МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ НУМЕРИЧКИ АЛГОРИТМИ

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ГРЕШАКА

Садржај

О предмету

Циљ предмета

- Усвајање основних теоријских знања из области Нумеричка анализа
- Упознавање са методима нумеричке математике за решавање различитих проблема
- Оспособљавање за препознавање одговарајућих метода за конкретне проблеме
- Овладавање применама метода

Садржај предмета

- Елементи теорије грешака
- Нумеричко решавање нелинеарних једначина и система нелинеарних једначина
  - Општа теорија итеративних процеса
  - Методи за решавање нелинеарних једначина и система
- Нумерички методи у линеарној алгебри
  - Директни методи за решавање система линеарних једначина
  - Итеративни методи за решавање система линеарних једначина
  - Инверзија матрица
- Апроксимација функција
  - Интерполација
  - Најбоље апроксимације
- Нумеричко диференцирање
- Нумеричка интеграција
- Нумеричко решавање диференцијалних једначина

Појам грешке

Извори грешака

Неотклоњиве:

1. Грешка математичког модела, који увек одступа од реалног процеса;
2. Грешка због рада са приближним вредностима улазних параметара;

Контролисане:

3. Грешка нумеричких метода за приближно решавање математичког модела;
4. Грешка израчунавања због заокруживања међурезултата.

Грешка метода

- $\sqrt{9} = ?$

Итеративни процес:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right),\ a_0 > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} \approx a_n \quad \text{за довољно велико } n$$

$$x = 9: \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \approx a_n$$

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{9}{1}\right) = \boxed{5},\ a_2 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{9}{5}\right) = \boxed{3.4}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(3.4 + \frac{9}{3.4}\right) = \boxed{3.02353},$$

$$a_4 = \boxed{3.00009},\ \ldots$$

Грешка метода

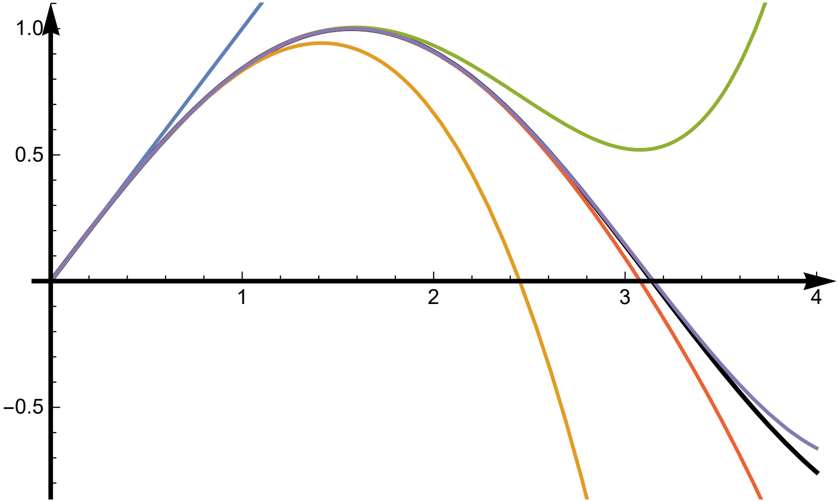
- $\sin(\pi/6) = ?$

  Тејлоров развој:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$
$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$
$$R_n(x) = o(x^n), \quad x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + o(x^9)$$

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx T_1(x), & \sin(\pi/6) &\approx 0.523598775598298 \\
\sin x &\approx T_3(x), & \sin(\pi/6) &\approx 0.499674179394364 \\
\sin x &\approx T_5(x), & \sin(\pi/6) &\approx 0.500002132588792 \\
\sin x &\approx T_7(x), & \sin(\pi/6) &\approx 0.499999991869023 \\
\sin x &\approx T_9(x), & \sin(\pi/6) &\approx 0.500000000020280
\end{aligned}$$


1.0
0.5
−0.5
1
2
3
4

Апсолутна и релативна грешка

При извођењу алгебарских операција са бројевима или израчунавања вредности функција, нарочито применом рачунара, у општем случају се не може радити са тачним, већ са приближним бројевима.

$$\frac{1}{3}, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad e, \quad \sin 5, \quad \ln 10, \quad \arctan 2, \ldots$$

Приближан број $\overline{x}$ броја $x \in \mathbb{R}$ је број који се незнатно разликује од њега и замењује га у израчунавањима.

Тачност показује колико се приближан број разликује од праве вредности.

$$\overline{x} \text{ одређен са тачношћу } \varepsilon: \quad x \in [\overline{x} - \varepsilon, \ \overline{x} + \varepsilon]$$

Апсолутна и релативна грешка

- $e = |x - \overline{x}|$ апсолутна грешка
- граница апсолутне грешке – број који није мањи од апсолутне грешке

$$|x - \overline{x}| \leq \Delta(\overline{x})$$

- $r = \dfrac{|x - \overline{x}|}{|x|}, \quad r = \dfrac{|x - \overline{x}|}{|\overline{x}|} \; (x \neq 0)$ релативна грешка
- горња граница релативне грешке – број који није мањи од релативне грешке

$$\frac{|x - \overline{x}|}{x} \leq \delta(\overline{x})$$

Значајне и сигурне цифре

$$x = \pm(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_k \cdot 10^{n-k+1} + a_{k+1} \cdot 10^{n-k} + \cdots)$$

значајна цифра – свака цифра, осим нула које служе за фиксирање децималне тачке (почевши од прве цифре слева, која је различита од нуле)

Пример У броју $\overline{a} = 0.03120700$ све цифре, изузев прве две нуле, су значајне.
Прве две нуле нису значајне цифре јер број може да се напише и без њих: $\overline{a} = 3.120700 * 10^{-2}$.
Последње две нуле су значајне цифре јер указују на тачност са којом је број дат.

