# Rešavanje nelinearnih jednačina i sistema jednačina

**I Metodi za simultano određivanje nula polinoma $P(x)$**

- **Vajerštrasov metod**

$$\begin{aligned} &x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P(x_i^{(k)})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\right)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &k = 0, 1, 2, \ldots, \\ &x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \quad - \quad \text{početne vrednosti} \end{aligned} \tag{1}$$

- **Modifikovani Vajerštrasov metod**

$$\begin{aligned} &x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P(x_i^{(k)})}{\prod\limits_{j=1}^{i-1} \left(x_i^{(k)} - x_j^{(k+1)}\right) \prod\limits_{j=i+1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &k = 0, 1, 2, \ldots \\ &x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \quad - \quad \text{početne vrednosti} \end{aligned} \tag{2}$$

## II Metodi za rešavanje sistema nelinearnih jednačina

- **Opšti iterativni metod**

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0, \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0. \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ x_2 &= \Phi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \Phi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$$

Iterativni niz:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)}),\ k = 0,1,2,\ldots, \qquad \mathbf{x}^{(0)} \in D \tag{3}$$

Uslov konvergencije: $\quad \|J(\mathbf{x})\| \le q < 1,$ gde je

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \left[\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]_{n\times n}$$

Norme vektora u $\mathbb{R}^n$ :

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{(Menhetn norma)}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \text{(Euklidska norma)}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \qquad \text{(maksimum norma, uniformna norma)}$$

Norme matrica u $\mathcal{M}_{n\times n}$:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \quad - \quad \text{Frobeniusova norma}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{sp} = \sigma(A) = \sqrt{\max|\lambda(A^TA)|}, \quad \text{spektralna norma}$$

$\lambda(A^TA)$ sopstvene vrednosti $A^TA$

- **Metod Njutn–Kantoroviča**

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\ &\vdots\\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Iterativni niz:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(J(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,\\ &\mathbf{x}^{(0)} \in D. \end{aligned} \tag{4}$$

- **Modifikovani metod Njutn–Kantoroviča**

Iterativni niz:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(J(\mathbf{x}^{(0)})\right)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,\\ &\mathbf{x}^{(0)} \in D. \end{aligned} \tag{5}$$

## ZADACI

**Zadatak 1.** Sa tačnošću $10^{-3}$ odrediti sve nule polinoma

$$P(x) = x^3 + 11x^2 - 10x - 200$$

**a)** Metodom Vajerštrasa,
**a)** Modifikovanim metodom Vajerštrasa.

**Rešenje:** **a)** Vajerštrasov metod (1) primenjen na polinom stepena 3

$$P(x) = x^3 + 11x^2 - 10x - 200 :$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{\left(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\left(x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)}, \\
x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{P(x_2^{(k)})}{\left(x_2^{(k)} - x_1^{(k)}\right)\left(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)}, \\
x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} - \frac{P(x_3^{(k)})}{\left(x_3^{(k)} - x_1^{(k)}\right)\left(x_3^{(k)} - x_2^{(k)}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)} \qquad - \qquad \text{početne vrednosti}$$

Kao kontrola izračunatih vrednosti može da se koristi osobina Vajerštrasovog metoda:

$$x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_3^{(k)} = -11.$$

Za početne vrednosti uzete nasumično, npr.

$$x_1^{(0)} = 1, \quad x_2^{(0)} = 2, \quad x_3^{(0)} = 3,$$

rezultati su:

```
početne vrednosti:   x(0)={1., 2., 3.}
iteracija  1:   x(1)={100., -166., 55.}   greška:  168.,   kontrola:  -11.
iteracija  2:   x(2)={7.36842, -93.3684, 75.}   greška:  92.6316,   kontrola:  -11.
iteracija  3:   x(3)={7.47463, -51.0755, 32.6009}   greška:  42.3991,   kontrola:  -11.
iteracija  4:   x(4)={7.98949, -29.7999, 10.8105}   greška:  21.7904,   kontrola:  -11.
iteracija  5:   x(5)={16.7345, -18.985, -8.74946}   greška:  19.5599,   kontrola:  -11.
iteracija  6:   x(6)={8.60561, -11.0853, -8.52028}   greška:  8.12888,   kontrola:  -11.
iteracija  7:   x(7)={5.14837, -9.11273, -7.03564}   greška:  3.45724,   kontrola:  -11.
iteracija  8:   x(8)={4.13235, -10.7281, -4.40426}   greška:  2.63138,   kontrola:  -11.
iteracija  9:   x(9)={3.9977, -10.0745, -4.92324}   greška:  0.653627,   kontrola:  -11.
iteracija  10:   x(10)={4.00001, -10.0011, -4.99891}   greška:  0.0756728,   kontrola:  -11.
iteracija  11:   x(11)={4., -10., -5.}   greška:  0.00109742,   kontrola:  -11.
iteracija  12:   x(12)={4., -10., -5.}   greška:  2.40129×10^-7

rešenje:  x*≈x(12)={4., -10., -5.}
```

