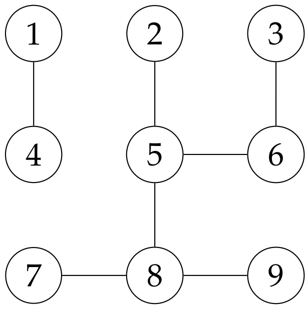
9 Спрежна стабла

Преглед теорије

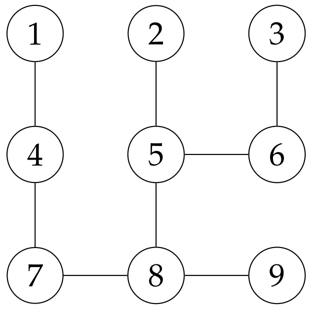
Теорема 1 (Кејлијева формула)**.** Нека је G било који мултиграф чија је задата произвољна грана e. Означимо са $G - e$ мултиграф који се добија из мултиграфа G брисањем гране e. Такође, означимо са $G \cdot e$ мултиграф који се добија из мултиграфа G контракцијом гране e, тј. брисањем гране e уз истовремено преклапање њених крајњих чворова. Тада је укупан број спрежних стабала мултиграфа G једнак збиру укупног броја спрежних стабала мултиграфова $G - e$ и $G \cdot e$.

Решени задаци

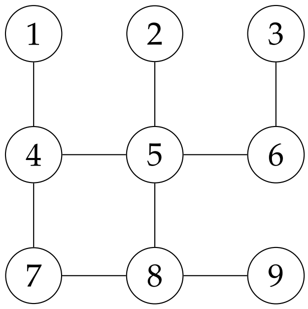
Задатак 1. Колико спрежних стабала имају графови G_1, G_2, G_3, G_4, задати преко визуелних репрезентација у виду наведених слика?



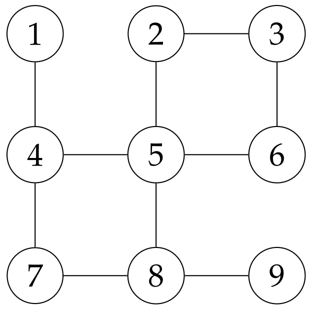
(а) G_1



(б) G_2



(в) G_3



(г) G_4

Решење.

а) Граф G_1 није повезан, тако да сигурно нема ниједно спрежно стабло.

б) Граф G_2 је стабло, те он има тачно једно спрежно стабло, а то спрежно стабло је управо сам тај граф.

в) Граф G_3 је повезан и има девет чворова и девет грана. Дакле, сва његова спрежна стабла добијају се брисањем тачно једне његове гране, тако да новодобијени граф остане повезан. Јасно је да новодобијени граф није повезан уколико се обрише нека од грана $\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}, \{8, 9\}$. Узевши у обзир да чворови $4 - 5 - 8 - 7 - 4$ образују прост циклус, брисањем било које од четири гране овог простог циклуса долазимо до спрежног стабла графа G_3. Закључујемо да граф G_3 има укупно четири спрежна стабла.

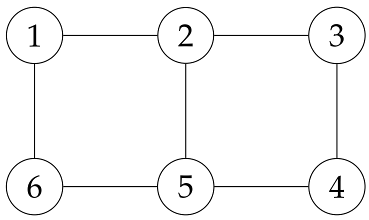
г) Граф G_4 је повезан и има девет чворова и десет грана. Свако спрежно стабло овог графа мора да има тачно две гране обрисане у односу на сам граф. Такође, граф G_4 има два проста циклуса $4-5-8-7-4$ и $2-3-6-5-2$, који су дисјунктни по гранама. Како би граф постао ацикличан, из оба ова проста циклуса мора да се избрише бар једна грана. Међутим, да би се добило спрежно стабло, укупно мора да се избришу тачно две гране, не више. Дакле, закључујемо да се сва спрежна стабла овог графа добијају тако што се избрише по једна, произвољна, грана из оба наведена проста циклуса. Укупан број спрежних стабала графа G_4 износи $4 \cdot 4 = 16$.

□

Задатак 2.

а) Колико спрежних стабала има прост циклус дужине $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$?

б) Нека је задат граф преко своје визуелне репрезентације у виду следеће слике:

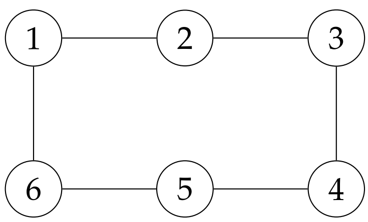


Коришћењем Кејлијеве формуле, одредити укупан број спрежних стабала датог графа.

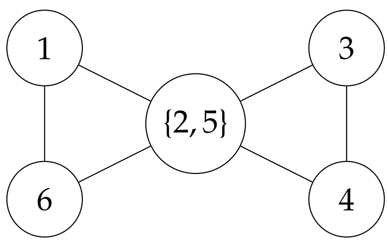
Решење.

а) Граф који представља прост циклус дужине n има n чворова и n грана. Сва његова спрежна стабла добијају се брисањем тачно једне гране. Такође, јасно је да брисањем било које гране мора да се добије спрежно стабло. Дакле, овај граф има тачно n спрежних стабала.

