Simboli o i O

Definicija 1. Ako važi
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$
tada kažemo da je f beskonačno mala veličina.

Definicija 2. Neka je $a \in \overline{\mathbb{R}}$ i neka su funkcije f i g definisane u nekoj okolini tačke a, ali ne obavezno i u tački a. Pretpostavimo da postoji konačna granična vrednost
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{0.1}$$

- Ako je $L = 0$, tada kažemo da je $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to a$.
- Ako je $0 < L < +\infty$, kažemo da je $f(x) = O(g(x))$ kada $x \to a$.
- U posebnom slučaju, ako je $L = 1$, onda je $f(x) \sim g(x)$ kada $x \to a$.

U slučaju da ne postoji limes (0.1), koristimo sledeću definiciju simbola o i O:

- $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to a$ ako postoji funkcija $\omega(x)$ takva da u nekoj okolini tačke a važi
$$f(x) = \omega(x)g(x) \qquad (x \neq a), \qquad \lim_{x\to a} \omega(x) = 0.$$
- $f(x) = O(g(x))$ kada $x \to a$ ako postoji pozitivna konstanta K takva da u nekoj okolini tačke a važi
$$|f(x)| \leq K|g(x)| \qquad (x \neq a).$$

Definicija 3. Neka su f i g beskonačno male veličine kada $x \to a$.

- Ako važi $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to a$, tada kažemo da je f beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na g.
- Ako važi $f(x) = O(g(x))$ kada $x \to a$, tada kažemo da su f i g beskonačno male veličine istog reda.
- Ako važi $f(x) = O(g^k(x))$ kada $x \to a$, tada kažemo da je f beskonačno mala veličina reda k u odnosu na g.
- Ako je $f(x) \sim g(x)$ kada $x \to a$, kažemo da su f i g ekvivalentne..

Važi:

- $C \cdot o(x^n) = o(x^n), \qquad C \in \mathbb{R},$

- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), \qquad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

Primer 1. a) Neka je $f(x) = x^5$ i $g(x) = x^3$. Tada je $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

b) Neka je $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x$. Tada je $f(x) \sim g(x)$ kada $x \to 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

c) Neka je $f(x)$ beskonačno mala veličina kada $x \to a$. Tada je $f(x) = o(1)$ kada $x \to a$, jer je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Primer 2. Neka je $f(x) = 2x^3 \sin \frac{1}{x}$ i $g(x) = x^3$. Tada ne postoji granična vrednost količnika $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ kada $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x},$$

ali za $x \neq 0$ važi

$$|2x^3 \sin \frac{1}{x}| \leq 2|x|^3 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq 2|g(x)|,$$

pa je $f(x) = O(g(x))$, kada $x \to 0$.

Zadaci:

1. Ako je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=3$, ispitati tačnost navedenih relacija kada $x\to 0$:

a) $f(x)=o(x^3)$, **b)** $f(x)=O(x^3)$, **c)** $f(x)\sim x^3$, **d)** $f(x)\sim 3x^3$,
e) $f(x)=o(1)$, **f)** $f(x)=o(x^2)$, **g)** $f(x)=O(x^2)$ **h)** $f(x)=O(x)$.

Rešenje: a) Imamo

$$f(x)=o(x^3) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=0.$$

Nije tačno.
b) Važi

$$f(x)=O(x^3) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=C\neq 0.$$

Tačno.
c) Dobijamo

$$f(x)\sim x^3 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=1.$$

Nije tačno.
d) Određujemo

$$f(x)\sim 3x^3 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x^3}=1.$$

Tačno.
e) Imamo

$$f(x)=o(1) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^3=0.$$

Tačno.
f) Određujemo

$$f(x)=o(x^2) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x=0.$$

Tačno.
g) Važi

$$f(x)=O(x^2) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=C\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x=C\neq 0.$$

Nije tačno.
h) Imamo

$$f(x)=O(x) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=C\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^2=C\neq 0.$$

Nije tačno.

