Lekcija 2

2.1 Matrice grafova

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $|V| = n$, $|E| = m$. Sa $i \sim j$, $(v_i \sim v_j)$ označava se susedstvo čvorova v_i i v_j u grafu G. Sa $e_i \sim e_j$ označava se susedstvo grana e_i i e_j u grafu G. Sa $v_i \sim e_j$ označava se incidentnost čvora v_i i grane e_j.

Definicija 1. *Binarna matrica $A = (a_{ij})$, reda $n \times n$, definisana sa*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & v_i \sim v_j\,, \quad i \neq j \\ 0\,, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, naziva se **matrica susedstva** *grafa G.*

Definicija 2. *Binarna matrica $C = (c_{ij})$, reda $m \times m$, definisana sa*

$$c_{ij} = \begin{cases} 1\,, & e_i \sim e_j\,, \quad i \neq j \\ 0\,, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$, naziva se matrica susedstva po granama grafa G.

Definicija 3. *Binarna matrica $B = (b_{ij})$, reda $m \times n$, definisana sa*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1\,, & e_i \sim v_j \\ 0\,, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, naziva se **matrica incidentnosti** *grafa G.*

Pitanje: Zašto je važno definisanje matrica A, C i B?

Osnovne osobine matrice A

1. Matrica A je simetrična

   $$a_{ij} = a_{ji}\,,$$

   za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Dijagonalni elementi su jednaki nuli

$$a_{ii} = 0\,,$$

   $i = 1, 2, \ldots, n$. Tako je i

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\,.$$

3. Za svaki čvor v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, važi

$$d_i = d(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.$$

4. Neka je $A^2 = (a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$, $A^2 A \cdot A$. Tada je $a_{ii}^{(2)}$ jednak proizvodu i-te vrste matrice A, tj. zbog simetričnosti i-te vrste matrice A i i-te vrste matrice A, te je

$$a_{ii}^{(2)} = d_i\,.$$

   Tako je

$$\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m\,.$$

Osnovne osobine matrice B

1. Svaka vrsta matrice B sadrži dve i samo dve jedinice, a ostali elementi su nule.

2. Matrica B ne sadrži podmatricu reda 2×2 oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pitanje: Da li su matrice A, B i C medjusobno nezavisne?

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Tada važe jednakosti

$$B \cdot B^T = 2I_m + C \qquad (1)$$
$$B^T \cdot B = D + A \qquad (2)$$

gde je $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dijagonalna matrica stepena čvorova.

Pitanje: Da li su matrice A, B i C jednoznačno odredjene za dati graf G, i obrnuto. Odgovor émo dati kroz primere.

$\boxed{\text{Primer 2.1}}$ Neka je graf $G = (V, E)$ definisan skupovima $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ i $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$. Kako je $|V| = 5$, matrica susedstva je binarna matrica $A = (a_{ij})$, reda 5×5, i na osnovu skupa E ona je "jedinstveno" određena:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
A \;=\; & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\end{array}
$$

Kada želimo da odredimo matricu incidentnosti, B, i matricu susedstva po granama, C, javlja se "problem". Skup grana E je neuređen te neznamo koje su grane l_1, l_2 i l_3. Ako, na primer, usvojimo da je $l_1 = \{x_1, x_2\}$, $l_2 = \{x_2, x_3\}$ i $l_3 = \{x_2, x_4\}$, matrica incidentnosti, B_1, i matrica susedstva po granama, C_1, su

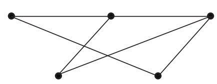
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
B_1 = & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}
\end{array}
\quad \text{i} \quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & l_3 \end{array} \\
C_1 = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}
\end{array}
$$

Ako pak usvojimo da je $l'_1 = \{x_1, x_2\}$, $l'_2 = \{x_2, x_4\}$ i $l'_3 = \{x_2, x_3\}$, dobijamo da je

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
B_2 = & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} l'_1 \\ l'_2 \\ l'_3 \end{array}
\end{array}
\quad \text{i} \quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} l'_1 & l'_2 & l'_3 \end{array} \\
C_2 = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} l'_1 \\ l'_2 \\ l'_3 \end{array}
\end{array}
$$

Nije teško uočiti da je $C_1 = C_2$ i $B_1 \neq B_2$.

