Čas 03

Teorijski uvod

Definicija 1. *Binarna matrica $A = (a_{ij})$, reda $n \times n$, definisana sa*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i \sim j\,, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima}\,, \end{cases}$$

za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$, naziva se matricom susedstva grafa G.

Definicija 2. *Binarna matrica $C = (c_{ij})$, reda $m \times m$, definisana sa*

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_i \sim e_j\,, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima}\,, \end{cases}$$

za svako $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, m$, naziva se matricom susedstva po granama grafa G.

Definicija 3. *Binarna matrica $B = (b_{ij})$, reda $m \times n$, definisana sa*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } e_i \sim v_j\,, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima}\,, \end{cases}$$

za svako $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$, naziva se matricom incidentnosti grafa G.

Neka je dat graf $G = (V, E)$ definisan skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i grana $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Definicija 4. *Niz čvorova*

$$v_p \to v_{p+1} \to \cdots \to v_q$$

sa osobinom da grana $e = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = p, p+1, \ldots, q-1$, pripada skupu E, naziva se put u grafu G koji povezuje čvorove v_p i v_q. Ako je $v_p = v_q$, put se naziva zatvorenim ili kružnim.

Teorema 1. *Neka je $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$ k-ti stepen matrice susedstva grafa G, $A = (a_{ij})$ reda $n \times n$. Tada $a_{ij}^{(k)}$ određuje ukupan broj puteva dužine k koji povezuju čvorove v_i i v_j.*

Dijagonalni element $a_{ii}^{(2)}$ matrice $A^2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$ određuje stepen čvora v_i.

Dijagonalni element $a_{ii}^{(3)}$ matrice $A^3 = \left(a_{ij}^{(3)}\right)$ određuje dvostruki broj ciklusa dužine 3 (trouglova) koji sadrže čvor v_i.

Teorema 2. *Ukupan broj ciklusa dužine 3 (trouglova) u grafu G, u oznaci $C_3(G)$, jednak je šestini traga matrice A^3,*

$$C_3(G) = \frac{1}{6}\mathrm{trag}\left(A^3\right) .$$

Definicija 5. *Dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $|E_1| = |E_2| = m$, su izomorfna ako i samo ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje (bijekcija) $\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$ tako da očuvava susedstvo, tj.*

$$\forall x_1, x_2 \in V_1,\ \{x_1, x_2\} \in E_1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(x_1),\, \varphi(x_2) \in V_2, \quad \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\} \in E_2 \,.$$

Teorema 3. *Ako su grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ izomorfni, tada:*

- *imaju isti broj grana, $|E_1| = |E_2|$,*
- *imaju jednake nizove stepena čvorova,*
- *imaju isti broj ciklusa istih dužina,*
- *svaki podgraf grafa G_1 ima izomorfni podgraf u grafu G_2 i obrnuto.*

Ako navedene osobine važe, to ne znači da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni.

Sledećom procedurom se eventualno može ustanoviti da grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nisu izomorfni.

Korak 1. Da li je $|V_1| = |V_2|$? Ako nije, preći na Korak 6. Ako jeste, preći na Korak 2.

Korak 2. Da li je $|E_1| = |E_2|$? Ako nije, preći na Korak 6. Ako jeste, preći na Korak 3.

Korak 3. Da li su im isti stepeni čvorova? Ako nisu, preći na Korak 6. Ako jesu, preći na Korak 4.

Korak 4. Da li svaki ciklus u grafu G_1 ima izomorfni ciklus u grafu G_2 i obrnuto? Ako ne, preći na Korak 6. Ako da, preći na Korak 5.

Korak 5. Da li svaki podgraf iz grafa G_1 ima izomorfni podgraf u grafu G_2 i obrnuto? Ako ne, preći na Korak 6. Ako da, preći na Korak 7.

Korak 6. Grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni.

Korak 7. Procedura ne omogućava da se ustanovi da li su grafovi G_1 i G_2 izomorfni.

Zadaci

Zadatak 1.

Na jednom jezeru je 13 ostrva, a od svakog od njih vodi jedan, tri ili pet mostova. Dokazati da bar jedan most vodi na obalu jezera.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, da nijedan most ne vodi na obalu jezera. Pridružimo zadatku graf, pri čemu svakom ostrvu odgovara jedan čvor. Dva čvora su susedna ako su odgovarajuća ostrva povezana mostom. Iz uslova zadatka imamo da je stepen svakog čvora 1, 3 ili 5. Kako je $n = 13$, to imamo neparan broj čvorova neparnog stepena, što je nemoguće.

