Rešavanje nelinearnih jednačina i sistema jednačina

Neka je data funkcija $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ i neka jednačina

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

ima rešenje $x^* \in [\alpha, \beta]$. Jednačina (1) može da se na beskonačno mnogo načina predstavi u obliku

$$x = \Phi(x) \qquad (\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}) \tag{2}$$

Iterativni postupak za rešavanje jednačine (2), odnosno (1) (*metod proste iteracije* ili *opšti iterativni metod*:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [\alpha, \beta] \tag{3}$$

- $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $-$ *iterativni niz*;
- $\Phi(x)$ $-$ *iterativna funkcija*;
- $\varepsilon > 0$ $-$ unapred zadata tačnost;
- x_k, takvo da je $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ $-$ približno rešenje.

Teorema 0.0.1. *Neka je $\Phi(x)$ neprekidna funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:*
1° $\Phi : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$;
2° $\Phi(x)$ *ima izvod na $[\alpha, \beta]$ takav da za svako $x \in [\alpha, \beta]$ važi*

$$|\Phi'(x)| \le q < 1.$$

Tada jednačina (2) odnosno (1) ima jedinstveno rešenje $x^* \in [\alpha, \beta]$ *koje je granična vrednost niza* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *definisanog sa* $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *za proizvoljno* $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Teorema 0.0.2. *Neka funkcija* $\Phi(x)$ *zadovoljava uslove prethodne teoreme. Tada važi:*

$$|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Red konvergencije iterativnog procesa je r ako je

$$|x_{k+1} - x^*| = \mathcal{O}\big(|x_k - x^*|^r\big), \qquad k \to \infty,$$

tj. ako postoji konstanta $A > 0$ takva da za dovoljno veliko k važi

$$|x_{k+1} - x^*| \leq A|x_k - x^*|^r.$$

Asimptotska konstanta greške ili **faktor konvergencije** iterativnog procesa je

$$C_r = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^r}.$$

Teorema 0.0.3. *Neka je* $\Phi : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ r *puta diferencijabilna. Ako važi*

$$\begin{aligned} \Phi(x^*) &= x^*, \\ \Phi'(x^*) &= \Phi''(x^*) = \cdots = \Phi^{(r-1)}(x^*) = 0, \\ \Phi^{(r)}(x^*) &\neq 0, \end{aligned}$$

tada iterativni proces (3) ima red konvergencije r. *Ako je* $\Phi \in C^r[\alpha, \beta]$, *tada je asimptotska konstanta greške*

$$C_r = \frac{|\Phi^{(r)}(x^*)|}{r!}.$$

Njutnov metod (*Njutn-Rafsonov metod* ili *metod tangente*)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [\alpha, \beta]$$

ZADACI

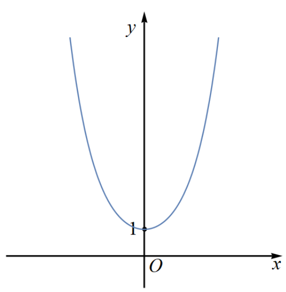
Zadatak 1. Metodom proste iteracije odrediti sva rešenja jednačine

$$\cosh\frac{x}{2} - x = 0$$

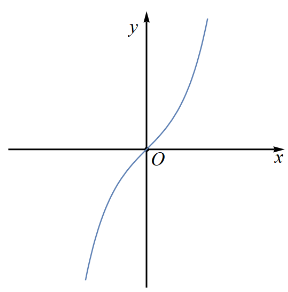
tačnošću $5 \cdot 10^{-3}$.

