Драгутин Н. Митић

ЕЛЕКТРОТЕХНИКА 1

Петрограф
Ниш, 2007.

Драгутин Н. Митић

ЕЛЕКТРОТЕХНИКА 1

Рецензенти:

Проф. др Александар Д. Воргучић
Проф. др Предраг Д. Ранчић

Штампање овог уџбеника одобрено је одлуком Наставно-научног већа Електронског факултета у Нишу бр. 07/05-029/07-001

Издавач и штампа: Петрограф, Ниш
За издавача: Драган Петровић
ISBN 978-86-7934-001-6

Тираж: 200 примерака

Прештампавање или умножавање ове књиге није дозвољено без писмене дозволе издавача и представља кривично дело.

ПРЕДГОВОР

Ова књига је плод дугогодишњег наставног рада аутора, некада на предмету Основи електротехнике, а сада на предметима Електротехника I и Електротехника II који се изучавају на првој години студија на Електронском факултету у Нишу. Мада је у потпуности усклађена са наставним плановима и програмима на овом Факултету, може корисно послужити и студентима других факултета и виших школа јер су наставни програми из предмета Електротехника на свим Електротехничким факултетима у Србији у великој мери усаглашени.

Књига је подељена на два основна дела, Електростатику и Електрокинетику сталних једносмерних струја, а сваки од делова у десет глава са већим бројем поглавља. На крају сваке главе дат је већи број питања како би корисник могао да провери своју успешност у савладавању наставног градива.

За разлику од већине других уџбеника где се, све до Максвеловог постулата, ради искључиво са пољем и потенцијалом у вакууму, овде се од почетка уводи хомогена средина. Након извођења Гаусовог закона показује се како се добијени резултати у вакууму могу директно применити и у случају да се посматрани систем наелектрисања налази у хомогеном диелектрику.

У оквиру Електрокинетике нису дата извођења формалних метода решавања сложених електричних кола. По мишљењу Аутора то је небитно за њихову примену, читаоца би непотребно оптерећивало и одвраћало његову пажњу са суштине њихове примене. Међутим, посвећена је значајна пажња нелинеарним електричним колима која су интересантна и због каснијег изучавања нелинеарних магнетних кола.

Аутор се трудио да и најсложеније проблеме објасни на приступачан начин не умањујући ни у једном тренутку строгост формулација. При томе се служио бројним илустрацијама и одређеним бројем примера. О томе колико је успео у тој намери коначан суд даће читаоци.

Значајну помоћ у савладавању градива из Електротехнике I читаоцу ће пружити и књиге "Електротехника I у облику методичке збирке задатака" и " Основи електротехнике кроз тест питања и логичке проблеме" истог аутора, а које су у потпуности усклађене са овим уџбеником.

За несметано праћење материје која се обрађује у овој књизи неопходно је солидно познавање средњошколске математике, посебно елементарне тригонометрије, векторског рачуна и детерминанти.

Аутор се захваљује свима који су на одређени начин допринели издавању ове књиге. Посебно захваљује проф. др Александру Воргучићу и проф. др Злати Цветковић на корисним дискусијама и сугестијама.

Коначно, свестан да су у првом издању могуће одређене материјалне и штампарске грешке Аутор се унапред захваљује свима који му на њих укажу.

У Нишу, фебруара 2006.

Аутор

(mitic@elfak.ni.ac.yu)

САДРЖАЈ

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

1. Увод 9.

1.1. Укратко о развоју науке о електрицитету 9.
1.2. О савременом схватању електрицитета 11.
1.3. Електроскоп 12.
1.4. Електростатичка индукција 13.
1.5. О расподели наелектрисања 14.
1.6. Питања за проверу 17.

2. Кулонов закон; електростатичко поље 19.

2.1. Кулонов закон 19.
2.2. Појам и дефиниција електростатичког поља 21.
2.3. Вектор јачине електростатичког поља 22.
2.4. Поље тачкастог оптерећења у хомогеном диелектрику 23.
2.5. Поље система тачкастих оптерећења у хомогеном диелектрику 24.
2.6. Линије поља и спектар поља 26.
2.7. Питања за проверу 27.

3. Електростатички потенцијал 29.

3.1. Рад при померању оптерећења у пољу; конзервативни карактер поља 29.
3.2. Електростатички потенцијал 32.
3.3. Потенцијална разлика између две тачке;
напон: рад при померању наелектрисања у пољу 34.
3.4. Потенцијал тачкастог оптрећења у хомогеном диелектрику 35.
3.5. Потенцијал система тачкастих оптрећења у хомогеном диелектрику 37.
3.6. Еквипотенцијалне површине 39.
3.7. Одређивање вектора јачине електричног
поља из познате функције потенцијала 41.
3.8. Питања за проверу 44.

4. Гаусов закон 45.

4.1. Вектор површине 45.
4.2. Флукс вектора 45.
4.3. Гаусов закон 48.
4.4. Неки примери примене Гаусовог закона 51.
4.5. Електрично поље и потенцијал у хомогеном диелектрику 61.
4.6. Питања за проверу 63.

5. Понашање проводника у електростатичком пољу 65.

5.1. Оптерећено проводно тело ван страног поља 65.
5.2. Неоптерећено проводно тело у страном пољу 66.
5.3. Гранични услов на површини проводника 68.
5.4. Расподела оптерећења на површини проводника 69.
5.5. Неки закључци и примери 71.
5.6. Питања за проверу 73.

6. Електрична капацитивност и кондензатори 75.

6.1. Електрична капацитивност усамљеног проводника 75.
6.2. Кондензатори и електрична капацитивност кондензатора 77.
6.3. Примери прорачуна капацитивности кондензатора са хомогеним диелектриком 78.
6.4. Енергија кондензатора 84.
6.5. Локализација енергије у електростатичком пољу 85.
6.6. Сила између електрода кондензатора 87.
6.7. Оптерећивање кондензатора 90.
6.8. Питања за проверу 91.

7. Спрезање кондензатора 93.

7.1. Редна веза кондензатора 93.
7.2. Паралелна веза кондензатора 95.
7.3. Мешовита веза кондензатора 96.
7.4. Трансфигурација звезда - троугао и обрнуто 98.
7.5. Питања за проверу 100.

8. Електрични дипол 101.

8.1. Потенцијал у далекој зони и електични момент дипола 101.
8.2. Понашање дипола у хомогеном електричном пољу 102.
8.3. Понашање дипола у нехомогеном електричном пољу 104.
8.4. Питања за проверу 104.

9. Електрично поље у диелектрицима 105.

9.1. Поларизација диелектрика и вектор јачине поларизације 106.
9.2. Веза између вектора јачине поларизације и помераја везаних оптерећења у диелектрику 109.
9.3. Макроскопски ефекти поларизације диелектрика 111.
9.4. Генералисани Гаусов закон (Максвелов постулат) 114.
9.5. Гранични услови 117.
9.6. Критично поље; примери примене Максвеловог постулата и граничних услова 121.
9.7. Локализација енергије у електростатичком пољу у диелектрику 130.
9.8. Питања за проверу 130.

10. Кретање наелектрисане честице у електростатичком пољу 133.

10.1. Одређивање интензитета вектора брзине наелектрисане честице у електричном пољу 133.
10.2. Кретање наелектрисане честице која улиће у хомогено електрично поље почетном брзином управном на линије поља 134.
10.3. Питања за проверу 135.

ЕЛЕКТРОКИНЕТИКА

11. Електрична струја 137.

11.1. Основни појмови 137.
11.2. Стационарно електрично поље и стационарна електрична струја 138.
11.3. Средња макроскопска брзина слободних носиоца и појам струјног поља 142.
11.4. Пратећи ефекти електричне струје 143.
11.5. Шематско представљање електричних кола 146.
11.6. Јачина и смер електричне струје 147.
11.7. Вектор густине струје 150.
11.8. Једначина континуитета и I Кирхофов закон 153.
11.9. Питања за проверу 156.

12. Омов закон; израчунавање електричне отпорности 159.

12.1. Омов закон 159.
12.2. Означавање и референтни смер напона на отпорнику 160.
12.3. Мерење напона 161.
12.4. Отпорност и проводност хомогеног проводника сталног попречног пресека 162.
12.5. Омов закон у локалном облику 163.
12.6. Уопштена формула за израчунавање отпорности 164.
12.7. Промена отпорности са температуром 166.
12.8. Питања за проверу 167.

13. Џулов закон 169.

13.1. Рад и снага на отпорнику 169.
13.2. Густина снаге Џулових губитака 171.
13.3. Рад и снага потрошача произвољног типа; еквивалентна отпорност потрошача 172.
13.4. Мерење снаге и рада 173.
13.5. Питања за проверу 174.

14. Спрезање отпорника; мерење отпорности 175.

14.1. Редна веза отпорника 175.
14.2. Паралелна веза отпорника 177.
14.3. Мешовита веза отпорника 178.
14.4. Трансфигурација звезда - троугао и обрнуто 180.
14.5. Мерење отпорности помоћу амперметра и волтметра 182.
14.6. Мерење отпорности мостом 183.
14.7. Питања за проверу 185.

15. Електрични генератор и просто електрично коло 187.
15.1. Страна сила и страно поље 187.
15.2. Електромоторна сила и унутрашња отпорност 190.
15.3. Коло са једним генератором и једним отпорником 192.
15.4. Просто коло са већим бројем генератора и отпорника 199.
15.5. Напонска и струјна интерпретација генератора 201.
15.6. Питања за проверу 205.

16. Сложена електрична кола и II Кирхофов закон 207.
16.1. Елементи сложеног електричног кола 207.
16.2. Напон на крајевима гране сложеног кола 210.
16.3. Напон између две тачке у сложеном колу 212.
16.4. II Кирхофов закон 213.
16.5. Питања за проверу 214.

17. Методи решавања сложених електричних кола 217.
17.1. Метод директне примене Кирхофових закона 217.
17.2. Метод контурних струја 220.
17.3. Метод потенцијала чворова 225.
17.4. О избору метода за решавање сложених електричних кола 230.
17.5. Питања за проверу 231.

18. Теореме електричних кола 233.
18.1. Теорема суперпозиције 233.
18.2. Тевененова теорема 235.
18.3. Нортонова теорема 240.
18.4. Компензациона теорема 241.
18.5. Теорема реципроцитета 242.
18.6. Питања за проверу 244.

19. Електрична кола са нелинеарним отпорницима 245.
19.1. Волтамперска карактеристика отпорника 245.
19.2. Радна тачка, статичка и динамичка отпорност 248.
19.3. Линеаризација нелинеарног отпорника 259.
19.4. Редна и паралелна веза нелинеарних отпорника 253.
19.5. Просто коло са нелинеарним отпорницима 256.
19.6. Сложено електрично коло са једним нелинеарним отпорником 261.
19.7. Питања за проверу 261.

20. Оптерећивање и растерећивање кондензатора преко отпорника; кола са кондензаторима 263.
20.1. Оптерећивање кондензатора преко отпорника 264.
20.2. Растерећивање кондензатора преко отпорника 269.
20.3. Кола са кондензаторима 270.
20.4. Питања за проверу 274.

Одговори на питања 275.

ДЕО I

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

1. Увод

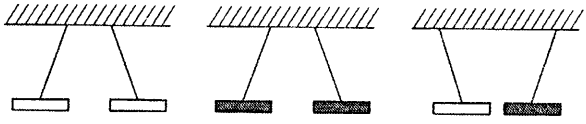
1.1. Укратко о развоју науке о електрицитету

Познавање феномена електрицитета дуго је скоро три миленијума. Наравно, прва открића су представљала само запажање одређених појава без покушаја да се открију њихови узроци и међусобне везе. Након веома дугог периода стагнације, тек у XVI веку почињу озбиљнија (углавном експериментална) истраживања. Од тада, наука о електрицитету се развија све брже и брже, долази се до нових сазнања и открића нових закона, до гранања на нове области и нових примена. Поменути све оне који су допринели развоју ове науке захтевало би књигу далеко већег обима од ове. Стога ћемо се, укратко, осврнути само на најважније чињенице.

Пре више од 2600 година грчки филозоф Талес из Милета запазио је да комад ћилибара (врста смоле), када се протрља вуненом крпом, привлачи лагане делиће материје (прашину, комадиће папируса, влати косе и тако даље). Управо од грчког назива за ћилибар (ηλεκτρον- електрон) потиче и данашња реч електрицитет за физички агенс (агенс- оно што делује, ствара, покреће; оно што изазива неку појаву, промену) који је први уочио Талес.

Преко 2200 година ово је била само интересантна појава без икакве практичне примене. Установљено је само да се поред ћилибара могу наелектрисати и други материјали: стакло, порцелан, разне врсте смола и тако даље. Прва озбиљнија истраживања у науци о електрицитету започео је у XVI веку енглески лекар Виљем Цилберт. Покушавајући да различите материјале наелектрише трењем, закључио је да постоје две врсте материјала: материјали које је успевао да наелектрише (стакло, смола, свила, вуна и тако даље) и које је назвао "електрицима" и материјали (метали) које није успевао да наелектрише и које је назвао "неелектрицима". Тек један век касније Ди Фај је поставио (сасвим оправдану) хипотезу да сваки материјал може да се наелектрише али да се у случају "електрика" наелектрисање задржава на месту где је настало, док код "неелектрика" то није случај. Ово у потпуности одговара нашој данашњој подели материјала на изолаторе ("електрике") и проводнике ("неелектрике"). Мада нема идеалних материјала (и најбољи изолатори у одређеној мери проводе електрицитет), између изолатора и проводника постоји значајна разлика: проводници проводе електрицитет 10^{15} до 10^{20} пута боље од изолатора.

Низом експеримената Ди Фај је установио да између наелектрисаних тела делује механичка сила која може бити одбојна или привлачна. Две наелектрисане стаклене шипке се међусобно одбијају, као и две наелектрисане шипке од ебонита (слика 1.1.а, б). Међутим, наелектрисана стаклена шипка и наелектрисана шипка од ебонита (слика 1.1.в) се привлаче. На основу тога је закључио да постоје две врсте наелектрисања - "стакласто" и "смоласто".



а. б. в.

Слика 1.1.

Насупрот овој теорији о постојању две врсте наелектрисања (такозвана дуалистичка теорија) Бенџамин Франклин је у XVIII веку поставио теорију по којој постоји само једна врста наелектрисања која је, у одређеној мери, присутна у свим ненаелектрисаним телима, телима која се налазе у електрично неутралном стању (унитаристичка теорија). Вишак овог наелектрисања (+) одговара "стакластом", док мањак (–) одговара "смоластом" наелектрисању. И једна и друга теорија, јер су сазнања о структури материје у то време била веома скромна, сматрала је електрицитет нестишљивим флуидом који је дељив до бесконачно малих величина.

Но, то није сметало да се, и пре најсаврменијих сазнања о структури материје и природи електрицитета, експериментално или теоријски открије и формулише највећи број закона фундаменталне електротехнике.

1.2. О савременом схватању електрицитета

Са упознавањем структуре материје повећавала су се и сазнања о самој природи електрицитета. Став, који је данас опште прихваћен, одговара Ди Фајовој дуалистичкој теорији - постоје две различите врсте наелектрисања. Бор - Радерфордов модел атома успешно одговара на сва питања која се могу поставити у оквиру курса Основа електротехнике.

По овом моделу сваки атом се састоји од језгра и електронског омотача. Језгро садржи одређени број протона (једнак редном броју елемента у периодном систему) и неутрона. Број електрона у једном атому једнак је броју протона. Електрон и протон су честице наелектрисане наелектрисањем исте вредности, супротног знака. То наелектрисање је најмање наелектрисање које се може наћи у природи (назива се квант наелектрисања) и износи $|e| \approx 1.60206 \cdot 10^{-19}$ C $\approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ C (C - Кулон, јединица за количину електрицитета). По конвенцији (договору) наелектрисање електрона је негативно а протона позитивно. Према томе, укупно наелектрисање било ког атома у неутралном стању је

$$Q = Z\,\mathrm{e} - Z\,\mathrm{e} = 0,$$

где је Z редни број елемента у периодном систему. Наравно, и наелектрисање било ког тела у неутралном (ненаелектрисаном) стању једнако је нули. Вишак позитивних наелектрисања одговара "стакластом" наелектрисању а вишак негативних "смоластом". Употреба алгебарског знака " + " и " − " за елементарно наелектрисање је, донекле, у складу и са Френклиновом теоријом - вишак позитивних наелектрисања значи да је тело позитивно наелектрисано док њихов мањак (вишак негативних наелектрисања) значи да је тело негативно наелектрисано. Наелектрисање било ког тела може бити само

$$Q = \pm N|\mathrm{e}|,$$

где је N природан број.

Када се ради о дејству и понашању електричних оптерећења на атомском и молекуларном нивоу, како у стању мировања тако и у стању кретања, битно је познавати њихове основне физичке карактеристике. Неутрон није наелектрисан, док су наелектрисања протона и електрона, као што је већ речено, иста по апсолутној вредности а супротна по знаку. Последица овога је један од фундаменталних закона Електротехнике, Закон о одржању количине електрицитета:

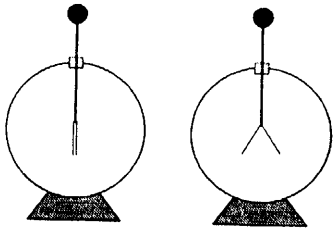
Укупна количина електрицитета у природи је непроменљива; наелектрисања се не могу створити већ само раздвојити.

Значи, ако се стаклена шипка доведе у додир (протрља) са свиленом крпом, онда ће на стаклу остати позитивно наелектрисање једнако негативном наелектрисању на свиленој крпи.

Такође су и масе субатомских честица од значаја: маса електрона, када је у стању мировања, износи $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, док је маса протона $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, значи приближно око 1839 пута већа. Маса неутрона је $m_n \approx 1.6747 \cdot 10^{-27}$ kg. Због чега је ово битно? Када се наелектрисана честица нађе у електричном пољу на њу делује механичка сила која је пропорционална њеном наелектрисању (о чему ће касније бити више речи). Сходно II Њутновом закону убрзање, а самим тим и брзина честице зависиће од њене масе. Како електрони имају знатно мању масу од протона (а самим тим и од језгра које, поред протона, садржи и неутроне) јасно је да до већине појава (у електричном смислу) долази искључиво због померања електрона. Код проводника су електрони у последњој љусци везани за матични атом веома слабим атомским силама веза. Енергија потребна за њихово ослобађање је веома мала, тако да већ на собној температури напуштају матичне атоме. Ови електрони се називају ***електрони проводности*** или ***слободни електрони*** и веома лако се могу кретати кроз проводник под дејством сила електричне природе.

Када се ради о утицају материјалне средине на електричне појаве, она се своди само на утицај елементарних наелектрисања (електрона и позитивно наелектрисаног језгра) и њиховог кретања (електричне струје, о чему ће касније бити више речи). Да би се ово схватило илустративно је следеће упоређење: ако би језгро атома водоника било величине пинг-понг лоптице, онда би електрон био величине честице прашине која око језгра кружи по орбити полупречника $r = 2\,\text{km}$. Значи, у електричном погледу, материја је "потпуно шупља" - може се заменити елементарним наелектрисањима на нивоу атома. Сама материјална супстанца, без наелектрисања, нема никаквог утицаја на електричне појаве.

1.3. Електроскоп



а. б.

Слика 1.2.

Електроскоп је инструмент који служи за индикацију постојања наелектрисања. Састоји се од стакленог балона (да би се избегао утицај влаге и прашине), металне сфере (на коју се доводи наелектрисање), и проводника који спаја металну сферу са два лака проводна листића који се могу лако покретати под дејством електростатичких сила. Када електроскоп није оптерећен проводни

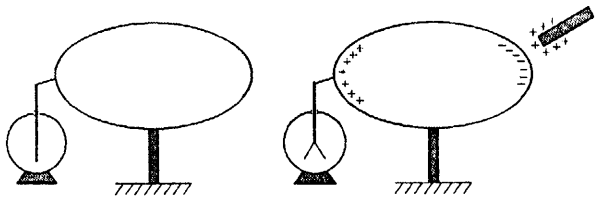
листићи, под дејством силе теже, стоје вертикално, приљубљени један уз други (слика 1.2.а). Ако се наелектрисаним телом додирне сфера, део наелектрисања ће са тела трајно прећи на електроскоп. Ово наелектрисање ће се распоредити по свим проводним деловима електроскопа тако да ће се листићи (јер су оптерећени наелектрисањем истог знака) међусобно одбијати (слика 1.2.б). Да би се електроскоп неутралисао довољно је краткотрајно додирнути металну сферу или је спојити са земљом.

Напоменимо на крају да је међусобно одбијање листића електроскопа само индикација постојања наелектрисања. Мада ће угао између листића бити утолико већи уколико је количина електрицитета доведена електроскопу већа, електроскоп се не може користити за тачно мерење вредности наелектрисања.

1.4. Електростатичка индукција

Први уочени начин наелектрисавања трењем (што није адекватан термин јер се ради о наелектрисавању контактом, додиром - стакло се трља свиленом крпом само због тога да би се остварио што бољи међусобни контакт) није једини. Поред овог начина постоје и други од којих ћемо, на почетку, поменути само још један - наелектрисавање (оптерећивање) електростатичком индукцијом.

Посматрајмо једно проводно тело (слика 1.3.а) које није наелектрисано. Укупна количина електрицитета на њему једнака је нули тако да електроскоп, спојен проводником за то тело, неће реаговати. Ако сада овом телу приближимо наелектрисану стаклену шипку тада ће између ње и слободних електрона у проводном телу деловати привлачна сила. Под дејством те силе електрони ће се кретати и гомилати на крају тела уз шипку, док ће се на супротном крају појавити мањак електрона. Значи, извршено је раздвајање оптерећења: један крај тела је постао негативно а други позитивно наелектрисан, што показују и листићи електроскопа (слика 1.3.б). Када се шипка удаљи доћи ће до неутрализације позитивних и негативних наелектрисања, тело ће постати поново неутрално (неће више бити раздвојених наелектрисања) па ће се листићи електроскопа вратити у неутрални положај (слика 1.3.а). Значи, електростатичком индукцијом се на овај начин не може трајно наелектрисати једно проводно тело.

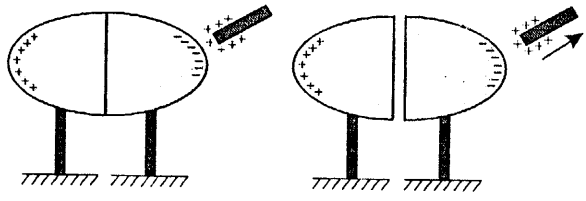


а. б.

Слика 1.3.

Но, ипак је могуће електростатичком индукцијом трајно наелектрисати проводно тело, и то на два начина.

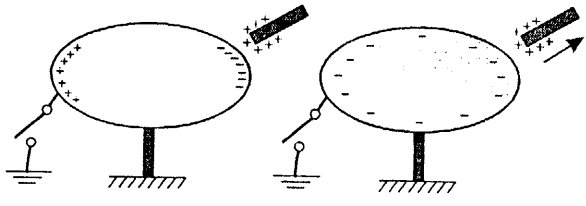
Један од начина је да се два проводна тела споје и затим принесе наелектрисана шипка (слика 1.4.а). Доћи ће, као и у претходном случају, до раздвајања наелектрисања. Затим се, не удаљавајући шипку, тела раздвоје и, тек након тога, шипка уклони. Како тела нису више спојена, не може доћи до неутрализације наелектрисања. Стога она остају трајно оптерећена (наелектрисана) количинама електрицитета једнаке вредности, наравно супротног знака (слика 1.4.б).



а. б.

Слика 1.4.

Други начин је да се након оптерећивања електростатичком индукцијом (слика 1.5.а), не уклањајући шипку, тело кратко споји са земљом услед чега долази до неутрализације једне врсте наелектрисања, наелектрисања истог знака као и на узрочнику електростатичке индукције. Након прекида споја наелектрисана шипка се може удаљити, а тело остаје трајно наелектрисано (слика 1.5.б).



а. б.

Слика 1.5.

1.5. О расподели наелектрисања

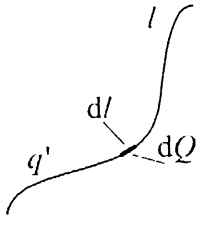
Свако наелектрисање, ма колико год оно било, мора се налазити на неком телу, проводнику или изолатору. Стога под појмом наелектрисања треба подразумевати наелектрисано тело У зависности од облика и димензија тог тела, као и од распореда наелектрисања на њему, корисно је употребљавати појмове:

тачкасто, подужно, површинско и запреминско наелектрисање.

Тачкасто наелектрисање је наелектрисање које се налази на телу чије су димензије много мање од растојања до других наелектрисања или до тачке у којој се налази посматрач. Уобичајена ознака је Q или q а јединица С (Кулон).

Подужно наелектрисање. Када се наелектрисање налази на неком линеичном телу (телу чије су попречне димензије много мање од његове дужине) онда је погодно користити појам подужне густине наелектрисања (или подужно наелектрисање) за коју је уобичајена ознака q'. За дефинисање подужне густине наелектрисања искористићемо слику 1.6. Линеична структура, укупне дужине l, оптерећена је укупном количином електрицитета Q која не мора да буде равномерно распоређена. На сваком елементу диференцијално мале дужине $\mathrm{d}l$ налази се диференцијално мало оптерећење $\mathrm{d}Q$. Подужна густина наелектрисања се дефинише као

$$q' = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}.$$



Слика 1.6.

Јединица за подужну густину наелектрисања је, очигледно, C/m (Кулон по метру). Уколико је познат закон по коме се мења q' дуж l, укупно оптерећење линеичне структуре се одређује као

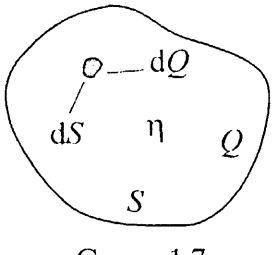
$$Q = \int_l \mathrm{d}Q = \int_l q' \mathrm{d}l.$$

У случају да је оптерећење равномерно распоређено (q' константно) горњи изрази се своде на

$$q' = Q/l \quad \text{и} \quad Q = q'l.$$

Површинско наелектрисање. Када је наелектрисање Q расподељено по некој површини S погодно је користити појам површинске густине наелектрисања (или површинског наелектрисања) за коју ћемо користити ознаку η. Посматрајмо слику 1.7. На површини S налази се наелектрисање Q које, у принципу, не мора да буде равномерно расподељено. На диференцијално малом елементу површине $\mathrm{d}S$ налази се диференцијално мало оптерећење $\mathrm{d}Q$. Површинска густина наелектрисања се дефинише као

$$\eta = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S},$$



Слика 1.7.

а јединица јој је $\mathrm{C/m^2}$ (Кулон по метру квадратном). Ако је познат закон по коме се мења η на површини S, укупно оптерећење те површине одређује се као

$$Q = \int_S \mathrm{d}Q = \int_S \eta \mathrm{d}S$$

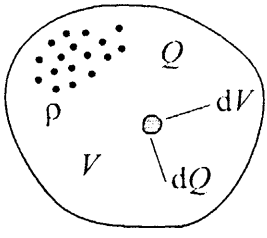
Уколико је оптерећење равномерно расподељено (η константно) горњи изрази се своде на

$$\eta = Q/S \quad \text{и} \quad Q = \eta S.$$

Мада ће о томе касније бити далеко више говора, нагласимо и на овом месту да се у случају проводника оптерећење распоређује искључиво по површини. У општем случају расподела оптерећења је неравномерна и зависи од облика проводника на коме се налази, као и од положаја, облика, димензија и распореда других наелектрисаних тела и проводника који се налазе у његовој близини. Оптерећење је равномерно распоређено само у случајевима где постоји висок степен симетрије, односно у случају усамљене проводне лопте и усамљеног неограничено дугог правог цилиндричног проводника кружног попречног пресека.

Запреминско наелектрисање. Напоменимо, на почетку, да је запреминска расподела наелектрисања могућа само у случају изолатора (диелектрика). Уколико је наелектрисање Q расподељено унутар неке запремине V, погодно је користити појам запреминске густине наелектрисања (или запреминског наелектрисања) која се означава са ρ. Нека се унутар неке запремине V налази оптерећење Q, при чему расподела оптерећења не мора да буде равномерна. У диференцијално малом елементу запремине $\mathrm{d}V$ (слика 1.8) налази се диференцијално мало оптерећење $\mathrm{d}Q$. Запреминска густина наелектрисања се дефинише као

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}.$$



Слика 1.8.

Јединица за запреминску густину наелектрисања је $\mathrm{C/m^3}$ (Кулон по метру кубном). У случају када је познат закон по коме се мења ρ у запремини V, укупно оптерећење унутар те запремине се одређује као

$$Q = \int_V \mathrm{d}Q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Уколико је оптерећење равномерно расподељено (ρ константно) горњи изрази се своде на

$$\rho = Q/V \quad \text{и} \quad Q = \rho V.$$

За запремински расподељено оптерећење веома често се користе и термини просторно расподељено оптерећење или, само, просторно оптерећење.

1.6. Питања за проверу

1.6.1. Објаснити разлику између проводника и изолатора.

1.6.2. Шта је квант наелектрисања и колика је његова вредност?

1.6.3. По чему се разликују наелектрисања електрона и протона?

1.6.4. Како гласи закон о одржању количине електрицитета?

1.6.5. Колико износе наелектрисање и маса електрона и протона?

1.6.6. Описати електроскоп и принцип његовог рада.

1.6.7. Да ли се електроскопом може измерити вредност наелектрисања неког тела?

1.6.8. Електроскопом смо установили да је једно тело наелектрисано. Да ли смо на тај начин трајно променили наелектрисање тог тела?

1.6.9. Описати принцип наелектрисавања (оптерећивања) електростатичком индукцијом.

1.6.10. Објаснити на које начине се проводно тело може трајно наелектрисати електростатичком индукцијом.

1.6.11. Када се једно наелектрисано тело може сматрати тачкастим наелектрисањем?

1.6.12. Објаснити када је погодно користити појмове подужно, површинско и запреминско наелектрисање.

1.6.13. Како се дефинише подужна густина наелектрисања у случају равномерне, а како у случају неравномерне расподеле наелектрисања? Написати њену јединицу.

1.6.14. Дефинисати површинску густину наелектрисања у случају равномерне и у случају неравномерне расподеле наелектрисања? Написати њену јединицу.

1.6.15. Дефинисати запреминску густину наелектрисања у случају равномерне и у случају неравномерне расподеле наелектрисања? Написати њену јединицу.

1.6.16. Како се, у случају неравномерне расподеле наелектрисања, из познате подужне, површинске и запреминске густине наелектрисања одређује укупно наелектрисање тела?

1.6.17. Како се, у случају равномерне расподеле наелектрисања, из познате подужне, површинске и запреминске густине наелектрисања одређује укупно наелектрисање тела?

1.6.18. Да ли се проводно тело може наелектрисати по запремини са одређеном запреминском густином ρ *?*

1.6.19. Од чега зависи површинска густина наелектрисања на једном наелектрисаном проводном телу? У којим случајевима је расподела наелектрисања на површини проводника равномерна?

1.6.20. Веома танак кружни обруч, полупречника $a = 1\,\mathrm{m}$ *, оптерећен је равномерно наелектрисањем* $Q = 10\,\mathrm{nC}$ *. Одредити подужну густину наелектрисања.*

1.6.21. Веома танак штап, начињен од изолационог материјала, постављен је дуж x *– осе правоуглог координатног система између координатног почетка и тачке* $\mathrm{A}(l,0)$ *. Штап је неравномерно наелектрисан тако да подужна густина наелектрисања равномерно расте од вредности* $q' = 0$ *на почетку штапа* $(x = 0)$ *до вредности* $q' = q'_0$ *на крају штапа* $(x = l)$ *. Одредити укупно оптерећење штапа.*

1.6.22. Усамљена проводна сфера, полупречника $R = 10\,\mathrm{cm}$ *, оптерећена је наелектрисањем сталне површинске густине* $\eta = 0.2\,\mu\mathrm{C/m^2}$ *. Израчунати укупно оптерећење сфере.*

1.6.23. Задате су три концентричне сфере полупречника $a = 10\,\mathrm{cm}$ *,* $b = 20\,\mathrm{cm}$ *и* $c = 30\,\mathrm{cm}$ *. Наелектрисање* $Q = 10\,\mathrm{nC}$ *равномерно је распоређено унутар сфере полупречника* b *. Израчунати запреминску густину наелектрисања унутар сфере полупречника* b *. Израчунати укупно оптерећење унутар сфере полупречника* a *и унутар сфере полупречника* c *.*

1.6.24. Просторно оптерећење локализовано је унутар сфере полупречника a *. Запреминска густина оптерећења није константна већ се мења са растојањем* r *од центра сфере по закону* $\rho = \rho_0(1 + r/a)$ *. Израчунати укупно оптерећење унутар сфере за случај да је* $a = 20\,\mathrm{mm}$ *и* $\rho_0 = 3\,\mu\mathrm{C/m^3}$ *.*

2. Кулонов закон; електростатичко поље

2.1. Кулонов закон

Мада је већ од раније било познато да између наелектрисаних тела делује механичка сила, тек у XVIII веку француски физичар Кулон експериментално открива квантитативне односе између вредности наелектрисања, њиховог међусобног растојања и силе између њих. Користећи веома осетљиву торзиону вагу мерио је силу између веома малих наелектрисаних сфера (које се могу сматрати тачкастим наелектрисањима). На основу низа експеримената установио је:

- да сила делује дуж правца на коме леже наелектрисања,

- да је одбојна за случај да су наелектрисања истог знака а привлачна у случају наелектрисања супротног знака,

- да је директно пропорционална вредности једног и другог наелектрисања односно њиховом производу,

- да је обрнуто пропорционална квадрату њиховог растојања.

