13 Ојлерови и Хамилтонови графови

Преглед теорије

Дефиниција 1. Ојлеров граф је граф који поседује циклус који обухвата сваку његову грану.

Теорема 1. Повезан граф је Ојлеров ако и само ако је степен сваког његовог чвора паран.

Дефиниција 2. Полу-Ојлеров граф је граф који поседује прост пут који обухвата сваку његову грану.

Теорема 2. Повезан граф је полу-Ојлеров ако и само ако је број његових чворова са непарним степеном не већи од два.

Дефиниција 3. Хамилтонов граф је граф који поседује прост циклус који обухвата све његове чворове.

Теорема 3 (Диракова теорема)**.** Нека је дат произвољан граф који садржи $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ чворова. Уколико степен сваког његовог чвора износи бар $\frac{n}{2}$, тада је овај граф сигурно Хамилтонов.

Теорема 4 (Ореова теорема)**.** Нека је дат граф $G = (V, E)$ који садржи $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ чворова. Уколико за сваки пар различитих несуседних чворова $x, y \in V$, $x \neq y$, $\{x, y\} \notin E$, важи

$$d(x) + d(y) \geq n,$$

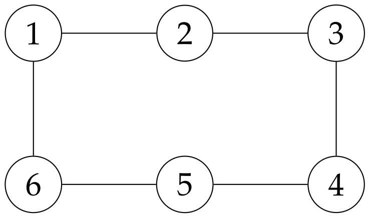
где $d(x)$ и $d(y)$ означавају степене чворова x и y, респективно, тада је граф G обавезно Хамилтонов.

Напомена. Може се приметити да Ореова теорема представља генерализацију Диракове теореме.

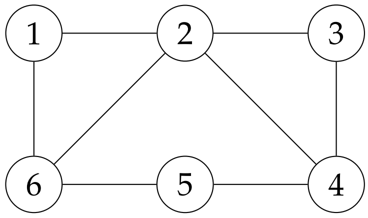
Решени задаци

Задатак 1. За сваки од графова задатих преко наредне слике одредити да ли је

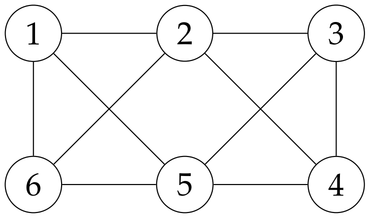
- Ојлеров;
- полу-Ојлеров;
- Хамилтонов;
- полу-Хамилтонов.



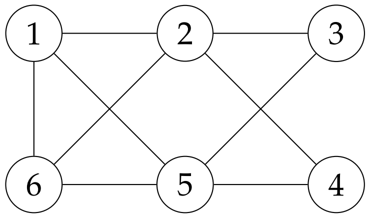
(а) G_1



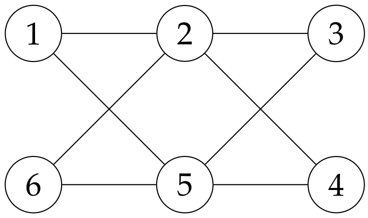
(б) G_2



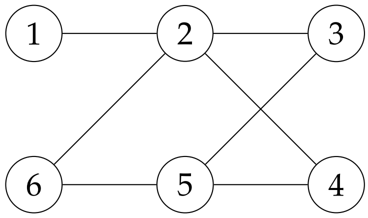
(в) G_3



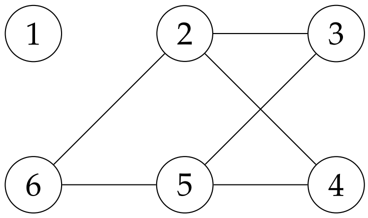
(г) G_4



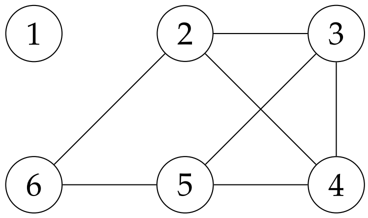
(д) G_5



(ђ) G_6



(е) G_7



(ж) G_8

Решење. У оквиру наредне табеле је приказано целокупно решење задатка.

