Čas 8

Zadatak 1. *Dokazati da svako stablo čini bipartitni graf.*

Rešenje. Dokaz ćemo izvesti preko matematičke indukcije po broju čvorova stabla. Stablo koje se sastoji od 1 čvora očigledno predstavlja bipartitni graf. Pretpostavimo da je svako stablo sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova bipartitni graf. Dokažimo da onda takođe mora da bude bipartitni graf i svako stablo sa $n+1$ čvorova.

Neka je dato stablo T sa $n+1$ čvorova. Svako stablo mora da ima list. Označimo sa x neki proizvoljno odabran list stabla T. Ukoliko grafu T odstranimo čvor x, novodobijeni graf je ponovo stablo. Označimo ovo stablo sa T_1. Kako T_1 ima tačno n čvorova, zaključujemo da je ono bipartitni graf, po induktivnoj pretpostavci. Dakle, skup svih čvorova grafa T_1 može da se razbije u disjunktne podskupove U i V tako da svaka njegova grana povezuje jedan čvor iz U i jedan čvor iz V.

Posmatrajmo početno stablo T. Ukoliko je jedinstveni sused čvora x element skupa U, tada skupovi U i $V \cup \{x\}$ predstavljaju razbijanje skupa čvorova stabla T tako da svaka njegova grana ima jedan kraj u jednom, a drugi kraj u drugom skupu. Ako je jedinstveni sused čvora x element skupa V, onda skupovi $U \cup \{x\}$ i V čine razbijanje skupa čvorova stabla T tako da svaka grana ima krajeve u različitim skupovima. U svakom slučaju, zaključujemo da stablo T mora da predstavlja bipartitni graf, te je dokaz gotov. ■

Zadatak 2. *Dat je graf G koji sadrži bar jednu granu, takav da njegov graf grana $L(G)$ predstavlja stablo. Dokazati da graf G mora biti šuma. Da li graf G mora biti stablo?*

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da graf G nije šuma. Odavde zaključujemo da on mora da sadrži ciklus, recimo $a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_{k-1} \to a_0$, dužine $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Ako označimo grane $\{a_0, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_0\}$ redom sa $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$, tada primećujemo da u grafu $L(G)$ mora da postoji ciklus $e_0 \to e_1 \to \cdots \to e_{k-1} \to e_0$. Uzevši u obzir da znamo da je graf $L(G)$ šuma, on ne sme da ima nijedan ciklus, te dolazimo do kontradikcije. Dakle, zaključujemo da graf G jeste šuma.

Graf G ne mora da bude stablo. Naime, za graf grana $L(G)$ nekog grafa G, ukoliko grafu G dodamo izolovani čvor i novodobijeni graf označimo sa G_1, važiće $L(G) = L(G_1)$. U ovom slučaju graf G_1 očigledno ne predstavlja stablo, jer nije povezan. To znači da ukoliko je dat graf grana nekog grafa, takav da čini stablo, onda početni graf mora da predstavlja šumu, ali ne mora nužno da čini i stablo. ∎

Zadatak 3 (2020, oktobar 2). *Dato je proizvoljno stablo $T = (V, E)$ koje sadrži tačno $n \in \mathbb{N}$ čvorova.*

1. *Koliko grana ima graf T? Koliko ima komponenti povezanosti?*
2. *Neka $d(x)$ označava stepen čvora $x \in V$. Ukoliko je $k = \max\limits_{x \in V} d(x)$, dokazati da postoji bar k čvorova iz skupa V čiji je stepen jednak* 1.
3. *Koliko ukupno sprežnih stabala ima graf T?*
4. *Ako stablo T može da se predstavi u vidu binarnog korenskog stabla, koliko onda najviše može da iznosi stepen nekog čvora?*

Rešenje.

(a) Stablo T mora da ima $n - 1$ grana i tačno 1 komponentu povezanosti.

(b) Pretpostavimo da je $k = 1$. U ovom slučaju svi čvorovi datog stabla moraju da imaju stepen 1, pa očigledno postoji bar jedan čvor koji jeste stepena 1. Nadalje ćemo rešavati slučaj kada važi $k \geq 2$.