Поред тога, потребно је напоменути да сила зависи и од средине у којој се наелектрисања налазе и да је највећа у вакууму. Врло приближно исту вредност има и у ваздуху.

У хомогеној средини (средини која у свим тачкама има исте карактеристике) све напред набројано може се исказати једноставном релацијом

$$\boxed{F = \mathrm{k}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2},}$$

где је F интензитет силе између наелектрисања Q_1 и Q_2, а r растојање између њих. Наелектрисања се уносе са својом апсолутном вредношћу јер је интензитет силе (као и сваке друге векторске величине) искључиво позитиван. Константа k није само константа пропорционалности већ карактерише средину у којој се наелектрисања налазе. Константа k има максималну вредност у вакууму, $\mathrm{k}_0 = 9\cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$.

У такозваном рационализованом начину писања једначина уместо константе k уводи се нова константа ε која се назива диелектрична константа и која се много чешће користи од константе k. Диелектрична константа се дефинише као

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi k}$$

и има најмању вредност у вакууму, $\varepsilon_0 \approx 8.85419 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$. Приближно исту вредност диелектрична константа има и у ваздуху. Уместо јединице C^2/Nm^2, за диелектричну константу се углавном користи јединица F/m (Фарад по метру), а како се до ње долази показаћемо касније.

Касније ће бити показано да се диелектрична константа било ког диелектрика може написати као $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, где је ε_r именован број који се назива ***релативна диелектрична константа***.

Према томе, у рационализованом начину писања једначина, Кулонов закон у хомогеној средини гласи

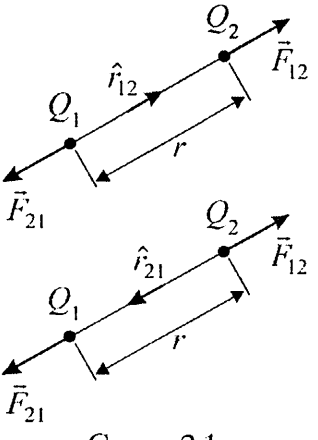
$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}.}$$

Веома сажето и без икаквих објашњења речима (правац силе, одбојна, привлачна) Кулонов закон се може исказати у векторском облику. Посматрајмо слику 2.1. Наелектрисања Q_1 и Q_2 налазе се на међусобном растојању r. Означимо са $\vec{r}_{12}$ вектор положаја наелектрисања Q_2 у односу на наелектрисање Q_1. Вектор положаја $\vec{r}_{12}$ може се писати као $\vec{r}_{12} = r\hat{r}_{12}$, где је $\hat{r}_{12}$ јединични вектор (орт) положаја наелектрисања Q_2 у односу на наелектрисање Q_1. Са овако уведеним ознакама сила $\vec{F}_{12}$ којом Q_1 делује на Q_2 је

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}_{12}}$$

Ако са $\hat{r}_{21}$ означимо јединични вектор положаја наелектрисања Q_1 у односу на наелектрисање Q_2, сила $\vec{F}_{21}$ којом наелектрисање Q_2 делује на наелектрисање Q_1 је

$$\boxed{\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}_{21}}$$



Слика 2.1.

Како је $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$ то следи и да је $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, односно да је задовољен закон акције и реакције. Јасно је да наелектрисања треба уносити са одговарајућим алгебарским предзнаком. Уколико су наелектрисања истоимена ($Q_1Q_2 > 0$) вектор силе и одговарајући орт су колинеарни, што значи да је сила одбојна и обрнуто.

2.2. Појам и дефиниција електростатичког поља

Већ први експерименти из електростатике показали су да између наелектрисања делују механичке силе. Сасвим оправдано се поставља питање каква је природа тих сила и како једно наелектрисано тело делује на друго без икакве материјалне везе међу њима, чак и у вакууму. Одговор на ово даје савремена Физика увођењем појма електричног поља које окружује сва наелектрисана тела и чијим се посредством преносе силе међусобног дејства.

Посматраћемо Кулонов експеримент (слика 2.1). Наелектрисање Q_1, и у одсуству наелектрисања Q_2, ствара у простору око себе нарочито физичко стање које се назива електростатичко (или краће електрично*) поље. Када се у ово поље унесе наелектрисање Q_2 појавиће се механичка сила на то наелектрисање. Али и наелектрисање Q_2 ствара у простору око себе електростатичко поље у коме се налази наелектрисање Q_1, те ће и на њега деловати механичка сила.

Електростатичко поље (електрично поље) је посебно физичко стање простора у околини наелектрисања (наелектрисаних тела) које се видно манифестује дејством механичке силе на наелектрисање унето у то поље.

Ово је најједноставније схватити преко аналогије са гравитационим пољем чија је видна манифестација дејство силе на масу унету у то поље. Свако од нас осећа дејство гравитационог поља јер има одређену масу. Да смо наелектрисани, на потпуно исти начин бисмо осетили дејство, односно постојање електричног поља.

---

* *Мада ће оба термина бити равноправно коришћена, треба напоменути да је појам електричног поља далеко шири и да, поред електростатичког поља, обухвата и стационарно и индуковано електрично поље. Стационарно електрично поље ће бити обрађено у другом делу ове књиге, док се индуковано електрично поље обрађује у оквиру области Електромагнетизам. Електростатичко поље је последица наелектрисања која мирују и која се не мењају у времену тако да за његово одржавање, након успостављања, није потребно улагати било какав рад.*

Постојање електричног поља се у оквирима електростатике не може ни на који начин доказати. Наиме, да би установили постојање електричног поља морамо у њега унети неко наелектрисање и детектовати силу. Међутим та сила се може протумачити и као дејство на даљину, јер без постојања другог наелектрисања не можемо тврдити да постоји електрично поље. Заступници теорије дејства на даљину били су физичари старијих генерација (Гаус, Вебер, Лоренц и други).

Појам физичког електромагнетног поља први је увео чувени енглески физичар Фарадеј који је, заједно са Максвелом, оснивач савремене, и данас опште прихваћене, теорије електромагнетног поља. Постојање променљивог електромагнетног поља лако је доказати (практичне примене у свакодневном животу: електромагнетни таласи - радио, телевизија, радар и тако даље), као и његово простирање коначном брзином (електромагнетни талас упућен ка Месецу и рефлектован од њега враћа се на Земљу након нешто више од 2 s).

Како је електростатичко поље само посебан случај променљивог електромагнетног поља, то постојање електромагнетног поља, као физичке реалности, доказује и постојање електростатичког поља.

2.3. Вектор јачине електростатичког поља

Основна квантитативна карактеристика електростатичког поља је *вектор јачине електростатичког поља* који се обележава са $\vec{E}$. За дефинисање вектора јачине електростатичког поља користи се такозвано пробно наелектрисање, Δq. Пробно наелектрисање је тачкасто, веома мало по вредности (да не би реметило расподелу наелектрисања која стварају поље) позитивно (по конвенцији) наелектрисање.

Када се пробно наелектрисање унесе у електрично поље на њега ће деловати механичка сила чији су правац, смер и интензитет одређени у свакој тачки поља (простора). Правац и смер силе на пробно оптерећење у једној тачки поља остају непромењени, док је интензитет силе пропорционалан вредности пробног оптерећења Δq,

$$F_1 : F_2 : F_3 : \cdots = \Delta q_1 : \Delta q_2 : \Delta q_3 : \cdots$$

Количник силе на пробно оптерећење и пробног оптерећења не зависи од вредности пробног оптерећења,

$$\frac{\vec{F}_1}{\Delta q_1} = \frac{\vec{F}_2}{\Delta q_2} = \frac{\vec{F}_3}{\Delta q_3} = \cdots = \text{const},$$

већ само од положаја тачке у пољу (простору) у којој се налази пробно оптерећење Δq.

Ова чињеница је искоришћена за дефинисање вектора јачине електростатичког (електричног) поља:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q}.$$

Вектор јачине електростатичког поља у једној тачки простора једнак је количнику силе која делује на пробно оптерећење Δq и тог оптерећења.

Интензитет му је једнак количнику интензитета силе и вредности пробног оптерећења, док су му правац и смер истоветни као и правац и смер силе на пробно оптерећење.

Јединица за јачину електричног поља је N/C (Њутн по Кулону). Међутим, далеко чешће се користи еквивалентна јединица V/m (Волт по метру), што ћемо касније показати.

2.4. Поље тачкастог оптерећења у хомогеном диелектрику

Одредимо сада вектор јачине електростатичког поља усамљеног тачкастог оптерећења (слика 2.2). Ако се у тачку која се налази на растојању r од оптерећења (чији је јединични вектор положаја у односу на оптерећење $\hat{r}$) унесе пробно оптерећење Δq на њега ће деловати сила

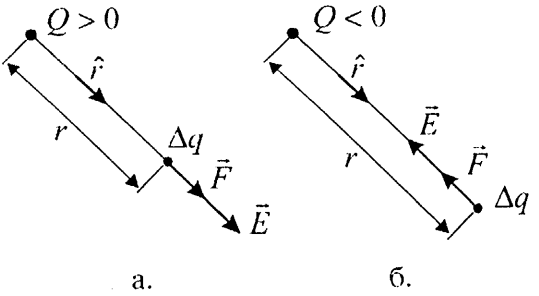
$$\vec{F} = \mathrm{k}\frac{Q\Delta q}{r^2}\hat{r} = \frac{Q\Delta q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r},$$

па је, по дефиницији,

$$\vec{E} = \vec{F}/\Delta q$$

вектор јачине електростатичког поља у тој тачки

$$\boxed{\vec{E} = \mathrm{k}\frac{Q}{r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}}$$



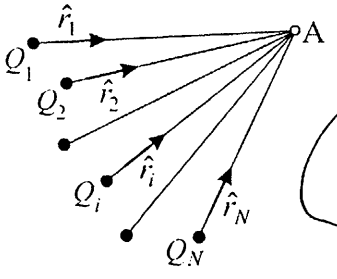
Слика 2.2.

Правац вектор јачине електростатичког поља поклапа се са правцем вектора положаја тачке у којој се рачуна поље (значи радијалан је), док му смер зависи од знака наелектрисања. Уколико је наелектрисање позитивно вектор поља је оријентисан од наелектрисања (слика 2.2.а), а у случају да је наелектрисање негативно његова оријентација је ка наелектрисању (слика 2.2.б).

2.5. Поље система тачкастих оптерећења у хомогеном диелектрику

У линеарним срединама, са којима ћемо се искључиво сусретати у електростатици, важи теорема суперпозиције, односно слагања линеарних стања.

Посматрајмо систем од N тачкастих наелектрисања (слика 2.3) и одредимо вектор јачине електростатичког поља $\vec{E}$ у произвољној тачки A. Растојање било ког наелектрисања, $Q_1, Q_2, \cdots, Q_i, \cdots, Q_N$, и тачке A је $r_1, r_2, \cdots, r_i, \cdots, r_N$, респективно, док су одговарајући јединични вектори положаја $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \cdots, \hat{r}_i, \cdots, \hat{r}_N$. Сила на пробно наелектрисање Δq, унесто у тачку A, од било ког наелектрисања Q_i биће, према Кулоновом закону,



Слика 2.3.

$$\vec{F}_i = \mathrm{k}\frac{Q_i \Delta q}{r_i^2}\hat{r}_i .$$

Укупна сила која делује на пробно наелектрисање биће једнака векторском збиру сила којима поједина наелектрисања делују на њега

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{k}\frac{Q_i \Delta q}{r_i^2}\hat{r}_i = \Delta q \sum_{i=1}^{N} \mathrm{k}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i .$$

Како је, по дефиницији, вектор јачине електричног поља једнак количнику силе на пробно наелектрисање и вредности пробног наелектрисања, дообом обе стране горње једначине са Δq добијамо

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{k}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i .$$

Знајући да је

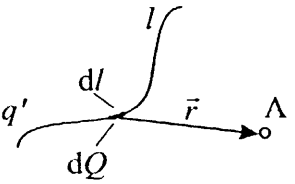
$$\mathrm{k}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon r_i^2}\hat{r}_i = \vec{E}_i$$

поље које у тачки A ствара било које наелектрисање Q_i, то *следи да је резултантно поље у тачки A једнако векторском збиру поља која у тој тачки стварају поједина наелектрисања,*

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i}$$

Ако је наелектрисање распоређено на некој линеичној структури (слика 2.4), са познатом подужном густином q', можемо га поделити на елементарна тачкаста наелектрисања $\mathrm{d}Q = q'\,\mathrm{d}l$. Свако од ових наелектрисања ствара у тачки А електрично поље

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{q'\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}\,.$$



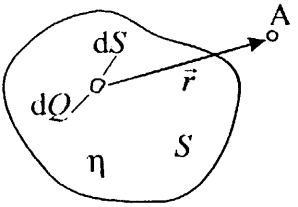
Слика 2.4.

Резултантно електрично поље је једнако векторском збиру поља од свих елементарних наелектрисања на целој дужини l,

$$\vec{E} = \int_l \mathrm{d}\vec{E} = \int_l \frac{q'\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{q'\mathrm{d}l}{r^2}\hat{r}\,.$$

У случају површинске расподеле наелектрисања (слика 2.5), познате површинске густине η, сваки елемент површине $\mathrm{d}S$ оптерећен је количином електрицитета $\mathrm{d}Q = \eta\,\mathrm{d}S$ и у тачки А ствара елементарно електрично поље

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{\eta\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}\,,$$



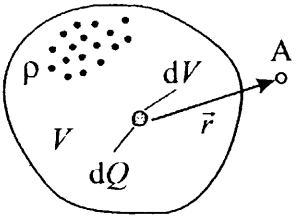
Слика 2.5.

тако да је резултантно поље, које је векторски збир поља од свих елементарних наелектрисања на целој површини S,

$$\vec{E} = \int_S \mathrm{d}\vec{E} = \int_S \frac{\eta\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\eta\,\mathrm{d}S}{r^2}\hat{r}\,.$$

Коначно, када се ради о запремински расподељеном наелектрисању (слика 2.6), сваки елемент запремине оптерећен је наелектрисањем $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V$ тако да у тачки А ствара поље

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}\,.$$



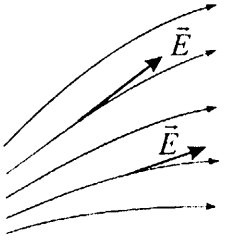
Слика 2.6.

Резултантно електрично поље одређује се као векторски збир поља од свих елементарних наелектрисања у запремини V на је, према томе,

$$\vec{E} = \int_V \mathrm{d}\vec{E} = \int_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r^2}\hat{r}\,.$$

2.6. Линије поља и спектар поља

Електростатичко поље је векторско поље и, као и друга векторска поља, веома сликовито се може приказати такозваним линијама поља. *Линије поља су замишљене линије које у свакој тачки за тангенту имају вектор јачине електричног поља* (слика 2.7). Пошто у околини наелектрисаних тела, у свакој тачки простора, постоји електрично поље, линије поља се могу цртати по вољи густо (између сваке две линије поља може се провући још једна и тако даље). Линије поља су оријентисане у смеру пројекције вектора јачине поља на линију поља. *Линије поља се не могу сећи.* Уколико би се секле у тачки пресека би постојала два различита вектора поља, што је физички немогуће.

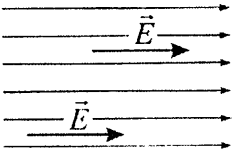


Слика 2.7.

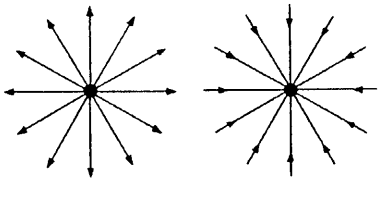
Скуп линија поља назива се спектар поља. Спектар поља даје све квалитативне информације о карактеру поља. Наиме, у свакој тачки вектор електричног поља има правац тангенте на линију поља и смер који одговара њеној оријентацији. Интензитет вектора јачине поља је пропорционалан густини линија поља (броју линија поља које продиру јединицу површине), што ће бити показано касније након што прикажемо неке карактеристичне спектре поља.

Поље код кога се правац, смер и интенензитет мењају од тачке до тачке назива се нехомогеним. Један пример спектра нехомогеног поља већ је приказан на слици 2.7.

Уколико поље у свим тачкама има исти правац, смер и интензитет онда се оно назива хомогеним. Линије хомогеног поља су паралелне и еквидистантне (на истим растојањима), што је приказано на слици 2.8.



Слика 2.8.

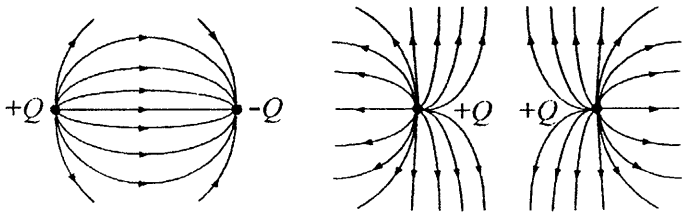

а. б.

Слика 2.9.

На слици 2.9. приказан је спектар поља усамљеног тачкастог наелектрисања, позитивног (слика 2.9.а) и негативног (слика 2.9.б). Како се, по закону о одржању количине електрицитета, електрично оптерећење не може створити већ се оптерећења могу само раздвојити, одговарајуће негативно, односно позитивно оптерећење налази се у бесконачности. Линије поља су радијалне и оријентисане од наелектрисања за случај да је Q позитивно (полазе од наелектрисања и завршавају се на одговарају-

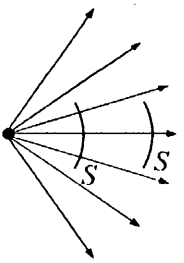
ћем негативном оптерећењу у бесконачности), док су за случај негативног оптерећења оријентисане ка наелектрисању (полазе из бесконачности и завршавају на наелектрисању).

На слици 2.10. је приказан спектар поља за случај два наелектрисања, иста по апсолутној вредности и супротног знака (слика 2.10.а), односно истог знака (слика 2.10.б). И овде се уочава да линије поља полазе са позитивних оптерећења и завршавају на негативним (у случају приказаном на слици 2.10.б. одговарајуће негативно оптерећење налази се у бесконачности).



а. б.

Слика 2.10.



Слика 2.11.

У Поглављу 2.3. показано је да интензитет вектора електричног поља усамљеног тачкастог оптерећења опада са квадратом растојања од оптерећења. Посматрајмо слику 2.11. На њој је приказан део спектра поља тачкастог оптерећења, као и две једнаке површине које се налазе на различитом растојању од тачкастог оптерећења. Очигледно је да даљу површину продире мањи број линија поља (једна) него што продире ближу површину (три). Како је интензитет вектора јачине електричног поља усамљеног тачкастог оптерећења обрнуто пропорционалан квадрату растојања, јасно је да је на даљој површини (продире је једна линија поља - мања густина линија поља) поље мање него на ближој површини (продиру је три линије поља - већа густина линија поља).

2.7. Питања за проверу

2.7.1. Од чега зависи сила између два тачкаста наелектрисања?

2.7.2. Написати израз за интензитет силе између два тачкаста наелектрисања.

2.7.3. Написати Кулонов закон у векторском облику.

2.7.4. У којој средини је сила између два наелектрисања највећа?

2.7.5. Два тачкаста наелектрисања, $Q_1 = 2\,\text{pC}$ и $Q_2 = -3\,\text{pC}$, налазе се на међусобном растојању $d = 30\,\text{cm}$ у вакууму. Каква и колика је сила између њих?

2.7.6. Колика ће бити сила између наелектрисања из претходног примера уколико се она налазе у диелектрику релативне диелектричне константе $\varepsilon_r = 2$.

2.7.7. Шта је електростатичко поље?

2.7.8. Како се дефинише вектор јачине електричног (електростатичког) поља?

2.7.9. Шта су линије поља, а шта спектар поља?

2.7.10. Које се информације о вектору јачине електричног поља могу добити на основу спектра поља?

2.7.11. Скицирати спектар хомогеног електричног поља.

2.7.12. Написати израз за вектор јачине електричног поља тачкастог наелектрисања.

2.7.13. Како је оријентисан вектор јачине електричног поља у случају позитивног, а како у случају негативног наелектрисања.

2.7.14. Скицирати спектар поља усамљеног тачкастог наелектрисања (позитивног и негативног) као и спектар поља два наелектрисања исте вредности супротног знака. Шта се може уочити? Где почињу а где се завршавају линије поља?

2.7.15. Израчунати интензитет вектора јачине електричног поља на растојању $d = 20\,\mathrm{cm}$ *од усамљеног тачкастог наелектрисања* $Q = -4\,\mathrm{pC}$ *које се налази у вакууму.*

2.7.16. Решити претходни пример за случај да се наелектрисање налази у диелектрику релативне диелектричне константе $\varepsilon_r = 2.5$.

2.7.17. На растојању $d = 1\,\mathrm{m}$ *од тачкастог наелектрисања интензитет вектора јачине електричног поља је* $E = 50\,\mathrm{mV/m}$. *Израчунати интензитет вектора јачине електричног поља на растојању* $d_1 = 5\,\mathrm{cm}$ *од наелектрисања.*

2.7.18. Ако се наелектрисање из претходног примера налази у диелектрику релативне диелектричне константе ε_r *поље на растојању* $d = 1\,\mathrm{m}$ *имаће интензитет* $E = 10\,\mathrm{mV/m}$. *Израчунати релативну диелектричну константу.*

2.7.19. У електростатичком пољу интензитета $E = 200\,\mathrm{V/m}$ *налази се тачкасто наелектрисање* $Q = -5\,\mathrm{pC}$. *Систем се налази у вакууму. Израчунати интензитет силе на наелектрисање.*

2.7.20. Колика ће бити сила на наелектрисање уколико се систем из претходног примера налази у диелектрику релативне диелектричне константе $\varepsilon_r = 3.6$.

3. Електростатички потенцијал

Електростатичко поље је векторско поље и у свакој тачки простора дефинисано је својим интензитетом, правцем и смером. У Декартовом правоуглом координатном систему може се приказати преко својих нормалних (ортогоналних) компоненти као

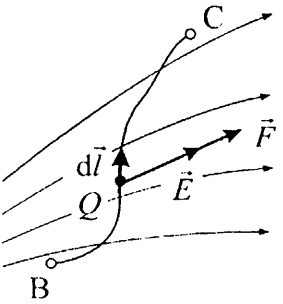
$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\hat{x} + E_y(x,y,z)\hat{y} + E_z(x,y,z)\hat{z}\,.$$

То значи да је за описивање електростатичког поља неопходно познавати три скаларне функције: $E_x(x,y,z)$, $E_y(x,y,z)$ и $E_z(x,y,z)$. Међутим, како је електростатичко поље (као и гравитационо поље) конзервативног карактера (конзервативна поља - поља код којих је рад сила поља по затвореној путањи једнак нули) могуће је увести једну нову, скаларну, функцију, *електростатички потенцијал* или *електрични скалар-потенцијал*, која *на потпуно равноправан начин описује електрично поље* као и функција вектора јачине електричног поља. Функција електростатичког потенцијала (касније ћемо је, због краткоће, називати само функцијом потенцијала или потенцијалом) може се добити из функције јачине вектора електричног поља и обрнуто.

3.1. Рад при померању оптерећења у пољу; конзервативни карактер поља

Нека се у електростатичком пољу (у најопштијем случају нехомогеном) по произвољној путањи од тачке B до тачке C креће наелектрисање Q (слика 3.1). На сваком елементу пута $d\vec{l}$ (оријентисаном у смеру кретања наелектрисања) на наелектрисање ће деловати сила

$$\vec{F} = Q\vec{E}\,,$$



Слика 3.1.

при чему се интензитет силе и угао између елемента пута и вектора силе могу мењати. Еле-

ментарни рад који изврше силе поља на диференцијално малом путу $\mathrm{d}\vec{l}$ биће такође диференцијално мали,

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = Q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = QE\,\mathrm{d}l\cos\measuredangle\left(\vec{E},\mathrm{d}\vec{l}\right).$$

За елементарни рад се може добити позитивна, односно негативна вредност, што зависи од угла између вектора силе и пута. Уколико је тај угао између $-\pi/2$ и $\pi/2$ наелектрисање се креће под дејством сила поља, па се за рад добија позитивна вредност. Негативна вредност се добија у случају када се наелектрисање креће противу сила поља (под дејством неких других сила), односно када је угао између вектора силе и пута између $\pi/2$ и $3\pi/2$.

Укупан рад који изврше силе поља при пребацивању наелектрисања Q од тачке B до тачке C биће једнак бесконачном збиру бесконачно малих величина (интегралу),

$$A = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathrm{d}A = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} Q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

(интеграл по некој оријентисаној путањи назива се линијски интеграл).

Јасно је да ће се за рад добити позитивна вредност уколико се наелектрисање креће под дејством сила поља, односно негативна уколико се креће противу сила поља. У конкретном случају (слика 3.1), уколико је наелектрисање позитивно, за рад од тачке B до тачке C би се добила позитивна вредност, док би се за рад од тачке C до тачке B добила негативна вредност. Значи, за $A > 0$ силе поља врше рад, док се за $A < 0$ рад врши противу сила поља.

Под појмом конзервативног поља подразумева се поље код кога је рад сила поља по затвореној путањи једнак нули.

Да је електростатичко поље конзервативно лако се доказује помоћу закона о одржању рада и енергије. Нека се у електростатичком пољу (које је последица неког распореда наелектрисаних тела за чије је наелектрисавање уложен одређени рад) по затвореној путањи C (чији се смер може произвољно одабрати) креће наелектрисање Q. Рад сила поља за један обилазак путање може бити позитиван (за један смер кретања), негативан (за други смер кретања) или једнак нули. Како можемо произвољно одабрати смер кретања, одаберимо онај за који је рад сила поља позитиван. Пошто наелектрисање ту путању може обићи неограничено велики број пута, значи да се може добити неограничено велики рад из једног електростатичког система, што је у супротности са законом о одржању рада и енергије. Наиме, кретањем наелектрисања Q не

могу се променити наелектрисања која стварају поље, а самим тим ни енергија система. Према томе, једини закључак је да тај рад мора бити једнак нули, што значи да електростатичко поље има конзервативни карактер. Ово се може исказати једначином

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_C Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,$$

односно,

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.}$$

Кружић на ознаци за интеграл значи да се ради о линијском интегралу по затвореној путањи (контури) који се назива још и циркулација. Последњи израз исказује конзервативни карактер електростатичког поља и један је од основних закона електростатике:

циркулација (линијски интеграл по затвореној путањи) вектора електростатичког поља по произвољној контури једнака је нули.

Једна од веома важних последица конзервативног карактера електростатичког поља је да

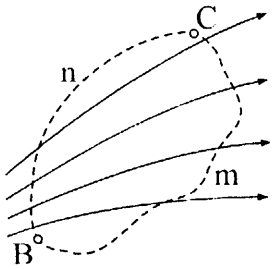
рад сила поља при померању наелектрисања између две тачке у пољу не зависи од облика путање по којој се наелектрисање помера, већ само од положаја тих тачака.

Посматрајмо слику 3.2. и уочимо између тачака B и C у електросатичком пољу две различите путање, путању m и путању n. Ове две путање формирају једну затворену путању (контуру), B– m– C– n– B, по којој рад сила поља мора бити једнак нули. Како се сваки интеграл по затвореној путањи може раставити на збир два интеграла (један од B путањом m до C и други од C путањом n до B), може се писати

$$A = \oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{Bm}^{C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{Cn}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,$$

одакле следи

$$\int_{Bm}^{C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{Cn}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$



Слика 3.2.

Као што је познато, променом граница интеграције одређеног интеграла мења се његов знак,

$$-\int_{Cn}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{Bn}^{C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

тако да се коначно добија

$$\int_{Bm}^{C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{Bn}^{C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,,$$

чиме је доказана тврдња да рад сила поља не зависи од тога да ли интеграцију између тачака B и C вршимо дуж путање m или дуж путање n.

Деобом последње једначине са Q добија се

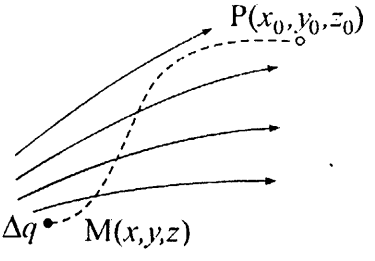
$$\int_{Bm}^{C} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{Bn}^{C} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,,$$

односно да

линијски интеграл вектора електростатичког поља између две тачке у пољу не зависи од облика путање интеграције већ само од положаја тих тачака.

3.2. Електростатички потенцијал

Нека је у електростатичком пољу задата једна фиксна (назваћемо је референтна) тачка P са координатама x_0, y_0 и z_0, $P(x_0,y_0,z_0)$, и нека се у произвољној тачки $M(x,y,z)$ налази тачкасто оптерећење Δq (слика 3.3). Ако се по произвољној путањи оптерећење Δq пребаци из тачке M у тачку P извршиће се рад



Слика 3.3.

$$A = \int_{M}^{P} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Delta q \int_{M}^{P} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Овај рад је, сходно закону о одржању рада и енергије, једнак потенцијалној енергији коју наелектрисање Δq у тачки M има у односу на тачку P,

$$W_{pot} = A = \Delta q \int_{M}^{P} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Значи да потенцијална енергија оптерећења Δq у тачки M у односу на референтну тачку P зависи од положаја тачака M и P у пољу, конфигурације електричног поља и наелектрисања Δq. Ако обе стране последње једначине поделимо са Δq,

$$\frac{W_{\text{pot}}}{\Delta q} = \int_{\text{M}}^{\text{P}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,,$$

добићемо величину независну од Δq, односно једну функцију која зависи само од положаја тачака M и P и конфигурације електростатичког поља у коме се те тачке налазе. Ова функција се назива *функција електростатичког потенцијала или функција електричног скалар потенцијала* и обележава са φ. Значи:

> ***Потенцијал било које тачке*** M ***у електростатичком пољу у односу на референтну тачку*** P ***једнак је линијском интегралу вектора електростатичког поља од тачке*** M ***до референтне тачке*** P,
>
> $$\varphi = \int_{\text{M}}^{\text{P}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Референтна тачка нултог потенцијала може се изабрати и у бесконачности, па је, у том случају, функција потенцијала

$$\varphi = \int_{\text{M}}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Уколико се посебно не нагласи, сматра се да је референтна тачка у бесконачности. Очигледно је да је потенцијал референтне тачке једнак нули па се она назива још и референтном тачком нултог потенцијала.

Потенцијал је физичка величина чија је јединица $\varphi_{\text{u}} = \text{V}$ (Волт). Одавде се за јединицу вектора јачине електричног поља добија

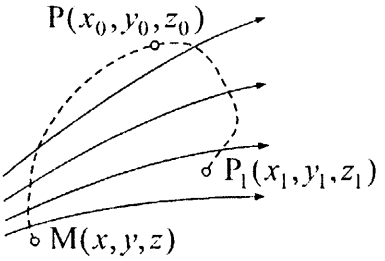
$$E_{\text{u}} = \varphi_{\text{u}}/l_{\text{u}} = \text{V/m}\,,$$

што смо већ поменули код увођења појма електричног поља.

