UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET
KATEDRA ZA MATEMATIKU

RAČUNSKE VEŽBE

TEORIJA GRAFOVA

NIŠ, 2020/21.

Čas 2

Zadatak 1. *Da li postoji kompletan graf koji sadrži tačno*

(a) 100*;*

(b) 36*;*

(c) 64*;*

(d) 0

grana? Ukoliko postoji, odrediti koliko čvorova on mora da ima.

Rešenje. Ukoliko graf sadrži $n \in \mathbb{N}$ čvorova i kompletan je, tada njegov ukupan broj grana iznosi $\frac{n(n-1)}{2}$. Dakle, ako važi $m = \frac{n(n-1)}{2}$, gde $m \in \mathbb{N}_0$ označava broj grana, nadalje sledi:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= m \\ n(n-1) &= 2m \\ n^2 - n + \frac{1}{4} &= 2m + \frac{1}{4} \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{8m+1}{4} \end{aligned}$$

Zbog $n - \frac{1}{2} > 0$ dalje dobijamo:

$$\begin{aligned} n - \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{8m+1}}{2} \\ n &= \frac{1+\sqrt{8m+1}}{2} \end{aligned}$$

Zaključujemo da ukoliko je dat kompletan graf sa $m \in \mathbb{N}_0$ grana, njegov broj čvorova može da se izračuna po prethodnoj formuli.

(a) Za $m = 100$ sledi $n = \dfrac{1+\sqrt{801}}{2}$, što nije ceo broj. Kompletan graf sa 100 grana ne postoji.

(b) Za $m = 36$ sledi $n = \dfrac{1+\sqrt{289}}{2} = \dfrac{1+17}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$. Kompletan graf sa 36 grana postoji i sastoji se od 9 čvorova.

(c) Za $m = 64$ sledi $n = \dfrac{1+\sqrt{513}}{2}$, što nije ceo broj. Kompletan graf sa 64 grane ne postoji.

(d) Za $m = 0$ sledi $n = \dfrac{1+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Kompletan graf sa 0 grana postoji i sastoji se od 1 čvora.

■

Zadatak 2. *Data su dva kompletna grafa, gde jedan od njih ima $a \in \mathbb{N}$ čvorova, a drugi $b \in \mathbb{N}$. Ukoliko graf sa a čvorova ima tačno 73 grane više od grafa sa b čvorova, koliko sve čvorova mogu ova dva grafa da imaju?*

Rešenje. Graf sa $a \in \mathbb{N}$ čvorova je kompletan, te mora da ima $\dfrac{a(a-1)}{2}$ grana. Zbog istog razloga, graf sa $b \in \mathbb{N}$ čvorova ima $\dfrac{b(b-1)}{2}$ grana. Iz postavke zadatka znamo da važi $\dfrac{a(a-1)}{2} - \dfrac{b(b-1)}{2} = 73$, odakle nadalje sledi

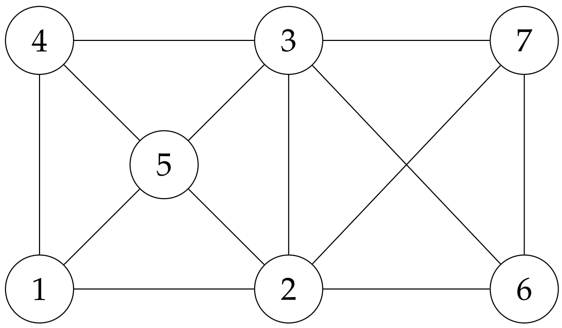
$$\begin{aligned}
\frac{a(a-1)}{2} - \frac{b(b-1)}{2} &= 73 \\
a(a-1) - b(b-1) &= 146 \\
a^2 - a - b^2 + b &= 146 \\
(a^2 - b^2) - (a-b) &= 146 \\
(a-b)(a+b) - (a-b) &= 146 \\
(a-b)(a+b-1) &= 146
\end{aligned}$$

