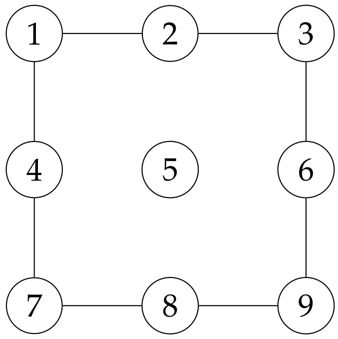
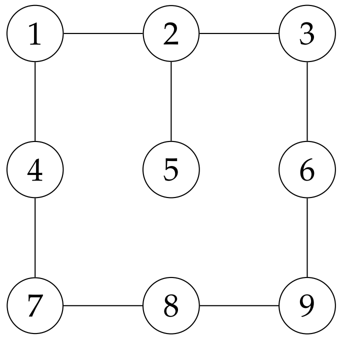
11 Бипартитни графови

Решени задаци

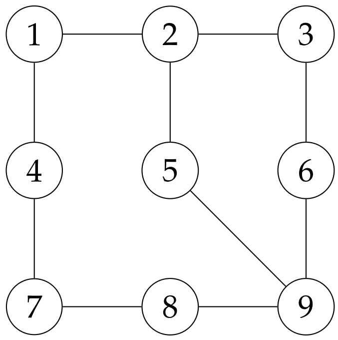
Задатак 1. Задати су графови G_1, G_2, G_3, G_4 преко визуелних репрезентација у виду наредних слика:



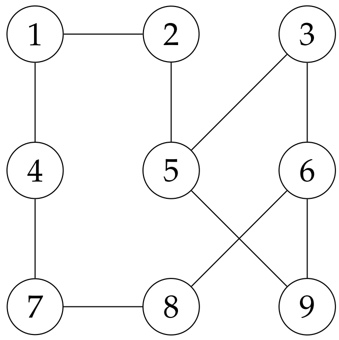
(а) G_1



(б) G_2



(в) G_3



(г) G_4

Испитати који од њих су бипартитни.

Решење.

а) Уколико скуп чворова графа G_1 разбијемо на два подскупа $A = \{1, 3, 7, 9\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, тада добијамо да све гране графа G_1 имају један крај у скупу A, а други крај у скупу B. Дакле, граф G_1 јесте бипартитан.

б) Скуп чворова графа G_2 можемо да разбијемо на два подскупа $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8\}$ тако да све гране овог графа имају један крај у скупу A, а други у скупу B. Следи да граф G_2 мора бити бипартитан.

в) Граф G_3 садржи циклус $2 - 3 - 6 - 9 - 5 - 2$ дужине пет. Како је овај циклус непарне дужине, закључујемо да како год да чворове графа G_3 разбијемо на два подскупа A и B, нека два суседна чвора морају бити у истом подскупу. Добијамо да граф G_3 није бипартитан.

г) Ако скуп чворова графа G_4 разбијемо на два подскупа $A = \{1, 5, 6, 7\}$ и $B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$, онда све гране тог графа имају један крај у скупу A, а други крај у скупу B. Дакле, граф G_4 јесте бипартитан.

□

Задатак 2. Доказати да свако стабло чини бипартитан граф.

Решење. Доказ ћемо извести преко математичке индукције по броју чворова стабла. Стабло које се састоји од једног чвора очигледно представља бипартитан граф. Претпоставимо да је свако стабло са $n \in \mathbb{N}$ чворова бипартитан граф. Докажимо да онда такође мора да буде бипартитан граф и свако стабло са $n + 1$ чворова.

Нека је дато стабло T са $n + 1 \geq 2$ чворова. Свако стабло са бар два чвора мора да има лист. Означимо са x неки произвољно одабран лист стабла T. Уколико графу T одстранимо чвор x, новодобијени граф је поново стабло. Означимо ово стабло са T_1. Како T_1 има тачно n чворова, закључујемо да је оно бипартитан граф, по индуктивној претпоставци. Дакле, скуп свих чворова графа T_1 може да се разбије у дисјунктне подскупове U и V тако да свака његова грана повезује један чвор из U и један чвор из V.

