5 Удаљеност и повезаност

Преглед теорије

Дефиниција 1. Растојање између чворова x и y графа G, у ознаци $d(x, y)$, је дужина најкраћег пута који их спаја. При томе се под дужином пута подразумева број грана које садржи. Ако такав пут не постоји, тада је $d(x, y) = +\infty$.

Дефиниција 2. Под дијаметром графа G, у ознаци $d(G)$, подразумева се међусобно растојање два његова најудаљенија чвора,

$$d(G) = \max_{x,y \in V} d(x, y).$$

За граф G, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, матрица растојања је квадратна матрица $D = (d_{ij})$, реда $n \times n$, дефинисана са $d_{ij} = d(v_i, v_j)$, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Дефиниција 3. Ексцентрицитет чвора x, $x \in V$, повезаног графа G, је максимално његово растојање у односу на преостале чворове,

$$e(x) = \max_{y \in V} d(x, y).$$

Дефиниција 4. Радијус повезаног графа G, у ознаци $r(G)$, дефинисан је са

$$r(G) = \min_{x \in V} e(x).$$

Центар графа чини скуп чворова чији су ексцентрицитети једнаки радијусу графа.

Периферију графа чини скуп чворова чији су ексцентрицитети једнаки дијаметру графа.

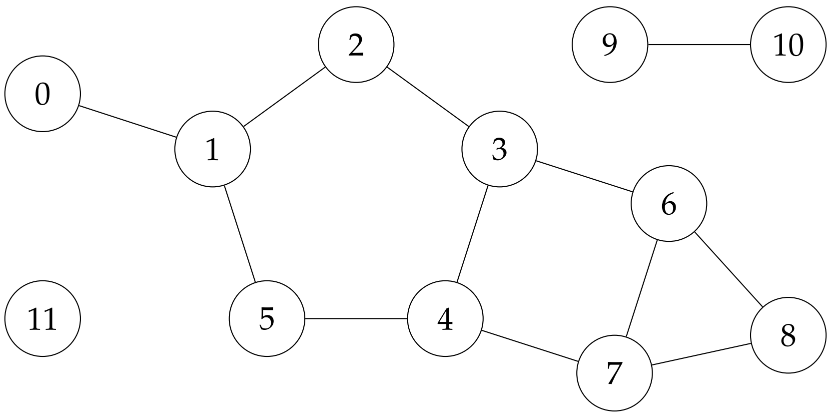
Дефиниција 5. Граф G је повезан ако и само ако за свака два чвора постоји пут који их повезује.

Дефиниција 6. Чвор чијим се удаљавањем из датог графа, заједно са инцидентним гранама, повећава број компонената повазаности овог графа, назива се артикулациони чвор.

Дефиниција 7. Грана чијим се удаљавањем из датог графа, без инцидентних чворова, повећава број компонената повазаности овог графа, назива се мост. Ако је при томе инцидентна са чвором степена 1 назива се висећи мост.

Решени задаци

Задатак 1. Задат је граф G уз скуп чворова $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ чија је визуелна репрезентација дата на следећој слици:



Одредити

а) све чворове $v \in V$ такве да је удаљеност $d(6, v) = 0$;

б) све чворове $v \in V$ такве да је удаљеност $d(6, v) = 1$;

в) све чворове $v \in V$ такве да је удаљеност $d(6, v) = 2$;

г) све чворове $v \in V$ такве да је удаљеност $d(6, v) = 3$;

д) све чворове $v \in V$ такве да је удаљеност $d(6, v) = +\infty$.

Решење.

а) Чворови који су на удаљености нула од чвора 6 су они чворови до којих постоји пут дужине нула који почиње у чвору 6. Јасно је да постоји само један такав чвор, и то је управо чвор 6. Дакле, решење је скуп $\{6\}$.

б) Чворови који су на удаљености један од чвора 6 су они чворови до којих постоји пут дужине један који почиње у чвору 6, при чему не постоји такав пут дужине нула. Ту спадају тачно они чворови са којима је чвор 6 инцидентан, а то су чворови 3, 7 и 8. Решење је скуп $\{3, 7, 8\}$.

в) Чворови који су на удаљености два од чвора 6 су они чворови до којих постоји пут дужине два који почиње у чвору 6, при чему не постоји такав пут дужине нула или један. Са визуелне репрезентације графа није тешко уочити да су такви чворови заправо 2 и 4, те је у овом случају решење $\{2, 4\}$.

