12 Планарни графови

Преглед теорије

Дефиниција 1. Дати граф се назива равним ако је смештен у некој равни и гране му се не секу. Граф је планаран ако је изоморфан неком равном графу.

Дефиниција 2. Граф који је планаран, али додавањем било које нове гране губи то својство назива се максимално планарним графом.

Дефиниција 3. Подразбијање гране $\{u, v\}$ датог графа G је операција у којој се брише дата гране, а затим додаје нови чвор w и спаја са чворовима u и v. Подразбијање графа G је операција узастопног подразбијања одређеног броја грана (или ниједне, или једне, или већег броја).

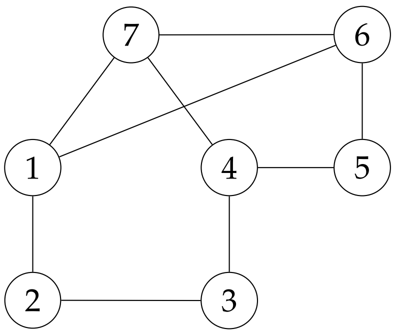
Теорема 1 (Теорема Куратовског)**.** Граф је планаран ако и само ако не садржи подграф који се добија подразбијањем графа $K_{3,3}$ или графа K_5.

Теорема 2 (Ојлерова формула)**.** Нека је G планарни граф који има n чворова, m грана, p компонената повезаности и дели раван на f области. Тада важи једнакост

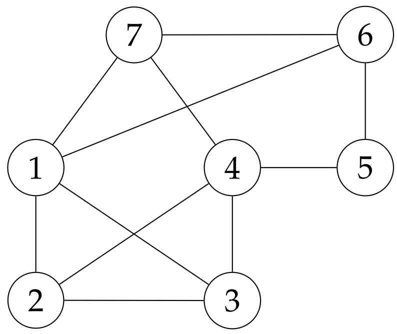
$$f = m - n + p + 1.$$

Решени задаци

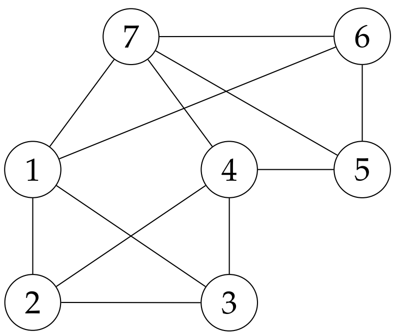
Задатак 1. За сваки од графова на следећој слици одредити да ли је планаран или не. Ако јесте планаран, нацртати визуелну репрезентацију графа на којој се види његова планарност. Ако није, објаснити зашто није.



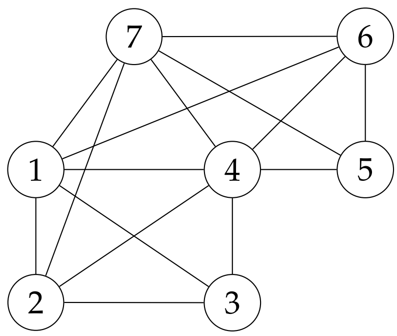
(а) G_1



(б) G_2



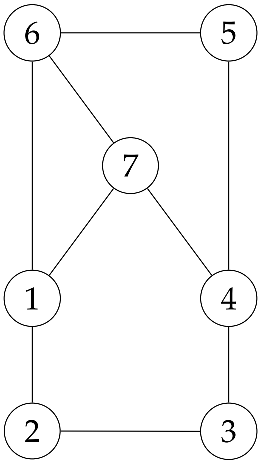
(в) G_3



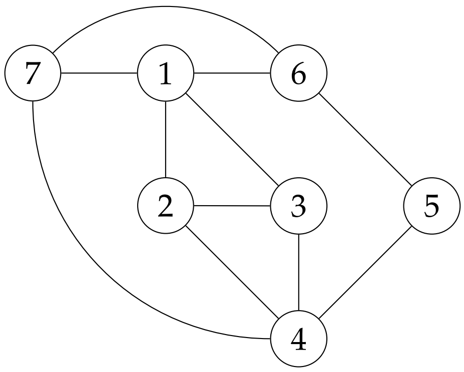
(г) G_4

Решење.

