Numerički metodi u linearnoj algebri – Direktni metodi

Dat je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Neka je rang $A = n$, tj. $\det A \neq 0$. Tada sistem ima jedinstveno rešenje $\mathbf{x}^* = [x_1^*\ x_2^*\ \ldots\ x_n^*]^T$.

I Gausov metod za rešavanje sistema linearnih jednačina

- bez izbora glavnog elementa:

  Bazira na svođenju kvadratnog sistema na trougaoni oblik

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + \quad a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)},\\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)},\\ &\vdots\\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}, \end{aligned}$$

  primenom formula

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)},\\ i, j &= k+1,\ k+2, \ldots, n, \end{aligned}$$

  pod uslovom $\quad a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Sukcesivnim rešavanjem jednačina od n-te ka prvoj dobija se

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \qquad x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}}\Big(b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k)} x_i\Big), \quad k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$$

Elementi $a_{kk}^{(k)}$ zovu se *glavni elementi* ili *pivoti*.

- sa parcijalnim izborom glavnog elementa:

  Pre $k-$tog koraka:

  - Odrediti $r \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ tako da je $a_{rk}^{(k)} = \max\limits_{k \le i \le n} |a_{ik}|$.
  - Zameniti mesta $k-$toj i $r-$toj vrsti.
  - Nastaviti sa Gausovim algoritmom.

II Gaus-Žordanov metod za rešavanje sistema linearnih jednačina

Svođenje kvadratnog sistema jednačina na dijagonalni oblik

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad & = b_1^{(n)},\\
a_{22}^{(2)} x_2 \qquad\qquad & = b_2^{(n)},\\
& \ \vdots\\
a_{nn}^{(n)} x_n & = b_n^{(n)},
\end{aligned}$$

primenom formula

$$\begin{aligned}
& m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\\
& a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)},\\
& i, j = 1,\ 2, \ldots, n, \quad i, j \ne k
\end{aligned}$$

pod uslovom $\quad a_{kk}^{(k)} \ne 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Tada je

$$x_k = \frac{b_k^{(n)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad k = 1,\ 2, \ldots, n.$$

III LR- faktorizacija matrice

Predstavljanje kvadratne matrice A u obliku proizvoda jedne donje-trougaone (levo-trougaone) i jedne gornjetrougaone (desno-trougaone) matrice:

$$A = LR, \qquad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Primena Gausovog algoritma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix},$$

  gde je

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)},$$
$$i, j = k+1,\ k+2, \dots, n,$$
$$\text{pod uslovom} \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- Metod kvadratnog korena (metod Čoleskog za simetrične pozitivno–definitne matrice):

$$A = LR = R^T R,$$

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{1i} = \frac{a_{1i}}{r_{11}},$$
$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}, \quad r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}}\big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}r_{kj}\big),$$
$$i = 2, 3 \dots, n, \quad j = i+1, i+2, \dots, n.$$

IV Primena LR-faktorizacije

- Rešavanje sistema linearnih jednačina

  - Gausov metod bez izbora glavnog elementa:

    Sistem
    $$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad LR\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
    rešava se u dva koraka:
    $$R\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad L\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

  - Gausov metod sa (parcijalnim) izborom glavnog elementa:

    Parcijalnim zborom glavnog elementa dobija se faktorizacija matrice $A' = LR$, gde je $A' = PA$ matrica koja je nastala permutovanjem vrsta matrice A.
    Matrica P je permutaciona matrica, nastala permutacijom vrsta jedinične matrice.
    $$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ PA\mathbf{x} &= P\mathbf{b}, \\ LR\mathbf{x} &= \mathbf{b}', \\ R\mathbf{x} = \mathbf{y}, &\quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

- Izračunavanje determinante

$$A = LR, \qquad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \det(LR) = \det L \ \det R = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn} \cdot r_{11}r_{22}\cdots r_{nn}.$$

V Inverzija matrica

Ako je A regularna matrica ($\det A \neq 0$), tada je njena inverzna matrica A^{-1} rešenje matrične jednačine

$$AX = I,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & & x_2^n \\ & \vdots & & \\ x_n^1 & x_n^2 & & x_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

tj. n sistema jednačina sa zajedničkom matricom sistema

$$A\mathbf{x}^j = \mathbf{e}^j, \quad j = 1, 2, \ldots n,$$

gde su $\mathbf{x}^j$, $\mathbf{e}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ kolone matrica A^{-1} i I redom.

