Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Teorema (Rolova) Neka je funkcija f definisana na $[a, b]$, pri čemu važi f je neprekidna na $[a, b]$, f je diferencijabilna na (a, b) i $f(a) = f(b)$. Tada postoji $\xi \in (a, b)$ tako da je $f'(\xi) = 0$.

Teorema (Lagranžova) Neka je funkcija f definisana na $[a, b]$, pri čemu važi f je neprekidna na $[a, b]$ i f je diferencijabilna na (a, b). Tada postoji $\xi \in (a, b)$ tako da je

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Teorema (Lopitalovo pravilo) Neka su funkcije f i g definisane i diferencijabilne u nekoj okolini tačke a (osim, možda, u samoj tački a), gde je $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Neka je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ili } \pm\infty$$

i neka je $g'(x) \neq 0$ u nekoj okolini tačke a. Tada je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ako postoji konačna ili beskonačna granična vrednost sa desne strane.

Teorema (Tejlorova formula) Neka funkcija f ima konačne izvode do reda n u tački a. Tada važi Tejlorova formula

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \qquad x \to a.$$

$R_n(x)$ je ostatak u Tejlorovoj formuli i $R_n(x) = o((x-a)^n)$ (Peanov oblik ostatka).

Ako funkcija ima konačne izvode do reda $n+1$ u nekoj okolini tačke a ostatak se može prikazati u Lagranžovom obliku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \xi \in (a, x) \text{ ili } \xi \in (x, a).$$

Napomena U daljem tekstu podrazumevaćemo da je $\log = \log_e$.

Rolova teorema

1. Dokazati da za funkciju

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$$

na svakom od intervala $(-3,-1)$, $(-1,2)$, $(2,4)$ postoje lokalni ekstremi.

Rešenje: Funkcija f zadovoljava uslove Rolove teoreme na svakom od segmenata $[-3,-1]$, $[-1,2]$, $[2,4]$ (neprekidna je na segmentu, diferencijabilna u unutrašnjim tačkama i u krajevima segmenta uzima istu vrednost - nulu). To znači, na osnovu tvrđenja Rolove teoreme, postoje tačke

$$\xi_1 \in (-3,-1), \quad \xi_2 \in (-1,2), \quad \xi_3 \in (2,4)$$

u kojima važi $f'(\xi_i) = 0$, $i = 1,2,3$. To su tražene tačke ekstremuma.

Lagranžova teorema

1. Dokazati da je funkcija f konstantna na datom intervalu i odrediti vrednost te konstante ako je

a) $f(x) = \arcsin(x-1) + 2\arctan\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$, $\quad$ za $x \in (0,2]$;

b) $f(x) = 2\arctan\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \arctan x$, $\quad$ za $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - 2\arctan x$, $\quad$ za $x \geq 0$;

d) $f(x) = \log\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} - 2\log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $\quad$ za $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje: a) Pokazaćemo da je izvod funkcije f jednak nuli za $x \in (0,2]$, čime se, na osnovu posledice Lagranžove teoreme, potvrđuje da je ona jednaka konstanti.

Imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} + 2\frac{1}{1+\frac{2x-x^2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}(2-2x)x - \sqrt{2x-x^2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{(1-x)x - (2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Određujemo konstantu $C = f(x)$. Za $x = 1 \in (0,2]$ imamo

$$C = f(1) = \arcsin 0 + 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

b) Određujemo izvod funkcije f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{1+\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x^2})^2}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+\sqrt{1+x^2})^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{(1+\sqrt{1+x^2})^2 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{2(1+x^2+\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.
\end{aligned}$$

Na osnovu posledice Lagranžove teoreme funkcija f je konstantna. Vrednost konstante $C = f(x)$ dobijamo ako za x uzmemo neku konkretnu vrednost, recimo $x = 0$ i odredimo $C = f(0) = 2\arctan 0 - \arctan 0 = 0$.

