Rešavanje nelinearnih jednačina i sistema jednačina

I Metodi za određivanje rešenja $x^* \in [\alpha, \beta]$ $(f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0)$ jednačine

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

- **Njutnov metod** (*Njutn-Rafsonov metod* ili *metod tangente*)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0 &\in [\alpha, \beta] \end{aligned} \tag{2}$$

- **Metod sečice**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0, x_1 &\in [\alpha, \beta] \end{aligned} \tag{3}$$

- **Metod regula falsi**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0, x_1 &\in [\alpha, \beta], \qquad f(x_0) \cdot f(x_1) < 0. \end{aligned} \tag{4}$$

- **Metod Stefensena**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{\big(f(x_k)\big)^2}{f\big(x_k + f(x_k)\big) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0 &\in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \tag{5}$$

- **Metod plovljenja intervala** (*metod bisekcije*)

$$\begin{aligned} &[x_0, y_0] = [\alpha, \beta]; \\ &\text{za } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{ponavljati:} \qquad z_n = \frac{x_n + y_n}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

  - Ako je $f(z_n) = 0$, tada je z_n tačno rešenje.
  - Ako je $f(x_n) \cdot f(z_n) < 0$, tada je $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [x_n, z_n]$.
  - Ako je $f(y_n) \cdot f(z_n) < 0$, tada je $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [z_n, y_n]$.

ZADACI

Zadatak 1. Sa tačnošću 10^{-4} odrediti sva pozitivna rešenja jednačine

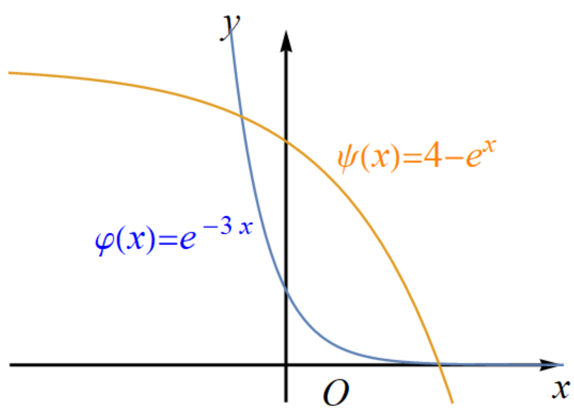
$$e^x + e^{-3x} - 4 = 0.$$

Rešenje:

I Lokalizacija rešenja:

$$f(x) = e^x + e^{-3x} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-3x} = 4 - e^x$$

Skiciramo grafike funkcija $\varphi(x) = e^{-3x}$ i $\psi(x) = 4 - e^x$ da bismo odredili broj rešenja.



Jednačina ima dva realna rešenja, od kojih je jedno pozitivno. Radi lokalizacije pozitivnog rešenja izračunavamo vrednosti funkcije u nekim celobrojnim tačkama.

x	0	1	2
$f(x)$	$-2.$	-1.23	3.39

Pozitivno rešenje nalazi se u segmentu $[1, 2]$.

II Izbor metoda:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + e^{-3x} - 4, \\ f'(x) &= e^x - 3e^{-3x}, \\ f''(x) &= e^x + 9e^{-3x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \nearrow \\ & f'(1) = e - 3e^{-3} \approx 2.57 > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kako je $f'(x) \neq 0$, može da se primeni Njutnov metod (2).

III Primena metoda:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [1, 2];$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k} + e^{-3x_k} - 4}{e^{x_k} - 3e^{-3x_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 = 2$$

k	x_k	
0	2.	
1	1.54054	
2	1.39457	
3	1.38241	
4	1.38233	$\lvert x_4 - x_3 \rvert = 0.00008 < 10^{-4}$

Približno rešenje je $x_4 = 1.3823$.

