Aproksimacija funkcija

I Diskretna srednje–kvadratna aproksimacija

Aproksimaciona funkcija oblika

$$Q^*(x) = a_0^* Q_0(x) + a_1^* Q_1(x) + \cdots + a_n^* Q_n(x)$$

takva da je $\quad \|\delta_n^*\| = \|f - Q^*\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \big(f(x_j) - Q^*(x_j)\big)^2}$ minimalno za sve $Q \in \mathcal{P}_n$ zove se *najbolja diskretna srednje–kvadratna aproksimacija* funkcije $f(x)$ u skupu polinoma stepena ne većeg od n.

Metod najmanjih kvadrata (linearna regresija) - postupak određivanja najbolje diskretne srednje–kvadratne aproksimacije u skupu polinoma stepena ne većeg od n:

- Za zadati skup podataka $\quad f(x_j) = f_j,\ j = 0, 1, \ldots, m \quad (m > n)$ formirati preodređen pravougaoni sistem jednačina

$$a_0 + a_1 x_j + \cdots + a_n x_j^n = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

- Odrediti parametre u aproksimacionoj funkciji rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} X\mathbf{a} &= \mathbf{f}, \qquad / \ \cdot X^T \\ X^T X\mathbf{a} &= X^T\mathbf{f}, \qquad / \ \cdot (X^T X)^{-1} \\ \mathbf{a}^* &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{f}. \end{aligned}$$

- Odrediti veličinu najbolje aproksimacije, tj. ukupnu grešku

$$\|\delta_n^*\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \left(f(x_j) - Q^*(x_j)\right)^2}$$

II Primena na nelinearne probleme

1. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x}$$

$$\ln f(x) \quad \leftrightarrow \quad \ln \Phi(x) = \ln(a_0 e^{a_1 x}) = \ln a_0 + \ln e^{a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \ln\left(\Phi(x)\right) = \ln a_0 + a_1 x = b_0 + b_1 x,$$
$$b_0 = \ln a_0, \quad b_1 = a_1.$$

Linearna regresija:

$$g(x) = \ln f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad \Psi(x) = b_0 + b_1 x;$$

Rešenje polaznog problema:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x}, \qquad a_0 = e^{b_0}, \quad a_1 = b_1.$$

2. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 x^{a_1}$$

$$\ln f(x) \quad \leftrightarrow \quad \ln \Phi(x) = \ln(a_0 x^{a_1}) = \ln a_0 + \ln x^{a_1}$$

$$\Psi(x) = \ln\left(\Phi(x)\right) = \ln\left(a_0 x^{a_1}\right) = \ln a_0 + \ln x^{a_1} = \ln a_0 + a_1 \ln x$$
$$= b_0 + b_1 X, \qquad b_0 = \ln a_0, \quad b_1 = a_1, \quad X = \ln x.$$

Linearna regresija:

$$g(X) = \ln\big(f(\ln x)\big) \quad \leftrightarrow \quad \Psi(X) = b_0 + b_1 X;$$

Rešenje polaznog problema:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 x^{a_1}, \; a_0 = e^{b_0}, \; a_1 = b_1.$$

3. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} = a_0 + a_1 x,$$

Linearna regresija:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \leftrightarrow \quad \Psi(x) = b_0 + b_1 x;$$

Rešenje polaznog problema:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}, \qquad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1.$$

4. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{x} = a_1 + a_0 \frac{1}{x} = b_0 + b_1 X,$$
$$b_0 = a_1, \quad b_1 = a_0, \quad X = \frac{1}{x}$$

Linearna regresija:

$$g(X) = \frac{1}{f(1/x)} \quad \leftrightarrow \quad \Psi(X) = b_0 + b_1 X;$$

Rešenje polaznog problema:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}, \qquad a_0 = b_1, \quad a_1 = b_0.$$

