Numerički metodi u linearnoj algebri

I Iterativni metodi za inverziju matrica

Šulcov metod:

Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ regularna matrica.

$$A^{-1} = \lim_{k\to+\infty} X_k,$$

gde je

$$\begin{aligned} &X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ &X_0 \quad - \quad \text{početna vrednost}, \quad \|I - AX_0\| < 1. \end{aligned}$$

Teorema 0.0.1. *Neka je X_0 matrica takva da je $\|I - AX_0\| \leq q < 1$. Tada niz matrica $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira i važi*

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1},$$

$$\|X_k - A^{-1}\| \leq \|I - AX_0\|^{2^k} \frac{\|X_0\|}{1 - \|I - AX_0\|}.$$

II – Stabilnost sistema linearnih jednačina

Sistemi čija su rešenja nestabilna u odnosu na male promene koeficijenata zovu se *slabo uslovljeni sistemi* (*ill–conditioned systems*).

Mera stabilnosti sistema jednačina je *faktor uslovljenosti sistema* (*condition number*)

$$k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|,$$

gde je A matrica sistema.
Faktor uslovljenosti zavisi od izbora norme, ali je uvek $k(A) \geq 1$.

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = k(A).$$

Ukoliko je $k(A)$ mnogo veći od 1, sistem je slabo uslovljen.

ZADACI

Zadatak 1. Dat je sistem jednačina $A\vec{x} = \vec{b}$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -7 & -10 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ -3 & -5 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 14 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Primenom Gaussovog algoritma sa izborom glavnog elementa odrediti permutacionu matricu P i matrice L i R u faktorizaciji $PA = LR$. Korišćenjem dobijene faktorizacije naći rešenje sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

Rešenje: I LR- faktorizacija:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -7 & -10 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ -3 & -5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & -5 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & -7 & -10 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc} -3 & & -5 & 0 & 15 \\ -- & & & & \\ -2/3 & | & 8/3 & -7 & 0 \\ 1/3 & | & 2/3 & 5 & 4 \\ -1/3 & | & 4/3 & -2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 4 \\ \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} -3 & & -5 & & 0 & 15 \\ -- & & & & & \\ -2/3 & | & 8/3 & & -7 & 0 \\ & & -- & & & \\ 1/3 & & 1/4 & | & 27/4 & 4 \\ -1/3 & & 1/2 & | & 3/2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 4 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccccc} -3 & & -5 & & 0 & & 15 \\ --- & & & & & & \\ -2/3 & | & 8/3 & & -7 & & 0 \\ & & --- & & & & \\ 1/3 & & 1/4 & | & 27/4 & & 4 \\ & & & & --- & & \\ -1/3 & & 1/2 & & 2/9 & | & 1/9 \end{array}\right] \begin{array}{c} 4 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 1 \end{array}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 2/9 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & 8/3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 27/4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

II Rešavanje sistema:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}, \qquad P\mathbf{b} = \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 14 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$LR\mathbf{x} = \mathbf{b}';$$

$$R\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad L\mathbf{y} = \mathbf{b}'.$$

$$
L\mathbf{y} = \mathbf{b}' \quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_1 & & & & & & & = & -6, \\
-\frac{2}{3}y_1 & + & y_2 & & & & & = & -2, \\
\frac{1}{3}y_1 & + & \frac{1}{4}y_2 & + & y_3 & & & = & 14, \\
-\frac{1}{3}y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & + & \frac{2}{9}y_3 & + & y_4 & = & 3,
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{array}{l}
y_1 = -6, \\
y_2 = -6, \\
y_3 = \frac{35}{2}, \\
y_4 = \frac{1}{9},
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 35/2 \\ 1/9 \end{bmatrix}.
$$

$$
R\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-3x_1 & - & 5x_2 & & & + & 15x_4 & = & -6, \\
& & \frac{8}{3}x_2 & - & 7x_3 & & & = & -6, \\
& & & & \frac{27}{4}x_3 & + & 4x_4 & = & \frac{35}{2}, \\
& & & & & & \frac{1}{9}x_4 & = & \frac{1}{9},
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{array}{l}
x_4 = 1, \\
x_3 = 2, \\
x_2 = 3, \\
x_1 = 2,
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Zadatak 2. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7 & -3.7 \\ 0.7 & 2.1 & -2.6 & -2.8 \\ 7.3 & 8.1 & 1.7 & -4.9 \\ 1.9 & -4.3 & -4.9 & -4.7 \end{bmatrix}$$