Za zaustavljanje procesa uzima se: $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-3}$, pri čemu je korišćena uniformna norma vektora

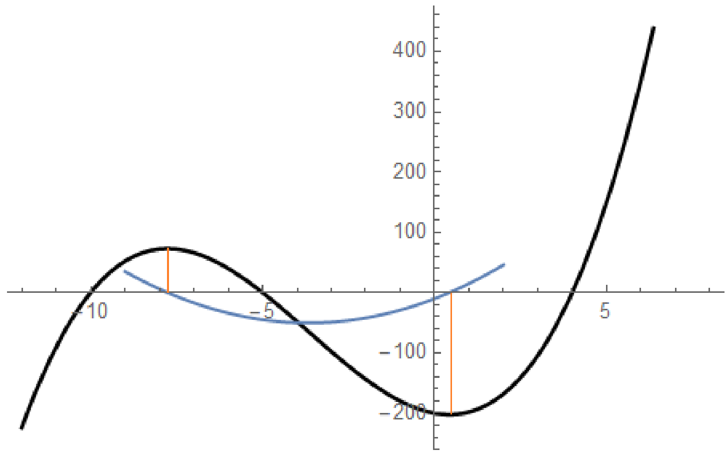
$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,\ |x_2|,\ |x_3|\}.$$

**Napomena:** Zbog tražene tačnosti dovoljno je računati sa 4 decimale, a rešenje zaokružiti na 3.

Sa boljim izborom vrednosti, zahtevana tačnost može se postići i sa manjim brojem iteracija.

Polinom $P(x)$ ima ekstremne vrednosti u tačkama

$$P'(x) = 3x^2 + 22x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{151}}{3}, \quad x_1 \approx -7.8,\ x_2 \approx 0.4.$$




Kako je

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty, \quad P(-7.8) = 72.7 > 0,$$
$$P(0.4) = -202.2 < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty,$$

zaključuje se da su nule polinoma $P(x)$ u intervalima $(-\infty, -7.8)$, $(-7.8, 0.4)$, $(0.4, +\infty)$ redom.

Neka su sada početne vrednosti

$$x_1^{(0)} = -8, \quad x_2^{(0)} = -2, \quad x_3^{(0)} = 2.$$

Rezultati su:

```
početne vrednosti:   x(0)={-8., -2., 2.}
iteracija  1:   x(1)={-9.2, -8., 6.2}   greška:  6. ,   kontrola:  -11.
iteracija  2:   x(2)={-11.6, -3.77465, 4.37465}   greška:  4.22535 ,   kontrola:  -11.
iteracija  3:   x(3)={-10.2822, -4.70464, 3.98683}   greška:  1.31781 ,   kontrola:  -11.
iteracija  4:   x(4)={-10.0147, -4.98548, 4.00018}   greška:  0.280837 ,   kontrola:  -11.
iteracija  5:   x(5)={-10., -4.99996, 4.}   greška:  0.0146539 ,   kontrola:  -11.
iteracija  6:   x(6)={-10., -5., 4.}   greška:  0.0000427124

rešenje:  x*≈x(6)={-10., -5., 4.}
```