Ukoliko sa $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ označimo stepene svih n čvorova zadatog stabla, onda znamo da važi

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

pošto stablo ima $n - 1$ grana. Sumu sa leve strane možemo drugačije zapisati kao

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot c_i$$

gde $c_i \in \mathbb{N}_0$ označava broj čvorova čiji je stepen jednak i. Očigledno je da onda važi

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot c_i = 2(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i = n$$

Pošto postoji čvor stepena k, mora biti $c_k \geq 1$. Sledi

$$
\begin{aligned}
2(n-1) &= \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot c_i \\
&= c_1 + \left(\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n-1} i \cdot c_i \right) + k \cdot c_k \\
&= (c_1 + k) + \left(\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n-1} i \cdot c_i \right) + k \cdot (c_k - 1) \\
&\geq (c_1 + k) + \left(\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n-1} 2 \cdot c_i \right) + 2 \cdot (c_k - 1) \\
&= (c_1 + k - 2) + \left(\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n-1} 2 \cdot c_i \right) + 2 \cdot c_k \\
&= (c_1 + k - 2) + \sum_{i=2}^{n-1} 2c_i \\
&= (c_1 + k - 2) + 2(n - c_1) \\
&= (2n - 2) + (k - c_1)
\end{aligned}
$$

Dobijamo da važi $2n - 2 \geq (2n-2) + (k - c_1)$ odakle sledi $0 \geq k - c_1$, tj. $c_1 \geq k$, tako da mora da postoji bar k čvorova stepena 1.

(c) Uzevši u obzir da graf T predstavlja stablo, on može imati samo jedno sprežno stablo – sam je sebi sprežno stablo. Drugih sprežnih stabala nema, jer oduzimanjem grana od stabla dobija se graf koji sigurno ne može biti stablo.

(d) Stepen nekog čvora najviše može da iznosi 3. Naime, ukoliko se stablo T može predstaviti u vidu binarnog korenskog stabla, onda svaki čvor može biti povezan sa najviše 3 ostala čvora – sa svojim roditeljem i dvoje dece.

∎

Zadatak 4 (2020, jun 2)**.**

(a) *Data je proizvoljna šuma. Da li svaka njena grana mora da predstavlja most?*

(b) *Dat je proizvoljan graf kod kog svaka grana predstavlja most. Da li ovaj graf mora da bude šuma?*

(c) *Data je proizvoljna šuma. Da li svaki njen čvor koji je stepena većeg od* 1 *mora da predstavlja artikulacioni čvor?*

(d) *Dat je proizvoljan graf kod kog svaki čvor koji je stepena većeg od* 1 *predstavlja artikulacioni čvor. Da li ovaj graf mora da bude šuma?*

Napomena: *Ukoliko je odgovor pozitivan, neophodno je objasniti, odnosno dokazati, zašto tvrđenje važi. Ako je odgovor negativan, potrebno je dati kontraprimer.*

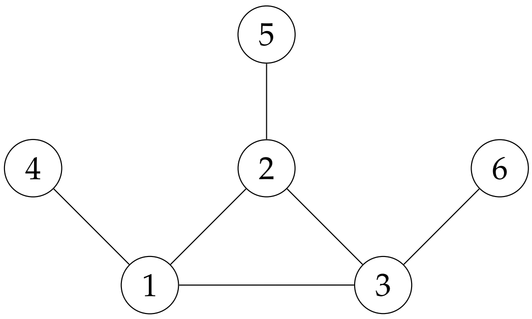
Rešenje.

(a) Nek je data proizvoljna šuma $G = (V, E)$ i neka njena grana $\{a, b\} \in E$, gde je $a, b \in V$. Ukoliko pretpostavimo da grana $\{a, b\}$ ne predstavlja most, sledi da između čvorova a i b mora da postoji elementarni put koji ne obuhvata granu $\{a, b\}$. Međutim, tada ovaj put zajedno sa granom $\{a, b\}$ čini ciklus, što nije moguće zato što graf G nema ciklus pošto znamo da je šuma. Dobijamo kontradikciju, te zaključujemo da svaka grane proizvoljne šume mora da čini most.

(b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji graf $G = (V, E)$ kod kog svaka grana čini most, a koji nije šuma. Pošto graf nije šuma, on mora da ima ciklus. Nek je $\{a, b\} \in E$ proizvoljna grana koja učestvuje u formiranju ovog ciklusa. Ako između dva čvora postoji put u grafu G, tada će između njih postojati put i ukoliko uklonimo granu $\{a, b\}$. Naime, ako dati put sadrži upravo granu $\{a, b\}$, taj deo puta možemo zameniti zaobilaznim putem između ova dva čvora koji sadrži ostatak uočenog ciklusa bez grane $\{a, b\}$. Uklanjanje grane $\{a, b\}$ ne bi povećalo broj komponenti povezanosti grafa G, te sledi da ova grana ne čini most, što je u kontradikciji sa činjenicom da svaka grana ovog grafa predstavlja most. Dobijamo da je naša inicijalna pretpostavka bila pogrešna i zaključujemo da ukoliko svaka grana nekog grafa predstavlja most, on mora biti šuma.