Zadatak 2.

Da li je moguće 77 telefona umrežiti pomoću nezavisnih veza tako da svaki od njih bude direktno povezan sa 15 telefona od preostalih?

Rešenje. Pridružimo zadatku graf, pri čemu svakom telefonu odgovara jedan čvor, $n = 77$. Svaka dva čvora u grafu su susedna ako su odgovarajući telefoni direktno povezani. To znači da je graf regularan stepena regularnosti $r = 15$. U tom slučaju bi broj grana u grafu, m, bio

$$m = \frac{nr}{2} = \frac{77 \cdot 15}{2} = \frac{1155}{2},$$

što je nemoguće, jer je m prirodan broj.

Zadatak 3.

Graf $G = (V, E)$ definisan je matricom incidentnosti

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu matrice B odrediti broj čvorova, broj grana, stepen svakog čvora, skup susednih čvorova za svaki čvor, matricu susedstva A i matricu susedstva po granama C. Skicirati graf.

Rešenje. Matrica B ima 4 vrste i 5 kolona, te graf G ima 5 čvorova i 4 grane. Neka je $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ skup čvorova grafa G. Na osnovu kolona matrice B dobija se da je $d(1) = 2$, $d(2) = 2$, $d(3) = 0$, $d(4) = 3$ i $d(5) = 1$. Na osnovu kolona i vrsta matrice B dobija se da su skupovi čvorova susedni čvorovima grafa, tj. zvezde

$$z(1) = \{2, 4\}, \quad z(2) = \{1, 4\}, \quad z(3) = \emptyset, \quad z(4) = \{1, 2, 5\}, \quad z(5) = \{4\}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} A + D = B^T \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dobija se da je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti

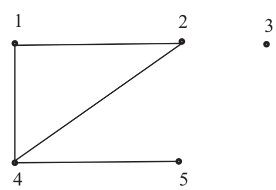
$$C + 2I_4 = B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dobija se da je

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Graf je prikazan na sledećoj slici.



Zadatak 4.

Graf $G = (V, E)$ definisan je matricom susedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti broj čvorova, stepene čvorova, broj grana i same grane grafa G. Skicirati dati graf. Da li matrica A jedinstveno određuje graf G?

Rešenje. Matrica susedstva A je reda 5×5. To znači da graf G ima 5 čvorova. Neka je $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ skup čvorova grafa G. Na osnovu vrsta (kolona) matrice A dobija se da je $d(1) = 2$, $d(2) = 3$, $d(3) = 2$, $d(4) = 3$ i $d(5) = 2$. Na osnovu jednakosti

$$2m = \sum_{i=1}^{5} d(v_i) = d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) = 12,$$

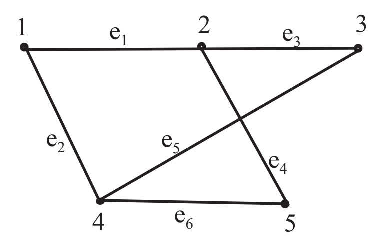
zaključuje se da graf ima $m = 6$ grana. Neka je $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ skup grana. Na osnovu matrice A dobija se da su skupovi susedstva za čvorove grafa G, tj. zvezde čvorova

$$z(1) = \{2, 4\}, \quad z(2) = \{1, 3, 5\}, \quad z(3) = \{2, 4\},$$
$$z(4) = \{1, 3, 5\}, \quad z(5) = \{2, 4\}.$$

Na osnovu ovih skupova može se, na primer, obaviti sledeći izbor grana:

$$e_1 = \{1, 2\}, \quad e_2 = \{1, 4\}, \quad e_3 = \{2, 3\}, \quad e_4 = \{2, 5\},$$
$$e_5 = \{3, 4\}, \quad e_6 = \{4, 5\}.$$

Odgovarajući graf G je prikazan na sledećoj slici.



Izbor označavanja čvorova i grana nije jedinstven. Drugačiji izbor bi doveo do grafa koji je izomorfan grafu G. To znači da matrica A jedinstveno određuje graf G do izomorfizma.

Zadatak 5.

Neka je dat graf $G = (V, E)$, definisan sa $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$, čija je matrica susedstva $A = (a_{ij})$ dimenzije 5×5. Odrediti matrice incidentnosti i susedstva po granama grafa G. Odrediti matrice A^2 i A^3 i naći sve puteve dužine 3 koji povezuju čvorove 2 i 5. Odrediti broj ciklusa, kao i same cikluse, dužine 3 koji sadrže čvor 4. Odrediti stepene čvorova i broj ciklusa dužine 3 u datom grafu.