Rešenje:

Funkcija $t \mapsto \cosh t$ je elementarna funkcija iz grupe hiperboličkih funkcija:



$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$



$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

$$\cosh^2 t - \sin^2 t = 1$$

$$(\cosh t)' = \sinh t$$
$$(\sinh t)' = \cosh t$$

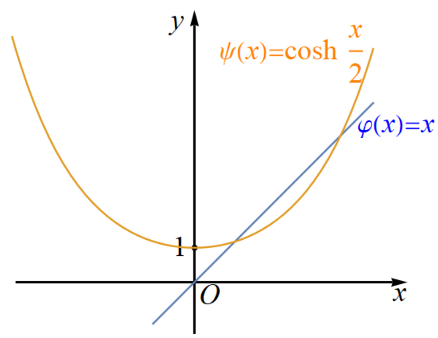
I Odredjivanje broja rešenja i njihova lokalizacija:

Rešenja jednačine

$$f(x) = \cosh\frac{x}{2} - x = 0, \quad \text{tj.} \quad x = \cosh\frac{x}{2}$$

su tačke u kojima funkcije $\varphi(x) = x$ i $\psi(x) = \cosh\dfrac{x}{2}$ imaju iste vrednosti.

Skiciramo grafike navedenih funkcija.



Sa grafika se vidi da ove funkcije imaju 2 zajedničke tačke, tj. jednačina ima 2 rešenja. Odredimo segmente u kojima se ona nalaze.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.	0.128	-0.457	-0.648	-0.238	1.132

Pošto su vrednosti funkcije $f(x) = \cosh\dfrac{x}{2} - x$ različitog znaka na krajevima segmenata $[1,2]$ i $[4,5]$, u svakom od njih se nalazi po jedno rešenje.

II Određivanje rešenja $x' \in [1,2]$:

Predstavimo polaznu jednačinu u obliku $x = \cosh(0.5x)$, pogodnom za formiranje iterativnog procesa.
Ispitajmo da li iterativna funkcija $\phi(x) = \cosh(0.5x)$ ispunjava uslove Teoreme 0.0.1.

1° $\Phi : [1,2] \to [1,2]$?

Kako je $\Phi'(x) = 0.5\sinh(0.5x) > 0$ (videti grafik funkcije $t \mapsto \sinh t$), funkcija je rastuća. Kako je još i $\Phi(1) = 1.1276 > 1$, $\Phi(2) = 1.5431 < 2$, ispunjen je uslov $\Phi(x) \in [1,2]$ za svako $x \in [1,2]$.

2° $\Phi(x)$ ima izvod na $[1,2]$ takav da je $|\Phi'(x)| \le q < 1$, $\forall x \in [1,2]$?

$$
\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 0.5\sinh(0.5x);\\
(\Phi'(x))' &= 0.25\cosh(0.5x) > 0, \quad \forall x \in [1,2]\\
&\Rightarrow \quad \Phi'(x) \quad \text{je rastuća funkcija}\\
&\Rightarrow \quad 0 < \Phi'(x) \le \Phi'(2) = 0.587601 \approx 0.6 < 1.
\end{aligned}
$$

Kako važi 1° i 2°, zaključujemo da iterativni proces

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \qquad \text{tj.} \qquad x_{k+1} = \cosh(0.5x_k), \quad k = 0,1,2,\dots$$

konvergira za proizvoljno $x_0 \in [1, 2]$. Neka je, na primer, $x_0 = 1$.

Na osnovu Teoreme 0.0.2, možemo proceniti potreban broj iteracija za postizanje tražene tačnosti $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{aligned} |x_k - x'| &\leq \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0| = \frac{(0.6)^k}{1-0.6}|1.1276 - 1| \\ &= \frac{(0.6)^k}{0.4} \cdot 0.1276 = 0.319 \cdot (0.6)^k < 5 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Rešavanjem nejednačine $(0.6)^k < \dfrac{0.005}{0.319}$ (ili neposrednom proverom) zaključujemo da je $|x_k - x'| < \varepsilon$ za $k \geq 9$, tj. za postizanje tačnosti potrebno je 9 iteracija.