(c) Nek je data proizvoljna šuma $G = (V, E)$ i njen bilo koji artikulacioni čvor $a \in V$ koji je stepena bar 2. Ovaj čvor tada mora biti u vezi sa još bar dva različita čvora. Neka su to b i c, gde je $b, c \in V$, $b \neq c$. Ukoliko uklonimo čvor a, broj komponenti povezanosti grafa G mora da se poveća. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da se broj komponenti povezanosti ne povećava, sledi da između čvorova b i c mora da postoji elementarni put koji ne uključuje grane $\{a, b\}$ i $\{a, c\}$. Međutim, odavde sledi da ovaj elementarni put zajedno sa granam $\{a, b\}$ i $\{a, c\}$ formira ciklus, što je u suprotnosti sa činjenicom da graf G predstavlja šumu. Dakle, broj komponenti povezanosti mora da se poveća ukoliko izbrišemo čvor a i njegove incidentne grane, odakle sledi da on mora da bude artikulacioni čvor. Zaključujemo da za proizvoljnu šumu, svaki čvor stepena većeg od 1 mora da bude artikulacioni.

(d) Odgovor je ne. Graf prikazan na sledećoj slici čini kontraprimer, uzevši u obzir da on nije šuma, a svaki čvor stepena većeg od 1 jeste artikulacioni.



■

Zadatak 5. *Dato je korensko stablo sa pozitivnim konačnim brojem čvorova kod kog svaki čvor ima ili troje dece, ili nema decu uopšte. Ukoliko ovo stablo ima x internih čvorova, dokazati da mora da ima $2x + 1$ listova.*

Napomena: *Interni čvor korenskog stabla je bilo koji čvor koji ima decu, dok je list svaki čvor koji nema decu.*

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti matematičkom indukcijom po dubini korenskog stabla. Pre svega, ako je dubina stabla jednaka 0, to znači da se stablo sastoji samo od korena. U ovom slučaju koren nema decu, te stablo sadrži ukupno 0 internih čvorova i 1 list, pa formula važi. Pretpostavimo da formula važi za svako korensko stablo koje ima dubinu manju ili jednaku n, gde je $n \in \mathbb{N}_0$ neki prirodan broj. Dokažimo da onda formula mora da važi i u slučaju da je dubina stabla jednaka $n + 1$.

Posmatrajmo proizvoljno korensko stablo čija je dubina jednaka $n + 1$. Kako važi $n + 1 \geq 1$, koren ovog stabla mora da ima tačno troje dece. Ovu decu možemo da posmatramo kao tri korena za tri odvojena podstabla glavnog stabla. Svako od ovih podstabala ima dubinu najviše n. Ukoliko njihovi brojevi internih čvorova iznose redom a, b, c, tada po induktivnoj pretpostavci oni moraju redom da imaju $2a + 1, 2b + 1, 2c + 1$ listova. Glavno stablo tada ima $x = a + b + c + 1$ internih čvorova, jer su njegovi interni čvorovi zapravo svi interni čvorovi ova tri podstabla, plus koren, dok je njegov broj listova jednak $(2a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1)$ pošto se njegovi listovi svode na listove razmatranih podstabala.

Ukupan broj listova posmatranog korenskog stabla dubine $n + 1$ je, dakle, jednak $2a + 2b + 2c + 3 = 2(a + b + c + 1) + 1 = 2x + 1$, te dobijamo da formula data u zadatku mora da važi i u ovom slučaju. Dokaz indukcijom je gotov. ■

Zadatak 6. *Dato je korensko stablo dubine* 11*, takvo da svaki njegov čvor čije odgovarajuće podstablo ima dubinu* $x \in \mathbb{N}_0$ *mora da ima tačno* x *dece, pri čemu njihova odgovarajuća podstabla imaju redom dubine* $0, 1, 2, \ldots, x-1$*. Izračunati ukupan broj čvorova ovog stabla.*

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti preko matematičke indukcije. Dokazaćemo da ukoliko korensko stablo dubine $n \in \mathbb{N}_0$ zadovoljava uslov da svaki čvor čije je podstablo dubine x ima x dece čija podstabla imaju dubine $0, 1, 2, \ldots, x-1$, da tada ono mora da ima tačno 2^n čvorova. Ukoliko je dato stablo dubine 0, ono se svodi samo na koren bez dodatnih čvorova, te je ukupan broj čvorova zaista jednak $2^0 = 1$. Pretpostavimo da formula važi za svako korensko stablo čija dubina ne prevazilazi vrednost $n \in \mathbb{N}_0$. Dokazaćemo da onda jednakost mora da važi i za stablo dubine $n+1$.