б) Нека нотација $\tau(G)$ озачава укупан број спрежних стабала неког графа G. Такође, означимо граф који је дат у задатку са G_1. Применом Кејлијеве формуле над графом G_1 и граном која спаја чворове 2 и 5, добијамо $\tau(G_1) = \tau(G_2) + \tau(G_3)$, где су графови G_2 и G_3 дати на наредним сликама:



(а) G_2



(б) G_3

Пошто граф G_2 чини прост циклус дужине шест, на основу првог дела задатка који је урад1ен под а) закључујемо да важи $\tau(G_2) = 6$.

Граф G_3 има укупно пет чворова и шест грана. Свако његово спрежно стабло добија се скидањем тачно две гране. Са друге стране, овај граф има просте циклусе дужине три

$1 - \{2,5\} - 6 - 1$ и $3 - 4 - \{2,5\} - 3$, који су дисјунктни по гранама. Дакле, како бисмо добили спрежно стабло, из оба ова проста циклуса мора да се скине бар једна грана. Закључујемо да се сва спрежна стабла графа G_3 добијају тако што се из наведена два проста циклуса обрише по једна, произвољна, грана. Добијамо да граф G_3 мора да има укупно $3 \cdot 3 = 9$ спрежних стабала.

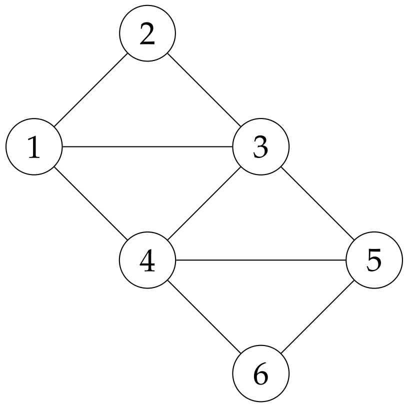
Коначно закључујемо да граф G_1 има укупно

$$\tau(G_1) = \tau(G_2) + \tau(G_3) = 6 + 9 = 15$$

спрежних стабала.

□

Задатак 3. Задат је граф преко своје визуелне репрезентације у виду следеће слике:



Израчунати његов укупан број спрежних стабала применом теореме о кофакторима Лапласове матрице.

Решење. Уколико чворове задатог графа поређамо по природном редоследу $1,2,3,4,5,6$, добијамо да је одговарајућа матрица суседства графа једнака

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Степени чворова $1,2,3,4,5,6$ су редом једнаки $3,2,4,4,3,2$. Дакле, Лапласова матрица задатог графа која одговара природном редоследу чворова износи

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Применом теореме о кофакторима Лапласове матрице, добијамо да се укупан број спрежних стабала задатог графа може израчунати као вредност било ког кофактора Лапласове матрице графа која одговара произвољном редоследу чворова. Израчунајмо, примера ради, кофактор матрице L који одговара трећем реду и другој колони:

$$(-1)^{2+3}\ \det L(2\mid 3) = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Множењем другог реда са три и додавањем на први ред, као и одузимањем другог реда од трећег, наведена детерминанта се преко Лапласовог развоја по првој колони своди на

$$\begin{aligned}(-1)^{2+3}\ \det L(2\mid 3) &= -\begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-(-1))\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Множењем трећег реда са -4 и додавањем на први, надаље се Лапласовим развојем по првој колони добија

$$\begin{aligned}(-1)^{2+3}\ \det L(2\mid 3) &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 & -12 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Множењем трећег реда са три и додавањем на први, као и његовим множењем са четири и додавањем на други, Лапласов развој по првој колони довршава неопходну рачуницу:

$$\begin{aligned}(-1)^{2+3}\ \det L(2\mid 3) &= \begin{vmatrix} 0 & -15 & 10 \\ 0 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -15 & 10 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -(-15\cdot 7 - 10\cdot(-5)) = -(-105+50) = 55.\end{aligned}$$

Дакле, задати граф мора да има укупно 55 спрежних стабала. □

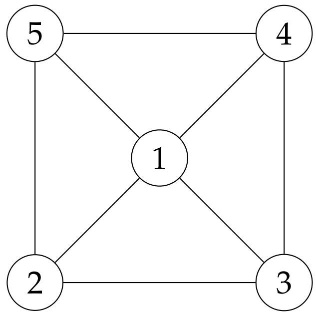
Задаци за самосталан рад

Задатак 4. Нека K_n представља комплетан граф који садржи n чворова, за неко $n \in \mathbb{N}$, и нека нотација $\tau(G)$ означава укупан број спрежних стабала графа G.

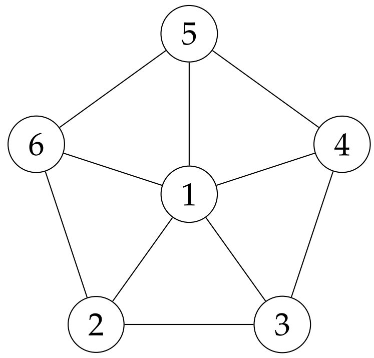
а) Доказати да важи $\tau(K_n) = n^{n-2}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

б) Уколико e чини произвољну грану графа K_n, доказати да важи $\tau(K_n - e) = (n-2)\, n^{n-3}$, за свако $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Задатак 5. За свако $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, нека *точак граф* реда n представља граф који се састоји од укупно $n + 1$ чворова такав да је један чвор суседан са свим осталима, при чему преосталих n чворова формира прост циклус дужине n. Примера ради, на наредним сликама су представљене визуелне репрезентације точак графова реда четири и пет.



(а) точак граф реда четири



(б) точак граф реда пет

Израчунати укупан број спрежних стабала точак графа реда n, за свако $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.