III Čebiševljeva mini–max aproksimacija

Aproksimaciona funkcija oblika

$$Q^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n$$

takva da je $\|\delta_n^*\|_\infty = \|f - Q^*\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x_j) - Q^*(x_j)|$ minimalno za sve $Q \in \mathcal{P}_n$ zove se *najbolja uniformna (mini–max) aproksimacija* funkcije $f(x)$ u skupu polinoma stepena ne većeg od n.

$$E_n(f) = \min_{Q \in \mathcal{P}_n} \max_{a \le x \le b} |f(x_j) - Q(x_j)| \quad - \quad \text{veličina najbolje aproksimacije}$$

Teorema o Čebiševljevoj alternansi:

Teorema 0.0.1. *Polinom $Q_n^* \in \mathcal{P}_n$ je najbolja mini–max aproksimacija za funkciju $f \in C[a,b]$ ako i samo ako na $[a,b]$ postoje $n+2$ tačke $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$, takve da je*

$$\delta_n^*(x_k) = -\delta_n^*(x_{k+1}) = \pm \|\delta_n^*\|_\infty = \pm E_n(f),$$

pri čemu je $\delta_n^*(x) = f(x) - Q_n^*(x)$.

$$x_0,\ x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a,b] \quad - \quad \text{tačke Čebiševljeve alternanse}$$

ZADACI

Zadatak 1. Metodom najmanjih kvadrata (diskretnom srednje–kvadratnom aproksimacijom) aproksimirati polimomom stepena ne većeg od 2 na segmentu $[-2, 3]$ funkciju $f(x)$ koja je zadata sledećim skupom podataka:

x_k	-2	-1	1	2	3
$f(x_k)$	0	1	5	12	30

Odrediti totalnu grešku (veličinu najbolje aproksimacije).

Rešenje:

$$P(x) = a + bx + cx^2$$

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k=0,1,2,3,4$$

$$\begin{pmatrix} a + b\,x_0 + c\,x_0^2 \\ a + b\,x_1 + c\,x_1^2 \\ a + b\,x_2 + c\,x_2^2 \\ a + b\,x_3 + c\,x_3^2 \\ a + b\,x_4 + c\,x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 5. \\ 12. \\ 30. \end{pmatrix}$$

$$X\ a = f$$

$$X^T X\ a = X^T f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 5. \\ 12. \\ 30. \end{pmatrix}$$

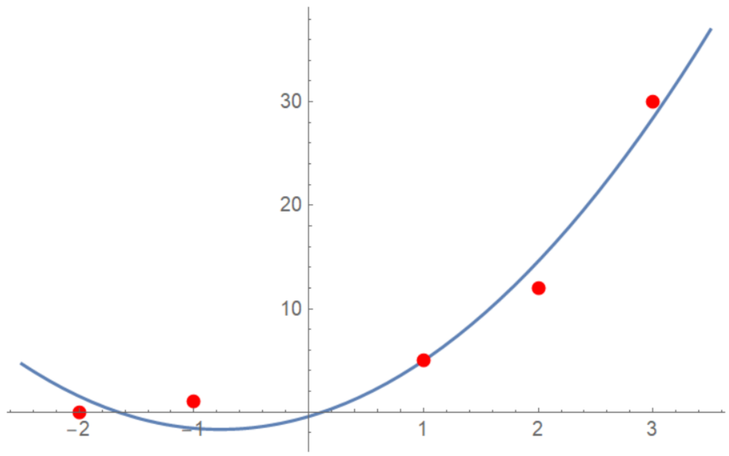
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 19 \\ 3 & 19 & 27 \\ 19 & 27 & 115 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48. \\ 118. \\ 324. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{22} & \frac{3}{44} & -\frac{5}{44} \\ \frac{3}{44} & \frac{107}{1232} & -\frac{39}{1232} \\ -\frac{5}{44} & -\frac{39}{1232} & \frac{43}{1232} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48. \\ 118. \\ 324. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.409091 \\ 3.26461 \\ 2.11851 \end{pmatrix}$$

$$P_2(x) = -0.409091 + 3.26461\,x + 2.11851\,x^2$$

Greška: $[\![\delta_2]\!]^2 = \sum_{k=0}^{4} (f(x_k) - P_2(x_k))^2 = 18.0162$



Greška može da se smanji drugačijim izborom aproksimacione funkcije.