	Ојлеров	полу-Ојлеров	Хамилтонов	полу-Хамилтонов
G_1	✓	✓	✓	✓
G_2		✓	✓	✓
G_3			✓	✓
G_4		✓		✓
G_5	✓	✓		
G_6		✓		
G_7		✓		
G_8				

У наставку следи образложење решења за сваки од задатих графова.

а) Граф G_1 садржи циклус $1-2-3-4-5-6-1$ који обухвата све гране графа. Овај циклус је такође прост и обухвата и све чворове графа. Дакле, граф G_1 мора бити и Ојлеров и Хамилтонов.

б) Граф G_2 је повезан и има тачно два чвора непарног степена: 4 и 6. Дакле, он није Ојлеров, али јесте полу-Ојлеров, при чему је пример одговарајућег простог пута $4-3-2-1-6-5-4-2-6$. Граф је такође и Хамилтонов, узевши у обзир да постоји прост циклус који пролази кроз све чворове. Пример оваквог циклуса је, рецимо, $1-2-3-4-5-6-1$.

в) Граф G_3 је повезан и има тачно четири чвора непарног степена: $1, 3, 4$ и 6. Закључујемо да овај граф није ни Ојлеров ни полу-Ојлеров. Са друге стране, граф поседује прост циклус који пролази кроз све чворове, као што је, на пример, $1-2-3-4-5-6-1$. Због тога овај граф мора бити Хамилтонов.

г) Граф G_4 је повезан и има тачно два чвора непарног степена: 1 и 6, те овај граф није Ојлеров, али јесте полу-Ојлеров. Пример простог пута који пролази кроз све гране је $1-2-3-5-6-2-4-5-1-6$.

Граф G_4 није Хамилтонов. Ово се може доказати ако узмемо у обзир да су чворови 3 и 4 степена два, те би потенцијалан Хамилтонов циклус морао да обухвати све гране из скупа $\{\{2,3\},\{3,5\},\{2,4\},\{4,5\}\}$. Међутим, ове четири гране сигурно не могу да припадају истом простом циклусу дужине шест, те Хамилтонов циклус не постоји. Међутим, граф јесте полу-Хамилтонов, узевши у обзир да поседује Хамилтонов пут у виду $3-2-1-6-5-4$.

д) Граф G_5 садржи циклус који обухвата све његове гране. Пример оваквог циклуса је, рецимо, $1-2-3-5-6-2-4-5-1$. Дакле, овај граф је Ојлеров. Осим тога, граф G_5 је бипартитан, и то комплетан бипартитан, пошто су чворови из скупова $U=\{2,5\}$ и $V=\{1,3,4,6\}$ међусобно повезани сваки са сваким. Одавде можемо да закључимо да граф сигурно није ни Хамилтонов ни полу-Хамилтонов, јер би постојање Хамилтоновог пута значило да се кардиналости скупова U и V разликују за максимално један, што није случај.

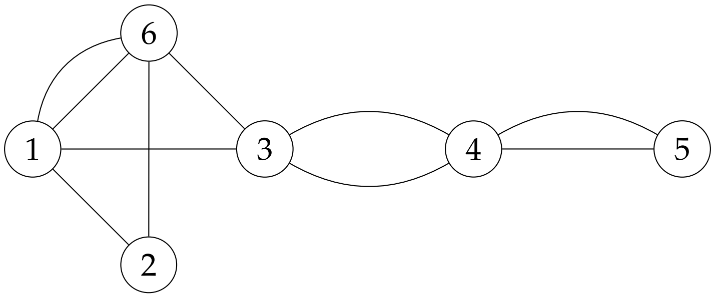
ђ) Граф G_6 сигурно не може бити Ојлеров, узевши у обзир да је чвор 1 степена један. Међутим, он јесте полу-Ојлеров, пошто има прост пут који обилази све гране. Пример оваквог пута је $1-2-3-5-6-2-4-5$. Граф G_6 је бипартитан, при чему свака грана има један крај у скупу $U=\{2,5\}$, а други крај у скупу $V=\{1,3,4,6\}$. Слично као граф G_5, ни граф G_6 не може бити ни Хамилтонов ни полу-Хамилтонов, јер би постојање Хамилтоновог пута значило да се кардиналности скупова U и V разликују за највише један.

