# MATEMATIČKI METODI

## Čas 13.

Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet

# Sadržaj

1. Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina
   - Analitički metodi za rešavanje diferencijalnih jednačina
   - Numerički metodi za rešavanje diferencijalnih jednačina

# Osnovno o diferencijalnim jednačinama

Obična diferencijalna jednačina (ODJ) I reda:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y = y(x),\ x \in [\alpha, \beta]$$

Rešenje: funkcija $\quad y^* = y^*(x)$

$$\boxed{y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0}$$

Košijev problem (Initial–Value Problem)

Sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}.$$

# Osnovno o diferencijalnim jednačinama

Obična diferencijalna jednačina $n-$tog reda:

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0,\quad y=y(x),\ x\in[\alpha,\beta]$$

Košijev problem:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}\right),$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

Smenom $z_1=y,\ z_2=y',\dots,z_n=y^{(n-1)}$ dobija se sistem ODJ

$$\begin{aligned}
z_1' &= z_2,\\
z_2' &= z_3,\\
&\vdots\\
z_{n-1}' &= z_n,\\
z_n' &= f(x,z_1,z_2,\dots,z_{n-1}),
\end{aligned}$$

$$z_1(x_0)=y_0,\ z_2(x_0)=y_0',\ \dots,\ z_{n-1}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

# Osnovno o diferencijalnim jednačinama

Košijev problem ima rešenje ako su funkcije $f_k$ neprekidne i ograničene u nekoj okolini početne tačke $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$. Ako još funkcije $f_k$ zadovoljavaju Lipšicov uslov po promenljivima $y_j$

$$|f_k(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) - f_k(x, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)| \leq L \sum_{j=1}^{n} |\tilde{y}_j - \hat{y}_j|,$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

rešenje je jedinstveno i neprekidno zavisi od početnih uslova, što znači da je problem dobro postavljen.

Rešenje Košijevog problema je osetljivo na perturbacije, tj. male promene u početnim uslovima.

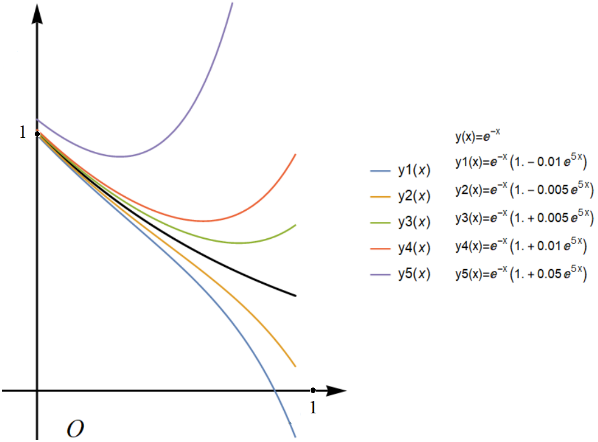
## Primer

Rešenje Košijevog problema

$$y' = 4y - 5e^{-x},\ y(0) = 1$$

i perturbovanih problema sa početnim vrednostima

$y(0) = 1 + \delta,\ \ \delta = \pm 0.005, \pm 0.01, 0.05$



Numeričkim metodama se najčešće računaju približne vrednosti traženog rešenja $y(x)$ na nekoj unapred izabranoj mreži tačaka $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$.
Rešenje se dobija u obliku tabele vrednosti u diskretnim tačkama: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$.
Ove metode se mogu primeniti samo za rešavanje dobro postavljenih problema.
Kod izučavanja i primene metoda za približno rešavanje ODJ uvek se ima uvid u ponašanje prema perturbovanim problemima zbog neizbežne greške zaokruživanja. Ako je problem loše uslovljen, računske greške koje se neminovno javljaju pri realizaciji numeričkog algoritma i koje mogu biti tretirane kao male promene ulaznih parametara, mogu znatno izmeniti približno rešenje.

# Metodi za rešavanje ODJ

Metodi za približno rešavanje Košijevog problema:

- analitički, kod kojih se rešenje tobija u analitičkom obliku
  - Pikarov metod
  - Tejlorov metod
- numerički, kod kojih se rešenje dobija u obliku vrednosti na diskretnom skupu tačaka
  - linearni višekoračni
  - metodi Runge–Kuta

# Pikarov metod

$$\boxed{y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0}$$

Integracijom se dobija

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Metod sukcesivnih aproksimacija:

$$\boxed{\begin{aligned} y^{[s+1]}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y^{[s]}(t))\, dt, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \\ y^{[0]}(x) &= y_0. \end{aligned}}$$

Zaustavni kriterijum: $|y^{[s+1]}(x) - y^{[s]}(x)| < \varepsilon, \quad x \in [\alpha, \beta]$