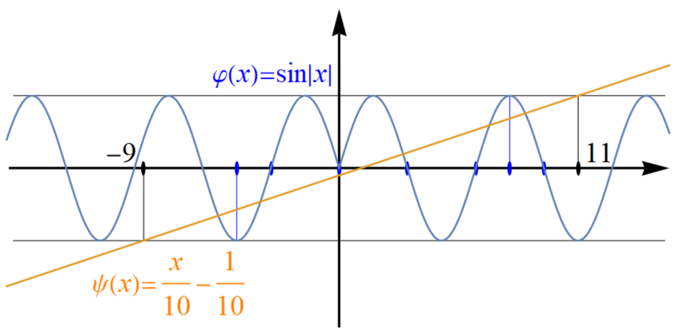
Zadatak 2. Data je jednačina

$$\sin|x| = \frac{x}{10} - \frac{1}{10}.$$

Odrediti broj realnih rešenja date jednačine, a zatim sa tačnošću 10^{-4} odrediti najveće rešenje.

Rešenje:

I Lokalizacija rešenja:



Kako je $-1 \leq \sin|x| \leq 1$, funkcije $\varphi(x) = \sin|x|$ i $\psi(x) = \dfrac{x}{10} - \dfrac{1}{10}$ mogu da imaju zajedničke tačke samo ako je

$$-1 \leq \frac{x}{10} - \frac{1}{10} \leq 1$$

$$-10 \leq x - 1 \leq 10$$

$$-9 \leq x \leq 11$$

Zajedničke tačke su redom u intervalima: $(-9, -3\pi/2)$, $(-3\pi/2, 0)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 5\pi/2)$ i $(5\pi/2, 3\pi)$.
Prema tome, jednačina ima 5 realnih rešenja, a najveće je $x^* \in (5\pi/2, 3\pi)$.

II Izbor metoda:

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \le 0, \\ -\sin x, & x \le 0. \end{cases}$$

Tražimo pozitivno rešenje, pa se zato posmatra jednačina

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = \sin x - 0.1x + 0.1.$$

$$\begin{aligned} & f'(x) = \cos x - 0.1, \quad f''(x) = -\sin x < 0,\ x \in (5\pi/2, 3\pi) \\ & \Rightarrow \quad f'(x) \searrow \text{ na } (5\pi/2, 3\pi); \\ & \qquad f'(5\pi/2) = -0.1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) \ne 0,\ x \in (5\pi/2, 3\pi) \end{aligned}$$

Može da se primeni Njutnov metod (2).

III Primena metoda:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [1, 2];$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k - 0.1x_k + 0.1}{\cos x_k - 0.1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_0 = 3\pi \approx 9.42478.$$

k	x_k	
0	9.42478	
1	8.65889	
2	8.57030	
3	8.56660	
4	8.56659	$\lvert x_4 - x_3\rvert < 10^{-4}$

Približno rešenje je $x_4 = 8.5666$.

Zadatak 3. Sa tačnošću 10^{-4} odrediti tačku u kojoj funkcija

$$f(x) = x^2 + 2e^{-x}(x^2 + 2x + 3)$$

dostiže minimum.

Rešenje:

I Formiranje jednačine:

Funkcija $f(x) = x^2 + 2e^{-x}(x^2 + 2x + 3)$ je diferencijabilna na $\mathbb{R}$ i dostiže minimum u tački za koju važi $f'(x) = 0$.

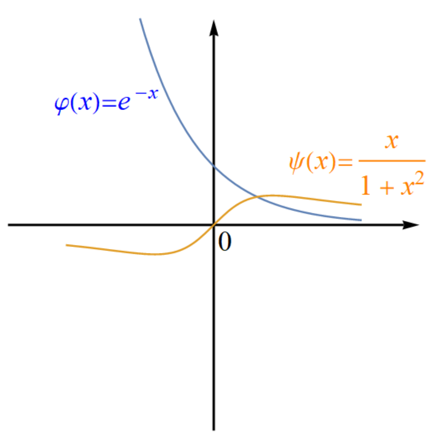
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2e^{-x}(x^2 + 2x + 3) + 2e^{-x}(2x + 2) \\ &= 2x - 2e^{-x}(x^2 + 2x + 3 - 2x - 2) \\ &= 2\big(x - e^{-x}(x^2 + 1)\big). \end{aligned}$$

Rešavamo jednačinu

$$g(x) = x - e^{-x}(x^2 + 1) = 0.$$

II Lokalizacija rešenja:

$$x - e^{-x}(x^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = \frac{x}{x^2 + 1}$$



x	0	1
$g(x)$	$-1.$	1.26

$x^* \in (0, 1)$

III Izbor metoda:
Neka je x^* tačno rešenje. Tada je

$$g(x) = x - e^{-x}(x^2+1), \quad g'(x) = 1 + e^{-x}(x-1)^2 \neq 0,$$

pa može da se primeni Njutnov metod.