**b)** Modifikovani Vajerštrasov metod (2) primenjen na polinom stepena

3:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{\left(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\left(x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)},\\
x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{P(x_2^{(k)})}{\left(x_2^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)\left(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)},\\
x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} - \frac{P(x_3^{(k)})}{\left(x_3^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)\left(x_3^{(k)} - x_2^{(k+1)}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)}$ – početne vrednosti

```
početne vrednosti:   x(0)={-8., -2., 2.}
iteracija  1:   x(1)={-9.2, -7., 3.66667}   greška:  5.
iteracija  2:   x(2)={-10.7668, -5.35738, 3.96979}   greška:  1.64262
iteracija  3:   x(3)={-9.94766, -4.99475, 4.00013}   greška:  0.819176
iteracija  4:   x(4)={-9.99994, -5., 4.}   greška:  0.0522812
iteracija  5:   x(5)={-10., -5., 4.}   greška:  0.0000559199

rešenje:  x*≈x(5)={-10., -5., 4.}
```

**Zadatak 2.** Sa tačnošću $10^{-3}$ odrediti sve nule polinoma

$$P(x) = 240 + 58x - 43x^2 - 4x^3 + x^4$$

**a)** Metodom Vajerštrasa,
**a)** Modifikovanim metodom Vajerštrasa.

**Rešenje:** **a)** Vajerštrasov metod primenjen na polinom stepena 4:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{\left(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\left(x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)\left(x_1^{(k)} - x_4^{(k)}\right)},$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{P(x_2^{(k)})}{\left(x_2^{(k)} - x_1^{(k)}\right)\left(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)\left(x_2^{(k)} - x_4^{(k)}\right)},$$

$$x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{P(x_3^{(k)})}{\left(x_3^{(k)} - x_1^{(k)}\right)\left(x_3^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\left(x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)},$$

$$x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \frac{P(x_4^{(k)})}{\left(x_4^{(k)} - x_1^{(k)}\right)\left(x_4^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\left(x_4^{(k)} - x_3^{(k)}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)} \quad - \quad \text{početne vrednosti}$$

```
početne vrednosti:   x(0)={1., 2., 3., 4}
iteracija  1:   x(1)={43., -82., 3., 40.}   greška:  84.,   kontrola:  4.
iteracija  2:   x(2)={-158.6, -45.6459, 3., 205.246}   greška:  201.6,   kontrola:  4.
iteracija  3:   x(3)={-61.0924, -49.0041, 3., 111.097}   greška:  97.5076,   kontrola:  4.
iteracija  4:   x(4)={48.9338, -109.927, 3., 61.9928}   greška:  110.026,   kontrola:  4.
      ⋮
iteracija  13:   x(13)={-1.99667, 8., 3., -5.00333}   greška:  0.100057,   kontrola:  4.
iteracija  14:   x(14)={-2., 8., 3., -5.}   greška:  0.0033224,   kontrola:  4.
iteracija  15:   x(15)={-2., 8., 3., -5.}   greška:  3.67837×10^-6,   kontrola:  4.
iteracija  16:   x(16)={-2., 8., 3., -5.}   greška:  0.

rešenje:   x*≈x(16)={-2., 8., 3., -5.}
```

**b)** Modifikovani Vajerštrasov metod primenjen na polinom stepena 4:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{\left(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\left(x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)\left(x_1^{(k)} - x_4^{(k)}\right)},$$
$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{P(x_2^{(k)})}{\left(x_2^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)\left(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)\left(x_2^{(k)} - x_4^{(k)}\right)},$$
$$x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{P(x_3^{(k)})}{\left(x_3^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)\left(x_3^{(k)} - x_2^{(k+1)}\right)\left(x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)},$$
$$x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \frac{P(x_4^{(k)})}{\left(x_4^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)\left(x_4^{(k)} - x_2^{(k+2)}\right)\left(x_4^{(k)} - x_3^{(k+3)}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}$ – početne vrednosti

```
početne vrednosti:   x(0)={1., 2., 3., 4}
iteracija  1:   x(1)={43., 4.04878, 3., 117.538}   greška:  113.538
iteracija  2:   x(2)={69.0388, 4.0781, 3., -174.045}   greška:  291.584
iteracija  3:   x(3)={48.708, 4.05088, 3., -40.5867}   greška:  133.459
iteracija  4:   x(4)={20.9058, 3.76342, 3., -16.1228}   greška:  27.8022
iteracija  5:   x(5)={8.84104, 1.64429, 3., -7.57932}   greška:  12.0648
iteracija  6:   x(6)={7.77312, -1.07808, 3., -5.33305}   greška:  2.72237
iteracija  7:   x(7)={8.01727, -1.92622, 3., -5.00763}   greška:  0.848146
iteracija  8:   x(8)={7.99988, -1.99982, 3., -5.}   greška:  0.0735936
iteracija  9:   x(9)={8., -2., 3., -5.}   greška:  0.000181893
iteracija  10:   x(10)={8., -2., 3., -5.}   greška:  0.

rešenje:  x*≈x(10)={8., -2., 3., -5.}
```

