8 Стабла

Преглед теорије

Дефиниција 1. Сваки граф који не садржи ниједан циклус назива се ациклични граф или шума.

Дефиниција 2. Сваки повезан ациклични граф који садржи $n \geq 2$ чворова назива се стабло.

Теорема 1. Нека је G дати граф који садржи $n \geq 2$ чворова. Тада су следећи искази еквивалентни:

1. Граф G је повезан и не садржи ниједан циклус;
2. Граф G не садржи ниједан циклус и има $n - 1$ грану;
3. Граф G је повезан и садржи $n - 1$ грану;
4. Граф G не садржи ниједан циклус, али додавањем нове гране између произвољна два чвора, образује се циклус;
5. Граф G је повезан, али удаљавањем произвољне гране он постаје неповезан;
6. Свака два чвора у графу G су спојена тачно једним елементарним путем.

Чвор у стаблу који има степен 1 назива се лист.

Дефиниција 3. Број независних простих циклуса у датом графу (мултиграфу) G, у ознаци $\gamma(G)$, назива се цикломатски број.

Цикломатски број графа G једнак је броју грана које треба одстранити из графа да би се формирала шума (стабло).

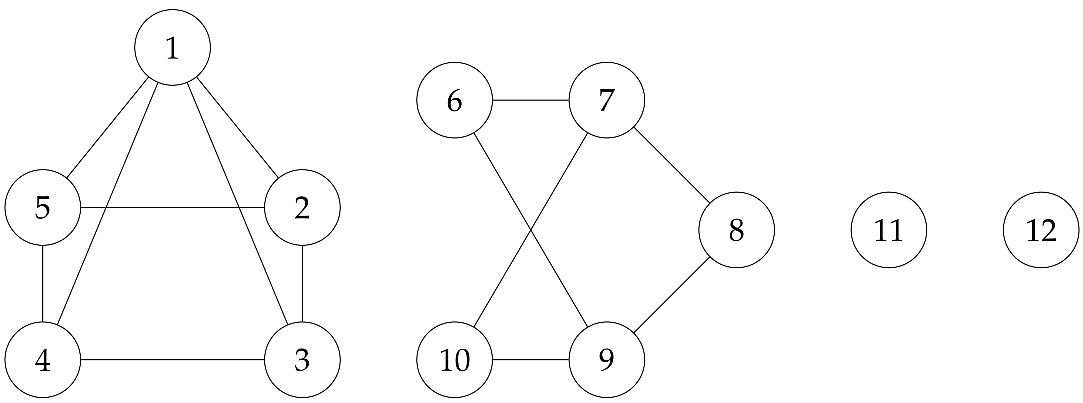
Дефиниција 4. Број грана у једној шуми (стаблу), у ознаци $r(G)$, назива се ранг шуме (стабла).

Теорема 2. Нека граф (мултиграф) G има n чворова, m грана и p компоненената повезаности. Тада важе једнакости

$$r(G) = n - p \qquad \gamma(G) = m - n + p\,.$$

Решени задаци

Задатак 1. Нека је задат граф преко визуелне репрезентације у виду следеће слике:



Израчунати цикломатски број овог графа.

Решење. Цикломатски број неког графа представља колико је у њему најмање неопходно обрисати грана како би се добила шума. Овај број се може срачунати коришћењем формуле

$$\gamma = m - n + p,$$

где γ представља цикломатски број, m означава број грана у датом графу, n његов укупан број чворова, а p број компоненти повезаности. Узевши у обзир да задати граф има тачно 12 чворова, 14 грана, као и четири компоненте повезаности, његов цикломатски број мора да износи

$$14 - 12 + 4 = 6.$$

□

Задатак 2.

а) Дата је произвољна шума. Да ли свака њена грана мора да представља мост?

б) Дат је произвољан граф код ког свака грана представља мост. Да ли овај граф мора да буде шума?

в) Дата је произвољна шума. Да ли сваки њен чвор који је степена већег од један мора да представља артикулациони чвор?

г) Дат је произвољан граф код ког сваки чвор који је степена већег од један представља артикулациони чвор. Да ли овај граф мора да буде шума?

Напомена: Уколико је одговор позитиван, неопходно је објаснити, односно доказати, зашто тврђење важи. Ако је одговор негативан, потребно је дати контрапример.

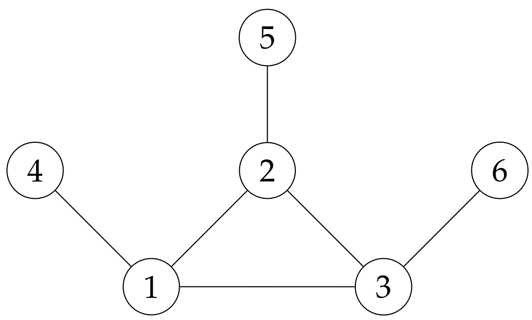
Решење.