е) Пре свега, граф G_7 има изолован чвор, тако да он сигурно није ни Хамилтонов ни полу-Хамилтонов. Међутим, без обзира на то што граф није повезан, све његове гране налазе се у истој компоненти повезаности, при чему постоје тачно два чвора која су непарног степена: 2 и 5. То значи да граф није Ојлеров, али јесте полу-Ојлеров. Пример простог пута који пролази кроз све гране графа G_7 јесте $2-3-5-6-2-4-5$.

ж) Слично као граф G_7, и граф G_8 поседује изолован чвор, тако да не може бити ни Хамилтонов ни полу-Хамилтонов. Овај граф такође има укупно четири чвора непарног степена: 2, 3, 4 и 5, тако да сигурно није ни Ојлеров ни полу-Ојлеров.

□

Задатак 2. Применом Флеријевог алгоритма наћи два међусобно различита Ојлерова циклуса која почињу и завршавају се у чвору 1 у мултиграфу датом на следец1ој слици.



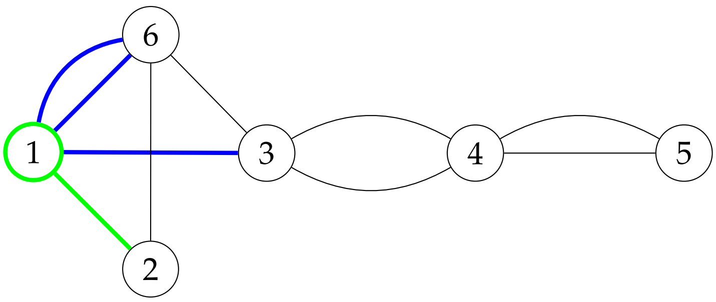
Решење. Уколико примењујемо Флеријев алгоритам и крећемо од чвора 1, свака од инцидентних грана је могућа као следећа, тј. можемо да изаберемо било коју од четири гране које су инцидентне са чвором 1 као почетну грану. Алгоритам ћемо применити два пута – у првом случају ће почетна грана бити $\{1, 2\}$, а у другом $\{1, 6\}$.

Целокупан поступак је сликама описан, при чему је следеће значење ознака:

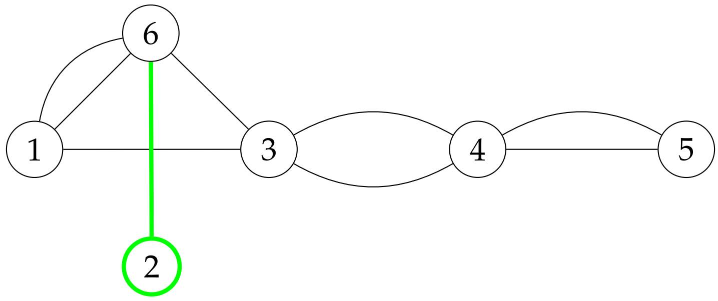
- зелен чвор – последње посећен чвор;
- зелена грана – грана која је инцидентна са последње посећеним чвором и одабрана је да буде следећа;
- плава грана – грана које је инцидентна са последње посећеним чвором и валидан је избор да буде одабрана као следећа, али није одабрана, јер има више могућих валидних грана и нека друга је одабрана (насумично);
- црвена грана – грана која је инцидентна са последње посећеним чвором, није јединствена преостала грана и представља мост, и на тај начин није валидан избор за следећу грану.

Напомена: Одабране гране се бришу са приказа.

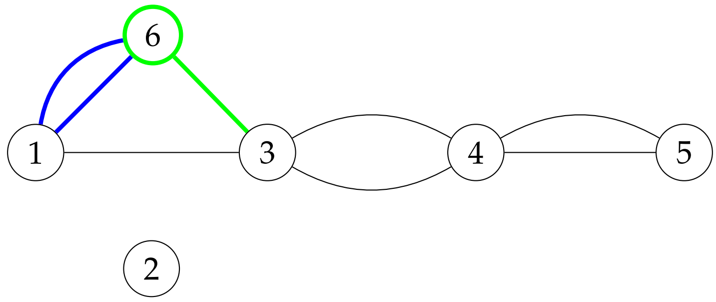
Следи прва примена алгоритма:



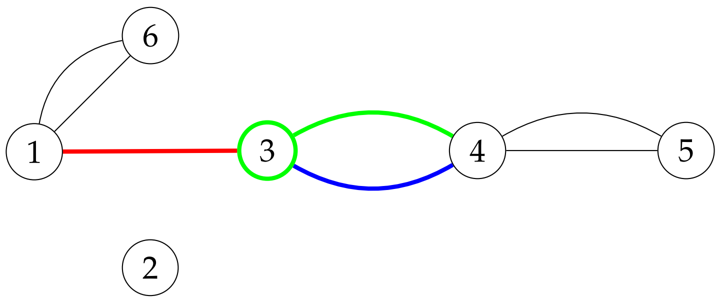
Корак 0



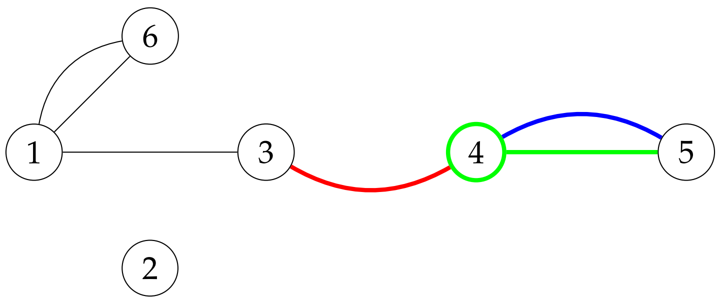
Корак 1



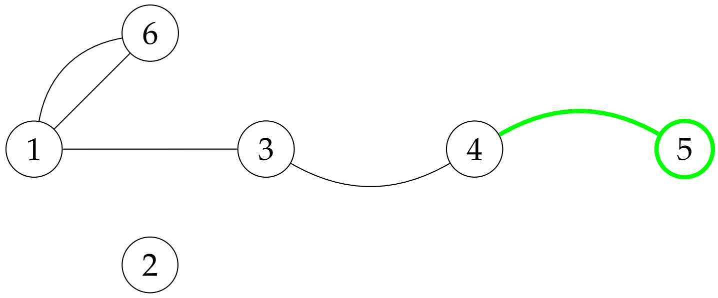
Корак 2



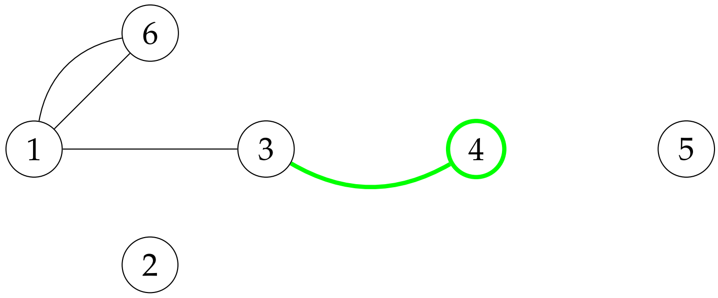
Корак 3



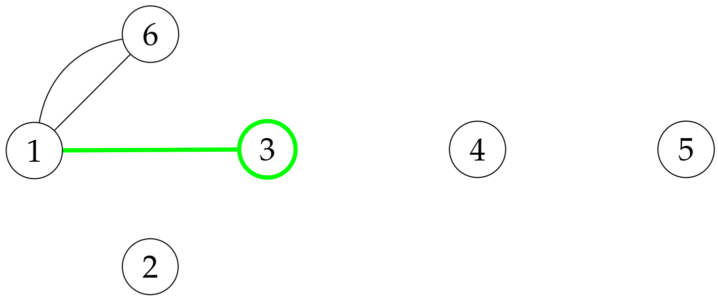
Корак 4



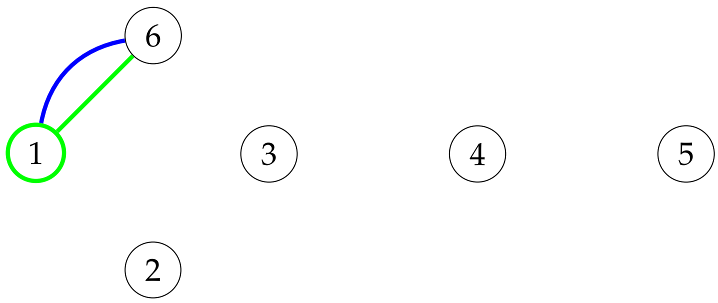
Корак 5



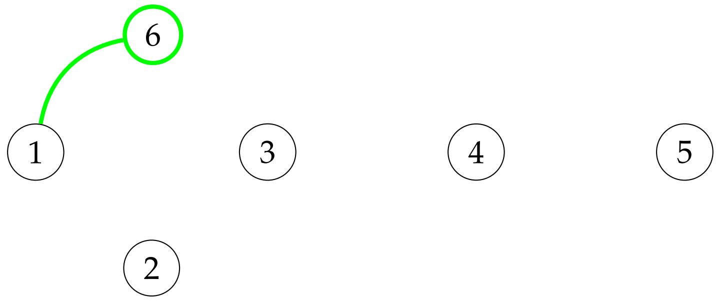
Корак 6