Једна од веома важних карактеристика функције потенцијала је да се она, рачуната у односу на две различите референтне тачке, разликује за константу. Посматрајмо слику 3.4. Нека су дате две референтне тачке нултог потенцијала: $\text{P}(x_0, y_0, z_0)$ и $\text{P}_1(x_1, y_1, z_1)$. Потенцијал произвољне тачке $\text{M}(x, y, z)$ рачунат у односу на референтну тачку P је

$$\varphi = \int_{\text{M}}^{\text{P}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,,$$

док је у односу на референтну тачку P_1



Слика 3.4.

$$\varphi_1 = \int_M^{P_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Како вредност линијског интеграла поља не зависи од путање интеграције, то ћемо интеграцију од тачке M до тачке P_1 извршити по путањи $M-P-P_1$,

$$\varphi_1 = \int_M^{P_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_M^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi + \mathrm{const},$$

јер, како тачке P и P_1 имају фиксне координате, то ће интеграл вектора јачине електричног поља између њих бити константа.

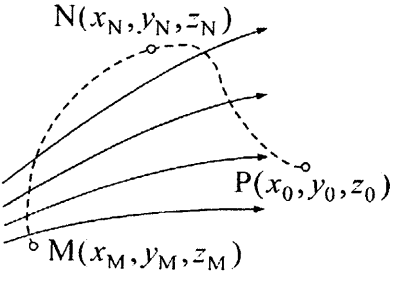
3.3. Потенцијална разлика између две тачке; напон; рад при померању наелектрисања у пољу

Посматрајмо две тачке у електростатичком пољу (слика 3.5), тачке $M(x_M, y_M, z_M)$ и $N(x_N, y_N, z_N)$, и нека је задата референтна тачка нултог потенцијала $P(x_0, y_0, z_0)$. Потенцијал тачке M у односу на референтну тачку је

$$\varphi_M = \int_M^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,,$$

док је потенцијал тачке N

$$\varphi_N = \int_N^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$



Слика 3.5.

Разлика потенцијала између ових двеју тачака назива се потенцијалном разликом или напоном (U_{MN}) између њих. Означава се са два индекса, при чему први индекс означава тачку вишег потенцијала. Значи,

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \int_M^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_N^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Ако се у другом интегралу са десне стране промене границе интеграције промениће се његов знак, тако да се добија

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \int_M^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_P^{N} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_M^{N} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Потенцијална разлика (напон) између две тачке једнака је линијском интегралу поља између тих двеју тачака и не зависи од путање интеграције и избора референтне тачке.

Очигледно је да је јединица за напон иста као и јединица за потенцијал, $U_{\text{u}} = \text{V}$.

У електростатичком пољу на оптерећење Q делује сила

$$\vec{F} = Q\vec{E}.$$

При померању наелектрисања између тачака M и N (наелектрисање се може померати под дејством сила електростатичког поља или противу њих) извршиће се рад

$$A = \int_{\text{M}}^{\text{N}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\text{M}}^{\text{N}} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{\text{M}}^{\text{N}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q(\varphi_{\text{M}} - \varphi_{\text{N}}) = QU_{\text{MN}}.$$

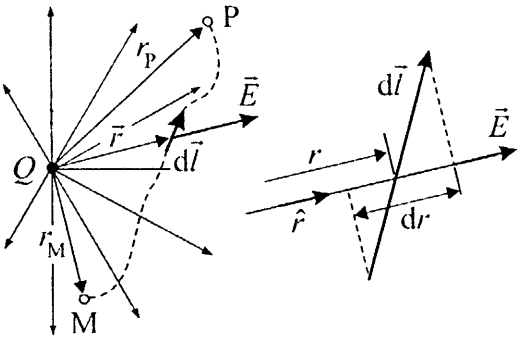
Значи, ***рад се израчунава као производ наелектрисања и потенцијалне разлике (напона) између тачака између којих се наелектрисање креће.*** Уколико се за рад добије позитивна вредност значи да рад врше силе поља. За $A < 0$ рад се врши противу сила поља.

3.4. Потенцијал тачкастог оптерећења у хомогеном диелектрику

Посматраћемо усамљено тачкасто оптерећење Q (рецимо $Q > 0$, што није од утицаја на разматрање) у хомогеној средини диелектричне константе ε. Линије поља су радијалне и оријентисане су од наелектрисања. Потенцијал тачке M, која се налази на растојању r_{M} од наелектрисања, у односу на референтну тачку P, која се налази на растојању r_{P} од наелектрисања, по дефиницији је

$$\varphi_{\text{M}} = \int_{\text{M}}^{\text{P}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\text{M}}^{\text{P}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

где се путања по којој се врши интеграција може слободно бирати (слика 3.6.а).



а. б.

Слика 3.6.

Угао између било ког елемента пута $\mathrm{d}\vec{l}$ и његовог јединичног вектора положаја $\hat{r}$ у односу на наелектрисање Q може се мењати од тачке до тачке дуж путање интеграције. Одредимо најпре вредност скаларног производа $\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ (детаљ са слике 3.6.а. увеличан на слици 3.6.б). Како је

$$\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l\cos\measuredangle\left(\hat{r},\mathrm{d}\vec{l}\right) = \text{projekcija } \mathrm{d}\vec{l} \text{ na pravac } \hat{r} = \mathrm{d}r,$$

($\mathrm{d}r$ је прираштај растојања r од оптрећења Q дуж елемента пута $\mathrm{d}\vec{l}$), то се израз за потенцијал тачке М у односу на тачку Р своди на

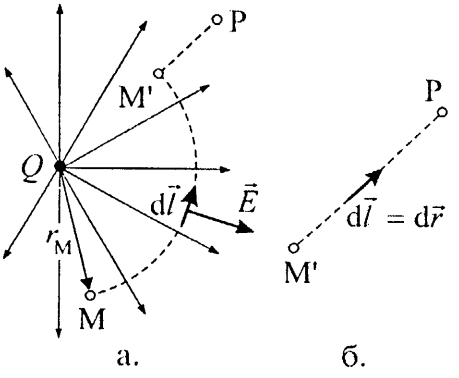
$$\varphi_{\mathrm{M}} = \int_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{P}}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{P}}}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right) = \mathrm{k}Q\left(\frac{1}{r_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right).$$

Пошто тачка М може имати било које координате, индекс М се може изоставити, па је функција потенцијала

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right) = \mathrm{k}Q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right).}$$

У односу на референтну тачку у бесконачности (када год се посебно не нагласи положај референтне тачке сматра се да је она у бесконачности, $r_{\mathrm{P}} \to \infty$) функција потенцијала има облик

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} = \mathrm{k}\frac{Q}{r}.}$$



Слика 3.7.

До израза за потенцијал може се доћи и на једноставнији начин погодним избором путање интеграције (слика 3.7.а):

$$\varphi_{\mathrm{M}} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M'}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_{\mathrm{M'}}^{\mathrm{P}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}.$$

Интеграл од М до М' по луку полупречника r_{M} једнак је нули (то значи да су те две тачке на истом потенцијалу) јер су у свакој тачки вектори $\vec{E}$ и $\mathrm{d}\vec{l}$ међусобно управни. Други интеграл се лако израчунава јер је у свакој тачки путање од М' до Р (интеграли се по линији поља - слика 3.7.б.) $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$, па је

$$\varphi_{\mathrm{M}} = \int_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{P}}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{P}}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{P}}}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right) = \mathrm{k}Q\left(\frac{1}{r_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right).$$

На основу овога је очигледно да при одређивању функције потенцијала треба водити рачуна о избору путање интеграције. Најпогодније је да дуж целе путање вектори $\vec{E}$ и $\mathrm{d}\vec{l}$ буду колинеарни или, пак, да на једном делу путање буду колинеарни а на другом међусобно нормални. Ово ће бити јасније када буде обрађен појам еквипотенцијалних површина.

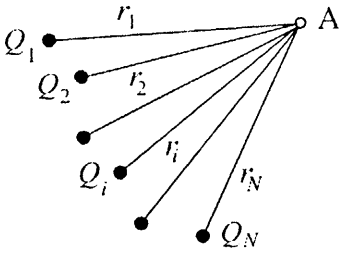
Изузетно је важно уочити и да је израз за функцију потенцијала изведен са изразом за вектор (а не интензитет) јачине електричног поља, што значи да *у израз за потенцијал наелектрисања треба уносити са њиховим алгебарским предзнаком.*

3.5. Потенцијал система тачкастих оптерећења у хомогеном диелектрику

У хомогеном диелектрику, диелектричне константе ε, задат је систем од N тачкастих оптерећења $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots, Q_N$. Треба одредити потенцијал тачке А чија су растојања од појединих наелектрисања система $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_N$, респективно (слика 3.8).

Како је резултантно поље $\vec{E}$ у свакој тачки једнако векторском збиру поља појединих наелектрисања, то је потенцијал тачке А у односу на референтну тачку Р,

$$\varphi = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$



Слика 3.8.

С друге стране је

$$\varphi_i = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

потенцијал који у тачки А у односу на референтну тачку Р ствара наелектрисање Q_i, па одатле следи:

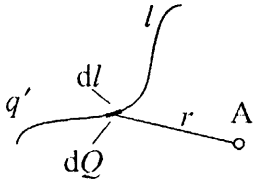
> ***потенцијал система тачкастих наелектрисања једнак је алгебарском збиру потенцијала појединих наелектрисања,***
>
> $$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\,.$$

Треба напоменути да последњи израз важи и у случају да се наелектрисања налазе у нехомогеном диелектрику.

У хомогеном диелектрику, диелектричне константе ε, потенцијал система тачкастих наелектрисања у односу на референтну тачку у бесконачности може се рачунати као

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i} = \mathrm{k} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i}.$$

Ако би наелектрисање било распоређено на некој линеичној структури (слика 3.9), са познатом подужном густином q', можемо га поделити на елементарна наелектрисања $\mathrm{d}Q = q'\,\mathrm{d}l$. Свако од ових наелектрисања ствара у тачки A потенцијал



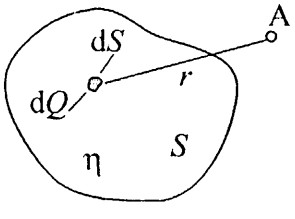
Слика 3.9.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{q'\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon r},$$

тако да је потенцијал тачке A у односу на референтну тачку у бесконачности

$$\varphi = \int_l \mathrm{d}\varphi = \int_l \frac{q'\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \frac{q'\,\mathrm{d}l}{r}.$$

У случају површинске расподеле наелектрисања (слика 3.10), познате површинске густине η, сваки елемент површине $\mathrm{d}S$ оптерећен је количином електрицитета $\mathrm{d}Q = \eta\,\mathrm{d}S$ и у тачки A ствара потенцијал



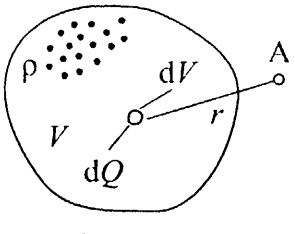
Слика 3.10.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{\eta\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon r},$$

тако да је потенцијал тачке A у односу на референтну тачку у бесконачности

$$\varphi = \int_S \mathrm{d}\varphi = \int_S \frac{\eta\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \frac{\eta\,\mathrm{d}S}{r}.$$

Коначно, када се ради о запремински расподељеном наелектрисању (слика 3.11), сваки елемент запремине оптерећен је наелектрисањем $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V$ тако да у тачки A ствара потенцијал



Слика 3.11.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon r}.$$

Укупан потенцијал тачке A у односу на референтну тачку у бесконачности је

$$\varphi = \int_V \mathrm{d}\varphi = \int_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r}.$$

3.6. Еквипотенцијалне површине

Површине које у свакој тачки имају исти потенцијал,

$$\varphi = \text{const},$$

називају се еквипотенцијалним површинама.

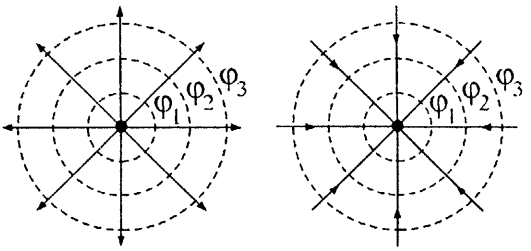
Посматрајмо најпре случај тачкастог оптерећења које се налази у хомогеном диелектрику. У случају да се референтна тачка нултог потенцијала налази у бесконачности, из израза за потенцијал,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} = k\frac{Q}{r},$$

следи да је једначина еквипотенцијалних површина

$$r = \text{const},$$

односно једначина сфере. Значи, еквипотенцијалне површине су концентричне сфере са центром на месту где се налази наелектрисање (у пресеку су то еквипотенцијалне линије - концентричне кружнице). На сликама 3.12.а. и б. приказане су (у пресеку) еквипотенцијалне површине за случај позитивног, односно негативног наелектрисања.



$Q > 0, \varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$ а. $Q < 0, \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ б.

Слика 3.12.

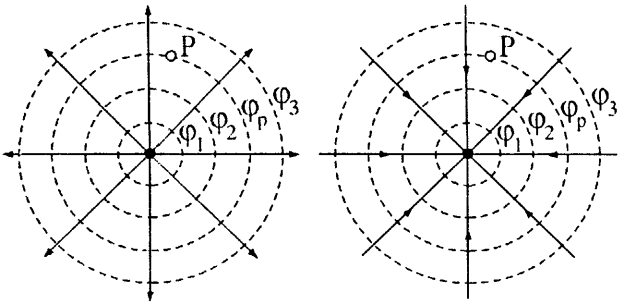
Ако се референтна тачка нултог потенцијала налази на растојању r_P од оптерећења функција потенцијала има облик

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_P}\right),$$

па је једначина еквипотенцијалних површина и у овом случају

$$r = \text{const}.$$

То су, такође, концентричне сфере чији је центар на месту где се налази оптерећење. Еквипотенцијалне површине



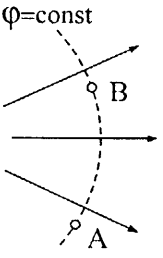
$Q > 0, \varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_P = 0 > \varphi_3$ а. $Q < 0, \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_P = 0 < \varphi_3$ б.

Слика 3.13.

(у пресеку еквипотенцијалне линије), за случај да се референтна тачка нултог потенцијала P налази на растојању r_p приказане су на слици 3.13.

Из саме дефиниције еквипотенцијалних површина могу се извести следећи закључци:

- Како су све тачке еквипотенцијалне површине на истом потенцијалу, то је рад сила поља при померању оптерећења Δq између било које две тачке (A и B) једне еквипотенцијалне површине (слика 3.14) једнак нули,



Слика 3.14.

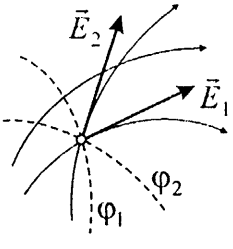
$$A = \Delta q(\varphi_A - \varphi_B) = 0.$$

- Како је рад сила поља при померању оптерећења Δq између тачака A и B једне еквипотенцијалне површине једнак нули,

$$A = \Delta q \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,$$

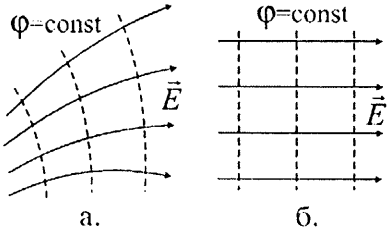
и како пут између тачака A и B може бити по вољи мали (па и $\mathrm{d}\vec{l}$), то ће горњи услов бити испуњен само уколико је $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$, односно ако су вектори јачине електричног поља и елемента пута на еквипотенцијалној површини међусобно нормални. Значи,

линије поља и еквипотенцијалне површине су међусобно нормалне.



Слика 3.15.

Еквипотенцијалне површине се, као и линије поља, не могу сећи. Наиме, уколико би се секле (слика 3.15) то би значило да у тачки пресека једновремено постоје две различите вредности потенцијала. Такође би у тој тачки постојале и две различите вредности вектора јачине поља (јер је вектор јачине поља нормалан на еквипотенцијалну површину). Јасно је да је ово физички немогуће.



Слика 3.16.

Све напред наведене особине еквипотенцијалних површина важе за било какву конфигурацију поља. На слици 3.16. приказани су спектри нехомогеног (а) и хомогеног (б) електричног поља, као и одговарајуће еквипотенцијалне површине у попречном пресеку.

3.7. Одређивање вектора јачине електричног поља из познате функције потенцијала

Већ смо раније напоменули да је вектор јачине електричног поља векторска функција,

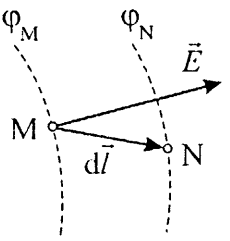
$$\vec{E} = E_x(x,y,z)\hat{x} + E_y(x,y,z)\hat{y} + E_z(x,y,z)\hat{z},$$

док је функција потенцијала скаларна, $\varphi(x,y,z)$. Такође је речено да обе ове функције равноправно описују електрично поље и да се из једне може одредити друга и обрнуто. Функција потенцијала се одређује, по дефиницији, као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од посматране тачке у пољу до унапред изабране референтне тачке нултог потенцијала,

$$\varphi = \int_{M}^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Да видимо сада како се из познате функције потенцијала може одредити функција вектора јачине електричног поља.

Нека су у електричном пољу $\vec{E}$ (слика 3.17) задате две веома блиске еквипотенцијалне површине, φ_M и $\varphi_N = \varphi_M + \mathrm{d}\varphi$, и на њима тачке M и N. Нека је $\mathrm{d}\vec{l}$ вектор положаја тачке N у односу на тачку M. Разлика потенцијала између тачака M и N је



Слика 3.17.

$$\varphi_M - \varphi_N = \int_{M}^{N} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

(јер је целокупна путања интеграције између тачака M и N управо $\mathrm{d}\vec{l}$). Како је

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E\,\mathrm{d}l \cos\measuredangle\left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}\right) = \left(\text{projekcija } \vec{E} \text{ na pravac } \mathrm{d}\vec{l}\right) \cdot \mathrm{d}l = E_l\,\mathrm{d}l,$$

где је E_l - l компонента вектора $\vec{E}$ (пројекција вектора на неки правац је компонента вектора у том правцу), и како је

$$\varphi_M - \varphi_N = \varphi_M - (\varphi_M + \mathrm{d}\varphi) = -\mathrm{d}\varphi,$$

то из

$$-\mathrm{d}\varphi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_l\,\mathrm{d}l$$

следи да је l компонента вектора $\vec{E}$

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}.$$

Према томе, компонента вектора електичног поља у неком правцу (пројекција вектора поља на тај правац) једнака је негативном изводу функције потенцијала по том правцу.

Оно што важи за било који правац l важиће и за правце координатних оса,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

где су $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial z$ парцијални изводи* функције више променљивих $\varphi(x,y,z)$ по променљивим x, y и z.

Након одређивања свих компоненти вектора јачине електричног поља може се одредити и његова векторска функција,

$$\vec{E}(x,y,z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}\right).$$

Уобичајено је да се последњи израз пише у облику

$$\vec{E}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\varphi,$$

где је израз у загради један математички оператор који се назива градијент и означава са grad,

$$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z},$$

тако да се коначно може писати

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.}$$

---

* *Парцијални извод, рецимо по променљивој x, дефинише се као*

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x},$$

што значи да при одређивању парцијалног извода по x треба y и z сматрати константама. На пример, парцијални изводи функције

$$f(x,y,z) = 3xy^2 + xz - \cos y$$

по појединим променљивим су

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 + z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + \sin y \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x.$$

Значи

функција вектора јачине електричног поља је негативни градијент (деградијент) функције потенцијала.

Вектор јачине електричног поља у свакој тачки оријентисан је у правцу и смеру најбржег опадања функције потенцијала. Ово се лепо може уочити на слици 3.12. на којој су скициране линије поља и еквипотенцијалне површине (у пресеку) усамљеног тачкастог оптерећења.

3.8. Питања за проверу

3.8.1. Како се израчунава рад сила електростатичког поља при померању наелектрисања између две тачке у пољу?

3.8.2. Показати да електростатичко поље има конзервативни карактер.

3.8.3. Која је последица конзервативног карактера поља?

3.8.4. Колика је циркулација (линијски интеграл по затвореној путањи) вектора електростатичког поља по произвољној контури?

3.8.5. Како се дефинише функција потенцијала?

3.8.6. За колико се разликује функција потенцијала одређена у односу на две различите референтне тачке?

3.8.7. Како се израчунава напон (потенцијална разлика) између две тачке у пољу и да ли зависи од избора референтне тачке?

3.8.8. Написати израз за израчунавање рада при померању наелектрисања Q између тачака A и B (чији су потенцијали познати) у електростатичком пољу

3.8.9. Наелектрисање $Q = 10\,\mathrm{pC}$ креће се у електростатичком пољу између тачака A и B чији су потенцијали $\varphi_A = -10\,\mathrm{V}$ и $\varphi_B = 20\,\mathrm{V}$. Израчунати рад при овом померању. Ко врши рад?

3.8.10. Извести израз за потенцијал усамљеног тачкастог оптерећења у односу на референтну тачку у бесконачности вршећи интеграцију по произвољној путањи и по линији поља. Шта је лакше?

3.8.11. Тачкасто оптерећење $Q = -6\,\mathrm{pC}$ налази се у вакууму. Одредити потенцијал на растојању $a = 0.3\,\mathrm{m}$. Референтна тачка нултог потенцијала је у бесконачности.

3.8.12. Урадити претходни пример за случај да се оптерећење налази у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\varepsilon_r = 2$.

3.8.13. Тачкасто оптерећење $Q = 2\,\mathrm{pC}$ *налази се у вакууму. Израчунати потенцијал на растојању* $d = 0.5\,\mathrm{m}$ *за случај да је референтна тачка нултог потенцијала на растојању: а.* $r_P = 0.3\,\mathrm{m}$ *и б.* $r_P = 1\,\mathrm{m}$.

3.8.14. Како се одређује потенцијал система тачкастих оптерећења?

3.8.15. Три идентична тачкаста наелектрисања, $Q = 10\,\mathrm{pC}$, *налазе се у вакууму, у теменима једнакостраног троугла странице* $a = 0.1\,\mathrm{m}$. *Израчунати потенцијал у центру троугла и тачке на половини једне од страница. Колики је напон између ових тачака.*

3.8.16. Систем из претходног задатка налази се у диелектрику релативне диелектричне константе $\varepsilon_r = 2$. *Колики ће бити напон између центра троугла и тачке на половини једне од страница.*

3.8.17. Како се одређује потенцијал подужно, површински и запремински расподељених оптерећења?

3.8.18. Шта су то еквипотенцијалне површине?

3.8.19. Колики рад се изврши при померању оптерећења Q *између две тачке на еквипотенцијалној површини?*

3.8.20. Какав је међусобни положај еквипотенцијалних површина и линија поља?

3.8.21. Да ли се еквипотенцијалне површине могу сећи? Образложити одговор.

3.8.22. Шта су еквипотенцијалне површине у случају усамљеног тачкастог оптерећења?

3.8.23. Шта су еквипотенцијалне површине у хомогеном електростатичком пољу?

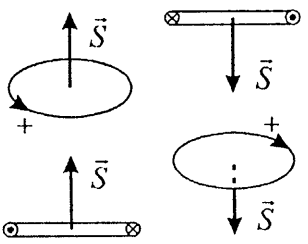
3.8.24. Како се из познате функције потенцијала одређује функција вектора јачине електричног поља?

4. Гаусов закон

Гаусов закон је један од основних закона електростатичких поља и важи само у вакууму. Може се, практично без икаквих ограничења, примењивати и у ваздуху јер су електричне карактеристике ваздуха приближно једнаке карактеристикама вакуума ($\varepsilon \approx \varepsilon_0$). Његова важност није ограничена распоредом и величином наелектрисања, али је за одређивање електричног поља погодан само у случајевима где постоји високи степен симетрије.

4.1. Вектор површине

У техници је површина векторска величина. Вектор равне површине $\vec{S}$ је вектор чији је интензитет једнак вредности површине S, правац му је правац нормале на површину а смер се одређује по правилу десне завојнице у односу на позитивну оријентацију контуре на коју се та површина ослања (слика 4.1). Уколико није задата позитивна оријентација контуре (а самим тим и површине) она се може слободно бирати. У електромагнетизму, уколико је задата струја кроз контуру, позитивна оријентација контуре одређена је смером струје.

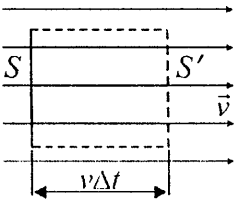


Слика 4.1.

4.2. Флукс вектора

Флукс вектора поља (било ког) је једна од веома важних карактеристика векторских поља. Појам флукса је у Физику дошао из хидродинамике.

Посматрајмо хомогено брзинско поље $\vec{v}$ течности која струји. Линије поља, струјнице, су паралелне и еквидистантне (слика 4.2). Одредимо колика ће количина течности за време Δt протећи кроз површину



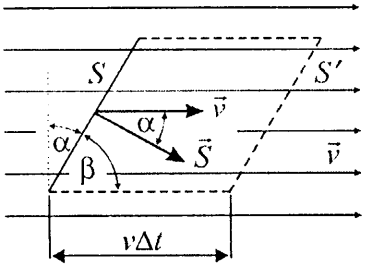
Слика 4.2.

S управну на линије поља (вектор брзине). Све честице течности, које се у тренутку $t = 0$ налазе на површини S за време Δt ће прећи пут $v\Delta t$ и стићи до површине S'. Наравно, за то време честице које се налазе пре површине S проћи ће кроз њу и стићи у запремину $Sv\Delta t$. Значи, количина течности која за време Δt протекне кроз површину S биће једнака запремини $Sv\Delta t$.

Ако последњи израз поделимо са Δt добићемо проток течности кроз површину S у јединици времена. То називамо флуксом вектора брзине $\vec{v}$ кроз површину S и означавамо са Ψ_v,

$$\Psi_v = Sv.$$

Како је интензитет поља пропорционалан густини линија поља, јасно је и да је *вредност флукса кроз неку површину пропорционална броју линија поља које продиру ту површину.*



Слика 4.3.

Одредићемо сада флукс вектора $\vec{v}$ кроз површину S која није управна на линије поља већ са њима заклапа неки угао β (слика 4.3). Количина течности која ће протећи кроз површину S за време Δt је количина течности у косој призми запремине $Sv\Delta t \sin\beta$ тако да се, након дељења са Δt, за флукс вектора брзине добија

$$\Psi_v = Sv\sin\beta = Sv\cos\alpha$$

(β и α су углови са нормалним крацима). Како је α угао између вектора $\vec{v}$ и $\vec{S}$, последњи израз се може писати у облику

$$\Psi_v = vS\cos\measuredangle\left(\vec{v},\vec{S}\right) = \vec{v}\cdot\vec{S}.$$

Значи: *у хомогеном пољу флукс вектора поља кроз равну површину израчунава се као скаларни производ вектора поља и вектора површине.*

Наравно, пошто се оријентација контуре на коју се површина ослања може слободно бирати, вектор површине може имати два различита смера, а самим тим и флукс вектора поља (који је скаларна величина) два различита знака. За смерове вектора поља и вектора површине са слике 4.3. флукс је позитиван. Уколико би површина била супротно оријентисана флукс би био негативан.

У случају када поље није хомогено и (или) површина није равна одређивање флукса постаје сложеније. Поделичемо целу површину S на

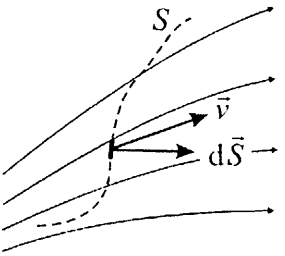
елементе $\mathrm{d}S$ чији су вектори површине $\mathrm{d}\vec{S}$ (слика 4.4). Како је на елементарној површини $\mathrm{d}S$ вектор поља $\vec{v}$ константан, флукс кроз ту површину је, на основу претходног излагања,

$$\mathrm{d}\Psi_v = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

Укупан флукс кроз целу површину S једнак је бесконачном збиру бесконачно малих величина,

$$\Psi_v = \int_S \mathrm{d}\Psi_v = \int_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

Из овог израза лако се може добити раније изведен израз за флукс кроз равну површину у хомогеном пољу.



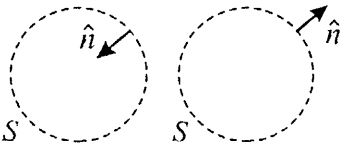
Слика 4.4.

Све што је речено за флукс вектора брзине течности која струји остаје у потпуној важности за флукс било ког другог вектора, па и *флукс вектора јачине електричног поља $\vec{E}$ кроз било коју површину $\vec{S}$*,

$$\boxed{\Psi_E = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.}$$

Међутим, у електростатици се веома често одређује флукс кроз затворену површину. Како затворена површина нема контуру на коју се ослања (покушајте да уочите на коју се контуру ослања површина коцке, сфере или било које друге затворене површине) не може се говорити о смеру вектора површине $\vec{S}$. Стога се ту користе појмови улазне (слика 4.5.а) и излазне (слика 4.5.б) јединичне нормале, тако да се *флукс вектора јачине електричног поља кроз затворену површину*,

$$\boxed{\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$



а. б.
Слика 4.5.

(кружић на ознаци за интеграл значи да се ради о интегралу по затвореној површини - флуксу кроз затворену површину S), *може рачунати у смеру улазне (улазни флукс) или излазне (излазни флукс) нормале.* Ова два флукса су иста по апсолутној вредности али супротна по знаку. У електротехници се ради искључиво са флусом у смеру излазне нормале - излазним флуксом.

4.3. Гаусов закон

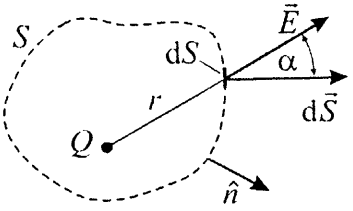
Као што смо напоменули,

Гаусов закон важи само за електростатичка поља у вакууму

али се са задовољавајућом тачношћу може користити и у ваздуху чије су електричне карактеристике приближно исте као и карактеристике вакуума. Има општу важност, без обзира на распоред наелектрисања која стварају електрично поље.

Уочимо тачкасто наелектрисање Q (рецимо $Q > 0$) и обухватимо га једном произвољном затвореном површином S (слика 4.6). Укупни излазни флукс вектора електричног поља кроз ову затворену површину биће, по дефиницији,

$$\Psi_E = \oint_S \mathrm{d}\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$



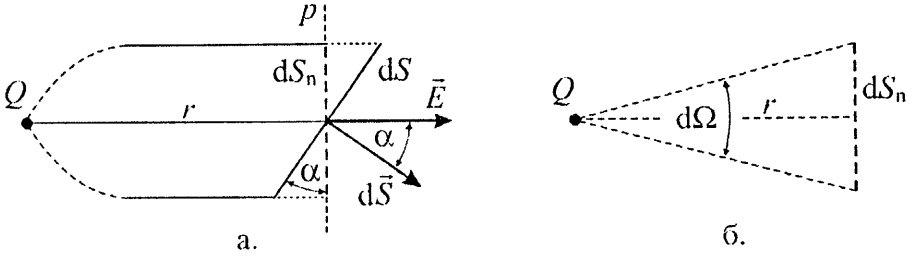
Слика 4.6.

Одредимо најпре флукс $\mathrm{d}\Psi_E$ кроз елементарну површину $\mathrm{d}S$. Вектор јачине електричног поља тачкастог наелектрисања већ је раније одређен,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},$$

тако да је

$$\mathrm{d}\Psi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\angle\left(\hat{r},\mathrm{d}\vec{S}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\alpha.$$



Слика 4.7.

Увеличајмо детаљ са слике 4.6. на коме се налази површина $\mathrm{d}S$ кроз коју рачунамо флукс $\mathrm{d}\Psi_E$ (слика 4.7.а). Очигледно је

$$\mathrm{d}S\cos\alpha = \mathrm{d}S_n$$

пројекција површине $\mathrm{d}S$ на раван p управну на јединични вектор $\hat{r}$, тако да се може писати

$$\mathrm{d}\Psi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S_\mathrm{n}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega,$$

где је $\mathrm{d}\Omega$ (слика 4.7.б) елементарни просторни угао (подсетите се дефиниције просторног угла) под којим се из тачке у којој се налази наелектрисање види елементарна површина $\mathrm{d}S$, односно $\mathrm{d}S_\mathrm{n}$.

Одавде се може извући један веома важан закључак: ***флукс вектора електричног поља тачкастог оптерећења кроз неку површину не зависи од облика и димензија те површине, ни од њеног растојања од наелектрисања, већ само од просторног угла под којим се та површина види са места на коме се налази наелектрисање.***

Укупан излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз затворену површину S биће

$$\Psi_E = \oint_S \mathrm{d}\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

јер је просторни угао под којим се из било које тачке своје унутрашњости види произвољна затворена површина $4\pi\,\mathrm{sterad}$. Према томе, коначно се може писати

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Количину електрицитета Q у последњи израз ***треба уносити са одговарајућим алгебарским знаком*** јер је израз за јачину поља, од кога смо почели, био задат у векторском облику. Значи, за излазни флукс вектора електричног поља се може добити и позитивна (уколико је $Q > 0$) и негативна (у случају да је $Q < 0$) вредност.

