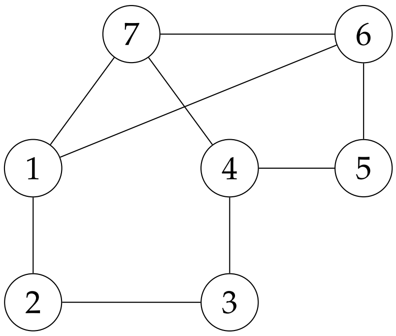
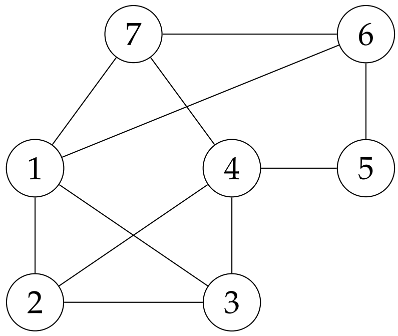
Čas 10

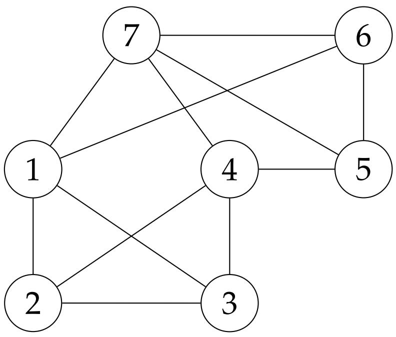
Zadatak 1. *Za svaki od grafova na sledećoj slici odrediti da li je planaran ili ne. Ako jeste planaran, nacrtati vizuelnu reprezentaciju grafa na kojoj se vidi njegova planarnost. Ako nije, objasniti zašto nije.*



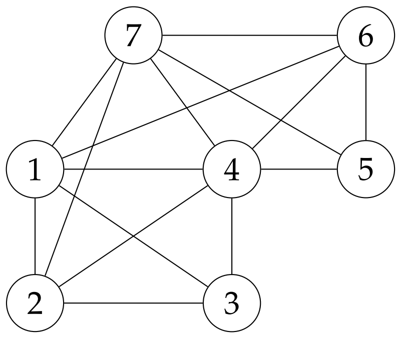
(a) G_1



(b) G_2



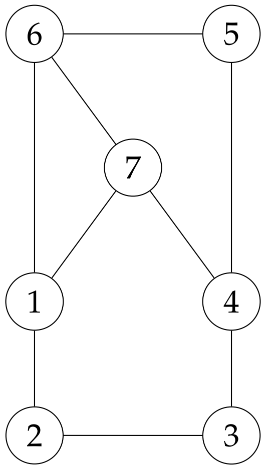
(c) G_3



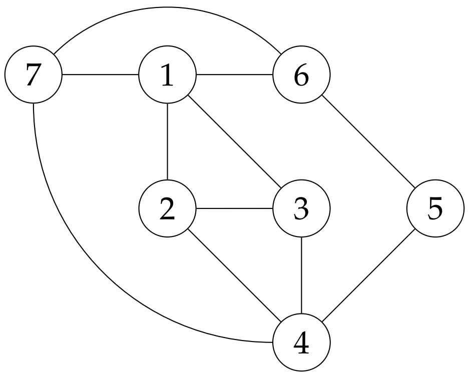
(d) G_4

Rešenje.

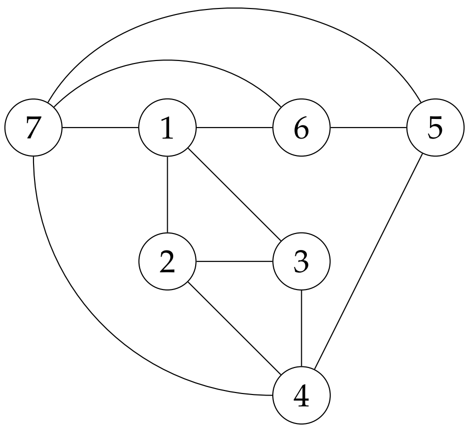
(a) Graf G_1 jeste planaran. Njegova odgovarajuća vizuelna reprezentacija data je na sledećoj slici:



