Lekcija 9

9 Ojlerovi i Hamiltonovi grafovi

Definicija 1. *Multigraf (graf) je polu-Ojlerov ako u njemu postoji prost put, koji se naziva Ojlerov, koji sadrži sve njegove grane.*

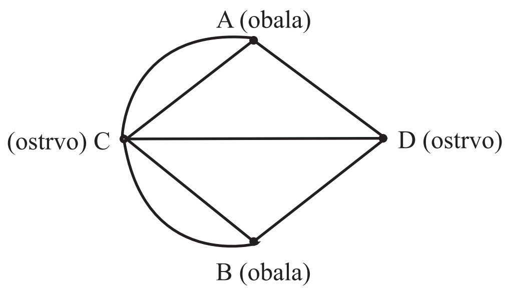
Definicija 2. *Multigraf (graf) je Ojlerov ako u njemu postoji ciklus, koji se naziva Ojlerov, koji sadrži sve njegove grane.*

Dva Ojlerova ciklusa (puta) u multigrafu (grafu) su različita ako im je različit raspored grana. Postoje teoreme koje daju potrebne i dovoljne uslove da neki multigraf (graf) bude Ojlerov (polu–Ojlerov). To je dobro jer omogućava da se formira egzaktni algoritam za nalaženje Ojlerovog ciklusa (puta) kada takav ciklus (put) postoji.

Teorema 1. *Povezan multigraf (graf) je Ojlerov ako i samo ako je stepen svakog njegovog čvora paran broj.*

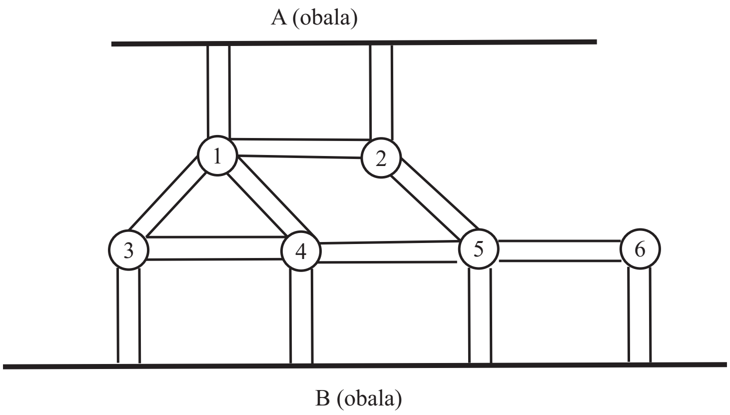
Teorema 2. *Povezan multigraf (graf) je polu–Ojlerov ako i samo ako sadrži dva čvora neparnog stepena.*

Vratimo se uvodnom predavanju, tj. problemu Keningsberških mostova. Dokažimo da ovaj problem nema rešenje. Dodelimo ovom problemu multigraf, pri čemu su obale reke Pregl i ostrva čvorovi, a mostovi grane. Ovaj multigraf je prikazan na sledećoj slici



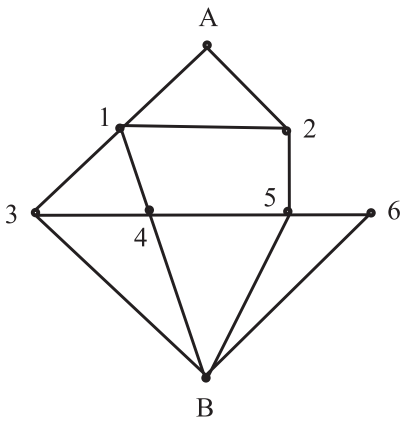
Ovaj multigraf ima sve čvorove neparnog stepena, te na osnovu Teoreme 1 i Teoreme 2 nije ni Ojlerov ni polu–Ojlerov.

Zadatak 1. Na reci Mekong nalazi se šest ostrva koja su medjusobno i sa obalama povezana preko mostova, kao što je prikazano na slici dole. Može li se šetnja započeti na nekom od ostrva, tako da se svi mostovi predju samo jednom i da se vrati na polazno ostrvo? Šta će se promeniti ako se izgradi novi most izmedju ostrva 2 i 3?



