3 Матрице придружене графу

Преглед теорије

Дефиниција 1 (Матрица суседства)**.** Нека је дат граф $G = (V, E)$ са n чворова уз фиксиран редослед чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Његова матрица суседства се дефинише као симетрична квадратна бинарна реална матрица $A(G) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ таква да је:

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{чворови } v_i \text{ и } v_j \text{ су суседни,} \\ 0, & \text{чворови } v_i \text{ и } v_j \text{ нису суседни} \end{cases} \qquad \left(\forall i, j = \overline{1, n}\right).$$

Дефиниција 2 (Матрица инцидентности)**.** Нека је дат граф $G = (V, E)$ са $n \in \mathbb{N}$ чворова и $m \in \mathbb{N}_0$ грана уз фиксиране редоследе чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Његова матрица инцидентности се дефинише као бинарна реална матрица $B(G) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ таква да је:

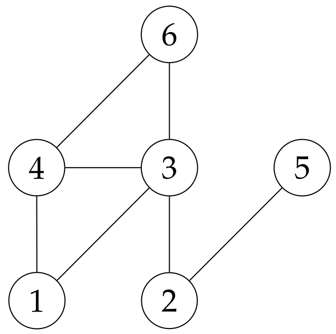
$$B(G)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{чвор } v_j \text{ чини крај гране } e_i, \\ 0, & \text{чвор } v_j \text{ не чини крај гране } e_i \end{cases} \qquad \left(\forall i = \overline{1, m},\ \forall j = \overline{1, n}\right).$$

Дефиниција 3 (Матрица суседства по гранама)**.** Нека је дат граф $G = (V, E)$ са m грана уз фиксиран редослед грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Његова матрица суседства по гранама се дефинише као симетрична квадратна бинарна реална матрица $C(G) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ таква да је:

$$C(G)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{гране } e_i \text{ и } e_j \text{ имају тачно један заједнички крај,} \\ 0, & \text{гране } e_i \text{ и } e_j \text{ немају тачно један заједнички крај} \end{cases} \qquad \left(\forall i, j = \overline{1, m}\right).$$

Решени задаци

Задатак 1. Задат је граф $G = (V, E)$ уз скуп чворова $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ чија је визуелна репрезентација дата на следећој слици:



Одредити матрицу суседства $A_1(G)$ графа G која одговара природном редоследу чворова, тј. редоследу $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Затим поређати чворове графа G тако да иду у нерастућем редоследу по степену и наћи матрицу суседства $A_2(G)$ која одговара том редоследу чворова. Да ли су матрице $A_1(G)$ и $A_2(G)$ исте? Образложити одговор.

Решење. Матрицу $A_1(G)$ директно добијамо из визуелне репрезентације графа:

$$A_1(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Степени свих чворова графа G су редом једнаки

$$\begin{aligned} &\deg(1) = 2\,, && \deg(2) = 2\,, && \deg(3) = 4\,, \\ &\deg(4) = 3\,, && \deg(5) = 1\,, && \deg(6) = 2\,. \end{aligned}$$

Ове чворове можемо сортирати у нерастућем редоследу по степену на неколико различитих начина. Једно од валидних решења је $3, 4, 1, 2, 6, 5$. У односу на овај редослед чворова, одговарајућа матрица суседства $A_2(G)$ је једнака

$$A_2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Јасно је да важи $A_1(G) \neq A_2(G)$. Разлог ове појаве јесте чињеница да граф у општем случају нема јединствену матрицу суседства, већ она зависи од првобитно одабраног редоследа чворова. □

Напомена: При сортирању чворова у нерастућем редоследу по степену, има укупно још пет валидних могућности осим одабраног редоследа $3, 4, 1, 2, 6, 5$. Те могућности су редом:

$$\begin{gathered} 3, 4, 1, 6, 2, 5, \\ 3, 4, 2, 1, 6, 5, \\ 3, 4, 2, 6, 1, 5, \\ 3, 4, 6, 1, 2, 5, \\ 3, 4, 6, 2, 1, 5. \end{gathered}$$

Приметимо да чворови $1, 2, 6$ имају исти степен, те можемо да их поређамо по било ком редоследу, одакле потиче укупно шест различитих могућности.

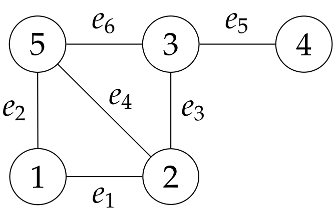
Задатак 2. Конструисати и визуелно представити произвољан граф G тако да матрица

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

чини његову матрицу суседства.