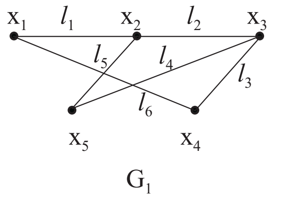
$\boxed{\text{Primer 2.2}}$ Za graf prikazan na sledećoj slici naći matricu susedstva, matricu incidentnosti i matricu susedstva po granama.

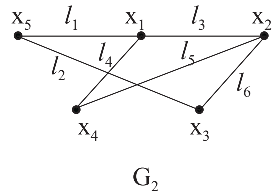


G

Rešenje

Dati graf $G = (V, E)$ ima 5 čvorova, $|V| = 5$, šest grana, $|E| = 6$, i i odgovara mu grafovski niz $D = (3,3,2,2,2)$. Možemo uvesti da je $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ i $E = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$, i to je gotovo sve što možemo zaključiti o datom grafu. Da bismo odredili tražene matrice, koje odgovaraju datom grafu, moramo normirati (označiti) njegove čvorove i grane. Kako čvorove možemo označiti na 5!, a grane na 6! različitih načina, to graf možemo označiti na $5! \cdot 6!$ različitih načina. Postavlja se pitanje koji izabrati. Odgovor je: bilo koji. To ćemo ilustrovati na konkretnom primeru. Obeležimo graf G na dva proizvoljna načina, kao što je prikazano na sledećoj slici. Jedan označima sa G_1 a drugi sa G_2





Označimo sa A_1, B_1 i C_1, redom, matricu susedstva, matricu incidentnosti i matricu susedstva po granama, koje odgovaraju grafu G_1, a sa A_2, B_2 i C_2, odgovarajuće matrice za graf G_2. tada je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 su istih dimenzija, ali se međusobno razlikuju. Međutim lako je zapaziti da imaju isti broj jedinica, tj. nula, koje su sano različito raspoređene. To znači da se promenama rasporeda vrsta i kolona iz jedne matrice može preći u drugu. Za to su potrebne odgovarajuće permutacione matrice, tj. matrice koje u svakoj vrsti i svakoj koloni imaju po jednu i samo jednu jedinicu, a svi ostali elementi su nule. tako, ako uočimo matrice

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_1^T,$$

lako je pokazati da je

$$A_2 = P_1 A_1 P_2.$$

Ako uočimo permutacione matrice

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

važi jednakost

$$B_2 = P_3 B_1 P_4.$$

Ostavljamo čitaocima da pronađu permutacione matrice pomoću kojih se matrica C_1 transformiše u matricu C_2, ili obrnuto.

U sledećem primeru razmotrićemo kakve informacije nose matrice susedstva, incidentnosti i susedstva po granama, o odgovarajućem grafu.

$\boxed{\text{Primer 2.3}}$ Naći karakteristike i skicirati graf čija je matrica susedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje

Kako je matrica A reda 5×5, odgovarajući graf ima $n = 5$ čvorova. Neka je $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ skup odgovarajućih čvorova. Bez smanjenja opštosti, na osnovu matrice A, važi

$$d(x_1) = 3, \quad d(x_2) = 4, \quad d(x_3) = 2, \quad d(x_4) = 2, \quad d(x_5) = 1.$$

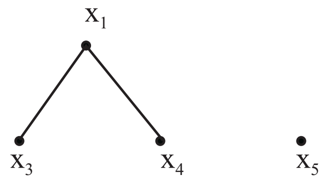
Datom grafu odgovara grafovski niz

$$D = \begin{matrix} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (4 & 3 & 2 & 2 & 1) \end{matrix}.$$

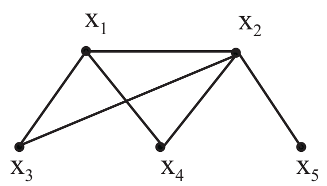
Na osnovu njega formiramo novi grafovski niz, odgovarajućeg podgrafa

$$D_1 = \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (2 & 1 & 1 & 0) \end{array}.$$

Ovaj podgraf ima 4 čvora x_1, x_3, x_4, x_5, čiji su stepeni, redom $d(x_1) = 2$, $d(x_3) = 1$, $d(x_4) = 1$ i $d(x_5) = 0$. On je prikazan na sledećoj slici



Vraćanjem čvora x_2, u ovaj podgraf, koji je susedan sa svim preostalim čvorovima, dobijamo traženi graf koji je prikazan na sledećoj slici