Gaussovim postupkom eliminacije dobijena je aproksimacija

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0.21121 & -0.46003 & 0.16284 & 0.26956 \\ -0.03533 & 0.16873 & 0.01573 & -0.08920 \\ 0.23030 & 0.04607 & -0.00944 & -0.19885 \\ -0.29316 & -0.38837 & 0.06128 & 0.18513 \end{bmatrix}$$

za A^{-1}. Odrediti potreban broj iteracija da se Šulcovim iterativnim postupkom odredi X_k tako da bude ispunjen uslov

$$\|X_k - A^{-1}\| < 10^{-3}.$$

Rešenje: Najpre, proverimo uslov konvergencije Šulcovog metoda.

$$F_0 = I - AX_0 = \begin{bmatrix} 0.000022 & 0.00001 & 0.000006 & 0.000008 \\ -0.000028 & 0.000034 & 0.000019 & -0.000018 \\ 0.000012 & 0.010174 & 0.000175 & -0.000086 \\ -0.000002 & 0. & 0.000003 & 0.000022 \end{bmatrix},$$

$$\|F_0\| = \|F_0\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} \sum_{j=0}^{4} |f_{0,ij}| = 0.010447.$$

Kako je $\|F_0\|_\infty < 1$, metod konvergira. Ako se primeni iterativna formula

$$X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

greška može da se proceni nejednakošću

$$\|X_k - A^{-1}\| \le \|F_0\|^{2^k} \cdot \frac{\|X_0\|}{1 - \|F_0\|}.$$

Za ispunjenje tačnosti dovoljno je da važi

$$\|F_0\|^{2^k} \cdot \frac{\|X_0\|}{1 - \|F_0\|} < 10^{-3},$$

ili, logaritmovanjem,

$$2^k \log_{10} \|F_0\| + \log_{10} \|X_0\| - \log_{10}(1 - \|F_0\|) < -3.$$

Izračunavanjem

$$\|X_0\| = \|X_0\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4} \sum_{j=0}^{4} |x_{0,ij}| = 1.10364$$

i potrebnih logaritama, poslednja nejednakost postaje

$$2^k(-1.98101) < -3.04739 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^k > 1.5383.$$

Proverom zaključujemo da je najmanji ceo broj koji zadovoljava gornju nejednakost $k = 1$, što znači da se već u prvom iterativnom koraku Šulcovog metoda postiže tražena tačnost. Rešenje je

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0(2I - AX_0) \\ &= \begin{bmatrix} -0.2112 & -0.458391 & 0.162859 & 0.269559 \\ -0.0353351 & 0.168895 & 0.0157355 & -0.0892066 \\ 0.230304 & 0.0459778 & -0.00943999 & -0.198853 \\ -0.293155 & -0.387763 & 0.0612821 & 0.185133 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 3. Sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -400 \\ 0.2 & -2 & -20 \\ -0.04 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.05 \end{bmatrix},$$

transformisati u sistem $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$, tako da je B simetrična matrica, a $\mathbf{y} = [x_1 \ \ 10x_2 \ \ 100x_3]^T$. Odrediti faktore uslovljenosti matrica A i B i rešiti navedeni sistem.

Rešenje: I Transformacija sistema

Sistem u razvijenom obliku glasi

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & 20x_2 & - & 400x_3 & = & 1, \\
0.2x_1 & - & 2x_2 & - & 20x_3 & = & 0.2, \qquad / \cdot 10 \\
-0.04x_1 & - & 0.2x_2 & + & x_3 & = & 0.05, \qquad / \cdot 100
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & 20x_2 & - & 400x_3 & = & 1, \\
2x_1 & - & 20x_2 & - & 200x_3 & = & 2, \\
-4x_1 & - & 20x_2 & + & 100x_3 & = & 5.
\end{array}$$

Uvodjenjem smene $\mathbf{y} = [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3]^T = [x_1 \;\; 10x_2 \;\; 100x_3]^T$ on postaje

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & 2y_2 & - & 4y_3 & = & 1, \\
2x_1 & - & 2y_2 & - & 2y_3 & = & 2, \\
-4x_1 & - & 2y_2 & + & 1y_3 & = & 5,
\end{array}$$

tj.

