Čas 11

1 Teorijski uvod

Definicija 1. *Graf* $G = (V, E)$, $|V| = n$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, *kod kojeg je svaka grana incidentna sa jednim čvorom iz skupa* V_1 *i jednim čvorom iz skupa* V_2, *naziva se bipartitnim (dvodelnim). Ako je pri tome svaki čvor iz particije* V_1 *susedan sa svakim čvorom iz particije* V_2, *graf* G *je kompletan bipartitni graf,* K_{n_1,n_2}, $n_1 = |V_1|$, $n_2 = |V_2|$, $n_1 + n_2 = n$.

Definicija 2. *Multigraf (graf) je polu-Ojlerov ako u njemu postoji prost put, koji se naziva Ojlerov, koji sadrži sve njegove grane.*

Definicija 3. *Multigraf (graf) je Ojlerov ako u njemu postoji ciklus, koji se naziva Ojlerov, koji sadrži sve njegove grane.*

Dva Ojlerova ciklusa (puta) u multigrafu (grafu) su različita ako im je različit raspored grana.

Teorema 1. *Povezan multigraf (graf) je Ojlerov ako i samo ako je stepen svakog njegovog čvora paran broj.*

Teorema 2. *Povezan multigraf (graf) je polu-Ojlerov ako i samo ako sadrži nula ili dva čvora neparnog stepena.*

Flerijev algoritam za nalaženje Ojlerovog ciklusa

Korak 1. Izabere se proizvoljan čvor v_1, $v_1 \in V$, i formira inicijalni put (ciklus)

$$\omega_1 := v_1 \,.$$

Korak 2. Neka je određen put

$$\omega_i := v_1 \,-\, e_2 \,-\, v_2 \,-\, \cdots \,-\, e_i \,-\, v_i \,.$$

Proverava se da li je familija $E_i = E \backslash \{e_2, e_3, \ldots, e_i\}$ prazna. Ako jeste, ide se na Korak 4. Ako nije, ide se na Korak 3.

Korak 3. Bira se grana e_{i+1} iz familije E_i na osnovu sledećih kriterijuma:

a) grana e_{i+1} je incidentna sa čvorom v_i ,

b) grana e_{i+1} nije most u multigrafu (grafu) $G_i = (V, E_i)$, osim ako ne postoji drugi izbor.

Formira se put ω_{i+1} tako što se putu ω_i doda grana e_{i+1} i čvor v_{i+1}. Prelazi se na Korak 2.

Korak 4. Kraj, ω_i je traženi put (ciklus).

Definicija 4. *Multigraf (graf) je polu-Hamiltonov ako postoji elementarni put, koji se naziva Hamiltonov, koji sadrži sve njegove čvorove.*

Definicija 5. *Multigraf (graf) je Hamiltonov ako postoji prost ciklus, koji se naziva Hamiltonov, koji sadrži sve njegove čvorove.*

Teorema 3. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 3$, povezan graf. Ako za stepen svakog njegovog čvora v, $v \in V$, važi nejednakost $d(v) \geq \frac{n}{2}$, tada je on Hamiltonov.*

Teorema 4. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, povezan graf. Ako za svaka dva njegova nesusedna čvora u i v važi nejednakost $d(u) + d(v) \geq n$, on je Hamiltonov.*

Neka je $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, povezan graf u kome je svakoj grani e_i dodeljena težina $|e_i|$. Sledeći algoritam se može iskoristiti za nalaženje težinskog Hamiltonovog puta (ciklusa), ako postoji. Dobijeno rešenje ne mora biti optimalno.

Algoritam najbližeg suseda

Korak 1. Inicijalno težinski Hamiltonov ciklus, ω, je prazan, $\omega := \varnothing$, i njegova težina je nula, $|\omega| = 0$.

Korak 2. Neka je formiran put

$$\omega := v_1 - e_2 - v_2 - \cdots - e_k - v_k$$

čija je težina

$$|\omega| = |e_2| + |e_3| + \cdots + |e_k|\,.$$

Iz skupa $V_k = V \backslash \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ biramo čvor v_{k+1} koji je najbliži čvoru v_k. Čvor v_{k+1} i granu $e_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ pridružujemo putu ω

$$\omega := v_1 - e_2 - v_2 - \cdots - e_k - v_k - e_{k+1} - v_{k+1}\,,$$

a težinu $|e_{k+1}|$ dodajemo težini $|\omega|$,

$$|\omega| := |\omega| + |e_{k+1}|\,.$$

Korak 3. Proverava se da li je $v_{k+1} = v_1$. Ako jeste, ide se na Korak 4. Ako nije, ide se na Korak 2.