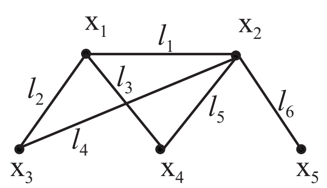
Na osnovu ove slike, a mogli smo to uraditi i na osnovu date matrice A, zaključujemo da graf ima $m = 6$ grana. Naravno, do istog zaključka smo mogli doći i na osnovu jednakosti

$$2m = d(x_1) + d(x_2) + d(x_3) + d(x_4) + d(x_5) = 12.$$

Označimo ih sa $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$. Do izomorfizma, možemo usvojiti da je

$$\begin{aligned} l_1 &= \{x_1, x_2\}, \quad & l_2 &= \{x_1, x_3\}, \quad & l_3 &= \{x_1, x_4\}, \\ l_4 &= \{x_2, x_3\}, \quad & l_5 &= \{x_2, x_4\}, \quad & l_6 &= \{x_2, x_5\}, \end{aligned}$$

što je prikazano na sledećoj slici



Nakon ovakvog obeležavanja dobijenog grafa, njemu odgovaraju matrica incidentnosti, B, i matrica susedstva po granama, C, definisane sa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primetimo da smo matricu C mogli naći i na osnovu jednakosti

$$C = B \cdot B^T - 2I_6.$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.5}}$ Naći karakteristike i skicirati graf čija je matrica incidentnosti

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

REŠENJE

Na osnovu matrice B

$$B \;=\; \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{array} \end{array}$$

zaključujemo da graf $G = (V, E)$ ima $n = 4$ čvora i $m = 5$ grana, koje smo obeležili sa x_1, x_2, x_3, x_4, i l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, respektivno. Na osnovu kolona matrice B nalazimo stepene čvorova grafa

$$d(x_1) = 2, \quad d(x_2) = 2, \quad d(x_3) = 3, \quad d(x_4) = 3.$$

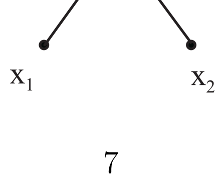
Grafu $G = (V, E)$ odgovara grafovski niz

$$D \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array},$$

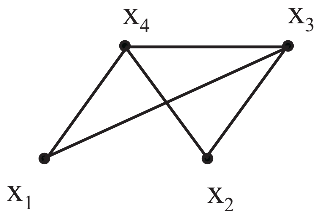
te u nastavku možemo iskoristiti prethodni zadatak. Formiramo grafovski niz D_1

$$D_1 \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_4 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

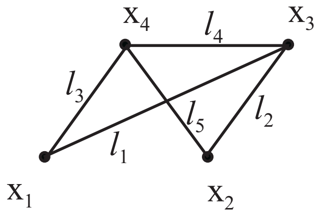
kome odgovara podgraf prikazan na sledećoj slici



Vraćanjem čvora x_5 u ovaj podgraf i koristeći niz D, dobijamo traženi graf G



Grane ovog grafa obeležićemo koristeći matricu B



Na osnovu poslednje slike, možemo uočiti da dobijenom grafu odgovaraju matrice susedstva i susedstva po granama, definisane sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primetimo da smo matrice A i C, poznavajući matricu B, mogli naći na osnovu jednakosti

$$A = B^T \cdot B - D \quad \text{i} \quad C = B \cdot B^T - 2I_5$$

pri čemu su matrice D i I_5 definisane sa

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

PRIMER 2.6 Naći karakteristike i skicirati graf čija je matrica susedstva po granama definisana sa

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje

U prethodnim primerima smo pokazali da matrica susedstva i matrica incidentnosti, do izomorfizma, jedinstveno određuju odgovarajući graf. Proverimo da li je to slučaj i sa matricom susedstva po granama. Na osnovu matrice

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{array}$$

zaključujemo da odgovarajući graf $G = (V, E)$ ima $m = 5$ grana. O broju čvorova ne možemo ništa reći, jer ako pretpostavimo da je $|V| = n$, neumemo jednoznačno da rešimo jednačinu

$$10 = d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n).$$

Takođe, na osnovu jednačine

$$C = B \cdot B^T - 2I_5$$

ne možemo naći matricu incidentnosti B. Zbog toga sprovodimo sledeći postupak.

