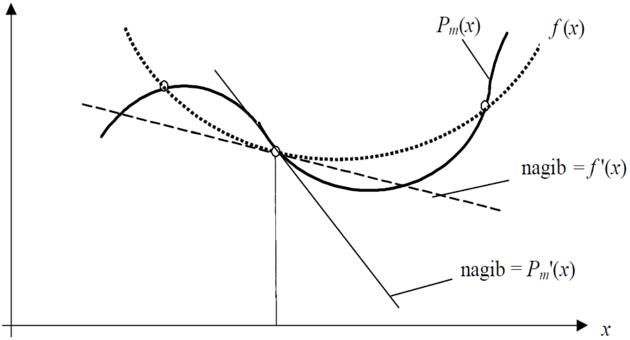
МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ

НУМЕРИЧКО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ И ИНТЕГРАЦИЈА

Садржај

Нумеричко диференцирање

Нумеричко диференцирање је поступак приближног израчунавања извода функције и базира се на интерполацији.



Нумеричко диференцирање је мање тачно од интерполације.
У интерполационом чвору је грешка интерполације једнака нули, а грешка диференцирања може да буде врло велика.

Формуле за нумеричко диференцирање

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на дискретном или континуалном скупу тачака $X \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- формула за диференцирање унапред:

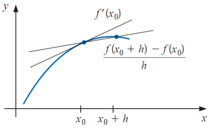
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + R(h)$$

- формула за диференцирање уназад:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} + R(h)$$

Грешка:

$$R(h) = -\frac{f''(\xi)}{2}h, \quad |R(h)| \leq \frac{M_2}{2}|h|$$



Формуле за нумеричко диференцирање

Лагранжова интерполациона формула:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x),\\
L_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},\\
\omega(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)
\end{aligned}
$$

Диференцирањем:

$$
f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k'(x) + \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\right)'\omega(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(\omega(x))'
$$

Формуле за нумеричко диференцирање

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k'(x_j) + \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \right)' \omega(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \left(\omega(x_j)\right)'$$

$$\boxed{f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k'(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k)}$$

$n+1-$тачкаста формула за диференцирање

Грешка:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k),$$

$$|R_n| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \Big| \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} |x_j - x_k|, \quad M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$$

Формуле за нумеричко диференцирање

$n = 2:$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \Rightarrow \quad L_0'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad \Rightarrow \quad L_1'(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad \Rightarrow \quad L_2'(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$f'(x_j) = f_0 \frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{f'''(\xi_j)}{6} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{2} (x_j-x_k),$$

$$j = 0, 1, 2.$$

Формуле за нумеричко диференцирање

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h:$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}f_0 + 2f_1 - \frac{1}{2}f_2\right) + \frac{f'''(\xi_0)}{3}h^2,$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_2\right) - \frac{f'''(\xi_0)}{6}h^2,$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}f_0 - 2f_1 + \frac{3}{2}f_2\right) + \frac{f'''(\xi_0)}{3}h^2.$$

Тротачкасте формуле за диференцирање

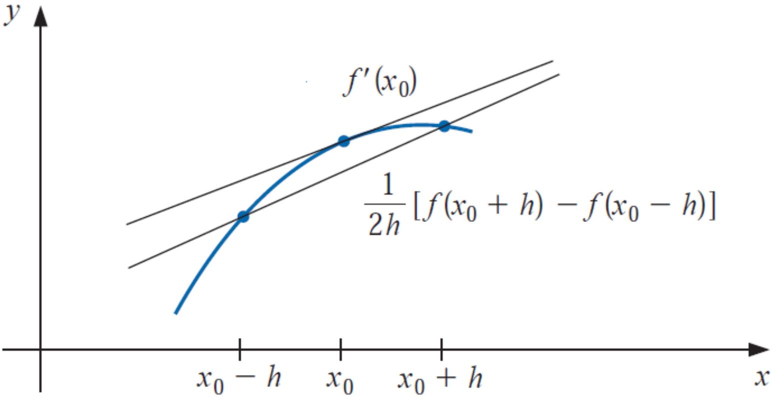
на крајевима интервала:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{f'''(\xi_0)}{3}h^2,$$

у средини интервала:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right) - \frac{f'''(\xi_0)}{6}h^2.$$

Формуле за нумеричко диференцирање



Формуле за нумеричко диференцирање

Други извод:

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2}$$

Грешка:

$$R_2 = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2,$$

$$|R_2| \leq \frac{M_4}{12}h^2, \quad M_4 = \max_{x_0-h\leq x\leq x_0+h} |f^{(4)}(x)|.$$

Стабилност нумеричког диференцирања

Процес нумеричког диференцирања је нестабилан.

$$R_2 = \mathcal{O}(h^2), \quad h \to 0.$$

За повећање тачности метода потребан је што мањи корак дискретизације h, али смањивање корака дискретизације повећава грешку заокруживања.