$$B\mathbf{y} = \mathbf{c}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

II Određivanje faktora uslovljenosti matrica A i B korišćenjem spektralne norme

Spektralna norma matrice B je

$$\|B\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda(B^T B)|}$$

gde je $\lambda(B^T B)$ sopstvena vrednost matrice $B^T B$. Potražimo uporedo i spektralnu normu matrice B^{-1}. Matrica B je simetrična, pa važi

$$\begin{aligned}
B^T = B \quad &\Rightarrow \quad B^T B = B^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda(B^T B) = \lambda(B^2) = (\lambda(B))^2, \\
&\Rightarrow \quad \|B\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda(B^T B)|} = \max\sqrt{(\lambda(B))^2} = \max|\lambda(B)|,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(B^{-1})^T = B^{-1} \quad &\Rightarrow \quad (B^{-1})^T B^{-1} = (B^{-1})^2 \\
&\Rightarrow \quad \lambda((B^{-1})^T B^{-1}) = \lambda((B^{-1})^2) = (\lambda(B^{-1}))^2 = \left(\frac{1}{\lambda(B)}\right)^2 \\
&\Rightarrow \quad \|B^{-1}\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda((B^{-1})^T B^{-1})|} = \max\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda(B)}\right)^2} \\
&\qquad\qquad = \max\frac{1}{\lambda(B)} = \min|\lambda(B)|.
\end{aligned}
$$

Faktor uslovljenosti dobijenog sistema u odnosu na spektralnu normu je

$$k(B) = \|B\|_{sp}\|B^{-1}\|_{sp} = \frac{\max|\lambda(B)|}{\min|\lambda(B)|}.$$

Sopstvene vrednosti matrice B se određuju kao nule karakterističnog polinoma

$$P(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2(6-\lambda),$$

$$\lambda_1(B) = \lambda_2(B) = -3, \quad \lambda_3(B) = 6,$$

$$k(B) = \|B\|_{sp}\|B^{-1}\|_{sp} = \frac{\max|\lambda(B)|}{\min|\lambda(B)|} = \frac{6}{3} = 2.$$

Matrica A nije simetrična, pa njen faktor uslovljenosti određujemo po formuli

$$k(A) = \|A\|_{sp}\|A^{-1}\|_{sp}.$$

Spektralna norma matrice A je

$$\|A\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda(A^T A)|}$$

gde je $\lambda(A^T A)$ sopstvena vrednost matrice $A^T A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -400 \\ 0.2 & -2 & -20 \\ -0.04 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 1.2 & 19.68 & -404.4 \\ 19.68 & 404.04 & -7960.2 \\ -404.4 & -7960.2 & 160401 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(A^T A) \in \{160797.,\ 8.99529,\ 0.163297\}, \qquad \|A\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda(A^T A)|} = 160797.$$

Spektralna norma matrice A^{-1} je

$$\|A^{-1}\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda\big((A^{-1})^T A^{-1}\big)|}$$

gde je $\lambda((A^{-1})^T A^{-1})$ sopstvena vrednost matrice $(A^{-1})^T A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.012346 & 0.123457 & -2.46914 \\ 0.016049 & -0.32716 & -0.123457 \\ -0.0011728 & -0.016049 & -0.012346 \end{bmatrix},$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000413 & -0.06747 & 0.028523 \\ -0.006747 & 0.022533 & -0.264243 \\ 0.028523 & -0.264243 & 6.11203 \end{bmatrix},$$

$$\lambda((A^{-1})^T A^{-1}) \in \{6.1238,\ 0.111169,\ 0.000006\},$$

$$\|A^{-1}\|_{sp} = \sqrt{\max|\lambda((A^{-1})^T A^{-1})|} = 6.1238.$$

Prema tome, faktor uslovljenosti matrice A je

$$k(A) = \|A\|_{sp}\|A^{-1}\|_{sp} = 984688 >> 1,$$

što znači da je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ slabo uslovljen.

III Rešavanje sistema

Zbog bolje uslovljenosti rešavamo sistem $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$.

$$\begin{bmatrix} B & | & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 1 \\ 2 & -2 & -2 & | & 2 \\ -4 & -2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 1 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \\ 0 & 6 & -15 & | & 9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 1 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -9 & | & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2/10 \\ y_3/100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.1 \\ -0.01 \end{bmatrix}.$$