Posmatrajmo korensko stablo čija je dubina $n+1$ i koje zadovoljava uslov od interesa. Kako je $n+1 \geq 1$, koren ovog stabla mora da ima upravo $n+1$ dece, pri čemu njihova odgovarajuća podstabla imaju dubine $0, 1, 2, \ldots, n$. Po induktivnoj pretpostavci, ova podstabla moraju da imaju redom $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ čvorova. Ako zajedno uz sve ove čvorove uračunamo i koren glavnog stabla, zaključujemo da je njegov ukupan broj čvorova jednak

$$1 + (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n) = 1 + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1}$$

Ovim smo željeno tvrđenje dokazali matematičkom indukcijom.

Dakle, pošto je korensko stablo u zadatku dubine 11, dobijamo da ono mora da sadrži tačno $2^{11} = 2048$ čvorova. ■

Zadatak 7.

(a) *Koliko najmanje, a koliko najviše, može da iznosi dubina binarnog korenskog stabla sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova čiji svaki interni čvor ima ili jedno ili dvoje dece?*

(b) *Za zadato $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, koliko najmanje, a koliko najviše, može da iznosi dubina korenskog stabla sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova čiji svaki interni čvor može da ima bilo koji broj dece iz skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$?*

Rešenje.

(a) Dubina može najviše da iznosi $n - 1$. Ova vrednost se dostiže ukoliko svaki interni čvor ima tačno po jedno dete. U tom slučaju se na svakoj dubini stabla nalazi tačno jedan čvor, počev od dubine 0 pa sve do dubine $n - 1$.

Binarno korensko stablo dubine x može da ima najviše $1 + 2 + \cdots + 2^x$ čvorova. Ova vrednost se dostiže ukoliko svaki interni čvor ima tačno dvoje dece, a svi listovi se nalaze na dubini x. Dakle, najviše može biti $1 + 2 + \cdots + 2^x = 2^{x+1} - 1$ čvorova.

Ako je dato stablo sa n čvorova i važi $n \leq 2^{x+1} - 1$, onda ovo stablo može da ima dubinu ne veću od x ukoliko su mu čvorovi poređani redom odozgo nadole, pa sleva nadesno. Ukoliko minimalnu dubinu binarnog korenskog stabla sa n čvorova označimo sa $d \in \mathbb{N}_0$, zaključujemo da mora da bude $n \leq 2^{d+1} - 1$, ali takođe i $n > 2^d - 1$. Dobijamo naredni niz ekvivalentnih formula:

$$
\begin{array}{rcr}
n \leq 2^{d+1} - 1 & \wedge & n > 2^d - 1 \\
n + 1 \leq 2^{d+1} & \wedge & n + 1 > 2^d \\
\log_2(n+1) \leq d + 1 & \wedge & \log_2(n+1) > d
\end{array}
$$

Iz nejednakosti $\log_2(n+1) \leq d + 1$ i $\log_2(n+1) > d$ koje istovremeno važe, zaključujemo da mora biti $d + 1 = \lceil \log_2(n+1) \rceil$. Dakle, najmanja moguća vrednost dubine binarnog korenskog stabla sa n čvorova iznosi $\lceil \log_2(n+1) \rceil - 1$.

(b) Ukoliko se radi o korenskom stablu čiji svaki interni čvor može da ima do k dece, gde je $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, neki unapred odabran prirodan broj veći od 1, zadatak se rešava skoro identično. Pre svega, najveća dubina koju može da ima stablo sa n čvorova jeste $n-1$. Rezonovanje je istovetno kao u situaciji kada razmatramo binarna stabla – stablo dostiže dubinu $n-1$ ukoliko njegov svaki interni čvor ima tačno jedno dete.

Stablo dubine x može da ima najviše $1 + k + k^2 + \cdots + k^x = \dfrac{k^{x+1}-1}{k-1}$ čvorova. Ova vrednost se dostiže ako svaki interni čvor ima po k dece i ako se svi listovi nalaze na dubini x. Znači, ako sa d označimo minimalnu moguću dubinu stabla sa n čvorova, zaključujemo da važe nejednakosti $n \leq \dfrac{k^{d+1}-1}{k-1}$ i $n > \dfrac{k^d-1}{k-1}$. Dobija se niz ekvivalentnih formula:

$$
\begin{aligned}
n &\leq \frac{k^{d+1}-1}{k-1} & \wedge && n &> \frac{k^d-1}{k-1} \\
n(k-1) &\leq k^{d+1}-1 & \wedge && n(k-1) &> k^d-1 \\
nk-n+1 &\leq k^{d+1} & \wedge && nk-n+1 &> k^d \\
\log_k(nk-n+1) &\leq d+1 & \wedge && \log_k(nk-n+1) &> d
\end{aligned}
$$

odakle sledi $d+1 = \lceil \log_k(nk-n+1) \rceil$. Minimalna dubina korenskog stabla sa n čvorova je $\lceil \log_k(nk-n+1) \rceil - 1$.

■