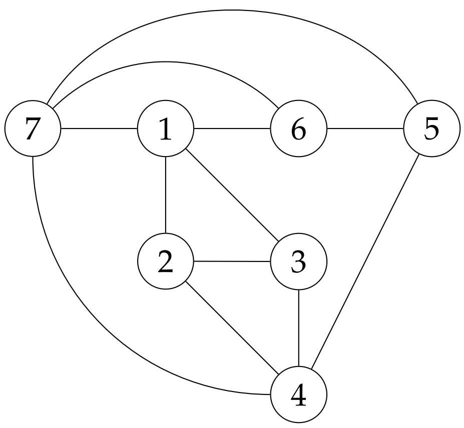
а) Граф G_1 јесте планаран. Његова одговарајућа визуелна репрезентација дата је на следећој слици:



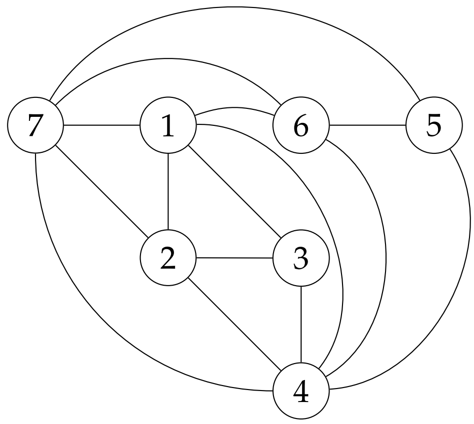
б) Граф G_2 је такође планаран. Његова визуелна репрезентација која директно показује планараност дата је на наредној слици:



в) Граф G_3 је планаран исто као и претходна два. Као адекватан доказ служи следећа слика:



г) Граф G_4 јесте планаран. Следећа визуелна репрезентација доказује његову планарност:



□

Задатак 2. Да ли постоји 5-регуларан граф са 8 чворова који је планаран?

Решење. Нека је дат граф G који је 5-регуларан и састоји се од 8 чворова. Тада је његов комплемент $\overline{G}$ 2-регуларан, те знамо да свака његова компонента повезаности мора да представља прост циклус дужине бар три. Узевши у обзир да се природан број 8 може представити као збир природних бројева не мањих од три на само три начина: $8 = 8$, $8 = 4 + 4$ или $8 = 5 + 3$, закључујемо да постоје само три по изоморфизму различита 2-регуларна графа са 8 чворова.

Долазимо до веома битног закључка да има укупно три по изоморфизму различита графа која су 5-регуларна и садрже 8 чворова. Испоставља се да нису планарни, одакле се закључује да не постоји 5-регуларан граф са 8 чворова који је планаран. У остатку решења, показаћемо да три могућа графа нису планарна. Без губљења општости, нека се граф G састоји од чворова из скупа $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1) Уколико се граф $\overline{G}$ састоји од две компоненте повезаности које представљају прост циклус дужине три и прост циклус дужине пет, можемо да претпоставимо да чворови из скупа $A = \{1, 2, 3\}$ формирају прост циклус дужине три, док чворови из скупа $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ формирају прост циклус дужине пет. У графу G, сваки чвор из скупа A мора бити повезан са сваким чвором из скупа B, одакле добијамо да граф G мора бити надграф графа који је изоморфан са $K_{3,5}$, који је сам по себи надграф графа $K_{3,3}$. За граф $K_{3,3}$ је познато да није планаран, одакле закључујемо да ни граф G не сме бити планаран.