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi(x_0) = \cosh(0.5x_0) = \cosh(0.5) = 1.1276, \\ x_2 &= \Phi(x_1) = \cosh(0.5x_1) = \cosh(0.5638) = 1.1632, \\ x_3 &= \Phi(x_2) = \cosh(0.5x_2) = \cosh(0.5816) = 1.174, \\ x_4 &= \Phi(x_3) = \cosh(0.5x_3) = \cosh(0.587) = 1.1773, \\ &\vdots \\ x_9 &= 1.1788 \end{aligned}$$

S obzirom na postignutu tačnost, prve tri decimale su sigurne cifre, pa je posle zaokruživanja približno rešenje $x_9 = 1.179$.

U praksi, iterativni proces se zaustavlja kada je $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. U ovom slučaju, $|x_4 - x_3| = 0.0033 < 0.5 \cdot 10^{-3}$, pa za približno rešenje može da se uzme $x_4 = 1.177$.

III Određivanje rešenja $x'' \in [4, 5]$:

Za $x \in [4, 5]$ važi: $\Phi'(x) \geq \Phi'(4) = 0.5 \sinh(2) \geq 1.8134$, pa proces sa iterativnom funkcijom $\Phi(x)$ ne konvergira. Zato transformišemo jednačinu.

$$x = \cosh(0.5x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\cosh(0.5x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\cosh(0.5x)} = x$$

Sada je iterativna funkcija

$$\Phi(x) = \frac{x^2}{\cosh(0.5x)}.$$

Može se pokazati da ona zadovoljava uslove Teoreme 0.0.1, pa se formiranjem iterativnog niza

$$x_{k+1} = \frac{x^2}{\cosh(0.5x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 = 4,$$

dobija.

$$x_0 = 4., \quad x_1 = 4.2528, \quad x_2 = 4.2536, \quad x_3 = 4.2536.$$

Kako je $|x_3 - x_2| < 0.5 \cdot 10^{-3}$, za približno rešenje se, posle zaokruživanja, uzima $x_3 = 4.254$.

Zadatak 2. Metodom proste iteracije odrediti realan koren jednačine

$$x^3 - x - 1 = 0$$

sa tačnošću 10^{-4}.

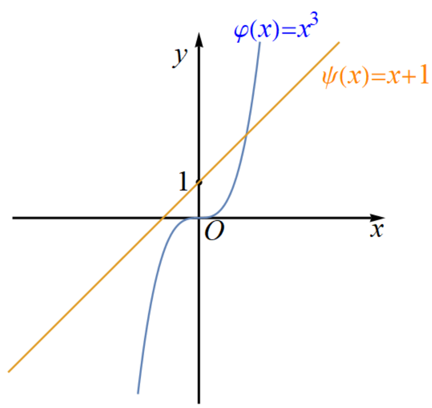
Rešenje:

I Lokalizacija rešenja:

Jednačinu predstavimo u obliku

$$x^3 = x + 1$$

i skicirajmo grafike funkcija $\varphi(x) = x^3, \quad \psi(x) = x + 1.$



Vidi se da ove funkcije imaju jednu zajedničku tačku $x^* \in [0, +\infty)$, tj. jednačina ima jedno realno pozitivno rešenje.

x	0	1	2
$f(x)$	-1	-1	5

Iz tabele vrednosti funkcije $f(x) = x^3 - x - 1$ se vidi da ona menja znak između 1 i 2, tj. rešenje je $x^* \in [1, 2]$.

II Izbor iterativne funkcije:

Od različitih načina predstavljanja polazne jednačine u obliku $x = \Phi(x)$ zavisi izbor iterativne funkcije.