===

$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,1,2,3,4$

$$\begin{pmatrix} a + b\,x_0 + c\,x_0^2 + d\,x_0^3 \\ a + b\,x_1 + c\,x_1^2 + d\,x_1^3 \\ a + b\,x_2 + c\,x_2^2 + d\,x_2^3 \\ a + b\,x_3 + c\,x_3^2 + d\,x_3^3 \\ a + b\,x_4 + c\,x_4^2 + d\,x_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 5. \\ 12. \\ 30. \end{pmatrix}$$

$$X\,a = f$$

$$X^T X\,a = X^T f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 9 \\ -8 & -1 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 9 \\ -8 & -1 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 5. \\ 12. \\ 30. \end{pmatrix}$$

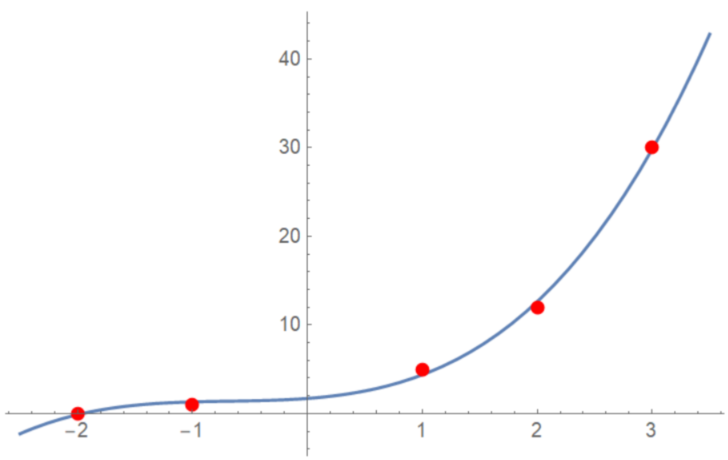
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 19 & 27 \\ 3 & 19 & 27 & 115 \\ 19 & 27 & 115 & 243 \\ 27 & 115 & 243 & 859 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48. \\ 118. \\ 324. \\ 910. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{34} & -\frac{11}{51} & -\frac{4}{17} & \frac{7}{102} \\ -\frac{11}{51} & \frac{3379}{8568} & \frac{143}{1428} & -\frac{91}{1224} \\ -\frac{4}{17} & \frac{143}{1428} & \frac{87}{952} & -\frac{13}{408} \\ \frac{7}{102} & -\frac{91}{1224} & -\frac{13}{408} & \frac{11}{612} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48. \\ 118. \\ 324. \\ 910. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.70588 \\ 0.973389 \\ 1.13655 \\ 0.553922 \end{pmatrix}$$

$$P_3(x) = 1.70588 + 0.973389\,x + 1.13655\,x^2 + 0.553922\,x^3$$

Greška: $[\![\delta_3]\!]^2 = \sum_{k=0}^{4} (f(x_k) - P_3(x_k))^2 = 0.945378$



Zadatak 2. Metodom najmanjih kvadrata (diskretnom srednje–kvadratnom aproksimacijom) aproksimirati polimomom stepena ne većeg od 2 na segmentu $[-2,3]$ funkciju $f(x)$ koja je zadata sledećim skupom podataka:

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_k)$	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0	8.8	10.1	12.5	13.0	15.6

Odrediti totalnu grešku (veličinu najbolje aproksimacije).