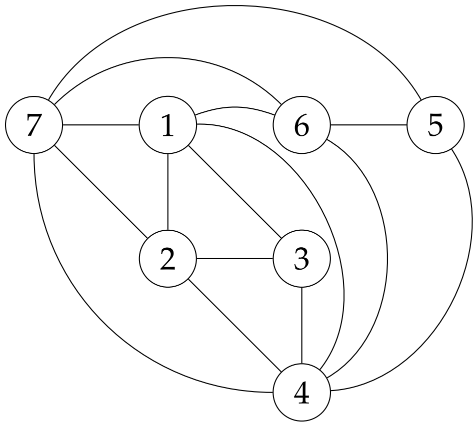
(b) Graf G_2 je takođe planaran. Njegova vizuelna reprezentacija koja direktno pokazuje planaranost data je na narednoj slici:



(c) Graf G_3 je planaran isto kao i prethodna dva. Kao adekvatan dokaz služi sledeća slika:



(d) Graf G_4 jeste planaran. Sledeća vizuelna reprezentacija dokazuje njegovu planarnost:



■

Zadatak 2. *Da li svako stablo mora da predstavlja planarni graf?*

Rešenje. Odgovor je da mora. Dokazaćemo da svako stablo može vizuelno da se predstavi u ravni na takav način da svaka njegova grana čini otvorenu duž i da nikoje dve različite grane nemaju zajedničkih tačaka niti sadrže neki od čvorova. Najlakši način da se izvede dokaz jeste preko matematičke indukcije po broju čvorova stabla.

Stablo koje se sastoji od samo 1 čvora očigledno zadovoljava navedeno tvrđenje i nema šta da se dokazuje u ovom slučaju. Pretpostavimo da svako stablo sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova ima vizuelnu reprezentaciju u ravni takvu da svaka grana čini otvorenu duž, pri čemu nikoje dve različite grane nemaju zajedničkih tačaka niti sadrže čvorove. Dokažimo da ovo tvrđenje tada mora da važi i za svako stablo sa $n+1$ čvorova.

Neka je dato stablo T sa $n+1 \geq 2$ čvorova. Svako stablo sa bar 2 čvora mora da ima list. Označimo sa x neki proizvoljno odabran list stabla T, a sa y čvor koji je njegov jedinstveni sused. Ukoliko grafu T odstranimo čvor x, novodobijeni graf je ponovo stablo. Označimo ovo stablo sa T_1. Kako T_1 ima tačno n čvorova, po induktivnoj pretpostavci zaključujemo da T_1 ima odgovarajuću vizuelnu reprezentaciju u ravni gde svakoj grani odgovara otvorena duž koja nema zajedničkih tačaka ni sa jednom drugom granom ili čvorom.

Posmatrajmo vizuelnu reprezentaciju stabla T_1 koja poštuje uslove iz tvrđenja koje dokazujemo. Ako posmatramo tačku koja odgovara čvoru y, onda sigurno postoji neka okolina ove tačke koja je disjunktna sa svakom granom koja nije incidentna sa y. Unutar ove okoline, odaberimo proizvoljnu tačku koja ne odgovara nijednom čvoru grafa tako da otvorena duž između ove tačke i y nema zajedničkih tačaka ni sa jednom granom incidentnom sa y. Ukoliko ovoj tački pridružimo čvor x i spojimo ga sa čvorom y uz pomoć duži, dobićemo vizuelnu reprezentaciju grafa T u nekoj ravni tako da je svaka grana predstavljena preko neke otvorene duži i nikoje dve različite grane nemaju zajedničkih tačaka niti sadrže neki čvor. Dakle, proizvoljno stablo sa $n+1$ čvorova mora da ima odgovarajuću vizuelnu reprezentaciju, te je tvrđenje dokazano indukcijom.

Napomena: Primetimo da smo u zadatku dokazali tvrđenje koje je jače od same plaranosti grafa. Naime, graf je planaran ako i samo ako on ima vizuelnu reprezentaciju u ravni kod koje nikoje dve različite grane nemaju zajedničkih tačaka niti sadrže neki od čvorova. Mi smo dokazali da svako stablo mora da takvu vizuelnu reprezentaciju gde su zadovoljeni svi uslovi planarnosti, plus dodatno važi ograničenje da svaka grana mora da bude otvorena duž, tj. prostire se po pravoj. ■

Zadatak 3 (2020, oktobar 2)**.**

(a) Koliko najviše grana može da ima planaran graf sa $n \geq 4$ čvorova?
(b) Koliko najviše grana može da ima bipartitan planaran graf koji sadrži $n \geq 4$ čvorova?
(c) Koliko najviše grana može da ima bipartitan planaran graf koji sadrži $n \geq 4$ čvorova i ne sadrži nijedan ciklus dužine 4?