- $x = x^3 - 1, \qquad \Phi(x) = x^3 - 1$

  Ova iterativna funkcija ne zadovoljava uslov 1° u Teoremi 0.0.1, jer

$$\Phi(1) = 2, \quad \Phi(2) = 7, \quad \Phi(x) \in [2,7], \; x \in [1,2].$$

- $x^3 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}, \qquad \Phi(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

  Ova iterativna funkcija ne zadovoljava uslov 2° u Teoremi 0.0.1, jer

$$|\Phi'(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right| = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \nleq 1, \; x \in [1,2] \quad (\text{npr. } |\Phi'(1)| = 3).$$

- $x^3 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{x+1}, \qquad \Phi(x) = \sqrt[3]{x+1}$

  Ova iterativna funkcija zadovoljava uslov 1° u Teoremi 0.0.1, jer

$$\begin{aligned} 1 \le x \le 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \le x + 1 \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{2} \le \sqrt[3]{x+1} \le \sqrt[3]{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 1.26 \le \Phi(x) \le 1.44, \quad x \in [1,2]. \end{aligned}$$

  Zadovoljava i uslov 2°, jer za svako $x \in [1,2]$ važi

$$|\Phi'(x)| = \left| \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \right| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+1)^2}} \approx 0.21 < 1.$$

Prema Teoremi 0.0.1, iterativni proces

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [1,2]$$

konvergira ka tačnom rešenju.

III Određivanje približnog rešenja:

Počinjemo proces, na primer, sa tačkom $x_0 = 2.$, a prekidamo kada je $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$. Vrednosti računamo sa 5 decimala.

$$x_0 = 2., \quad x_1 = \sqrt[3]{2. + 1} = 1.44225, \quad x_2 = \sqrt[3]{1.44225 + 1} = 1.34668, \; \ldots$$

Rezultati su predstavljeni u sledećoj tabeli:

k	x_k
0	2.
1	1.44225
2	1.34668
3	1.32888
4	1.32551
5	1.32487
6	1.32475
7	1.32472

Približno rešenje je $x_7 = 1.3247$.

Zadatak 3. Data je jednačina

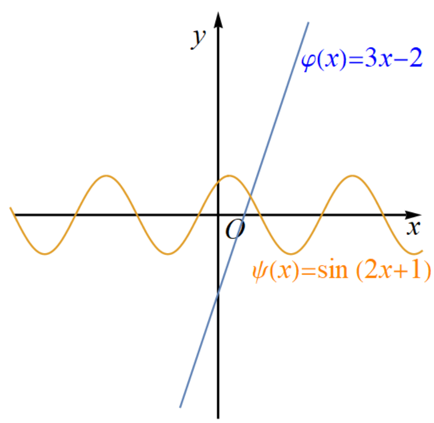
$$3x - \sin(2x+1) - 2 = 0.$$

a) Koliko rešenja ima data jednačina?
b) Rešiti jednačinu metodom proste iteracije sa tačnošću 10^{-3}.
c) Odrediti red konvergencije metoda.
d) Rešiti jednačinu Njutnovim metodom sa tačnošću 10^{-3}.

Rešenje:

a) Lokalizacija rešenja:

$$3x - \sin(2x+1) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2 = \sin(2x+1)$$



x	0	1
$f(x)$	-2.84147	0.85888

Jednačina ima jedno realno rešenje, koje se nalazi u segmentu $[0, 1]$.

b) Transformacija jednačine i određivanje iterativne funkcije:

$$3x - \sin(2x+1) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\sin(2x+1) + \frac{2}{3},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{3}\sin(2x+1) + \frac{2}{3}.$$

Ispitivanje uslova konvergencije:

$$1^\circ \qquad -1 \le \sin(2x+1) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \le \frac{1}{3}\sin(2x+1) \le \frac{1}{3},$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}\sin(2x+1) + \frac{2}{3} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x) \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \subset [0,1], \;\; x \in [0,1].$$

$$2^\circ \qquad \Phi'(x) = \frac{2}{3\cos(2x+1)}, \quad |\Phi'(x)| \le \frac{2}{3} < 1.$$

Na osnovu 1° i 2° proces sa iterativnom funkcijom Φ konvergira.
Formirajmo niz

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\sin(2x_k+1) + \frac{2}{3}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad x_0 = 2.$$