Korak 4. Kraj. Traženi ciklus je ω, čija je težina $|\omega|$.

2 Zadaci

Zadatak 1.

Na teniskom meču između ,,plave" i ,,crvene" ekipe, po principu svaki sa svakim, ,,plava" ekipa je ostvarila 4 puta više pobeda od ,,crvene". Ako su ekipe imale isti broj igrača, koliko je najmanje igrača učestvovalo na turniru?

Rešenje. Zadatku možemo pridružiti kompletan bipartitni graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$, pri čemu čvorovi particije V_1 odgovaraju igračima ,,plave", a particije V_2 igračima ,,crvene" ekipe. Po uslovima zadatka važi $|V_1| = |V_2| = n$ i $|E| = n^2$. Neka je x broj grana koje odgovaraju pobedama ,,crvene" ekipe. Tada ,,plavom" timu odgovara $4x$ grana. Važi jednakost

$$x + 4x = n^2.$$

Kako je x prirodan broj, zaključujemo da je $x = 5$ najmanje rešenje, te je u meču učestvovalo $2n = 10$ igrača.

Zadatak 2.

Na predavanjima je bilo više od 90, a manje od 108 studenata. Svaki mladić poznaje tačno četiri devojke, a svaka devojka tačno pet mladića. Koliko je ukupno studenata bilo na predavanjima?

Rešenje. Pridružimo zadatku bipartitni graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$, pri čemu čvorovima particije V_1 odgovaraju mladići, a particije V_2 devojke. Neka je $|V_1| = n_1$ i $|V_2| = n_2$. Kako svaki mladić poznaje 4 devojke, ukupan broj grana je $|E| = 4n_1$. Slično, $|E| = 5n_2$. Iz jednakosti $4n_1 = 5n_2$ sledi da je $n_1 = 5t$, $n_2 = 4t$, $t \in \mathbb{N}$. Iz uslova zadatka je $90 < n_1 + n_2 < 108$, tj. $10 < t < 12$, pa je $t = 11$. Dakle, na predavanjima je bilo 55 mladića i 44 devojke, odnosno ukupno 99 studenata.

Zadatak 3.

Neka je dat graf G čiji je skup čvorova skup uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dva čvora su susedna ako i samo ako se odgovarajuće n-torke razlikuju u tačno jednoj koordinati.

a) Dokazati da je G n-regularan graf. Koliko čvorova i koliko grana ima graf G?

b) Dokazati da je G bipartitni graf.

Rešenje. a) Neka je $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ proizvoljan čvor grafa G. Iz uslova zadatka sledi da x ima n suseda. Kako je x proizvoljan čvor, zaključujemo da je G n-regularan graf. Broj čvorova grafa G jednak je broju n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gde je $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ukupan broj takvih n-torki je 2^n. Kako je graf n-regularan, broj grana je $m = \frac{2^n \cdot n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$.

b) Podelimo čvorove grafa G na dva skupa. Neka skupu A pripadaju n-torke koje imaju paran broj jedinica, a skupu B n-torke koje imaju neparan broj jedninica. n-torke koje odgovaraju susednim čvorovima se razlikuju na jednoj koordinati, tj. po parnosti broja jedinica. Dakle, proizvoljna dva čvora iz skupa A, odnosno B, ne mogu biti susedna i važi da svaki čvor iz A ima n suseda u B, što znači da je graf G bipartitni.

Zadatak 4.

Unutar kvadrata izabrano je 20 tačaka. One su međusobno, kao i sa temenima kvadrata, spojene dužima, koje se međusobno ne seku, tako da je kvadrat razdeljen na trouglove. Koliko je trouglova formirano u kvadratu?

