Lekcija 3

3 Metrika u grafovima. Povezanost. Spektri grafa

3.1 Metrika u grafovima. Povezanost

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Definicija 1. *Rastojanje izmedju dva čvora x i y, $x, y \in V$, u oznaci $d(x, y)$, je dužina najkraćeg puta koji ih povezuje. Ako ovaj put ne postoji (tj. graf G nije povezan) to se označva sa $d(x, y) = +\infty$.*

Definicija 2. *Dijametar grafa G, u oznaci $d(G)$, je medjusobno rastojanje dva njegova najudaljenija čvora,*

$$d(G) = \max_{x,y \in V} d(x, y)\,.$$

Pojam dijametra je interesantan ako je G povezan graf. U protivnom $d(G) = +\infty$.

Definicija 3. *Ekscentricitet čvora x, $x \in V$, povezanog grafa G, u oznaci $e(x)$, je njegovo maksimalno rastojanje u odnosu na preostale čvorove*

$$e(x) = \max_{y \in V} d(x, y)\,.$$

Definicija 4. *Radijus povezanog grafa G, u oznaci $r(G)$, definisan je sa*

$$r(G) = \min_{x \in V} e(x)\,.$$

Definicija 5. *Pod rastojanjem čvora x, povezanog grafa G, u oznaci $R(G)$, podrazumeva se zbir njegovih rastojanja u odnosu na preostale čvorove,*

$$R(X) = \sum_{y \in V} d(x, y)\,.$$

Definicija 6. *Centar povezanog grafa G, $C(G)$, je skup čvorova čiji su ekscentriciteti jednaki radijusu grafa,*

$$C(G) = \{x \mid x \in V,\, e(x) = r(G)\}\,.$$

Definicija 7. *Periferija povezanog grafa G, $P(G)$, je skup čvorova čiji su ekscentriciteti jednaki dijametru grafa,*

$$P(G) = \{x \mid x \in V,\, e(x) = d(G)\}\,.$$

Definicija 8. *Neka je $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, povezan graf. Pod matricom rastojanja podrazumeva se matrica $S = (s_{ij})$, reda $n \times n$, definisana sa*

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ d(x_i, x_j), & i \neq j \end{cases},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pitanje: Kakve osobine ima matrica S?

Za nalaženje matrice S može se iskoristiti sledeći iterativni postupak.

Postupak(MATRAS)

1. Na osnovu matrice susedstva $A^1 = A = (a_{ij}^{(1)})$ formira se matrica $S^{(1)} = (s_{ij}^{(1)})$, na osnovu jednakosti $s_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)}$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$. Proverava se da li postoji indeksni par i, j, $i \neq j$, tako da je $s_{ij}^{(1)} = 0$. Ako takav par ne postoji, ovo je kraj izračunavanja i važi

$$S = S^{(1)} = (s_{ij}^{(1)})\,.$$

   Ako takav par postoji, postupak se nastavlja.

2. Pretpostavimo da smo na osnovu matrica $A^1, A^2, \ldots, A^{k-1}$ formirali matrice $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k-1)}$. Na osnovu matrice A^k formiramo matricu $S^{(k)} = (s_{ij}^{(1)})$ na sledeći način:

$$s_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } i = j \\ s_{ij}^{(k-1)}, & \text{ako je } s_{ij}^{(k-1)} \neq 0 \\ k, & \text{ako je } s_{ij}^{(k-1)} = 0 \text{ i } a_{ij}^{(k)} \neq 0 \\ 0, & \text{ako je } s_{ij}^{(k-1)} = 0 \text{ i } a_{ij}^{(k)} = 0 \end{cases},$$

   za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$.

3. Proverava se da li postoje indeksi i i j, $i \neq j$, za koje važi jednakost $s_{ij}^{(k)} = 0$. Ako takav par ne postoji ovo je kraj izračunavanja i važi

$$S = S^{(k)}.$$

Ako takav par postoji, izračunava se matrica A^{k+1} i ponavlja se postupak 2.

Domaći zadatak: Na osnovu navedenog postupka formirati algoritam za nalaženje matrice S.

Flojdov algoritam za netežinske grafove

Za nalaženje matrice $S = (s_{ij})$ može se koristiti i sledeći algoritam:

Algoritam (Flojd)
for $k := 1$ **to** n **do**
for $i := 1$ **to** n **do**
for $j := 1$ **to** n **do**
$S_{ij}^{(k)} := \min\left\{s_{ij}^{(k-1)}, s_{ik}^{(k-1)} + s_{kj}^{(k-1)}\right\}$,

pri čemu je inicijalno $s_{ij}^{(0)} = a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$.