Rešenje:

$P(x) = a + bx$

$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, ..., 10$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 3.5 \\ 4.2 \\ 5. \\ 7. \\ 8.8 \\ 10.1 \\ 12.5 \\ 13. \\ 15.6 \end{pmatrix}$$

$X\ a = f$

$X^T X\ a = X^T f$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.3 \\ 3.5 \\ 4.2 \\ 5. \\ 7. \\ 8.8 \\ 10.1 \\ 12.5 \\ 13. \\ 15.6 \end{pmatrix}$$

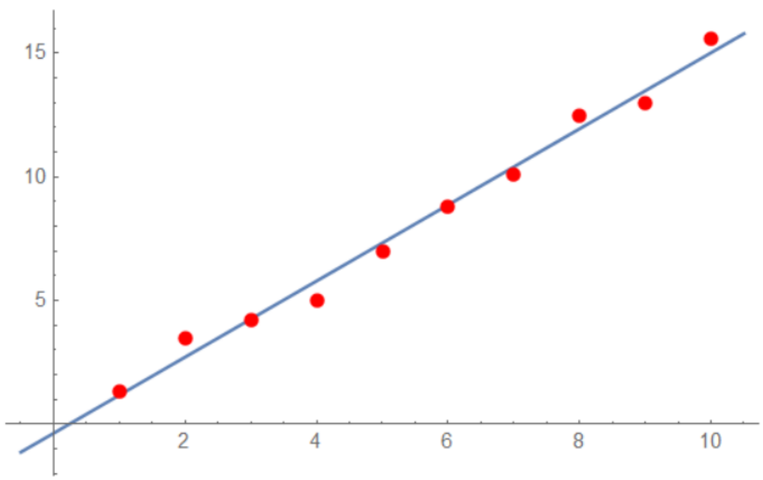
$$\begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81. \\ 572.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{165} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 81. \\ 572.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.36 \\ 1.53818 \end{pmatrix}$$

$$P_1(x) = -0.36 + 1.53818\,x$$

Greška: $[\![\delta_1]\!]^2 = \sum_{k=0}^{4} (f(x_k) - P_1(x_k))^2 = 2.34473$



Zadatak 3. Metodom najmanjih kvadrata (diskretnom srednje–kvadratnom aproksimacijom) aproksimirati funkcijom oblika

$$\Phi(x) = a\cos\pi x + b\sin\pi x$$

funkciju $f(x)$ koja je zadata sledećim skupom podataka:

x_k	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x_k)$	-0.5	-0.4	-0.1	1.3	1.2

Rešenje:

$\Phi(x) = a\cos\pi x + b\sin\pi x$

Posmatramo sistem jednačina

$\Phi(x_k) = a\cos\pi x_k + b\sin\pi x_k = f(x_k)$, k=1,2,3,4,5,

tj.

a Cos[π x[1]] + b Sin[π x[1]]=f[1]

a Cos[π x[2]] + b Sin[π x[2]]=f[2]

a Cos[π x[3]] + b Sin[π x[3]]=f[3]

a Cos[π x[4]] + b Sin[π x[4]]=f[4]

a Cos[π x[5]] + b Sin[π x[5]]=f[5]

ili, u matričnom obliku,

M a = f, gde je:

$$M=\begin{pmatrix} \text{Cos}[\pi x[1]] & \text{Sin}[\pi x[1]] \\ \text{Cos}[\pi x[2]] & \text{Sin}[\pi x[2]] \\ \text{Cos}[\pi x[3]] & \text{Sin}[\pi x[3]] \\ \text{Cos}[\pi x[4]] & \text{Sin}[\pi x[4]] \\ \text{Cos}[\pi x[5]] & \text{Sin}[\pi x[5]] \end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f[1] \\ f[2] \\ f[3] \\ f[4] \\ f[5] \end{pmatrix}.$$

Izračunavanje:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.4 \\ -0.1 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