Važi $a - b,\ a + b - 1 \in \mathbb{N}$, pri čemu je očigledno $a - b < a + b - 1$. Prirodan broj 146 može na 2 različita načina da se predstavi kao proizvod 2 prirodna broja: kao $146 = 1 \cdot 146$ i kao $146 = 2 \cdot 73$. Odavde slede dve mogućnosti za brojeve čvorova zadatih grafova:

$$
\begin{aligned}
& & a - b &= 1 \\
& & a + b - 1 &= 146 \\
&\Longrightarrow & 2a - 1 &= 147 \\
&\Longrightarrow & 2a &= 148 \\
&\Longrightarrow & a &= 74 \\
&\Longrightarrow & b &= 73
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
& & a - b &= 2 \\
& & a + b - 1 &= 73 \\
&\Longrightarrow & 2a - 1 &= 75 \\
&\Longrightarrow & 2a &= 76 \\
&\Longrightarrow & a &= 38 \\
&\Longrightarrow & b &= 36
\end{aligned}
$$

Dakle, grafovi imaju $a = 74$ i $b = 73$ čvora ili $a = 38$ i $b = 36$ čvorova. ■

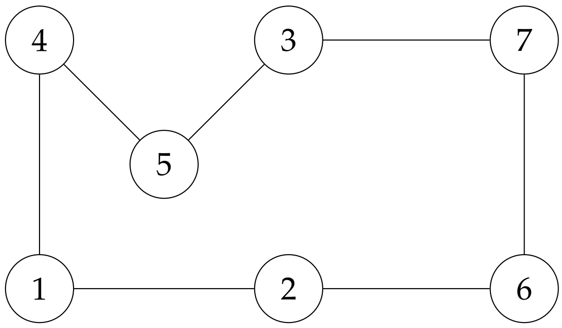
Zadatak 3. *Koliko je najmanje grana potrebno obrisati grafu sa sledeće slike tako da on postane regularan?*



Rešenje. U datom grafu čvorovi 1, 4, 6 i 7 imaju stepen 3. Dakle, graf teoretski ne može postati 4-regularan, 5-regularan ili 6-regularan koliko god da mu se grana obriše.

Kako znamo da je broj grana regularnog grafa jednak $\frac{nr}{2}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ broj čvorova datog grafa, a $r \in \mathbb{N}_0$ stepen svakog njegovog čvora, zaključujemo da graf sa neparnim brojem čvorova ne može imati neparni stepen svih čvorova, jer izraz nr mora biti deljiv sa 2, te mora biti $2 \mid n$ ili $2 \mid r$. Zbog toga, brisanjem grana početnog grafa sa 7 čvorova ne možemo dobiti nikako 3-regularan graf, niti 1-regularan graf.

Moguće je dobiti 0-regularan graf ili 2-regularan graf brisanjem odgovarajućih grana početnom grafu zadatom u zadatku. Graf čiji je svaki stepen čvora jednak 0 dobija se u trivijalnom slučaju ukoliko obrišemo sve grane, kojih ima 13. Međutim, 2-regularan graf se može dobiti ukoliko obrišemo, na primer, grane $\{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{2,3\}, \{2,7\}, \{3,6\}$. Na taj način bi se dobio graf kao na sledećoj slici:



Kako 2-regularni graf sa 7 čvorova ima $\frac{7 \cdot 2}{2} = 7$ grana, zaključujemo da je neophodno obrisati minimalno $13 - 7 = 6$ grana grafu zadatom u zadatku kako bi se dobio regularan graf. ∎

Zadatak 4 (2020, jun). *Neka je $n \in \mathbb{N}$ paran prirodan broj. Dokazati da za svaki nenegativan ceo broj*

$$r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

postoji r-regularan graf sa tačno n čvorova.

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti konstrukcijom tako što ćemo za proizvoljan paran prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ da damo primer konkretnog r-regularnog grafa, za svaki nenegativan ceo broj $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Na ovaj način očigledno pokazujemo da odgovarajući r-regularan graf sa tačno n čvorova postoji.