- Gausov algoritam – n trougaonih sistema

$$A \;\rightarrow\; R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} : \qquad \begin{array}{c} R\mathbf{x}^j = \mathbf{e}'_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \mathbf{e}'_j \;-\; \text{transformisan } \mathbf{e}_j. \end{array}$$

- Gaus-Žordanov metod – bez rešavanja sistema jednačina

$$[\, A \mid I \,] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & e'_{11} & e'_{12} & \cdots & e'_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & 0 & e'_{21} & e'_{22} & & e'_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn}^{(n)} & e'_{n1} & e'_{n2} & & e'_{nn} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{array}\right] = [\, I \mid A^{-1} \,].$$

ZADACI

Zadatak 1. Gausovim metodom bez izbora glavnog elementa rešiti sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gde je:

$$\textbf{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 24 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ -15 \\ 74 \\ 239 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: b) Proširena matrica sistema:

$$[A \ \ | \ \ \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & 74 \\ 1 & 2 & 3 & 100 & 239 \end{array}\right]$$

- 1. korak:
  - množimo prvu vrstu sa $m_{21} = \dfrac{0}{1} = 0$ i oduzimamo od druge,
  - množimo prvu vrstu sa $m_{31} = \dfrac{2}{1} = 2$ i oduzimamo od treće,
  - množimo prvu vrstu sa $m_{41} = \dfrac{1}{1} = 1$ i oduzimamo od četvrte.

$$[\ A \mid \mathbf{b}\ ] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & 74 \\ 1 & 2 & 3 & 100 & 239 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 15 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 34 \\ 0 & 2 & 1 & 100 & 219 \end{array}\right]$$

- 2. korak:
  - množimo drugu vrstu sa $m_{32} = \dfrac{-4}{3}$ i oduzimamo od treće,

– množimo drugu vrstu sa $m_{42} = \dfrac{2}{3}$ i oduzimamo od treće

$$[\ A \mid \mathbf{b}\ ] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & 74 \\ 1 & 2 & 3 & 100 & 239 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 34 \\ 0 & 2 & 1 & 100 & 219 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 11/3 & 98 & 239 \end{array}\right]$$

- 3. korak:
  – množimo treću vrstu sa $m_{43} = \dfrac{11/3}{2/3} = \dfrac{11}{2}$ i oduzimamo od četvrte.

$$[\ A \mid \mathbf{b}\ ] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & 74 \\ 1 & 2 & 3 & 100 & 239 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 34 \\ 0 & 2 & 1 & 100 & 219 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 11/3 & 98 & 239 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 76 & 152 \end{array}\right]$$

Rešavamo trougaoni sistem jednačina

$$\begin{array}{rcr} x_1 \qquad + 2x_3 \qquad\quad & = & 20, \\ 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = & -15, \\ \frac{2}{3}x_3 + 4x_4 & = & 14, \\ 76x_4 & = & 152. \end{array}$$

unazad:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{152}{76} = 2, \\ x_3 &= \frac{3}{2}(14 - 4 \cdot 2) = 9, \\ x_2 &= \frac{1}{3}(-15 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 9) = 5, \\ x_1 &= 20 - 2 \cdot 9 = 2. \end{aligned}$$

Rešenje sistema je $\mathbf{x}^* = [2 \ \ 5 \ \ 9 \ \ 2]^T$.

Zadatak 2. Odrediti LR-faktorizaciju matrice A, ako je:

$$\textbf{a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{b)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 100 \end{bmatrix}.$$

Primenom dobijene faktorizacije odrediti $\det A$.

Rešenje: b) Primenjujemo Gausov algoritam.

U prethodnom zadatku elementarnim transformacijama određena je gornjetrougaona matrica

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 76 \end{bmatrix}$$

i eliminacioni faktori $m_{ij},\ i = 2, 3, 4,\ i < j \leq 4$.