Rešenje. Pridružimo zadatku graf, pri čemu su izabrane tačke i temena kvadrata čvorovi, a duži koje ih spajaju grane. Ovaj graf je planarni. Označimo sa f broj oblasti na koje ovaj graf deli ravan. Spoljašnju oblast ograđuju 4 grane. Ostale $f-1$ oblasti su trouglovi, i svaka grana je granična za 2 oblasti, tj. trougla. Ako označimo sa m broj grana u ovom grafu, važi

$$3(f-1) + 4 = 2m \quad \Rightarrow \quad m = 2 + \frac{3(f-1)}{2}.$$

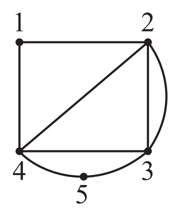
Na osnovu Ojlerove formule, pri čemu je broj čvorova $n = 24$, važi jednakost

$$24 - \left(\frac{3(f-1)}{2} + 2 \right) + f = 2,$$

te je $f = 43$. To znači da ima 42 trougla u kvadratu.

Zadatak 5.

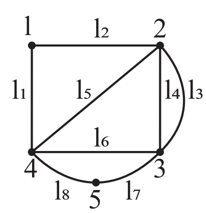
Multigraf $G = (V, E)$ prikazan je na sledećoj slici. Naći Ojlerov ciklus u njemu počev od čvora 4. Šta se događa ako iz ovog multigrafa odstranimo čvor 5?



Rešenje. Dati multigraf sadrži sve čvorove parnog stepena, te je Ojlerov. Označimo sa $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$ i l_8 grane ovog multigrafa, pri čemu indeksi grana određuju redosled njihovih pojavljivanja u Ojlerovom ciklusu

$$l_1 \to l_2 \to l_3 \to l_4 \to l_5 \to l_6 \to l_7 \to l_8.$$

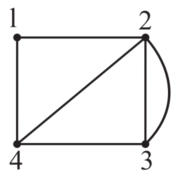
Primer Ojlerovog ciklusa za dati multigraf prikazan je na sledećoj slici



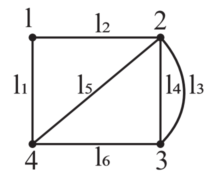
Ako izostavimo čvor 5 u multigrafu, dobijamo novi multigraf prikazan na donjoj slici pod a). On sadrži dva čvora neparnih stepena, te je polu-Ojlerov. Novi multigraf sadrži Ojlerov put, tj. prost put koji sadrži sve njegove grane tačno jedanput. Primer Ojlerovog puta je

$$l_1 \to l_2 \to l_3 \to l_4 \to l_5 \to l_6$$

prikazan na slici pod b).



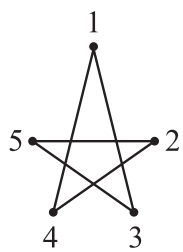
a)



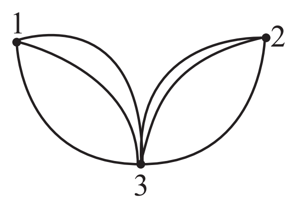
b)

Zadatak 6.

Da li se mogu nacrtati figure, prikazane na sledećoj slici, olovkom u jednom potezu, pri čemu se svaka linija između dve konačne tačke crta samo jednom?



a)



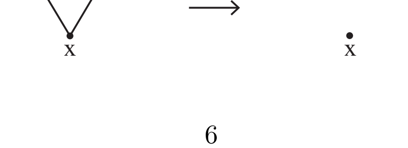
b)

Rešenje. Da, jer je graf pod a) Ojlerov, a pod b) polu-Ojlerov multigraf. Crtanje grafa pod a) možemo započeti iz bilo kog čvora, dok crtanje multigrafa pod b) možemo započeti iz nekog čvora sa neparnim stepenom, 1 ili 2.

Zadatak 7.

Neka je dat Ojlerov graf G. Ako su e_1 i e_2 grane grafa G koje imaju zajednički čvor, dokazati da graf G sadrži Ojlerov ciklus u kome se e_1 i e_2 pojavljuju jedna za drugom.

Rešenje. Neka je $e_1 = \{x, y\}$, $e_2 = \{x, z\}$. Pretpostavimo da je stepen čvora x veći od 2. Neka je multigraf G_1 dobijen odstranjivanjem grana e_1 i e_2 iz grafa G i dodavanjem nove grane $\{y, z\}$.