c) Izvod funkcije f je za $x \geq 0$ jednak

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} \\
&= \frac{-(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} \\
&= \frac{-(1+x^2)}{2x} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0.
\end{aligned}$$

Funkcija f je konstantna, a vrednost konstante dobijamo za, na primer, $x = 0$. Imamo $C = f(0) = \arccos 1 - 2\arctan 0 = 0$.

d) Imamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \frac{\Big(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1\Big)(\sqrt{x^2+1}+x) - (\sqrt{x^2+1}-x)\Big(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\Big)}{\Big(\sqrt{x^2+1}+x\Big)^2} \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \Big(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}+x) - (\sqrt{x^2+1}-x)(x+\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1}+x)\sqrt{x^2+1}} \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2-x^2-1)-(x^2+1-x^2)}{\Big(x^2+1-x^2\Big)\sqrt{x^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Funkcija f je konstantna, $f(x) = C$,

$$C = f(0) = \log 1 - 2\log 1 = 0.$$

2. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1+x}{1-x} + 2\arctan\frac{1}{x}$$

konstantna na intervalima u kojima je definisana. Odrediti konstante C_1, C_2 i C_3 tako da važi

$$f(x) = \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ C_2, & 0 < x < 1, \\ C_3, & 1 < x. \end{cases}$$

Rešenje: Funkcija f je definisana za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Pokazaćemo da je njen izvod jednak nuli u oblasti definisanosti, čime se, na osnovu posledice Lagranžove teoreme, potvrđuje da je ona jednaka konstanti na svakom od intervala.

Imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} + 2\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} + 2\frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - 2\frac{1}{x^2+1} = 0. \end{aligned}$$

Određujemo konstantu C_1:

$$C_1 = f(-1) = \arctan(-1) + \arctan 0 + 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{2\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Konstanta C_2 je jednaka:

$$C_2 = \lim_{x \to 0+}\left(\arctan x + \arctan\frac{1+x}{1-x} + 2\arctan\frac{1}{x}\right) = 0 + \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}.$$

Određujemo konstantu C_3:

$$C_3 = \lim_{x \to 1+}\left(\arctan x + \arctan\frac{1+x}{1-x} + 2\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Primenom Lagranžove teorema na $[x, x+1]$, $x > 0$, dokazati

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}.$$

Rešenje: Na osnovu tvrđenja Lagranžove teoreme imamo

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \qquad \xi \in (a, b).$$

Lagranžovu teoremu ćemo primeniti na segmentu $[x, x+1]$ za funkciju $f(x) = \log x$:

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{\xi}, \qquad \xi \in (x, x+1).$$

Važi

$$\log(x+1) - \log x = \log\frac{x+1}{x} = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

i

$$0 < x < \xi < x+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \log(x+1) - \log x > \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}.$$

4. Primenom Lagranžove teoreme za $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, dokazati

$$\frac{1}{(n+1)\log(n+1)} < \log(\log(n+1)) - \log(\log n) < \frac{1}{n\log n}.$$

Rešenje: Lagranžovu teoremu ćemo primeniti na segmentu $[n, n+1]$ za funkciju $f(x) = \log(\log x)$:

$$\log(\log(x+1)) - \log(\log x) = \frac{1}{\xi\log\xi}, \qquad \xi \in (n, n+1).$$

Važi

$$\begin{aligned}
& n < \xi < n+1 \quad \wedge \quad \log n < \log\xi < \log(n+1) \\
\Rightarrow \quad & n\log n < \xi\log\xi < (n+1)\log(n+1) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{n\log n} > \frac{1}{\xi\log\xi} > \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{n\log n} > \log(\log(x+1)) - \log(\log x) > \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.
\end{aligned}$$

5. Primenom Lagranžove teoreme dokazati

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leq \tan\alpha - \tan\beta \leq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}, \qquad 0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Rešenje: Za $\alpha = \beta$ važi jednakost.

Primenom Lagranžove teoreme na segmentu $[\beta, \alpha]$, za funkciju $f(x) = \tan x$, slično kao u prethodnom zadatku dokazujemo tvrđenje za slučaj $\beta < \alpha$.