Rešenje

Zadatku se može pridružiti graf



On je polu–Ojlerov, jer sadrži dva čvora, 2 i 3, neparnog stepena, ali nije Ojlerov. To znači da zadatak nema rešenje.

Ako bi se izgradio novi most izmedju ostrva 2 i 3, odgovarajući graf bi bio Ojlerov, te bi zadatak imao rešenje.

Flerijev algoritam za nalaženje Ojlerovog Ciklusa

Korak 1. Izabere se proizvoljan čvor v_1, $v_1 \in V$, i formira inicijalni put (ciklus)

$$\omega_1 := v_1 \, .$$

Korak 2. Neka je odredjen put

$$\omega_i := v_1 \,-\, e_2 \,-\, v_2 \,-\, \cdots \,-\, e_i \,-\, v_i \,.$$

Proverava se da li je familija $E_i = E \backslash \{e_2, e_3, \ldots, e_i\}$ prazna. Ako jeste, ide se na Korak 4. Ako nije ide se na Korak 3.

Korak 3 Bira se grana e_{i+1} iz familije E_i na osnovu sledećih kriterijuma:

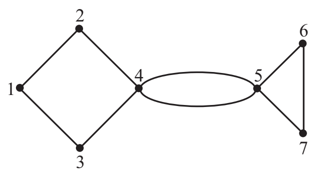
a) grana e_{i+1} je incidentna sa čvorom v_i

b) grana e_{i+1} nije most u multigrafu (grafu0 $G_i = (V_i, E_i)$, osim ako ne postoji drugi izbor.

Formira se put ω_{i+1} tako što se putu ω_i doda grana e_{i+1} i čvor v_{i+1}. Prelazi se na Korak 2.

Korak 4 Kraj, ω_i je traženi put (ciklus)

Zadatak 2. Primenom Flerijevog algoritma naći Ojlerov ciklus u multigrafu prika-zanom na sledećoj slici.



Rešenje

Dati multigraf je Ojlerov jer je svaki čvor parnog stepena. U prvom koraku Flerijevog algoritma ravnopravno se možemo opredeliti za bilo koji čvor. Izaberimo, na primer čvor 3. Za formiranje niza čvorova i grana možemo ravnopravno čvoru 3 pridodati ili granu $\{1,\, 3\}$ ili $\{3,\, 4\}$. Izaberimo granu $\{3,\, 4\}$,

$$\omega_2 := 3,\ \{3,\, 4\}\,,\ 4.$$

Čvor 4 je incidentan sa granom $\{2,\, 4\}$ i dvema granama $\{4,\, 5\}$. Granu $\{2,\, 4\}$ ne možemo izabrati jer je ona most u podgrafu $G_2 = (V,\, E_2)$, datog multigrafa, definisanog skupovima $V = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7\}$ i $E_2 = \{\{1,\, 2\},\, \{1, 3\},\, \{2,\, 4\},\, \{4,\, 5\},\, \{4,\, 5\},\, \{5,\, 6\},\, \{5,\, 7\},\, \{6,\, 7\}\}$. Zbog toga nizu ω_2 moramo pridružiti granu $\{4,\, 5\}$ i čvor 5.

$$\omega_3 := 3,\ \{3,\, 4\}\,,\ 4,\ \{4,\, 5\}\,,\ 5.$$

Čvor 5 je incidentan sa granama $\{4,\, 5\}$, $\{5,\, 6\}$ i $\{5,\, 7\}$. Grana $\{4,\, 5\}$ ne dolazi u obzir jer je most u podgrafu $G_3 = (V,\, E_3)$, definisanog skupovima

V i $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$. Zbog toga nizu ω_3 možemo pridružiti ili granu $\{5, 6\}$ ili $\{5, 7\}$. Izaberimo, na primer, granu $\{5, 6\}$. Formirali smo novi niz

$$\omega_4 := 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\}, 5, \{5, 6\}, 6.$$

U sledećem koraku je jedinstveni izbor, te nizu ω_4 pridružimo granu $\{6, 7\}$ i čvor 7.

$$\omega_5 := 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\}, 5, \{5, 6\}, 6, \{6, 7\}, 7.$$

Iz istih razloga, čvoru 7 je jedinstveno, preostala, incidentna grana $\{5, 7\}$. Niz ω_6 glasi

$$\omega_6 := 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\}, 5, \{5, 6\}, 6, \{6, 7\}, 7, \{5, 7\}, 5.$$

