H,\, A\}\,.
\end{aligned}
$$

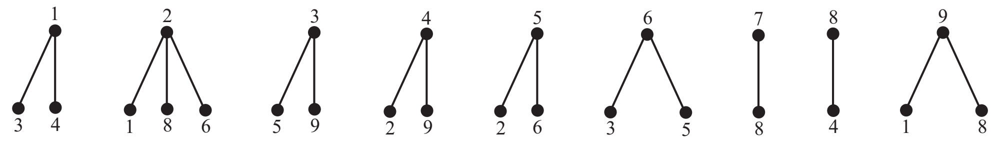
Uzimajući u obzir želju kandidata F, mogućnosti m_9, m_{10}, m_{11} i m_{12} ne dolaze u obzir. Na osnovu uslova kandidata D, otpadaju i mogućnosti m_3,m_4, m_7, m_8, m_{15} i m_{16}, kandidata C mogućnosti m_5, m_6, m_{13} i m_{14}. Takođe otpada, na osnovu uslova kandidata A mogućnost m_1. Ipak, ekspedicija se može formirati, i to na jedinstven način. To je mogućnost

$$m_2 = \{E,\, B,\, F,\, C,\, H,\, D\}\,.$$

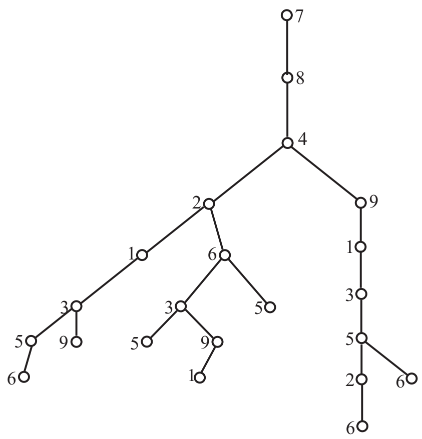
Primer 3. Pomoću cifara $1, 2, \dots, 9$ formirati devetocifreni broj, pri čemu se svaka cifra javlja samo jedanput, $i_1\, i_2 \dots i_9$, tako da je za svako k, $k = 1, 2, ..., 8$, broj $i_k i_{k+1}$ deljiv brojevima 7 ili 13.

Rešenje

Formirajmo, najpre, koristeći stabla, sve dvocifrene brojeve koji su deljivi brojevima 7 ili 13.



Kako se nijedan od dvocifrenih brojeva ne završava brojem 7, traženi broj, ako postoji, mora početi brojem 7. Traženi broj odredićemo, počev od broja 7, pomoću stabla, vodeći računa da se na nijednom putu u njemu neki od brojeva ne javlja dva puta, vodeći računa da uslovi zadatka budu zadovoljeni.

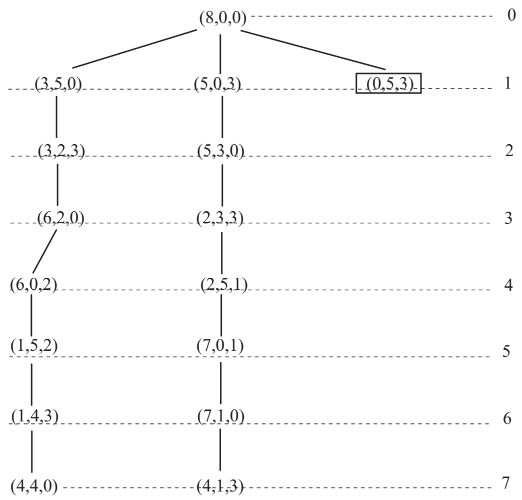


Na osnovu ovog stabla, zaključujemo da je traženi broj 784913526, i to je jedinstveno rešenje.

Primer 4. Date su tri posude. Prva ima zapreminu 8 litara i napunjena je tečnošću. Druga i treća, koje su prazne, imaju 5 i 3 litra, respektivno. Koliko je najmanje potrebno presipanja iz posude u posudu tako da u dve posude bude po 4 litra tečnosti?

Rešenje

Uređenom trojkom (x, y, z) označimo neko stanje u toku presipanja, pri čemu x označava količinu vode u prvoj, y u drugoj, a z u trećoj posudi. Početno stanje je $(8, 0, 0)$. Važe ograničenja $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 5$ i $0 \leq z \leq 3$. S obzirom na poslednje ograničenje, $0 \leq z \leq 3$, željeno stanje je $(4, 4, 0)$. Zadatak ćemo rešiti pomoću stabla koje formiramo na osnovu mogućih prelazaka iz stana u stanje, tj. količina tečnosti u posudama, kao što je prikazano na slici.



Prilikom formiranja ovog stabla sa $\boxed{(x, y, z)}$ označili smo ćorsokake. Takođe, nismo uvažavali stanja korišćena u prethodim koracima.

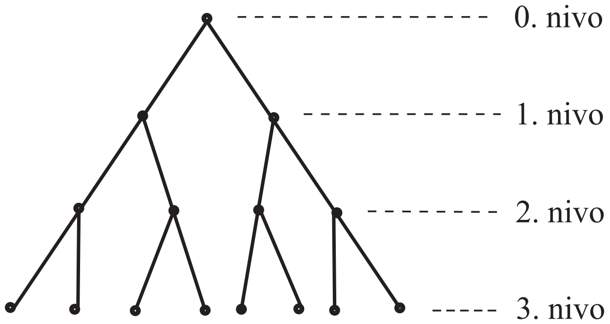
Zadatak se rešava u 7 koraka, tj. nakon 7 presipanja, koja su opisana sledećim stanjima

$$(8, 0, 0) \to (3, 5, 0) \to (3, 2, 3) \to (6, 2, 0) \to (6, 0, 2) \to (1, 5, 2) \to (1, 4, 3) \to (4, 4, 0)$$

6.3 Binarno stablo

Definicija 5. *Stablo u kome se svaki čvor račva u dva čvora (svaki čvor ima dva naslednika) naziva se binarno stablo*

Binarno stablo može se predstaviti kao korensko stablo po nivoima, kao *na sledećoj slici*



Domaći zadatak

Neka je dato binarno stablo koje ima k nivoa. Naći:

a) Ukupan broj čvorova stepena 1 (listova);

b) Ukupan broj čvorova, n, i grana, m;

c) Dijametar stabla