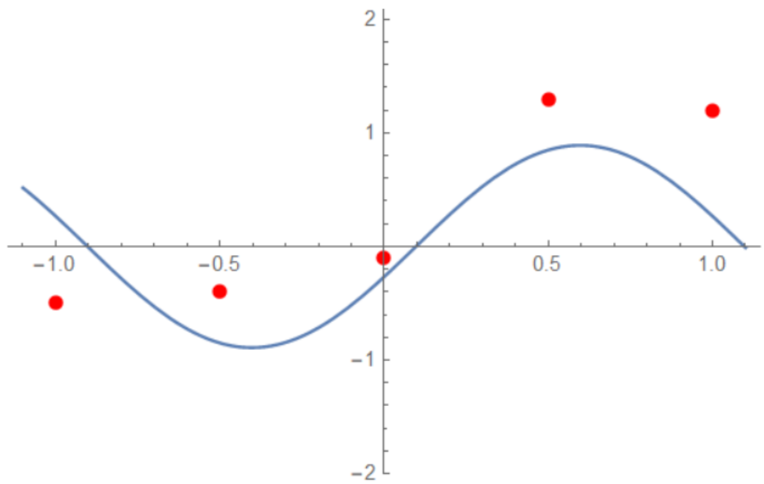
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.4 \\ -0.1 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.266667 \\ 0.85 \end{pmatrix}$$

$\Phi(x) = -0.266667\,\mathrm{Cos}[\pi x] + 0.85\,\mathrm{Sin}[\pi x]$



Zadatak 4. Metodom najmanjih kvadrata (diskretnom srednje–kvadratnom aproksimacijom) aproksimirati funkcijom oblika

$$\Phi(x) = A\ e^{Bx}$$

funkciju $f(x)$ koja je zadata sledećim skupom podataka:

x_k	1.0	1.5	2.0	2.2
$f(x_k)$	$e^{2.2}$	$e^{2.8}$	$e^3.0$	$e^{3.2}$

Rešenje:

$\phi(x) = Ae^{Bx}$

$g(x) = \ln f(x)$

$\psi(x) = \ln \phi(x) = \ln A + Bx = a + bx, \quad a = \ln A, \ b = B$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1.\\ 1 & 1.5\\ 1 & 2.\\ 1 & 2.2\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}2.2\\ 2.8\\ 3.\\ 3.2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1. & 1.5 & 2. & 2.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1.\\ 1 & 1.5\\ 1 & 2.\\ 1 & 2.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1. & 1.5 & 2. & 2.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.2\\ 2.8\\ 3.\\ 3.2\end{pmatrix}$$

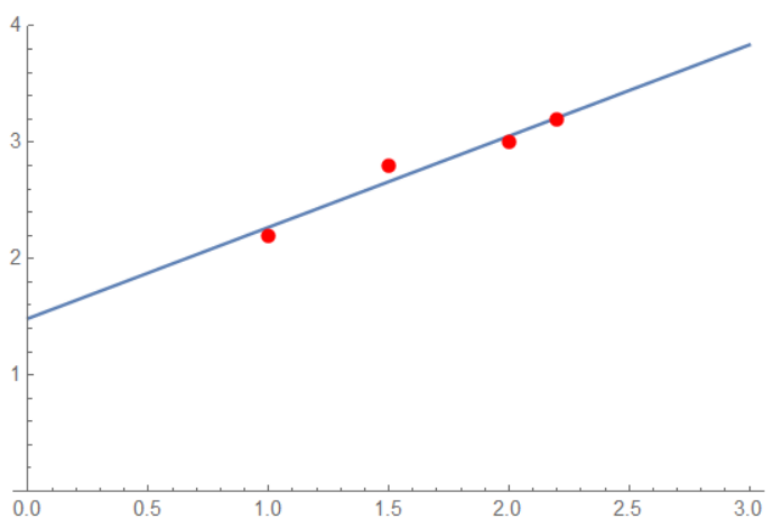
$$\begin{pmatrix}4. & 6.7\\ 6.7 & 12.09\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11.2\\ 19.44\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.48415 & -1.93084\\ -1.93084 & 1.15274\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11.2\\ 19.44\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.48703\\ 0.783862\end{pmatrix}$$