Оптимална вредност за h:

за први извод:

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}}$$

$\varepsilon -$ грешка заокруживања,

$$M_3 = \max |f'''(x)|$$

за други извод:

$$\boxed{h = \sqrt[4]{\frac{48\varepsilon}{M_4}}}$$

$\varepsilon -$ грешка заокруживања,

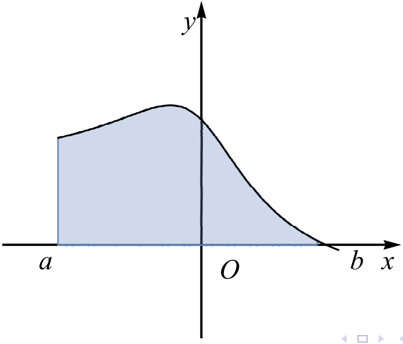
$$M_4 = \max |f^{(4)}(x)|$$

Нумеричка интеграција

Нумеричка интеграција је поступак приближног израчунавања одређеног интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

на основу вредности функције $f(x)$ у неким тачкама интервала $[a, b]$.



Формуле за нумеричку интеграцију

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на дискретном или континуалном скупу тачака $X \in [a,b]$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)}$$

квадратурна формула

- $A_k,\ k = 1,2,\ldots,n$ − тежински коефицијенти
- $x_k,\ k = 1,2,\ldots,n$ − чворови
- R_n − остатак у квадратурној формули

Уопштење:

$$\boxed{\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)}$$

- $p : [a,b] \to [0,+\infty)$ − тежинска функција

Квадратурне формуле

$$I(f) = \int_a^b p(x)f(x)\,dx, \quad K_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$R_n(f) = I(f) - K_n(f)$ – мера тачности квадратурне формуле

- $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$ – затворена квадратурна формула
- $a < x_0 < x_2 < \cdots < x_n < b$ – отворена квадратурна формула

Алгебарски степен тачности

Квадратурна формула $I(f) = K_n(f) + R_n(f)$ има алгебарски степен тачности m ако је $R_n(f) = 0$ за сваки полином f степена m, а постоји бар један полином g степена $m+1$ такав да је $R_n(g) \neq 0$.

Конструкција квадратурних формула

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots + A_n f(x_n) + R_n(f)$$

Непознате величине $x_k, A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ могу да се одреде из услова максималног алгебарског степена тачности:
$R_n(x^j) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$

$$\int_a^b p(x)\,dx = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

$$\int_a^b p(x)x\,dx = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n,$$

$$\int_a^b p(x)x^2\,dx = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_n x_n^2,$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b p(x)x^m\,dx = A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \cdots + A_n x_n^m,$$

Конструкција квадратурних формула

- Ако су чворови $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ унапред задати, коефицијенти $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ се одређују решавањем система линеарних једначина

  $$\int_a^b p(x)x^j\,dx = A_1x_1^j + A_2x_2^j + \cdots + A_nx_n^j,\ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  Алгебарски степен тачности је најмање $n-1$.

- Ако су и чворови и коефицијенти непознати, систем једначина

  $$\int_a^b p(x)x^j\,dx = A_1x_1^j + A_2x_2^j + \cdots + A_nx_n^j,\ j = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

  је нелинеаран. Зато се за постизање максималног алгебарског степена тачности $2n-1$ чворови и коефицијенти у квадратурној формули одређују применом других поступака.