Lopitalovo pravilo

1. Naći:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+\sqrt{x})}{\log(3+\sqrt[3]{x})}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^{10}-2x+1)}{\log(x^2+x+1}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3}$; **d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x} + \log\frac{x+1}{x-1}}$.

Rešenje: a) Određujemo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+\sqrt{x})}{\log(3+\sqrt[3]{x})} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2}(3+\sqrt[3]{x})}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3(3\sqrt[3]{x^2}+x)}{2(2\sqrt{x}+x)} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+1\right)}{2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

b) Nalazimo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^{10}-2x+1)}{\log(x^2+x+1)}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{10}-2x+1}\cdot(10x^9-2)}{\dfrac{1}{x^2+x+1}\cdot(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x+1)(10x^9-2)}{(x^{10}-2x+1)(2x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{11}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})(10-2\frac{1}{x^9})}{x^{11}(1-2\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})(2+\frac{1}{x})}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})(10-2\frac{1}{x^9})}{(1-2\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})(2+\frac{1}{x})}=5.$$

c) Imamo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^3}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\log 2}{3x^2}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\log^2 2}{6x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\log^3 2}{6}=+\infty.$$

d) Dobijamo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}+\log\dfrac{x+1}{x-1}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{2}{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{-x^2+1-2x^2}{x^2(x^2-1)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(-3x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4(1-\frac{1}{x^2})}{x^4(\frac{1}{x^2}+1)(-3+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{(\frac{1}{x^2}+1)(-3+\frac{1}{x^2})}=-\frac{1}{3}.$$

2. Odrediti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x+2)\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)$; **b)** $\displaystyle\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}$.

Rešenje: a) Imamo

$$L=\lim_{x\to-2}(x+2)\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to-2}\frac{\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)}{\dfrac{1}{x+2}}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to-2}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\dfrac{-2}{x^2}}{\dfrac{-1}{(x+2)^2}}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)^2}{x(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)}{x}=0.$$

b) Važi

$$L=\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{cotan}\frac{\pi x}{2}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to1}\frac{-1}{\dfrac{-1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

c) Dobijamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2(2\sin x+x\cos x)} \\
&\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2(2\cos x+\cos x-x\sin x)} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

3. Izračunati:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\Big(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\Big)$; **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big)^{1/x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\log(1-e^{-x})}}$; **d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big((4x-1)e^{1/x}-4x\Big)$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\Big)$.

Rešenje: a) Računamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\pi/2}\Big(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\Big) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

b) Neka je

$$L=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big)^{1/x}.$$

Logaritmovanjem leve i desne strane, dobijamo

$$\begin{aligned}
\log L &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{\log\Big(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\Big)}{x} \\
&\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2\arccos x}\cdot\dfrac{2}{\pi}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \frac{-2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Sada je $L=e^{-2/\pi}$.

c) Imamo

$$L=\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\log(1-e^{-x})}}.$$

Logaritmovanjem leve i desne strane, dobijamo

$$\begin{aligned}
\log L &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\log(1-e^{-x})}\log x = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{\log(1-e^{-x})} \\
&\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{1-e^{-x}}e^{-x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1-e^{-x}}{xe^{-x}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x}}{e^{-x}-xe^{-x}} = 1.
\end{aligned}$$

Imamo da je $L=e$.

d) Određujemo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\Big((4x-1)e^{1/x}-4x\Big) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} x\Big(\frac{4x-1}{x}e^{1/x}-4\Big)\\
&\overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x-1}{x}e^{1/x}-4}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x-(4x-1)}{x^2}e^{1/x}+\frac{4x-1}{x}e^{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{1/x}-\frac{4x-1}{x^3}e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\Big(e^{1/x}-\frac{4x-1}{x}e^{1/x}\Big)\\
&= -(1-4)=3.
\end{aligned}$$

e) Imamo

$$L = \lim_{x\to1}\Big(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\Big) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to1}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+(x-1)\frac{1}{x}}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-(x-1)\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

4. Naći granične vrednosti

a) $\lim\limits_{x\to0}(\text{cotan } x)^{\sin x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0+}\Big(\log\frac{1}{x}\Big)^x$ **c)** $\lim\limits_{x\to0+} x^{(x^x-1)}$.