Grana l_1 je susedna sa granama l_2 i l_3, te sa njima ima zajednički čvor, recimo, x_1, pa je

$$l_1 = \{x_1, \cdot\}, \quad l_2 = \{x_1, \cdot\}, \quad \text{i} \quad l_3 = \{x_1, \cdot\}$$

Grana l_2 je susedna sa granama l_1, l_3 i l_4. Grana l_4 je susedna sa granama l_2, l_3 i l_5, ali nije susedna sa granom l_1, te mora biti

$$l_4 = \{x_2, x_3\}, \quad l_2 = \{x_1, x_2\}, \quad \text{i} \quad l_3 = \{x_1, x_3\}.$$

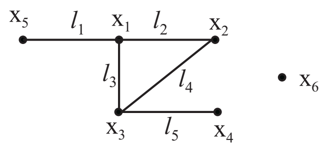
Grana l_5 je susedna sa granama l_3 i l_4, ali nije sa granama l_1 i l_2, te je

$$l_5 = \{x_3, x_4\}$$

Kako čvorovi x_2, x_3 i x_4 nisu incidentni sa granom l_1, mora postojati novi čvor, x_5, tako da je

$$l_1 = \{x_1, x_5\}.$$

Na prvi pogled rešili smo zadatak i odgovarajući graf je prikazan na sledećoj slici



Međutim, možemo dobijeni graf proširiti proizvoljnim brojem izolovanih čvorova, i svi novodobijeni grafovi bi imali istu matricu susedstva po granama, C.

Zadatak bi imao jedinstveno rešenje, do izomorfizma, ako bi se tekst zadatka proširio uslovom da traženi graf ima minimalan broj čvorova.

2.2 Putevi u grafu

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Definicija 4. *Niz čvorova*

$$x_p - x_{p+1} - \cdots - x_q$$

sa osobinomda $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ pripada skupu E za svako $i = p, p+1, \ldots, q-1$, naziva se put u grafu G koji povezuje čvor x_p sa čvorom x_q

- U opštem slučaju put može više puta da prodje kroz isti čvor i više puta preko iste grane.

- Ako graf nije težinski, dužina puta jednaka je broju grana preko kojih prolazi.

- Ako u pitanju nije graf već druga struktura (multigraf, pseudograf),put mora da se opiše nizom čvorova i grana.

Definicija 5. *Put koji prolazi različitim granama naziva se prost put ili lanac.*

Definicija 6. *Put koji prolazi različitim čvorovima naziva se elementarni put ili prost lanac.*

Teorema 1. *Svaki elementarni put je i prost. Obrnuto ne mora da važi.*

Ako je $x_p = x_q$ put se naziva zatvorenim ili kružnim.

Definicija 7. *Prost zatvoren put naziva se ciklus.*

Definicija 8. *Graf u kome za svaka dva čvora x_i i x_j postoji put koji ih povezuje naziva se povezan. U protivnom je nepovezan i sastoji se od komponenti povezanosti.*

Teorema 2. *Neka je $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ k-ti stepen matrice susedstva $A = (a_{ij})_{,n\times n}$, grafa G. Tada $a_{ij}^{(k)}$ odredjuje ukupan broj puteva dužine k koji povezuje čvorove x_i i x_j.*

- Dijagonalni elementi $a_{ii}^{(2)}$, matrice $A^2 = (a_{ij}^{(2)})$, $i =, 2, \ldots, n$ odredjuju stepen čvora x_i.

- Dijagonalni elementi $a_{ii}^{(3)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, odredjuju dvostruki broj ciklusa dužine 3 (trouglova) koji sadrži čvor x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zadatak 1. Graf $G = (V, E)$ definisan je skupom čvorova $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ pri čemu su dva čvora susedna ako i samo ako su odgovarajući brojevi uzajamno prosti. Naći matricu susedstva datog grafa. Naći sve puteve dužine tri koji povezuju čvorove 3 i 4. Naći stepen svakog čvora, broj grana, sve cikluse dužine 3 koji sadrže čvor 2 i ukupan broj ciklusa dužine 3 (trouglova).

