Lekcija 8

8 Bipartitni grafovi. Planarni grafovi

8.1 Bipartitni grafovi

Definicija 1. *Graf* $G = (V, E)$*,* $|V| = n$*,* $V = V_1 \cup V_2$*,* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*, kod koga je svaka grana incidentna sa jednim čvorom skupa* V_1 *i jednim čvorom skupa* V_2 *naziva se bipartitni (dvodelni).*

Definicija 2. *Neka je* $G = (V_1 \cup V_2, E)$*,* $|V_1| = p$*,* $|V_2| = q$*,* $p + q = n$*, bipartitni graf. Ako je svaki čvor iz skupa* V_1 *povezan sa svakim čvorom iz skupa* V_2*, i obrnuto, on je kompletan bipartitni graf. Označava se sa* $K_{p,q}$*.*

Pitanja

1. Da li je put P_n bipartitni graf?
2. Da li je svako stablo bipartitni graf?
3. Da li je zvezda, $K_{1,n-1}$, kompletan bipartitni graf?
4. Da li je zvezda, $K_{1,n-1}$, jedino stablo koje je kompletan bipartitni graf?

Zadatak 1. Ako je $G = (V_1 \cup V_2, E)$, $|V_1| = p$, $V_2| = q$, $(G = K_{p,q})$, kompletan bipartitni graf, koliko on ima grana?

Zadatak 2. Neka je

a) $G = K_{2,2}$,

b) $G = K_{1,3}$.

Naći karakteristične polinome i sopstvene vrednosti ovih grafova. Naći karakteristiňe polinome Laplasove matrice i Laplasove sopstvene vrednosti ovih grafova.

Primer 1. Naći broj čvorova kompletnog bipartitnog grafa $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ako je $m = |E| = 105$.

Neka je $V_1| = p$, $|V_2| = q$, $p + q = n$. Kako je

$$m = |E| = 105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,,$$

važe jednakosti

$$\begin{aligned} m &= p \cdot q = 1 \cdot 105\,, \\ m &= 3 \cdot 35\,, \\ m &= 5 \cdot 21\,, \\ m &= 7 \cdot 15\,. \end{aligned}$$

Tako imamo četiri rešenja

$$\begin{aligned} n &= p + q = 1 + 105 = 106 \\ n &= p + q = 3 + 35 = 38 \\ n &= p + q = 5 + 21 = 26 \\ n &= p + q = 7 + 15 = 22\,. \end{aligned}$$

Graf sa najmanjim brojem čvorova je graf $G = K_{7,15}$, a sa najvećim brojem čvorova $G = K_{1,105}$.

Primer 2. Naći kompletan bipartitni graf $G = K_{p,q}$, ako postoji, ako je $m = p \cdot q = 105$ i $p = 17$.

Kako jednačina

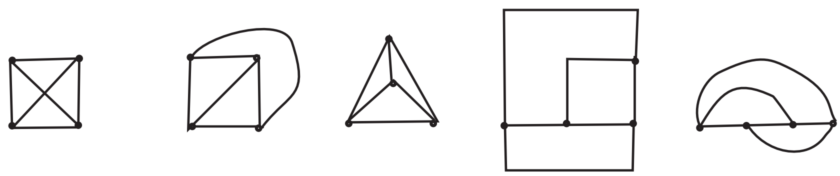
$$17 \cdot q = 105$$

nema celobrojno rešenje, graf $G = K_{p,q}$ ne postoji.

8.2 Planarni grafovi

Definicija 3. *Dati graf se naziva ravnim ako je smešten u nekoj ravni i grane mu se ne seku. Graf je planaran ako je izomorfan nekom ravnom grafu*

Grafovi prikazani na sledećoj slici su medjusobno izomorfni i planarni.



Planarnost može da se posmatra i na sferi ili nekoj drugoj geometrijskoj figuri.

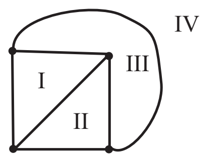
Definicija 4. *Graf koji je planaran ali dodavanjem bilo koje nove grane gubi to svojstvo naziva se maksimalno planarnim grafom.*

<u>Primer 1.</u> Na sledećoj slici su prikazani grafovi G_1 i G_2. Graf G_1 je maksimalno planaran bipartitni graf, a G_2 to nije.

G_1 G_2

Definicija 5. *Neograničeni deo ravni, u kojoj je predstavljen graf, naziva se spoljašnjom oblasti, a svi ostali ograničeni delovi su unutrašnje oblasti.*

<u>Primer 2.</u> Graf prikazan na sledećoj slici deli ravan na četiri oblasti: tri su unutrašnje, I, II i III, a IV je spolašnja.



Teorema 1. *Neka je G dati povezan planarni graf sa n čvorova i m grana. Tada on deli ravan na*

$$f = m - n + 2$$

oblasti.

Dokaz. Uočimo izraz

$$g = f + n - m\,.$$

Pretpostavimo da smo iz povezanog planarnog grafa udaljili jednu granu, koja nije most ili viseći most. Tada je broj čvrova ostao isti, broj unutrašnjih oblasti se smanjio za jedan. Tada za izraz g važi

$$g = (f - 1) + n - (m - 1) = f + n - m\,,$$

tj. ostao je nepromenjen.