Rešenje. U sva tri podzadatka očigledno je da postoji graf koji ima maksimalni mogući broj grana pri zadatom broju čvorova i ostalim dodatnim uslovima. Ako graf nije povezan, onda mu se može dodati neka grana koja spaja čvorove iz dve različite komponente povezanosti. Na taj način novodobijeni graf ima jednu granu više, pri čemu se ne narušava nijedan od potencijalnih uslova navedenih u podzadacima (bipartitivnost ili nepostojanje odgovarajućeg ciklusa). Zbog toga je u sva tri podzadatka pri analizi maksimalnog mogućeg broja grana odgovarajućeg grafa dovoljno uzeti u obzir samo povezane grafove.

Neka je dat povezan planaran graf sa $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ čvorova. Označimo njegov broj grana sa $m \in \mathbb{N}_0$ i njegov broj oblasti sa $f \in \mathbb{N}$. Po Ojlerovoj formuli, ovaj graf sadrži $f = m - n + 2$ oblasti, pri čemu važi

$$\sum_{i=1}^{f} e_i = 2m$$

gde $e_1, e_2, \dots, e_f \in \mathbb{N}$ označavaju koliko svaka njegova oblast ima grana.

(a) Zbog $n \geq 4$, znamo da mora da važi $e_1, e_2, \dots, e_f \geq 3$. Odavde sledi:

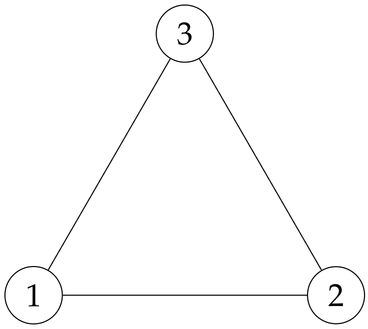
$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{i=1}^{f} e_i \\ 2m &\geq \sum_{i=1}^{f} 3 \\ 2m &\geq 3f \\ f &\leq \frac{2}{3}m \end{aligned}$$

Iz Ojlerove formule dobijamo

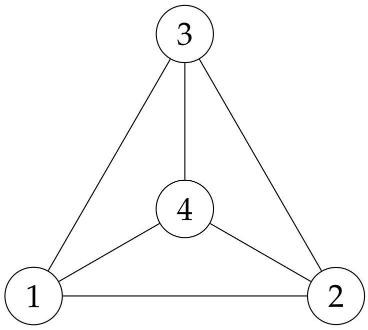
$$\begin{aligned} m - n + 2 &\leq \frac{2}{3}m \\ m - \frac{2}{3}m &\leq n - 2 \\ \frac{1}{3}m &\leq n - 2 \\ m &\leq 3(n-2) \\ m &\leq 3n - 6 \end{aligned}$$

Dakle, nijedan povezan planaran graf sa $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$ čvorova ne može imati preko $3n - 6$ grana. Kako bismo dokazali da $3n - 6$ zaista jeste maksimalan mogući broj grana, dovoljno je dati primer grafa sa n čvorova koji je povezan, planaran i sadrži ovaj broj grana.

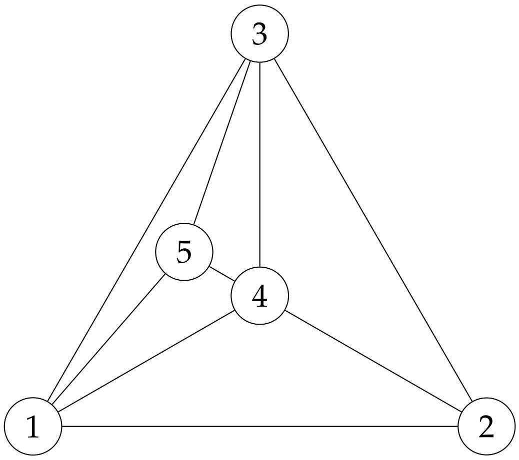
Ovakav graf je relativno lako konstruisati – u pitanju je bilo koji kompletno trijangulisan povezan graf. Na primer, neka imamo 3 čvora koja u vizuelnoj reprezentaciji grafa predstavljaju temena jednakostraničnog trougla.