За конструисани граф G, поређати његове гране на произвољан начин и затим одредити његову матрицу суседства по гранама $C(G)$ у односу на тај редослед грана. Такође одредити матрицу инцидентности $B(G)$ графа G која одговара истом том редоследу грана, као и редоследу чворова из матрице $A(G)$. На крају, одредити колико граф G има укупно матрица инцидентности које одговарају редоследу чворова из матрице $A(G)$ и произвољном редоследу грана.

Решење. Нека се граф G састоји од пет чворова $1, 2, 3, 4, 5$ тако да матрица суседства $A(G)$ одговара његовом природном редоследу чворова. Одавде добијамо да се граф G може визуелно представити као на следећој слици:



Ако гране конструисаног графа G поређамо у редослед $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, тада ће тражена матрица суседства по гранама $C(G)$ која одговара овом редоследу бити једнака

$$C(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица инцидентности $B(G)$ која одговара редоследу грана $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, као и редоследу чворова $1, 2, 3, 4, 5$ је једнака

$$B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фиксирајмо редослед чворова на $1, 2, 3, 4, 5$. Приметимо да сваки редослед грана графа G генерише по једну могућу матрицу инцидентности. Такође, свака два реда било које матрице инцидентности морају бити различита, пошто граф нема вишеструких грана. То значи да матрице инцидентности добијене преко различитих редоследа грана морају бити различите. Закључујемо да је укупан број матрица инцидентности које одговарају фиксираном редоследу чворова једнак укупном броју начина на који можемо да поређамо гране графа.

У конкретном случају графа G, постоји тачно шест грана, што значи да можемо да их поређамо на укупно $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ начина. Дакле, граф G има укупно 720 матрица инцидентности које одговарају редоследу чворова из матрице $A(G)$ и произвољном редоследу грана. $\square$

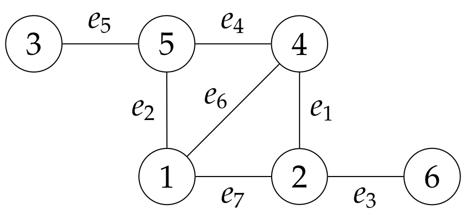
Задатак 3. Наћи и визуелно представити произвољан граф G такав да матрица

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

чини његову матрицу инцидентности.

Одредити матрицу суседства по гранама $C(G)$ графа G која одговара истом редоследу грана као и дата матрица $B(G)$. Да ли постоји граф H са 69 чворова такав да $B(G)$ истовремено представља и његову матрицу инцидентности? Да ли постоји граф F са 69 чворова такав да $C(G)$ истовремено представља и његову матрицу суседства по гранама?

Решење. Нека се граф G састоји од шест чворова $1, 2, 3, 4, 5, 6$, као и седам грана $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, тако да матрица инцидентности $B(G)$ одговара његовом природном редоследу чворова и грана. Следи да граф G можемо визуелно да представимо као на следећој слици:



Матрица суседства по гранама $C(G)$ графа G која одговара редоследу грана $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ износи

$$C(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица инцидентности која одговара неком графу тачно говори колико он мора да има чворова и грана – број чворова је једнак броју колона те матрице, док је број грана једнак броју редова. Дакле, ако матрица $B(G)$ представља матрицу инцидентности неког графа, он мора да има тачно шест чворова. Закључујемо да не постоји граф H са 69 чворова такав да $B(G)$ чини његову матрицу инцидентности.

Што се тиче матрице суседства по гранама, она носи информацију о томе колико грана граф мора да има, али не носи информацију о тачном броју његових чворова. На пример, ако узмемо почетни граф G и додамо му произвољан број изолованих чворова, добићемо граф такав да $C(G)$ представља и његову матрицу суседства по гранама. Како граф G има тачно шест чворова, то значи да додавањем 63 изолована чвора добијамо граф са 69 чворова такав да $C(G)$ представља његову матрицу суседства по гранама. Одатле добијамо позитиван одговор о постојању графа F са условима наведеним у тексту задатка. $\square$

Задаци за самосталан рад

Задатак 4. Граф $G = (V, E)$ дефинисан је скупом чворова $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и скупом грана $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{5, 6\}\}$. Скицирати граф. Наћи матрице суседства, суседства по гранама и инцидентности.

Задатак 5. Граф $G = (V, E)$ дефинисан је матрицом инцидентности

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основу матрице B одредити број чворова, број грана, степен сваког чвора, скуп суседних чворова за сваки чвор, матрицу суседства A и матрицу суседства по гранама C. Скицирати граф.