Интерполационе квадратурне формуле

Квадратурне формуле са алгебарском базом су интерполационе квадратурне формуле. Лагранжова интерполациона формула:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x),$$

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

Интеграцијом:

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\, dx + \int_a^b p(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\, dx$$

Остатак у квадратурној формули

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f),\\
&\qquad\qquad A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)}\int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{x-x_k}\,dx, \quad k = 0,1,\dots,n,\\
&\quad R_{n+1}(f) = \int_a^b p(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x)\,dx.
\end{aligned}
}
\qquad (1)
$$

Теорема

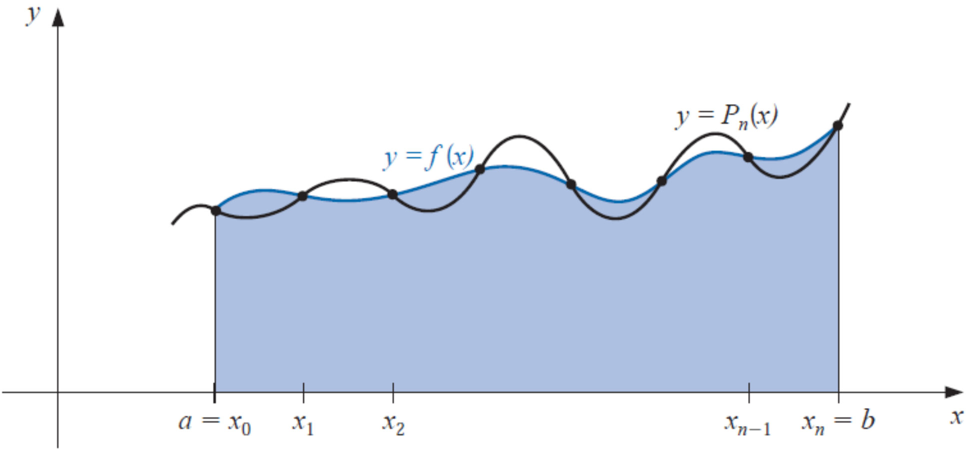
Нека квадратурна формула (2) има степен тачности $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Ако важи* $f \in C^{m+1}[a,b]$ *и* $M_{m+1} = \max\limits_{a\le x\le b} |f^{(m+1)}(x)|$, *тада је*

$$
|R_n(f)| \le \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}\left|\int_a^b p(x)(x-x_0)^k\omega(x)\,dx\right|.
$$

Остатак у квадратурној формули

Под извесним условима остатак може да се представи као

$$R_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!} R_n(x^{m+1})\, dx.$$

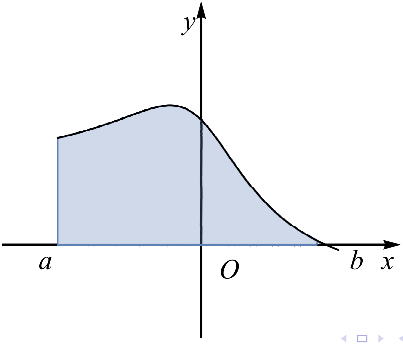


Нумеричка интеграција

Нумеричка интеграција је поступак приближног израчунавања одређеног интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

на основу вредности функције $f(x)$ у неким тачкама интервала $[a, b]$.



Формуле за нумеричку интеграцију

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на дискретном или континуалном скупу тачака $X \in [a,b]$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)}$$ квадратурна формула

- $A_k,\ k = 1,2,\ldots,n$ – тежински коефицијенти
- $x_k,\ k = 1,2,\ldots,n$ – чворови
- R_n – остатак у квадратурној формули

Уопштење:

$$\boxed{\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)}$$

- $p : [a,b] \to [0,+\infty)$ – тежинска функција

Квадратурне формуле

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx, \quad K_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$R_n(f) = I(f) - K_n(f)$ – мера тачности квадратурне формуле

- $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$ – затворена квадратурна формула
- $a < x_0 < x_2 < \cdots < x_n < b$ – отворена квадратурна формула

Алгебарски степен тачности

Квадратурна формула $I(f) = K_n(f) + R_n(f)$ има алгебарски степен тачности m ако је $R_n(f) = 0$ за сваки полином f степена m, а постоји бар један полином g степена $m+1$ такав да је $R_n(g) \neq 0$.