2) Уколико се граф $\overline{G}$ састоји од две компоненте повезаности које представљају прост циклус дужине четири, можемо да претпоставимо да чворови из скупа $A = \{1, 2, 3, 4\}$ формирају прост циклус дужине четири, док чворови из скупа $B = \{5, 6, 7, 8\}$ такође формирају прост циклус дужине четири. У графу G, сваки чвор из скупа A мора бити повезан са сваким чвором из скупа B, одакле добијамо да граф G мора бити надграф графа који је изоморфан са $K_{4,4}$, који је сам по себи надграф графа $K_{3,3}$. За граф $K_{3,3}$ је познато да није планаран, одакле закључујемо да ни граф G не сме бити планаран.

3) Нека се граф $\overline{G}$ састоји од јединствене компоненте повезаности која чини прост циклус дужине осам. Без губљења општости, претпоставимо да граф $\overline{G}$ обухвата прост циклус $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 1$. Посматрајмо скупове $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{5, 6, 7\}$. У графу G, сваки чвор из скупа A мора бити повезан са сваким чвором из скупа B, одакле

добијамо да граф G мора бити надграф графа који је изоморфан са $K_{3,3}$. За граф $K_{3,3}$ је познато да није планаран, одакле закључујемо да ни граф G не сме бити планаран.

□

Задатак 3. Колико чворова има повезан планаран граф ако је:

а) 3-регуларан и дели раван на 4 области;

б) степен његове регуларности једнак броју области на које дели раван?

Доказ. Нека r-регуларан повезан планаран граф има n чворова, m грана и нека дели раван на f области. Тада на основу једнакости

$$m = \frac{r \cdot n}{2} \qquad \text{и} \qquad m - n = f - 2,$$

добијамо да је

$$n = \frac{2(f-2)}{r-2} \qquad \text{за} \qquad r \neq 2,$$

као и

$$m = n,\ f = 2 \qquad \text{за} \qquad r = 2.$$

а) За $r = 3$ и $f = 4$ добијамо да је $n = 4$. Планаран граф са овим карактеристикама је управо граф K_4.

б) Нека је $r \neq 2$. За $r = f$ добијамо да је $n = 2$. Повезан граф који има $n = 2$ чвора јесте планаран. Ако је $r = 2$, тада је $f = 2$, $m = n$. Прост циклус C_n такође формира планаран граф.

□

Задатак 4. Унутар квадрата изабрано је 20 тачака. Оне су међусобно, као и са теменима квадрата, спојене дужима, које се међусобно не секу, тако да је квадрат раздељен на троуглове. Колико је троуглова формирано у квадрату?

Доказ. Придружимо задатку граф, при чему су изабране тачке и темена квадрата чворови, а дужи које их спајају гране. Овај граф је очигледно планаран. Означимо са f број области на које овај граф дели раван. Спољашњу област ограђују четири гране. Остале $f - 1$ области су троуглови, и свака грана је гранична за две области. Ако означимо са m број грана у овом графу, важи

$$3(f-1) + 4 = 2m \qquad \Longrightarrow \qquad m = 2 + \frac{3(f-1)}{2}.$$

На основу Ојлерове формуле, при чему је број чворова $n = 24$, важи једнакост

$$24 - \left(\frac{3(f-1)}{2} + 2\right) + f = 2,$$

те је $f = 43$. То значи да има 42 троугла у квадрату. □

Задатак 5. Дат је планаран граф који се састоји од $n \in \mathbb{N}$ чворова, $m \in \mathbb{N}_0$ грана и $p \geq 2$ компоненти повезаности. Доказати да тада мора да постоји планаран граф који се састоји од n чворова и $m + 3p - 6$ грана.

Решење. За сваки планаран граф који се састоји од бар три чвора знамо да не може да има преко $3t - 6$ грана, где t означава његов број чворова. Међутим, ова неједнакост неће да важи уколико граф има један или два чвора, пошто је $3 \cdot 1 - 6 = -3$, а $3 \cdot 2 - 6 = 0$, док планарни граф са један, односно два, чвора може да има максимално нула, односно једну, грану. Идеја код решавања овог задатка је да се граница $3t - 6$ ублажи, али тако да важи за сваки граф, без обзира на његов број чворова. Није тешко приметити да за свако $t \in \mathbb{N}$, планаран граф са t чворова не може имати преко $3t - 3$ грана. За $t \geq 3$ очигледно важи јер је $3t - 6 < 3t - 3$, док се за случајеве $t = 1$ и $t = 2$ ручно испитује и добија.