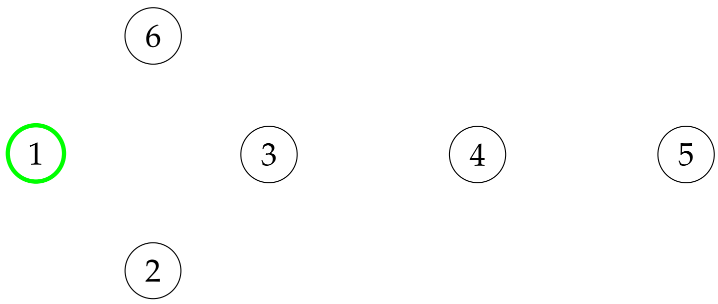
Корак 7



Корак 8



Корак 9

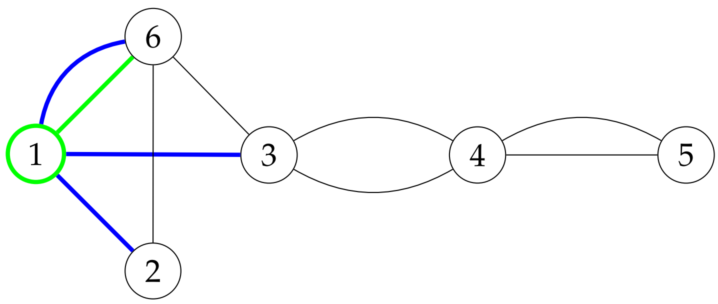


Корак 10

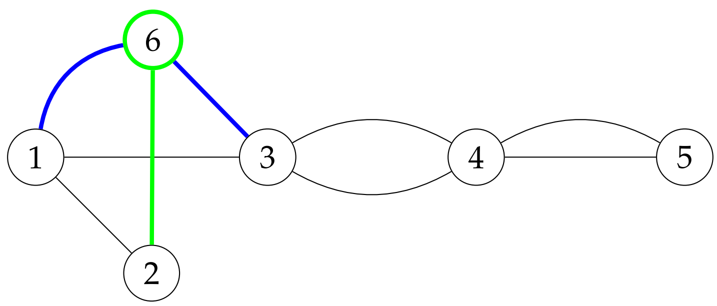
Дакле, један од могућих Ојлерових циклуса је:

$$1 - 2 - 6 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 - 1 - 6 - 1.$$

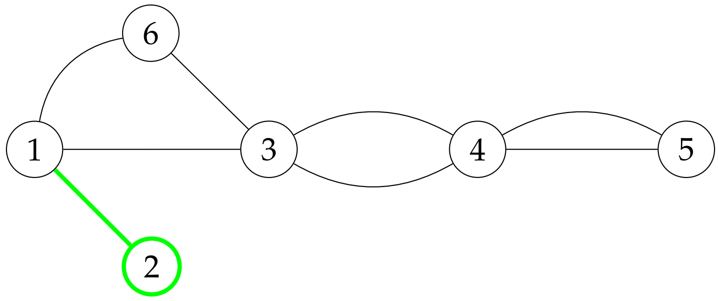
Следи друга примена алгоритма:



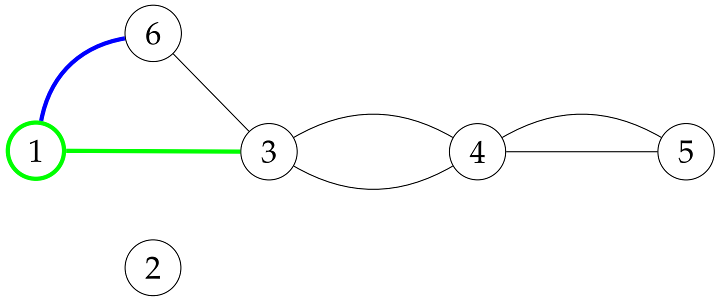
Корак 0



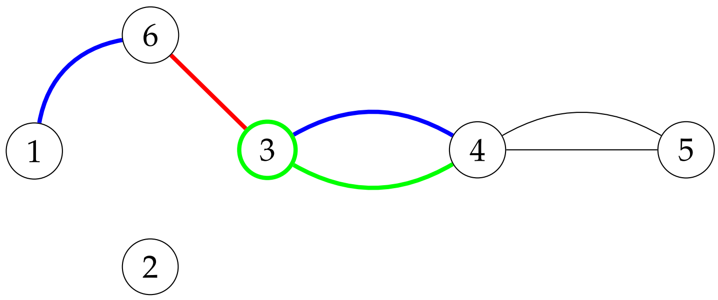
Корак 1



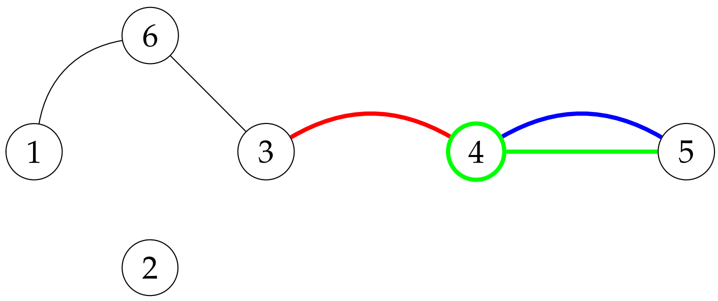
Корак 2



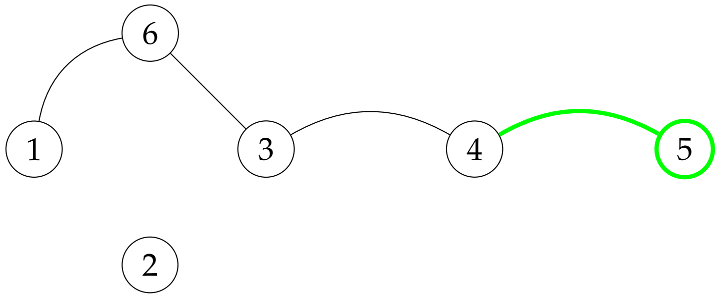
Корак 3



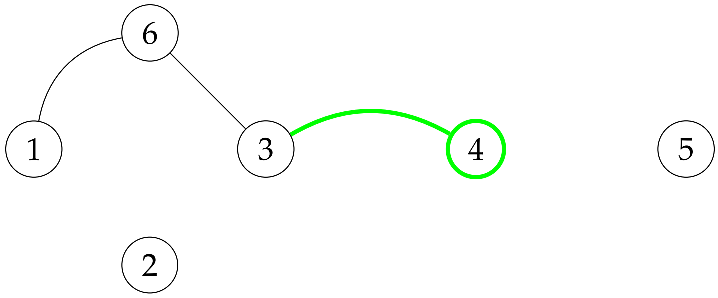
Корак 4



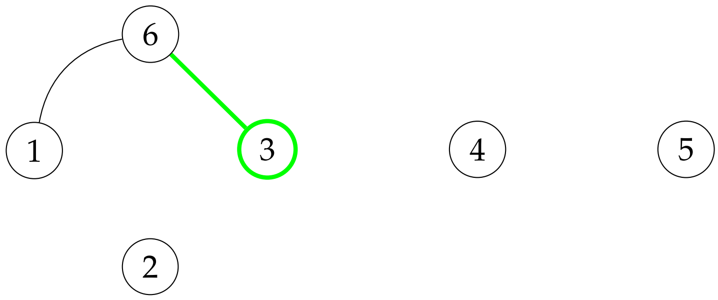
Корак 5



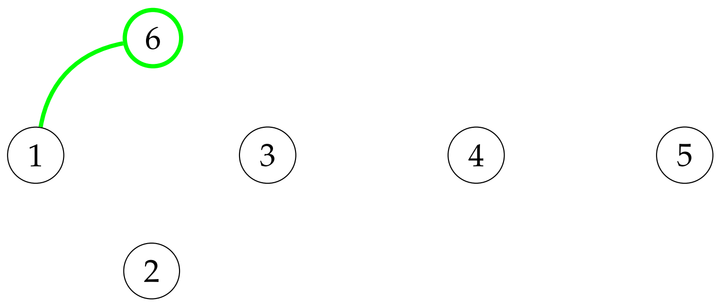
Корак 6



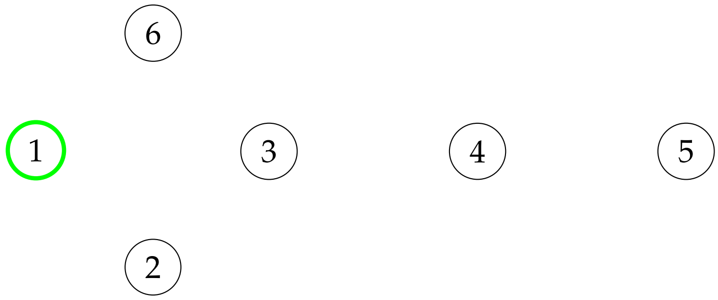
Корак 7



Корак 8



Корак 9



Корак 10

Други добијени Ојлеров циклус је

$$1 - 6 - 2 - 1 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 - 6 - 1.$$

Можемо једноставно да се уверимо да ова два добијена циклуса нису једнака:

$$1 - 2 - 6 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 - 1 - 6 - 1,$$
$$1 - 6 - 2 - 1 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 - 6 - 1.$$

□

Задатак 3. Нека је дат произвољан граф $G = (V, E)$ такав да важи $|V| = 8$, као и $|E| = 23$. Доказати да граф G мора бити Хамилтонов.

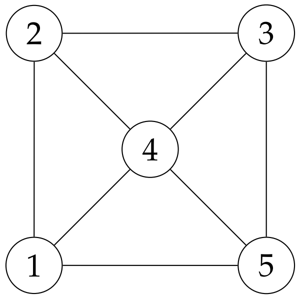
Решење. Комплетан граф са осам чворова има $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ грана, а задати граф има 23, што значи да њему пет грана недостаје да буде комплетан. Очигледно је да сваки чвор мора да има степен који је једнак бар $7 - 5 = 2$.

Претпоставимо да постоји чвор који је степена тачно два. То значи да свих пет недостајућих грана има овај чвор као крајњу тачку. Означимо тај чвор са x. У овом случају индуковани подграф датог графа чији је скуп чворова $V \setminus \{x\}$ заправо представља комплетан граф са седам чворова. Постојање Хамилтоновог циклуса је очигледно – пође се од чвора x, дође до једног од његова два суседа, направи Хамилтонов пут запаженог индукованог комплетног подграфа тако да је крајња тачка у другом суседу чвора x, и затим се циклус завршава у x.