Конструкција квадратурних формула

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots + A_n f(x_n) + R_n(f)$$

Непознате величине $x_k, A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ могу да се одреде из услова максималног алгебарског степена тачности:
$R_n(x^j) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\,dx &= A_1 + A_2 + \cdots + A_n,\\
\int_a^b p(x)x\,dx &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n,\\
\int_a^b p(x)x^2\,dx &= A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_n x_n^2,\\
&\vdots\\
\int_a^b p(x)x^m\,dx &= A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \cdots + A_n x_n^m,
\end{aligned}$$

Конструкција квадратурних формула

- Ако су чворови $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ унапред задати, коефицијенти $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ се одређују решавањем система линеарних једначина

$$\int_a^b p(x)x^j\,dx = A_1x_1^j + A_2x_2^j + \cdots + A_nx_n^j,\ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  Алгебарски степен тачности је најмање $n-1$.

- Ако су и чворови и коефицијенти непознати, систем једначина

$$\int_a^b p(x)x^j\,dx = A_1x_1^j + A_2x_2^j + \cdots + A_nx_n^j,\ j = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

  је нелинеаран. Зато се за постизање максималног алгебарског степена тачности $2n-1$ чворови и коефицијенти у квадратурној формули одређују применом других поступака.

Интерполационе квадратурне формуле

Квадратурне формуле са алгебарском базом су интерполационе квадратурне формуле. Лагранжова интерполациона формула:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x),$$

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

Интеграцијом:

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\, dx + \int_a^b p(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\, dx$$

Остатак у квадратурној формули

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f), \\ A_k &= \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{x-x_k}\,dx, \quad k=0,1,\ldots,n, \\ R_{n+1}(f) &= \int_a^b p(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x)\,dx. \end{aligned}} \tag{2}$$

Теорема

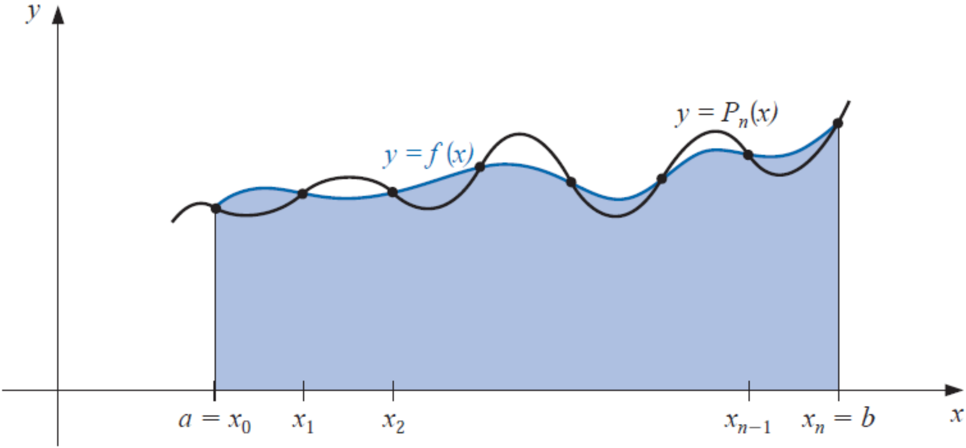
Нека квадратурна формула (2) има степен тачности $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Ако важи* $f \in C^{m+1}[a,b]$ *и* $M_{m+1} = \max_{a\le x\le b} |f^{(m+1)}(x)|$, *тада је*

$$|R_n(f)| \le \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}\Big|\int_a^b p(x)(x-x_0)^k\omega(x)\,dx\Big|.$$

Остатак у квадратурној формули

Под извесним условима остатак може да се представи као

$$R_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!} R_n(x^{m+1})\, dx.$$



Њутн–Коутсове квадратурне формуле

Посматрамо затворену квадратурну формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f)$$

са еквидистантним чворовима $x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad x_k = x_0 + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Коефицијенти и остатак:

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k}\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$R_{n+1}(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x)\,dx,$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

Њутн–Коутсове квадратурне формуле

Смена: $\quad x = x_0 + th, \quad dx = h\,dt, \quad [a,b] \to [0,n]:$

$$\omega(x) = th(th-h)\cdots(th-nh) = h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n),$$

$$\begin{aligned}\omega'(x_k) &= (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)\\ &= kh(kh-h)\cdots(kh-(k-1)h)(kh-(k+1)h)\cdots(kh-nh)\\ &= (-1)^{n-k}h^n k!(n-k)!\end{aligned}$$

$$A_k = \frac{1}{(-1)^{n-k}h^n k!(n-k)!}\int_0^1 \frac{h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)}{h(t-k)}\,h\,dt$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^1 \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}\,dt, \qquad k = 0,1,\ldots,n.$$