Посматрајмо сада граф задат у задатку, који ћемо да означимо са G. Пошто је он планаран, мора бити планарна и свака његова компонента повезаности. Нека компоненте повезаности имају редом $n_1, n_2, \dots, n_p$ чворова и $m_1, m_2, \dots, m_p$ грана. По претходном разматрању, компонента повезаности која има n_i чворова мора да има број грана за који важи $m_i \leq 3n_i - 3$. За укупан број грана графа G добијамо

$$
\begin{aligned}
& m = \sum_{i=1}^{p} m_i \\
\implies \quad & m \leq \sum_{i=1}^{p} (3n_i - 3) \\
\implies \quad & m \leq 3\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right) - 3p \\
\implies \quad & m \leq 3n - 3p.
\end{aligned}
$$

Ако важи $p = 2$, онда је $m + 3p - 6 = m$, те нема шта да се доказује. Претпоставимо да важи $p \geq 3$. Онда мора бити $n \geq 3$, па знамо да постоји планаран граф са n чворова и $3n - 6$ грана, и самим тим планаран граф са n чворова и било којим бројем грана који не превазилази $3n - 6$. Из неједнакости $m \leq 3n - 3p$ следи $m + 3p - 6 \leq 3n - 6$, тако да закључујемо да мора да постоји планаран граф са n чворова и $m + 3p - 6$ грана, чиме је доказ готов. □

Задатак 6.

а) Колико највише грана може да има планаран граф са $n \geq 4$ чворова?

б) Колико највише грана може да има бипартитан планаран граф који се састоји од $n \geq 4$ чворова?

в) Колико највише грана може да има бипартитан планаран граф који се састоји од $n \geq 4$ чворова и који не садржи ниједан циклус дужине 4?

Решење. У сва три подзадатка очигледно је да постоји граф који има максимални могући број грана при задатом броју чворова и осталим додатним условима. Ако граф није повезан, онда му се може додати нека грана која спаја чворове из две различите компоненте повезаности. На тај начин новодобијени граф има једну грану више, при чему се не нарушава ниједан од потенцијалних услова наведених у подзадацима (бипартитивност или непостојање одговарајућег циклуса). Због тога је у сва три подзадатка при анализи максималног могућег броја грана одговарајућег графа довољно узети у обзир само повезане графове.

Нека је дат повезан планаран граф са $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ чворова. Означимо његов број грана са $m \in \mathbb{N}_0$ и његов број области са $f \in \mathbb{N}$. По Ојлеровој формули, овај граф садржи $f = m - n + 2$

области, при чему важи

$$\sum_{i=1}^{f} e_i = 2m,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_f \in \mathbb{N}$ означавају колико свака његова област има грана.

а) Због $n \geq 4$, знамо да мора да важи $e_1, e_2, \ldots, e_f \geq 3$. Одавде редом следи

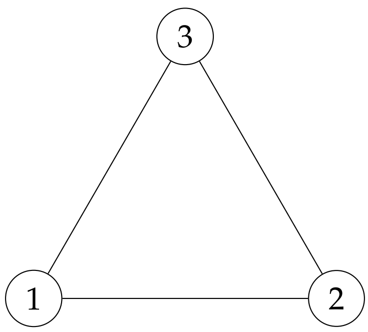
$$\begin{aligned}
& 2m = \sum_{i=1}^{f} e_i \\
\implies \quad & 2m \geq \sum_{i=1}^{f} 3 \\
\implies \quad & 2m \geq 3f \\
\implies \quad & f \leq \frac{2}{3}m.
\end{aligned}$$