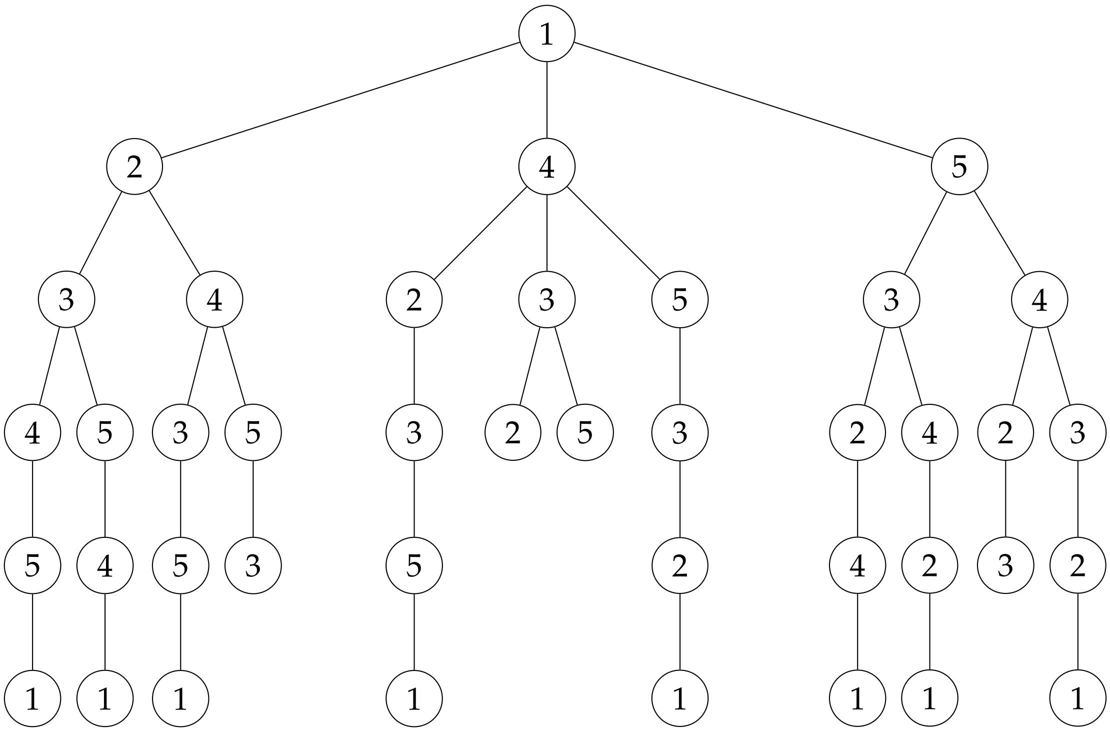
Претпоставимо да не постоји ниједан чвор који је степена два, али да постоји чвор који је степена три. То значи да овај чвор представља крајњу тачку за четири од пет недостајућих грана. Нека је дати чвор означен са x. Индуковани подграф датог графа који одговара скупу чворова $V \setminus \{x\}$ има 20 грана, а седам чворова, што значи да му једна грана фали да би био комплетан граф. Нека су y и z суседи чвора x такви да су и они међусобно суседи. Они увек постоје јер је немогуће да сва три суседа чвора x истовремено не буду суседи нико ни са ким. У индукованом подграфу који не садржи чвор x очигледно постоји Хамилтонов пут од y до z. Наиме, уколико та једна недостајућа грана постоји између чвора y и чвора $w \neq z$, довољно је да приликом одабира пута одмах после чвора y не иде чвор w и добиће се Хамилтонов пут методом насумичног одабира следећег чвора. Ако фали грана између чвора z и неког чвора $w \neq y$, тада је довољно да овај чвор не претходи чвору z. Ако фали грана измед1у чворова w и t, $w \neq y, w \neq z, t \neq y, t \neq z, w \neq t$, тада је довољно да ова два чвора не иду један после другог. Дакле, свакако постоји Хамилтонов пут у одговарајућем индукованом подграфу. Хамилтонов циклус почетног графа се добија тако што се пре и после Хамилтоновог пута уоченог подграфа конкатенира чвор x.

Трећи случај наступа ако не постоји ниједан чвор који има степен два или три. Тада добијамо да сваки чвор има степен бар четири, те по Дираковој теореми следи да граф мора да поседује Хамилтонов циклус, пошто важи $4 \geq \frac{4}{2} = \frac{n}{2}$. □

Задатак 4. У графу чија је визуелна репрезентација дата у виду следеће слике наћи све Хамилтонове циклусе који полазе из чвора 1.



Решење. Методом исцрпне претраге можемо решити задатак:



Добијени Хамилтонови циклуси су:

$$
\begin{aligned}
&1-2-3-4-5-1, \qquad 1-2-3-5-4-1,\\
&1-2-4-3-5-1, \qquad 1-4-2-3-5-1,\\
&1-4-5-3-2-1, \qquad 1-5-3-2-4-1,\\
&1-5-3-4-2-1, \qquad 1-5-4-3-2-1.
\end{aligned}
$$

□