Dodajmo 4. čvor tako da čini težiste ovog trougla i neka je on u vezi sa preostala 3 čvora.



Ukoliko želimo da dodamo sledeći čvor, možemo da odaberemo bilo koji postojeći trougao koji nema nijedan čvor u svojoj unutrašnjosti, novi čvor da postavimo kao njegovo težiste i da ga povežemo sa čvorovima koji čine temena trougla. Na primer:



Pri svakom dodavanju narednog čvora, graf dobije 3 nove grane. Proceduru dodavanja čvora možemo da ponavljamo sve dok ne dobijemo graf sa $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ čvorova, koliko nam i treba. Uzevši u obzir da početni graf sa 3 čvora ima 3 grane, znamo da će graf sa n čvorova imati $3 + 3 \cdot (n-3)$ grana, što je jednako

$$3 + 3 \cdot (n-3) = 3 + 3n - 9 = 3n - 6$$

tako da ova konstrukcija grafa završava dokaz.

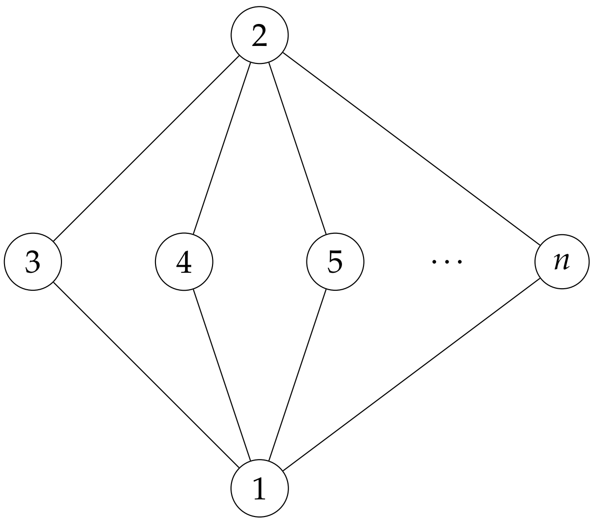
(b) Zbog $n \geq 4$, znamo da mora da važi $e_1, e_2, \ldots, e_f \geq 3$. Međutim, zbog činjenice da je graf bipartitan, znamo da nijedna njegova oblast ne može da sadrži neparan broj grana, jer bi to dovelo do postojanja ciklusa neparne dužine. Dakle, mora da važi stroža nejednakost $e_1, e_2, \ldots, e_f \geq 4$. Nadalje dobijamo

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{i=1}^{f} e_i \\ 2m &\geq \sum_{i=1}^{f} 4 \\ 2m &\geq 4f \\ f &\leq \frac{1}{2}m \end{aligned}$$

Primenom Ojlerove formule sledi:

$$\begin{aligned} m - n + 2 &\le \frac{1}{2}m \\ m - \frac{1}{2}m &\le n - 2 \\ \frac{1}{2}m &\le n - 2 \\ m &\le 2(n-2) \\ m &\le 2n - 4 \end{aligned}$$

Zaključujemo da povezan bipartitan planaran graf sa $n \in \mathbb{N},\ n \ge 4$ čvorova ne može imati preko $2n - 4$ grana. Na sledećoj slici je prikazana konstrukcija ovakvog konkretnog grafa koji ima tačno $2n - 4$ grana.



Ovaj graf je očigledno i povezan i planaran, a takođe je i bipartitan, pošto se skup čvorova može razbiti na disjunktne podskupove $\{1, 2\}$ i $\{3, 4, 5, \ldots, n\}$ tako da su sve grane između čvorova iz različitih podskupova. Broj grana je jednak $2 \cdot (n-2) = 2n - 4$, koliko i treba da bude. Dakle, maksimalan broj grana koji bipartitan planaran graf sa $n \in \mathbb{N},\ n \ge 4$ čvorova može da ima iznosi $2n - 4$.