Kako je pomenuto, graf $G = (V, E)$ je povezan ako i samo ako za svaka dva njegova čvora postoji put koji ih povezuje. U protivnom je nepovezan i sastoji se iz povezanih celina koje se zovu komponente povezanosti, i izolovanih čvorova.

Definicija 9. *Čvor u grafu čijim se udaljavanjem iz datog grafa, zajedno sa incidentnim granama, povećava broj komponenti povezanosti naziva se artikulacioni čvor. Graf koji sadrži bar jedan artikulacioni čvor naziva se separabilan.*

Definicija 10. *Grana grafa čijim se udaljavanjem iz grafa, bez incidentnih čvorova, povećava broj komponenti povezanosti naziva se most. Ako je most incidentan sa čvorom stepena 1, naziva se viseći most.*

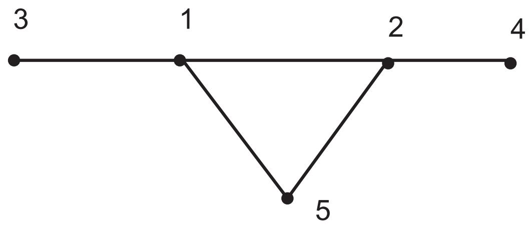
Definicija 11. *Maksimalno povezan podgraf, tj. podgraf grafa G, koji ne sadrži artikulacione čvorove naziva se blok grafa G.*

Definicija 12. *Najmanji broj čvorova koje treba udaljiti iz povezanog grafa tako da postane nepovezan naziva se povezanost po čvorovima i označava se sa $k(G)$.*

Definicija 13. *Najmanji broj grana koje treba udaljiti iz povezanog grafa tako da postane nepovezan, naziva se povezanost po granama i označava se sa* $m(G)$.

Zadatak 1. *Graf* $G = (V, E)$ *definisan je skupovima* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i* $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\}$. *Naći dijametar i radijus grafa* G, *rastojanja za svaki čvor, centar i periferiju grafa, matricu rastojanja.*

Rešenje. Moguća prezentacija grafa prikazana je na sledećoj slici



Rastojanja izmedju čvorova su:

$$\begin{aligned}
&d(1,2) = 1, \quad d(1,3) = 1, \quad d(1,4) = 2, \quad d(1,5) = 1\,,\\
&d(2,3) = 2, \quad d(2,4) = 1, \quad d(2,5) = 1\,,\\
&d(3,4) = 3, \quad d(3,5) = 2\,,\\
&d(4,5) = 2\,.
\end{aligned}$$

Tako je dijametar grafa G, $d(G)$,

$$d(G) = \max_{x,y \in V} d(x, y) = d(3, 4) = 3\,.$$

Ekscentriciteti za svaki čvor su

$$\begin{aligned}
&e(1) = \max_{x \in V} d(1, x) = 2\,, \quad e(2) = \max_{x \in V} d(2, x) = 2\,, \quad e(3) = \max_{x \in V} d(3, x) = 3\\
&e(4) = \max_{x \in V} d(4, x) = 2\,, \quad e(5) = \max_{x \in V} d(5, x) = 2\,.
\end{aligned}$$

Radijus grafa je

$$r(G) = \min_{x \in V} e(x) = 2\,.$$

Centar grafa je skup

$$C(G) = \{x \mid x \in V\,,\, e(x) = r(x)\} = \{1, 2, 5\}\,.$$

Periferija grafa je skup

$$P(G) = \{x \mid x \in V\,,\, e(x) = d(x)\} = \{3, 4\}\,.$$

Matricu rastojanja, vežbe radi, formirajmo pomoću algoritma MATRAS.