**Primer**

$$y' = y - x^2 + 1,\ y(0) = 0.5, \quad x \in [0, 2].$$

$$y^{[0]}(x) = 0.5,$$

$$y^{[1]}(x) = 0.5 + \int_0^x f(t, y^{[0]}(t))\,dt = 0.5 + \int_0^x (0.5 - t^2 + 1)\,dt$$

$$= 0.5 + \int_0^x (1.5 - t^2)\,dt = 0.5 + 1.5x - \frac{x^3}{3},$$

$$y^{[2]}(x) = 0.5 + \int_0^x f(t, y^{[1]}(t))\,dt = 0.5 + \int_0^x (0.5 + 1.5t - \frac{t^3}{3} - t^2 + 1)\,dt$$

$$= 0.5 + \int_0^x (1.5 + 1.5t - t^2 - \frac{t^3}{3})\,dt$$

$$= 0.5 + 1.5x + 1.5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}$$

$$= 0.5 + 1.5x + 0.75x^2 - 0.333x^3 - 0.083x^4$$

# Tejlorov metod

$$\boxed{y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0}$$

Rešenje se traži u obliku Tejlorovog reda u okolini tačke $x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

Pri tome:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \quad y'(x_0) = f(x_0, y_0); \\ y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x), \quad y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, f(x_0, y_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zamenom vrednosti $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots$ u Tejlorov razvoj do željenog stepena dobija se analitički oblik približnog rešenja polaznog problema.

# Tejlorov metod

**Primer**

$$y' = y - x^2 + 1,\ y(0) = 0.5, \quad x \in [0, 2].$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$y'(x) = y - x^2 + 1, \quad y'(0) = y(0) + 1 = 0.5 + 1 = 1.5;$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(y - x^2 + 1) + \frac{\partial}{\partial y}(y - x^2 + 1)y'(x) \\ &= (-2x) + 1(y - x^2 + 1) = y - x^2 - 2x + 1, \\ y''(0) &= y(0) + 1 = 1.5, \\ y'''(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(y - x^2 - 2x + 1) + \frac{\partial}{\partial y}(y - x^2 - 2x + 1)y'(x) \\ &= (-2x - 2) + 1(y - x^2 + 1) = y - x^2 - 2x - 1, \\ y'''(0) &= y(0) - 1 = -0.5, \quad \ldots \end{aligned}$$

Približno rešenje: $y \approx 0.5 + 1.5x + 0.75x^2 - 0.083x^3$

Tačno rešenje: $y = 0.5 + 1.5x + 0.75x - 0.083x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

# Ojlerov metod

$$\boxed{y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \qquad x \in [\alpha, \beta]}$$

Neka su zadate tačke $\quad \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = \beta$.

Najčešé: $\quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \dfrac{\beta - \alpha}{N}$.

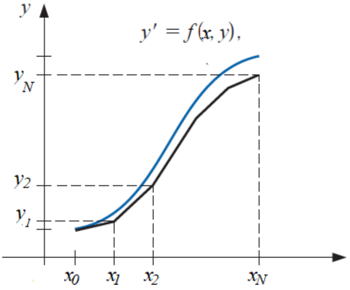
$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &\approx y(x_0) + y'(x_0)h, \\ y(x_1) &\approx y_0 + hf(x_0, y(x_0)), \\ y_1 &\approx y_0 + hf(x_0, y_0). \end{aligned}$$

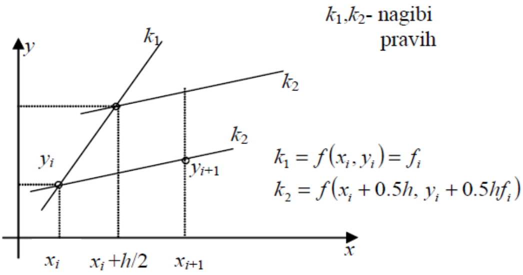
Sukcesivnom primenom dobija se rešenje u obliku skupa tačaka $\{(x_k, y_k) \mid k = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, definisanih sa

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1.}$$

Ojlerov metod

Greška metoda: $\quad \mathcal{O}(h)$




Modifikacija metoda:

$$y_{k+1} = y_k + h\ f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Metod srednje tačke ili Ojler–Košijev metod

Greška metoda: $\mathcal{O}(h^2)$

# Metodi Runge–Kuta

Numerički ptistup Tejlorovom metodu:

$$\boxed{y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \qquad x \in [\alpha, \beta]}$$

Neka su zadate tačke $\quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad h = \dfrac{\beta - \alpha}{N}.$

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_k),$$

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} f'(x_k, y_k) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_k, y_k)$$

$$\boxed{\begin{gathered} y_{k+1} = y_k + h\, T^{[n]}(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ T^{[n]}(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f'(x_k, y_k) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x_k, y_k). \end{gathered}}$$

Tejlorov metod reda $n$

Greška metoda: $\quad \mathcal{O}(h^n)$

# Metodi Runge–Kuta

Metodi Runge–Kuta predstavljaju klasu metoda koji se baziraju na aproksimaciji izraza $T^{[n]}(x_k, y_k)$ izrazom koji ne zahteva diferenciranje funkcije $f(x, y)$, a ima isti red greške.

- $n = 1$ – Ojlerov metod (greška: $\mathcal{O}(h)$)
- $n = 2$ – metod srednje tačke (greška: $\mathcal{O}(h^2)$)
- $n = 4$ – metod Runge–Kuta četvrtog reda (greška: $\mathcal{O}(h^4)$)

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ k_1 &= f(x_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(x_k + h, y_k + hk_3\right). \end{aligned}}$$