Donjetrougaona matrica L ima jediničnu dijagonalu, a elementi ispod glavne dijagonale su jednaki eliminacionim faktorima m_{ij}.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 11/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Proverimo:

$$L \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 11/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 76 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 100 \end{bmatrix} = A.$$

Koristeći dobijenu faktorizaciju i činjenicu da je determinanta trougaone mtrice jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali, jednostavno izračunavamo $\det A$.

$$\det A = \det(L \cdot R) = \det L \cdot \det R,$$
$$\det L = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad \det R = 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 76 = 152,$$
$$\det A = 152.$$

Zadatak 3. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Primenom Gausovog algoritma bez izbora glavnog elementa odrediti faktorizaciju $A = LR$, gde je L donjetrougaona, a R gornjetrougaona matrica, a zatim korišćenjem ove faktorizacije:

a) rešiti sistem jednačina

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T;$$

b) izračunati $\det A$.

Rešenje: I LR- faktorizacija:

Predstavljamo matricu A u obliku proizvoda $A = LR$, pri čemu donjetrougaona matrica L ima jediničnu dijagonalu.

Sukcesivno popunjavamo formu u kojoj se istovremeno vide elementi i-te vrste matrice R i i-te kolone matrice L, $i = 1, 2, 3, 4$. Poznati elementi, tj. nule ispod glavne dijagonale matrice R, jedinice na glavnoj dijagonali matrice L i nule iznad glavne dijagonale matrice L se ne upisuju. Na kraju će se u dobijenoj formi na glavnoj dijagonali i iznad glavne dijagonale nalaziti odgovarajući elementi matrice R, a ispod glavne dijagonale odgovarajući elementi matrice L.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- 1. korak:

– množimo prvu vrstu sa $m_{21} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ i oduzimamo od druge;
na mestu $(2, 1)$ upisujemo m_{21};

– množimo prvu vrstu sa $m_{31} = \dfrac{0}{4} = 0$ i oduzimamo od treće;
na mestu $(3, 1)$ upisujemo m_{31};

– množimo prvu vrstu sa $m_{41} = \dfrac{0}{4} = 0$ i oduzimamo od četvrte;
na mestu $(4, 1)$ upisujemo m_{41}.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 4 & & -2 & 0 & 0 \\ -- & & & & \\ 1/2 & | & 5 & -2 & 0 \\ 0 & | & 2 & 4 & -2 \\ 0 & | & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- 2. korak: Prva vrsta i prva kolona ostaju nepromenjene, a postupak ponavljamo za podmatricu bez prve vrste i prve kolone.

– množimo drugu vrstu sa $m_{32} = \dfrac{2}{5}$ i oduzimamo od treće;
na mestu $(3, 2)$ upisujemo m_{32};

– množimo drugu vrstu sa $m_{42} = \dfrac{0}{5} = 0$ i oduzimamo od treće;
na mestu $(4, 2)$ upisujemo m_{42}.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 4 & & -2 & 0 & 0 \\ -- & & & & \\ 1/2 & | & 5 & -2 & 0 \\ 0 & | & 2 & 4 & -2 \\ 0 & | & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\to \quad \begin{bmatrix} 4 & & -2 & & 0 & 0 \\ -- & & & & & \\ 1/2 & | & 5 & & -2 & 0 \\ & & -- & & & \\ 0 & & 2/5 & | & 24/5 & -2 \\ 0 & & 0 & | & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- 3. korak: Prve dve vrste i prve dve kolone ostaju nepromenjene, a postupak ponavljamo za podmatricu bez prve dve vrste i prve dve kolone.

– množimo treću vrstu sa $m_{43} = \dfrac{2}{24/5} = \dfrac{5}{12}$ i oduzimamo od četvrte;
na mestu $(4,3)$ upisujemo m_{43}.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & & -2 & 0 & 0 \\ -- & & & & \\ 1/2 & | & 4 & -2 & 0 \\ 0 & | & 2 & 4 & -2 \\ 0 & | & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & & -2 & & 0 & 0 \\ -- & & & & & \\ 1/2 & | & 5 & & -2 & 0 \\ & & -- & & & \\ 0 & & 2/5 & | & 24/5 & -2 \\ 0 & & 0 & | & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & & -2 & & 0 & & 0 \\ -- & & & & & & \\ 1/2 & | & 5 & & -2 & & 0 \\ & & -- & & & & \\ 0 & & 2/5 & | & 24/5 & & -2 \\ & & & & -- & & \\ 0 & & 0 & & 5/12 & | & -19/6 \end{bmatrix}$$