Kako je matrica incidentnosti A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{važi} \quad S^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

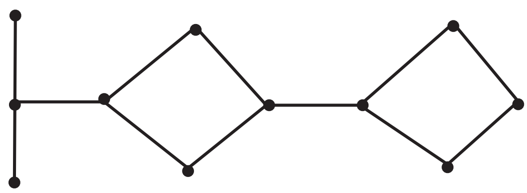
Kako je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad S^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

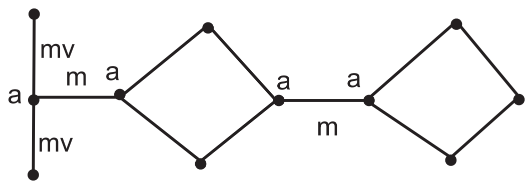
Kako je $s_{34} = s_{43} = 0$, mora se naći i A^3:

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad S^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2. *Na grafu prikazanom na slici uočiti: artikulacione čvorove (a), mostove (m) i viseće mostove (mv).*



Rešenje



3.2 Spektri grafa

Definicija 14. *Neka je* $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *graf sa* n *čvorova i* m *grana, čija je matrica susedstva* $A = (a_{ij})$, *reda* $n \times n$. *Polinom po* λ

$$f_\lambda(G) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\,, \tag{1}$$

je karakteristični polinom grafa G. *Sopstvene vrednosti matrice* A, *tj. nule polinoma* $f_\lambda(G)$,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

su (ordinarne) sopstvene vrednosti grafa G.

Kako je matrica A realna i simetrična (binarna), sve sopstvene vrednosti λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, su realne.

Teorema 1. *Važe jednakosti*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \qquad i \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m\,.$$

Proof. Neka je $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, k-ti stepen matrice A tada važi jednakost

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = \operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(k)}\,.$$

Za $k = 1$ važi

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(A) = 0\,.$$

Za $k = 2$ važi

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m\,.$$

Za $k = 3$

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \cdots + \lambda_n^3 = \operatorname{tr}(A^3) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(3)} = 6C_3(G)\,,$$

gde je $C_3(G)$ broj ciklusa dužine 3 u grafu G, tj. broj trouglova u grafu G. □

Teorema 2. *Za karakteristični polinom* (1) *važe jednakosti*

$$a_1 = 0 \quad i \quad a_2 = -m\,.$$

Proof. Neka je

$$f_\lambda(G) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)\,.$$

Tada na osnovu Vijetovih pravila važe jednakosti

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = 0\,,$$

i

$$a_2 = \sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) = \frac{1}{2}(0-2m) = -m\,.$$

□

Teorema 3. *Neka su* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = |V_2| = n$ *i* $|E_1| = |E_2| = m$, *dva izomorfna grafa. Tada oni imaju jednake karakteristične polinome.*

Proof. Neka su $f_\lambda(G_1) = \det(\lambda I - A_1)$ i $f_\lambda(G) = \det(\lambda I - A_2)$, redom karakteristični polinomi grafova G_1 i G_2, pri čemu su A_1 i A_2 odgovarajuće matrice susedstva. kako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, postoji permutaciona matrica P, reda $n \times n$, tako da je

$$A_2 = P \cdot A_1 \cdot P^T\,, \quad P \cdot P^T = I \quad \text{i} \quad \det P = \det P^T = 1\,.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f_\lambda(G_2) &= \det(\lambda I - A_2) = \det(\lambda I - PA_1P^T) = \det(\lambda PP^T - PA_1P^T) = \\ &= \det(P(\lambda I - A_1)P^T) = \det P \cdot \det(\lambda I - A_1)\det P^T = \det(\lambda I - A_1) = \\ &= f_\lambda(G_1)\,. \end{aligned}$$

□

Pitanje: Zašto je važan ordinarni spektar

$$\mathrm{Spec}A = (\lambda_1\,, \lambda_2\,, \ldots \lambda_n)\,?$$

1. Ordinarni spektar sadrži n elemenata, a matrica A n^2. To znači da je za njegovo pamćenje potrebno mnogo manje memorijskog prostora.

2. Poznavanjem ordinarnog spektra grafa možemo odrediti sve karakteristike grafa.

Pitanje: kako odrediti spektar?

1. Za nalaženje ordinarnog spektra treba naći nule polinoma (1), tj. korene jednačine (karakteristične jednačine)

$$f_\lambda(G) = 0\,. \tag{2}$$

   Za rešavanje ove jednačine postoji veliki broj sukcesivnih i simultanih numeričkih metoda u numeričkoj linearnoj algebri.

2. Postoje gotovi programski paketi za nalaženje nula jednačine (2).

Razmotrimo spektre nekih karakterističnih grafova.