IV Primena metoda:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [0,1],$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}(x_k^2+1)}{1 + e^{-x_k}(x_k-1)^2} \\ &= \frac{1 + x_k - x_k^2 + x_k^3}{e^{x_k} + (x_k-1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 = 1. \end{aligned}$$

k	x_k
0	1.
1	0.73576
2	0.73843
3	0.73843

Približno rešenje je $x_3 = 0.7384$.

Zadatak 4. Sa tačnošću 10^{-3} odrediti konstantu $a \in \mathbb{R}$ tako da kriva $y = ae^{x^2}$ dodiruje krivu $y = \ln x$.

Rešenje:

I Formiranje jednačine:

Ako se krive $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ dodiruju u tački x^*, one u zajedničkoj tački imaju zajedničku tangentu. To znači:

- $f_1(x^*) = f_2(x^*)$;
- $f_1'(x^*) = f_2'(x^*)$.

U ovom slučaju:

$$f_1(x) = ae^{x^2}, \quad f_1'(x) = 2axe^{x^2},$$
$$f_2(x) = \ln x, \quad f_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Tačka u kojoj se krive dodiruju dobija se rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{cases} ae^{x^2} = \ln x, \\ 2axe^{x^2} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Izrazimo a iz prve jednačine i zamenimo u drugoj:

$$a = e^{-x^2} \ln x, \qquad 2x \ln x = \frac{1}{x}.$$

Prema tome, približna vrednost tačke dodira x^* može se odrediti rešavanjem jednačine

$$2x^2 \ln x - 1 = 0$$

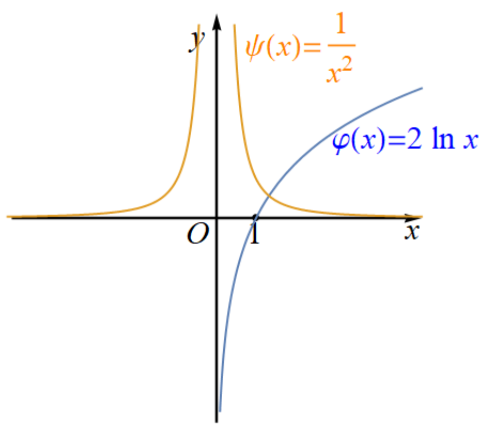
primenom nekog iterativnog postupka, a približna vrednost konstante a se u svakoj iteraciji odredjuje iz veze

$$a = e^{-x^2} \ln x.$$

II Rešavanje jednačine:

- Lokalizacija rešenja

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 1 = 0 \quad \Leftarrow \quad 2 \ln x = \frac{1}{x^2}$$



x	1	2
$f(x)$	$-1.$	4.55

$x^* \in (1, 2)$

- Njutnov metod (2)

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 1, \quad f'(x) = 2x(1 + 2 \ln x) > 0, \;\; x \in [1, 2]$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad x_0 \in [1, 2],$$