г) Чворови који су на удаљености три од чвора 6 су они чворови до којих постоји пут дужине три који почиње у чвору 6, при чему не постоји такав пут дужине нула, један или два. Овакви чворови морају бити инцидентни са бар једним чвором чија је удаљеност од 6 једнака два, а да сами немају удаљеност мању или једнаку два. Са слике је лако уочити да удаљеност три од чвора 6 имају само чворови 1 и 5. Решење представља скуп $\{1, 5\}$.

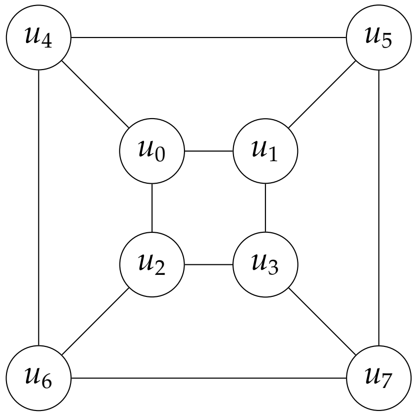
д) Чворови који су на удаљености $+\infty$ од чвора 6 су они чворови до којих не постоји ниједан пут који почиње у чвору 6. То су заправо чворови који не припадају истој компоненти повезаности као чвор 6. Са визуелне репрезентације графа је једноставно увидети да су то чворови 9, 10 и 11, тако да је решење скуп $\{9, 10, 11\}$. $\square$

Задатак 2. Нека G чини граф чији скуп чворова представља скуп свих уређених тројки облика (a_1, a_2, a_3), $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}$, при чему су два чвора суседна ако и само ако се одговарајуће уређене тројке разликују у тачно једној координати. Наћи матрицу растојања, радијус, дијаметар, центар и периферију овог графа.

Решење. Означимо чворове овог графа скраћено са

$$u_0 = (0,0,0), \quad u_1 = (0,0,1), \quad u_2 = (0,1,0), \quad u_3 = (0,1,1),$$
$$u_4 = (1,0,0), \quad u_5 = (1,0,1), \quad u_6 = (1,1,0), \quad u_7 = (1,1,1).$$

Граф Gможемо приказати у виду визуелне репрезентације која је дата на следећој слици.



На основу задате визуелне репрезентације, није тешко установити да матрица растојања графа G која одговара редоследу чворова $u_0, u_1, \dots, u_7$ износи

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одавде следи да је дијаметар графа G једнак $d(G) = 3$. Ексцентрицитети свих чворова су редом једнаки $e(u_0) = e(u_1) = e(u_2) = e(u_3) = e(u_4) = e(u_5) = e(u_6) = e(u_7) = 3$, одакле директно следи да је радијус графа такође једнак $r(G) = 3$. Најзад, центар и периферија графа су међусобно једнаки и садрже све чворове датог графа. □

Задатак 3. Нека је дат граф G који садржи укупно $n \in \mathbb{N}$ чворова. Уколико граф G поседује више од $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ грана, доказати да он мора бити повезан. За фиксиран природан број $n \in \mathbb{N}$, да ли постоји граф са $n \in \mathbb{N}$ чворова и тачно $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ грана, а да притом није повезан?

Решење. Претпоставимо супротно, тј. да граф G није повезан. Одавде следи да G поседује бар две компоненте повезаности. Нека је G_1 једна од њих и нека она садржи $a \in \mathbb{N}$, $a < n$ чворова. Јасно је да компонента G_1 може садржати највише $\dfrac{a(a-1)}{2}$ грана. Осим тога, граф G ван компоненте G_1 има тачно $n - a$ чворова, што значи да његов број грана ван ове компоненте сигурно не превазилати $\dfrac{(n-a)(n-a-1)}{2}$. Дакле, укупан број грана графа G је обавезно мањи или једнак

$$\begin{aligned}
\frac{a(a-1)}{2}+\frac{(n-a)(n-a-1)}{2} &= \frac{a^2-a}{2}+\frac{n^2-an-n-an+a^2+a}{2}\\
&= \frac{2a^2-2an+n^2-n}{2}\\
&= a^2-an+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\\
&= a^2-2\cdot a\cdot\frac{n}{2}+\frac{n^2}{4}+\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}\\
&= \left(a-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Узевши у обзир да је $1 \le a \le n-1$, јасно је да мора бити $-\left(\frac{n}{2}-1\right) \le a-\frac{n}{2} \le \frac{n}{2}-1$, што значи да је $\left(a-\frac{n}{2}\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}-1\right)^2$. Из овог разлога, добијамо да број грана графа G не може бити преко

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}-n+1+\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

чиме долазимо до контрадикције. Дакле, претпоставка да граф G није повезан је била погрешна, чиме закључујемо да овај граф јесте повезан, као што се у задатку тражи.