Rezultat: a) 1; **b)** 1; **c)** 1.

Tejlorova formula

1. Za funkciju $f(x)=x^2e^{-x}$ odrediti Tejlorov polinom drugog stepena u okolini tačke 1 i ostatak u Tejlorovoj formuli u Peanovom obliku.

Rešenje: U okolini tačke $x=1$ Tejlorov polinom drugog stepena ima oblik

$$T_2(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2,$$

a ostatak u Peanovom obliku je jednak

$$R_2(x)=o((x-1)^2).$$

Za datu funkciju f određujemo

$$\begin{aligned}
&f(1)=e^{-1},\\
&f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2) \qquad\Rightarrow\qquad f'(1)=f'(x)\Big|_{x=1}=e^{-1},\\
&f''(x)=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x)=e^{-x}(x^2-4x+2)\\
&\qquad\Rightarrow\qquad f''(1)=f''(x)\Big|_{x=1}=-e^{-1}.
\end{aligned}$$

Tejlorov polinom je jednak

$$T_2(x)=e^{-1}+e^{-1}(x-1)-\frac{1}{2}e^{-1}(x-1)^2=e^{-1}\Big(-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}\Big).$$

2. Odrediti Tejlorov polinom stepena dva u okolini tačke 0 za funkciju

$$f(x) = \sqrt{2 - e^{-x}}.$$

Odrediti ostatak u Peanovom obliku.

Rezultat: Tejlorov polinom drugog stepena u okolini nule ima oblik

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2,$$

a ostatak u Peanovom obliku je $R_2(x) = o(x^2)$.

Imamo

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2 - e^{-x}}}e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = f'(x)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2},\\
f''(x) &= \frac{-1}{4\sqrt{(2 - e^{-x})^3}}e^{-x} - \frac{1}{2\sqrt{2 - e^{-x}}}e^{-x}\\
&\Rightarrow \qquad f''(0) = f''(x)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2.$$

3. Odrediti Tejlorov polinom stepena dva u okolini tačke 2 za funkciju

$$f(x) = (x - 1)^x.$$

Odrediti ostatak u Peanovom obliku.

Rešenje: Tejlorov polinom drugog stepena u okolini tačke 2 ima oblik

$$T_2(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2,$$

a ostatak u Peanovom obliku $R_2(x) = o((x - 2)^2)$.

Važi $f(2) = 1$. Izvod funkcije f odredićemo primenom logaritamskog diferenciranja. Imamo

$$\begin{aligned}
& f(x) = (x - 1)^x \quad / \log \quad \Rightarrow \quad \log f(x) = \log(x - 1)^x\\
\Rightarrow \quad & \log f(x) = x\log(x - 1) \quad /\,' \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \log(x - 1) + \frac{x}{x - 1}\\
\Rightarrow \quad & f'(x) = f(x)\Big(\log(x - 1) + \frac{x}{x - 1}\Big)\\
\Rightarrow \quad & \Big((x - 1)^x\Big)' = (x - 1)^x\Big(\log(x - 1) + \frac{x}{x - 1}\Big) \quad (*).
\end{aligned}$$

Dobijamo

$$f'(x) = (x - 1)^x\Big(\log(x - 1) + \frac{x}{x - 1}\Big)\Big|_{x=2} = 2.$$

Sada je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big((x-1)^x\Big)'\Big(\log(x-1)+\frac{x}{x-1}\Big)+(x-1)^x\Big(\log(x-1)+\frac{x}{x-1}\Big)' \\ &\overset{(*)}{=} (x-1)^x\Big(\log(x-1)+\frac{x}{x-1}\Big)^2+(x-1)^x\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\Big). \end{aligned}$$

Računamo $f''(2)=4$. Imamo

$$T_2(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2=1+2(x-2)+2(x-2)^2.$$

4. Odrediti Maklorenov polinom trećeg stepena za funkciju

$$f(x)=\log\Big(2x+\sqrt{4x^2+1}\Big).$$

Naći ostatak u Peanovom obliku.