U dobijenoj formi čitaju se elementi matrica L i R.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 24/5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -19/6 \end{bmatrix}.$$

a) Rešavanje sistema:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$
$$LR\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ako označimo $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} = [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; y_4]^T$, sistem rešavamo u dva koraka:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \qquad R\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lllllll} y_1 & & & & & = & 0, \\ \frac{1}{2}y_1 & + & y_2 & & & = & 1, \\ & & \frac{2}{5}y_2 & + & y_3 & = & 0, \\ & & & & \frac{5}{12}y_3 \; + \; y_4 & = & 0, \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 0, \\ y_2 = 1, \\ y_3 = -\frac{2}{5}, \\ y_4 = \frac{1}{6}. \end{array}$$

$$Rx = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & - & 2x_2 & & & & & = & 0, \\ & & 5x_2 & - & 2x_3 & & & = & 1, \\ & & & & \frac{24}{5}x_3 & - & 2x_4 & = & -\frac{2}{5}, \\ & & & & & - & \frac{19}{6}x_4 & = & \frac{1}{6}, \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_4 = -\frac{1}{19}, \\ x_3 = -\frac{2}{19}, \\ x_2 = \frac{3}{19}, \\ x_1 = \frac{3}{38}. \end{array}$$

Rešenje sistema: $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{38} & \frac{3}{19} & -\frac{2}{19} & -\frac{1}{19} \end{bmatrix}^T.$

b) Izračunavanje determinante:

$$\det A = \det L \cdot \det R = 4 \cdot 5 \cdot \frac{24}{5} \cdot (-\frac{19}{6}) = -304.$$

Zadatak 3. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Primenom Gausovog algoritma sa izborom glavnog elementa odrediti matrice P, L i R u faktorizaciji $PA = LR$, gde je L donjetrougaona, a R gornjetrougaona matrica, a zatim korišćenjem ove faktorizacije rešiti sistem jednačina

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T.$$

Rešenje: **I** LR- faktorizacija:

Izbor glavnog elementa zahteva zamenu mesta, tj. permutaciju vrsta matrice A. To se realizuje množenjem sleva matrice A permutacionom matricom P, koja nastaje permutacijom vrsta jedinične matrice.

Na primer, zamena mesta prve i treće vrste matrice A može da se izvrši množenjem sleva matrice A matricom P_1, koja je nastala zamenom mesta prve i treće vrste jedinične matrice:

$$P_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zato je za formiranje permutacione matrice po završetku Gausovog algoritma dovoljno pratiti zamenu mesta vrsta matrice A. U svakom koraku algoritma evidentiraćemo poziciju vrsta u odnosu na početnu:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}.$$

- 1. korak: U prvoj koloni matrice glavni element, tj. element sa najvećim modulom, je 4 na mestu $(3,1)$. Zato menjamo mesta prvoj i trećoj vrsti.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}.$$

  - množimo prvu vrstu sa $m_{21} = \dfrac{1}{4}$ i oduzimamo od druge; na mestu $(2,1)$ upisujemo m_{21};
  - množimo prvu vrstu sa $m_{31} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ i oduzimamo od treće; na mestu $(3,1)$ upisujemo m_{31};
  - množimo prvu vrstu sa $m_{41} = \dfrac{1}{4}$ i oduzimamo od četvrte; na mestu $(4,1)$ upisujemo m_{41}.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & & 3 & -2 & 3 \\ -- & & & & \\ 1/4 & | & -15/4 & 9/2 & 9/4 \\ 1/2 & | & -15/2 & 5 & -7/2 \\ 1/4 & | & -19/4 & 7/2 & 9/4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

- 2. korak: Elementi prve vrste i prve kolone ostaju nepromenjene, a postupak ponavljamo za podmatricu bez prve vrste i prve kolone.