(c) Pošto je graf bipartitan, to znači da on ne može da sadrži ciklus neparne dužine, te nijedna oblast ne može sadržati neparan broj grana. Takođe nijedna oblast ne sme da sadrži 4 grane, zato što bi tada postojao ciklus dužine 4. Imamo $e_1, e_2, \ldots, e_f \notin \{3, 4, 5\}$, odakle zbog $n \ge 4$ sledi da mora biti

$e_1, e_2, \dots, e_f \geq 6$. Nadalje sledi

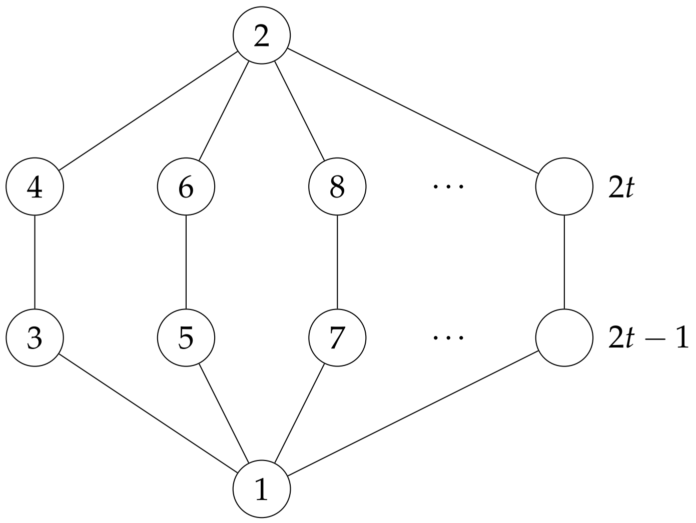
$$2m = \sum_{i=1}^{f} e_i$$
$$2m \geq \sum_{i=1}^{f} 6$$
$$2m \geq 6f$$
$$f \leq \frac{1}{3}m$$

Ukoliko iskoristimo Ojlerovu formulu, dobija se:

$$m - n + 2 \leq \frac{1}{3}m$$
$$m - \frac{1}{3}m \leq n - 2$$
$$\frac{2}{3}m \leq n - 2$$
$$m \leq \frac{3}{2}(n-2)$$
$$m \leq \frac{3n}{2} - 3$$

Povezan bipartitan planaran graf sa $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$ čvorova i bez ciklusa dužine 4 ne može da ima više od $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 3$ grana. Kako bismo dokazali da vrednost $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 3$ zaista predstavlja maksimalni mogući broj grana za ovakav graf, dovoljno je dati primer grafa koji ima upravo ovoliko grana. Pri konstrukciji grafa, iz praktičnih razloga će biti kreirani odvojeni primeri za slučaj kada je $n \in \mathbb{N}$ paran broj i za slučaj kada je on neparan.

Pretpostavimo prvo da je $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$ paran broj, tj. nek je $n = 2t$, gde je $t \in \mathbb{N},\ t \geq 2$. Možemo da konstruišemo graf kao na narednoj slici:



Ovaj graf je očigledno povezan i planaran, bipartitan je pošto se skup čvorova može razbiti na disjunktne podskupove $\{1\} \cup \{4, 6, 8, \ldots, 2t\}$ i $\{2\} \cup \{3, 5, 7, \ldots, 2t-1\}$, i takođe zaista nema nijedan ciklus dužine 4. Njegov ukupan broj grana je jednak $3 \cdot \dfrac{2t-2}{2} = 3(t-1) = 3t-3$, pri čemu je

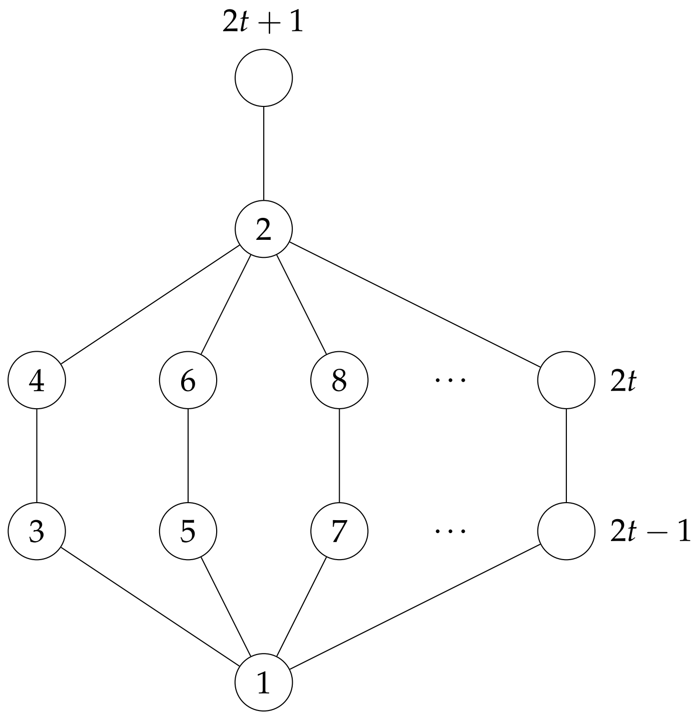
$$\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor \frac{3 \cdot 2t}{2} \right\rfloor - 3 = \lfloor 3t \rfloor - 3 = 3t - 3$$