Из Ојлерове формуле добијамо

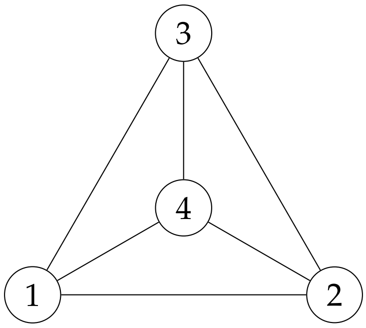
$$\begin{aligned}
& m - n + 2 \leq \frac{2}{3}m \\
\implies \quad & m - \frac{2}{3}m \leq n - 2 \\
\implies \quad & \frac{1}{3}m \leq n - 2 \\
\implies \quad & m \leq 3(n-2) \\
\implies \quad & m \leq 3n - 6.
\end{aligned}$$

Дакле, ниједан повезан планаран граф са $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ чворова не може имати преко $3n-6$ грана. Како бисмо доказали да $3n-6$ заиста јесте максималан могући број грана, довољно је дати пример графа са n чворова који је повезан, планаран и садржи овај број грана.

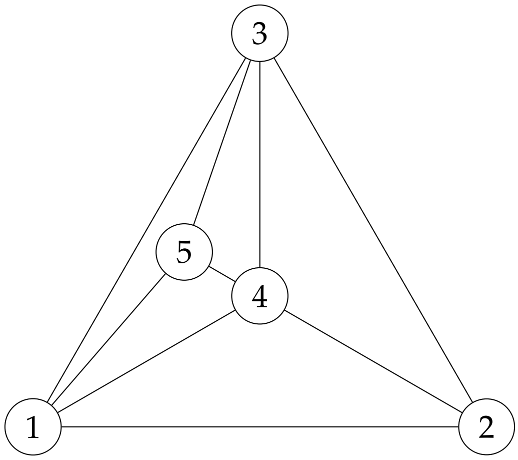
Овакав граф је релативно лако конструисати — у питању је било који комплетно тријангулисан повезан граф. На пример, нека имамо три чвора која у визуелној репрезентацији графа представљају темена једнакостраничног троугла.



Додајмо четврти чвор тако да чини тежисте овог троугла и нека је он у вези са преостала три чвора.



Уколико желимо да додамо следећи чвор, можемо да одаберемо било који постојећи троугао који нема ниједан чвор у својој унутрашњости, нови чвор да поставимо као његово тежисте и да га повежемо са чворовима који чине темена троугла. На пример:



При сваком додавању наредног чвора, граф добије три нове гране. Процедуру додавања чвора можемо да понављамо све док не добијемо граф са $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$ чворова, колико нам и треба. Узевши у обзир да почетни граф са три чвора има три гране, знамо да ће граф са n чворова имати $3 + 3 \cdot (n - 3)$ грана, што је једнако

$$3 + 3 \cdot (n - 3) = 3 + 3n - 9 = 3n - 6,$$

тако да ова конструкција графа завршава доказ.

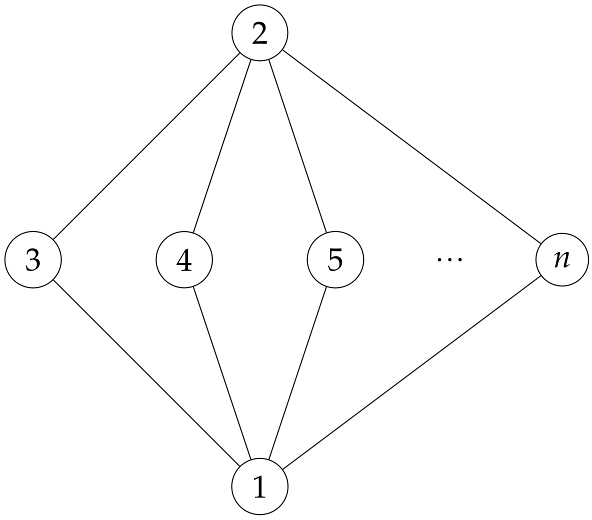
б) Због $n \geq 4$, знамо да мора да важи $e_1, e_2, \ldots, e_f \geq 3$. Међутим, због чињенице да је граф бипартитан, знамо да ниједна његова област не може да садржи непаран број грана, јер би то довело до постојања циклуса непарне дужине. Дакле, мора да важи строжа неједнакост $e_1, e_2, \ldots, e_f \geq 4$. Надаље добијамо