Nastavimo ovaj postupak dok na osnovu datog povezanog planarnog grafa ne dobijemo stablo. Tada se broj čvorova nije promenio, broj grana se smanjio za $m - n + 1$, a broj oblasti se takodje smanjio za ovaj broj. To znači da je izraz g osstao nepromenjen. S druge strane, stablo je povezan planarni graf koji ima n čvorova, $m = n - 1$ grana, i odvaja $f = 1$ oblast u ravni. Tako je

$$g = f + n - m = 1 + n - n + 1 = 2\,,$$

čime je dokaz završen. □

Pitanje 1:

- Šta se dogadja sa izrazom g ako se iz planarnog povezanog grafa odstrani jedan čvor, koji nije artikulacioni čvor?
- Šta se dogadja sa izrazom g ako se neka dva čvora spoje novom granom, čime nije narušena planarnost?

Teorema 2. *Neka je G planarni graf koji ima n čvorova, m grana, p komponenti povezanosti i deli ravan na f oblasti. Dokazati da tada važi jednakost*

$$f = m - n + p + 1\,.$$

Teorema 3. *U povezanom planarnom grafu postoji bar jedan čvor stepena manjeg od 6.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ graf sa n čvorova i m grana, pri čvemu je $d(v_i) \geq 6$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada je

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq \sum_{i=1}^{n} 6 = 6n\,,$$

te je

$$n \leq \frac{1}{3}m\,.$$

S druge strane svaka unutrašnja oblast, koju ograničava planarni graf je ograničena sa najmanje tri grane i važi nejednakost

$$3f \leq 2m, \quad \text{tj.} \quad f \leq \frac{2}{3}m\,.$$

Ako pretpostavimo da je graf povezan, važi jednakost

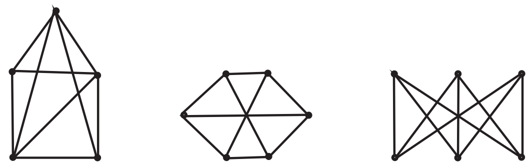
$$f = m - n + 2\,,$$

te je

$$2 = f - m + m \leq \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}m - m = 0\,,$$

što je nemoguće. To znači da je pretpostavka $d(v_i) \geq 6$ bila pogrešna, te postoji bar jedan čvor čiji je stepen manji od 6. □

Teorema 4. *Potpuni (kompletan) pentagraf, K_5, i kompletan bitrigraf, $K_{3,3}$, nisu planarni grafovi*



K_5 $\qquad\qquad$ $K_{3,3}$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdjenju teoreme, da je K_5 planaran. On ima 5 čvorova $n = 5$, deset grana $m = 10$ i ograničavao bi u ravni

$$f = m - n + 2 = 10 - 5 + 2 = 7\,,$$

oblasti.

S druge strane, najmanja unutrašnja oblast je trougao, te mora da važi

$$3f \leq 2m\,.$$

Ali tada bo važilo

$$3 \cdot 7 \leq 2 \cdot 10, \quad \text{tj.} \quad 21 \leq 20\,,$$

što nije tačno. To znači da pretpostavka da je K_5 planaran graf nije tačna.

Dokaz za $K_{3,3}$. Pretpostavimo suprotno tvrdjenju teoreme, da je $K_{3,3}$ planaran graf. On ima 6 čvorova, $n = 6$, devet grana $m = 9$ i ograničavao bi u ravni

$$f = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$$

oblasti.

S druge strane najmanja unutrašnja oblast je četvorougao, te mora da važi

$$4f \leq 2m\,.$$

Ali tada bi bilo

$$4 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9, \quad \text{tj.} \quad 20 \leq 18\,,$$

što opet nije tačno. To znači da je pretpostavka da je $K_{3,3}$ planaran, bila pogršna. □

Pitanje 2: Koji problem iz zanimljive matematike je rešen u ovoj teoremi?
Pitanje 3: Neka je G planarni graf i neka je najmanja unutrašnja oblast ograničena sa k grana. Dokazati da tada važi nejeddnakost

$$k \cdot f \leq 2m\,.$$

Postoje teoreme koje sadrže potrebne i dovoljne uslove da neki graf bude planaran.

Teorema 5. (Slabija varijanta) *Dati graf je planaran ako i samo ako ne sadrži kao delimični podgraf ni kompletan pentagraf ni potpuni bitrigraf.*

U sledećoj teoremi je odredjena veza izmedju broja grana i broja čvorova kod planarnih grafova.

Teorema 6. *Neka je G povezan planaran graf sa n čvorova i m grana. Tada važi nejednakost*

$$m \leq 3(n-2)\,.$$

Teorema 7. *Neka je G povezan maksimalno planarni graf sa n čvorova i m grana. Tada važi jednakost*

$$m = 3(n-2)\,.$$

Domaći zdatatak: Dokazati Teoreme 6 i 7.