Rezultati su u sledećoj tabeli:

k	x_k
0	1.
1	0.7137
2	0.8850
3	0.7877
4	0.8455

k	x_k
5	0.8118
6	0.8317
7	0.8201
8	0.8269

k	x_k
9	0.8229
10	0.8252
11	0.8239
12	0.8247

Kako je $|x_{12} - x_{11}| = 0.0008 < 10^{-3}$, za približno rešenje se uzima $x_{12} = 0.825$.

c) Određivanje reda konvergencije:
Neka je x^* tačno rešenje. Tada je

$$3x^* - \sin(2x^*+1) - 2 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \sin(2x^*+1) = 3x^* - 2,$$

$$\cos(2x^*+1) = \sqrt{1 - \sin(2x^*+1)} = \sqrt{1 - (3x^*+1)^2}$$

$$= \sqrt{3 + 6x^* - 9x^{*2}}$$

Ispitujemo uslove Teoreme 0.0.3:

$$\Phi(x^*) = \frac{1}{3}\sin(2x^*+1) - \frac{2}{3} = \frac{\sin(2x^*+1)+2}{3} = \frac{3x^*}{3} = x^*,$$

$$\Phi'(x^*) = \frac{2}{3}\cos(2x^*+1) = \frac{2}{3}\sqrt{3+6x^*-9x^{*2}} = \frac{2}{3}\sqrt{9(1-x^*)\Big(x^* + \frac{1}{3}\Big)}$$

$$\neq 0,$$

što znači da je red konvergencije $r = 1$.

d) Rešavanje jednačine primenom Njutnovog metoda:

Za jednačinu $f(x) = 3x - \sin(2x + 1) - 2 = 0$ primenom Njutnovog metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [0, 1],$$

dobija se niz

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k - \sin(2x_k + 1) - 2}{3 - 2\cos(2x_k + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 = 1.$$

Rezultati su predstavljeni u sledećoj tabeli:

k	x_k
0	1.
1	0.8275
2	0.8244
3	0.8244

Približno rešenje je $x_3 = 0.824$.

Napomena: Poznato je da Njutnov metod ima red konvergencije $r = 2$. To objašnjava razliku potrebnog broja iteracija za postizanje iste tačnosti primenom dva predstavljena metoda.

Zadatak 4. Za nalaženje korena jednačine $x^5 - a = 0 \qquad (a \neq 0)$ koristi se iterativni postupak

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gde je

$$\Phi(x) = px + \frac{aq}{x^4} + \frac{a^2 s}{x^9}, \qquad p, q, s \in \mathbb{R}.$$

a) Odrediti parametre $p, q, s \in \mathbb{R}$ tako da red konvergencije datog postupka bude maksimalan.
b) Za takav izbor parametara odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške iterativnog postupka.
c) Primenom dobijenog iterativnog procesa odrediti $\sqrt[5]{10}$ sa tačnošću 10^{-2}.

Rešenje: Primetimo najpre da za tačno rešenje x^* jednačine $x^5 - a = 0$ važi:

$$(x^*)^5 = a \qquad \text{i} \qquad x^* = \sqrt[5]{a}.$$

a) Primenjujemo Teoremu 0.0.3, tj. određujemo $p, q, s \in \mathbb{R}$ tako da važi:

$$\Phi(x^*) = x^*, \quad \Phi'(x^*) = 0, \quad \Phi''(x^*) = 0.$$

•

$$\begin{aligned}
\Phi(x^*) &= px^* + \frac{aq}{(x^*)^4} + \frac{a^2 s}{(x^*)^9} = \frac{p(x^*)^{10} + aq(x^*)^5 + a^2 s}{(x^*)^9} \\
&= \frac{p((x^*)^5)^2 + aq(x^*)^5 + a^2 s}{(x^*)^5 (x^*)^4} \cdot \frac{x^*}{x^*} = \frac{pa^2 + aqa + a^2 s}{a(x^*)^5} \cdot x^* \\
&= \frac{a^2(p+q+s)}{a^2} \cdot x^* = (p+q+s)x^*.
\end{aligned}$$

Da bi važilo $\Phi(x^*) = x^*$, mora da važi $\boxed{p + q + s = 1}$.