Њутн–Коутсове квадратурне формуле

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$A_k = (b-a)\frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot n!}\binom{n}{k}\int_0^1 \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}\,dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + R_{n+1}(f), \\ H_k &= \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot n!}\binom{n}{k}\int_0^1 \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}\,dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n \end{aligned}}$$

Њутн–Коутсове квадратурне формуле

- број чворова: $n+1$
- алгебарски степен тачности: n

Трапезна формула

$\boxed{n = 1:}$

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad H_0 = -\int_0^1 (t-1)\,dt = \frac{1}{2}, \quad H_1 = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) + R_2(f)$$

Уз претпоставку да је $f \in C^2[a,b]$, уз примену теореме о средњој вредности интеграла добија се:

$$\begin{aligned} R_2(f) &= \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)\,dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \quad \xi \in (a,b). \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3,} \quad \xi \in (a,b)$$

трапезно правило

Симпсонова формула

$$\boxed{n = 2:} \qquad x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b, \quad h = \frac{b-a}{2},$$

$$H_0 = H_2 = \frac{1}{4}\int_0^1 t(t-1)\,dt = \frac{1}{6}, \quad H_1 = -\frac{1}{2}\int_0^1 t(t-2)\,dt = \frac{4}{6},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R_3(f)$$

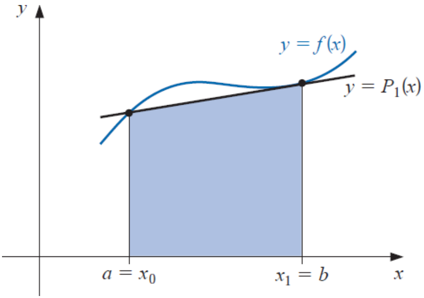
Уз претпоставку да је $f \in C^4[a,b]$, може се показати да важи:

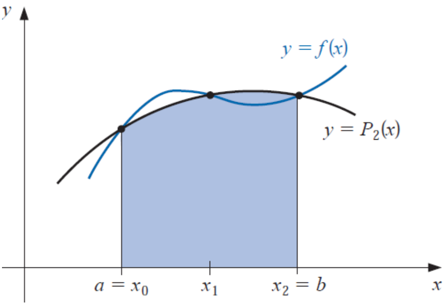
$$R_3(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5, \quad \xi \in (a,b).$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5,}$$

$$\xi \in (a,b)$$

Симпсоново правило





Трапезно правило

Симпсоново правило

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$f_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2$$

Композитне квадратурне формуле

- Са повећањем броја чворова повећава се алгебарска тачност формуле и смањује ред грешке.
- Са повећањем броја чворова повећава се степен интерполационих полинома који се користе, а са повећањем степена полинома све је израженија њихова осцилаторна природа.

Погодније за употребу су композитне или уопштене квадратурне формуле које се базирају на "део по део" приступу нумеричкој интеграцији:

1. поделити интервал интеграције на мање интервале,
2. на сваком подинтервалу применити Њутн–Коутсове квадратурне формуле нижег степена тачности.

Уопштена трапезна формула

Интервал интеграције $[a,b]$ поделимо на n једнаких подинтервала тачкама $x_j = a + jh,\ j = 0,1,\ldots,n,$ дужине $h = \dfrac{b-a}{n}$.
На сваком од подинтервала $[x_{j-1}, x_j]$ применимо трапезну формулу.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h}{2}\,(f_{j-1}+f_j) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_j)\right)\\ &= \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(f_{j-1}+f_j) - \frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)\\ &= \frac{h}{2}\,(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) - \frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j),\end{aligned}$$

где је $f_j = f(x_j)$. Како је $f \in C^2[a,b]$, за свако $j = 0,1,\ldots,n$ важи

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le f''(\xi_j) \le \max_{a\le x\le b} f''(x),$$

Уопштена трапезна формула

$$n \min_{a \le x \le b} f''(x) \le \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) \le n \max_{a \le x \le b} f''(x),$$

$$\min_{a \le x \le b} f''(x) \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) \le \max_{a \le x \le b} f''(x).$$

Зато постоји $\xi \in [a, b]$ такво да је $f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$, тј.