Glavni element u drugoj koloni je $-15/2$ na mestu $(3,2)$, pa menjamo mesta drugoj i trećoj vrsti.

$$\to \begin{bmatrix} 4 & & 3 & -2 & 3 \\ -- & & & & \\ 1/2 & | & -15/2 & 5 & -7/2 \\ 1/4 & | & -15/4 & 9/2 & 9/4 \\ 1/4 & | & -19/4 & 7/2 & 9/4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$$

– množimo drugu vrstu sa $m_{32} = \dfrac{-15/4}{-15/2} = \dfrac{1}{2}$ i oduzimamo od treće;
na mestu $(3,2)$ upisujemo m_{32};

– množimo drugu vrstu sa $m_{42} = \dfrac{-19/4}{-15/2} = \dfrac{19}{30}$ i oduzimamo od treće;
na mestu $(4,2)$ upisujemo m_{42}.

$$\to \begin{bmatrix} 4 & & 3 & & -2 & 3 \\ -- & & & & & \\ 1/2 & | & -15/2 & & 5 & -7/2 \\ & & -- & & & \\ 1/4 & & 1/2 & | & 2 & 4 \\ 1/4 & & 19/30 & | & 1/3 & 67/15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 1 \\ \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$$

- 3. korak: Prve dve vrste i prve dve kolone ostaju nepromenjene, a postupak ponavljamo za podmatricu bez prve dve vrste i prve dve kolone.

  Glavni element u trećoj koloni je 2 na mestu $(3,3)$, pa nema zamene mesta vrstama.

  – množimo treću vrstu sa $m_{43} = \dfrac{1/3}{2} = \dfrac{1}{6}$ i oduzimamo od četvrte;
  na mestu $(4,3)$ upisujemo m_{43}.

$$\to \begin{bmatrix} 4 & & 3 & & -2 & & 3 \\ --- & & & & & & \\ 1/2 & | & -15/2 & & 5 & & -7/2 \\ & & --- & & & & \\ 1/4 & & 1/2 & | & 2 & & 4 \\ & & & & --- & & \\ 1/4 & & 19/30 & & 1/6 & | & 19/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 4 \end{matrix}$$

Iz dobijene forme dobijamo tražene matrice u faktorizaciji $PA = LR$.

Permutaciona matrica P dobija se permutacijom $(3,1,2,4)$ vrsta jedinične matrice, koja je određena permutacijom vrsta matrice A.

Dijagonalni elementi matrice L jednaki su 1, a ostali nenulti elementi nalaze se ispod glavne dijagonale dobijene forme.

Nenulti elementi matrice R nalaze se na glavnoj dijagonali i iznad glavne dijagonale dobijene forme.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 19/30 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -15/2 & 5 & -7/2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 19/5 \end{bmatrix}.$$

II Rešavanje sistema:

$$A = \mathbf{b},$$

$$PA = P\mathbf{b}, \qquad P\mathbf{b} = \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$LR\mathbf{x} = \mathbf{b}';$$

$$R\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad L\mathbf{y} = \mathbf{b}'.$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}' \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{lllllllll} y_1 & & & & & & & = & 3, \\ \frac{1}{2}y_1 & + & y_2 & & & & & = & 8, \\ \frac{1}{4}y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & + & y_3 & & & = & 6, \\ \frac{1}{4}y_1 & + & \frac{19}{30}y_2 & + & \frac{1}{6}y_3 & + & y_4 & = & 9, \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} y_1 = 3, \\ y_2 = 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{13}{2}, \\ y_3 = 6 - \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} = 2, \\ y_4 = 9 - \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{19}{30} \cdot \frac{13}{2} - \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{19}{5}, \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13/2 \\ 2 \\ 19/5 \end{bmatrix}.$$

$$Rx = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3, \\ & - & \frac{15}{2}x_2 & + & 5x_3 & - & \frac{7}{2}x_4 & = & \frac{13}{2}, \\ & & & & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ & & & & & & \frac{19}{5}x_4 & = & \frac{19}{5}, \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_4 &= 1, \\ x_3 &= \frac{1}{2}(2 - 4 \cdot 1) = -1, \\ x_2 &= -\frac{2}{15}\Big(\frac{13}{2} - 5 \cdot (-1) + \frac{7}{2} \cdot 1\Big) = -2, \\ x_1 &= \frac{1}{4}\big(3 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1\big) = 1. \end{aligned}$$