- $$\begin{aligned}\Phi'(x) &= p - \frac{4aq}{x^5} - \frac{9a^2 s}{x^{10}};\\ \Phi'(x^*) &= p - \frac{4aq}{(x^*)^5} - \frac{9a^2 s}{(x^*)^{10}} = p - \frac{4aq}{a} - \frac{9a^2 s}{a^2}\\ &= p - 4q - 9s.\end{aligned}$$

  Da bi važilo $\Phi'(x^*) = 0$, mora da važi $\boxed{p - 4q - 9s = 0}$.

- $$\begin{aligned}\Phi''(x) &= \frac{5\cdot 4aq}{x^6} + \frac{10\cdot 9a^2 s}{x^{11}};\\ \Phi''(x^*) &= \frac{20aq}{(x^*)^6} + \frac{90a^2 s}{(x^*)^{11}} = \frac{20aq}{(x^*)^5 x^*} + \frac{90a^2 s}{(x^*)^2 x^*}\\ &= \frac{20aq}{ax^*} + \frac{90a^2 s}{a^2 x^*} = \frac{10}{x^*}(2q + 9s).\end{aligned}$$

  Da bi važilo $\Phi''(x^*) = 0$, mora da važi $\boxed{2q + 9s = 0}$.

Parametre p, q, s određujemo rešavanjem sistema jednačina

$$\left\{\begin{aligned} p + q + s &= 1,\\ p - 4q - 9s &= 0,\\ 2q + 9s &= 0,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{18}{25},\\ q &= \frac{9}{25},\\ r &= -\frac{2}{25}.\end{aligned}\right.$$

b) Određivanje reda konvergencije:
Izabrane vrednosti parametara obezbeđuju red konvergencije $r > 2$.

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{25}\Big(18x + \frac{9a}{x^4} - \frac{2a^2}{x^9}\Big),\\ \Phi'(x) &= \frac{1}{25}\Big(18 - \frac{36a}{x^5} + \frac{18a^2}{x^{10}}\Big),\\ \Phi''(x) &= \frac{1}{25}\Big(\frac{180a}{x^6} - \frac{180a^2}{x^{11}}\Big),\\ \Phi'''(x) &= \frac{180}{25}\Big(-\frac{6a}{x^7} + \frac{11a^2}{x^{12}}\Big);\\ \Phi'''(x^*) &= \frac{180}{25}\Big(-\frac{6a}{(x^*)^7} + \frac{11a^2}{(x^*)^{12}}\Big) = \frac{180}{25}\Big(-\frac{6a}{(x^*)^5(x^*)^2} + \frac{11a^2}{(x^*)^{10}(x^*)^2}\Big)\\ &= \frac{180}{25(x^*)^2}\Big(-\frac{6a}{a} + \frac{11a^2}{a^2}\Big) = \frac{36}{(x^*)^2} = 36a^{-2/5}.\end{aligned}$$

Kako je $\Phi'''(x^*) \neq 0$, red konvergencije je $r = 3$.
Asimptotska karakteristika greške:

$$C_3 = \frac{|\Phi'''(x^*)|}{3!} = 6a^{-2/5}.$$

c) Primena metoda za $a = 10$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{25}\Big(18x + \frac{90}{x^4} - \frac{200}{x^9}\Big),$$
$$x_{k+1} = \frac{1}{25}\Big(18x_k + \frac{90}{x_k^4} - \frac{200}{x_k^9}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 = 2.$$

k	x_k
0	2.
1	1.649
2	1.585
3	1.585

Kako je $|x_3 - x_2| < 10^{-4} < 10^{-2}$,
približno rešenje je $x_3 = 1.58$.