$\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) = n f''(\xi)$. а имајући у виду да је $nh = b - a$, израз за грешку добија облик

$$R_{n+1}(f) = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -(b-a)\frac{f''(\xi)}{12} h^2, \quad \xi \in (a, b).$$

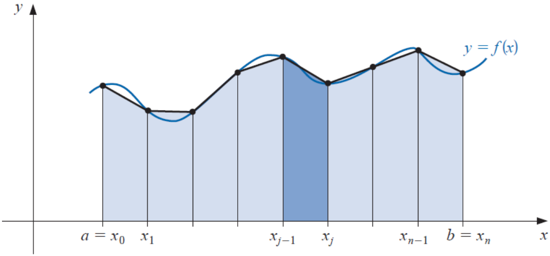
Уопштена трапезна формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + f_n\right) - (b-a)\frac{f''(\xi)}{12}h^2,}$$

$$\xi \in (a,b).$$

уопштена трапезна формула

Грешка: $\quad |R_{n+1}(f)| \le (b-a)\dfrac{M_2}{12}h^2, \ \ M_2 = \max\limits_{a\le x\le b} |f''(x)|.$



Уопштена Симпсонова формула

Интервал интеграције $[a, b]$ поделимо на $2n$ једнаких подинтервала тачкама $x_j = a + jh,\ j = 0, 1, \dots, 2n,$ дужине $h = \dfrac{b-a}{2n}$.
На сваком од подинтервала $[x_{2j-2}, x_{2j}],\ j = 1, 2, \dots, n,$ применимо Симпсонову формулу.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{h}{3}\left(f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}\right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j) \right)$$

$$= \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{n} \left(f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}\right) - \frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n} f^{(4)}(\xi_j)$$

$$= \frac{h}{3} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{2j-2} + 4\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n} f_{2j} \right) - \frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n} f^{(4)}(\xi_j)$$

Уопштена Симпсонова формула

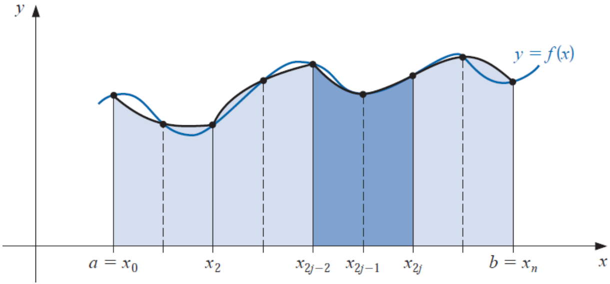
Како је $f \in C^4[a,b]$, постоји тачка $\xi \in [a,b]$ таква да је
$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f^{(4)}(\xi_j), \quad \text{тј.} \quad \sum_{j=1}^{n} f^{(4)}(\xi_j) = n f^{(4)}(\xi).$$
Како је $2nh = b - a$, грешка може да се представи у облику
$$R_{2n+1}(f) = -\frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -(b-a)\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}h^4, \quad \xi \in (a,b).$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx\\ &\quad = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4(f_1 + \cdots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2}) + f_{2n}\right)\\ &\quad - (b-a)\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}h^4, \quad \xi \in (a,b).\end{aligned}}$$

уопштена Симпсонова формула

Уопштена Симпсонова формула

Грешка: $\quad |R_{2n+1}(f)| \le (b-a)\dfrac{M_4}{180}h^4, \qquad M_4 = \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)|.$



Алгебарски степен тачности композитних формула:

- уопштена трапезна формула: 1
- уопштена Симпсонова формула: 2

Грешка заокруживања и нумеричка интеграција

На тачност поступка нумеричке интеграције утиче грешка заокруживања.

укупна грешка ı грешка метода ђ грешка заокруживања

$$\boxed{R = R_M + E}$$

- Нека се тачне вредности функције f_j замењују приближним вредностима $\overline{f}_j$ (са коначним бројем децимала), при чему је $|f_j - \overline{f}_j| = e_j < \varepsilon$.
- Заокруживањем на k децимала грешка заокруживања је $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-k}$.