**Zadatak 3.** Opštim iterativnim metodom sa tri sigurne cifre odrediti pozitivno rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 6x + 3 &= 0, \\ x^3 + y^3 - 6y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

**Rešenje:** Za primenu opšteg iterativnog metoda (3) potrebno je odrediti odgovarajuću iterativnu funkciju.

**I** Formiranje iterativne funkcije:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 6x + 3 &= 0, \\ x^3 + y^3 - 6y + 2 &= 0, \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{6}(x^3 + y^3 + 3), \\ y &= \frac{1}{6}(x^3 - y^3 + 2). \end{aligned}$$

Iterativna funkcija:

$$\mathbf{\Phi}(x, y) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x, y) \\ \Phi_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(x^3 + y^3 + 3) \\ \frac{1}{6}(x^3 - y^3 + 2) \end{bmatrix}$$

Jakobijeva matrica:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} & \frac{y^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} & -\frac{y^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\|J(x, y)\|_\infty = \max\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right\} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \\ &\|J(x, y)\|_\infty < 1 \quad \text{za} \quad x^2 + y^2 < 2. \end{aligned}$$

Prema prethodnom, ako posmatramo skup

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1.8\},$$

koji je kompletan metrički prostor, tada je

$$\|J(x,y)\|_\infty = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 0.9 < 1, \quad \forall (x,y) \in D,$$

što znači da proces sa iterativnom funkcijom $\mathbf{P}hi(x,y)$ konvergira na $D$.

**II** Formiranje iterativnog procesa:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\Big(\big(x^{(k)}\big)^3 + \big(y^{(k)}\big)^3 + 3\Big), \\ y^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\Big(\big(x^{(k)}\big)^3 - \big(y^{(k)}\big)^3 + 2\Big), \quad k = 0,1,2,\ldots, \\ (x^{(0)}, y^{(0)}) &= (0,0). \end{aligned}$$

```
početna vrednost:   x(0)={0., 0.}
iteracija  1:   x(1)={0.5, 0.333333}   greška:  0.5
iteracija  2:   x(2)={0.527006, 0.347994}   greška:  0.0270062
iteracija  3:   x(3)={0.531418, 0.350704}   greška:  0.00441221
iteracija  4:   x(4)={0.532202, 0.351157}   greška:  0.000783264
iteracija  5:   x(5)={0.53234, 0.35124}   greška:  0.000138622
iteracija  6:   x(6)={0.532365, 0.351254}   greška:  0.0000247493

Rešenje:  x*≈x(6)={0.532365, 0.351254}
```

**III** Modifikacija metoda Gaus–Zajdelovim pristupom:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\Big(\big(x^{(k)}\big)^3 + \big(y^{(k)}\big)^3 + 3\Big), \\ y^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\Big(\big(x^{(k+1)}\big)^3 - \big(y^{(k)}\big)^3 + 2\Big), \quad k = 0,1,2,\ldots, \\ (x^{(0)}, y^{(0)}) &= (0,0). \end{aligned}$$

```
početna vrednost:   x(0)={0., 0.}
iteracija  1:   x(1)={0.5, 0.354167}   greška:  0.5
iteracija  2:   x(2)={0.528237, 0.350495}   greška:  0.0282374
iteracija  3:   x(3)={0.531742, 0.351215}   greška:  0.00350489
iteracija  4:   x(4)={0.532279, 0.351247}   greška:  0.000536568
iteracija  5:   x(5)={0.532357, 0.351256}   greška:  0.0000778837

Rešenje:  x*≈x(5)={0.532357, 0.351256}
```

**Zadatak 4.** Sa tačnošću $10^{-2}$ rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x &= \sin(x+y), \\ y &= \cos(x-y), \end{aligned}$$

**a)** primenom opšteg iterativnog metoda;
**b)** primenom metoda Njutn–Kantoroviča;
**c)** primenom modifikovanog metoda Njutn–Kantoroviča.