Produžavajući ovaj postupak konačno dobijamo niz ω koji definiše Ojlerov ciklus

$$\begin{aligned}\omega := \quad & 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\}, 5, \{5, 6\}, 6, \{6, 7\}, 7, \{5, 7\}, \\ & 5, \{4, 5\}, 4, \{2, 4\}, 2, \{1, 2\}, 1, \{1, 3\}, 3.\end{aligned}$$

Definicija 3. *Multigraf (graf) je polu–Hamiltonov ako postoji elementarni put, koji se naziva Hamiltonov, koji sadrži sve njegove čvorove.*

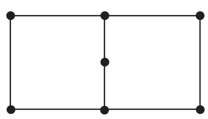
Definicija 4. *Multigraf (graf) je Hamiltonov ako postoji prost ciklus, koji se naziva Hamiltonov, koji sadrži sve njegove čvorove.*

Ne postoji teorema koja sadrži potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju Hamiltonovog ciklusa (puta).

Teorema 3. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 3$, povezan graf. Ako za stepen svakog njegovog čvora v, $v \in V$, važi jednakost $d(v) \geq \frac{n}{2}$, tada je on Hamiltonov.*

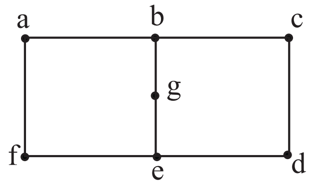
Teorema 4. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, povezan graf. Ako za svaka dva njegova nesusedna čvora u i v važi nejednakost $d(u) + d(v) \geq n$, on je Hamiltonov.*

Zadatak 3. Numerisati čvorove grafa prikazanog na slici, prirodnim brojevima od 1 do 7, koji označavaju Hamiltonov put. Da li Hamiltonov put može krenuti iz čvora neparnog stepena ovog grafa?

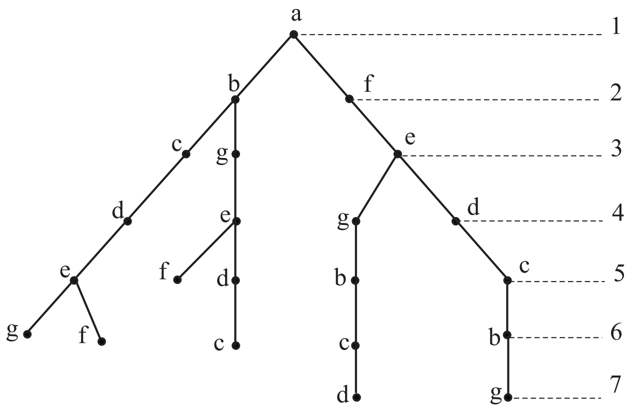


Rešenje

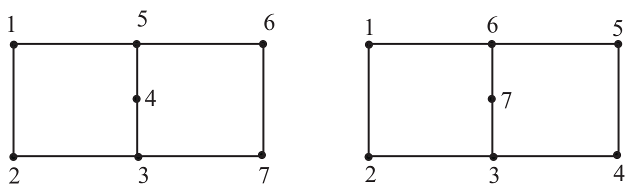
Označimo čvorove slovima a, b, c, d, e, f, g, kao što je uradjeno na sledećoj slici



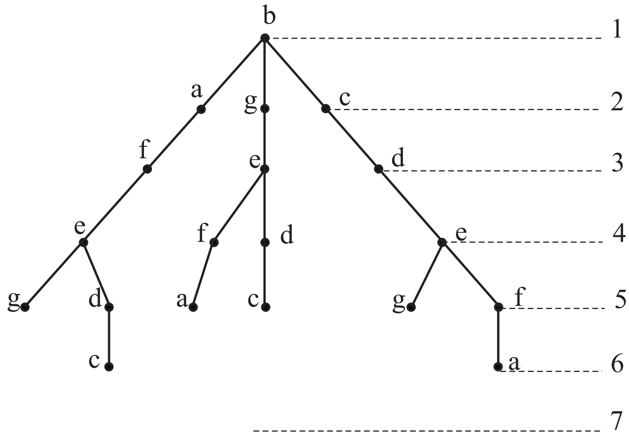
Izaberimo proizvoljan čvor parnog stepena, recimo a, i potražimo Hamiltonove puteve koji polaze iz njega, potpunom pretragom.