$$\begin{aligned} & 2m = \sum_{i=1}^{f} e_i \\ \implies \quad & 2m \geq \sum_{i=1}^{f} 4 \\ \implies \quad & 2m \geq 4f \\ \implies \quad & \ \ f \leq \frac{1}{2} m. \end{aligned}$$

Применом Ојлерове формуле следи:

$$\begin{aligned}
& m - n + 2 \le \frac{1}{2}m \\
\implies \quad & m - \frac{1}{2}m \le n - 2 \\
\implies \quad & \frac{1}{2}m \le n - 2 \\
\implies \quad & m \le 2(n-2) \\
\implies \quad & m \le 2n - 4.
\end{aligned}$$

Закључујемо да повезан бипартитан планаран граф са $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$ чворова не може имати преко $2n - 4$ грана. На следећој слици је приказана конструкција оваквог конкретног графа који има тачно $2n - 4$ грана.



Овај граф је очигледно и повезан и планаран, а такође је и бипартитан, пошто се скуп чворова може разбити на дисјунктне подскупове $\{1, 2\}$ и $\{3, 4, 5, \ldots, n\}$ тако да су све гране између чворова из различитих подскупова. Број грана је једнак $2 \cdot (n-2) = 2n-4$, колико и треба да буде. Дакле, максималан број грана који може да има бипартитан планаран граф са $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$ чворова износи $2n - 4$.

в) Пошто је граф бипартитан, то значи да он не може да садржи циклус непарне дужине, те ниједна област не може садржати непаран број грана. Такође ниједна област не сме да садржи четири гране, зато што би тада постојао циклус дужине четири. Имамо $e_1, e_2, \ldots, e_f \notin \{3, 4, 5\}$, одакле због $n \ge 4$ следи да мора бити $e_1, e_2, \ldots, e_f \ge 6$. Надаље следи

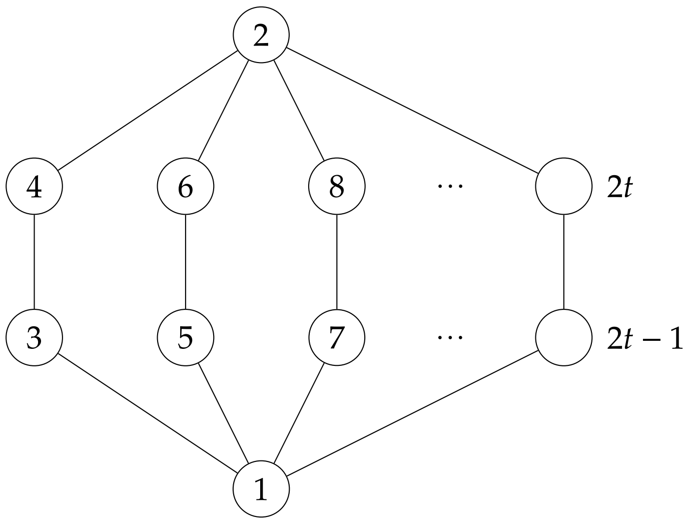
$$\begin{aligned}
& 2m = \sum_{i=1}^{f} e_i \\
\implies \quad & 2m \ge \sum_{i=1}^{f} 6 \\
\implies \quad & 2m \ge 6f \\
\implies \quad & f \le \frac{1}{3}m.
\end{aligned}$$

Уколико искористимо Ојлерову формулу, добија се

$$\begin{aligned} && m - n + 2 \leq \frac{1}{3}m \\ \Longrightarrow && m - \frac{1}{3}m \leq n - 2 \\ \Longrightarrow && \frac{2}{3}m \leq n - 2 \\ \Longrightarrow && m \leq \frac{3}{2}(n-2) \\ \Longrightarrow && m \leq \frac{3n}{2} - 3. \end{aligned}$$