**Rešenje: a** Opšti iterativni metod:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \sin(x^{(k)} + y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} &= \cos(x^{(k)} - y^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Bez provere konvergencije, sa početnim vrednostima $x^{(0)} = y^{(0)} = 0$ posle 5 iteracija dobija se $(x^*, y^*) \approx (0.94,\ 1.00)$.

**b)** Metod Njutn–Kantoroviča (4):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x+y) - x \\ \cos(x-y) - y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(J(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\quad \mathbf{x}^{(0)} \in D. \end{aligned}$$

Jakobijeva matrica:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) - 1 & \cos(x+y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) - 1 \end{bmatrix}$$

Neka su početne vrednosti $x^{(0)} = y^{(0)} = \dfrac{\pi}{2}$.
(Zašto ne može $x^{(0)} = y^{(0)} = 0$?)

Tada je:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.571 \\ 1.571 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \sin\pi - \pi/2 \\ \cos 0 - \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.571 \\ -0.571 \end{bmatrix},$$

$$J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \cos\pi - 1 & \cos\pi \\ -\sin 0 & \sin 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\big(J(\mathbf{x}^{(0)})\big)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} - \big(J(\mathbf{x}^{(0)})\big)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \\ &= \begin{bmatrix} 1.571 \\ 1.571 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.571 \\ -0.571 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.571 \\ 1.571 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.071 \\ 1. \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| = \max\{0.5,\ 0.571\} = 0.571 \geq \varepsilon,$$

tačnost nije postignuta, pa određujemo sledeću iteraciju.
Tačnost $\varepsilon = 10^{-2}$ se postiže posle 3 iteracije.

Međurezultati u svim iteracijama su sledeći:

početna vrednost: $x(0) = \begin{pmatrix} 1.5708 \\ 1.5708 \end{pmatrix}$

$f(x(0)) = \begin{pmatrix} -1.5708 \\ -0.570796 \end{pmatrix}$, $J(x(0)) = \begin{pmatrix} -2. & -1. \\ 0. & -1. \end{pmatrix}$, $(J(x(0)))^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0. & -1. \end{pmatrix}$

iteracija: $k=1$, $x(1) = \begin{pmatrix} 1.0708 \\ 1. \end{pmatrix}$, greška:0.570796

$f(x(1)) = \begin{pmatrix} -0.193214 \\ -0.00250501 \end{pmatrix}$, $J(x(1)) = \begin{pmatrix} -1.47943 & -0.479426 \\ -0.0707372 & -0.929263 \end{pmatrix}$, $(J(x(1)))^{-1} = \begin{pmatrix} -0.693034 & 0.35755 \\ 0.052755 & -1.10334 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=2$, $x(2) = \begin{pmatrix} 0.937788 \\ 1.00743 \end{pmatrix}$, greška:0.133008

$f(x(2)) = \begin{pmatrix} -0.00706879 \\ -0.00985306 \end{pmatrix}$, $J(x(2)) = \begin{pmatrix} -1.36573 & -0.365734 \\ 0.0695845 & -1.06958 \end{pmatrix}$, $(J(x(2)))^{-1} = \begin{pmatrix} -0.719669 & 0.246084 \\ -0.0468199 & -0.918933 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=3$, $x(3) = \begin{pmatrix} 0.935126 \\ 0.998044 \end{pmatrix}$, greška: 0.00938526

rešenje: $x^* \approx x(3) = \begin{pmatrix} 0.935126 \\ 0.998044 \end{pmatrix}$

Zaokruživanjem na 2 decimale dobija se $\mathbf{x}^* \approx [0.94 \quad 1.00]^T$.

**b)** Modifikovani metod Njutn–Kantoroviča (5):
U svakoj iteraciji se koristi $\left(J(\mathbf{x}^{(0)})\right)^{-1}$.
Rezultati:

početna vrednost: $x(0) = \begin{pmatrix} 1.5708 \\ 1.5708 \end{pmatrix}$

$f(x(0)) = \begin{pmatrix} -1.5708 \\ -0.570796 \end{pmatrix}$, $J(x(0)) = \begin{pmatrix} -2. & -1. \\ 0. & -1. \end{pmatrix}$, $(J(x(0)))^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0. & -1. \end{pmatrix}$

iteracija: $k=1$, $x(1) = \begin{pmatrix} 1.0708 \\ 1. \end{pmatrix}$, greška: 0.570796