2. Ako $x\to 0$, dokazati

a) $(3x+5x^2)\sin\dfrac{1}{x}=O(x)$, **b)** $(1+x)^n=1+nx+O(x^2)$,
c) $\sin x+\cos x\sim x+1$.

Rešenje: a) Pokazujemo da granična vrednost

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+5x^2)\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(3+5x)\sin\frac{1}{x}$$

ne postoji. Međutim, važi

$$|(3x+5x^2)\sin\frac{1}{x}|\le 3|x|+5|x|^2\le 3|x|+5|x|=8|x|,$$

što po definiciji znači $f(x)=O(x)$ kada $x\to 0$.

b) Određujemo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+x^n)-1-nx}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\ldots+x^n}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x+\ldots+x^{n-2}\Big)=\frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Na osnovu dobijenog rezultata imamo

$$(1+x)^n-1-nx=O(x^2)\quad\Rightarrow\quad(1+x)^n=1+nx+O(x^2).$$

c) Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\frac{x}{x+1}+\frac{\cos x}{x+1}\Big)=1,$$

odakle, po definiciji, važi $\sin x+\cos x\sim x+1$.

3. Ako $x\to+\infty$, dokazati

a) $\dfrac{3x+1}{x^2-3}=O(1/x)$, **b)** $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=O(1/\sqrt{x})$.

Rešenje: a) Važi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x+1}{x^2-3}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3x+1)}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(3+\frac{1}{x})}{x^2\Big(1-\frac{3}{x^2}\Big)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x^2}}=3,$$

što znači da je $\dfrac{3x+1}{x^2-3}=O\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.

b) Imamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\Big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Big)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\Big)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da važi $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=O(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

4. Ako $x \to 0$, odrediti realne konstante C i p tako da je $f(x) \sim Cx^p$, gde je

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x$, **b)** $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-3x}$,

c) $f(x) = \tan x - \sin x$.

Rešenje: a) Iz uslova

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 7x}{Cx^p} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 7}{Cx^{p-1}} = \frac{7}{C} = 1,$$

imamo $p = 1$ i $C = 7$.

b) Imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-3x}}{Cx^p} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-3x}}{Cx^p} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-3x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-3x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{Cx^p\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-3x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{Cx^{p-1}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-3x}\right)} = \frac{2}{C} = 1.$$

Sada je $p = 1$ i $C = 2$.

c) Određujemo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{Cx^p} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{Cx^p \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{Cx^p \cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sin x}{x} x \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x^2}{4}}{Cx^p \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{2Cx^{p-3}\cos x} = \frac{1}{2C} = 1,$$

odakle je $p = 3$ i $C = \frac{1}{2}$.

5. Ako $x \to +\infty$, odrediti realne konstante C i p tako da je $f(x) \sim Cx^p$, gde je

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}.$$

Rešenje: Važi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}}{Cx^p} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}}{Cx^p} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x(1+x)} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x(1+x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{Cx^p\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x(1+x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{Cx^{p+2/3}\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{x}+1)^2} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}+1} + 1\right)} = \frac{1}{3C} = 1,$$

odakle imamo $p = -\frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{3}$.

6. Pokazati da su funkcije $f(x) = 1 - x$ i $g(x) = a(1 - \sqrt[3]{x})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beskonačno male veličine kada $x \to 1$. Odrediti $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tako da $f(x)$ i $g(x)$ budu ekvivalentne.

Rešenje: Važi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(1-x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} a(1-\sqrt[3]{x}) = 0.$$

Prema tome, funkcije f i g su beskonačno male veličine kada $x \to 1$.

Funkcije f i g su ekvivalentne ($f \sim g$) ako je

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{a(1-\sqrt[3]{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{a(1-\sqrt[3]{x})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{a} = \frac{3}{a}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Važi $\frac{3}{a} = 1$, odakle je $a = 3$.