Nek je dat graf $G = (V, E)$ gde je $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, uz $k = \frac{n}{2}$. Povežimo čvorove na način takav da važi:

$$E = \{\{a_i, b_j\} \colon 1 \leq i, j \leq k \land 0 \leq (j - i) \bmod k < r\}$$

gde je $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$ neki zadat nenegativan ceo broj. Ovakav graf G zadovoljava svojstvo da je svaki čvor povezan sa tačno r drugih čvorova, tako da je r-regularan. Dakle, za proizvoljan zadat paran prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, postoji r-regularan graf sa tačno n čvorova, za $r \in \left\{0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2}\right\}$.

Ukoliko posmatramo bilo koji od prethodno konstruisanih grafova i njemu dodamo naredni skup grana

$$E_1 = \{\{a_i, a_j\} \colon 1 \le i < j \le k\} \cup \{\{b_i, b_j\} \colon 1 \le i < j \le k\}$$

tada dobijamo graf koji je ponovo regularan, ali se stepen svakog čvora uvećava za tačno $k - 1 = \frac{n}{2} - 1$. Dakle, na ovaj način konstruisanjem regularnih grafova čiji su stepeni čvorova elementi skupa $\left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$, dodavanjem grana iz skupa E_1 dobijamo regularne grafove čiji su stepeni čvorova elementi skupa $\left\{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \ldots, n - 1\right\}$. Odavde direktno sledi tvrđenje iz zadatka i dokaz je gotov. ■

Zadatak 5 (2020, oktobar 2). *Zadat je graf $G = (V, E)$ definisan skupovima $V = \{1, 2, 3\}$ i $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.*

- **(a)** *Koliko graf G ima čvorova, koliko grana i koliko komponenti povezanosti?*
- **(b)** *Za dati graf G, odrediti matricu susedstva, kao i matricu incidentnosti.*
- **(c)** *Koliko graf G ima različitih puteva dužine k, gde je $k \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan zadat nenegativan ceo broj?*
- **(d)** *Koliko graf G ima različitih zatvorenih puteva dužine k, gde je $k \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan zadat nenegativan ceo broj?*

Rešenje.

(a) Graf G ima 3 čvora, 3 grane i 1 komponentu povezanosti.

(b) Matrica susedstva datog grafa iznosi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica incidentnosti je jednaka:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Uzevši u obzir da je dati graf kompletan, put dužine $k \in \mathbb{N}_0$ možemo zamisliti kao niz od $k+1$ čvorova tako da su svaka dva susedna čvora u nizu različita. Ukupan broj ovakvih nizova se veoma jednostavno može izbrojiti – prvi čvor možemo da odaberemo na ukupno 3 načina (može se izabrati svaki čvor iz skupa V), dok svaki naredni možemo na 2 načina (može se odabrati bilo koji od preostala dva čvora koji nije jednak prethodnom). Dakle, ukupan broj različitih puteva dužine $k \in \mathbb{N}_0$ iznosi $3 \cdot 2^k$.

(d) Neka ukupan broj različitih zatvorenih puteva dužine $k \in \mathbb{N}_0$ iznosi a_k. Veoma je bitno zapažanje da svaki od ovih puteva možemo da zamislimo kao niz dužine $k+1$ čija su svaka susedna dva elementa različita, uz dodatno ograničenje da prvi i poslednji element moraju biti isti.

Pretpostavimo da je $k \geq 1$. Ukoliko nam je dat niz dužine $k+1$ koji odgovara zatvorenom putu dužine k, tada brisanjem njegovog poslednjeg elementa dobijamo niz dužine k koji odgovara otvorenom putu dužine $k-1$. Koristeći ovu činjenicu, nije teško zaključiti da postoji bijekcija između skupa svih zatvorenih puteva dužine k i skupa svih otvorenih puteva dužine $k-1$, gde je $k \geq 1$. Znači, njihov ukupan broj mora biti isti. Znamo da ukupan broj puteva dužine $k-1$ iznosi $3 \cdot 2^{k-1}$ na osnovu prethodno urađenog podzadatka, tako da na osnovu činjenice da ima a_{k-1} zatvorenih, znamo da ima $3 \cdot 2^{k-1} - a_{k-1}$ otvorenih. Odavde sledi rekurentna veza:

$$a_k = 3 \cdot 2^{k-1} - a_{k-1}$$

koja važi za svako $k \in \mathbb{N}$. Takođe znamo da važi $a_0 = 3$, pošto je svaki put dužine 0 obavezno zatvoren. Nadalje je neophodno izračunati vrednosti niza a na osnovu dobijente rekurentne veze i početne vrednosti $a_0 = 3$.