Rešenje sistema: $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Zadatak 4. Primenom Gausovog algoritma sa izborom glavnog elementa odrediti matrice P, L i R u faktorizaciji $PA = LR$, gde je L donjetrougaona, a R gornjetrougaona matrica, ako je:

$$\textbf{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: a)

- 1. korak: Glavni element u prvoj koloni je na mestu $(3, 1)$, pa je potrebna zamena mesta prve i treće vrste.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad \to \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

– množimo prvu vrstu sa $m_{21} = \dfrac{0}{2} = 0$ i oduzimamo od druge; na mestu $(2, 1)$ upisujemo m_{21};

– množimo prvu vrstu sa $m_{31} = \dfrac{1}{2}$ i oduzimamo od treće; na mestu $(3, 1)$ upisujemo m_{31}.

$$\to \quad \begin{bmatrix} 2 & & -4 & 10 \\ -- & & & \\ 0 & | & 3 & -4 \\ 1/2 & | & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

- 2. korak: Glavni element u prvoj koloni je na mestu $(2, 2)$, pa je nije potrebna potrebna zamena mesta vrsta.

  – množimo drugu vrstu sa $m_{32} = \dfrac{2}{3}$ i oduzimamo od treće; na mestu $(3, 2)$ upisujemo m_{32}.

$$\to \quad \begin{bmatrix} 2 & & -4 & & 10 \\ -- & & & & \\ 0 & | & 3 & & -4 \\ & & -- & & \\ 1/2 & & 2/3 & | & -1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 2 \\ \\ 1 \end{matrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

b) Koraci u primeni algoritma prikazani su u nastavku.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc} 2 & & -4 & 10 & 0 \\ -- & & & & \\ 0 & | & 3 & -4 & 3 \\ 1/2 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & | & 3 & 0 & 100 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccccc} 2 & & -4 & & 10 & 0 \\ -- & & & & & \\ 0 & | & 3 & & -4 & 3 \\ & & -- & & & \\ 1/2 & & 2/3 & | & -1/3 & -2 \\ 0 & & 1 & | & 4 & 97 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \\ \\ 1 \\ 4 \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 2 & & -4 & & 10 & 0 \\ -- & & & & & \\ 0 & | & 3 & & -4 & 3 \\ & & -- & & & \\ 0 & & 1 & | & 4 & 97 \\ 1/2 & & 2/3 & | & -1/3 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \\ \\ 4 \\ 1 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccccccc} 2 & & -4 & & 10 & & 0 \\ -- & & & & & & \\ 0 & | & 3 & & -4 & & 3 \\ & & -- & & & & \\ 0 & & 1 & | & 4 & & 97 \\ & & & & -- & & \\ 1/2 & & 2/3 & & -1/12 & | & 73/12 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \\ \\ 4 \\ \\ 1 \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & -1/12 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 97 \\ 0 & 0 & 0 & 73/12 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5. Metodom Čoleskog (metodom kvadratnog korena) drediti LR-faktorizaciju matrice A, ako je:

$$\textbf{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Primenom dobijene faktorizacije odrediti det A.

Rešenje: **a)** Matrica A je simetrična i pozitivno definitna, pa je njena faktorizacija oblika

$$A = LR, \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix}, \quad L = R^T.$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 1, \quad r_{12} = \frac{a_{12}}{r_{11}} = 0, \quad r_{13} = \frac{a_{12}}{r_{11}} = 2, \\
r_{22} &= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{3}, \quad r_{23} = \frac{1}{r_{22}}(a_{23} - r_{12}r_{13}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-4 - 0 \cdot 2) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \\
r_{33} &= \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{10 - 2^2 - \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & \sqrt{3} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ & & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}, \qquad L = R^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & \sqrt{3} & \\ 2 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

$$\det A = (\det R)^2 = \left(1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 2.$$

Zadatak 6. Odrediti inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Gausovim metodom,
b) Gaus–Žordanovim metodom.

