Час 1 — Увод

Преглед теорије

Дефиниција 1 (Инцидентност; суседство)**.** У задатом графу, за чвор и грану се каже да су инцидентни уколико чвор представља један од њених крајева. Осим тога, за два чвора се каже да су суседна ако постоји грана у графу таква да су јој они крајеви. Најзад, за две гране се каже да су суседне у случају да деле један од крајева.

Дефиниција 2 (Степен чвора)**.** У произвољном графу, степен чвора представља укупан број грана са којима је он инцидентан, тј. укупан број његових суседних чворова.

Лема 1 (Лема о руковању)**.** За било који граф $G = (V, E)$ сигурно важи

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2\,|E|,$$

где $\deg(u)$ означава степен чвора $u \in V$.

Задаци са часа

Задатак 1. Доказати да у разреду од $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ученика обавезно мора постојати двоје њих који имају исти број пријатеља.

Напомена: Претпоставити да ако је један ученик пријатељ са другим, да је онда и други пријатељ са првим.

Решење. Пре свега, јасно је да се споменути проблем може комотно моделирати у виду графа код ког чворови представљају ученике из одељења, а гране постојање пријатељства. На овај начин, решавање проблема се своди на доказивање чињенице да сваки граф са бар два чвора нужно поседује два различита чвора истог степена. Проблем даље решавамо свођењем на апсурд.

Претпоставимо да није тачно да постоје два чвора истог степена. Одавде директно следи да сваки чвор мора бити јединственог степена. Узевши у обзир да има n чворова, при чему су могуће вредности степена чворова $0, 1, 2, \ldots, n-1$, којих такође има тачно n, долазимо до закључка да мора постојати тачно један чвор сваког могућег степена из наведене листе. Нека је u чвор степена 0 и нека је v чвор степена $n-1$. Одавде директно следи да чвор u не сме да има ниједног суседа, док v мора бити суседан савима, укључујући u, што је очигледно немогуће. Дакле, почетна претпоставка није била тачна, што значи да заиста мора да постоје два различита чвора која имају исти степен. $\square$

Задатак 2. Нека је дат граф који садржи $n \in \mathbb{N}$ чворова и $m \in \mathbb{N}_0$ грана чији су степени чворова редом једнаки $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Уколико Δ представља максималан степен чвора, а δ минималан степен чвора, доказати да мора бити

$$2m\delta \leq \sum_{j=1}^{n} d_j^2 \leq 2m\Delta.$$

Решење. Јасно је да мора бити

$$\delta \leq d_j \leq \Delta$$

за свако $j = \overline{1, n}$. Одавде надаље следи

$$d_j\,\delta \leq d_j^2 \leq d_j\,\Delta,$$

што директно доводи до

$$\sum_{j=1}^{n} d_j\,\delta \leq \sum_{j=1}^{n} d_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} d_j\,\Delta. \tag{1}$$

Међутим, применом леме о руковању, једноставно је установити да важи

$$\sum_{j=1}^{n} d_j\,\delta = \delta \sum_{j=1}^{n} d_j = 2m\delta$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} d_j\,\Delta = \Delta \sum_{j=1}^{n} d_j = 2m\Delta,$$

што из неједнакости (1) најзад доводи до тражене неједнакости

$$2m\delta \leq \sum_{j=1}^{n} d_j^2 \leq 2m\Delta,$$

као што је и требало доказати. □

Задатак 3. Доказати да је број чворова непарног степена у сваком графу паран.

Решење. Нека је задат произвољан граф са $n \in \mathbb{N}$ чворова и $m \in \mathbb{N}_0$ грана чији су степени чворова редом једнаки $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Применом леме о руковању, долазимо до једнакости

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = 2m. \tag{2}$$

У формули (2), десна страна очигледно даје парну вредност, што значи да збир степена свих чворова нужно представља паран ненегативан цео број. Приметимо да је сума целих бројева $d_1, d_2, \ldots, d_n$ парна ако и само ако међу њима паран број њих поседује непарну вредност. Како за споменуту суму знамо да јесте парна, то значи да међу вредностима $d_1, d_2, \ldots, d_n$ сигурно има парно много непарних. Одавде следи да је број чворова непарног степена у задатом графу нужно паран. □

Задаци за самосталан рад

Задатак 4. Нека је дат граф $G = (V, E)$ и нека $\deg(u)$ означава степен чвора u, за сваки чвор $u \in V$. Осим тога, нека $\psi(e)$ означава збир степена крајева гране e, за сваку грану $e \in E$. Доказати једнакост

$$\sum_{e \in E} \psi(e) = \sum_{u \in V} \deg^2(u).$$

Напомена: Споменути израз представља инваријанту графа која има широку примену у хемијској теорији графова, где се типично назива првим Загреб индексом.

Задатак 5. Нека је дат граф са $n \in \mathbb{N}$ чворова, где је n непаран број. Доказати да у оваквом графу мора да постоји чвор чији је степен паран.

Бонус задаци

Нема бонус задатака за ову недељу. ☺