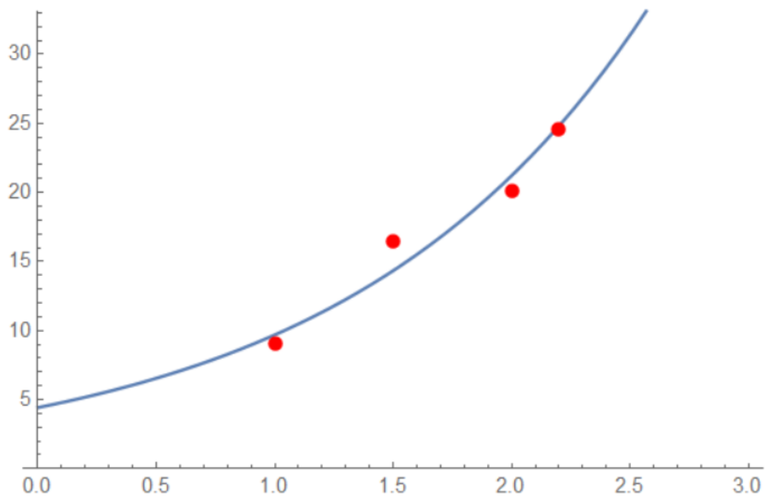
$$P_1(x)=1.48703+0.783862\,x$$

Greška: $[\![\delta_1]\!]^2=\sum_{k=0}^{4}(g(x_k)-P_1(x_k))^2 = 0.0269741$



$\phi(x) = Ae^{Bx}$, $A = e^a$, $B = b$

$\phi(x) = 4.42394\, e^{0.783862\, x}$



Zadatak 5. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirati funkcijom oblika

$$\Phi(x) = \frac{x}{A + Bx}$$

funkciju $f(x)$ koja je zadata sledećim skupom podataka:

x_k	1	2	3	4
$f(x_k)$	1.6	2.3	2.4	2.8

Rešenje:

$$\phi(x) = \frac{x}{A + Bx}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)} = \frac{A + Bx}{x} = A\,\frac{1}{x} + B = a + b\,t$$

$$t = \frac{1}{x}, \quad a = B, \quad b = A$$

Tabela polaznih vrednosti: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. & 2. & 3. & 4. \\ 1.6 & 2.3 & 2.4 & 2.8 \end{pmatrix}$

Tabela transformisanih vrednosti: $\begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. & 0.5 & 0.333333 & 0.25 \\ 0.625 & 0.434783 & 0.416667 & 0.357143 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1. \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 0.333333 \\ 1 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.434783 \\ 0.416667 \\ 0.357143 \end{pmatrix}$$

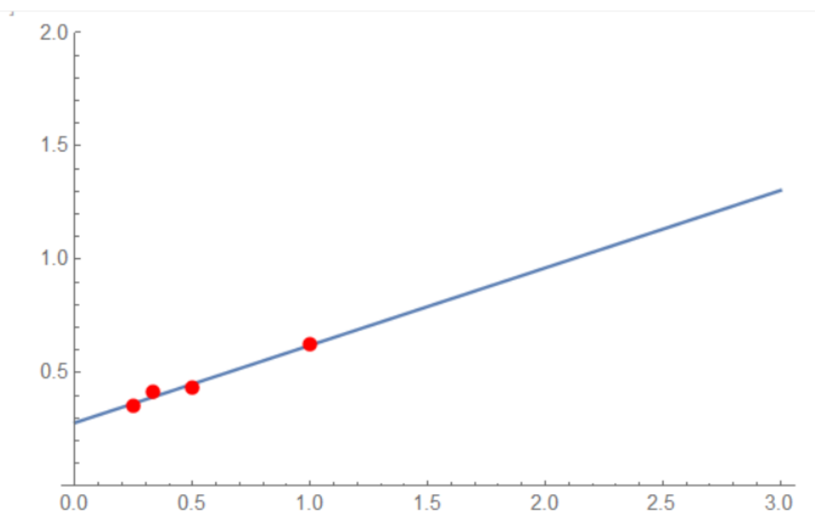
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1. & 0.5 & 0.333333 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1. \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 0.333333 \\ 1 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1. & 0.5 & 0.333333 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.434783 \\ 0.416667 \\ 0.357143 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4. & 2.08333 \\ 2.08333 & 1.42361 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.83359 \\ 1.07057 \end{pmatrix}$$