Zaključujemo da konstruisani graf ima broj grana jednak $\left\lfloor \dfrac{3n}{2} \right\rfloor - 3$, te je ovaj deo dokaza gotov.

Pretpostavimo sada da je $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$ neparan broj. Neka je $n = 2t+1$, gde važi $t \in \mathbb{N},\ t \geq 2$. U ovom slučaju želimo da konstruišemo odgovarajući graf čiji je broj grana jednak

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 3 &= \left\lfloor \frac{3 \cdot (2t+1)}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor \frac{6t+3}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor 3t + 1 + \frac{1}{2} \right\rfloor - 3 \\ &= 3t + 1 - 3 = 3t - 2\end{aligned}$$

Željena konstrukcija može da se obavi na skoro identičan način kao i prethodna, kao što vidimo na sledećoj slici:



Graf sa slike je povezan, planaran, bipartitan i ne sadrži nijedan ciklus dužine 4. Ima tačno 1 granu više od grafa sa prethodne slike, tako da mu je ukupan broj grana jednak $3t - 3 + 1 = 3t - 2$. Ovim je kompletan dokaz gotov.

■

Zadatak 4.

(a) *Koliko najmanje, a koliko najviše može da iznosi stepen nekog čvora kod planarnog grafa koji sadrži $n \in \mathbb{N}$ čvorova?*

(b) *Koliko najmanje, a koliko najviše grana može da ima planarni graf koji ima $n \in \mathbb{N}$ čvorova?*

(c) *Koliko najmanje, a koliko najviše grana može da ima neplanarni graf koji se sastoji od $n \in \mathbb{N}$ čvorova?*

Rešenje.

(a) Kod planarnog grafa koji ima $n \in \mathbb{N}$ čvorova, stepen nekog čvora može biti najmanje 0. Na primer, kod grafa bez grana, svaki čvor zaista ima stepen 0, a graf jeste planaran. Stepen čvora može biti najviše $n-1$, što se dostiže, na primer, kod grafa u obliku zvezde, gde je jedan čvor povezan sa svima ostalima i nema dodatnih grana osim spomenutih. Ovakav graf je takođe planaran.

(b) Uzevši u obzir da graf bez grana jeste planaran graf, zaključujemo da planaran graf sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova može imati minimalno 0 grana. Ako je $n \geq 3$, znamo da planarni graf sa n čvorova može imati najviše $3n-6$ grana. Ovo tvrđenje je detaljno dokazano u prethodnom zadatku. Za slučajeve $n = 1$ i $n = 2$ važi da je svaki graf planaran, a grafovi mogu imati najviše 0, odnosno 1 granu, respektivno. Dakle, planaran graf sa $n \in \mathbb{N}$ čvorova može imati najviše

$$\begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 3n-6, & n \geq 3 \end{cases}$$

grana.

(c) Ukoliko je $n \leq 4$, onda je svaki graf sa n čvorova obavezno planaran, te neplarani graf ne postoji i nema smisla određivati koliko on može imati najmanje i najviše grana. Za $n \geq 5$, postoje neplanarni grafovi sa n čvorova. Pre svega, graf K_n biće neplanaran, uzevši u obzir da je on nadgraf grafa K_5, za koji se zna da je neplanaran. Odavde se direktno dobija da neplanaran graf sa $n \geq 5$ čvorova može imati najviše $\dfrac{n(n-1)}{2}$ grana.