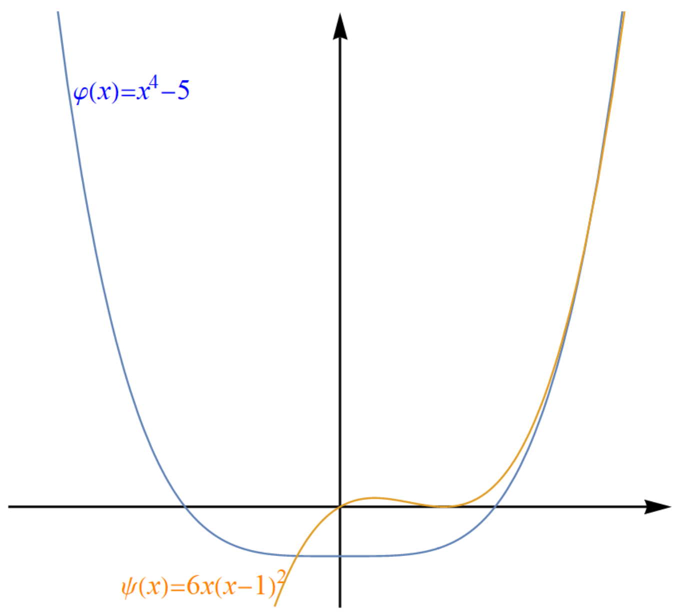
Zadatak 5. Sa tačnošću 10^{-4} odrediti sva realna rešenja jednačine

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x - 5 = 0.$$

Rešenje: I Broj i lokalizacija rešenja:

Traže se realne nule realnog polinoma stepena 4. Radi određivanja njihovog broja i lokalizacije, predstavimo jednačinu u obliku

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 5 = 6x(x-1)^2.$$



Na osnovu grafika funkcija $\varphi(x) = x^4 - 5$ i $\psi(x) = 6x(x-1)^2$ zaključujemo da one imaju 2 zajedničke tačke, tj. polinom $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x - 5$ ima 2 realne nule.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	119	20	-5	-4	-1	4

Na osnovu vrednosti $f(x)$ u nekim celobrojnim tačkama zaključujemo da na menja znak između -1 i 0 i između 2 i 3. Zato, jednačina ima 2 rešenja, $x' \in [-1, 0]$, $x'' \in [2, 3]$.

II Izbor metoda:

Ispitujemo da li može da se primeni Njutnov metod, tj. da li je $f'(x) \neq 0$ na odabranim segmentima.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x - 5, \\ f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 24x - 6, \\ f''(x) &= 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,3)$	3
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	-52	$\nearrow$	-6	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	12

- Na segmentu $[-1, 0]$ važi:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; f'(x) \nearrow \;\Rightarrow\; & f'(-1) \leq f'(x) \leq f'(0) \\ \Rightarrow\; & -52 \leq f'(x) \leq -6 \;\Rightarrow\; f'(x) \neq 0. \end{aligned}$$

- Na segmentu $[2, 3]$ važi:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; f'(x) \nearrow \;\Rightarrow\; & f'(2) \leq f'(x) \leq f'(3) \\ \Rightarrow\; & 2 \leq f'(x) \leq 12 \;\Rightarrow\; f'(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Prema prethodnom, na svakom od segmenata $[-1, 0]$ i $[2, 3]$ za nalaženje rešenja jednačine može da se primeni Njutnov metod

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - 6x_k^3 + 12x_k^2 - 6x_k - 5}{4x_k^3 - 18x_k^2 + 24x_k - 6}, \quad \text{tj.}$$

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^4 - 12x_k^3 + 12x_k^2 + 5}{4x_k^3 - 18x_k^2 + 24x_k - 6}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sa odgovarajućim početnim vrednostima.

III Primena metoda:

k	x_k
0	$-1.$
1	-0.61538
2	-0.44783
3	-0.41536
4	-0.41422
5	-0.41422

k	x_k
0	$3.$
1	2.66667
2	2.47468
3	2.41805
4	2.41423
5	2.41421

$x' \approx x_5 = -0.4142, \qquad x'' \approx x_5 = 2.4142.$