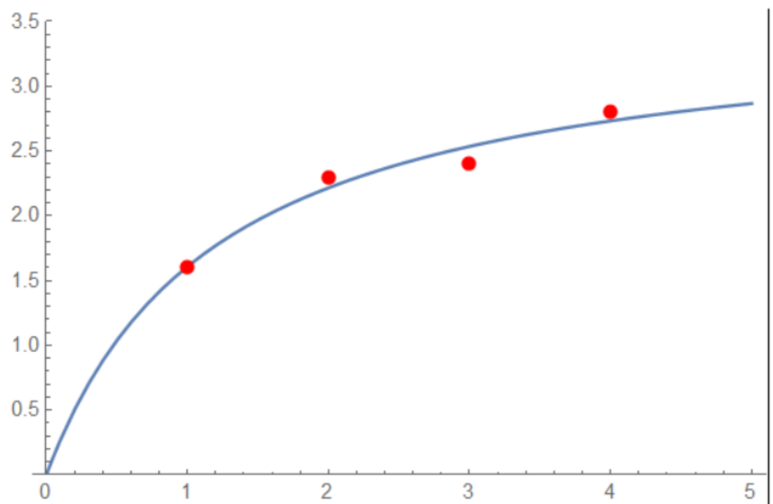
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.05128 & -1.53846 \\ -1.53846 & 2.95385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.83359 \\ 1.07057 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.280598 \\ 0.341376 \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) = a + b\,t = 0.280598 + 0.341376\,t$$



$$\phi(x) = \frac{1}{\psi(x)} = \frac{1}{\psi(1/t)} = \frac{1}{0.280598 + \frac{0.341376}{x}} = \frac{x}{0.341376 + 0.280598\,x}$$



Zadatak 6. Naći najbolju mini–max aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ na segmentu $[0, 1]$ u skupu polinoma stepena ne većeg od 1 i odrediti veličinu najbolje aproksimacije.

Rešenje: Prema Teoremi 0.0.1, polinom $P_1^*(x) = a + bx$ je najbolja mini–max aproksimacija funkcije $f(x)$ na segmentu $[0, 1]$ ako i samo ako postoje 3 tačke $x_0, x_1, x_2 \in [0, 1]$ tako da je

$$\delta_1^*(x_0) = -\delta_1^*(x_1) = \delta_1^*(x_2) = \pm\|\delta_1\|_\infty = \pm E_1(f),$$

gde je

$$\begin{aligned} \delta_1^*(x) &= f(x) - P_1^*(x) = \sqrt[3]{x} - a - bx, \\ \|\delta_1^*\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1} |\delta_1^*(x)|. \end{aligned}$$

Neka su $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_1 = t$, pri čemu $t \in (0, 1)$ treba odrediti tako da u njoj δ_1^* dostiže maksimum.

$$\delta_1^*(x_0) = -\delta_1^*(x_1) = \delta_1^*(x_2)$$

$$\delta_1^*(0) = -\delta_1^*(t) = \delta_1^*(1)$$

$$\sqrt[3]{0} - a - b \cdot 0 = -\sqrt[3]{t} + a + bt = \sqrt[3]{1} - a - b \cdot 1$$

$$-a = -\sqrt[3]{t} + a + bt = 1 - a - b$$

$$-a = 1 - a - b \qquad \Rightarrow \qquad b = 1 \qquad \Rightarrow \qquad -\sqrt[3]{t} + a + bt = -\sqrt[3]{t} + a + t$$