Posmatrajmo nehomogenu linearnu rekurentnu jednačinu:

$$a_k + a_{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}$$

Njeno očigledno partikularno rešenje jeste 2^k. Karakteristični polinom linearne rekurentne jednačine je jednak $P(\lambda) = \lambda + 1$ i njegova jedina nula iznosi -1. Odavde sledi oblik opšteg rešenja rekurentne jednačine:

$$a_k = 2^k + c(-1)^k$$

gde je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstantna. U našem konkretnom slučaju, početni uslov $a_0 = 3$ nam daje neophodnu vrednost konstante c:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 + c(-1)^0 \\ 3 &= 1 + c \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Dakle, broj različitih zatvorenih puteva dužine $k \in \mathbb{N}_0$ je jednak:

$$2^k + 2(-1)^k$$

■

Zadatak 6. *Koliko različitih prostih ciklusa dužine* 4 *ima kompletan graf sa* 6969 *čvorova?*

Rešenje. Broj prostih ciklusa dužine 4 se najlakše nalazi tako što se prvo izbroji ukupan broj zatvorenih puteva sa različitim čvorovima (osim prvog i poslednjeg) dužine 4. Naime, svaki prost ciklus dužine 4 može da se predstavi preko tačno $2 \cdot 4 = 8$ različitih ovakvih puteva. Oni se razlikuju po tome koji se čvor uzima kao početni i koji se smer obilaska koristi. Na primer, neka je dat prost ciklus $A - B - C - D - A$, gde A, B, C, D predstavljaju međusobno različite čvorove datog grafa. Tada postoji ukupno 8 zatvorenih puteva sa različitim čvorovima (osim prvog i poslednjeg) kojim se ovaj prost ciklus može odrediti:

$$\begin{array}{cc} A - B - C - D - A & A - D - C - B - A \\ B - C - D - A - B & D - C - B - A - D \\ C - D - A - B - C & C - B - A - D - C \\ D - A - B - C - D & B - A - D - C - B \end{array}$$

Pošto je zadat kompletan graf sa 6969 čvorova, ukupan broj zatvorenih puteva dužine 4 sa svim različitim čvorovima osim prvog i poslednjeg se lako može sračunati kao $6969 \cdot 6968 \cdot 6967 \cdot 6966$, jer se prvi čvor može odabrati na 6969 načina, a svaki sledeći na 1 manje način, pošto je svaki čvor sa svakim povezan. Dakle, ukupan broj prostih ciklusa dužine 4 jednak je:

$$\frac{6969 \cdot 6968 \cdot 6967 \cdot 6966}{8} = 3\binom{6969}{4}$$

■

Zadatak 7 (2020, septembar)**.** *Neka je dat proizvoljan graf $G = (V, E)$ takav da važi $|V| = 2n$, $|E| > n^2$, gde je $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da graf G mora da sadrži bar jedan ciklus dužine* 3*.*

Rešenje. Biće dokazano ekvivalentno tvrđenje – ukoliko graf sadrži $2n$ čvorova i nema ciklus dužine 3, tada njegov broj grana ne može biti preko n^2. Dokaz će biti izveden matematičkom indukcijom.

Za slučaj $k = 1$, tvrđenje je očigledno. Naime, ako graf ima $2k = 2$ čvora, tada on sigurno nema ciklus dužine 3, a može imati ili 0 grana ili samo 1 granu, što svakako ne prevazilazi vrednost od $k^2 = 1^2 = 1$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za slučaj $k = n$. Drugim rečima, znamo da svaki graf sa $2n$ čvorova koji nema ciklus dužine 3 može imati najviše n^2 grana. Dokažimo da tvrđenje onda mora da bude tačno i za slučaj $k = n + 1$.