Утицај грешке заокруживања E на примену квадратурних формула:

- $I(f) = T(f; h) + R_T(f; h)$ – уопштена трапезна формула
- $I(f) = S(f; h) + R_S(f; h)$ – уопштена Симпсонова формула

Грешка заокруживања и нумеричка интеграција

Уопштена трапезна формула:

$$
\begin{aligned}
E &= |T(f;h) - T(\overline{f};h)| \\
&= \frac{h}{2}\Big| \left(f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{n-1}) + f_n\right) - \left(\overline{f}_0 + 2(\overline{f}_1 + \cdots + \overline{f}_{n-1}) + \overline{f}_n\right) \Big| \\
&= \frac{h}{2}\Big| e_0 + 2(e_1 + \cdots + e_{n-1}) + e_n \Big| \\
&\le \frac{h}{2}\left(|e_0| + 2(|e_1| + \cdots + |e_{n-1}|) + |e_n|\right) \\
&\le \frac{h}{2} \cdot 2n\varepsilon = (b-a)\varepsilon
\end{aligned}
$$

Уопштена Симпсонова формула:

$$E = |S(f;h) - S(\overline{f};h)| = (b-a)\varepsilon$$

Грешка заокруживања и нумеричка интеграција

Грешка заокруживања не зависи од броја чворова и дужине корака h, али се мора узети у обзир при одређивању корака h за постизање задате тачности.

Поступци за повећање тачности формуле без повећања броја чворова:

- Ричардсонова екстраполација
- Ромбергова интеграција

Рунгеова оцена грешке

уопштена трапезна формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + f_n\right) - \frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \qquad \xi \in (a,b).$$

уопштена Симпсонова формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4(f_1 + \cdots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2}) + f_{2n}\right) - \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) h^4, \qquad \xi \in (a,b).$$

Рунгеова оцена грешке

У општем случају Њутн–Коутсове квадратурне формуле имају облик

$$I(f) = I(f;h) + R(f;h),$$
$$R(f;h) = Cf^{(k)}(\xi)h^k, \quad \xi \in (a,b), \quad C = \text{конст.}$$

- Трапезна формула: $k = 2$
- Симпсонова формула: $k = 4$

Наведене оцене грешака су непрактичне, јер треба оценити максимум одговарајућег извода.
Ако се одговарајући извод $f^{(k)}$ не мења много на (a,b), може се применити Рунгеова оцена грешке.

$$I(f) = I(f;h) + R(f;h),$$
$$R(f;h) \approx Mh^k, \quad \xi \in (a,b), \quad M = \text{конст.}$$

Рунгеова оцена грешке

Нека је интеграл израчунат истом формулом за два различита корака, h и $2h$. Тада је

$$I(f) \approx I(f;h) + Mh^k, \quad I(f) \approx I(f;2h) + M(2h)^k,$$

одакле је

$$M \approx \frac{I(f;h) - I(f;2h)}{h^k(2^k - 1)}.$$

Рунгеова оцена грешке:

$$R(f;h) \approx Mh^k \approx \frac{I(f;h) - I(f;2h)}{h^k(2^k - 1)}\, h^k = \frac{I(f;h) - I(f;2h)}{2^k - 1}.$$

$$\boxed{I(f) = I(f,h) + \frac{I(f;h) - I(f;2h)}{2^k - 1}}$$

Гаусове квадратуре

Интерполациона квадратурна формула

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f) \tag{3}$$

може имати максимални алгебарски степен тачности $2n-1$.

Гаусове квадратурне формуле

Интерполационе квадратурне формуле (3) са алгебарским степеном тачности $2n-1$ зову се Гаус–Кристофелове или Гаусове квадратурне формуле.

Чворови и коефицијенти, x_k, A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, представљају решење система нелинеарних једначина

$$A_1 x_1^j + A_2 x_2^j + \cdots + A_n x_n^j = \int_a^b p(x) x_j\,dx, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Гаусове квадратуре

Теорема

Интерполациона квадратурна формула

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$$

има алгебарски степен тачности $2n-1$ *ако и само ако важи:*

- *чворови* $x_k,\ k=1,2,\ldots,n,$ *су нуле полинома* $Q_n(x),$ *где је* $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *низ полинома ортогоналних на* (a,b) *у односу на тежинску функцију* $p(x)$*;*
- *коефицијенти* $A_k,\ k=1,2,\ldots,n,$ *су одређени формулом*
$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}}\,\frac{\|Q_{n-1}\|^2}{Q_{n-1}(x_k)Q_n'(x_k)},$$
где су a_n, a_{n-1} *коефицијенти уз највеће степене* x *у полиномима* $Q_n(x), Q_{n-1}(x),$ *редом.*

Гаусове квадратуре

Теорема

Ако је $f \in C^{2n}(a,b)$, *тада је остатак у Гаусовој квадратурној формули*

$$R_n(f) = \frac{\|Q_n\|^2}{(2n)!a_n^2} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

Напомене.