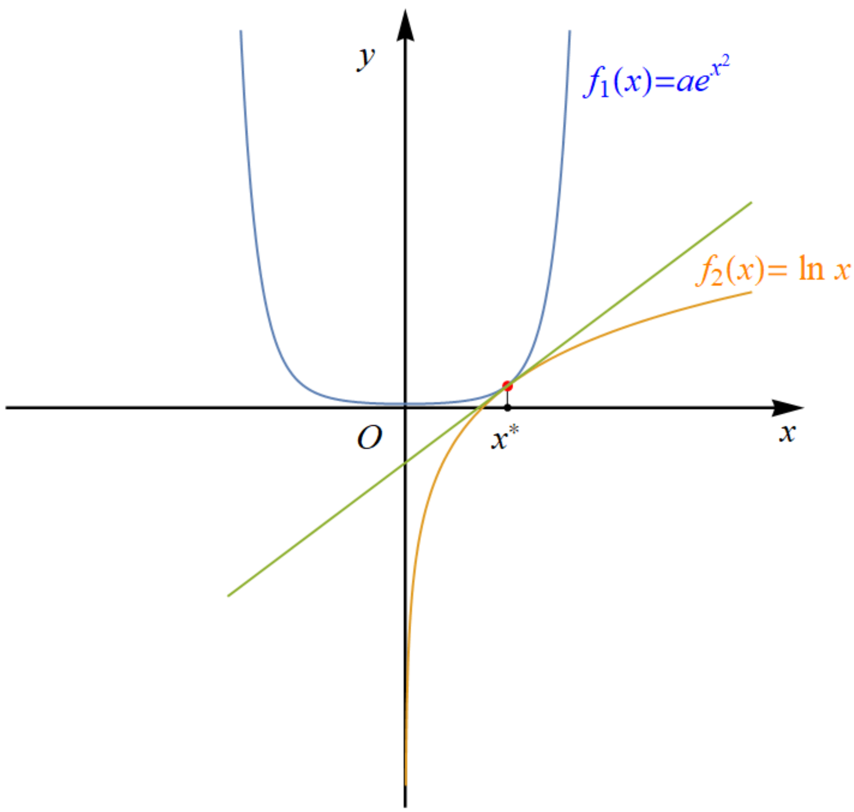
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{2x_k^2 \ln x_k - 1}{2x_k(1 + 2 \ln x_k)} \\ &= \frac{1 + 2x_k^2(1 + \ln x_k)}{2x_k(1 + 2 \ln x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad x_0 = 2, \end{aligned}$$

$$a_k = e^{-x_k^2} \ln x_k.$$

k	x_k	a_k
0	2.	0.0126
1	1.5238	0.0413
2	1.3535	0.0485
3	1.3284	0.0486

$|a_3 - a_2| < 10^{-3}$

Približno rešenje je $a_3 = 0.049$.



Zadatak 5. Sa tačnošću 10^{-3} naći rešenje jednačine

$$x^4 - 8|x^2 - 1.3x| - |x^3 - 2x - 3| - 2 = 0,$$

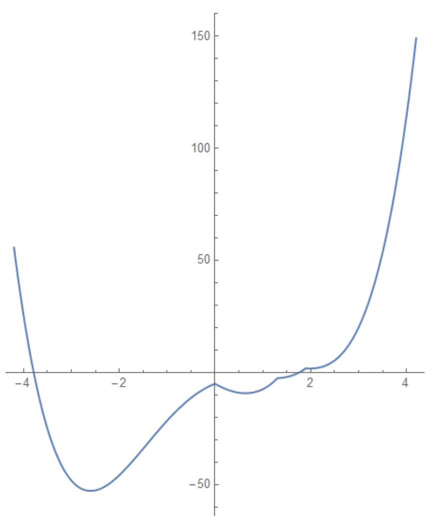
koje se nalazi u intervalu $[1, 2]$.

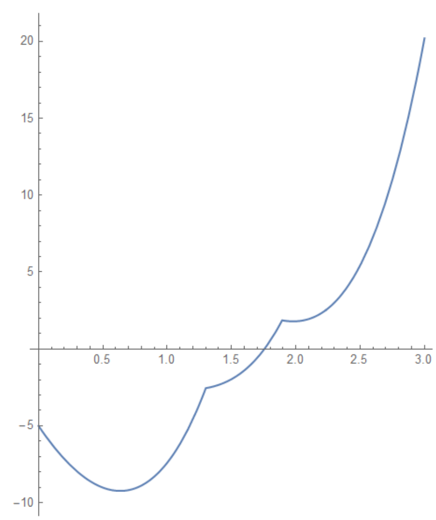
Rešenje:

Njutnov metod nije pogodan za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, jer funkcija

$$f(x) = x^4 - 8|x^2 - 1.3x| - |x^3 - 2x - 3| - 2$$

nije diferencijabilna u svim tačkama oblasti definisanosti.