Što se tiče minimalnog mogućeg broja grana koji neplanarni graf sa n čvorova može da ima, situacija se malo komplikuje. Ukoliko je $n = 5$, svaki graf osim kompletnog biće planaran, tako da je minimalni broj grana koji neplanaran graf može da ima jednak $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Ako je $n \geq 6$, moguće je konstruisati neplanarni graf koji se sastoji od 9 grana, tako što uzmemo graf koji je izomorfan sa $K_{3,3}$ i dodamo mu $n - 6$ izolovanih čvorova tako da ukupno bude n čvorova. Novodobijeni graf biće očigledno neplanaran, pošto se zna da je graf $K_{3,3}$ neplanaran, a imaće tačno $3 \cdot 3 = 9$ grana.

Nije moguće da neplanarni graf sa $n \geq 6$ čvorova ima manje od 9 grana. Ova činjenica se može pokazati na više različitih načina. Na primer, po teoremi Kuratovskog znamo da je graf neplanaran ako i samo ako ima podgraf koji je homeomorfan sa grafom $K_{3,3}$ ili grafom K_5. Kako ova dva grafa imaju 9, odnosno 10, grana, kad bi zadati graf bio neplanaran, onda bi odgovarajući podgraf koji je homeomorfan sa $K_{3,3}$ ili K_5 imao bar 9 grana, te zadati graf sigurno ne bi mogao da ima ispod 9 grana.

Dakle, za $n \geq 5$, neplanaran graf sa n čvorova može imati minimalno

$$\begin{cases} 10, & n = 5 \\ 9, & n \geq 6 \end{cases}$$

grana.

■

Zadatak 5. *Dat je planaran graf koji se sastoji od $n \in \mathbb{N}$ čvorova, $m \in \mathbb{N}_0$ grana i $p \geq 2$ komponenti povezanosti. Dokazati da tada mora da postoji planaran graf koji se sastoji od n čvorova i $m + 3p - 6$ grana.*

Rešenje. Za svaki planaran graf koji se sastoji od bar 3 čvora znamo da ne može da ima preko $3t - 6$ grana, gde t označava njegov broj čvorova. Međutim, ova nejednakost neće da važi ukoliko graf ima 1 ili 2 čvora, pošto je $3 \cdot 1 - 6 = -3$, a $3 \cdot 2 - 6 = 0$, dok planarni graf sa 1, odnosno 2, čvora može da ima maksimalno 0, odnosno 1, granu. Ideja kod rešavanja ovog zadatka je da se granica $3t - 6$ ublaži, ali tako da važi za svaki graf, bez obzira na njegov broj čvorova. Nije teško primetiti da za svako $t \in \mathbb{N}$, planaran graf sa t čvorova ne može imati preko $3t - 3$ grana. Za $t \geq 3$ očigledno važi jer je $3t - 6 < 3t - 3$, dok se za slučajeve $t = 1$ i $t = 2$ ručno ispituje i dobija.

Posmatrajmo sada graf zadat u zadatku, koji ćemo da označimo sa G. Pošto je on planaran, mora biti planarna i njegova svaka komponenta povezanosti. Neka komponente povezanosti imaju redom $n_1, n_2, \ldots, n_p$ čvorova i $m_1, m_2, \ldots, m_p$ grana. Po prethodnom razmatranju, komponenta povezanosti koja ima n_i čvorova mora da ima broj grana za koji važi $m_i \leq 3n_i - 3$. Za ukupan broj grana grafa G dobijamo

$$
\begin{aligned}
m &= \sum_{i=1}^{p} m_i \\
m &\leq \sum_{i=1}^{p} (3n_i - 3) \\
m &\leq 3\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right) - 3p \\
m &\leq 3n - 3p
\end{aligned}
$$

Ako važi $p = 2$, onda je $m + 3p - 6 = m$, te nema šta da se dokazuje. Pretpostavimo da važi $p \geq 3$. Onda mora biti $n \geq 3$, pa znamo da postoji planaran graf sa n čvorova i $3n - 6$ grana, i samim tim planaran graf sa n čvorova i bilo kojim brojem grana koji ne prevazilazi $3n - 6$. Iz nejednakosti $m \leq 3n - 3p$ sledi $m + 3n - 6 \leq 3n - 6$, tako da zaključujemo da mora da postoji planaran graf sa n čvorova i $m + 3p - 6$ grana, čime je dokaz gotov. ■