Tačka $x_1 = t$ treba da bude tačka u kojoj δ_1^* dostiže maksimum.

$$(\delta_1^*(t))' = (\sqrt[3]{t} - a - t)' = \frac{1}{3}t^{-2/3} - 1,$$
$$(\delta_1^*(t))' = 0 \quad \text{za} \quad t^{-2/3} = 3 \quad \text{tj.} \quad t = 3^{-3/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Sada je

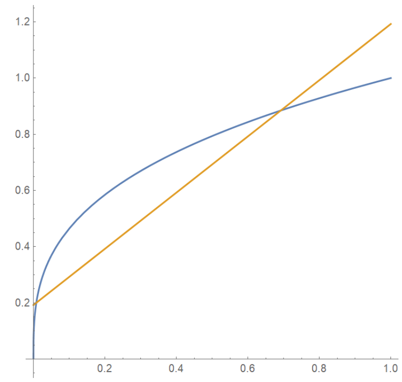
$$-a = -\sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} + a + \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(3^{-3/2}\right)^{1/3} - 3^{-3/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3^{-1/2} - 3^{-3/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ &\approx 0.19245, \end{aligned}$$

$$P_1^*(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}} + x = 0.19245 + x.$$

Veličina mini–max aproksimacije:

$$\|\delta_1^*\|_\infty = |\delta_1^*(0)| = |\delta_1^*(1/3\sqrt{3})| = |\delta_1^*(1)| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.19245.$$



Zadatak 7. Naći najbolju mini–max aproksimaciju funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ na segmentu $[-1, 1]$ u skupu polinoma stepena ne većeg od 2 i odrediti veličinu najbolje aproksimacije.

Rešenje:

Za određivanje koeficijenata polinoma najbolje mini-max aproksimacije $P_2^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, na osnovu teoreme o Čebiševljevoj alternansi potrebno je naći $n+2 = 4$ ($n = \mathrm{dg}\, P_2^*$) tačke x_0, x_1, x_2, x_3 takve da je

$$(1) \qquad \delta_2^*(x_0) = -\delta_2^*(x_1) = \delta_2^*(x_2) = -\delta_2^*(x_3) = \pm\Delta\,,$$

gde su $\quad \delta_2^*(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - P_2^*(x), \quad \Delta = \|\delta_2^*\|_\infty = \max\limits_{|x|\le 1} |\delta_2^*(x)|\,.$

Zbog simetrije problema može se uzeti $a_1 = 0$, a za tačke x_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, na primer, $x_0 = -t,\ x_1 = 0,\ x_2 = t,\ x_3 = 1$, gde je t $(0 < t < 1)$ tačka u kojoj δ_2^* dostiže ekstremnu vrednost. Dakle, t je pozitivan koren jednačine

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\,\delta_2^*(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} - 2a_2 t = 0\,.$$

Kako je, na osnovu (1), $\quad -(1-a_0) = \dfrac{1}{1+t^2} - a_0 - a_2 t^2 = -\left(\dfrac{1}{2} - a_0 - a_2\right)$,

lako nalazimo $a_2 = -\dfrac{1}{2}$, a dalje iz (2) sleduje $t^2 = \sqrt{2} - 1$ pa je $a_0 = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}$.
Prema tome

$$P_2^*(x) = \frac{1+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\,x^2\,.$$

Veličinu maksimalnog odstupanja (koje je minimalno u skupu algebarskih polinoma ne višeg stepena od drugog) možemo odrediti, na primer, na sledeći način

$$\|\delta_2^*\|_\infty = \max_{|x|\le 1} |\delta_2^*(x)| = |\delta_2^*(x)|_{x=0} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\,.$$