Ovde će biti predstavljena primena

- metoda sečice,
- metoda regula falsi,
- metoda Stefensena,
- metoda polovljenja intervala (bisekcije).

I Metod sečice

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2.$$

k	x_k	
0	1.	početna vrednost
1	2.	početna vrednost
2	1.8044	
3	1.7101	
4	1.7524	
5	1.7558	
6	1.7556	$\lvert x_6 - x_5 \rvert < 10^{-3}$

Rešenje: $x^* \approx x_6 = 1.756$

II Metod regula falsi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \qquad \big((f(x_0) \cdot f(x_1) < 0\big).$$

k	x_k	
0	1.	početna vrednost
1	2.	početna vrednost
2	1.8044	
3	1.7454	
4	1.7569	
5	1.7554	
6	1.7556	$\lvert x_6 - x_5 \rvert < 10^{-3}$

Rešenje: $x^* \approx x_6 = 1.756$

III Metod Stefensena

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\big(f(x_k)\big)^2}{f\big(x_k + f(x_k)\big) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$x_0 = 2.$

k	x_k	
0	2.	početna vrednost
1	1.9616	
2	1.9209	
3	1.8781	
4	1.8276	
5	1.7415	
6	1.7595	
7	1.7558	
8	1.7556	$\lvert x_8 - x_7 \rvert < 10^{-3}$

Rešenje: $x^* \approx x_6 = 1.756$

IV Metod plovljenja intervala (metod bisekcije)

$$[x_0, y_0] = [\alpha, \beta];$$

$$\text{za } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{ponavljati:} \qquad z_n = \frac{x_n + y_n}{2}$$

- Ako je $f(z_n) = 0$, tada je z_n tačno rešenje.
- Ako je $f(x_n) \cdot f(z_n) < 0$, tada je $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [x_n, z_n]$.
- Ako je $f(y_n) \cdot f(z_n) < 0$, tada je $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [z_n, y_n]$.

Kriterijum zaustavljanja: $\dfrac{y_k - x_k}{2} < \varepsilon$

Rešenje: $x^* \approx z_k = \dfrac{x_k + y_k}{2}$

početni interval: $[x(0), y(0)] = [1., 2.]$, $\quad z(0) = 1.5$,
$f(x(k)) = -7.4$, $f(y(k)) = 1.8$, $f(z(k)) = -1.9625$;

- korak 1: $[x(k), y(k)] = [1.5, 2.]$, $z(k) = 1.75$,
  $f(x(k)) = -1.9625$, $f(y(k)) = 1.8$, $f(z(k)) = -0.0617$;
- korak 2: $[x(k), y(k)] = [1.75, 2.]$, $z(k) = 1.875$,
  $f(x(k)) = -0.0617$, $f(y(k)) = 1.8$, $f(z(k)) = 1.5764$;
- korak 3: $[x(k), y(k)] = [1.75, 1.875]$, $z(k) = 1.812$,
  $f(x(k)) = -0.0617$, $f(y(k)) = 1.5764$, $f(z(k)) = 0.6903$;
- korak 4: $[x(k), y(k)] = [1.75, 1.812]$, $z(k) = 1.781$,
  $f(x(k)) = -0.0617$, $f(y(k)) = 0.6903$, $f(z(k)) = 0.2983$;
- korak 5: $[x(k), y(k)] = [1.75, 1.781]$, $z(k) = 1.7656$,
  $f(x(k)) = -0.0617$, $f(y(k)) = 0.2983$, $f(z(k)) = 0.1144$;
- korak 6: $[x(k), y(k)] = [1.75, 1.7656]$, $z(k) = 1.7578$,
  $f(x(k)) = -0.0617$, $f(y(k)) = 0.1144$, $f(z(k)) = 0.0254$;
- korak 7: $[x(k), y(k)] = [1.75, 1.7578]$, $z(k) = 1.7539$,
  $f(x(k)) = -0.0617$, $f(y(k)) = 0.0254$, $f(z(k)) = -0.0184$;
- korak 8: $[x(k), y(k)] = [1.7539, 1.7578]$, $z(k) = 1.7559$,
  $f(x(k)) = -0.0184$, $f(y(k)) = 0.0254$, $f(z(k)) = 0.0034$;
- korak 9: $[x(k), y(k)] = [1.7539, 1.7559]$, $z(k) = 1.7549$,
  $f(x(k)) = -0.0184$, $f(y(k)) = 0.0034$, $f(z(k)) = -0.0075$.