$f(x(1)) = \begin{pmatrix} -0.193214 \\ -0.00250501 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=2$, $x(2) = \begin{pmatrix} 0.975442 \\ 0.997495 \end{pmatrix}$, greška: 0.0953544

$f(x(2)) = \begin{pmatrix} -0.0552167 \\ 0.00226186 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=3$, $x(3) = \begin{pmatrix} 0.946703 \\ 0.999757 \end{pmatrix}$, greška: 0.0287393

$f(x(3)) = \begin{pmatrix} -0.0164382 \\ -0.00116388 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=4$, $x(4) = \begin{pmatrix} 0.939066 \\ 0.998593 \end{pmatrix}$, greška:0.00763715

rešenje: $x^* \approx x(4) = \begin{pmatrix} 0.939066 \\ 0.998593 \end{pmatrix}$

**Zadatak 5.** Dat je sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
x^2 + z^2 + y^2 &= 1,\\
2x^2 + y^2 - 4z &= 0,\\
3x^2 - 4y + z^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Uzimajući za početne vrednosti $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0.5$ odrediti prve tri iteracije primenom:
**a)** metoda Njutn–Kantoroviča;
**b)** modifikovanog metoda Njutn–Kantoroviča.

**Rešenje:** **a)** Metod Njutn–Kantoroviča:

početna vrednost: $x(0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

$f(x(0)) = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1. \end{pmatrix}$, $J(x(0)) = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. \\ 2. & 1. & -4 \\ 3. & -4 & 1. \end{pmatrix}$, $(J(x(0)))^{-1} = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.125 & 0.125 \\ 0.35 & 0.05 & -0.15 \\ 0.275 & -0.175 & 0.025 \end{pmatrix}$

iteracija: k=1, $x(1) = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{pmatrix}$

$f(x(1)) = \begin{pmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.4375 \end{pmatrix}$, $J(x(1)) = \begin{pmatrix} 1.75 & 1. & 0.75 \\ 3.5 & 1. & -4 \\ 5.25 & -4 & 0.75 \end{pmatrix}$, $(J(x(1)))^{-1} = \begin{pmatrix} 0.235521 & 0.0579151 & 0.0733591 \\ 0.364865 & 0.0405405 & -0.148649 \\ 0.297297 & -0.189189 & 0.027027 \end{pmatrix}$

iteracija: k=2, $x(2) = \begin{pmatrix} 0.789817 \\ 0.496622 \\ 0.369932 \end{pmatrix}$

$f(x(2)) = \begin{pmatrix} 0.0072933 \\ 0.0145238 \\ 0.0217943 \end{pmatrix}$, $J(x(2)) = \begin{pmatrix} 1.57963 & 0.993243 & 0.739865 \\ 3.15927 & 0.993243 & -4 \\ 4.7389 & -4 & 0.739865 \end{pmatrix}$, $(J(x(2)))^{-1} = \begin{pmatrix} 0.262763 & 0.0635915 & 0.0810374 \\ 0.366523 & 0.0402349 & -0.148998 \\ 0.298546 & -0.189784 & 0.027007 \end{pmatrix}$

iteracija: k=3, $x(3) = \begin{pmatrix} 0.78521 \\ 0.496611 \\ 0.369923 \end{pmatrix}$

**b)** Modifikovani metod Njutn–Kantoroviča:

početna vrednost: $x(0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

$W(x(0)) = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. \\ 2. & 1. & -4 \\ 3. & -4 & 1. \end{pmatrix}$, $\quad (J(x(0)))^{-1} = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.125 & 0.125 \\ 0.35 & 0.05 & -0.15 \\ 0.275 & -0.175 & 0.025 \end{pmatrix}$

$f(x(0)) = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1. \end{pmatrix}$

iteracija: $k=1$, $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{pmatrix}$

$f(x(1)) = \begin{pmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.4375 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=2$, $\quad x(2) = \begin{pmatrix} 0.726563 \\ 0.496875 \\ 0.370313 \end{pmatrix}$

$f(x(2)) = \begin{pmatrix} -0.0880908 \\ -0.178579 \\ -0.266689 \end{pmatrix}$

iteracija: $k=3$, $\quad x(3) = \begin{pmatrix} 0.815255 \\ 0.496632 \\ 0.369953 \end{pmatrix}$