Посматрајмо сада систем наелектрисања која, у принципу, могу бити различитог знака и која су обухваћена једном затвореном површином S. Свако од наелектрисања има за последицу одговарајући излазни флукс кроз површину S. Укупан флукс је једнак збиру флуксева појединих наелектрисања па одатле следи општа формулација Гаусовог закона:

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}}$$

Уколико је наелектрисање распоређено по некој запремини са задатом запреминском густином ρ онда Гаусов закон добија облик

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V}$$

где је V запремина обухваћена површином S.

Без обзира на то да ли се ради о једном наелектрисању, систему наелектрисања или запремински расподељеном наелектрисању Гаусов закон гласи:

Излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз произвољну затворену површину једнак је количнику укупне количине електрицитета обухваћене том површином и диелектричне константе вакуума.

Физички,

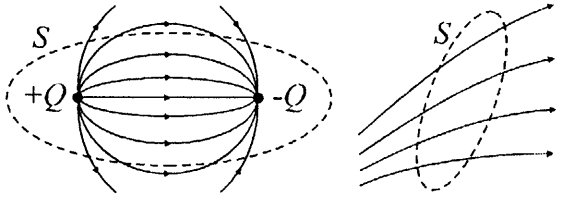
Гаусов закон исказује изворни карактер електростатичког поља.

Линије поља полазе са позитивних (извори линија поља) и завршавају на негативним (понори линија поља) наелектрисањима. Ово се најбоље може уочити из спектра поља на слици 2.9, где су одговарајући понори, односно извори линија поља у бесконачности, и слици 2.10.а, где су извори и понори тачкаста оптерећења.

Уколико је укупна количина електрицитета обухваћена затвореном површином једнака нули, или унутар затворене површине нема наелектрисања, излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз ту површину је једнак нули,

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 .$$

Ова чињеница не мора да значи и да је вектор јачине поља унутар и ван те површине једнак нули. Посматрајмо најпре слику 4.8.а. Укупно обухваћено оптерећење је једнако нули тако да је и излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз затворену површину S једнак нули. Међутим, очигледно је да линије поља постоје и унутар и ван затворене површине S. То значи да постоји и вектор јачине електричног поља који је у свакој тачки тангента на линије поља. У случају са слике 4.8.б. затворена површина S не обухвата никакво наелектрисање па је, такође, излазни флукс вектора јачине електричног поља једнак нули. Но, и у овом случају је очигледно да и унутар и ван површине S постоје линије поља, а самим тим и електрично поље.



а. б.

Слика 4.8.

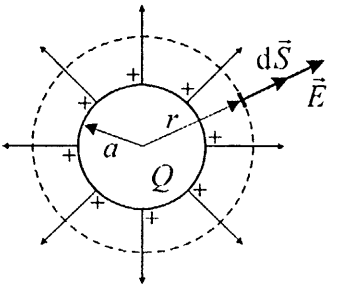
4.4. Неки примери примене Гаусовог закона

Приликом примене Гаусовог закона за одређивање вектора јачине електричног поља најпре треба скицирати спектар поља и кроз тачку, у којој се одређује поље, поставити затворену површину. Кроз ту површину треба израчунати флукс као површински интеграл вектора јачине електричног поља. Да би се овај интеграл могао израчунати површина треба да буде симетрична у односу на задату расподелу наелектрисања. Овако израчунат флукс мора, по Гаусовом закону, бити једнак количнику обухваћене количине електрицитета и диелектричне константе вакуума. Из ове једнакости добија се веза између вектора јачине поља и положаја тачке у којој се рачуна поље.

Након одређивања вектора јачине електричног поља може се, коришћењем дефиниционог израза, одредити и функција потенцијала. Ово ће бити показано на неколико карактеристичних примера.

4.4.1. Усамљена сфера оптерећена равномерно наелектрисањем Q

Задата је усамљена сфера, полупречника a, оптерећена равномерно количином електрицитета Q (рецимо $Q>0$). Сфера се налази у вакууму. Позитивна наелектрисања (извори линија поља) равномерно су распоређена по површини, док су одговарајућа негативна наелектрисања (понори) у бесконачности (пошто је сфера усамљена). Линије поља су радијални зраци, а спектар поља има изглед као на слици 4.9.



Слика 4.9.

Како у унутрашњости сфере нема линија поља, то је и вектор електричног поља за $r < a$ једнак нули. Одредимо сада вектор електричног поља у некој тачки која се налази на растојању $r > a$ од центра сфере. Поставимо кроз ту тачку затворену површину S симетричну задатој расподели наелектрисања (концентрична сфера полупречника r) и израчунајмо флукс вектора јачине електричног поља кроз ту површину,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} .$$

У свакој тачки површине S вектори $\vec{E}$ и $\mathrm{d}\vec{S}$ су колинеарни. Такође, због потпуне симетрије, у свим тачкама ове површине вектор јачине поља има исту вредност па се може писати

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = ES = 4\pi E r^2 .$$

С друге стране овај флукс је, према Гаусовом закону, једнак количнику обухваћеног наелектрисања и диелектричне константе вакуума,

$$4\pi E r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

одакле следи

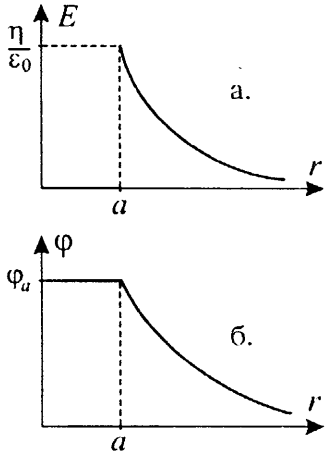
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \mathrm{k}_0 \frac{Q}{r^2}.$$

Пошто је поље радијално, коначан израз за вектор јачине електричног поља је

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r \geq a \end{cases}.$$

Очигледно је да је вектор јачине електричног поља оријентисан од сфере (колинеаран са вектором положаја тачке у којој се рачуна) за случај позитивног оптерећења и обрнуто.

Вектор јачине електричног поља се ван сфере мења по истом закону као и вектор јачине електричног поља тачкастог наелектрисања исте вредности Q смештеног у центру сфере. То се може закључити и на основу тога што се у изразу за вектор јачине поља (за $r \geq a$) не појављује полупречник сфере.



Слика 4.10.

Интензитет вектора јачине електричног поља има максималну вредност на површини сфере,

$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S_a} = \frac{\eta}{\varepsilon_0},$$

(како је сфера равномерно оптерећена то је количник оптерећења Q сфере и њене површине S_a једнак површинској густини наелектрисања на сфери η) а затим опада са квадратом растојања од центра. Дијаграм промене интензитета вектора јачине електричног поља E у функцији растојања r од центра сфере приказан је на слици 4.10.а.

Функција потенцијала се одређује по дефиницији

$$\varphi = \int_{M}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

при чему је најпогодније изабрати путању интеграције дуж линије поља (где је $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$). Како се облик функције вектора јачине електричног поља мења на граници $r = a$, јасно је да ће се на тој граници мењати и облик функције потенцијала.

Потенцијал (функцију потенцијала) треба одређивати најпре у домену који је ближи референтној тачки како би се добијени резултати могли касније, при одређивању потенцијала у доменима даље од референтне тачке, директно користити. Значи, за $r \geq a$ је

$$\varphi = \int_{r}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Максимална вредност потенцијала је на површини сфере,

$$\varphi_{\max} = \varphi_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

У унутрашњости сфере нема поља, па ни потенцијалне разлике између било које две тачке, тако да је за $r \leq a$

$$\varphi = \varphi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Ово се може показати и интеграцијом вектора јачине електричног поља у границама од $r \leq a$ до референтне тачке у бесконачности:

$$\varphi = \int_{r}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{a} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{a}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{a}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \varphi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

јер је у подручју од r до a електрично поље једнако нули, док је линијски интеграл вектора јачине електричног поља од $r = a$ до референтне тачке нултог потенцијала једнак потенцијалу површине сфере.

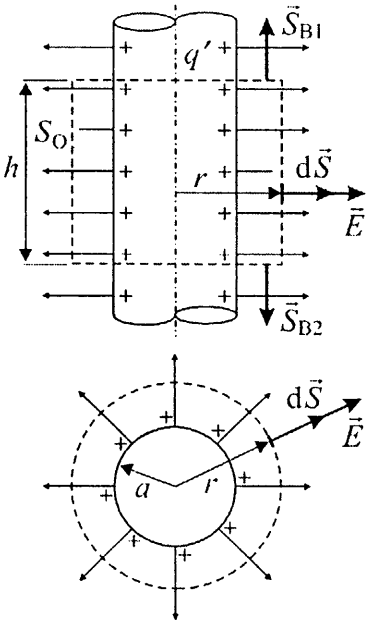
Коначно, функција потенцијала гласи

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, & r \leq a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \geq a \end{cases}$$

док је њен дијаграм приказан на слици 4.10.б.

4.4.2. Неограничено дуг усамљени цилиндар кружног попречног пресека наелектрисан наелектрисањем сталне подужне густине q'

Нека је неограничено дуг усамљен цилиндар, кружног попречног пресека полупречника a, равномерно оптерећен наелектрисањем сталне подужне густине q' (рецимо да је $q' > 0$). Цилиндар се налази у вакууму. Извори линија поља (позитивна оптерећења на цилиндру) имају одговарајуће понore у бесконачности, тако да спектар поља (приказан у две пројекције) има изглед као на слици 4.11.



Слика 4.11.

Очигледно је да у унутрашњости цилиндра ($r < 0$) нема линија поља, тако да је и вектор јачине поља једнак нули. Да би одредили вектор јачине електричног поља ван цилиндра у некој тачки на растојању r, $r > a$, од осе цилиндра треба кроз ту тачку поставити затворену површину симетричну задатој расподели наелектрисања. То је у овом случају ваљак полупречника базиса r и коначне висине h (не може се узети неограничено дуг цилиндар јер би у том случају флукс, као и укупна обухваћена количина електрицитета били бесконачно велики). Укупан излазни флукс кроз површину ваљка може се одредити као збир флукса кроз површину једног и другог базиса и флукса кроз површину омотача,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_O} \vec{E}\cdot d\vec{S}.$$

Флукс кроз базисе једнак је нули јер су вектори површина базиса и вектор јачине електричног поља међусобно управни - ни једна линија поља не продире базисе. Према томе, ако се води рачуна о томе да су у свакој тачки омотача вектори $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ колинеарни и да је, због потпуне симетрије, у свим тачкама омотача интензитет вектора јачине поља исти, за излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз затворену површину S се добија

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_O} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_O} E\,dS = E\int_{S_O} dS = ES_O = 2\pi Erh.$$

С друге стране, обухваћена количина електрицитета овом површином једнака је количини електрицитета на делу наелектрисаног цилиндра дужине h,

$$\Sigma Q = q' h,$$

па је сходно Гаусовом закону

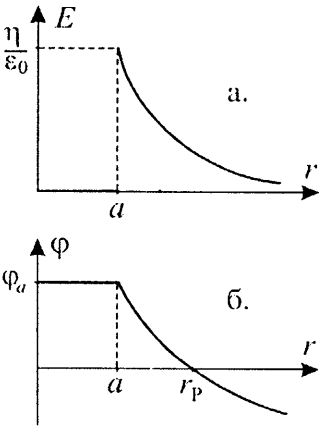
$$2\pi E r h = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} = \frac{q' h}{\varepsilon_0},$$

одакле следи

$$E = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Пошто је поље радијално, коначни израз за вектор јачине поља је

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$



Слика 4.12.

У претходном изразу за вектор јачине електричног поља за $r \geq a$ уопште се не појављује полупречник цилиндра, што значи да он може тежити нули. Према томе ово је уједно и израз за вектор јачине електричног поља линијског оптерећења подужне густине q'.

Електрично поље има максималну вредност на површини цилиндра,

$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{h}{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S_O} = \frac{\eta}{\varepsilon_0},$$

(оптерећење на делу цилиндра дужине h, $Q = q'h$, равномерно је расподељено по површини тог дела цилиндра, $S_O = 2\pi a h$, па је количник оптерећења и површине површинска густина наелектрисања η) а затим опада са првим степеном растојања. Дијаграм промене интензитета вектора јачине електричног поља у функцији растојања од осе цилиндра приказан је на слици 4.12.а.

Када се ради о неограниченим структурама референтна тачка нултог потенцијала се не може налазити у бесконачности. Стога ћемо, у овом случају, рачунати потенцијал у односу на референтну тачку која се налази на растојању $r_P > a$ од осе цилиндра. По дефиницији се (вршећи интеграцију по линији поља као и у претходном примеру) добија

$$\varphi = \int_r^{r_P} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{r_P} E\,\mathrm{d}r = \int_r^{r_P} \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{r}.$$

Максимална вредност потенцијала је на површини цилиндра,

$$\varphi_{\max} = \varphi_{r=a} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{a}.$$

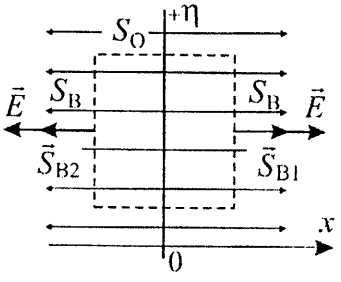
У унутрашњости цилиндра нема поља па је потенцијална разлика између било које две тачке једнака нули, односно све тачке се налазе на истом потенцијалу, потенцијалу површине цилиндра. Коначан израз за потенцијал би, према томе гласио

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_P}{a}, & r \le a \\ \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_P}{r}, & r \ge a \end{cases}$$

док је дијаграм потенцијала у функцији растојања од осе цилиндра приказан на слици 4.12.б.

4.4.3. Неограничена раван оптерећена наелектрисањем сталне површинске густине η

Нека је задата неограничена раван у вакууму оптерећена наелектрисањем сталне површинске густине +η. Очигледно је да ће поље бити хомогено и оријентисано од равни. И овде ће за одређивање вектора јачине електричног поља бити примењен Гаусов закон.



Слика 4.13.

Уочимо затворену цилиндричну површину, произвољног попречног пресека, чији су базиси паралелни равни а омотач управан на њу (слика 4.13). Укупан излазни флукс вектора јачине електричног поља може се израчунати као збир флукса кроз површине базиса и површину омотача,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_O} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Пошто линије поља тангирају омотач, флукс кроз омотач је једнак нули. На базисима цилиндра вектор јачине електричног поља је колинеаран са вектором површине, а како је поље хомогено за флукс се добија

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{S}_{B1} + \vec{E}\cdot\vec{S}_{B2} = ES_B + ES_B = 2ES_B.$$

Количина електрицитета обухваћена цилиндром је количина електрицитета на делу равни површине S_B,

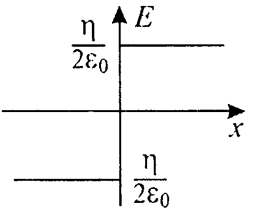
$$\Sigma Q = \eta S_B,$$

па директна примена Гаусовог закона

$$2ES_B = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} = \frac{\eta S_B}{\varepsilon_0},$$

даје

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}.$$



Слика 4.14.

Промена интензитата вектора јачине електричног поља у функцији растојања x од равни приказана је на слици 4.14. Мада интензитет вектора може бити искључиво позитивна величина, на дијаграму је за $x < 0$ нацртана као негативна да би се указало на чињеницу да је вектор јачине електричног поља оријентисан у негативном смеру x – осе.

Потенцијална разлика (напон) између две тачке у хомогеном пољу одређује се као производ вектора јачине поља и вектора положаја једне тачке у односу на другу (слика 4.15),

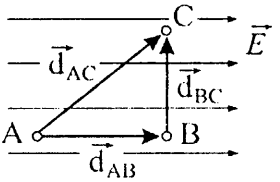
$$U_{AC} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_A^C d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{d}_{AC},$$

Како је

$$\vec{d}_{AC} = \vec{d}_{AB} + \vec{d}_{BC}$$

то је

$$U_{AC} = \vec{E} \cdot \vec{d}_{AC} = \vec{E} \cdot \vec{d}_{AB} + \vec{E} \cdot \vec{d}_{BC}.$$



Слика 4.15.

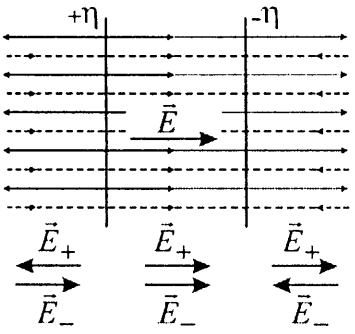
Пошто су тачке B и C на истом потенцијалу ($\vec{d}_{BC}$ је управно на линије поља), то је напон U_{AC},

$$U_{AC} = \vec{E} \cdot \vec{d}_{AB} = Ed_{AB},$$

једнак прозводу интензитета вектора јачине електричног поља и пројекције растојања између тачака A и C на правац линија поља.

4.4.4. Поље две паралелне неограничене равни оптерећене...

У овом примеру одредићемо поље две паралелне неограничене равни које су равномерно оптерећене налектрисањима једнаких површинских густина η супротног знака. Решење је најједноставније добити применом методе суперпозиције: одредићемо векторе поља позитивно и негативно наелектрисане равни и затим их сабрати (слика 4.16).

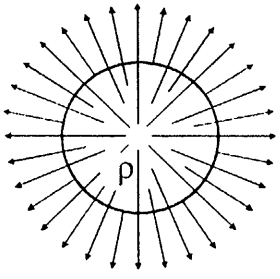


Слика 4.16.

Интензитет вектора јачине електричног поља обе равни је $\eta/2\varepsilon_0$. Линије поља позитивно наелектрисане равни оријентисане су од (пуне линије на слици), док су линије поља негативно наелектрисане равни оријентисане ка равни (испрекидане линије). Решење је очигледно са слике, без било каквих додатних коментара. У простору ван равни нема поља, док је између равни електрично поље хомогено, оријентисно од позитивне ка негативној равни и има интензитет

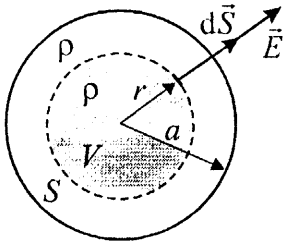
$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0}.$$

4.4.5. Лопта оптерећена наелектрисањем сталне запреминске густине ρ



Слика 4.17.

Унутар лопте полупречника a и диелектричне константе ε_0 равномерно је распоређено електрично оптерећење запреминске густине ρ (нека је $\rho > 0$). Извори линија поља су распоређени по целој запремини лопте (значи да електрично поље постоји и унутар лопте), док су понори у бесконачности. Спектар поља приказан је на слици 4.17.



Слика 4.18.

Очигледно је да ће зависност вектора јачине поља од растојања r од центра лопте бити различита за $r < a$ и за $r > a$. Одредимо најпре вектор јачине поља у унутрашњости лопте (слика 4.18). Кроз тачку у којој желимо да израчунамо поље поставимо затворену површину симетричну задатом проблему (концентрична сфера полупречника $r < a$) и израчунајмо излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз њу. У свакој тачки површине вектори елемента површине и јачине електричног поља су колинеарни. Такође, због високог степена симетрије, у свим тачкама површине S интензитет вектора јачине електричног поља је исти па се, као константа, може извући испред знака интеграције. Према томе, тражени флукс је

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = 4\pi E r^2.$$

С друге стране је, према Гаусовом закону, излазни флукс вектора јачине електричног поља кроз затворену површину S

$$\Psi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \, \mathrm{d}V,$$

где је V запремина обухваћена површином S. Како је запреминска густина наелектрисања константна може се извући испред знака интеграције, тако да се добија

$$\Psi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \, \mathrm{d}V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Изједначавањем ова два израза за флукс,

$$4\pi E r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3,$$

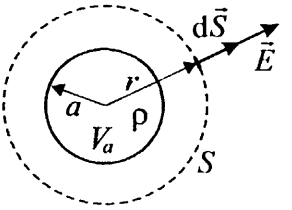
добија се израз за интензитет вектора јачине електричног поља,

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

из кога се може закључити да унутар лопте јачина поља расте линеарно са порастом растојања од центра.

За растојање $r > a$ затворена површина обухвата комплетно наелектрисање лопте (слика 4.19). И овде је, као и у примеру усамљене сфере, и уз иста образложења, излазни флукс вектора $\vec{E}$ кроз затворену површину S

$$\Psi_E = 4\pi E r^2,$$



Слика 4.19.

док је количина електрицитета обухваћена том површином укупно наелектрисање лопте полупречника a. Према Гаусовом закону је

$$\Psi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_a} \rho \, \mathrm{d}V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{V_a} \mathrm{d}V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}V_a = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi a^3.$$

Када се ова два израза за флукс изједначе,

$$4\pi E r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi a^3,$$

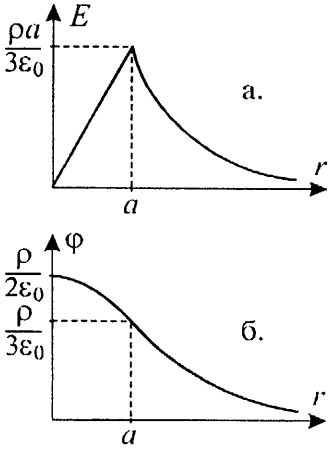
добија се израз за јачину електричног поља ван лопте,

$$E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2},$$

које опада са квадратом растојања од центра лопте.

Како је поље радијално, коначни израз за вектор јачине електричног поља гласи

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}, & r \le a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r \ge a \end{cases}.$$



Слика 4.20.

Максималну вредност електрично поље има на површини лопте,

$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0},$$

Дијаграм промене интензитета вектора јачине електричног поља у функцији растојања r од центра лопте приказан на слици 4.20.а.

Функција потенцијала се израчунава по дефиницији, при чему је најједноставније интеграцију вршити по линији поља ($\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$). Изван лопте ($r \ge a$) је

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

На самој површини лопте ($r = a$) потенцијал има вредност

$$\varphi_a = \varphi_{r=a} = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}.$$

Пошто и у унутрашњости лопте постоји електрично поље, постојаће и потенцијална разлика између појединих тачака (за разлику од проводника где су све тачке на истом потенцијалу, што ћемо касније видети). Функција потенцијала за $r < a$ одређује се, такође, по дефиницији као

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_r^a \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \varphi_a$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_r^a r\,\mathrm{d}r + \varphi_a = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(a^2 - r^2\right) + \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}.$$

Максимална вредност потенцијала биће у центру лопте ($r = 0$)

$$\varphi_{max} = \varphi_{r=0} = \varphi_0 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}a^2 + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}a^2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2.$$

Дијаграм промене потенцијала у функцији растојања од центра лопте приказан је на слици 4.20.б.

4.5. Електрично поље и потенцијал у хомогеном диелектрику

На почетку овог Поглавља истакнуто је да Гаусов закон важи само за електростатичка поља у вакууму. Исказивао је физичку чињеницу да су извори и понори линија поља наелектрисања која се налазе на наелектрисаним телима, а која се називају **слободним наелектрисањима**. Када се у електричном пољу налази диелектрик у њему долази до појаве такозваних **везаних оптерећења** (појам слободних и везаних наелектрисања ће касније бити детаљно објашњен) која такође представљају изворе и поноре линија поља. Стога, овако формулисан, Гаусов закон не важи у присуству материјалне средине.

Међутим, када се наелектрисана тела (наелектрисања) налазе у хомогеном диелектрику који испуњава целокупни простор у коме постоји електрично поље, могу се за одређивање вектора електричног поља (а самим тим и свих осталих величина које се одређују на основу познатог поља) искористити резултати добијени директном применом Гаусовог закона за случај истог распореда наелектрисања у вакууму.

Наиме, још је Кулон својим експериментима показао да средина у којој се налазе наелектрисана тела утиче на интензитет силе која делује између њих. Јасно је да је тај утицај средине на силу уствари утицај средине на јачину електричног поља. У било којој хомогеној средини сила између наелектрисања је ε_r пута мања него у вакууму ($\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ - диелектрична константа, ε_r - релативна диелектрична константа), па самим тим и електрично поље и потенцијал, односно напон.

Значи, уколико се систем наелектрисања налази у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ε_r електрично поље $\vec{E}_d$ се може одредити тако што се најпре одреди електрично поље истог система наелектрисања када се он налази у вакууму, $\vec{E}_0$, а затим добијени резултат подели са ε_r,

$$\boxed{\vec{E}_d = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}.}$$

Јасно је да ће и за потенцијал и напон, који су директно пропорционални електричном пољу, важити иста веза:

$$\varphi_d = \frac{\varphi_0}{\varepsilon_r}$$

и

$$U_d = \frac{U_0}{\varepsilon_r}.$$

У циљу илустрације написаћемо изразе за поље и потенцијал за све разматране распореде наелектрисања у случају да се налазе у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ε_r.

- Усамљена сфера

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}, & r \geq a \end{cases} \qquad \varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a}, & r \leq a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}, & r \geq a \end{cases}$$

- Усамљени неограничено дуг цилиндар кружног попречног пресека

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\hat{r}, & r \geq a \end{cases} \qquad \varphi = \begin{cases} \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\dfrac{r_P}{a}, & r \leq a \\ \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\dfrac{r_P}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

- Усамљена неограничена раван и две паралелне равни

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad E = \frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

- Запремински оптерећена лопта

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{r}, & r \leq a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}, & r \geq a \end{cases} \qquad \varphi = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(a^2 - r^2\right) + \dfrac{\rho a^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}, & r \leq a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r}, & r \geq a \end{cases}$$

4.6. Питања за проверу

4.6.1. Како се дефинише вектор равне површине?

4.6.2. Како се оријентише контура на коју се ослања површина?

4.6.3. Да ли је флукс вектора поља кроз неку површину векторска или скаларна величина?

4.6.4. Како се израчунава флукс вектора поља у хомогеном, а како у нехомогеном пољу?

4.6.5. По чему се разликује флукс вектора поља кроз неку површину за две различите оријентације контуре на коју се та површина ослања?

4.6.6. Колики је флукс вектора поља кроз неку површину у случају када линије поља тангирају ту површину?

4.6.7. Како се у случају затворене површине оријентише вектор елемента површине?

4.6.8. Како се дефинише улазни, а како излазни флукс вектора поља кроз неку затворену површину? По чему се ова два флукса разликују?

4.6.9. Како се дефинише просторни угао и која је његова јединица?

4.6.10. Под коликим просторним углом се из било које тачке у својој унутрашњости види произвољна затворена површина?

4.6.11. Извести Гаусов закон. У којој средини и за какав распоред наелектрисања важи Гаусов закон?

4.6.12. Исказати речима Гаусов закон.

4.6.13. Коју физичку чињеницу исказује Гаусов закон?

4.6.14. Шта су извори а шта понори линија поља?

4.6.15. Уколико је обухваћена количина електрицитета неком затвореном површином једнака нули, да ли то значи и да је унутар и ван те површине електрично поље једнако нули? Објаснити.

4.6.16. Описати редослед радњи приликом примене Гаусовог закона за одређивање вектора јачине електричног поља.

4.6.17. Скицирати спектар поља и извести израз за електрично поље и потенцијал усамљене сфере равномерно оптерећене наелектрисањем Q. Показати да је поље на површини сфере пропорционално површинској густини наелектрисања.

4.6.18. Скицирати спектар поља и извести израз за електрично поље и потенцијал усамљеног неограничено дугог цилиндра кружног попречног пресека равномерно наелектрисаног наелектрисањем подужне густине q'. Показати да је поље на површини цилиндра пропорционално површинској густини наелектрисања.

4.6.19. Скицирати спектар поља и извести израз за електрично поље усамљене неограничене равни оптерећене наелектрисањем сталне површинске густине η.

4.6.20. Скицирати спектар поља и извести израз за електрично поље у случају две паралелне неограничене равни оптерећене равномерно наелектрисањем исте површинске густине η *супротног знака.*

4.6.21. Уколико је у неком делу простора електрично поље једнако нули да ли то значи и да је потенцијал једнак нули?

4.6.22. Да ли Гаусов закон важи и у случају да се наелектрисања налазе у диелектрику?

4.6.23. Да ли се резултети добијени применом Гаусовог закона за одређени распоред наелектрисања у вакууму могу искористити у случају да се та иста наелектрисања налазе у диелектрику?

4.6.24. Уколико је одговор на претходно питање потврдан, дефинисати услове под којима је то могуће и начин на који се користе резултети добијени применом Гаусовог закона.

5. Понашање проводника у електростатичком пољу

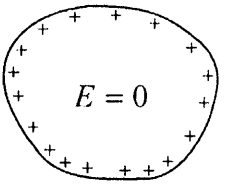
У уводном делу је речено да је карактеристично за проводнике да поседују лако покретљиве електроне, такозване електроне проводности. Под дејством електростатичког поља они се могу лако покретати кроз проводник како би се остварили одређени услови електростатичке равнотеже. Размотрићемо посебно два случаја:

- када се проводно тело, које се налази ван страног електростатичког поља, оптерети количином електрицитета Q и

- када се неоптерећено проводно тело унесе у страно електростатичко поље.

5.1. Оптерећено проводно тело ван страног поља

Нека се на неко проводно тело, у било коју тачку, доведе оптерећење Q. Пошто су сва елементарна наелектрисања која чине оптерећење Q истог знака доћи ће до њиховог међусобног одбијања, тако да ће се она у једном кратком временском интервалу кретати кроз проводник све док се не распореде по површини проводника (слика 5.1).



Слика 5.1.

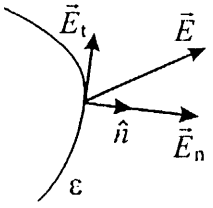
Поље у унутрашњости проводника мора бити једнако нули,

што се лако може доказати помоћу Закона о одржању рада и енергије. Наиме, уколико би у унутрашњости проводника постојало електрично поље под његовим дејством би дошло до усмереног кретања слободних носиоца електрицитета. Усмерено кретање наелектрисања представља електричну струју која може вршити одређени рад. Међутим, како се од једног електростатичког система не може добити рад (што је показано у Поглављу 3.1) то следи да поље у унутрашњости проводника мора бити једнако нули.

Наелектрисања на површини проводника су извори (ако су позитивна), односно понори (уколико су негативна) линија вектора јачине електричног поља.

Вектор јачине електричног поља мора бити управан на површину проводника у свакој тачки.

Да би ово доказали поћи ћемо од супротне претпоставке: да вектор јачине електричног поља може заклапати било који угао са нормалом на површину проводника (слика 5.2). У том случају он се може разложити на две компоненте: нормалну ($\vec{E}_n$) и тангенцијалну ($\vec{E}_t$). Нормална компонента "тежи да ишчупа" наелектрисања из проводника, а то није могуће (осим при енормно великим јачинама поља). Под дејством тангенцијалне компоненте наелектрисања би се кретала по површини проводника и формирала електричну струју што је у оквирима електростатике немогуће, а што је већ раније објашњено.



Слика 5.2.

Како је вектор јачине електричног поља у свим тачкама нормалан на површину проводника то значи да је она еквипотенцијална (већ је показано да су линије поља и еквипотенцијалне површине међусобно нормалне). Такође, пошто је поље у унутрашњости проводника једнако нули, потенцијална разлика између било које тачке у унутрашњости проводника и његове површине мора бити једнака нули. Значи:

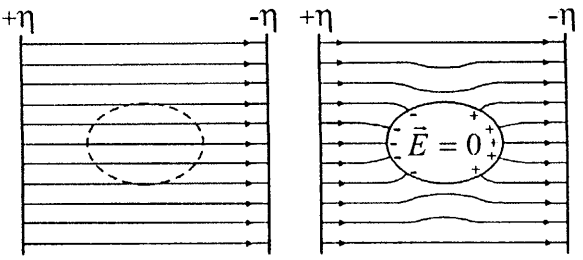
у електростатици су све тачке једног проводника на истом потенцијалу, проводник је еквипотенцијалан.

5.2. Неоптерећено проводно тело у страном пољу

Ради једноставности разматрања претпоставићемо да је страно поље пре уношења проводног тела било хомогено (слика 5.3.а). Такво поље могуће је остварити између две неограничене равни, или проводне плоче, наелектрисане равномерно наелектрисањима једнаке површинске густине супротног знака. Сваки извор линије поља на позитивној равни (плочи) има свој понор на негативној равни (плочи).