Rešenje. Imamo da je

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

pa traženih puteva ima tri ($a_{25}^{(3)} = 3$), i to su

$$2 \to 1 \to 4 \to 5, \quad 2 \to 1 \to 3 \to 5, \quad 2 \to 3 \to 4 \to 5.$$

Stepene čvorova čitamo sa dijagonale matrice A^2: $d(1) = 3$, $d(2) = 2$, $d(3) = 4$, $d(4) = 3$, $d(5) = 2$.
Kako je $a_{33}^{(3)} = 4$, postoji $\frac{1}{2}a_{33}^{(3)} = 2$ ciklusa dužine 3 koji sadrži čvor 4, i to su

$$4 \to 1 \to 3 \to 4, \quad 4 \to 3 \to 5 \to 4.$$

Ciklusa dužine 3 ima ukupno $\frac{1}{6}(4 + 2 + 6 + 4 + 2) = 3$.

Zadatak 6.

Koliko ima ciklusa dužine 3 u kompletnom grafu K_n, $n \geq 3$?

Rešenje. Kako je matrica susedstva kompletnog grafa K_n oblika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

to je

$$A^2 = \begin{bmatrix} n-1 & n-2 & n-2 & \cdots & n-2 & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 & & n-2 & n-2 \\ n-2 & n-2 & n-1 & & n-2 & n-2 \\ \vdots & & & & & \\ n-2 & n-2 & n-2 & & n-2 & n-1 \end{bmatrix}.$$

Da bismo izračunali element $a_{ii}^{(3)}$, pomnožimo i-tu vrstu matrice A^2 i i-tu kolonu matrice A. Tako je

$$a_{ii}^{(3)} = \begin{bmatrix} n-2 & \cdots & n-2 & n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n-2) = (n-1)(n-2),$$

pa je ukupan broj ciklusa dužine 3 jednak $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Zadatak 7.

Neka u grafu G važi da stepen svakog čvora nije manji od r, $r \geq 2$. Dokazati da graf G sadrži ciklus dužine bar $r+1$.

Rešenje. Neka je $l = u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k$ put najveće dužine u grafu G. Čvor u_k je stepena bar r, pa sem u_{k-1} ima još $r-1$ suseda. Svaki njegov sused mora da pripada skupu čvorova $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\}$, jer bi u suprotnom postojao put u grafu G čija je dužina veća od dužine puta l. Neka su $\{u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_{r-1}}\}$ susedi čvora u_k takvi da je u_{k_1} najudaljeniji od u_k u putu

$$l = u_1 \to \cdots \to u_{k_1} \to \cdots \to u_{k_{r-1}} \to \cdots \to u_{k-1} \to u_k.$$

Tada je ciklus

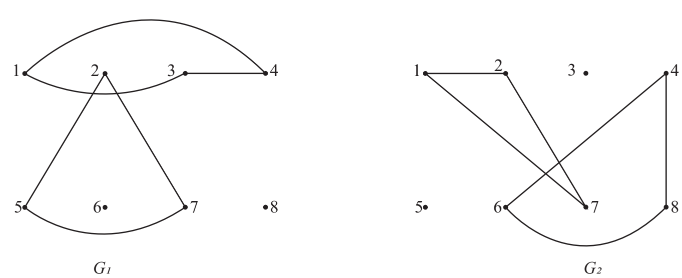
$$u_k \to u_{k_1} \to \cdots \to u_{k_{r-1}} \to \cdots \to u_{k-1} \to u_k$$

dužine bar $r+1$.

Zadatak 8.

Dokazati da su grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, definisani skupovima $V_1 = V_2 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $E_1 = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,4\},\{5,7\}\}$ i $E_2 = \{\{1,2\},\{1,7\},\{2,7\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}\}$, izomorfni.

Rešenje. Dati grafovi su prikazani na sledećoj slici.