Rešenje: Maklorenov polinom je Tejlorov polinom u okolini nule. Imamo

$$f(x)=M_3(x)+R_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3).$$

Određujemo

$$\begin{aligned} f(x)&=\log\Big(2x+\sqrt{4x^2+1}\Big)\Big|_{x=0}=0,\\ f'(x)&=\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\Big(2+\frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot 8x\Big)=\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\,\frac{2(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{\sqrt{4x^2+1}}\\ &=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}=2(4x^2+1)^{-1/2}\Big|_{x=0}=2,\\ f''(x)&=-(4x^2+1)^{-3/2}\cdot 8x\Big|_{x=0}=0,\\ f'''(x)&=\Big(12(4x^2+1)^{-5/2}\cdot 8x^2-8(4x^2+1)^{-3/2}\Big)\Big|_{x=0}=-8. \end{aligned}$$

Dobijamo

$$M_3(x)=2x-\frac{4}{3}x^3.$$

5. Odrediti Tejlorov polinom stepena dva u okolini tačke 1 za funkciju

$$f(x)=\sin\log x.$$

Odrediti ostatak u Lagranžovom obliku.

Rešenje: Tejlorov polinom drugog stepena u okolini tačke 1 ima oblik

$$T_2(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2,$$

a ostatak u Lagranžovom obliku $R_2(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$.

Vrednost funkcije je $f(1)=0$. Izvodi funkcije f su jednaki

$$\begin{aligned} f'(x)&=\cos\log x\cdot\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1,\\ f''(x)&=\Big(-\sin\log x\cdot\frac{1}{x^2}-\cos\log x\cdot\frac{1}{x^2}\Big)\Big|_{x=1}=-1 \end{aligned}$$

Imamo

$$T_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Nalazimo treći izvod funkcije

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \Big(-\frac{\sin\log x + \cos\log x}{x^2}\Big)' \\ &= -\frac{(\cos\log x \cdot \frac{1}{x} - \sin\log x \cdot \frac{1}{x})x^2 - 2x(\sin\log x + \cos\log x)}{x^4} \\ &= \frac{\cos\log x + 3\sin\log x}{x^3}\Big|_{x=\xi} = \frac{\cos\log\xi + 3\sin\log\xi}{\xi^3} \end{aligned}$$

Ostatak u Lagranžovom obliku je jednak

$$R_2(x) = \frac{\cos\log\xi + 3\sin\log\xi}{6\xi^3}(x-1)^3,$$

pri čemu $\xi \in (1, x)$ ili $\xi \in (x, 1)$.

6. Odrediti $A, B \in \mathbb{R}$ tako da važi jednakost

$$A\tan x + Be^{\sin x} = 2 - 4x + x^2 + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

Rešenje: Na osnovu aproksimacije funkcije f Maklorenovim polinomom drugog stepena imamo

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

Neka je

$$f(x) = A\tan x + Be^{\sin x}.$$

Određujemo

$$\begin{aligned} f(0) &= B, \\ f'(x) &= A\frac{1}{\cos^2 x} + Be^{\sin x}\cos x \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = f'(x)\Big|_{x=0} = A + B, \\ f''(x) &= A\frac{-2}{\cos^3 x}(-\sin x) + B(e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}(-\sin x)) \\ &\Rightarrow \qquad f''(0) = f''(x)\Big|_{x=0} = B. \end{aligned}$$

Na osnovu Maklorenove formule i zadatog uslova važi jednakost

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) = B + (A+B)x + \frac{1}{2}Bx^2 + o(x^2) \\ &= 2 - 4x + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Imamo

$$B = 2, \qquad A + B = -4, \qquad \frac{1}{2}B = 1,$$

odakle je $A = -6$, $B = 2$.