Zadatak 6. *Da li postoji* 4*-regularan graf sa* 7 *čvorova koji je planaran?*

Rešenje. Neka je dat graf G koji je 4-regularan i sastoji se od 7 čvorova. Tada je njegov komplement $\overline{G}$ 2-regularan, te znamo da svaka njegova komponenta povezanosti mora da predstavlja prost ciklus dužine bar 3. Uzevši u obzir da se prirodan broj 7 može predstaviti kao zbir prirodnih brojeva ne manjih od 3 na samo dva načina: $7 = 7$ ili $7 = 4 + 3$, zaključujemo da postoje samo dva po izomorfizmu različita 2-regularna grafa sa 7 čvorova.

Dolazimo do veoma bitnog zaključka da ima ukupno dva po izomorfizmu različita grafa koja su 4-regularna i sadrže 7 čvorova. Ispostavlja se da oba nisu planarna, odakle se zaključuje da ne postoji 4-regularan graf sa 7 čvorova koji je planaran. U ostatku rešenja, pokazaćemo da oba moguća grafa nisu planarna. Bez gubljenja opštosti, neka se graf G sastoji od čvorova iz skupa $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

- Ukoliko se graf $\overline{G}$ sastoji od dve komponente povezanosti koje predstavljaju prost ciklus dužine 3 i prost ciklus dužine 4, možemo da pretpostavimo da čvorovi iz skupa $A = \{1,2,3\}$ formiraju prost ciklus dužine 3, dok čvorovi iz skupa $B = \{4,5,6,7\}$ formiraju prost ciklus dužine 4. U grafu G, svaki čvor iz skupa A mora biti povezan sa svakim čvorom iz skupa B, odakle dobijamo da graf G mora biti nadgraf grafa koji je izomorfan sa $K_{3,4}$, koji je sam po sebi nadgraf grafa $K_{3,3}$. Za graf $K_{3,3}$ je poznato da nije planaran, odakle zaključujemo da ni graf G ne sme biti planaran.

- Ako se graf $\overline{G}$ sastoji od jedinstvene komponente povezanosti koja čini prost ciklus dužine 7, dokaz je malo komplikovaniji. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da graf $\overline{G}$ obuhvata prost ciklus $1-2-3-4-5-6-7-1$. U ovom slučaju je u grafu G čvor 6 povezan sa čvorovima $1,2,3,4$. Posmatrajmo graf G_1 koji nastaje izbacivanjem grana $\{1,6\}$ i $\{4,6\}$ iz grafa G. Pokazaćemo da ovaj graf nije planaran, odakle direktno sledi da ni graf G nije.

  U grafu G_1 je čvor 6 stepena dva, što znači da ako izbacimo ovaj čvor i njegova dva suseda 2 i 3 direktno povežemo, dobijamo graf koji je planaran ako i samo ako je G_1 planaran. Označimo novodobijeni graf sa G_2. Nakon svih obavljenih transformacija, graf G_2 se sastoji od čvorova iz skupa $\{1,2,3,4,5,7\}$ i svaki od njih ima navedene susede:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \{3,4,5,6\} \setminus \{6\}\\
N_2 &= \{4,5,6,7\} \setminus \{6\} \cup \{3\}\\
N_3 &= \{1,5,6,7\} \setminus \{6\} \cup \{2\}\\
N_4 &= \{1,2,6,7\} \setminus \{6\}\\
N_5 &= \{1,2,3,7\}\\
N_7 &= \{2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \{3,4,5\}\\
N_2 &= \{3,4,5,7\}\\
N_3 &= \{1,2,5,7\}\\
N_4 &= \{1,2,7\}\\
N_5 &= \{1,2,3,7\}\\
N_7 &= \{2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

Za graf G_2 se može zapaziti da čini nadgraf grafa koji je izomorfan sa $K_{3,3}$, uzevši u obzir da je kod njega svaki čvor iz skupa $\{1,2,7\}$ u vezi sa svakim čvorom iz skupa $\{3, 4, 5\}$. Kako graf $K_{3,3}$ nije planaran, ni G_2 ne može biti planaran, odakle zaključujemo da ni G_1 nije planaran. Konačno dobijamo da polazni graf G takođe nije planaran graf, čime je dokaz gotov.

$\blacksquare$