По уношењу проводника у страно поље, у једном кратком временском интервалу, доћи ће до кретања наелектрисања кроз проводник под дејством тог поља, тако да ће се на једном крају издвојити позитивна а на другом негативна наелектрисања (слика 5.3.б). Наелектрисања ће се раздвајати све док њихово сопствено поље не анулира страно поље,

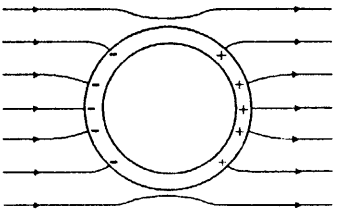
чиме се задовољава основни услов електростатике: ***поље у унутрашњости проводника мора бити једнако нули.***



а. б.

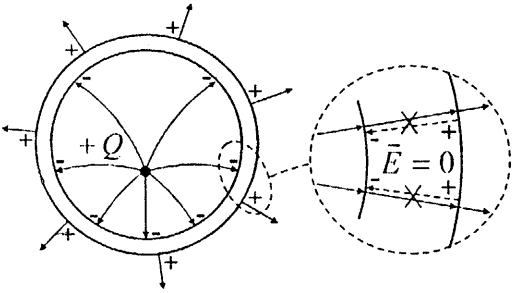
Слика 5.3.

Такође, из разлога који су већ раније објашњени, линије поља морају бити управне на површину проводника, што ће довести до деформације спектра поља (слика 5.3.б). Поље, посебно у непосредној близини проводника, није више хомогено. На самом проводнику линије поља се прекидају. Линије поља које су имале као изворе наелектрисања на позитивној плочи, имају као поноре индукована негативна наелектрисања на једној страни проводника. Индукована позитивна наелектрисања на другој страни су сада нови извори линија поља које, као своје поноре, имају наелектрисања на негативној плочи.



Слика 5.4.

Пошто се индукована наелектрисања (која утичу на електрично поље) налазе само на површини проводника, и како је поље у његовој унутрашњости једнако нули, он може бити шупаљ, веома танких зидова, а да се у систему ништа не промени (слика 5.4). Поље у унутрашњости шупљине остаће једнако нули. Значи да се на овај начин може изоловати један део простора од утицаја страног електричног поља.



Слика 5.5.

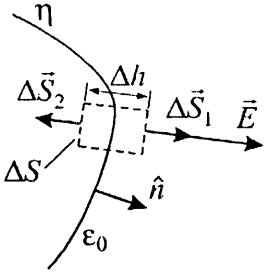
Поставља се питање да ли је могућ обрнут поступак - да се поље једног наелектрисања локализује само у делу простора око наелектрисања а да ван тог простора буде једнако нули. Посматрајмо једну веома танку сферну љуску (слика 5.5.) која се налази ван страног електричног поља. Поставимо у произвољну тачку унутар љуске тачкасто оптерећење Q, на пример $Q > 0$. У проводним зидовима сферне љуске индуковаће се наелектрисања - негативна на унутрашњем, а позитивна на спољашњем зиду. Укупна вредност и негативних и позитивних индукованих оптерећења мора по апсолутној вредности бити једнака унетом оптерећењу.

Распоред индукованих оптерећења на унутрашњем зиду и спектар поља у унутрашњости сфере зависиће од положаја оптерећења Q. Како у самој љусци нема поља (јер је проводник) између индукованих позитивних оптерећења на спољашњем зиду и оптерећења унутар љуске нема никакве интеракције. Према томе, оптерећења на спољашњем зиду ће се распоредити равномерно као и на усамљеној проводној сфери оптерећеној количином електрицитета Q и поље ће бити радијално.

5.3. Гранични услов на површини проводника

Већ смо показали да је у свакој тачки површине проводника вектор јачине електричног поља нормалан на површину. Овде ћемо, помоћу Гаусовог закона, одредити везу између вектора јачине електричног поља и површинске густине наелектрисања у тој тачки.

Нека је задат проводник произвољног облика који се налази у вакууму и нека је позната расподела површинске густине наелектрисања η. Означимо са $\hat{n}$ јединични вектор нормале на површину проводника, оријентисан од проводника ка вакууму, и уочимо један цилиндар чија је површина базиса ΔS паралелна раздвојној површини проводника и вакуума а омотач, висине Δh, нормалан на њу (слика 5.6). Да би одредили гранични услов у једној тачки, као и да би поље на површини базиса могли сматрати хомогеним, мора бити задовољен услов да $\Delta S \to 0$. Поред тога, пошто нас интересује вектор јачине поља на самој површини проводника, висина цилиндра мора такође тежити нули, $\Delta h \to 0$.



Слика 5.6.

Применимо сада Гаусов закон,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}.$$

Излазни флукс вектора јачине поља може се рачунати као збир флуксева кроз поједине делове цилиндра,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_O} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Флукс кроз површину ΔS_2 једнак је нули јер у унутрашњости проводника нема поља. Такође је и флукс кроз омотач нула јер $\Delta h \to 0$, а на самој површини проводника вектор електричног поља има само нормалну компоненту па линије поља тангирају површину омотача. Остаје, дакле, само флукс кроз површину базиса који се налази ван проводника,

$$\Psi_E = \int_{\Delta S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}_1 = \vec{E} \cdot \hat{n}\Delta S = E_n \Delta S.$$

С друге стране ова затворена површина обухвата количину електрицитета на делу проводника чија је површина једнака површини базиса цилиндра (толику површину проводника обухвата омотач цилиндра),

$$\Sigma Q = \eta \Delta S.$$

Директна примена Гаусовог закона даје

$$E_n \Delta S = \frac{\eta \Delta S}{\varepsilon_0},$$

односно $E_n = \eta/\varepsilon_0$. Како је за позитивно оптерећење поље оријентисано у смеру излазне нормале, и обрнуто, гранични услов се може написати у једноставном векторском облику

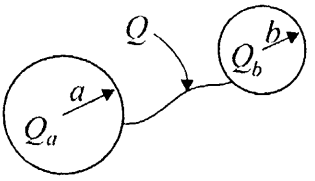
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

5.4. Расподела оптерећења на површини проводника

Расподела наелектрисања на површини проводника је равномерна само у случају када постоји високи степен симетрије. То су само три случаја: усамљена лопта (или усамљена проводна сферна љуска), неограничено дуг усамљен цилиндар кружног попречног пресека (или одговарајућа цилиндрична љуска) и неограничена раван (или две паралелне неограничене равни). У свим осталим случајевима расподела наелектрисања зависи од облика проводног тела и распореда других наелектрисања.

Користећи се резултатима једног примера даћемо квалитативну анализу расподеле наелектрисања на усамљеном проводном телу у зависности од његовог облика.

Нека су дате две проводне лопте (слика 5.7), полупречника a и b, које се налазе на довољно великом растојању да се њихов међусобни утицај на расподелу наелектрисања може занемарити (може се сматрати да је свака од њих усамљена и равномерно оптерећена). Лопте су спојене веома танким проводником чије се оптерећење и утицај на расподелу оптерећења на лоптама такође може занемарити.



Слика 5.7.

Ако се лопте оптерете укупном количином електрицитета Q она ће се распоредити на обе лопте, тако да ће оптерећење једне лопте бити Q_a а друге Q_b. Пошто имамо две непознате, за њихово одређивање потребно је поставити два услова. Први услов следи из Закона о одржању количине електрицитета,

$$Q = Q_a + Q_b,$$

а други из једнакости потенцијала (јер су спојене проводником) лопти,

$$k_0 \frac{Q_a}{a} = \varphi_a = \varphi_b = k_0 \frac{Q_b}{b}.$$

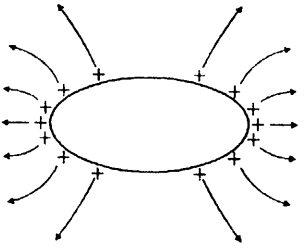
Решење овог система једначина је

$$Q_a = \frac{a}{a+b} Q$$

и

$$Q_b = \frac{b}{a+b} Q.$$

Потражимо сада површинске густине оптерећења на лоптама:



Слика 5.8.

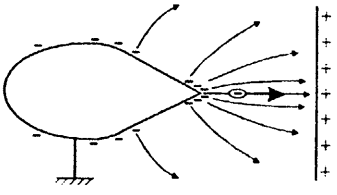
$$\eta_a = \frac{Q_a}{S_a} = \frac{Q}{4\pi(a+b)a} = \frac{K}{a}$$

и

$$\eta_b = \frac{Q_b}{S_b} = \frac{Q}{4\pi(a+b)b} = \frac{K}{b},$$

где је K - константа. Значи, површинска густина наелектрисања ће бити већа на лопти мањег полупречника.

На основу овога се може извући следећи закључак: ***површинска густина електрицитета на површини проводника обрнуто је сразмерна полупречнику кривине проводника.*** Уколико је полупречник кривине проводника мањи утолико је већа површинска густина наелектрисања, а самим тим и јачина вектора електричног поља. Са повећањем полупречника кривине опада површинска густина наелектрисања, а самим тим и јачина електричног поља (слика 5.8).



Слика 5.9.

Ако се полупречник кривине проводника на једном месту веома смањи (постане практично шиљак - слика 5.9) површинска густина наелектрисања, а самим тим и вектор јачине електричног поља, добија веома велике вредности тако да може доћи до тихог електричног пражњења (такозвани електрични ветар). Ова појава се може прак-

тично користити за елиминацију статичког електрицитета који се појављује у различитим технолошким процесима (производња текстила, папира, експлозива, дувана итд.) и који може бити веома опасан јер може довести до пожара или експлозије.

5.5. Неки закључци и примери

Описујући понашање проводника у електростатичком пољу показали смо:

- да су наелектрисања локализована искључиво на површини,

- да је поље у унутрашњости једнако нули,

- да је на површини проводника вектор јачине електричног поља управан на површину проводника и има интензитет $E = \eta/\varepsilon_0$ *и*

- да су све тачке проводника на истом потенцијалу.

Анализирајући, применом Гаусовог закона, равномерно оптерећену усамљену сферу, равномерно оптерећен неограничено дуг усамљени цилиндар и две паралелне равни равномерно оптерећене наелектрисањима исте површинске густине супротног знака дошли смо до истих закључака (поље у унутрашњости сфере и цилиндра једнако је нули, вектор поља је нормалан на површину и има вредност $E = \eta/\varepsilon_0$, све тачке у унутрашњости су на потенцијалу површине).

Очигледно је да ће због тога и комплетна анализа и сва решења за случај усамљене проводне лопте, неограничено дугог усамљеног проводног цилиндра и две паралелне неограничене проводне равни бити истоветни:

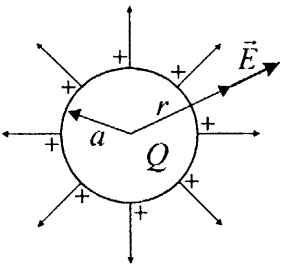
- Усамљена проводна лопта полупречника *a* оптерећена количином електрицитета *Q*

- вектор јачине електричног поља

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$

- вектор јачине електричног поља на површини лопте

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{n}$$



Слика 5.10.

- потенцијал

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, & r \le a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \ge a \end{cases}$$

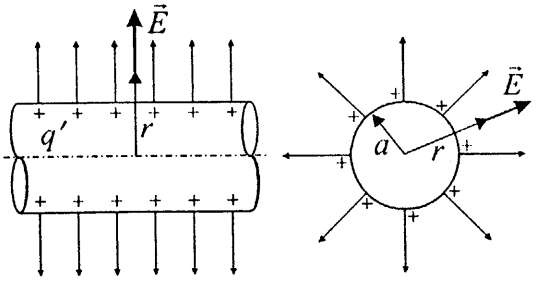
- Неограничено дуг усамљен проводни цилиндар полупречника a оптерећен наелектрисањем подужне густине q'

- вектор јачине електричног поља

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}, & r \ge a \end{cases}$$

- вектор јачине електричног поља на површини цилиндра

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

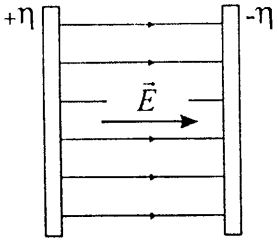


Слика 5.11.

- потенцијал

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_P}{a}, & r \le a \\ \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_P}{r}, & r \ge a \end{cases}$$

- Две неограничене паралелне равни оптерећене наелектрисањима исте површинске густине η супротног знака



Слика 5.12.

- вектор јачине електричног поља

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{n},$$

где је $\hat{n}$ вектор јединичне нормале оријентисан од позитивне ка негативној равни

- напон између две тачке у пољу

$$U = Ed,$$

где је d растојање мерено дуж линије поља.

Уколико се било која од ових структура налази у хомогеном диелектрику диелектричне константе $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ сви изрази за поље и потенцијал имају исти облик. Једина разлика је у томе што диелектричну константу вакуума, ε_0, треба заменити диелектричном константом диелектрика $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$. Наравно, ово важи само у случају када је цео простор у коме постоји електрично поље испуњен хомогеним диелектриком.

5.6. Питања за проверу

5.6.1. На који начин се распоређује количина електрицитета доведена проводнику? Објаснити због чега.

5.6.2. Колика је тангенцијална компонента вектора јачине електростатичког поља на површини проводника? Објаснити због чега.

5.6.3. Колико је поље у унутрашњости проводника?

5.6.4. Да ли постоји нормална компонента вектора јачине електростатичког поља на површини проводника?

5.6.5. Извести гранични услов за вектор јачине електростатичког поља на површини проводника.

5.6.6. Објаснити због чега је површина проводника еквипотенцијална површина.

5.6.7. На ком потенцијалу се налазе тачке у унутрашњости проводника? Објаснити због чега.

5.6.8. Како се понаша неоптерећен проводник унет у страно електростатичко поље?

5.6.9. Колико је електростатичко поље у неоптерећеном проводнику унетом у страно електростатичко поље?

5.6.10. Шта се дешава са линијама страног електричног поља када се у њега унесе проводно тело?

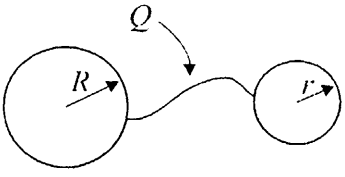
5.6.11. Како стоје линије страног електричног поља у односу на површину проводника?

5.6.12. Да ли се део простора може изоловати од страног електростатичког поља? Објаснити на који начин.

5.6.13. Да ли се применом металног (проводног) оклопа поље неког наелектрисања може ограничити само на део простора унутар оклопа?

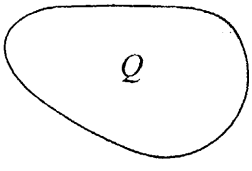
5.6.14. У којим случајевима је расподела наелектрисања на површини проводника равномерна ($\eta = \text{const.}$)?

5.6.15. Како зависи површинска густина наелектрисања од полупречника кривине проводника?



Слика 5.13.

5.6.16. Две проводне куглице, чији се међусобни утицај може занемарити (могу се сматрати усамљеним), спојене су проводником и оптерећене укупним оптерећењем Q (слика 5.13). Одредити наелектрисање и површинску густину наелектрисања на куглицама. На којој од куглица ће бити већа површинска густина наелектрисања?



Слика 5.14.

5.6.17. Скицирати квалитативно расподелу наелектрисања на проводнику чији је облик приказан на слици 5.14. Проводник је оптерећен количином електрицитета Q.

5.6.18. Објаснити ефекат шиљка и његову примену у елиминацији статичког електрицитета.

5.6.19. Задата је усамљена проводна лопта полупречника a. Одредити вектор јачине електростатичког поља и потенцијал у функцији растојања од центра лопте.

5.6.20. Задат је неограничено дуг проводни цилиндар полупречника a оптерећен наелектрисањем сталне подужне густине q'. Референтна тачка нултог потенцијала налази се на растојању b $(b > a)$ од осе цилиндра. Одредити вектор јачине електростатичког поља и потенцијал у функцији растојања од осе цилиндра.

5.6.21. Одредити вектор јачине електростстичког поља између две неограничене металне плоче оптерећене наелектрисањима $+\eta$ и $-\eta$.

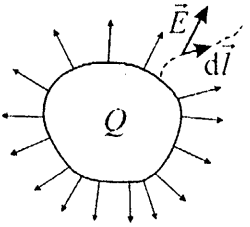
6. Електрична капацитивност и кондензатори

6.1. Електрична капацитивност усамљеног проводника

Посматрајмо један усамљени проводник произвољног облика који је оптерећен количином електрицитета Q (слика 6.1).

У свакој тачки у околини проводника дефинисан је вектор јачине електричног поља $\vec{E}$. Из ранијих примера очигледно је да је интензитет вектора јачине електричног поља у свакој тачки директно пропорционалан оптерећењу проводника,

$$E \sim Q.$$



Слика 6.1.

С друге стране, потенцијал проводника у односу на било коју референтну тачку, па и у односу на референтну тачку у бесконачности,

$$\varphi = \int_{\text{provod.}}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

директно је пропорционалан јачини електричног поља,

$$\varphi \sim E.$$

Из ове две чињенице директно следи и да је потенцијал усамљеног проводника директно пропорционалан његовом оптерећењу,

$$E \sim Q \ \wedge \ \varphi \sim E \ \Rightarrow \ \varphi \sim Q.$$

Према томе ***количник ове две величине (Q/φ) не зависи ни од оптерећења ни од потенцијала проводника, већ само од његових димензија и облика*** (који дефинишу конфигурацију поља), ***као и од средине у којој се проводник налази. Тај количник се назива електрична капацитивност*** (надаље ће, због краткоће, бити коришћен термин ***капацитивност***) ***усамљеног проводника и означава са C,***

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi}.}$$

Капацитивност је физичка величина и има своју јединицу $C_{\text{ц}} = \text{F}$ (Фарад).

Ако се из последње једначине изрази количина електрицитета,

$$Q = C\varphi,$$

може се закључити: ***капацитивност је величина која показује колику количину електрицитета при одређеном потенцијалу може примити једно проводно тело.*** Капацитивност се одређује по дефиницији: проводник се оптерети количином електрицитета Q, одреди његов потенцијал φ и, на крају, по дефиниционом изразу израчуна капацитивност. Овај поступак ћемо применити на случај проводне лопте полупречника a која се налази у вакууму.

Оптеретимо лопту количином електрицитета Q. Њен потенцијал је одређен у Поглављу 5.5. и износи

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

па је, по дефиницији,

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 a.$$

Из последњег израза је очигледно да се за диелектричну константу може користити (и најчешће се користи) јединица

$$\varepsilon_{\text{ц}} = C_{\text{ц}}/l_{\text{ц}} = \text{F/m}.$$

Уколико би се проводно тело налазило у неограниченом хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ε_r поље, а самим тим и потенцијал, били би ε_r пута мањи него у вакууму. То значи да би капацитивност проводника у диелектрику, C_d, била ε_r пута већа од капацитивности истог проводника у вакууму, C_0,

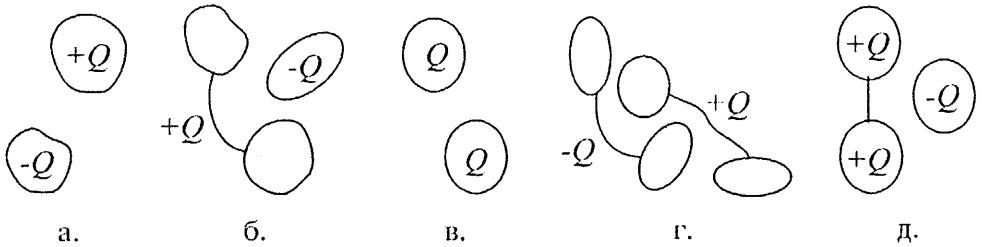
$$C_d = \varepsilon_r C_0.$$

Јединица за капацитивност је веома велика, па се стога углавном користе њени подмултипли. Да би ово показали израчунајмо капацитивност усамљене проводне лопте у вакууму чији је полупречник приближно једнак полупречнику Земље ($a \approx 6250\,\text{km}$):

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a = \frac{a}{k_0} = \frac{6.25\cdot 10^6}{9\cdot 10^9} \approx 0.694\cdot 10^{-3}\,\text{F} = 0.694\,\text{mF}.$$

6.2. Кондензатори и електрична капацитивност кондензатора

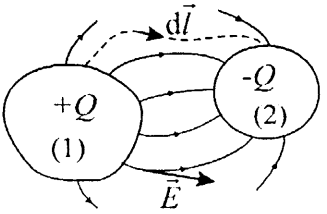
Кондензатор је систем од два проводна тела, или две групе међусобно повезаних проводних тела, наелектрисаних једнаким количинама електрицитета супротног знака. На слици 6.2. приказано је неколико система наелектрисаних проводних тела. Системи означени са а, б. и г. представљају кондензаторе, док системи означени са в. и д. нису кондензатори. *Проводна тела која чине кондензатор називају се електроде или облоге кондензатора.*



Слика 6.2.

Посматрајмо најједноставнији кондензатор који се састоји из два проводна тела (1) и (2), оптерећена једнаким количинама електрицитета супротног знака (слика 6.3). У свакој тачки простора електрично поље је директно пропорционалан оптерећењу кондензатора, $E \sim Q$. Напон између електрода кондензатора једнак је линијском интегралу вектора јачине електричног поља између њих,

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,,$$



Слика 6.3.

и директно је пропорционалан електричном пољу, $U \sim E$, односно оптерећењу кондензатора,

$$E \sim Q \;\wedge\; U \sim E \;\Rightarrow\; U \sim Q\,.$$

Значи да *количник ове две величине (Q/U) не зависи ни од оптерећења кондензатора ни од напона између његових електрода већ само од димензија и облика електрода и њиховог међусобног положаја* (што одређује конфигурацију поља), *као и од средине у којој се електроде налазе. Тај количник се назива електрична капацитивност кондензатора* (на даље ћемо, због краткоће, користити термин *капацитивност*) *и означава са* $\boldsymbol{C}$,

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}.}$$

Капацитивност кондензатора је по димензији иста као и капацитивност усамљеног проводника па јој је и јединица иста (F - Фарад).

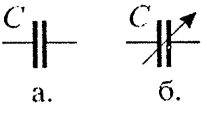
Ако се из последње једначине изрази количина електрицитета,

$$Q = CU,$$

може се закључити: ***капацитивност кондензатора је величина која показује колику количину електрицитета може примити кондензатор при одређеном напону између његових електрода.***

Капацитивност кондензатора се одређује по дефиницији: електроде кондензатора се оптерете једнаким количинама електрицитета Q супротног знака, одреди напон између њих U и, на крају, по дефиниционом изразу израчуна капацитивност.

Основне шематске ознаке за кондензатор приказане су на слици 6.4. (а. - кондензатор непромењиве капацитивности, б. - кондензатор променљиве капацитивности).

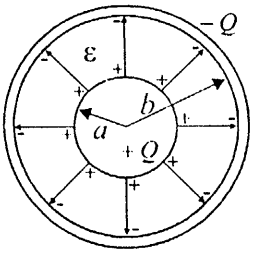


Слика 6.4.

6.3. Примери прорачуна капацитивности кондензатора са хомогеним диелектриком

6.3.1. Сферни кондензатор

Електроде сферног кондензатора су две концентричне проводне сфере, полупречника a и b (слика 6.5). Нека се између сфера налази хомогени диелектрик диелектричне константе $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ који испуњава цео међуелектродни простор (простор у коме постоји поље). Електроде су оптерећене количинама електрицитета Q исте вредности супротног знака (нека је на унутрашњој електроди позитивна). Свака линија поља која има свој извор на унутрашњој електроди има понор на одговарајућем негативном оптерећењу на спољашњој електроди. То значи да за $r < a$ и $r > b$ нема линија поља, па самим тим ни вектора јачине електричног поља. У простору између сфера поље има исту конфигурацију као и поље усамљене сфере полупречника a, па ће и вредност поља бити иста (што даје и директна примена Гаусовог закона). Према томе, коначни израз за вектор јачине електричног поља за $a \le r \le b$ је



Слика 6.5.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}.$$

Напон између електрода кондензатора одређује се по дефиницији, односно као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од једне до друге електроде. Најједноставније је интеграцију вршити дуж једне од линија поља ($\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$), тако да је

$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{b-a}{ab}.$$

Капацитивност је, по дефиницији,

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{b-a}{ab}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{ab}{b-a}.$$

У случају да полупречник спољашње електроде тежи бесконачности ($b \to \infty$) добија се усамљена сфера чија је капацитивност

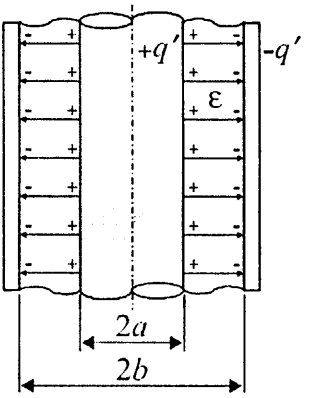
$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{ab}{b-a} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a}{1-a/b} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a,$$

јер $a/b \to 0$.

Треба напоменути да се сферни кондензатор изузетно ретко користи због тешкоћа са напајањем електрода (треба провући проводник до унутрашње електроде. Чешће се примењује усамљена проводна сфера у високонапонској техници.

6.3.2. Цилиндрични (коаксијални) кондензатор

Цилиндрични (коаксијални) кондензатор се састоји од два неограничено дуга проводна цилиндра, кружног попречног пресека полупречника a и b, оптерећена количинама електрицитета исте подужне густине q' супротног знака (слика 6.6). Нека се између цилиндара налази хомогени диелектрик диелектричне константе $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ који испуњава цео међуелектродни простор (простор у коме постоји поље). Свака линија поља која има свој извор на једној од електрода има одговарајући понор на другој. Значи да за $r < a$ и $r > b$ нема линија поља, па самим тим ни електричног по-



Слика 6.6.

ља. У простору између цилиндара поље има исту конфигурацију као и поље усамљеног цилиндра полупречника a, па ће и његова вредност бити иста (што се добија и директном применом Гаусовог закона). Према томе, између електрода кондензатора ($a \le r \le b$) електрично поље је

$$\vec{E} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\hat{r}\,.$$

Напон између електрода одређује се као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од једне до друге електроде. Интеграцију је најједноставније вршити дуж линије поља ($\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$), тако да је

$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}\,.$$

Како је укупно наелектрисање ове неограничене структуре при $q' \neq 0$ бесконачно, била би бесконачна и капацитивност. Стога код неограничених структура има смисла говорити само о величинама по јединици дужине, такозваним подужним величинама. Ако је капацитивност дела кондензатора дужине l

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q'\,l}{U}$$

дељењем обе стране једначине са l добија се

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{q'}{U} = \frac{q'}{\dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\dfrac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\dfrac{b}{a}}\,.$$

Величина C' се назива подужна капацитивност или капацитивност по јединици дужине и има јединицу $C'_{\mathrm{u}} = \mathrm{F/m}$. Уколико је позната подужна капацитивност коаксијалног кондензатора онда се капацитивност дела кондензатора дужине L израчунава као

$$C' = CL\,.$$

При одређивању вектора јачине електричног поља у коаксијалном кондензатору пошло се од претпоставке да је његова дужина неограничена, а самим тим и подужно наелектрисање константно. Међутим, пошто у природи нема неограничених структура, то и коаксијални кондензатор не може бити неограничено дуг па ни оптерећење на њему не може бити равномерно распоређено, посебно у близини његових крајева (такозвани ефекат крајева или ивични ефекат). Али ако је простор у коме се овај ефекат појављује веома мали у односу на димензије кондензатора (ако је дужина кондензатора много већа од његових попреч-

них димензија, $L >> a, b$) ефекат ивица се може занемарити и структура третирати као неограничена.

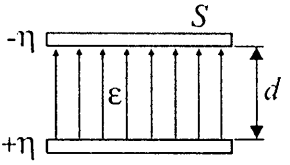
У пракси се цилиндрични (коаксијални) кондензатор практично не користи као кондензатор, изузев као еталон капацитивности. Међутим, како се коаксијални кабл (који практично представља коаксијални кондензатор) веома много користи у техници за пренос електромагнетних сигнала високох учестаности, важно је познавати његову подужну капацитивност јер она битно утиче на карактеристике преноса.

6.3.3. Раван (плочасти) кондензатор

Раван (плочасти) кондензатор састоји се од две паралелне проводне плоче површина S на међусобном растојању d. Нека се између плоча налази хомогени диелектрик диелектричне константе $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ који испуњава цео међуелектродни простор (простор у коме постоји поље). Како плоче нису неограничене, површинска густина наелектрисања на њима не може бити константна, посебно уз крајеве плоча (ефекат крајева, ивични ефекат). Међутим, ако су димензије плоча много веће од њиховог међусобног растојања (што је углавном увек случај), ивични ефекат се може занемарити.

За одређивање капацитивности овог кондензатора (слика 6.7) оптеретићемо његове електроде наелектрисањима исте површинске густине η супротног знака. Електрично поље између електрода, уколико се занемари ивични ефекат (што је оправдано као и у случају цилиндричног кондензатора када је растојање између електрода много мање од њихових димензија), је хомогено и једнако пољу између две неограничене равни

$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$



Слика 6.7.

Како је $\eta = Q/S$ и $U = Ed$, то следи

$$U = Ed = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d = \frac{Q}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r} d,$$

тако да је капацитивност

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}.$$

Капацитивност равног кондензатора (што важи и за сферни и за цилиндрични кондензатор) је веома мала. Нека је, рецимо, површина ел-

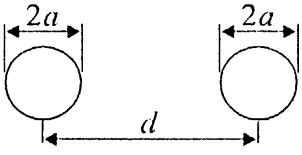
електрода $S = 100\,\mathrm{cm}^2$, размак између њих $d = 1\,\mathrm{mm}$ и диелектрик ваздух ($\varepsilon \approx \varepsilon_0$). Капацитивност овог кондензатора је

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 88.5\,\mathrm{pF}.$$

Замислите које би димензије имао телевизор који садржи стотинак таквих и већих кондензатора. Стога се кондензатори изводе на други начин а не као паралелне плоче, о чему ће бити више говора у другим предметима у току студија. Један од начина је да се између две дугачке проводне фолије убаци веома танка фолија од изолационог материјала, а затим то умота у ролну малих димензија. Тако се добија веома велика површина електрода са веома малим растојањем између њих.

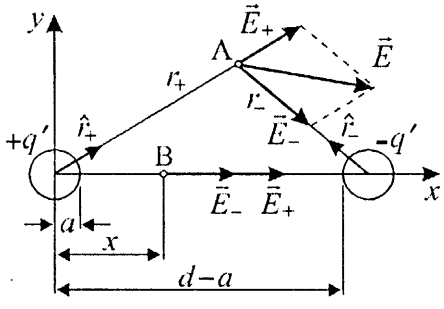
6.3.4. Подужна капацитивност ваздушног двожичног вода

Двожични вод је систем проводника који се веома често користи како за пренос електричне енергије, тако и у телекомуникацијама (посебно на нижим учестаностима). Састоји се од два веома дуга паралелна проводника, најчешће кружног попречног пресека полупречника a, чије се осе налазе на међусобном растојању d (слика 6.8). Мада се двожични вод не користи као кондензатор, познавање његове подужне капацитивности је веома важно јер она битно утиче на његове преносне карактеристике.



Слика 6.8.

Посматраћемо неограничено дуг двожични вод који се налазе у ваздуху ($\varepsilon \approx \varepsilon_0$). Проводници вода су кружног попречног пресека полупречника a и налазе се на међусобном растојању d ($d >> a$). Ради лакшег описивања проблема придружићемо двожичном воду правоугли координатни систем (слика 6.9). Оптерестимо проводнике наелектрисањима исте подужне густине q' супротног знака.



Слика 6.9.

Пошто је растојање оса проводника знатно веће од полупречника попречног пресека ($d >> a$), може се занемарити њихов међусобни утицај на расподелу наелектрисања. Значи, наелектрисање ће се на њима распоредити равномерно по површини, као и у случају усамљеног проводног цилиндра. Сваки од ових проводника има у произвољној тачки ван проводника (чији је вектор

положаја у односу на осу проводника $\vec{r}$) за последицу вектор јачине електричног поља

$$\vec{E} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}.$$

Резултантни вектор јачине електричног поља у било којој тачки А ван проводника једнак је векторском збиру поља од позитивно ($\vec{E}_+$) и негативно ($\vec{E}_-$) наелектрисаног проводника, ,

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r_+}\hat{r}_+ + \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r_-}\hat{r}_- = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_+}{r_+} + \frac{\hat{r}_-}{r_-}\right),$$

где су r_+ и r_- растојања тачке А од оса позитивно и негативно наелектрисаног проводника, респективно, а $\hat{r}_+$ и $\hat{r}_-$ одговарајући јединични вектори положаја.