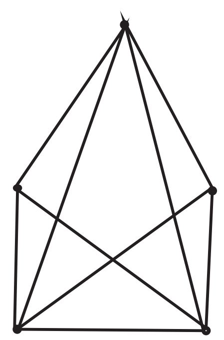
Kompletan graf $G = K_n$

Stepen svakog čvora v_i, u kompletnom grafu K_n ($|V| = n$) je $d_i = n - 1$. Tako on sadrži $m = \frac{n(n-1)}{2}$ grana. Njegov (ordinarni) spektar je

$$\mathrm{Spec}(K_n) = (n-1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-1})\,.$$

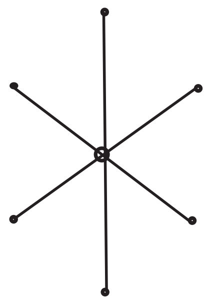
Tako, na primer, za $n = 5$

$$\mathrm{Spec}(K_5) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (4, -1, -1, -1, -1)\,.$$



K_5

Zvezda $G = K_{1,n-1}$



$\mathrm{K}_{1,6}$

Zvezda ima n čvorova i $m = n-1$ grana. Niz stepena čvorova je

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n) = (n-1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}) \, .$$

Njen spektar je

$$\mathrm{Spec}(K_{1,n-1}) = \left(\sqrt{n-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, -\sqrt{n-1} \right) \, .$$

Tako, na primer, za $n = 7$ je

$$\mathrm{Spec}(K_{1,6}) = \left(\sqrt{6}, 0, 0, 0, 0, 0, -\sqrt{6} \right)$$

Put $G = P_n$

Put od n čvorova i $m = n-1$ grana. Niz stepena čvorova je

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n) = (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n-2}, 1, 1) \, .$$

Ordinarne sopstvene vrednosti su

$$\lambda_{n-i+1} = 2 \cos \frac{i\pi}{n+1} \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Tako, na primer

$$\mathrm{Spec}(P_5) = \left(2\cos\frac{5\pi}{6} \, , 2\cos\frac{4\pi}{6} \, , 2\cos\frac{3\pi}{6} \, , 2\cos\frac{2\pi}{6} \, , 2\cos\frac{\pi}{6} \right) \, .$$

P_5

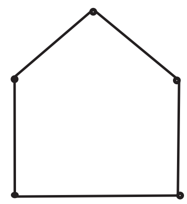
Ciklus $G = C_n$

Ciklus od n čvorova ima $m = n$ grana. Svako čvor v_i je stepena $d = 2$. Ordinarne sopstvene vrednosti su

$$\lambda_i = 2\cos\frac{2\pi i}{n}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Tako je

$$\mathrm{Spec}(C_5) = \left(2, 2\cos\frac{2\pi}{5}\,, 2\cos\frac{4\pi}{5}\,, 2\cos\frac{6\pi}{5}\,, 2\cos\frac{8\pi}{5}\,,\right)\,.$$



C_5

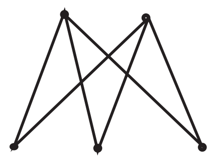
Kompletan bipartitni graf $G = K_{p,q}$**,** $p + q = n$

Kompletan bipartitni graf sa $n = p+q$ čvorova ima $m = pq$ grana. Ordinarni spektar je

$$\mathrm{Spec}(K_{p,q}) = \left(\sqrt{pq}\,, \underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{n-2} -\sqrt{pq}\right)\,.$$

Tako, na primer,

$$\mathrm{Spec}(K_{2,3}) = \left(\sqrt{6}, 0, 0, 0, -\sqrt{6}\right)\,.$$

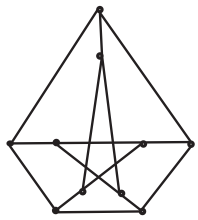


$K_{2,3}$

Petersonov graf Pet_{10}

Ima $n = 10$ čvorova, $m = 15$ grana. On je regularan, stepena regularnosti $d = 3$. Ordinarni spektar je

$$\mathrm{Spec}(Pet_{10}) = (3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2)\,.$$



Pet$_{10}$

Njaveća ordinarna sopstvena vrednost $\lambda_1 = \rho(G)$ zove se ordinarni spektralni radijus grafa G.

Suma apsolutnih vrednosti ordinarnih sopstvenih vrednosti naziva se *energija grafa*

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, .$$

3.2.1 Laplasov spektar grafa G

Neka je $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ graf sa n čvorova i m grana, čija je matrica susedstva $A = (a_{ij})$, reda $n \times n$ i $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dijagonalna matrica stepena čvorova.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots, 0 & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix}$$

Matrica $L = D - A$ je Laplasova matrica grafa G. Sopstvene vrednosti matrice $L = (l_{ij})_{n \times n}$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0 \, ,$$

su Laplasove sopstvene vrednosti grafa G.