а) Нека је дата произвољна шума $G = (V, E)$ и нека њена грана $\{a, b\} \in E$, где је $a, b \in V$. Уколико претпоставимо да грана $\{a, b\}$ не представља мост, следи да између чворова a и b мора да постоји елементаран пут који не обухвата грану $\{a, b\}$. Међутим, тада овај пут заједно са граном $\{a, b\}$ чини прост циклус, што није могуће зато што граф G нема прост циклус пошто знамо да је шума. Добијамо контрадикцију, те закључујемо да свака грана произвољне шуме мора да чини мост.

б) Претпоставимо супротно, тј. да постоји граф $G = (V, E)$ код ког свака грана чини мост, а који није шума. Пошто граф није шума, он мора да има прост циклус. Нека је $\{a, b\} \in$ произвољна грана која учествује у формирању овог простог циклуса. Ако између два чвора постоји пут у графу G, тада ће између њих постојати пут и уколико уклонимо грану $\{a, b\}$. Наиме, ако дати пут садржи управо грану $\{a, b\}$, тај део пута можемо заменити заобилазним путем између ова два чвора који садржи остатак уоченог циклуса без гране $\{a, b\}$. Уклањање гране $\{a, b\}$ не би повећало број компоненти повезаности графа G, те следи да ова грана не чини мост, што је у контрадикцији са чињеницом да свака грана овог графа представља мост. Добијамо да је наша иницијална претпоставка била погрешна и закључујемо да уколико свака грана неког графа представља мост, он мора бити шума.

в) Нека је дата произвољна шума $G = (V, E)$ и њен било који чвор $a \in V$ који је степена бар два. Овај чвор тада мора бити суседан са још бар два различита чвора. Нека су то b и c, где је $b, c \in V$, $b \neq c$. Уколико уклонимо чвор , број компоненти повезаности графа мора да се повећа. Ако претпоставимо супротно, тј. да се број компоненти повезаности не повећава, следи да између чворова b и c мора да постоји елементаран пут који не укључује гране $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$. Међутим, одавде следи да овај елементарни пут заједно са гранама $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ формира прост циклус, што је у супротности са чињеницом да граф G представља шуму. Дакле, број компоненти повезаности мора да се повећа уколико избришемо чвор a и његове инцидентне гране, одакле следи да он мора да буде артикулациони чвор. Закључујемо да за произвољну шуму, сваки чвор степена већег од један мора да буде артикулациони.

г) Одговор је не. Граф приказан на следећој слици чини контрапример, узевши у обзир да он није шума, а сваки његов чвор степена већег од један јесте артикулациони.



□

Задатак 3. Нека је дато стабло T са скупом чворова V и нека се са $d(x)$ означава степен сваког његовог чвора $x \in V$. Уколико је

$$k = \max_{x \in V} d(x),$$

доказати да стабло T мора да има бар k чворова чији је степен једнак један.

Решење. Уколико је $k = 0$, онда тврђење аутоматски важи јер стабло сигурно мора да има бар нула чворова степена један. Ако је $k = 1$, онда стабло T није тривијално и сви његови чворови морају да имају степен један. Дакле, постоји бар један чвор који јесте степена један. Претпоставимо надаље да важи $k \geq 2$.

Означимо са $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ степене свих чворова стабла T, у неопадајућем редоследу. Такође, нека c означава укупан број чворова степена један. На основу услова да k представља највећи степен чвора у датом стаблу, добијамо наредне једнакости, односно неједнакости:

$$\begin{aligned} d_1 &= 1, \\ d_2 &= 1, \\ &\vdots \\ d_c &= 1, \\ d_{c+1} &\geq 2, \\ d_{c+2} &\geq 2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{n-1} &\geq 2, \\
d_n &= k.
\end{aligned}
$$

Одавде директно следи

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} d_j &\geq c \cdot 1 + (n - c - 1) \cdot 2 + k \\
&= c + 2n - 2c - 2 + k \\
&= 2n + k - c - 2.
\end{aligned}
$$

Узевши у обзир да знамо да је

$$
\sum_{j=1}^{n} d_j = 2(n-1) = 2n - 2,
$$

пошто стабло T мора да има $n - 1$ грана, закључујемо да мора бити

$$
\begin{aligned}
& 2n - 2 \geq 2n + k - c - 2 \\
\Longrightarrow \quad & 0 \geq k - c \\
\Longrightarrow \quad & c \geq k,
\end{aligned}
$$

односно стабло T мора да има бар k чворова степена један, као што је и било потребно доказати. $\square$

Задаци за самосталан рад

Задатак 4. Користећи коренско стабло наћи највећи број $\overline{i_1 i_2 \cdots i_n}$, $i_j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, чије су све цифре међусобно различите, при чему је за свако k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, број $\overline{i_k i_{k+1}}$ дељив бројевима седам или дванаест.

Задатак 5. Доказати да свако стабло има или један центар или два суседна центра.

Задатак 6. Нека је T произвољно стабло које се састоји од $k + 1$ чворова, где је $k \in \mathbb{N}_0$. Уколико је дат граф G такав да је сваки његов чвор степена бар k, доказати да он мора да садржи подграф који је изоморфан стаблу T.