2 Графовски низови

Преглед теорије

Дефиниција 1 (Графовски низ)**.** За неко $n \in \mathbb{N}$, коначан низ целих бројева $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ називамо графовским уколико постоји бар један граф такав да степени његових чворова одговарају вредностима споменутог низа.

Теорема 1 (Хавел–Хакими теорема)**.** За неко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, нека је дат произвољан низ ненегативних целих бројева

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

код ког важи

$$n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0.$$

Низ D је графовски ако и само ако је графовски и низ

$$D_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

Решени задаци

Задатак 1. Проверити да ли су следећи низови графовски:

а) $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$,

б) $(6, 4, 4, 4, 3, 3, 1)$,

в) $(6, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$,

г) $(5, 4, 4, 3, 2, 2)$.

Решење.

а) Задати низ садржи седам елемената, што значи да кад би постојао граф чији степени чворова одговарају елементима низа, он би морао да има тачно седам чворова. Међутим, у овом случају не би могао да постоји степен чвора који превазилази вредност шест. Како задати низ поседује вредност седам, закључујемо да он не може бити графовски.

б) Задати низ поседује тачно три непарна елемента. Дакле, кад би постојао граф чији чворови имају степене који су једнаки елементима низа, онда би овај граф морао да има непаран број чворова са непарним степеном. Међутим, знамо да ово није могуће, што значи да низ од интереса није графовски.

в) Овај подзадатак ћемо решити узастопном применом Хавел–Хакими теореме, као што је описано у наставку.

$$D_0 = (6, 5, 5, 4, 3, 2, 1), \qquad D_0 = (6, \underline{5, 5, 4, 3, 2, 1}),$$

$$D_1 = (4, 4, 3, 2, 1, 0), \qquad D_1 = (4, \underline{4, 3, 2, 1}, 0),$$

$$D_2 = (3, 2, 1, 0, 0), \qquad D_2 = (3, \underline{2, 1, 0}, 0),$$

$$D_3 = (1, 0, -1, 0).$$

Хавел–Хакими диктира да су или низови D_0, D_1, D_2, D_3 сви истовремено графовски или да ниједан од њих није графовски. Како низ $(1, 0, -1, 0)$ очигледно није графовски узевши у обзир да степен неког чвора не може бити негативан, закључујемо да ни почетни низ $(6, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$ не сме бити графовски.

г) Као и претходни, и овај подзадатак ћемо решити узастопном применом Хавел–Хакими теореме. Поступак је описан у наставку.

$$\begin{aligned}
D_0 &= (5, 4, 4, 3, 2, 2), & D_0 &= (5, \underline{4, 4, 3, 2, 2}),\\
D_1 &= (3, 3, 2, 1, 1), & D_1 &= (3, \underline{3, 2, 1}, 1),\\
D_2 &= (2, 1, 0, 1), & &\\
D_2' &= (2, 1, 1, 0), & D_2' &= (2, \underline{1, 1}, 0),\\
D_3 &= (0, 0, 0). & &
\end{aligned}$$

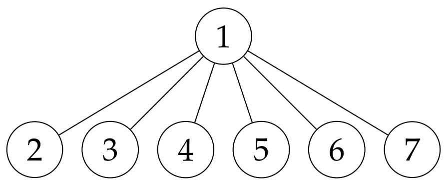
Низ $(0, 0, 0)$ је очигледно графовски. На основу Хавел–Хакими теореме, добијамо да почетни низ $(5, 4, 4, 3, 2, 2)$ такође мора бити графовски. □

Задатак 2. Одржава се шаховски турнир по кружном принципу тако да сваки играч треба да одигра са сваким другим по једну партију. Укупно има седам такмичара и после неког времена, зна се да је први такмичар одиграо тачно шест мечева, други пет, трећи и четврти по три, пети и шести по два и седми само један меч. Одредити са којим је све такмичарима партију одиграо трећи такмичар до овог тренутка.

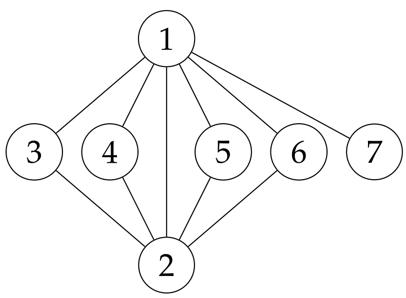
Решење. Споменути проблем се може једноставно моделирати у виду графа чији чворови представљају шахисте, а гране одиграну партију између одговарајућа два такмичара. Уколико са $d_1, d_2, \ldots, d_7$ означимо степене одговарајућих чворова у складу са редоследом како су такмичари наведени, долазимо до тога да је

$$d_1 = 6, \qquad d_2 = 5, \qquad d_3 = d_4 = 3, \qquad d_5 = d_6 = 2, \qquad d_7 = 1.$$

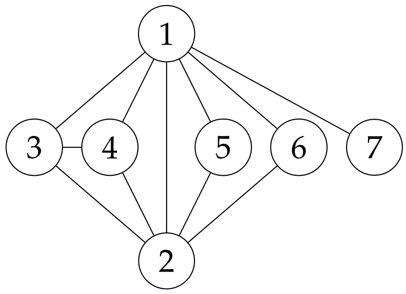
Како је први чвор степена шест, јасно је да он мора бити суседан са свим преосталим чворовима.



Осим тога, други чвор је степена пет, што значи да је он сигурно суседан са свим преосталим чворовима, осим са једним. Тај чвор који није суседан са другим чвором мора бити седми чвор, пошто је он степена један, а већ знамо да је суседан са првим чвором.



Након додавања свих споменутих грана, видимо да сви чворови имају управо онај степен који треба да имају, осим трећег и четвртог чвора, који су степена два уместо три. Одавде је једноставно закључити да ова два чвора морају бити суседна, чиме најзад долазимо до коначног графа који моделира проблем од интереса.



Дакле, можемо да закључимо да је трећи такмичар сигурно одиграо партију само са првим, другим и четвртим такмичаром. □

Задаци за самосталан рад

Задатак 3. Проверити да ли су следећи низови графовски:

а) $(8, 7, 4, 4, 3, 2, 2, 1)$,

б) $(4, 3, 2, 2, 1)$,

в) $(4, 3, 2, 1)$,

г) $(4, 4, 4, 2, 2)$,

д) $(3, 2, 2, 2)$,

ђ) $(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$,

е) $(3, 2, 2, 1)$,

ж) $(2, 2, 1, 1, 1)$.

Задатак 4. Доказати Хавел–Хакими теорему.