Tada svi čvorovi multigrafa G_1 imaju isti stepen kao u G, osim čvora x čiji je stepen tačno manji za 2. Kako su stepeni svih čvorova u G parni, jer je G Ojlerov, to su stepeni svih čvorova u G_1 takođe parni. Dakle, G_1 je Ojlerov multigraf. Tada postoji Ojlerov ciklus u G_1. Taj ciklus sadrži granu $\{y, z\}$, pa ako je zamenimo granama e_1 i e_2 dobijamo Ojlerov ciklus u grafu G koji sadrži grane e_1 i e_2 jednu za drugom. Neka je sada stepen čvora x jednak 2. U ovom slučaju u Ojlerovom ciklusu se grane e_1 i e_2 pojavljuju jedna za drugom.

Zadatak 8.

Da li bipartitni graf sa neparnim brojem čvorova može biti Hamiltonov?

Rešenje. Pretpostavimo da postoji Hamiltonov ciklus

$$x \to \cdots \to x$$

u bipartitnom grafu $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V| = n$, $|E| = m$, gde je n neparan broj. Hamiltonov ciklus je dužine n. Svaki put neparne dužine u bipartitnom grafu polazi iz čvora jedne particije, a završava se u čvoru druge particije. Kako je Hamiltonov ciklus neparne dužine, važi $x \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, bipartitni graf sa neparnim brojem čvorova ne može biti Hamiltonov.

Zadatak 9.

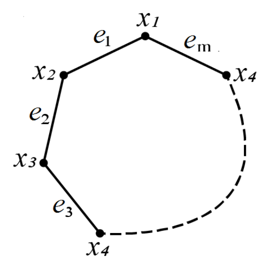
Dokazati da je graf grana svakog Ojlerovog grafa istovremeno Ojlerov i Hamiltonov?

Rešenje. Neka je graf G Ojlerov i $L(G)$ njegov graf grana. Kako je graf G Ojlerov, znamo da je stepen svakog njegovog čvora paran broj. Neka je e proizvoljna grana grafa G, tj. proizvoljan čvor grafa $L(G)$. Neka grana e spaja čvorove x i y. Stepen čvora e je

$$d(e) = d(x) - 1 + d(y) - 1 = d(x) + d(y) - 2.$$

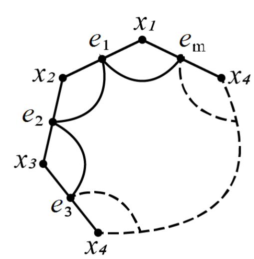
Kako su $d(x)$ i $d(y)$ parni brojevi, sledi da je $d(e)$ paran. Pokazali smo da je stepan svakog čvora grafa $L(G)$ paran, i kako je povezan, to je graf $L(G)$ Ojlerov.

Kako je graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, Ojlerov, postoji ciklus koji sadrži sve njegove grane.



Na osnovu ovog ciklusa vidimo da su grane (čvorovi u $L(G)$) e_i i e_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, i e_1 i e_m susedne u grafu $L(G)$. Sada možemo formirati ciklus u grafu $L(G)$ na sledeći način

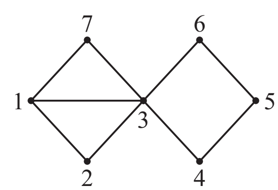
$$e_1 \to e_2 \to e_3 \to \cdots \to e_m \to e_1.$$



Taj ciklus je Hamiltonov, te je graf $L(G)$ Hamiltonov.

Zadatak 10.

Primenom Flerijevog algoritma naći Ojlerov put u grafu prikazanom na sledećoj slici.



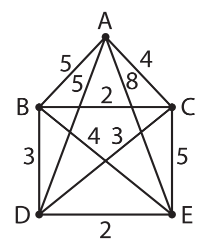
Rešenje. Dati graf je polu-Ojlerov jer sadrži tačno dva čvora, 1 i 3, neparnog stepena, a ostali su parnog stepena. Nalaženje Ojlerovog puta može da se obavi na dva načina. Uvođenjem nove grane $\{1, 3\}$ dati graf postaje Ojlerov multigraf. Primenom Flerijevog algoritma dobija se Ojlerov ciklus. Odstranjivanjem grane

$\{1, 3\}$ iz ovog ciklusa dobijamo Ojlerov put u datom grafu. Drugi način je da se direktno primeni Flerijev algoritam, pri čemu polazni čvor mora biti neparnog stepena, 1 ili 3. Tako, na primer, Ojlerov put je definisan sledećim nizom ω

$$\begin{aligned}\omega :=& 3, \{2, 3\}, 2, \{1, 2\}, 1, \{1, 3\}, 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\},\\ & 5, \{5, 6\}, 6, \{3, 6\}, 3, \{3, 7\}, 7, \{1, 7\}, 1.\end{aligned}$$

Zadatak 11.