Nek je dat proizvoljan graf $G = (V, E)$ sa $2n + 2$ čvorova. Ukoliko ovaj graf ne sadrži nijednu granu, onda on nema ciklus dužine 3, a kako mu je broj grana jednak 0, on svakako nema više od $(n + 1)^2$ grana, te je dokaz gotov. Ako graf ima bar jednu granu, uzmimo neku granu $\{a, b\}$, gde su a i b čvorovi grafa. Razdelimo skup čvorova V na disjunktne podskupove V_1 i V_2 tako da je $V_1 = \{a, b\}$ i $V_2 = V \setminus V_1$. Sve grane grafa G mogu biti ili između čvorova unutar skupa V_1 ili između čvorova unutar skupa V_2 ili između čvora iz skupa V_1 i čvora iz skupa V_2.

Po induktivnoj pretpostavci, znamo da između čvorova unutar skupa V_2 može postojati najviše n^2 grana, pošto njih ima tačno $2n$, a sigurno ne formiraju nijedan ciklus dužine 3. Svaki čvor iz skupa V_2 može imati najviše jednu granu sa čvorovima a i b, pošto bi u suprotnom on zajedno sa ova dva čvora formirao ciklus dužine 3, uzevši u obzir da između a i b postoji grana. Dakle, broj grana koje povezuju čvor iz skupa V_1 i čvor iz skupa V_2 ima ukupno maksimalno $2n$. Broj grana koje povezuju čvorove unutar skupa V_1 iznosi tačno 1 i ta jedina grana je upravo $\{a, b\}$.

Zaključujemo da graf G može imati najviše $n^2 + 2n + 1$ grana. Međutim, kako je $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, direktno dobijamo tvrđenje koje je trebalo da dokažemo. Dokaz indukcijom je gotov. ■

Zadatak 8. *Dat je graf* $G = (V, E)$ *koji ima ukupno* 69 *grana. Neka su data dva njegova čvora* $a, b \in V$, $a \neq b$ *takva da važi* $\deg(a) = 13$ *i* $\deg(b) = 4$. *Neka je* $G_1 = (V_1, E_1)$ *podgraf grafa* G *definisan na sledeći način:*

$$V_1 = V \setminus \{a, b\}$$
$$E_1 = E \cap \{\{x, y\} : x, y \in V_1 \land x \neq y\}$$

Koliko grana sadrži graf G_1 *ukoliko:*

(a) *u grafu* G *ne postoji grana* $\{a, b\}$*;*

(b) *u grafu* G *postoji grana* $\{a, b\}$*?*

Rešenje. Po definiciji grafa G_1, može se jednostavno zaključiti da će on sadržati svaku granu grafa G osim onih koje su incidentne sa bar jednim od čvorova iz skupa $\{a, b\}$. Pošto važi $\deg(a) = 13$ i $\deg(b) = 4$, znamo da postoji 13 grana koje su incidentne sa čvorom a i 4 grane koje su incidentne sa čvorom b.

(a) Ako između čvorova a i b ne postoji grana, onda je skup grana koje su incidentne sa čvorom a disjunktan sa skupom grana koje su incidentne sa čvorom b, tj. nijedna grana nije istovremeno incidentna sa oba čvora. Zbog toga će graf G_1 imati upravo $13 + 4 = 17$ grana manje od grafa G, odakle sledi da je njegov ukupan broj grana jednak $69 - 17 = 52$.

(b) Ukoliko između čvorova a i b postoji grana, onda će to biti jedna jedina grana koja je incidentna i sa čvorom a i sa čvorom b. Postoji još 12 grana koje su incidentne samo sa a i još 3 grane incidentne samo sa b. Ukupan broj grana koje su incidentne bar sa jednim čvorom iz skupa $\{a, b\}$ iznosi $1 + 12 + 3 = 16$ i zbog toga će graf G_1 imati tačno $69 - 16 = 53$ grane.

■