Rešenje. Označimo sa $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ i $x_5 = 6$ čvorove datog grafa. Zvezde čvorova su skupovi

$$z(x_1) = \{x_2, x_4\}, \quad z(x_2) = \{x_1, x_3, x_4\}, \quad z(x_3) = \{x_2, x_4\},$$
$$z(x_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \quad z(x_5) = \{x_4\}\,.$$

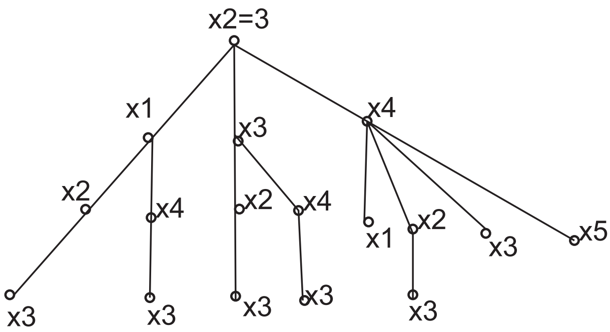
Na osnovu zvezde može se formirati matrica susedstva grafa $A = (a_{ij})$, reda 5×5,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice $A^2 = A \cdot A = (a_{ij}^{(2)})$, $A^3 = A \cdot A^2 = (a_{ij}^{(3)})$ su

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $a_{23}^{(3)}) = 5$ postoji 5 puteva dužine 3 koji povezuju čvorove $x_2 = 3$ i $x_3 = 4$. Same puteve možemo naći pretraživanjem



Traženi putevi su:

$$x_2 - x_1 - x_2 - x_3 \qquad x_2 - x_1 - x_4 - x_3 \qquad x_2 - x_3 - x_2 - x_3$$
$$x_2 - x_3 - x_4 - x_3 \qquad x_2 - x_4 - x_2 - x_3$$

Primetimo da je samo put

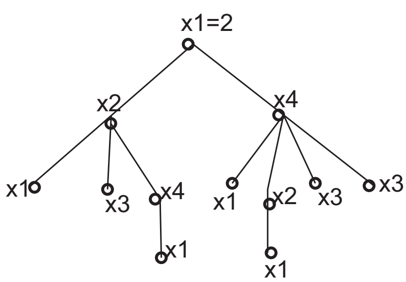
$$x_2 - x_1 - x_4 - x_3$$

elementaran (prost), svi ostali su složeni.

Stepen svakog čvora možemo naći pomoću zvezde ili matrice susedstva A ili matrice A^2. Tako je

$$\begin{aligned}
d(x_1) &= |z(x_1)| = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = a_{11}^{(2)} = 2 \\
d(x_2) &= |z(x_2)| = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} = a_{22}^{(2)} = 3 \\
d(x_3) &= |z(x_3)| = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} = a_{33}^{(2)} = 2 \\
d(x_4) &= |z(x_4)| = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} + a_{45} = a_{44}^{(2)} = 4 \\
d(x_5) &= |z(x_5)| = a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54} + a_{55} = a_{55}^{(2)} = 1\,.
\end{aligned}$$

Kako je $a_{11}^{(3)} = 2$ postoji samo jedan ciklus dužine 3 koji sadrži čvor $x_1 = 2$. Može se naći pretraživanjem



Ciklusi $x_1 - x_2 - x_4 - x_1$ i $x_1 - x_4 - x_2 - x_1$ su jednaki te postoji samo jedan prost ciklus koji prolazi kroz čvor $x_1 = 2$.

Na osnovu matrice A^3 važi

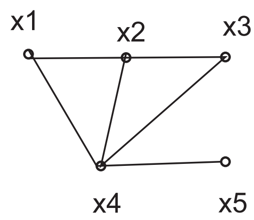
$$\sum_{i=1}^{5} a_{ii}^{(3)} = 12\,.$$

Kako je $a_{ii}^{(3)}$ dvostruki broj ciklusa dužine 3 koji prolaze kroz čvor x_i, i svaki ciklus dužine 3 čine 3 različita čvora, ukupan broj ciklusa dužine 3 u grafu G, $C_3(G)$, je

$$C_3(G) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5} a_{ii}^{(3)} = 2\,.$$

Lako je pokazati da su to (na primer) ciklusi

$$x_2 - x_1 - x_4 - x_2 \quad \text{i} \quad x_2 - x_3 - x_4 - x_2\,.$$



G

Graf koji ne sadrži ni jedan ciklus naziva se acikličnim.