Rešenje: a)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(V2: \quad V2 - \frac{2}{4}V1 \right) \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(V3: \quad V3 - \frac{2}{5}V2 \right) \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24/5 & -2 & 1/5 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(V4: \quad V4 - \frac{2}{24/5}V3 \right) \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24/5 & -2 & 1/5 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29/6 & -1/12 & 1/6 & -5/12 & 1 \end{array}\right]$$

Rešavanjem 4 sistema jednačina dobijaju se kolone matrice $A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_{11} & - & 2x_{21} & & & & & = & 1, \\ & & 5x_{21} & - & 2x_{31} & & & = & -\frac{1}{2}, \\ & & & & \frac{24}{5}x_{31} & - & 2x_{41} & = & \frac{1}{5}, \\ & & & & & & \frac{29}{6}x_{41} & = & -\frac{1}{12} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{29} \\ -\frac{5}{58} \\ \frac{1}{29} \\ -\frac{1}{58} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_{11} & - & 2x_{21} & & & & & = & 0, \\ & & 5x_{21} & - & 2x_{31} & & & = & 1, \\ & & & & \frac{24}{5}x_{31} & - & 2x_{41} & = & -\frac{2}{5}, \\ & & & & & & \frac{29}{6}x_{41} & = & \frac{1}{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{58} \\ \frac{5}{29} \\ -\frac{2}{29} \\ \frac{1}{29} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_{11} & - & 2x_{21} & & & & & = & 0, \\ & & 5x_{21} & - & 2x_{31} & & & = & 0, \\ & & & & \frac{24}{5}x_{31} & - & 2x_{41} & = & 1, \\ & & & & & & \frac{29}{6}x_{41} & = & -\frac{5}{12} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{29} \\ \frac{2}{29} \\ \frac{5}{29} \\ -\frac{5}{58} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_{11} & - & 2x_{21} & & & & & = & 0, \\ & & 5x_{21} & - & 2x_{31} & & & = & 0, \\ & & & & \frac{24}{5}x_{31} & - & 2x_{41} & = & 0, \\ & & & & & & \frac{29}{6}x_{41} & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{58} \\ \frac{1}{29} \\ \frac{5}{58} \\ \frac{6}{29} \end{bmatrix}$$

Konačno,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{29} & -\frac{5}{58} & \frac{1}{29} & -\frac{1}{58} \\ \frac{5}{58} & \frac{5}{29} & -\frac{2}{29} & \frac{1}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & \frac{5}{29} & -\frac{5}{58} \\ \frac{1}{58} & \frac{1}{29} & \frac{5}{58} & \frac{6}{29} \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(V1: \quad \frac{1}{4}V1 \right) \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V2: & V2-2V1 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V2: & \frac{1}{5}V2 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 & -1/10 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V1: & V1-(-1/2)V2 \\ V3: & V3-2V2 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 & -1/10 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24/5 & -2 & 1/5 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V3: & \frac{5}{24}V3 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 & -1/10 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 & 1/24 & -1/12 & 5/24 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V1: & V1-(-1/5)V3 \\ V2: & V2-(-2/5)V3 \\ V4: & V4-2V3 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 5/24 & 1/12 & 1/24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/12 & 1/6 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 & 1/24 & -1/12 & 5/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29/6 & -1/12 & 1/6 & -5/12 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V4: & \frac{6}{29}V4 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 5/24 & 1/12 & 1/24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/12 & 1/6 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 & 1/24 & -1/12 & 5/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/58 & 1/29 & -5/58 & 6/29 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} V1: & V1-(-1/12)V4 \\ V2: & V2-(-1/6)V4 \\ V3: & V3-(-5/12)V4 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6/29 & 5/58 & 1/29 & 1/58 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5/58 & 5/29 & 2/29 & 1/29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/29 & -2/29 & 5/29 & 5/58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/58 & 1/29 & -5/58 & 6/29 \end{array}\right]$$

Zadatak 7. Odrediti inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix},$$

Rešenje: Primenićemo Gaus–Žordanov metod:

$$[\ A \ | \ I \ ] \quad \rightarrow \quad [\ I \ | \ A^{-1} \ ].$$

Kako je element na mestu $a_{11} = 0$, moraju najpre da se zamene mesta vrstama, na primer, prvoj i drugoj. (Ovo **nije izbor glavnog elementa**, jer je glavni element u prvoj koloni $a_{31} = 4$. Zbog male dimenzije problema u ovom slučaju, proceduru prilagođavamo sa ciljem što jednostavnijeg izračunavanja, a ne sa ciljem što bolje numeričke stabilnosti.)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$