Izomorfizam grafova G_1 i G_2, ako postoji, tražimo u obliku

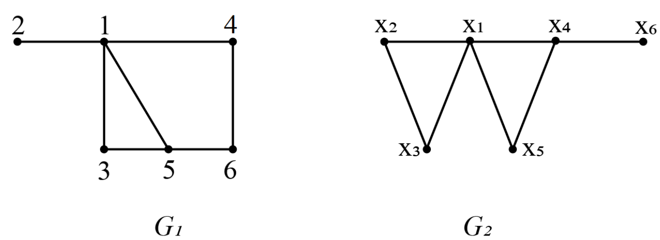
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Grafovi G_1 i G_2 imaju po dva čvora stepena 0, po šest čvorova stepena 2 i po dva ciklusa dužine 3. Zbog toga izomorfizam uspostavljamo između sledećih skupova čvorova: $\{6,8\}$ i $\{3,5\}$, $\{1,3,4\}$ i $\{1,2,7\}$, $\{2,5,7\}$ i $\{4,6,8\}$. Iz uslova očuvanja susedstva čvorova, jedan izomorfizam je dat sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 9.

Dokazati da grafovi G_1 i G_2, prikazani na sledećoj slici, nisu izomorfni.



Rešenje. Zadatak ćemo rešiti na dva načina.

Prvi način

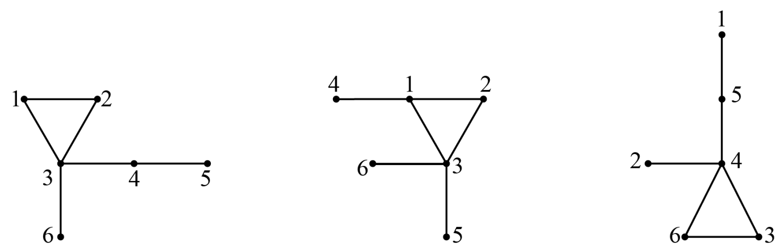
Grafovi G_1 i G_2 imaju isti broj čvorova, isti broj grana i iste nizove stepena čvorova $(4,3,2,2,2,1)$. Ako bi postojao izomorfizam f između grafova G_1 i G_2, tada bi važilo $f(1) = x_1$, jer su to jedini čvorovi stepena 4. Slično, jedini čvorovi stepena jedan su 2 i x_6, te bi važilo $f(2) = x_6$. Čvorovi 1 i 2 su susedni u grafu G_1, ali čvorovi x_1 i x_6 nisu u grafu G_2, što znači da takav izomorfizam ne postoji.

Drugi način

U grafu G_1 postoji prost ciklus dužine 4, $1 \to 5 \to 6 \to 4$, dok u grafu G_2 ciklus dužine 4 ne postoji. To znači da grafovi nisu izomorfni.

Zadatak 10.

Ispitati da li su grafovi prikazani na sledećoj slici izomorfni. U slučaju potvrdnog odgovora naći odgovarajuće izomorfizme.



G_1 G_2 G_3

Rešenje. Koristimo proceduru za ispitivanje eventualne izomofnosti grafova datu na kraju teorijskih osnova ove glave.

Korak 1. $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 6$.

Korak 2. $|E_1| = |E_2| = |E_3| = 6$.

Korak 3. $D_1 = (4, 2, 2, 2, 1, 1)$, $D_2 = (4, 3, 2, 1, 1, 1)$ i $D_3 = (4, 2, 2, 2, 1, 1)$.

Kako je $D_1 \neq D_2$, i $D_2 \neq D_3$, sledi da grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni, kao i grafovi G_2 i G_3. Nadalje posmatramo grafove G_1 i G_3.

Korak 4. U grafovima G_1 i G_3 postoji po jedan ciklus dužine 3.

Korak 5. Grafovi G_1 i G_3 imaju izomorfne podgrafove.

Sledi da grafovi G_1 i G_3 mogu biti izomorfni. Tražimo odgovarajući izomorfizam f ako postoji. Kako su 3 i 4 jedini čvorovi stepena 4 u grafovima G_1 i G_3 redom, mora da važi $f(3) = 4$. Dalje, kako je (1 2 3) ciklus u G_1 i (3 4 6) ciklus u G_3, mora da važi $f(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 6\}$, pa je $f(\{1, 2\}) = \{3, 6\}$. Budući da je $d(4) = 2$, $d(5) = d(6) = 1$ u G_1 i $d(5) = 2$, $d(1) = d(2) = 1$ u G_3, sledi $f(4) = 5$ i $f(\{5, 6\}) = \{1, 2\}$. Čvor 5 je susedan sa čvorom 4 u G_1, a čvor 1 je susedan sa čvorom 5 u G_3, pa važi $f(5) = 1$. Zbog toga je $f(6) = 2$, te je izomorfizam dat sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$