Dva puta u grafu, izmedju istih čvorova, su nezavisni u odnosu na grane ako nemaju ni jednu zajedničku granu. Putevi su nezavisni u odnosu na čvorove ako nemaju zajedničkih čvorova (osim početnog i krajnjeg).

Putvi izmedju čvorova x_1 i x_3

$$x_1 - x_2 - x_3 \quad \text{i} \quad x_1 - x_4 - x_3$$

su nezavisni i u odnosu na čvorove i u odnosu na grane.

Putevi izmedju čvorova x_1 i x_3

$$x_1 - x_4 - x_2 - x_3\,,$$
$$x_1 - x_2 - x_4 - x_3$$

nisu nezavisni ni u odnosu na čvorove ni u odnosu na grane.

Pitanja

1. Ako su dva puta izmedju istih čvorova nezavisna u odnosu na čvorove, šta je sa nezavisnošću u odnosu na grane?

2. Ako su dva puta izmedju istih čvorova nezavisna u odnosu na grane, šta je sa nezavisnošću u odnosu na čvorove?

2.3 Delovi grafa

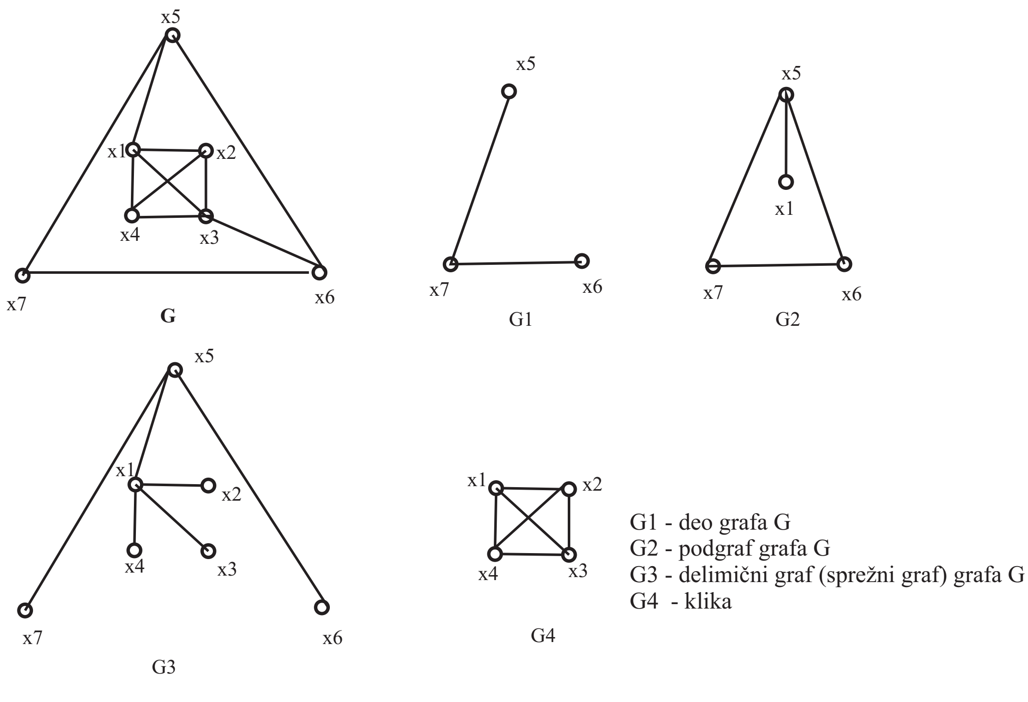
Definicija 9. *Svaki čvor i svaka grana je deo grafa.*

Definicija 10. *Neka je* $G = (V, E)$. *Svaki graf* $G_1 = (V_1, E_1)$ *sa osobinom* $V_1 \subseteq V$ *i* $E_1 \subseteq E$ *je deo grafa* G.

Definicija 11. *Graf* $G_1 = (V_1, E_1)$ *sa osobinama* $V_1 \subset V$ *i* $E_1 = E \bigcap (V_1 \times V_2)$ *naziva se podgrafom grfa* G.

Definicija 12. *Graf* $G_1 = (V, E_1)$ *sa osobinom* $E_1 \subseteq E$ *naziva se delimični graf (sprežni podgraf) grafa* G.