Kako je $\dfrac{y_9 - y_8}{2} < 10^{-3}$, rešenje: $x^* \approx z(9) = 1.756$.

Zadatak 6. Data je funkcija

$$f(x) = \max\{x^3 - 5x + 1,\ 8 - 5x - x^4\}.$$

Sa tačnošću 10^{-2} odrediti onu nulu funkcije $f(x)$ koja se nalazi u segmentu $[1, 2]$.

Rešenje: I Izbor metoda:

Funkcija

$$f(x) = \max\{g_1(x),\ g_2(x)\},$$
$$g_1(x) = x^3 - 5x + 1, \quad g_2(x) = 8 - 5x - x^4,$$

definisana je preko elementarnih funkcija na $\mathbb{R}$, ali nije elementarna. Teško je odrediti u kojim je tačkama diferencijabilna. Zato za rešavanje jednačine ne može da se koristi Njutnov metod.

Rešićemo zadatak metodom polovljenja intervala (6).

II Metod polovljenja intervala:

Formiraju se intervali

$$[x_0, y_0] \supset [x_1, y_1] \supset \cdots \supset [x_n, y_n]$$

tako da svi sadrže tačno rešenje x^*. Približno rešenje je

$$z_n = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Proces se prekida kada je $\dfrac{y_n - x_n}{2} < \varepsilon$.

Početni interval: $[x_0, y_0] = [1., 2.]$.

Kako je $\dfrac{|y_0 - x_0|}{2} \geq \varepsilon$, izračunavamo $z_0 = \dfrac{x_0 + y_0}{2} = 1.5$.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= \max\{g_1(x_0), g_2(x_0)\} = \max\{g_1(1.), g_2(1.)\} \\
&= \max\{-3., 2.\} = 2.; \\
f(y_0) &= \max\{g_1(y_0), g_2(y_0)\} = \max\{g_1(2.), g_2(2.)\} \\
&= \max\{-1., -18.\} = -1.; \\
f(z_0) &= \max\{g_1(z_0), g_2(z_0)\} = \max\{g_1(1.5), g_2(1.5)\} \\
&= \max\{-3.125, 4.562\} = -3.125.
\end{aligned}
$$

Kako je $f(x_0) \cdot f(z_0) < 0$, funkcija menja znak u intervalu $[x_0, y_0]$, što znači da se u njemu nalazi rešenje jednačine. Zato za novi interval uzimamo

$$[x_1, y_1] = [x_0, z_0] = [1., 1.5].$$

Rezultati u sledećim iteracijama predstavljeni su u tabeli

$$\delta_k = \frac{y_k - x_k}{2}$$

k	x_k	y_k	z_k	δ_k	$g_1(x_k)$	$g_2(x_k)$	$f(x_k)$	$g_1(y_k)$	$g_2(y_k)$	$f(y_k)$	$g_1(z_k)$	$g_2(z_k)$	$f(z_k)$
1	1.	1.5.	1.25	0.25.	−3.	2.	2.	−3.125	−4.562	−3.125	−3.297	−0.691	−0.691
2	1.	1.25.	1.125	0.125	−3.	2.	2.	−3.297	−0.691	−0.691	−3.201	0.773	0.773
3	1.125	1.25	1.186	0.063	−3.201	0.773	0.773	−3.297	−0.691	−0.691	−3.263	0.074	0.074
4	1.186	1.25	1.219	0.032	−3.263	0.074	0.074	−3.297	−0.691	−0.691	−3.283	−0.300	−0.300
5	1.186	1.219	1.203	0.016	−3.263	0.074	0.074	−3.283	−0.300	−0.300	−3.274	−0.111	−0.111
6	1.186	1.203	1.195	0.008									

Rešenje: $x^* \approx z_6 = 1.195.$