Посматрајмо почетно стабло T. Уколико је јединствени сусед чвора x елемент скупа U, тада скупови U и $V \cup \{x\}$ представљају разбијање скупа чворова стабла T тако да свака његова грана има један крај у једном, а други крај у другом скупу. Ако је јединствени сусед чвора x елемент скупа V, онда скупови $U \cup \{x\}$ и V чине разбијање скупа чворова стабла T тако да свака грана има крајеве у различитим скуповима. У сваком случају, закључујемо да стабло T мора да представља бипартитан граф, те је доказ готов. □

Задатак 3. Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број.

а) Колико све грана може да има бипартитан граф који се састоји од n чворова?

б) Колико све грана може да има небипартитан граф који се састоји од n чворова?

Решење.

а) Уколико је неки граф бипартитан, онда је сигурно бипартитан и сваки његов подграф. Дакле, довољно је пронаћи максималан могући број грана $\alpha \in \mathbb{N}_0$ који може да има бипартитан граф са n чворова, јер ће онда одговор на питање бити да бипартитан граф са n чворова може имати било који број грана измед1у 0 и α.

Нека је дат граф G који има укупно n чворова и m грана и који је бипартитан. Дакле, постоји разбијање скупа његових чворова на два подскупа A и B тако да све гране овог графа спајају један чвор из скупа A са једним чвором из скупа B. Уколико означимо $|A| = k$, тада је $|B| = n - k$, а граф G сигурно не може да има преко $k(n - k)$ грана, где је $k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n$. Међутим, како знамо да је

$$k(n-k) = -k^2 + nk = -k^2 + nk - \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4} = -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4},$$

следи

$$m \leq \frac{n^2}{4} - \left(k - \frac{n}{2}\right)^2.$$

Ако је природан број n паран, тада је очигледно $m \leq \frac{n^2}{4}$ и бипартитан граф са n чворова и $\frac{n^2}{4}$ грана постоји у виду комплетног бипартитног графа $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. Закључујемо да у овом случају важи $\alpha = \frac{n^2}{4}$.

Уколико је природан број n непаран, онда су бројеви $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$ цели, те је $\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, одакле следи $m \leq \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4}$. Бипартитан граф са n чворова и $\frac{n^2-1}{4}$ грана постоји у виду комплетног бипартитног графа $K_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}$, тако да у овом случају важи $\alpha = \frac{n^2-1}{4}$.

Закључујемо да бипартитан граф који се састоји од n чворова може имати било који број грана између нула и α, где је

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4}, & 2 \mid n, \\ \dfrac{n^2-1}{4}, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

б) Ако неки граф није бипартитан, онда сигурно није бипартитан ниједан његов надграф. Дакле, довољно је пронаћи минималан могући број грана $\beta \in \mathbb{N}_0$ који може да има небипартитан граф са n чворова, јер ће онда одговор на питање бити да небипартитан граф са n чворова може имати било који број грана измед1у β и $\frac{n(n-1)}{2}$.

Уколико је $n = 1$ или $n = 2$, онда постаје јасно да је сваки граф који се састоји од n чворова бипартитан, тако да не постоји ниједан небипартитан граф и даљу анализу проблема нема смисла вршити.

Ако важи $n \geq 3$, онда је могуће конструисати небипартитан граф са n чворова који има само три гране, тако што узмемо нека три чвора и спојимо их сваки са сваким, при чему све преостале чворове оставимо да буду изоловани. Не постоји небипартитан граф који садржи мање од три гране, што је једноставно проверити узевши у обзир да су сви овакви графови ациклични. Дакле, у овом случају мора бити $\beta = 3$.

Коначан одговор на питање јесте да уколико је $n \in \{1, 2\}$, онда небипартитан граф који се састоји од n чворова не може имати ниједан број грана, узевши у обзир да овакав граф не постоји, док за свако $n \geq 3$ важи да небипартитан граф који се састоји од n чворова може имати било који број грана између три и $\frac{n(n-1)}{2}$.

$\square$

Задаци за самосталан рад

Задатак 4. За произвољан граф G доказати да он мора да поседује спрежни подграф H који је бипартитан и који задовољава својство да је степен сваког његовог чвора једнак бар половини степена истог тог чвора у графу G.