Повезан бипартитан планаран граф са $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ чворова и без циклуса дужине четири не може да има више од $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 3$ грана. Како бисмо доказали да вредност $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 3$ заиста представља максималан могући број грана за овакав граф, довољно је дати пример графа који има управо оволико грана. При конструкцији графа, из практичних разлога ће бити креирани одвојени примери за случај када је n паран број и за случај када је он непаран.

Претпоставимо прво да је $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ паран број, тј. нека је $n = 2t$, где је $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$. Можемо да конструишемо граф као на наредној слици:



Овај граф је очигледно повезан и планаран, као и бипартитан пошто се скуп чворова може разбити на дисјунктне подскупове $\{1\} \cup \{4, 6, 8, \ldots, 2t\}$ и $\{2\} \cup \{3, 5, 7, \ldots, 2t-1\}$ тако да све гране повезују чворове из различитих подскупова. Такође заиста нема ниједног циклуса дужине четири. Укупан број грана датог графа је једнак $3 \cdot \frac{2t-2}{2} = 3(t-1) = 3t - 3$, при чему је

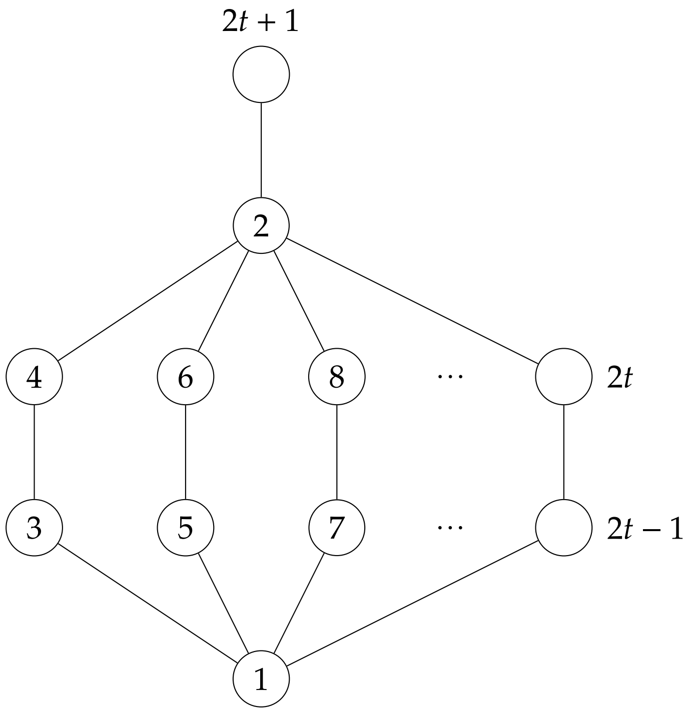
$$\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor \frac{3 \cdot 2t}{2} \right\rfloor - 3 = \lfloor 3t \rfloor - 3 = 3t - 3.$$

Закључујемо да конструисани граф има број грана једнак $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 3$, те је овај део доказа готов.

Претпоставимо сада да је $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ непаран број. Нека је $n = 2t + 1$, где важи $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$. У овом случају желимо да конструишемо одговарајући граф чији је број грана једнак

$$\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor \frac{3 \cdot (2t+1)}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor \frac{6t+3}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor 3t + 1 + \frac{1}{2} \right\rfloor - 3$$
$$= 3t + 1 - 3 = 3t - 2.$$

Жељена конструкција може да се обави на скоро идентичан начин као и претходна, као што видимо на следећој слици:



Граф са слике је повезан, планаран, бипартитан и не садржи ниједан циклус дужине четири. Има тачно једну грану више од графа са претходне слике, тако да му је укупан број грана једнак $3t - 3 + 1 = 3t - 2$. Овим је комплетан доказ готов.

$\square$