Otkrili smo dva Hamiltonova puta koja polaze iz čvora a. Redom zamenimo slova brojevima od 1 do 7.



Graf je potpuno simetričan u odnosu na čvorove b i e, koji su jedini čvorovi u grafu neparnog stepena. Potražimo Hamiltonove puteve, opet potpunim pretraživanjem, koji polaze iz jednog od njih, recimo iz čvora b



Nismo pronašli ni jedan Hamiltonov put, jer on i ne postoji.

Neka je $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, povezan graf u kome je svakoj grani e_i dodeljena težina $|e_i|$. Sledeći algoritam se može iskoristiti za nalaženje težinskog Hamiltonovog puta (ciklusa), ako postoji. Dobijeno rešenje ne mora biti optimalno.

Algoritam najbližeg suseda

Korak 1. Inicijalno težinski Hamiltonov ciklus, ω, je prazan, $\omega := \varnothing$, i njegova težina je nula, $|\omega| = 0$.

Korak 2 Neka je formiran put

$$\omega := v_1 - e_2 - v_2 - \cdots - e_k - v_k$$

čija je težina

$$|\omega| = |e_2| + |e_3| + \cdots + |e_k| .$$

Iz skupa $V_k = V - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ biramo čvor v_{k+1} koji je najbliži čvoru v_k. Čvor v_{k+1} i granu $e_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ pridružujemo putu ω

$$\omega := v_1 - e_2 - v_2 - \cdots - e_k - v_k - e_{k+1} - v_{k+1} ,$$

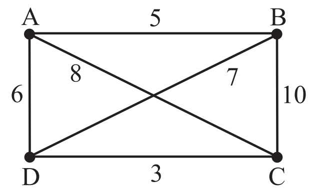
a težinu $|e_{k+1}|$ dodajemo težini $|\omega|$,

$$|\omega| := |\omega| + |e_{k+1}| .$$

Korak 3. Proverava se da li je $v_{k+1} = v_k$. Ako jeste, ide se na Korak 4. Ako nije ide se na Korak 2.

Korak 4 Kraj. Traženi ciklus je ω, čija je težina $|\omega|$.

$\boxed{\text{Primer}}$ Primenom Algoritma najbližeg suseda naći težinski Hamiltonov ciklus u grafu prikazanom na sledećoj slici



Rešenje

a) Kako biramo proizvoljni čvor, izaberimo na primer čvor D. Tako je $\omega := D$, $|\omega| = 0$. Čvoru D je najbliži čvor C, te je $\omega := D - C$, $|\omega| = 3$. Čvoru C, od preostalih čvorova, je najbliži čvor A, te je $\omega := D - C - A$, $|\omega| = 3 + 8 = 11$. Čvoru A je najbliži, od preostalih, čvor B, te je $\omega := D - C - A - B$, $|\omega| = 11 + 5 = 16$. U poslednjem koraku Hamiltonov ciklus formiramo dodavanjem polaznog čvora D, $\omega := D - C - A - B - D$, čija je dužina $|\omega| = 16 + 7 = 23$. To je i optimalno rešenje.

b) Izaberimo kao početni čvor C. Tako je $\omega := C$, $|\omega| = 0$. Čvoru C je najbliži čvor D, te je $\omega := C - D$, $|\omega| = 3$. Čvoru D, od preostalih, najbliži je čvor A, te je $\omega := C - D - A$ i $|\omega| = 3 + 6 = 9$. Čvoru A je najbliži, od preostalih, čvor B, te je $\omega := C - D - A - B$, $|\omega| = 9 + 5 = 14$. U poslednjem koraku dobijamo $\omega := C - D - A - B - C$, $|\omega| = 14 + 10 = 24$. Ovo nije optimalno rešenje, ali je prihvatljivo.

Domaći zadatak: Proučiti sledeća dva problema vezana za Ojlerove i Hamiltonove grafove:

- Problem kineskog poštara
- Problem trgovačkog putnika

Postavke problema se mogu naći na sajtu predmeta u materijalu Zbirka zadataka - I deo.