Напон између проводника одређује се по дефиницији као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од површине позитивно оптерећеног до површине негативно оптерећеног проводника по произвољној путањи интеграције,

$$U = \int_{\text{povr.}+}^{\text{povr.}-} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Како се путања интеграције може произвољно бирати, изабраћемо ону по којој је интеграција најједноставнија. То је, у овом случају, $x-$ оса на којој су вектори $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ колинеарни, тако да је у произвољној тачки В на $x-$ оси интензитет вектора јачине електричног поља

$$E = E_+ + E_- = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right).$$

Вектор јачине електричног поља је колинеаран са $x-$ осом, односно са елементом путање интеграције ($\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x$), па је напон између проводника

$$U = \int_{x=a}^{x=d-a} \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_{x=a}^{x=d-a}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{x=a}^{x=d-a}\frac{\mathrm{d}x}{d-x}\right).$$

Први интеграл је таблични, док се други лако израчунава увођењем смене $d-x=t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ ($x=a \Rightarrow t=d-a$ и $x=d-a \Rightarrow t=a$), тако да је

$$U = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_{x=a}^{x=d-a}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_{t=d-a}^{t=a}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln x\Big|_a^{d-a} + \ln t\Big|_a^{d-a}\right) = \frac{q'}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a},$$

па је

$$C' = \frac{q'}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}.$$

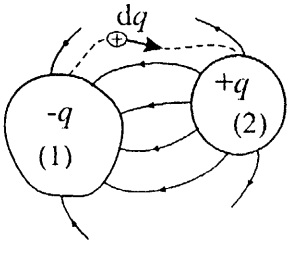
Како је $d >> a$, то је $d - a \approx d$, тако да се коначно добија

$$C' = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)}.$$

6.4. Енергија кондензатора

Нека су задата два проводна тела, (1) и (2). Да би их оптеретили једнаким количинама електрицитета супротног знака морамо извршити раздвајање наелектрисања - рецимо са тела (1) на тело (2) пребацити позитивно наелектрисање Q, што одговара пребацивању негативног наелектрисања са тела (2) на тело (1), или обрнуто. О начину оптерећивања кондензатора биће више речи касније.

Оптерећивање кондензатора, односно пребацивање наелектрисања са једне електроде на другу не може се извршити тренутно. У било ком тренутку у току оптерећивања количина електрицитета на електродама кондензатора ће бити q, а напон између њих $u = q/C$ (количина електрицитета и напон су означени малим словима јер се ради о тренутним, променљивим величинама). Да би се при тренутном оптерећењу, q, са негативне електроде на позитивну пребацила диференцијално мала позитивна количина електрицитета $\mathrm{d}q$ (слика 6.10), потребно је противу сила поља извршити диференцијално мали рад



Слика 6.10.

$$\mathrm{d}A = u\,\mathrm{d}q = \frac{1}{C}q\,\mathrm{d}q.$$

Укупан рад који се изврши противу сила поља да би се електроде кондензатора оптеретиле од $q = 0$ до коначног оптерећења $q = Q$ је

$$A = \int_{q=0}^{q=Q}\mathrm{d}A = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}.$$

Према закону о одржању рада и енергије овај рад је једнак енергији електростатичког поља кондензатора,

$$W = A = \frac{Q^2}{2C}.$$

Користећи познату везу између оптерећења кондензатора, напона између његових електрода и његове капацитивности, могу се написати још два еквивалентна израза за енергију електростатичког поља кондензатора:

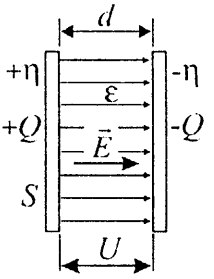
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2.}$$

6.5. Локализација енергије у електростатичком пољу

Енергија кондензатора, за коју је изведен израз у претходном поглављу, није везана за електроде кондензатора нити њихово оптерећење или напон између њих. Енергија је локализована (садржана) у самом пољу, у свакој физички бесконачно малој запремини простора у коме постоји електростатичко поље, и то са одређеном густином. Ово ћемо, због једноставности математичког апарата, показати на примеру равног кондензатора са хомогеним диелектриком у коме је поље хомогено. Међутим, касније ћемо на другом примеру показати да добијени резултати имају општу важност и да важе и за случај нехомогеног поља.

Посматрајмо раван кондензатор, површине електрода S и растојања између њих d, који има хомоген диелектрик диелектричне константе $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ (слика 6.11). Кондензатор је оптерећен количином електрицитета Q, тако да је напон између његових електрода U и енергија електростатичког поља

$$W = \frac{1}{2}QU.$$



Слика 6.11.

Како је $Q = \eta S$, $\eta = \varepsilon E$ и $U = Ed$, то се израз за енергију своди на

$$W = \frac{1}{2}\eta SEd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V,$$

где је V запремина међуелектродног простора у којој је локализовано електростатичко поље, а самим тим и енергија. Ако се обе стране горње једначине поделе са V,

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2,$$

добија се енергија електростатичког поља по јединици запремине или запреминска густина енергије електростатичког поља,

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 .}$$

Јединица за запреминску густину енергије је $w_u = \mathrm{J/m^3}$ (Џул по метру кубном).

Уколико је поље хомогено и позната запреминска густина енергије w, онда је укупна енергија електростатичког поља локализована у неком домену запремине V

$$W = wV .$$

У нехомогеном пољу у сваком елементу запремине $\mathrm{d}V$ локализована је енергија $\mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}V$, тако да је укупна енергија електростатичког поља локализована у запремини V

$$\boxed{W = \int_V \mathrm{d}W = \int_V w\,\mathrm{d}V .}$$

Да је енергија електростатичког поља локализована у пољу не може се доказати у оквирима електростатике, као што није било могуће доказати ни егзистенцију електростатичког поља. Међутим, како је електростатичко поље само један посебан вид динамичког (промењљивог) електромагнетног поља сама његова егзистенција (постојање електромагнетних таласа) и чињеница да је у њему локализована енергија посредно доказује да је и у електростатичком пољу локализована енергија која је једнака раду уложеном за његово формирање.

Покажимо сада на једном примеру да израз за густину енергије, изведен за случај хомогеног поља, важи и за нехомогено поље.

Нека је задата усамљена проводна лопта, полупречника a, која се налази у ваздуху ($\varepsilon \approx \varepsilon_0$) и која је оптерећена количином електрицитета Q. Већ смо показали да унутар лопте ($r < a$) нема поља и да је интензитет вектора јачине електричног поља ван лопте ($r \geq a$)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

тако да је густина енергије електростатичког поља

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}, & r \geq a \end{cases} .$$

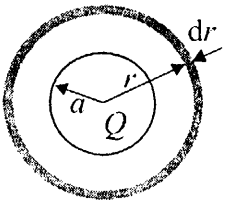
Значи, енергија електростатичког поља локализована је само у простору ван лопте. За одређивање ове енергије искористићемо дефиниционо израз

$$W = \int_V w \, \mathrm{d}V.$$

Елемент запремине треба одабрати тако да у свим његовим тачкама густина енергије има исту вредност, а како густина енергије зависи од r то значи да r треба да буде константно. Очигледно је да ове услове задовољава елементарна запремина у облику сферне љуске (слика 6.12) полупречника r и дебљине $\mathrm{d}r$,

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r$$

(ако се љуска развије њена површина је $4\pi r^2$ а дебљина $\mathrm{d}r$). До истог резултата за елемент запремине може се доћи и диференцирањем израза за запремину лопте ($V = 4\pi r^3/3 \Rightarrow \mathrm{d}V = 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r$).



Слика 6.12.

Уносећи изразе за густину енергије и елемент запремине у израз за одређивање енергије електростатичког поља добија се

$$W = \int_V w \, \mathrm{d}V = \int_a^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Како је капацитивност усамљене проводне сфере $C = 4\pi\varepsilon_0 a$, то се последњи израз може написати као

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

што је познати израз за енергију.

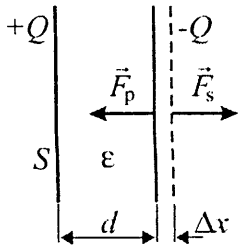
6.6. Сила између електрода кондензатора

Како су електроде кондензатора оптерећене разноименим количинама електрицитета између њих ће деловати привлачна сила. У принципу ову силу би смо могли да одредимо директном применом Кулоновог закона. Сваку од електрода можемо изделити на елементарне површине $\mathrm{d}S$ од којих је свака оптерећена елементарном количином електрицитета $\mathrm{d}Q = \eta \, \mathrm{d}S$. Затим можемо одредити силу на свако од елементарних оптерећења $\mathrm{d}Q$ на првој електроди од свих елементарних оптерећења $\mathrm{d}Q$ на другој електроди. Коначно, треба сабрати силе на сва елементарна оптерећења $\mathrm{d}Q$ на првој електроди. Овакав поступак би био изузетно сложен и практично се не користи.

Међутим, овај проблем се може лако превазићи применом такозваног метода виртуелних (привидних) помераја и закона о одржању рада и енергије.

Посматраћемо раван кондензатор са хомогеним диелектриком диелектричне константе $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, површине електрода S и размака између њих d (слика 6.13). Размотрићемо посебно два случаја: када је кондензатор након оптерећивања искључен са извора напајања, тако да количина електрицитета на његовим електродама остаје непромењена, и када кондензатор остаје прикључен на извор напајања, тако да напон између његових електрода остаје константан.

Обрадимо најпре случај када је $Q = \text{const}$. Пошто између електрода кондензатора делује привлачна сила $\vec{F}$, да би померили једну од електрода за неко растојање Δx морамо деловати страном силом $\vec{F}_s$ истог интензитета F супротног смера. При томе се изврши рад



Слика 6.13.

$$\Delta A = F\Delta x$$

који одлази на повећање електростатичке енергије кондензатора (енергија кондензатора расте јер се повећањем растојања електрода смањује капацитивност и, при константном оптерећењу, повећава напон),

$$\Delta A = \Delta W = W_2 - W_1,$$

где је W_2 енергија кондензатора након а W_1 пре размицања електрода за растојање Δx. Из последње две једначине следи

$$\boxed{F = \frac{\Delta W}{\Delta x}\Big|_{Q=\text{const}}.}$$

И у случају да је кондензатор прикључен на извор напајања (сталан напон) између његових електрода ће деловати привлачна сила. Да би се једна од електрода померила за Δx треба деловати силом истог интензитета супротног смера и извршити рад

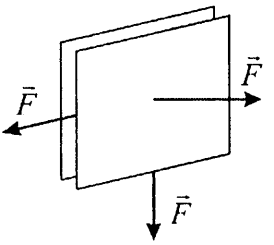
$$\Delta A = F\Delta x.$$

Приликом размицања електрода смањују се капацитивност и енергија кондензатора (при сталном напону смањује се количина електрицитета на електродама - враћа се извору и повећава његову енергију). Може се доказати да је смањење енергије кондензатора управо једнако уложеном раду страних сила

$$\Delta A = -\Delta W = -(W_2 - W_1)$$

тако да је сила између електрода кондензатора

$$\boxed{F = -\frac{\Delta W}{\Delta x}\Big|_{U=\text{const}}}$$



Слика 6.14.

Треба напоменути да исто разматрање и исти изрази који су горе изведени важе и за друге правце померања електрода (слика 6.14).

Одредимо сада привлачну силу између електрода кондензатора са слике 6.13. за случај да је $Q = \text{const}$. Прираштај енергије кондензатора при размицању електрода за Δx је

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}(d + \Delta x - d) = \frac{Q^2 \Delta x}{2\varepsilon S},$$

па је сила између електрода

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}.$$

Уколико је кондензатор прикључен на сталан напон прираштај енергије је

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{U^2}{2}(C_2 - C_1) = \frac{\varepsilon S U^2}{2}\left(\frac{1}{d + \Delta x} - \frac{1}{d}\right) = -\frac{\varepsilon S U^2 \Delta x}{2d(d + \Delta x)}.$$

Како $\Delta x \to 0$ то је $d(d + \Delta x) \approx d^2$, па је

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon S U^2 \Delta x}{2d^2}$$

и сила између његових електрода

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\varepsilon S U^2}{2d^2}.$$

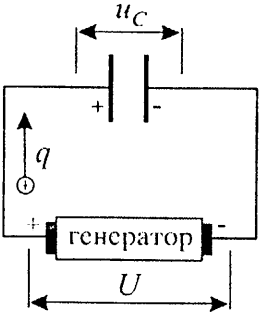
Наравно, када је кондензатор капацитивности C прикључен на напон U његово оптерећење је Q, па оба израза за силу морају дати исти резултат, што се лако доказује

$$F = \frac{\varepsilon S U^2}{2d^2}\frac{\varepsilon S}{\varepsilon S} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon S}{d}\right)^2 \frac{U^2}{\varepsilon S} = \frac{1}{2}\frac{C^2 U^2}{\varepsilon S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}.$$

6.7. Оптерећивање кондензатора

Већ смо напоменули да је кондензатор систем од два проводна тела (или групе међусобно повезаних проводних тела) наелектрисаних једнаким количинама електрицитета супротног знака. Пошто наелектрисања не могу да се створе већ само да се раздвоје, значи да у процесу оптерећивања кондензатора са једног неутралног проводног тела треба на друго неутрално проводно тело пребацити одређену количину електрицитета Q. На тај начин се на једном проводном телу (електроди) појављује вишак позитивних а на другом проводном телу (електроди) исти толики мањак позитивних (вишак негативних) наелектрисања.

Начин раздвајања наелектрисања приликом оптерећивања кондензатора није битан. Можемо, ово наравно треба схватити као шалу, пинцетом хватати електроне на једној електроди и пребацивати их на другу. Могуће је оптеретити кондензатор и електростатичком индукцијом (слика 1.4. и објашњење уз њу) или прикључивањем на већ оптерећени кондензатор.



Слика 6.15.

Међутим, најприкладнији и скоро искључиви начин оптерећивања кондензатора је помоћу генератора, уређаја о коме ће више речи бити у другом делу књиге. За сада га можемо сматрати "пумпом" која пребацује, кроз проводнике којима је спојена са електродама кондензатора, наелектрисања са једне електроде кондензатора на другу (слика 6.15).

Мада су електрони далеко покретљивији од позитивних наелектрисања, да не би дошло до неусаглашености са материјом у другом делу ове књиге, сматраћемо да се крећу позитивна оптерећења, што би одговарало кретању негативних оптерећења у супротном смеру.

Дотицањем количине електрицитета на једну електроду, односно отицањем количине електрицитета са друге електроде кондензатора, расте његово оптерећење q и напон између његових електрода,

$$u_C = \frac{q}{C}.$$

Овај процес ће трајати све док се напон између електрода кондензатора не изједначи са напоном на крајевима генератора (успостави стање електростатичке равнотеже),

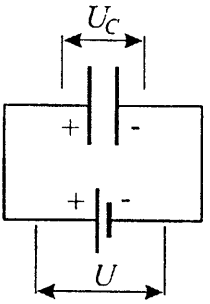
$$U_C = U,$$

тако да ће коначно оптерећење кондензатора бити

$$Q = CU.$$

Процес оптерећивања кондензатора није тренутан већ траје један одређени временски период (теоретски бесконачно дуг), о чему ће бити више речи у другом делу ове књиге. Разлог за коначно време оптерећивања кондензатора се најједноставније може објаснити енергетском анализом процеса у колу са генератором и кондензатором. Наиме, да би оптеретио кондензатор коначном количином електрицитета генератор мора да изврши одређени рад чији се један део трансформише у енергију електростатичког поља кондензатора. Уколико би се овај рад извршио тренутно снага генератора би морала бити бесконачно велика, што је физички немогуће.

У електричним шемама, у којима се кондензатор приказује једноставним графичким симболима са слике 6.4, није практично приказивати генератор на начин на који је то учињено на слици 6.15. Стога ћемо за означавање генератора користити једноставан графички симбол који се састоји од две паралелне цртице (слика 6.16). Дужа и тања цртица представља крај генератора који се налази на вишем потенцијалу.



Слика 6.16.

6.8. Питања за проверу

6.8.1. Како се дефинише капацитивност усамљеног проводника и од чега зависи?

6.8.2. Описати поступак за одређивање капацитивности усамљеног проводника.

6.8.3. Шта је то кондензатор?

6.8.4. Скицирати неколико примера проводника или група проводника које представљају кондензатор.

6.8.5. Како се дефинише капацитивност кондензатора и од чега зависи? Описати поступак за одређивање капацитивности кондензатора.

6.8.6. Извести израз за капацитивност усамљене проводне лопте полупречника a која се налази у хомогеном диелектрику чија је диелектрична константа $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

6.8.7. Извести израз за капацитивност сферног кондензатора са ваздушним диелектриком, полупречника електрода R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$).

6.8.8. Објаснити шта је то ивични ефекат код цилиндричног и равног кондензатора и када се може занемарити.

6.8.9. Извести израз за подужну капацитивност цилиндричног кондензатора полупречника електрода a и b $(a < b)$ са хомогеним диелектриком диелектричне константе ε. Занемарити ивични ефекат.

6.8.10. Извести израз за капацитивност равног кондензатора са ваздушним диелектриком, површине електрода S и растојања између њих d. Занемарити ивични ефекат.

6.8.11. Извести израз за подужну капацитивност неограничено дугог двожичног вода који се налази у ваздуху. Проводници вода су кружног попречног пресека полупречника a а њихове осе се налазе на међусобном растојању d $(d >> a)$.

6.8.12. Извести израз за енергију кондензатора.

6.8.13. Где је локализована енергија кондензатора?

6.8.14. Извести израз за густину енергије електростатичког поља кондензатора.

6.8.15. Објаснити како се, на основу познате запреминске густине енергије, израчунава енергија електростатичког поља локализована у некој запремини V у случају да је поље: а. хомогено и б. нехомогено.

6.8.16. Полазећи од израза за густину енергије електростатичког поља одредити енергију сферног кондензатора са диелектриком диелектричне константе ε, полупречника електрода a и b $(a < b)$.

6.8.17. Полазећи од израза за густину енергије електростатичког поља одредити подужну енергију цилиндричног кондензатора са ваздушним диелектриком, полупречника електрода R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$.

6.8.18. Којом методом се одређује сила између електрода кондензатора?

6.8.19. Објаснити како се одређује сила између електрода кондензатора ако су електроде оптерећене сталном количином електрицитета, а како ако је напон између електрода константан.

6.8.20. Извести израз за силу између електрода равног кондензатора када је оптерећен сталном количином електрицитета.

6.8.21. Извести израз за силу између електрода равног кондензатора када је прикључен на сталан напон.

6.8.22. Показати да су изрази добијени под 6.8.20. и 6.8.21. идентични.

6.8.23. Објаснити начин оптерећивања кондензатора.

6.8.24. Када престаје оптерећивање кондензатора прикљученог на генератор између чијих је прикључака напон U?

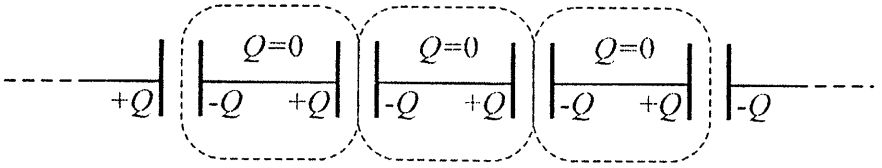
6.8.25. Објаснити због чега се кондензатор не може оптеретити (напунити) тренутно.

7. Спрезање кондензатора

Кондензатори се могу спрезати (повезивати) на пет различитих начина: редно (серијски), паралелно, мешовито, у звезду и троугао. Прве три везе кондензатора имају по два приступна краја па се могу заменити једним, еквивалентним, кондензатором који такође има два приступна краја. Везе у звезду и троугао имају по три приступна краја и није их могуће заменити еквивалентним кондензатором већ само, уколико је то потребно, извршити трансфигурацију једне везе у другу и обрнуто.

7.1. Редна веза кондензатора

Основна карактеристика редне везе кондензатора је да су сви кондензатори оптерећени једном истом количином електрицитета (слика 7.1). Наиме, ако леву електроду првог кондензатора оптеретимо са $+Q$ на десној електроди ће се издвојити иста количина електрицитета супротног знака, $-Q$. Пошто је укупна количина електрицитета унутар затворене површине (испрекидана линија на слици) била једнака нули,



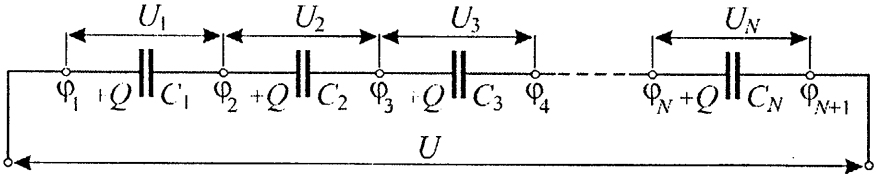
Слика 7.1.

мора остати нула и након оптерећивања. Стога ће на левој електроди другог кондензатора остати иста толика количина електрицитета $+Q$ која ће за последицу имати на његовој десној електроди оптерећење $-Q$ и тако даље, до последњег кондензатора у вези.

Посматрајмо редну везу N кондензатора која је прикључена на напон U (слика 7.2). Сви кондензатори су оптерећени истом количином електрицитета Q. Напони на појединим кондензаторима су, према дефиницији,

$$U_i = \varphi_i - \varphi_{i+1} = \frac{Q}{C_i}.$$

Саберимо напоне на свим кондензаторима



Слика 7.2.

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = U_1 + U_2 + \cdots + U_i + \cdots + U_N$$

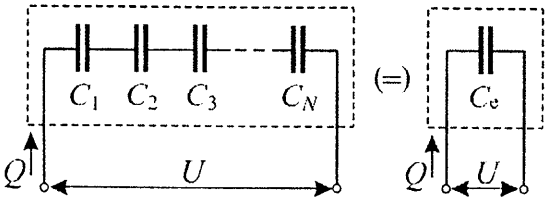
$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \cdots + \varphi_i - \varphi_{i+1} + \cdots + \varphi_N - \varphi_{N+1} = \varphi_1 - \varphi_{N+1}.$$

Како је $\varphi_1 - \varphi_{N+1}$ једнако укупном напону U на који је прикључена ова редна веза, може се писати

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q}{C_i} = Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}.$$

Пошто ова веза има два приступна краја може се заменити једним, еквивалентним, кондензатором који има ту особину да при истом напону прими исту количину електрицитета као и посматрана редна веза. Сликовито речено, ако би у једној црној кутији са два приступна краја имали редну везу кондензатора а у другој еквивалентни кондензатор (слика 7.3), мерењем напона U између приступних крајева и количине електрицитета Q која је протекла приликом оптерећивања кондензатора не би могло да се установи шта је у кутији.

Како и за еквивалентни кондензатор важи



Слика 7.3.

$$U = \frac{Q}{C_e},$$

изједначавањем два последња израза за напон добија се

$$\frac{Q}{C_e} = Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i},$$

односно

$$\boxed{\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}.}$$

Рециприочна вредност еквивалентне капацитивности N редно везаних кондензатора једнака је суми рециприочних вредности капацитивности кондензатора који учествују у вези.

У случају редне везе два кондензатора израз за еквивалентну капацитивност се своди на

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Очигледно је капацитивност еквивалентног кондензатора мања од најмање капацитивности у вези, док је напон на било ком кондензатору мањи од укупног напона. Стога се редна веза користи ако је напон на који треба прикључити кондензатор већи од максимално дозвољеног напона за један кондензатор. Погодним избором кондензатора може се остварити да еквивалентна капацитивност њихове редне везе има тражену вредност а да напон ни на једном кондензатору не премаши максимално дозвољену вредност.

7.2. Паралелна веза кондензатора

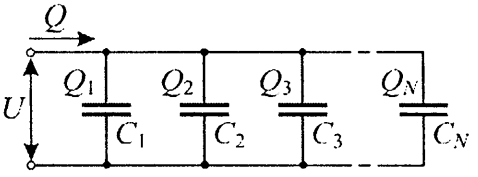
Основна карактеристика паралелне везе кондензатора је да су сви кондензатори прикључени на исти напон U.

Нека је паралелна веза N кондензатора прикључена на напон U (слика 7.4). Оптерећење сваког од кондензатора је

$$Q_i = UC_i,$$

па је укупно оптерећење свих кондензатора у вези

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N} UC_i = U\sum_{i=1}^{N} C_i.$$



Слика 7.4.

И ова веза, као и претходна, има два приступна краја и може се заменити једним еквивалентним кондензатором капацитивности C_e под условом да тај кондензатор при истом напону прими исту количину електрицитета

$$Q = UC_e$$

као и паралелна веза. Изједначујући количине електрицитета у два последња израза

$$UC_e = U\sum_{i=1}^{N} C_i,$$

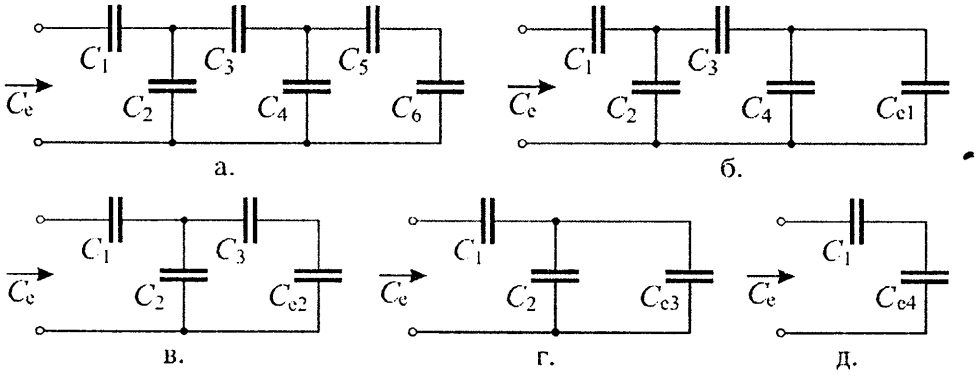
добија се коначан израз за еквивалентну капацитивност паралелне везе кондензатора,

$$C_e = \sum_{i=1}^{N} C_i .$$

Еквивалентне капацитивности N паралелно везаних кондензатора једнака је збиру капацитивности кондензатора који учествују у тој вези.

7.3. Мешовита веза кондензатора

Мешовита веза кондензатора је мање или више сложена мрежа паралелно и редно везаних кондензатора са два приступна краја тако да се може, као и претходне везе, заменити једним еквивалентним кондензатором. Одређивање еквивалентне капацитивности мешовите везе врши се поступним упрошћавањем: очигледне редне, односно паралелне везе замењују се еквивалентним кондензаторима, затим се тако упрошћена веза поново упрошћава и тако даље, све док се не дође до еквивалентне капацитивности. При томе, бар на почетку, не треба штедети са цртањем успутних еквивалентних шема. Ово се најбоље може објаснити на једном конкретном примеру: потребно је одредити еквивалентну капацитивност везе кондензатора приказане шемом на слици 7.5.а.



Слика 7.5.

У основној шеми а. је очигледно да су кондензатори C_5 и C_6 везани на ред и да се могу заменити једним еквивалентним

$$C_{e1} = \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6},$$

тако да се добија шема б. на којој се јасно може уочити да су кондензатори C_{e1} и C_4 везани паралелно, тако да се могу заменити једним еквивалентним кондензатором капацитивности

$$C_{e2} = C_{e1} + C_4 .$$

На тај начин се добија шема в. у којој су кондензатори C_{e2} и C_3 везани на ред па је њихова еквивалентна капацитивност

$$C_{e3} = \frac{C_3 C_{e2}}{C_3 + C_{e2}},$$

што даје шему г. у којој су C_2 и C_{e3} паралелно везани и могу се заменити једним еквивалентним кондензатором капацитивности

$$C_{e4} = C_{e3} + C_2$$

који је, коначно (шема д), везан на ред са C_1 тако да је тражена еквивалентна капацитивност

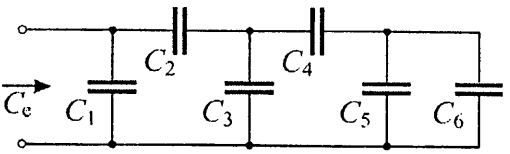
$$C_e = \frac{C_1 C_{e4}}{C_1 + C_{e4}}.$$

Све ово напред написано може се изразити и у једноставној симболичкој форми где $\oplus$ означава редну а $\|$ паралелну везу кондензатора. При томе операција $\|$ има приоритет над операцијом $\oplus$ док заграде, као и у математици, означавају редослед извршавања операција. За коло са слике 7.5.а. симболичка формула за одређивање еквивалентне капацитивности би гласила:

$$C_e = \left(\left(C_5 \oplus C_6\right) \| C_4 \oplus C_3\right) \| C_2 \oplus C_1 .$$

Као пример написаћемо симболичку формулу за еквивалентну капацитивност везе кондензатора приказане шемом на слици 7.6:

$$C_e = \left(\left(C_5 \| C_6 \oplus C_4\right) \| C_3 \oplus C_2\right) \| C_1 .$$



Слика 7.6.

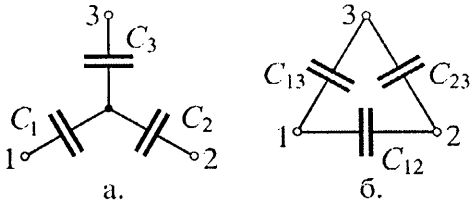
Значи:

- C_5 и C_6 везани паралелно
- на ред са тим везан је C_4
- паралелно са овом везом везан је C_3
- на ред са свим тим прикључен је C_2
- и, коначно, на све то паралелно је везан C_1.

7.4. Трансфигурација звезда - троугао и обрнуто

Поред веза са два приступна краја, које смо до сада обрађивали и код којих смо могли да одредимо еквивалентну капацитивност, постоје и везе са три приступна краја - веза у звезду (слика 7.7.а), за коју се користи скраћена ознака Y, и веза у троугао (слика 7.7.б) за коју се користи скраћена ознака D. Како ове везе имају по три приступна краја јасно је да не могу да се замене једним еквивалентним кондензатором јер он има два приступна краја. Међутим, ако су задате капацитивности кондензатора везе у звезду могу се одредити капацитивности кондензатора везе у троугао и обрнуто а да се у односу на спољашње коло, односно на тачке 1, 2 и 3, ништа не промени. Ово се назива трансфигурацијом звезде у троугао и обрнуто. Читаоца нећемо оптерећивати прилично дугим извођењима већ ћемо дати само коначне изразе за трансфигурацију.

Нека су задате капацитивности C_1, C_2 и C_3 везе у звезду. Ако се ова веза трансфигурише у троугао капацитивности троугла ће бити



Слика 7.7.

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_{13} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

С друге стране, ако су задате капацитивности C_{12}, C_{13} и C_{23} везе у троугао, тада су одговарајуће капацитивности везе у звезду

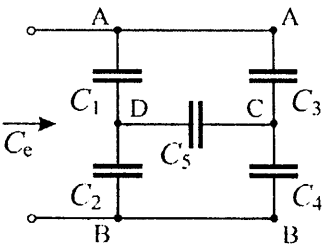
$$C_1 = C_{12} + C_{13} + \frac{C_{12} C_{13}}{C_{23}}$$

$$C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12} C_{23}}{C_{13}}$$

$$C_3 = C_{13} + C_{23} + \frac{C_{13} C_{23}}{C_{12}}.$$

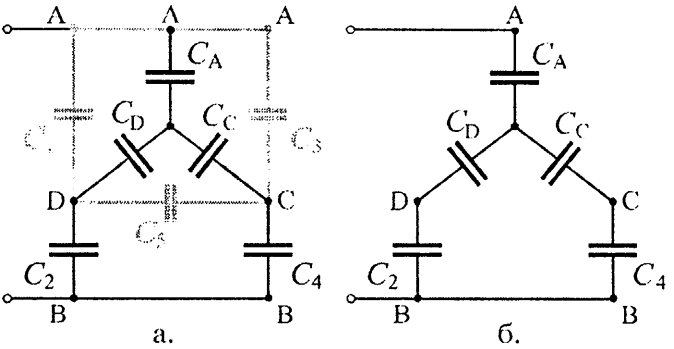
Трансфигурација звезде у троугао и обрнуто има веома важну улогу код трофазних система наизменичне струје. Међутим, и у колима са кондензаторима (а касније и у колима са отпорницима) може веома корисно да послужи за поједностављење кола при израчунавању еквивалентне капацитивности (отпорности).