За произвољан природан број $n \in \mathbb{N}$, постоји граф који садржи тачно $n \in \mathbb{N}$ чворова и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ грана. Пример оваквог графа јесте граф који се добија тако што се на комплетан граф K_{n-1} дода изолован чвор. □

Задатак 4. Нека је дат природан број $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$. Доказати да произвољан повезан граф који се састоји од n чворова мора да има бар два чвора који нису артикулациони. Да ли постоји повезан граф са n чворова који има тачно два чвора који нису артикулациони?

Решење. Нека је дат произвољан граф G који је повезан и састоји се од $n \in \mathbb{N}$ чворова, где је $n \ge 2$. Овај граф има коначно много елементарних путева, што значи да је сигурно неки од њих најдужи. Другим речима, мора да постоји елементаран пут графа G такав да је његова дужина већа или једнака дужини свих елементарних путева графа G. Нека је $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k)$ најдужи елементарни пут графа G, где су $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ неки од чворова овог графа који су сви међусобно различити.

Претпоставимо да чвор v_k јесте артикулациони. У овом случају би морало да важи да скидањем чвора v_k граф G постаје неповезан. Кад би чвор v_k био суседан само са чворовима из скупа $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, ово не би било могуће, јер би његовим скидањем граф G остао повезан. Дакле, чвор v_k би морао бити суседан са неким чвором $v_{k+1} \notin \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Међутим, ово није могуће, јер би тада граф G имао елементарни пут $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1})$, који би био дужи од најдужег елементарног пута $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k)$, што је апсурд.

Дакле, чвор v_k сигурно није артикулациони. Идентичним резоновањем може се закључити да ни чвор v_0 није артикулациони. Такође, ова два чвора сигурно нису иста, јер најдужи елементарни пут графа G мора бити дужине бар један, узевши у обзир да је граф G повезан и има бар два чвора. Закључујемо да граф G мора да има бар два чвора који нису артикулациони.

Могуће је конструисати повезан граф са $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$, чворова такав да су сви његови чворови артикулациони осим нека два. Пример таквог графа био би граф P_n, тј. граф који се састоји само од елементарног пута дужине $n-1$. У овом графу су заиста сви чворови артикулациони, осим почетног и крајњег чвора елементарног пута дужине $n-1$. Дакле, постоји повезан граф са $n \geq 2$ чворова који има тачно два чвора који нису артикулациони. □

Задаци за самосталан рад

Задатак 5. Нека је дат повезан граф $G=(V,E)$ заједно уз функцију $d\colon V^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ која сваком пару чворова $(v_1,v_2) \in V^2$ додељује њихову удаљеност, тј. удаљеност између v_1 и v_2. Доказати да (V,d) чини метрички простор. Да ли (V,d) представља метрички простор у случају када граф G није повезан? Дати образложење.

Задатак 6. За произвољан повезан граф G, нека $r(G)$ означава његов радијус, а $d(G)$ његов дијаметар. Доказати да мора бити

$$r(G) \leq d(G) \leq 2\,r(G).$$

Задатак 7. Дат је неповезан граф који садржи $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ чворова и тачно $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ грана. Доказати да овај граф поседује тачно две компоненте повезаности, при чему је једна од њих комплетан граф, а друга изолован чвор.

Задатак 8. Дат је граф G чији је скуп чворова $\{0,1,2,\ldots,665\}$ и код ког су произвољна два чвора $u,v \in \{0,1,2,\ldots,665\}$ суседна ако и само ако важи

$$(u-v) \bmod 666 \in \{3,5,13,69,597,653,661,663\}.$$

Доказати да је граф G повезан и затим одредити његов центар и периферију.

Задатак 9. Нека је дат граф чији је укупан број чворова једнак 31. Уколико је познато да овај граф нема ниједан мост нити изолован чвор, доказати да он мора да садржи бар 31 грану.

Задатак 10. Дат је граф чија повезаност по гранама износи бар два. Доказати да за сваку његову грану постоји бар један прост циклус који је садржи.

Задатак 11. Дат је граф чија повезаност по чворовима износи бар два. Доказати да за сваке две његове гране постоји бар један прост циклус који их обе садржи.