Teorema 4. *Važe jednakosti*

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \cdot + \mu_{n-1} &= 2mm \, , \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_{n-1}^2 &= \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2m \, , \\ \mu_1^3 + \mu_2^3 + \cdots + \mu_{n-1}^3 &= \sum_{i=1}^{n} d_i^3 + 3 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 6C_3(G) \, . \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mu_1+\mu_2+\cdot+\mu_{n-1} &= \operatorname{tr}(L)=\operatorname{tr}(D-A)=\operatorname{tr}D-\operatorname{tr}A=\\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i - 0 = 2m\,.\\
\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_{n-1}^2 &= \operatorname{tr}(D-A)^2=\operatorname{tr}(D^2-2DA+A^2)=\\
&= \operatorname{tr}(D^2)-2\operatorname{tr}(DA)+\operatorname{tr}(A^2)=\\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 0 + \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2m\\
\mu_1^3+\mu_2^3+\cdots+\mu_{n-1}^3=\operatorname{tr}(L^3) &= \operatorname{tr}(D-A)^3=\operatorname{tr}(D^3-3D^2A+3DA^2-A^3)=\\
&= \operatorname{tr}(D^3)-3\operatorname{tr}(D^2A)+3\operatorname{tr}(DA^2)-\operatorname{tr}(A^3)=\\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i^3 - 0 + 3\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 6C_3(G)=\\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 6C_3(G)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Sa

$$M_1(G)=\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \quad \text{i} \quad F(G)=\sum_{i=1}^{n} d_i^3\,,$$

označavaju se topološki indeksi bazirani na stepenima čvorova poznati pod nazivom prvi Zagreb indeks i F-index (forgotten topological index).

Laplasova sopstvena vrednost μ_1 naziva se Laplasov spektralni radijus grafa G. Sopstvena vrednost μ_{n-1} naziva se indeks povezanosti (algebarske povezanosti grafa). Ako je $\mu_{n-1}>0$ graf je povezan. Ako je $\mu_{n-2}>\mu_{n-1}=0$ tada je graf nepovezan, tj. ima dve komponente povezanosti. Važi i obrnuto. Važi i opštiji rezultat: Graf G ima p komponenti povezanosti ako i samo ako je

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-p} > \mu_{n-p+1} = \cdots = \mu_n = 0\,.$$

Invarijanta grafa ili topološki index grafa, je veli;ina koja zavisi od parametara grafa, a koja je nepromenljiva u odnosu na izomorfizam.

Najčešće korišćene invarijante grafa koje su bazirane na spektrima grafa su:

- Kirhofov (Kirchhoff) indeks, $Kf(G)$, definisan sa

$$Kf(G)=n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} \quad (\text{ za povezane grafove})$$

- Laplasova energija grafa, $LE(G)$, definisana sa

$$LE(G) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right| \, ;$$

- Laplacian–energy–like (Kao Laplasova energija), $LEL(G)$, definisana sa

$$LEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} \, .$$

Laplasovi spektri za neke klase grafova

1. $G = K_n$ (Kompletan graf)

$$\text{LSpec}(K_n) = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{n-1}, 0) = (n, n, \dots, n, 0)$$

2. $G = K_{1,n-1}$ (Zvezda)

$$\text{LSpec}(K_{1,n-1}) = (n, 1, 1, \dots, 1, 0)$$

3. $G = P_n$ (Put)

$$\mu_{n-i} = 2 - 2\cos\frac{\pi i}{n} \, , \quad i = n-1, \dots, 0 \, .$$

4. $G = C_n$ (Ciklus)

$$\mu_{n-i} = 2 - 2\cos\frac{2\pi i}{n} \, , \quad i = n-1, \dots, 0 \, .$$

5. $G = K_{p,q}$, $p + q = n$ (Kompletan bipartitni graf)

$$\text{LSpec}(K_{p,q}) = (p+q, \underbrace{p, \dots, p,}_{q-1} \underbrace{q, \dots, q,}_{p-1} 0) \, .$$

6. $G = Pet_{10}$

$$\text{LSpec}(Pet_{10})(5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 0) \, .$$