Показаћемо ово на примеру где треба одредити еквивалентну капацитивност релативно једноставне везе (слика 7.8) пет кондензатора. Ако се шема пажљиво погледа уочиће се да нема ниједне ни редне ни паралелне везе кондензатора, па није могуће поступно упрошћавање као у претходном примеру. Међутим, у шеми се могу уочити две везе кондензатора у троугао (ADC и BDC), као и две везе кондензатора у звезду (ACB и ADB).



Слика 7.8.

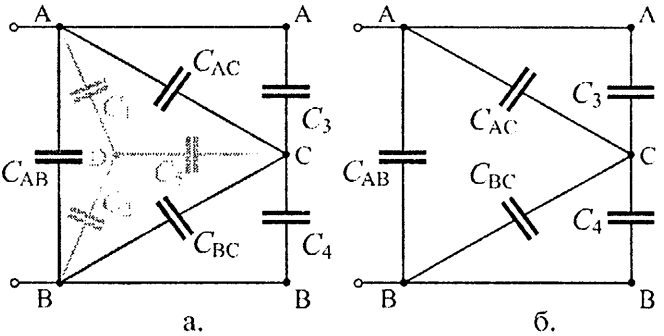
Ако се троугао ADC (кондензатори C_1, C_2 и C_3 на слици 7.9.а.) трансфигурише у звезду C_A, C_D и C_C добија се шема као на слици 7.9.б. Сада се еквивалентна капацитивност може лако одредити:



Слика 7.9.

$$C_e = (C_D \oplus C_2) \| (C_C \oplus C_4) \oplus C_A .$$

Такође је могуће трансфигурисати звезду ACB (кондензатори C_1, C_2 и C_3 на слици 7.10.а) у троугао C_{AB}, C_{AC} и C_{BC}. На тај начин се добија шема приказана на слици 7.10.б. Еквивалентна капацитивност је сада



Слика 7.10.

$$C_e = (C_{AC} \| C_3 \oplus C_{BC} \| C_4) \| C_{AB} .$$

Читаоцу се оставља да сам провери могућност примене трансфигурације код одређивања еквивалентне капацитивности ове везе кондензатора. То може учинити за нумеричке вредности: $C_1 = C_2 = 10\,\text{nF}$ и $C_3 = C_4 = C_5 = 20\,\text{nF}$. Само по себи је разумљиво да оба приступа морају дати исту бројну вредност за еквивалентну капацитивност, $C_e = 15\,\text{nF}$.

7.5. Питања за проверу

7.5.1. Набројте везе кондензатора. Које од њих су са два а које са три приступна краја?

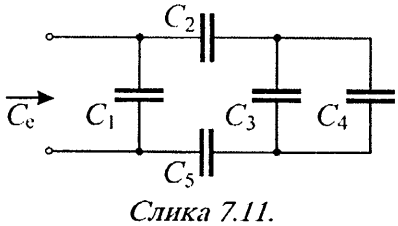
7.5.2. Шта је то еквивалентни кондензатор? Које везе кондензатора се могу заменити једним еквивалентним?

7.5.3. Извести израз за еквивалентну капацитивност редне везе кондензатора.

7.5.4. Извести израз за еквивалентну капацитивност паралелне везе кондензатора.

7.5.5. Како се одређује еквивалентна капацитивност мешовите везе кондензатора?

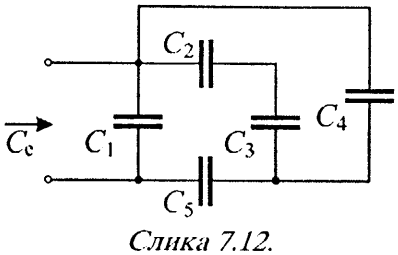
7.5.6. Објаснити шта је то трансфигурација звезда - троугао (и обрнуто) и када се примењује.



Слика 7.11.

7.5.7. Поступно упростити везу кондензатора са слике 7.11. и написати симболичку формулу за одређивање еквивалентне капацитивности. Израчунати еквивалентну капацитивност за следеће нумеричке податке:

$$C_1 = C_3 = 1\,\text{nF},\ C_2 = 3\,\text{nF},\ C_4 = 5\,\text{nF},$$
$$C_5 = 2\,\text{nF}.$$



Слика 7.12.

7.5.8. Поступно упростити везу кондензатора са слике 7.12. и написати симболичку формулу за одређивање еквивалентне капацитивности. Израчунати еквивалентну капацитивност за следеће нумеричке податке:

$$C_1 = C_3 = C_5 = 30\,\text{pF},\ C_2 = 60\,\text{pF},\ C_4 = 40\,\text{pF}.$$

8. Електрични дипол

Електричним диполом назива се систем од два тачкаста наелектрисања исте вредности супротног знака која се налазе на међусобном растојању d. Овакав систем наелектрисања, као и његово понашање у страном електростатичком пољу, има веома важну улогу код проучавања електростатичког поља у присуству материјалне средине.

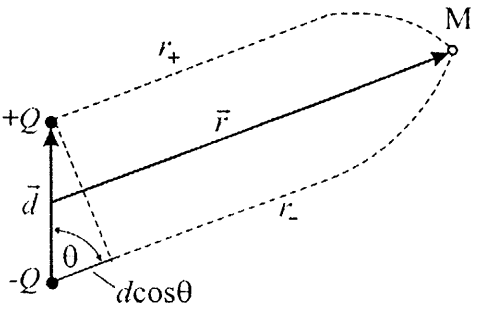
8.1. Потенцијал у далекој зони и електични момент дипола

Нека је вектор положаја позитивног наелектрисања у односу на негативно $\vec{d}$. Треба одредити потенцијал у тачки M (слика 8.1) чији је вектор положаја у односу на дипол $\vec{r}$ ($r >> d$ - такозвана далека зона).

Како је задат услов да је $r >> d$, то је $r_+ \approx r \approx r_-$. Ако се спусти нормала из позитивног оптерећења на правац r_- добиће се разлика растојања r_- и r_+,

$$r_- - r_+ = d\cos\theta.$$

Укупан потенцијал у тачки M једнак је збиру потенцијала од наелектрисања $+Q$ и $-Q$,



Слика 8.1.

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-,$$

па је

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_+} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2},$$

јер се производ две приближно исте величине r_+ и r_- може написати као r^2, док се њихова разлика мора узети у обзир.

Ако се израз за потенцијал помножи и подели са r добија се

$$\varphi = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{r}{r} = \frac{Qdr\cos\measuredangle\left(\vec{d},\vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{Q\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$$

(θ је угао између вектора $\vec{d}$ и $\vec{r}$ а $dr\cos\measuredangle(\vec{d},\vec{r})$ њихов скаларни производ). Величина

$$\boxed{\vec{p} = Q\vec{d}}$$

назива се ***електрични момент дипола*** и представља једну од његових веома важних карактеристика. То је векторска величина и његова јединица је $p_u = \mathrm{Cm}$.

Користећи електрични момент дипола, израз за потенцијал дипола у далекој зони може се написати у облику

$$\boxed{\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}.}$$

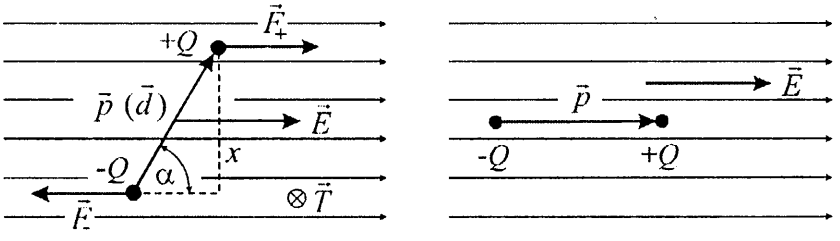
По одређивању функције потенцијала може се одредити и вектор јачине електростатичког поља као

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi .$$

Међутим, одређивање градијента у сферном координатном систему, у коме је изведен израз за потенцијал дипола, прелази оквире овог уџбеника.

8.2. Понашање дипола у хомогеном електричном пољу

Када се дипол унесе у хомогено електрично поље (слика 8.2.а) на његова наелектрисања деловаће силе у правцу поља: на позитивно наелектрисање у смеру поља а на негативно у супротном смеру. Интензитети ових сила су међусобно једнаки,



а. б.

Слика 8.2.

$$F_+ = F_- = QE,$$

и оне стварају спрег чији момент има интензитет

$$T = Fx = QEd\sin\alpha = pE\sin\measuredangle\left(\vec{p},\ \vec{E}\right).$$

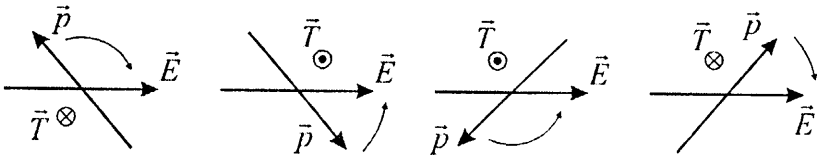
Момент је векторска величина, док је са друге стране

$$\left|\vec{p}\times\vec{E}\right| = pE\sin\angle\left(\vec{p},\vec{E}\right),$$

што је, очигледно, интензитет момента. На основу овога може се закључити да је

$$\boxed{\vec{T} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

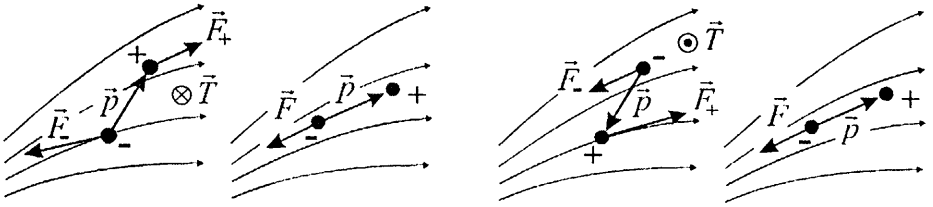
Момент спрега је управан на раван коју одређују вектори $\vec{p}$ и $\vec{E}$ (у овом случају раван цртежа) и тежи да вектор електричног момента дипола поклопи са вектором електричног поља (слика 8.2.б.). То важи и за било коју другу оријентацију вектора електричног момента дипола и вектора електричног поља - увек се јавља спрег момента $\vec{T}$ који тежи да вектор $\vec{p}$ доведе у положај вектора $\vec{E}$ (слика 8.3).



Слика 8.3.

8.3. Понашање дипола у нехомогеном електричном пољу

Када се дипол налази у нехомогеном електричном пољу на његова наелектрисања ће деловати силе различитог интензитета (сила на на-



а. б.

Слика 8.4.

електрисање које се налази у јачем пољу биће већа) па ће се поред спрега, који тежи да закрене дипол у смеру вектора електричног поља, појавити и резултантна сила која тежи да повуче дипол у простор у коме је електрично поље јаче (слика 8.4).

Ова особина дипола се користи за израду електростатичких филтера. Поларизоване честице гари, прашине и тако даље (електрични диполи који су настали у процесу поларизације, о чему ће касније бити више речи) пропуштају се кроз јако нехомогено електрично поље и гомилају уз електроду у чијој је близини јаче електрично поље.

8.4. Питања за проверу

8.4.1. Шта је то електрични дипол?

8.4.2. Извести израз за потенцијал у тачкама далеке зоне дипола.

8.4.3. Како се дефинише електрични момент дипола?

8.4.4. Која је јединица за електрични момент дипола?

8.4.5. Извести израз за момент спрега који делује на електрични дипол у хомогеном електричном пољу.

8.4.6. Описати понашање електричног дипола у хомогеном електростатичком пољу.

8.4.7. Описати понашање електричног дипола у нехомогеном електростатичком пољу. Да ли ово има практичну примену и какву?

9. Електрично поље у диелектрицима

Диелектрицима, односно изолаторима, назива се читав низ чврстих, течних и гасовитих материјала који не садрже слободно покретљива наелектрисања (електроне проводности и позитивне и негативне јоне). Истина, и код диелектрика под дејством електричног поља долази до веома малих покретања наелектрисања око центара равнотеже али ова наелектрисања (осим под дејством изузетно јаких поља) не могу напустити матичне атоме и молекуле јер се томе супротстављају атомске силе веза. *Стога таква наелектрисања називамо везаним наелектрисањима.*

У овој књизи ћемо разматрати само макроскопске (оне које су доступне нашим посматрањима и мерењима) ефекте присуства диелектрика јер микроскопске појаве спадају у домен Атомске физике. Такође ћемо се задржати само на линеарним и изотропним диелектрицима, то јест оним диелектрицима чије особине не зависе од јачине и правца електричног поља.

На утицај материјалне средине на електрично поље већ смо указали, а уочен је још код Кулонових експеримената: сила између два тачкаста наелектрисања, између осталог, зависи и од средине у којој се она налазе. Тек, знатно касније, су Фарадеј и Максвел прецизно формулисали макроскопске ефекте диелектрика на електрично поље.

Кевендиш, а касније и Фарадеј независно од њега, уочили су да се капацитивност једног кондензатора мења у присуству диелектричне материје. *Ако је капацитивност једног кондензатора C_0 када је између његових електрода вакуум (ваздух), а C капацитивност када је цео међуелектродни простор (цео простор у коме постоји поље) испуњен диелектриком, однос капацитивности C/C_0 не зависи од облика и димензија кондензатора већ само од врсте диелектрика. Овај однос се назива релативна диелектрична константа* (релативна диелектрична пропустљивост) *и означава са* ε_r,

$$\boxed{\varepsilon_r = C/C_0 .}$$

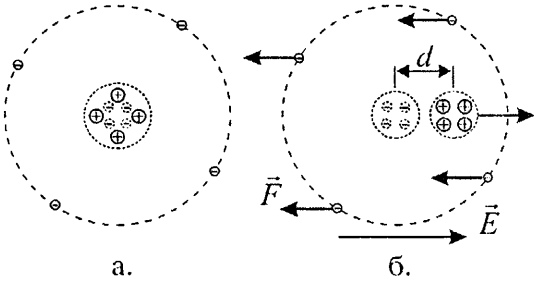
Релативна диелектрична константа је неименован број и увек је већа од јединице. У случају ваздуха има вредност $\varepsilon_r = 1.000594$ (па се сви резултати добијени за вакуум могу практично директно применити и у случају да је диелектрик ваздух) и креће се до $\varepsilon_r = 81.07$ за случај дестилисане воде.

Макроскопски ефекти присуства диелектрика су последица процеса који се одигравају на нивоу атома и молекула и који се назива *поларизација диелектрика.*

9.1. Поларизација диелектрика и вектор јачине поларизације

Мада постоје две врсте материјала који имају различите механизме поларизације, материјали са поларним и материјали са неполарним молекулима, макроскопски ефекти поларизације су исти.

За објашњење процеса поларизације неполарних атома и молекула најједноставније је користити Боров модел атома. Ако је атомски број елемента Z онда је наелектрисање језгра $Z\mathrm{e}$, при чему језгро поседује и одређени број неутрона. Око језгра кружи Z електрона укупног наелектрисања $-Z\mathrm{e}$. Ван страног електричног поља (слика 9.1.а) електронски омотач се може сматрати оптерећеном сфером чији је центар на месту језгра атома (раније је већ показано да се оптерећена сфера у односу на простор ван сфере понаша као тачкасто оптерећење које је смештено у њеном центру). То значи да се центри позитивног и негативног наелектрисања налазе на истом месту (на месту језгра атома) тако да се атом у односу на своју околину понаша неутрално.



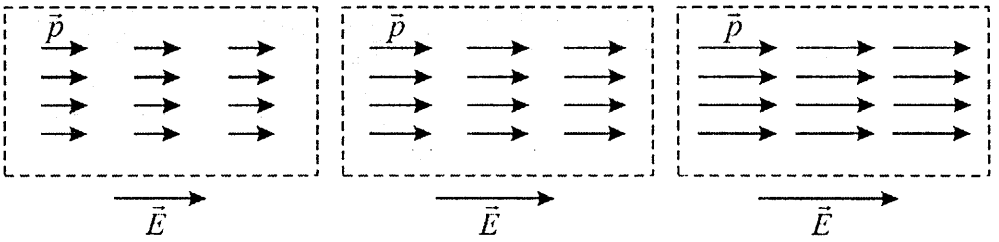
Слика 9.1.

Ако се овакав атом унесе у страно електрично поље на елементарна наелектрисања ће деловати, поред атомских сила везе, електростатичке силе услед страног електричног поља. Под дејством ових сила доћи ће до малог померања центара позитивних и негативних наелектрисања (слика 9.1.б) чиме ће се формирати електрични дипол момента

$$\vec{p} = Z\mathrm{e}\vec{d},$$

где је $\vec{d}$ вектор положаја центра позитивних у односу на центар негативних наелектрисања. Са повећањем јачине вектора електричног поља

расте и сила на елементарна наелектрисања (којој се супротстављају еластичне атомске силе веза), растојање између њих, а самим тим и момент елементарних дипола који су оријентисани у правцу и смеру вектора јачине електричног поља (слика 9.2.). Код јачина електричног поља које се нормално срећу у пракси момент дипола је директно пропорционалан јачини електричног поља.



Слика 9.2.

Описани процес поларизације је, у основи, сличан код свих материјала са неполарним молекулима.

Макроскопска величина која карактерише поларизацију диелектрика је ***вектор јачине поларизације,*** $\vec{P}$, који ***се дефинише као количник векторског збира свих диполних момената у физички бесконачно малом елементу запремине*** $\mathrm{d}V$ ***и те запремине*** (под физички бесконачно малим елементом запремине подразумева се запремина која са микроскопског аспекта садржи велики број атома и молекула, док је са макроскопског аспекта довољно мала да се може сматрати хомогено поларизованом),

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\Sigma \vec{p}}{\mathrm{d}V}.}$$

Вектор јачине поларизације је физичка величина и његова јединица је

$$P_{\mathrm{u}} = p_{\mathrm{u}}/V_{\mathrm{u}} = \mathrm{Cm/m^3} = \mathrm{C/m^2}.$$

Из дефиниционог израза за вектор јачине поларизације очигледно је да он представља запреминску густину електричних момената у поларизованом диелектрику. У случају да је диелектрик састављен само од неполарних молекула и хомогено поларизован, вектор јачине поларизације се може написати као

$$\vec{P} = \frac{\Sigma \vec{p}}{\mathrm{d}V} = \frac{N\,\vec{p}}{\mathrm{d}V} = N'\,\vec{p},$$

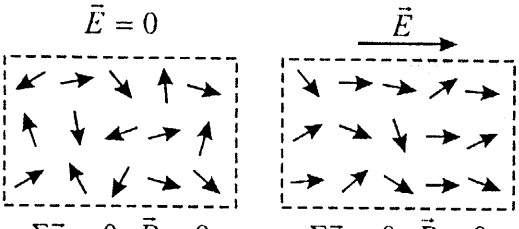
где је N' запреминска густина молекула (дипола) у диелектрику а $\vec{p}$ електрични момент једног молекула (дипола).

Како је електрични момент дипола неполарних молекула пропорционалан јачини електричног поља, то исто ће важити и за вектор јачине поларизације,

$$\boxed{\vec{P} = \alpha \vec{E},}$$

где се константа α назива ***коефицијент поларизације диелектрика.***

Поред већ описаних материјала са неполарним молекулима постоје и материјали са поларним молекулима који, и у одсуству страног електричног поља, имају на нивоу молекула изражен диполни момент. Карактеристични представник ових материјала је вода. У одсуству страног поља диполни моменти су произвољно оријентисани (слика 9.3.а) тако да је у једном физички бесконачно малом елементу запремине њихов векторски збир једнак нули, а самим тим и вектор јачине поларизације. Уношењем диелектричног материјала у електрично поље долази до оријентације диполних момената, што је већ описано код понашања дипола у електростатичком пољу. Ова оријентација је само делимична (слика 9.3.б) јер јој се супротставља термичко кретање молекула. При уобичајеним јачинама електричног поља и овде је вектор јачине поларизације пропорционалан јачини поља,



а. б.

Слика 9.3.

$$\boxed{\vec{P} = \alpha' \vec{E}.}$$

При изузетно великим јачинама поља ова линеарност се нарушава. Тада су сви диполи оријентисани у правцу и смеру поља па остаје само ефекат размицања центара позитивног и негативног наелектрисања, карактеристичан за материјале са неполарним молекулима.

Коефицијент поларизације диелектрика са поларним молекулима зависи и од температуре. Наиме, са порастом температуре, повећава се термичко кретања молекула које се супротставља оријентацији елементарних дипола. Због тога се смањује коефицијент поларизације који се може представити као

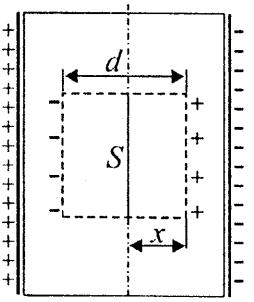
$$\alpha' = \alpha + \frac{\beta}{T},$$

где је T апсолутна температура а α и β константе независне од температуре. Константа α је последица размицања центара наелектрисања у присуству страног електричног поља, док је β последица оријентисања елементарних диполa.

9.2. Веза између вектора јачине поларизације и помераја везаних оптерећења у диелектрику

Вектор јачине поларизације је у претходном поглављу дефинисан као статичка величина (густина електричног момента у диелектрику) која карактерише стање диелектрика након завршетка поларизације. Но, питање је шта се дешава у току самог процеса поларизације.

Посматрајмо (слика 9.4) диелектрик у хомогеном пољу равног кондензатора и део равне површине S управне на линије поља. Када се успостави електрично поље позитивна везана наелектрисања се помере у правцу и смеру вектора електричног поља за неко просечно растојање x. Ако се са d означи средње растојање између позитивног и негативног наелектрисања дипола, онда ће се кроз исту површину S у супротном смеру померити везана негативна наелектрисања за просечно растојање $d-x$.



Слика 9.4

Нека је N' запреминска густина дипола у поларизованом диелектрику. У том случају се у току процеса поларизације кроз површину S помере сва позитивна наелектрисања која се налазе у запремини Sx, значи $N'Sx$, са укупним наелектрисањем

$$Q_e N'Sx.$$

Такође се кроз ту површину, али у супротном смеру, помере сва негативна наелектрисања која се налазе у запремини $S(d-x)$, укупно њих $N'S(d-x)$, са укупним наелектрисањем

$$-Q_e N'S(d-x).$$

Како је померању позитивних наелектрисања у једном смеру еквивалентно померање негативних наелектрисања у супротном смеру, укупна померена везана количина електрицитета кроз површину S у току процеса поларизације је

$$Q_v = Q_e N'Sx + \left|-Q_e N'S(d-x)\right| = Q_e N'Sd.$$

Водећи рачуна о томе да је $Q_e d = p$ и, у хомогено поларизованом диелектрику $P = N'p$, за количину везаних наелектрисања која се у току процеса поларизације помере кроз површину S управну на правац поља добија се

$$Q_v = N'pS = PS.$$

На основу последњег израза *интензитет вектора јачине поларизације у хомогеном пољу* се може дефинисати и као

$$\boxed{P = \frac{Q_v}{S} = \eta_v \cdot}$$

Значи: *интензитет вектора јачине поларизације једнак је површинској густини везаних наелектрисања која се у процесу успостављања електричног поља помере кроз површину управну на правац вектора јачине електричног поља.*

Када поље није хомогено, или површина није равна, интензитет вектора јачине поларизације се дефинише као

$$P = \frac{\mathrm{d}Q_v}{\mathrm{d}S_n},$$

где је $\mathrm{d}S_n$ елемент површине управан на правац померања везаних оптерећења, односно правац вектора јачине електричног поља.

Правац и смер вектора јачине поларизације у изотропним диелектрицима (а које искључиво разматрамо) одговара правцу и смеру померања позитивних везаних електричних оптерећења (правцу и смеру вектора јачине електричног поља).

Ако елемент површине $\mathrm{d}S$ није нормалан на правац вектора $\vec{P}$, односно ако вектори $\vec{P}$ и $\mathrm{d}\vec{S}$ нису колинеарни, количина везаних оптерећења која се помери кроз овај елемент површине је

$$\mathrm{d}Q_v = P\,\mathrm{d}S_n = P\,\mathrm{d}S\cos\angle\left(\vec{P}, \mathrm{d}\vec{S}_n\right) = \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

У најопштијем случају,

*количина везаних електричних оптерећења која се у току процеса поларизације помери кроз неку површину **S** у електричном пољу једнака је флуксу вектора јачине поларизације кроз ту површину*

$$Q_v = \int_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

То значи и да *позитиван излазни флукс вектора јачине поларизације кроз неку затворену површину,*

$$Q_v = \oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

одговара негативној везаној количини електрицитета која остаје унутар те површине.

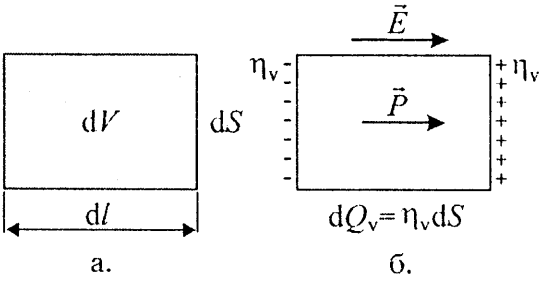
9.3. Макроскопски ефекти поларизације диелектрика

При анализи поља у материји треба разликовати микроскопске и макроскопске физичке величине. Вектор јачине поларизације је, већ по дефиницији, макроскопска величина. Међутим, то није случај са вектором јачине електричног поља и потенцијалом. Због дискретне структуре материје поље и потенцијал се веома неправилно мењају, чему треба додати и временске промене услед термичких кретања. Међутим, како су нашим опажањима и мерењима доступне само макроскопске величине, то ћемо у електротехници радити искључиво са њима. Те макроскопске величине ($\vec{E}$ и φ) представљају средње вредности микроскопских величина у неком домену физички бесконачно мале запремине $\mathrm{d}V$,

У електричном погледу поларизован диелектрик је еквивалентан мноштву елементарних електричних дипола који се налазе у вакууму. Код макроскопске анализе систем дискретних елементарних дипола се замењује системом уређених дипола који одговарају елементима запремине ΔV. Ови диполи су цилиндричног облика а површине њихових базиса $\mathrm{d}S$ су управне на правац вектора јачине поларизације.

Пре успостављања електричног поља цилиндрични елемент запремине $\mathrm{d}V$ се може посматрати као хомогена смеса једнаког броја позитивних и негативних наелектрисања (слика 9.5.а) која нема никаквог утицаја на околни простор. Након успостављања поља долази до малог померања позитивних (у смеру поља) и негативних (у супротном смеру) наелектрисања која се појављују на базисима цилиндра (слика 9.5.б). Сама унутрашњост елемента остаје и даље неутрална. Површинска густина везаних оптерећења на базисима цилиндра је, према извођењу у претходном поглављу,

$$\eta_v = P.$$



Слика 9.5.

До истог резултата се може доћи и на основу дефиниционог израза за вектор јачине поларизације. Уколико је познат вектор јачине поларизације $\vec{P}$ у елементу запремине $\mathrm{d}V$ онда је његов укупни електрични момент $\vec{p} = \vec{P}\,\mathrm{d}V$, интензитета $p = P\,\mathrm{d}V$. Према моделу са слике 9.5.б. дипол се састоји од наелектрисања $\pm\mathrm{d}Q_v = \pm\eta_v\,\mathrm{d}S$ која се налазе на међусобном растојању $\mathrm{d}l$, тако да му је момент

$$p = \mathrm{d}Q_\mathrm{v}\,\mathrm{d}l = \eta_\mathrm{v}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l = \eta_\mathrm{v}\,\mathrm{d}V.$$

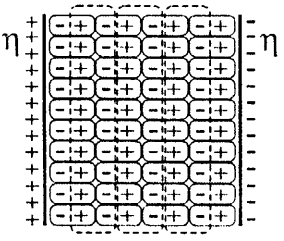
Дељењем обе стране једначине са $\mathrm{d}V$ добија се

$$\frac{p}{\mathrm{d}V} = P = \eta_\mathrm{v}.$$

Значи да се ***диелектрична средина може заменити системом уређених дипола на чијим су основама, нормалним на правац вектора јачине поларизације, односно вектора јачине електричног поља, локализована везана наелектрисања површинске густине*** η_v. Ова наелектрисања не могу напустити матични дипол чак и када су у непосредном додиру са проводником. ***"Неелектрични" остатак материјалне средине нема никаквог утицаја на електрично поље.***

Користећи се овим моделом објаснићемо на који начин диелектрик утиче на електрично поље.

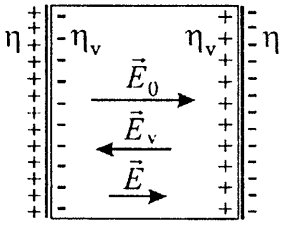
Посматрајмо кондензатор између чијих је електрода вакуум и чије су електроде равномерно оптерећене наелектрисањима површинске густине $+\eta$ и $-\eta$. Кондензатор је након оптерећивања искључен са извора, тако да се количина електрицитета на електродама не може променити. У простору између електрода ће владати хомогено електрично поље (ивични ефекат је занемарен) интензитета



Слика 9.6.

$$E_0 = \frac{\eta}{\varepsilon_0}.$$

оријентисано од позитивне ка негативној електроди. Када се у простор између електрода убаци хомоген и изотропан диелектрик доћи ће до његове поларизације. Искористићемо већ описани модел и диелектрик поделити на елементарне цилиндре запремине $\mathrm{d}V$ (елементарне диполе) на чијим је базисима површинска густина наелектрисања $\pm\eta_\mathrm{v}$ (слика 9.6). Укупно наелектрисање на додирној површини два базиса једнако је нули (уоквирено испрекиданом линијом на слици), тако да нема никаквог утицаја на електрично поље. Остају некомпензирана само везана оптерећења уз позитивну и негативну електроду кондензатора. Преостали "неелектрични" део материје, као што је већ поменуто, може се сматрати вакуумом. Према томе, из кондензатора са слике 9.6. можемо избацити диелектрик и оставити само некомпензирана везана електрична оптерећења непосредно уз електроде кондензатора (слика 9.7).



Слика 9.7.

Везана електрична оптерећења потпуно равноправно стварају електрично поље чији је интензитет

$$E_v = \frac{\eta_v}{\varepsilon_0}$$

и *које је супротно оријентисано у односу на поље* E_0 *које стварају слободна електрична оптерећења,* а које је постојало пре уношења диелектрика. Резултујућа јачина макроскопског електричног поља у диелектрику је

$$E = E_0 - E_v = \frac{1}{\varepsilon_0}(\eta - \eta_v).$$

Како је већ показано да је $\eta_v = P$ и $P = \alpha E$, последњи израз се може писати као

$$\varepsilon_0 E = \eta - \eta_v = \eta - \alpha E,$$

тако да је интензитет вектора јачине електричног поља у диелектрику

$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0 + \alpha}.$$

Пошто коефицијент поларизације α има исту димензију као и ε_0, може се писати $\alpha = \chi\varepsilon_0$, где је χ такозвана *електрична сусцептибилност* (неименован број већи од јединице). Израз за интензитет вектора електричног поља се своди на

$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0(1+\chi)} = \frac{\eta}{\varepsilon},$$

где је

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi) = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

диелектрична константа и

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \chi$$

релативна диелектрична константа или релативна диелектрична пропустљивост.

Како је

$$E = \frac{\eta}{\varepsilon} = \frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r},$$

то следи: *поље у хомогеном диелектрику је при истој расподели наелектрисања* ε_r *пута мање него у вакууму. У истој размери ће се смањити и сила између оптерећења,*

$$F = \frac{F_0}{\varepsilon_r},$$

као и напон између електрода кондензатора оптерећеног сталном количином електрицитета Q,

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}.$$

Последица овога је да се *капацитивност кондензатора са хомогеним диелектриком повећава ε_r пута у односу на капацитивност истог кондензатора када је између његових електрода вакуум,*

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_0/\varepsilon_r} = \varepsilon_r \frac{Q}{U_0} = \varepsilon_r C_0.$$

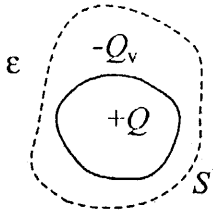
9.4. Генералисани Гаусов закон (Максвелов постулат)

Гаусов закон, изведен у Поглављу 4.3,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0},$$

важи за било какву расподелу електричних оптерећења у *вакууму*. Физички исказује чињеницу да је електростатичко поље изворног карактера, при чему су извори и понори линија вектора електричног поља позитивна и негативна слободна електрична оптерећења (јер у вакууму нема везаних електричних оптерећења).