Значајне и сигурне цифре

Значајна цифра a_k је сигурна цифра ако апсолутна грешка броја није већа од декадног чиниоца који одговара тој цифри, тј. ако је

$$e \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{n-k+1}.$$

Ако $\overline{x}$ има k сигурних цифара, тада је

- $e = |x - \overline{x}| \leq 10^{n-k+1}$,
- $r = \dfrac{|x - \overline{x}|}{|\overline{x}|} \leq 0.5 \cdot 10^{k+1} = 5 \cdot 10^k$.

Пример $\overline{a} = 0.03120700$

Сигурне цифре 3, 1, 2 и 0.

Последње три цифре (7; 0; 0) нису сигурне, јер у броју а чија је $\overline{a}$ приближна вредност, уместо ових цифара могу стајати и ма које друге.

Заокруживање

$$x = \pm(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_k \cdot 10^{n-k+1} + a_{k+1} \cdot 10^{n-k} + \cdots)$$

При заокруживању:

- a_k се не мења ако је
  - $a_{k+1} < 5$ или
  - $a_{k+1} = 5$ и $a_{k+l} = 0$ за све $l = 1, 2, \ldots$ и a_k је парно;
- a_k се повећава за 1 ако је
  - $a_{k+1} > 5$ или
  - $a_{k+1} = 5$ и $a_{k+l} > 0$ за бар једно $l = 1, 2, \ldots$ или
  - $a_{k+1} = 5$ и $a_{k+l} = 0$ за све $l = 1, 2, \ldots$ и a_k је непарно.

Важно! При рачунским операцијама задржава се исти број сигурних цифара као број који их има најмање.

Заокруживање

Пример

$$0.2037x + 0.3122y = 0.8472$$
$$0.4082x + 0.6247y = 0.9745$$

- Израчунавање са 3 значајне цифре:

$$0.204x + 0.312y = 0.847 \quad / \quad \cdot (-0.408/0.204 = -2)$$
$$0.408x + 0.625y = 0.974$$

$$0.204x + 0.312y = 0.847$$
$$0.001y = -0.720$$

$$y = -720$$

Заокруживање

- Израчунавање са 4 значајне цифре:

$$0.2037x + 0.3122y = 0.8472 \ / \cdot (-0.4082/0.2037 \approx -2.004)$$
$$0.4082x + 0.6247y = 0.9745$$

$$-0.0009y = -0.7233$$

$$y = 803.7$$

- Израчунавање са 8 значајних цифара:

$$0.2037x + 0.3122y = 0.8472 \ / \cdot (-0.4082/0.2037 \approx -2.0039273)$$
$$0.4082x + 0.6247y = 0.9745$$

$$-0.00092610306y = -0.72322721$$

$$y = 780.93599$$

Стабилност

Стабилност алгоритма показује меру његове осетљивости на грешке заокруживања у рачунском процесу.

Пример

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}.$$

$$e^{0.5} = 1.6487212707001\ldots \qquad e^{-0.5} = 0.6065306597126\ldots$$

$$e^{0.5} \approx 1.64871962 \qquad e^{-0.5} \approx 0.60653212$$

Модификација алгоритма:

$$e^x \approx \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, & x \geq 0, \\ \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}}, & x < 0, \end{cases} \qquad e^{-0.5} \approx 0.60653127$$

Условљеност

Условљеност пролема показује меру утицаја промене улазних података на промену излазних резултата.

Код проблема који су слабо условљени[1] мале промене улазних података изазивају велике промене у резултатима.

Пример Слабо условљени системи линеарних једначина:

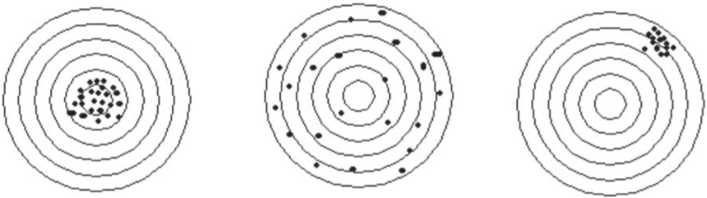
- $$\begin{aligned} x + 4y &= 5 \\ x + 4.00001y &= 5.00001 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x + 4y &= 5 \\ x + 3.99999y &= 5.00002 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 13 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

[1] илл-цондитионед

Прецизност и тачност

- Тачност података означава колико су они близу праве вредности и она се мери апсолутном и релативном грешком.
- Прецизност података означава њихову међусобну блискост и она се мери стандардном девијацијом.



tačno i precizno netačno i neprecizno netačno i precizno

Прецизност и тачност