1. Полиноми $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ су ортогонални на (a,b) у односу на тежинску функцију $p(x)$, тј. у односу на скаларни производ
$$(\varphi,\psi) = \int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx, \qquad \text{ако важи}$$
$$(Q_i,Q_k) = \int_a^b p(x)Q_i(x)Q_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \|Q_k\|^2, & i = k. \end{cases}$$
2. Нуле x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, полинома $Q_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, су реалне, просте и леже у интервалу (a,b).

3. Коефицијенти $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ у Гаусовим квадратурним формулама су позитивни, тј. важи $A_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}$.
4. Ако се низ ортогоналних полинома $\{Q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ одређује променом Грам–Шмитовог поступка, тада су полиноми монични, тј. $a_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$.
5. Уместо формирања низа ортогоналних полинома, могу се користити познати ортогонални полиноми и одговарајуће квадратурне формуле:
   - Лежандрови, за ограничене функције на ограниченом интервалу;
   - Чебишевљеви, за неограничене функције на ограниченом интервалу;
   - Лагерове, за ограничене функције на једнострано неограниченом интервалу;
   - Хермитови, за ограничене функције на обострано ограниченом интервалу.

Ортогонални полиноми

Назив класе	полиноми до трећег степена	интервал ортогоналности	тежинска функција
Лежандрови	$P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$	$(-1, 1)$	$p(x) = 1$
Чебишевљеви прве врсте	$T_1(x) = x$ $T_2(x) = 2x^2 - 1$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$(-1, 1)$	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Лагерови	$L_1(x) = -x + 1$ $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ $L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$	$(0, +\infty)$	$p(x) = e^{-x}$
Хермитови	$H_1(x) = 2x$ $H_2(x) = 4x^2 - 2$	$(-\infty, +\infty)$	$p(x) = e^{-x^2}$

Несвојствени интеграли

Ако је интеграл интеграције (a, b) неограничен или је подинтегрална функција $f(x)$ неограничена на (a, b), интеграл

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

је несвојствени интеграл

Пример

1. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ је несвојствен, јер му је област интеграције неограничена.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

2. Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx, \quad p > 0,$ је несвојствен, јер је подинтегрална функција неограничена у области интеграције.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{\alpha \to 0+} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & 0 < p < 1, \\ +\infty, & p \geq 1. \end{cases}$$

Несвојствени интеграли

Тачка која узрокује несвојственост интеграла, било због неограничености интервала интеграције или због неограничености подинтегралне функције у њеној околини, зове се сингуларна тачка.

- Несвојствени интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира ако постоји коначна гранична вредност
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx.$$
- Ако је $f(x)$ неограничена у околини тачке b, несвојствени интеграл $\int_a^{b} f(x)\,dx$ конвергира ако постоји коначна гранична вредност
$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to0+}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Нумеричко израчунавање несвојствених интеграла

Нека је

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

конвергентан несвојствени интеграл чија је сингуларна тачка b.

1. Један од поступака за нумеричко израчунавање интеграла I са унапред задатом тачно71у ε:
   - Представити интеграл у облику
     $$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^M f(x)\, dx + \int_M^b f(x)\, dx = I_1 + I_2.$$
   - Одредити $M > a$ тако да је $|I_2| < \varepsilon/2$.
   - За тако одређену вредност M израчунати I_1 са тачно71у $\varepsilon/2$ применом неке квадратурне формуле.

Нумеричко израчунавање несвојствених интеграла

2. Други начин за нумеричко израчунавање интеграла I је конструкција квадратурне формуле отвореног или затвореног типа са тежинском функцијом која неутралише сингуларност интеграла.

Нумеричко израчунавање несвојствених интеграла

Пример За несвојствене интеграле типа:

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx : \qquad f(x) = e^x \varphi(x)$

  Лагерова формула: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx : \qquad f(x) = e^{x^2} \varphi(x)$

  Хермитова формула:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$$