Primenom Algoritma najbližeg suseda naći težinski Hamiltonov ciklus u grafu prikazanom na sledećoj slici, koji polazi iz: a) čvora A, b) čvora D.



Rešenje. Tražena rešenja su prikazana u sledećim tabelama.

a)

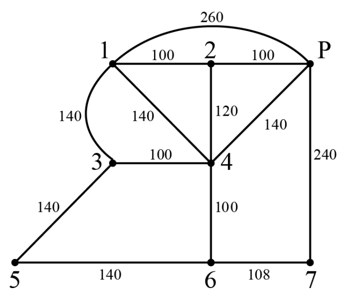
korak	početak	put - ω	kraj	$\|\omega\|$
1	O	$\omega := A$	A	$\|\omega\| = 0$
2	A	$\omega := A - C$	C	$\|\omega\| = 4$
3	C	$\omega := A - C - B$	B	$\|\omega\| = 4 + 2 = 6$
4	B	$\omega := A - C - B - D$	D	$\|\omega\| = 6 + 3 = 9$
5	D	$\omega := A - C - B - D - E$	E	$\|\omega\| = 9 + 2 = 11$
6	E	$\omega := A - C - B - D - E - A$	A	$\|\omega\| = 11 + 8 = 19$

b)

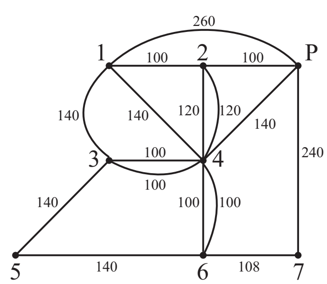
korak	početak	put - ω	kraj	$\|\omega\|$
1	O	D	D	0
2	D	$D - E$	E	2
3	E	$D - E - B$	B	6
4	B	$D - E - B - C$	C	8
5	C	$D - E - B - C - A$	A	12
6	A	$D - E - B - C - A - D$	D	17

Zadatak 12.

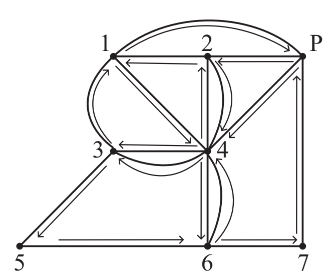
Poštar mora da raznese poštu po svim kućama svog reona, koje su razmeštene duž ulica čija je šema prikazana na slici dole. Na ovoj šemi su naznačene dužine ovih ulica. Raskrsnice su označene brojevima od 1 do 7, a pošta slovom P. Naći najkraći put koji mora da prođe poštar ako svoju šetnju započinje i završava u pošti.



Rešenje. Šema data na prethodnoj slici predstavlja graf, pri čemu su raskrsnice i pošta čvorovi, a ulice između njih grane. Ako bi on bio Ojlerov, postojao bi jedinstven, pa samim tim i minimalni, put koji bi polazio i završavao se u čvoru P. S obzirom na to da u grafu postoje 4 čvora, a to su čvorovi 2, 3, 4 i 6, neparnog stepena, ovaj graf nije Ojlerov. Da bi postao Ojlerov multigraf, moramo dodati nove grane, vodeći računa o minimalnosti njihovih dužina. U tom cilju čvor 4 spojimo redom sa čvorovima 2, 3 i 6, sa po jednom granom, istih dužina sa već postojećim. Dobijeni multigraf, slika pod a), je Ojlerov te ima jedinstveni (Ojlerov) ciklus. On je dužine 2148, i označen je na slici b).



a)



b)

Sam obilazak je predložen na sledeći način

$$P \to 2 \to 4 \to 2 \to 1 \to P \to 4 \to 3 \to 1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4 \to 6 \to 7 \to P.$$