7. Odrediti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da važi jednakost

$$e^{\tan x} + ax^2 + bx + c = o(x^2), \qquad x \to 0.$$

Rešenje: Na osnovu Tejlorove formule u okolini nule, za funkciju f imamo

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

Određujemo

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\tan x}\Big|_{x=0} = 1,\\
f'(x) &= e^{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=0} = 1,\\
f''(x) &= \Big(e^{\tan x}\frac{1}{\cos^4 x} + e^{\tan x}\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\Big)\Big|_{x=0} = 1.
\end{aligned}$$

Sada je

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{\tan x} - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2),$$

odakle imamo $a = -1/2$, $b = -1$, $c = -1$.

8. Dokazati jednakost

$$(1+x)^{2015} - 1 - 2015x - 2015 \cdot 1007x^2 = o(x^2), \qquad x \to 0.$$

Rešenje: Na osnovu Tejlorove formule u okolini nule, za funkciju $f(x) = (1+x)^{2015}$ imamo

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

Određujemo

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{2015}\Big|_{x=0} = 1,\\
f'(x) &= 2015(1+x)^{2014}\Big|_{x=0} = 2015,\\
f''(x) &= 2015 \cdot 2014(1+x)^{2013}\Big|_{x=0} = 2015 \cdot 2014.
\end{aligned}$$

Sada je

$$(1+x)^{2015} = 1 + 2015x + \frac{2015 \cdot 2014}{2}x^2 + o(x^2),$$

odakle sledi data jednakost.

9. Dokazati jednakost

$$x \arctan x - x^2 = o(x^3), \qquad x \to 0.$$

Rešenje: Datu jednakost ćemo dokazati na osnovu Tejlorove formule u okolini nule, za funkciju $f(x) = x \arctan x$. Član $o(x^3)$ prepoznajemo kao Peanov oblik ostatka u aproksimaciji funkcije Tejlorovim polinomom **trećeg** stepena

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \arctan x \Big|_{x=0} = 0, \\
f'(x) &= \Big(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\Big)\Big|_{x=0} = 0, \\
f''(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \Big(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Big)\Big|_{x=0} = 2, \\
f'''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \Big(\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}\Big)\Big|_{x=0} = 0,
\end{aligned}$$

Sada je

$$x \arctan x = x^2 + o(x^3), \quad \text{odnosno}, \quad x \arctan x - x^2 = o(x^3).$$

10. Primenom Tejlorove formule predstaviti polinom

$$f(x) = x^5 + 3x^2$$

po stepenima $(x-1)$.

Rešenje: Na osnovu Tejlorove formule imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= T_5(x) + R_5(x) \\
&= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-1)^6.
\end{aligned}$$

Određujemo $f(1) = 4$ i izvode

$$f'(x) = 5x^4 + 6x\Big|_{x=1} = 11, \quad f''(x) = 20x^3 + 6\Big|_{x=1} = 26, \quad f'''(x) = 60x^2\Big|_{x=1} = 60,$$

$$f^{(4)}(x) = 120x\Big|_{x=1} = 120, \quad f^{(5)}(x) = 120\Big|_{x=1} = 120.$$

Kako je $f^{(6)}(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, to je $R_5(x) = 0$ i važi $f(x) = T_5(x)$, za $x \in \mathbb{R}$. Sada je

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4 + 11(x-1) + \frac{26}{2}(x-1)^2 + \frac{60}{6}(x-1)^3 + \frac{120}{24}(x-1)^4 + \frac{120}{120}(x-1)^5 \\
&= 4 + 11(x-1) + 13(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5.
\end{aligned}$$

Napomenimo da smo ovde mogli da računamo aproksimaciju Tejlorovim polinomom višeg stepena od 5, ali bi zbog $f^{(k)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \geq 6$ koeficijenti uz $(x-1)^k$, $k \geq 6$ bili jednaki 0.