Definicija 13. *Podgraf grafa* $G = (V, E)$, *sa maksimalnim brojem čvorova, koji je kompletan graf naziva se klikom.*



2.4 Izomorfizam grafova

Definicija 14. *Dva grafa* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $|E_1| = |E_2| = m$ *su su izomorfna ako i samo ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje (bijekcija)* $\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$ *tako da se očuva princip susedstva, tj.*

$$\forall x_1, x_2 \in V_1, \quad \{x_1, x_2\} \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(x_1), \varphi(x_2) \in V_2, \quad \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\} \in E_2\,.$$

Teorema 3. *Neka su grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ izomorfni. Tada oni imaju isti karakteristični polinom (spektar). Obrnuto ne mora da važi.*

Dokaz. Neka su A_1 i A_2, redom, matrice susedstva grafova G_1 i G_2. One ne moraju biti jednake, ali postoji permutaciona matrica P (binarna matrica koja u svakoj vrsti i svakoj koloni ima samo jednu jedinicu) tako da je

$$A_1 = PA_2P^T, \qquad PP^T = P^TP = I, \qquad \det P = \det P^T = 1\,.$$

Sada važi

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A_1) &= \det(\lambda PP^T - P \cdot A_2P^T) = \det(P(\lambda I - A_2)P^T) = \\ &= \det P \det(\lambda I - A_2) \det P^T = \det(\lambda I - A_2)\,.\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Ako su grafovi $G_1(V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ izomorfni, tada*

- *imaju jednak broj čvorova, $V_1| = |V_2|$*
- *imaju jednak broj grana, $|E_1| = |E_2|$,*
- *iste nizove stepena čvorova,*
- *sve cikluse istih dužina,*
- *izomorfne podgrafove.*

Obrnuto ne mora da važi.

Sam postupak za utvrdjivanje da li su dva grafa izomorfna može biti veoma složen i težak. Zbog toga je često lakše otkriti da grafovi nisu izomorfni. Teorema 4 nam omogućava da formiramo proceduru koja možda može da pomogne da ustanovimo da dva grafa neizomorfna.

Procedura $\Big(G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)\Big)$

KORAK 1 Da li je $V_1| = |V_2|$. Ako nije ići na Korak 6. Ako jeste ići na korak 2.

KORAK 2 Da li je $E_1| = |E_2|$. Ako nije ići na korak 6. Ako jeste ići na korak 3.

KORAK 3 Da li su u grafovima isti nizovi stepena čvorova. Ako nije ići na korak 6. Ako jeste ići na korak 4.

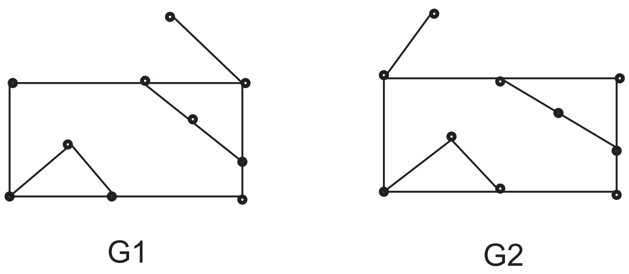
KORAK 4 Da li su im svi ciklusi istih dužina. Ako nisu ići na korak 6. Ako jesu, ići na korak 5.

KORAK 5 Da li su svi podgrafovi izomorfni. Ako nisu, ići na korak 6. Ako jseu, ići na korak 7.

KORAK 6 Grafovi nisu izomorfni.

KORAK 7 Procedura ne omogućava da se ustanovi da su grafovi izomorfni.

Zadatak 2. *Koristeći navedenu proceduru pokazati da grafovi na sledećoj slici nisu izomorfni.*



Rešenje

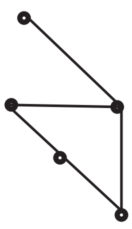
KORAK 1 Grafovi G_1 i G_2 imaju isti broj čvorova $V_1| = |V_2|$=10.

KORAK 2 Grafovi G_1 i G_2 imaju isti broj, $|E_1| = |E_2|$

KORAK 3 Imaju isti niz stepena čvorova $d = (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$

KORAK 4 Imaju po jedan ciklud dužina 3, 4 i 8.

KORAK 5 Podgraf prikazan na slici postoji u grafu G_1, ali ne postoji u grafu G_2.



KORAK 6 Grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni

Šta se može reći za grafove G_1 i G_2 prikazane na sledećoj slici?