Када се у електрично поље унесе диелектрик на његовим границама се појављују везана електрична оптерећења која су, такође, извори и понори линија вектора јачине електричног поља, док се "неелектрични" остатак може, у електричном погледу, третирати као вакуум. Значи да се и у том случају може применити Гаусов закон али да се, поред слободних, у обзир морају узети и везана електрична оптерећења.



Слика 9.8.

Посматрајмо наелектрисано тело, оптерећено количином електрицитета Q, које се налази у диелектрику, и уочимо једну затворену површину S која обухвата то тело (слика 9.8). Како се у току процеса поларизације кроз затворену површину S у правцу и смеру излазне нормале помери везана количина електрицитета

$$Q_v = \oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

то је укупно наелектрисање обухваћено површином S

$$\Sigma Q = Q + Q_{\mathrm{v}} = Q - \oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

јер позитивном излазном флуксу вектора $\vec{P}$ кроз неку затворену површину S (померај позитивних везаних наелектрисања у правцу и смеру излазне нормале на површину S) одговарају негативна везана наелектрисања која остају унутар те површине.

Према томе, Гаусов закон се може написати у облику

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + Q_{\mathrm{v}}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q - \oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\right),$$

односно

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q.$$

Како се флукс рачуна кроз исту затворену површину S, збир интеграла на левој страни горње једначине се може написати као интеграл збира,

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \mathrm{d}\vec{S} = Q.$$

Дефинишимо сада један нови вектор поља који се, према Максвелу, назива

вектор електричне индукције или вектор диелектричног померaја,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Вектор диелектричног померaја је физичка величина и из последњег израза је очигледно да је његова јединица

$$D_{\mathrm{u}} = P_{\mathrm{u}} = \mathrm{C/m^2}.$$

Увођењем вектора диелектричног померaја (електричне индукције) последња једначина се може написати као

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$$

и назива се генералисани Гаусов закон или Максвелов постулат. Уколико је већи број слободних оптерећења обухваћен затвореном површином S онда ***генералисни Гаусов закон гласи***

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Sigma Q,}$$

где је на десној страни алгебарски збир слободних оптерећења. У случају да је слободно електрично оптерећење распоређено у некој запремини V са познатом запреминском густином ρ тада је

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\, \mathrm{d}V,}$$

где је V запремина обухваћена затвореном површином S.

Излазни флукс вектора електричне индукције кроз произвољну затворену површину једнак је алгебарском збиру слободних наелектрисања обухваћених том површином.

Максвелов постулат исказује физичку чињеницу да је поље вектора електричне индукције изворно и да су извори и понори линија поља вектора $\vec{D}$ искључиво слободна електрична оптерећења, за разлику од вектора $\vec{E}$ где су извори и понори линија поља и слободна и везана електрична оптерећења. Значи,

вектор електричне индукције је независан од средине у којој се наелектрисања налазе.

Дефиниционо израз за вектор електричне индукције,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

важи за све врсте диелектричних средина, без обзира на то да ли је диелектрик хомоген, линеаран и изотропан или не, јер при његовом извођењу нису чињена никаква ограничења у погледу особина диелектрика.

У линеарним и изотропним диелектрицима вектор јачине поларизације је колинеаран са вектором јачине електричног поља и директно му је пропорционалан,

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

па се за вектор електричне индукције може писати

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi)\vec{E},$$

односно

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}.}$$

где су χ, ε и ε_r већ раније дефинисани.

Вектор диелектричног помераја се може равноправно користити са вектором јачине електричног поља и у вакууму. Како је у вакууму

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

значи да су спектри поља ова два вектора идентични (разликује се само размера) јер постоје само слободна електрична оптерећења која су извори и понори линија поља оба вектора.

Како су извори и понори линија поља вектора $\vec{D}$ само слободна оптерећења, значи да ће његов спектар у било каквој изотропној средини бити исти као и спектар поља вектора $\vec{E}$ у вакууму.

Ово ће касније бити показано на неколико примера.

9.5. Гранични услови

Пошто на раздвојној површини два диелектрика долази до скоковите промене карактеристика средине (диелектричне константе) нормално је очекивати да ће доћи и до скоковите промене вектора поља. У овом поглављу биће изведена веза између појединих компоненти поља у једном и другом диелектрику. Међутим, мада је потпуно очигледан, изветићемо најпре гранични услов за вектор електричне индукције на површини проводника.

9.5.1. Гранични услов на површини проводника

Разматрајући понашање проводника у електростатичком пољу показали смо да у вакууму вектор јачине електричног поља на површини проводника мора да задовољи услов

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{n}.$$

Множењем ове једначне са ε_0 добија се гранични услов за вектор електричне индукције на површини проводника у вакууму,

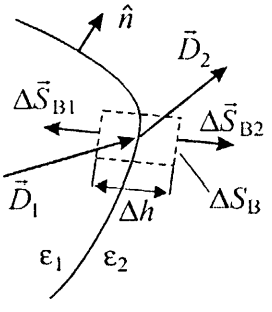
$$\boxed{\vec{D} = \eta\hat{n}.}$$

Значи, у свакој тачки проводника вектор електричне индукције је нормалан на површину проводника, а интензитет му је једнак површинској густини наелектрисања на том месту.

Како вектор електричне индукције не зависи од средине у којој се налазе електрична оптерећења, очигледно је да ће гранични услов важити за било коју диелектричну средину у којој се налази проводник.

9.5.2. Гранични услов за нормалне компоненте вектора електричне индукције

Посматрајмо раздвојну површину два диелектрика диелектричних константи ε_1 и ε_2 (слика 9.9) на којој нема слободних електричних оптерећења. Означимо са $\hat{n}$ вектор јединичне нормале оријентисан од средине (1), диелектричне константе ε_1, ка средини (2), диелектричне константе ε_2. Нека су $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ вектори електричне индукције у срединама (1) и (2) непосредно уз раздвојну површину (вектори $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ имају исту нападну тачку на самој раздвојној површини али, због прегледности слике, нападна тачка вектора $\vec{D}_1$ је померена).



Слика 9.9.

За одређивање граничног услова искористићемо Максвелов постулат. Уочићемо једну малу затворену цилиндричну површину чији су базиси паралелни раздвојној површини а омотач управан на њу. Како нас интересује гранични услов у једној тачки, површина базиса ΔS_B мора тежити нули, $\Delta S_B \to 0$. Такође и висина цилиндра мора тежити нули, $\Delta h \to 0$, јер нас интересује вектор електричне индукције на самој раздвојној површини. Укупни излазни флукс вектора електричне индукције кроз ову затворену површину једнак је нули (јер она не обухвата слободна електрична оптерећења) и може се одредити као збир флуксева кроз поједине делове површине,

$$\Psi_D = 0 = \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Delta S_{B1}} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\Delta S_{B2}} \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\Delta S_O} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Последњи интеграл на десној страни је, очигледно, једнак нули. Наиме, површина омотача је диференцијално мала величина а линије поља су на њој оријентисане делом у смеру улазне, а делом у смеру излазне нормале. Са друге стране, пошто $\Delta S_B \to 0$, поље на површини базиса се може сматрти хомогеним па се може писати

$$\vec{D}_1 \cdot \Delta\vec{S}_{B1} + \vec{D}_2 \cdot \Delta\vec{S}_{B2} = 0.$$

Како је $\Delta\vec{S}_{B1} = -\Delta S_B \hat{n}$ и $\Delta\vec{S}_{B2} = \Delta S_B \hat{n}$, то следи

$$-\vec{D}_1 \cdot \hat{n}\Delta S_B + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}\Delta S_B = 0,$$

и, након скраћивања са ΔS_B,

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n},$$

коначно се добија

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Нормалне компоненте вектора електричне индукције са обе стране раздвојне површине су међусобно једнаке.

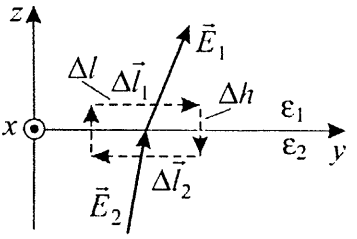
Како је средина изотропна то је $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, одакле следи

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

На раздвојној површини долази до скоковите промене нормалне компоненте вектора јачине електричног поља.

9.5.3. Гранични услов за тангенцијалне компоненте вектора јачине електричног поља

Нека раздвојна површина два диелектрика, диелектричних константи ε_1 и ε_2, буде површина $z = 0$ Декартовог правоуглог координатног система (слика 9.10). У средини диелектричне константе ε_1 вектор јачине електричног поља је $\vec{E}_1$ а у средини диелектричне константе ε_2 $\vec{E}_2$ (вектори електричног поља имају исту нападну тачку на самој раздвојној површини).



Слика 9.10.

За одређивање граничног услова искористићемо чињеницу да је електростатичко поље конзервативно,

$$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

Као контуру интеграције одабраћемо један веома мали правоугаоник дужине $\Delta l \to 0$ (јер нас интересује гранични услов у једној тачки) и висине $\Delta h \to 0$ (јер нас интересује однос поља на самој раздвојној површини).

Контура интеграције мора бити оријентисана. Оријентишимо је у смеру казаљке на сату тако да је $\Delta\vec{l}_1 = \Delta l\hat{y}$ и $\Delta\vec{l}_2 = -\Delta l\hat{y}$. Интеграл по затвореној путањи може се раздвојити на више делова,

$$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Delta l1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\Delta l2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{2\Delta h} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

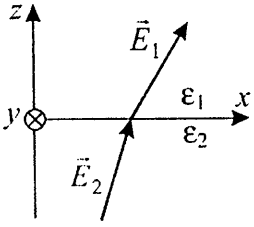
Како $\Delta h \to 0$ и $\Delta l \to 0$ то је вредност последњег интеграла на десној страни једнака нули (линијски интеграли поља дуж једне и друге страни-

це Δh је исте вредности али супротног знака) и, како се поље на дужини Δl може сматрати хомогеним, добија се

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}_2 = 0,$$

односно

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{y}\Delta l = \vec{E}_2 \cdot \hat{y}\Delta l,$$



Слика 9.11.

што након скраћивања са Δl даје

$$E_{1y} = E_{2y}.$$

На потпуно исти начин (слика 9.11) доказује се и да су $x-$ компоненте поља у равни $z = 0$ (раздвојна површина диелектрика) у средини ε_1 и средини ε_2 једнаке,

$$E_{1x} = E_{2x}.$$

Из ова два услова следи:

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Тангенцијалне компоненте вектора јачине електричног поља на раздвојној површини два диелектрика су међусобно једнаке.

Како је у изотропној средини $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$, то следи

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}.$$

На раздвојној површини два диелектрика тангенцијална компонента вектора електричне индукције се скоковито мења.

9.5.4. Закон преламања линија поља

На граници два диелектрика, где долази до скоковите промене диелектричне константе, скоковито се мењају и поједине компоненте вектора поља, односно долази до преламања линија поља. У изотропној средини вектори јачине електричног поља и електричне индукције су колинеарни па је довољно извести закон преламања линија поља само једног од њих, рецимо вектора електричне индукције.

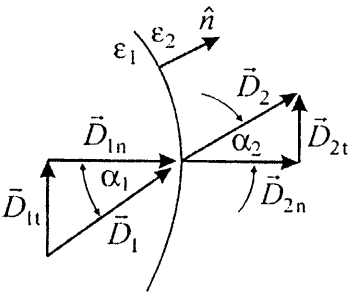
Нека вектор $\vec{D}_1$ у средини ε_1 заклапа са јединичном нормалом на раздвојну површину $\hat{n}$ угао α_1 а вектор $\vec{D}_2$ у средини ε_2 угао α_2 (слика 9.12). Оба вектора се могу разложити на две ортогоналне компоненте - тангенцијалну (у равни раздвојне површине) и нормалну (нормалну на

раздвојну површину). Са слике је очигледно да за ове компоненте важе односи

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}.$$



Слика 9.11.

Потражимо количник ове две једначине, при чему ћемо водити рачуна о граничним условима ($D_{1n} = D_{2n}$ и $E_{1t} = E_{2t}$),

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{D_{1t}/D_{1n}}{D_{2t}/D_{2n}} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1 E_{1t}}{\varepsilon_2 E_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Значи, закон преламања линија поља вектора електричне индукције, односно вектора јачине електричног поља гласи

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}},}$$

где су α_1 и α_2 углови које линије поља на раздвојној површини заклапају са нормалом на раздвојну површину.

9.6. Критично поље; примери примене Максвеловог постулата и граничних услова

Код сваког диелектричног материјала, у зависности од његове структуре, при једној одређеној вредности вектора јачине електричног поља долази до пробоја. Описивање самог механизма пробоја диелектрика прелази оквире ове књиге. За сада је довољно рећи да при тој вредности јачине електричног поља, која се назива критично поље и за које је уобичајена ознака E_{kr}, кроз диелектрик почиње да протиче кондукциона електрична струја. Ово ће имати за последицу прекомерно загревање диелектрика, што у највећем броју случајева доводи до његовог уништења. Стога се мора водити рачуна о томе да ни у једној тачки диелектрика јачина електричног поља не пређе вредност критичног поља.

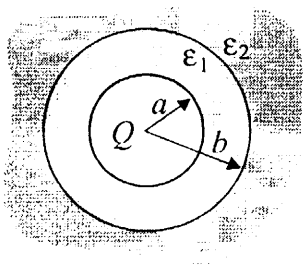
Наравно, због могућих нехомогености у диелектрику, никада се при прорачуну (рецимо максималног напона на који сме да се прикључи неки кондензатор) не ради са критичним пољем већ са неком мањом вредношћу.

Однос критичног поља диелектрика и максималне јачине поља са којом се врши прорачун назива се коефицијент сигурности,

$$ks = E_{kr} / E_{max} \ .$$

У таблицама, у којима се дају карактеристике појединих диелектричних материјала, поред релативне диелектричне константе увек се даје и критично поље. Тако је, рецимо, за сув ваздух вредност критичног поља $E_{kr} = 3\,\mathrm{MV/m}$.

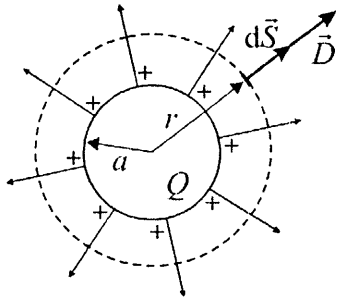
9.6.1. Усамљена проводна лопта омотана слојем диелектрика



Слика 9.13.

Нека је задата усамљена проводна лопта полупречника a, оптерећена количином електрицитета Q, омотана концентричним слојем диелектрика релативне диелектричне константе ε_{r1}. Систем се налази у неограниченом хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ε_{r2} (слика 9.13). Раздвојна површина диелектрика је полупречника b. Треба одредити векторе електричне индукције и јачине електричног поља, као и потенцијал у функцији растојања r од центра система.

Као што смо већ напоменули, спектар поља вектора електричне индукције не зависи од диелектрика и исти је као и спектар вектора јачине електричног поља у вакууму (јер су у вакууму извори и понори линија поља оба вектора само слободна електрична оптерећења). Очигледно је да у лопти нема поља ($D = 0$ за $r < a$) а да је ван лопте (за $r \geq a$) поље радијално (слика 9.14). Кроз тачку на растојању r, у којој желимо да израчунамо вектор електричне индукције, поставимо једну затворену површину S симетричну задатом проблему (концентрична сфера) и применимо Максвелов постулат,



Слика 9.14.

$$\Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Sigma Q \, .$$

У свакој тачки површине S вектори $\vec{D}$ и $\mathrm{d}\vec{S}$ су колинеарни и, пошто због високог степена симетрије интензитет вектора електричне индукције има исту вредност у свим тачкама те површине, излазни флукс је

$$\Psi_D = \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D\,\mathrm{d}S = D\oint_S \mathrm{d}S = DS = 4\pi r^2 D\,.$$

Према Максвеловом постулату овај флукс је једнак обухваћеној количини слободних наелектрисања, Q, одакле следи

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

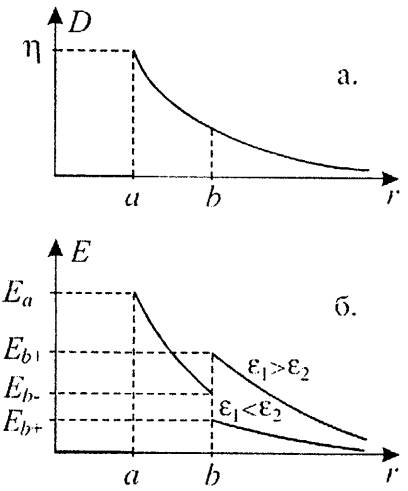
Како је поље вектора електричне индукције радијално, може се коначно писати

$$\vec{D} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Интензитет вектора електричне индукције има максималну вредност на површини лопте,

$$D_{\max} = D_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} = \eta,$$

а затим опада са другим степеном растојања од центра. Дијаграм $D(r)$ је приказан на слици 9.15.а. И са слике је очигледно да вектор електричне индукције "не препознаје средину" и да се континуално мења и на граници две средине ($r = b$) јер на њој нема слободних наелектрисања.



Слика 9.15.

По одређивању вектора електричне индукције вектор јачине електричног поља се лако одређује по дефиницији. У унутрашњости проводне лопте поље је, као и индукција, једнако нули, док је ван ње

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2}\hat{r}, & a \leq r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2}\hat{r}, & r > b \end{cases}.$$

Дијаграм промене интензитета вектора јачине електричног поља, $E(r)$, приказан је на слици 9.15.б. У диелектрику диелектричне константе ε_1 електрично поље има максималну вредност на површини лопте,

$$E_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 a^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}a^2} = \frac{\eta}{\varepsilon_1} = \frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}},$$

(што одговара граничном услову на површини проводника) а затим опада са квадратом растојања до вредности

$$E_{b-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 b^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}b^2},$$

коју има на раздвојној површини $r = b$ са стране првог диелектрика. На раздвојној површини диелектрика долази до скоковите промене јачине електричног поља због присуства везаних електричних оптерећења (на самој граници диелектрика се појављују везана оптерећења супротног знака различитих апсолутних вредности тако да је њихова површинска густина различита од нуле), а затим, од вредности

$$E_{b+} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 b^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}b^2},$$

поље опада са квадратом растојања. Однос јачина електричног поља у једном и другом диелектрику на самој раздвојној површини зависи од односа диелектричних константи, што се може уочити и на слици.

Функција потенцијала се одређује по дефиницији као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од тачке у пољу до унапред изабране референтне тачке нултог потенцијала. Пошто положај референтне тачке није посебно дефинисан узима се у бесконачности,

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

За путању интеграције најпогодније је одабрати неку од линија поља тако да је $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$. Потенцијал се одређује најпре у подручју које је ближе референтној тачки како би се ти резултати могли касније користити.

Значи, за $r \geq b$ је

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r},$$

па је потенцијал раздвојне површине $r = b$

$$\varphi_b = \varphi_{r=b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}b}.$$

У подручју $a \leq r \leq b$ потенцијал је

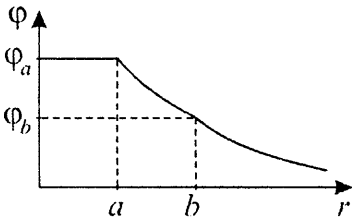
$$\varphi=\int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_b^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\varphi_b=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\int_r^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2}+\varphi_b$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{b-r}{rb}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 b}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{b-r}{rb}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}b}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(\frac{b-r}{\varepsilon_{r1}r}+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right).$$

Потенцијал површине лопте ($r=a$), а самим тим и свих тачака у унутрашњости лопте, је

$$\varphi_a=\varphi_{r=a}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(\frac{b-a}{\varepsilon_{r1}a}+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)=Q\frac{\varepsilon_{r2}(b-a)+\varepsilon_{r1}a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}ab}.$$

Дијаграм промене потенцијала у зависности од растојања, $\varphi(r)$, приказан је на слици 9.16. Треба уочити да је функција потенцијала непрекидна (јер да би потенцијална разлика између две бесконачно блиске тачке била коначна, јачина поља би морала да буде бесконачно велика, што је физички немогуће). Међутим, први извод ове функције се мора скоковито мењати на местима где се скоковито мења јачина електричног поља.



Слика 9.16.

Капацитивност ове лопте (кондензатора, јер се и усамљена проводна лопта може сматрати кондензатором чија је друга електрода у бесконачности) може се одредити по дефиницији као

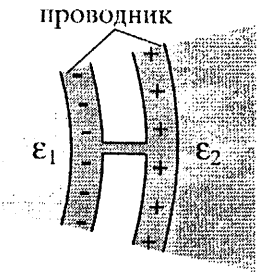
$$C=\frac{Q}{\varphi_a}=\frac{Q}{Q\dfrac{\varepsilon_{r2}(b-a)+\varepsilon_{r1}a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}ab}}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}ab}{\varepsilon_{r2}(b-a)+\varepsilon_{r1}a}.$$

До истог резултата за капацитивност може се доћи и без одређивања функције потенцијала. Површина $r=b$ је еквипотенцијална и за њу важе исти услови као и за проводну површину: све тачке су на истом потенцијалу а линије поља су управне на њу. Значи да уместо еквипотенцијалне површине $r=b$ можемо убацити једну веома танку проводну љуску, а да се у систему ништа не промени. На унутрашњој страни љуске ће се индуковати негативно оптерећење једнако по апсолутној вредности оптерећењу лопте, а на спољашњој исто толико позитивно оптерећење. Ако се сада љуска "расече" (слика 9.17), задржавајући само један спој да би се очувала еквипотенцијалност, добиће се два кондензатора: сферни кондензатор полупречника електрода a и b са диелектриком диелектричне константе ε_1, чија је капацитивност

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{ab}{b-a},$$

и усамљена сфера полупречника b која се налази у диелектрику диелектричне константе ε_2 и чија је капацитивност

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_2 b = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} b.$$



Слика 9.17.

Ови кондензатори су везана на ред (оптерећени су истом количином електрицитета а укупан напон је једнак збиру напона на њима) па је њихова еквивалентна капацитивност

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{ab}{b-a}\cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} b}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{ab}{b-a} + 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} b} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2} ab}{\varepsilon_{r2}(b-a) + \varepsilon_{r1} a}.$$

Одредићемо сада максималан потенцијал $\varphi_{a\max}$ на који сме да се доведе ова лопта а да не дође до пробоја у диелектрику. Критично поље за диелектрик ε_1 је E_{kr1} док за диелектрик ε_2 износи E_{kr2}. Коефицијент сигурности је ks, тако да је максимална дозвољена вредност поља у појединим диелектрицима

$$E_{d1} = \frac{E_{kr1}}{\mathrm{ks}} \qquad \text{и} \qquad E_{d2} = \frac{E_{kr2}}{\mathrm{ks}}.$$

Услов је да максимално поље ни у једном диелектрику не сме да пређе максимално дозвољену вредност.

Највећа вредност поља у првом диелектрику је на самој површини лопте ($r = a$) и она мора бити мања или једнака максимално дозвољеном пољу за тај диелектрик,

$$E_{\max 1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} a^2} = \frac{C\varphi_{a\max 1}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} a^2}$$

$$= \frac{\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2} ab}{\varepsilon_{r2}(b-a) + \varepsilon_{r1} a}\varphi_{a\max 1}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} a^2} = \frac{\varepsilon_{r2} b\varphi_{a\max 1}}{\varepsilon_{r2} a(b-a) + \varepsilon_{r1} a^2} \le E_{d1}.$$

Значи, обзиром на први диелектрик, потенцијал лопте треба да задовољи услов

$$\varphi_{a\max 1} \le \frac{\varepsilon_{r2} a(b-a) + \varepsilon_{r1} a^2}{\varepsilon_{r2} b} E_{d1}.$$

Максимално поље у другом диелектрику је на површини $r = b$ и мора бити мање или једнако максимално дозвољеном пољу за тај диелектрик,

$$E_{\max 2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}b^2} = \frac{C\varphi_{a\max 2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}b^2}$$

$$= \frac{\dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}ab}{\varepsilon_{r2}(b-a)+\varepsilon_{r1}a}\varphi_{a\max 2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}b^2} = \frac{\varepsilon_{r1}a\varphi_{a\max 2}}{\varepsilon_{r2}b(b-a)+\varepsilon_{r1}ab} \le E_{d2}.$$

Обзиром на пробој у другом диелектрику потенцијал лопте мора да задовољи услов

$$\varphi_{a\max 2} \le \frac{\varepsilon_{r2}b(b-a)+\varepsilon_{r1}ab}{\varepsilon_{r2}a}E_{d2}.$$

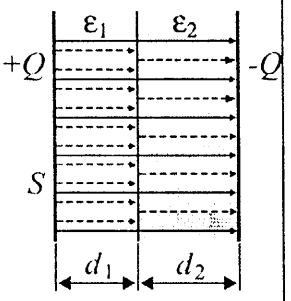
Да не би дошло до пробоја ни у једном од диелектрика, максимални потенцијал лопте не сме да премаши ниједну од одређених вредности, то јест мора да задовољи услов

$$\varphi_{a\max} \le \min\{\varphi_{a\max 1}, \varphi_{a\max 2}\}.$$

9.6.2. Раван кондензатор са двослојним диелектриком
(раздвојна површина нормална на вектор електричне индукције)

Раван кондензатор, површине електрода S, има два диелектрика диелектричних константи ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) и дебљина d_1 и d_2. Раздвојна површина диелектрика је паралелна са електродама кондензатора па је вектор електричне индукције (пуне линије на слици 9.18) управан на њу и има исту вредност у оба диелектрика (гранични услов $D_{1n} = D_{2n}$),

$$D = \eta.$$



Слика 9.18.

Стога се вектор јачине електричног поља у једном и другом диелектрику разликује,

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\eta}{\varepsilon_1} = \frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$$

и

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{\eta}{\varepsilon_2} = \frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}.$$

Линије вектора јачине електричног поља су нацртане испрекиданим линијама и њихова густина (која је пропорционална јачини електричног поља) је већа у првом диелектрику јер је његова диелектрична константа ε_1 мања од диелектричне константе ε_2 другог диелектрика.

Напон између електрода кондензатора је

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} d_1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} d_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right),$$

док је његова капацитивност

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)} = \varepsilon_0 S \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{d_1 \varepsilon_{r2} + d_2 \varepsilon_{r1}}.$$

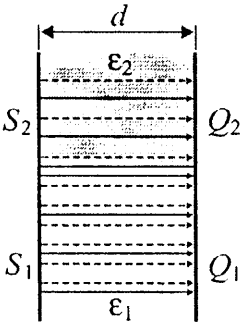
Капацитивност се могла одредити на исти начин као и у претходном примеру. Раздвојна површина ова два диелектрика је еквипотенцијална па се уместо ње може убацити танка проводна фолија. На тај начин се добија редна веза два кондензатора капацитивности

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2},$$

тако да је еквивалентна капацитивност

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2}} = \varepsilon_0 S \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{d_1 \varepsilon_{r2} + d_2 \varepsilon_{r1}}.$$

9.6.3. Раван кондензатор са двослојним диелектриком
(вектор електричног поља тангира раздвојну површину)



Слика 9.19.

Задат је раван кондензатор растојања између електрода d и њихове укупне површине $S_1 + S_2$. Међуелектродни простор је испуњен са два диелектрика диелектричних константи ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$). Како линије вектора јачине електричног поља (пуне линије на слици 9.19) тангирају раздвојну површину диелектрика, вектор јачине електричног поља у оба диелектрика мора имати исту вредност E (због граничног услова $E_{t1} = E_{t2}$) па је напон између електрода кондензатора

$$U = Ed.$$

Да би вектор јачине електричног поља у оба диелектрика имао исту вредност, мора се разликовати вектор електричне индукције (испрекидане линије), при чему ће његов интензитет бити већи у диелектрику веће диелектричне константе ε_1. Из граничног услова на површини проводника ($D = \eta$) следи да ће на делу кондензатора површине S_1 (са диелектриком ε_1) површинска густина наелектрисања бити

$$\eta_1 = D_1 = \varepsilon_1 E = \varepsilon_1 \frac{U}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{U}{d},$$

док ће на делу кондензатора површине S_2 (са диелектриком ε_2) бити

$$\eta_2 = D_2 = \varepsilon_2 E = \varepsilon_2 \frac{U}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{U}{d}.$$

Укупно оптерећење кондензатора је

$$Q = \eta_1 S_1 + \eta_2 S_2 = \frac{U}{d} \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S_1 + \frac{U}{d} \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S_2,$$

тако да је његова капацитивност

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S_2}{d}.$$

И у овом случају се капацитивност може одредити на други начин. Ако се електроде кондензатора пресеку дуж раздвојне површине диелектрика (дуж линија поља) и, да би се очувала њихова еквипотенцијалност, споје проводником (слика 9.20) ништа се неће променити. На тај начин се добија паралелна веза два кондензатора капацитивности

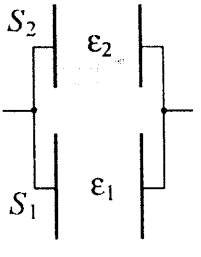
$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S_1}{d}$$

и

$$C_2 = \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S_2}{d},$$

па је еквивалентна капацитивност

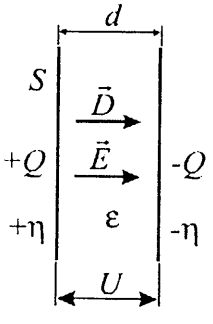
$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S_2}{d}.$$



Слика 9.20.

9.7. Локализација енергије у електростатичком пољу у диелектрику

У Поглављу 6.5. смо показали како се одређују густина енергије и енергија електростатичког поља у вакууму. И у присуству диелектрика енергија електростатичког поља је локализована у пољу са одређеном густином. Израз за густину енергије извешћемо, због једноставности, за случај хомогеног поља у хомогеном диелектрику. Међутим, добијени резултат има општу важност и може се применити и код нехомогеног поља у нехомогеном диелектрику.



Слика 9.21.

Нека је дат раван кондензатор површине електрода S и растојања између њих d (слика 9.21.) са диелектриком диелектричне константе ε. Количина електрицитета на електродама кондензатора је Q а напон између њих U. Имајући у виду да је $\eta = D$ и да је у хомогеном пољу $U = Ed$, израз за енергију електростатичког поља овог кондензатора се може писати као

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\eta SEd = \frac{1}{2}DEV,$$

где је $V = Sd$ запремина у којој је локализовано електрично поље (запремина међуелектродног простора кондензатора). Дељењем обе стране ове једначине са V добија се енергија по јединици запремине, односно густина енергије електростатичког поља,

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}.$$

9.8. Питања за проверу

9.8.1. Објаснити процес поларизације диелектрика са неполарним молекулима.

9.8.2. Колики је електрични момент елементарног дипола који настаје у току процеса поларизације и како зависи од интензитета страног електричног поља?

9.8.3. Зашто се наелектрисања дипола насталих у току процеса поларизације називају везаним наелектрисањима?

9.8.4. Како су оријентисани елементарни диполи диелектрика са поларним молекулима у одсуству страног електричног поља и шта се дешава са њима када се успостави страно електрично поље?

9.8.5. Како се назива и како се дефинише макроскопска величина која карактерише стање поларизације диелектрика?

9.8.6. Написати везу између вектора јачине поларизације и вектора јачине електричног поља.

9.8.7. Написати израз за коефицијент поларизације диелектрика са поларним молекулима.

9.8.8. Извести везу између вектора јачине поларизације и помераја везаних оптерећења у диелектрику у току процеса поларизације.

9.8.9. Колика се количина везаних оптерећења у току процеса поларизације помери кроз произвољну површину у нехомогеном пољу?

9.8.10. Чиме се замењује диелектрик при анализи електричног поља у материјалној средини?

9.8.11. Која наелектрисања равноправно учествују у стварању електричног поља?

9.8.12. Како је оријентисан вектор јачине електричног поља везаних наелектрисања, а како вектор јачине резултантног електричног поља у односу на вектор јачине електричног поља слободних наелектрисања?

9.8.13. Изразити релативну диелектричну константу преко електричне сусцептибилности диелектрика.

9.8.14. Да ли је електрично поље у вакууму, при истом распореду наелектрисања, веће или мање од електричног поља у диелектрику? Колики је њихов однос?

9.8.15. Колики је однос капацитивности кондензатора са хомогеним диелектриком релативне диелектричне константе ε_r *и кондензатора истог облика и димензија који за диелектрик има вакуум?*

9.8.16. Извести генералисани Гаусов закон и исказати га речима.

9.8.17. Коју физичку чињеницу у вези вектора електричне индукције исказује генералисани Гаусов закон.

9.8.18. Написати дефинициону везу између вектора $\vec{D}$, $\vec{E}$ *и* $\vec{P}$ *и њихове јединице.*

9.8.19. Шта су извори и понори линија поља вектора електричне индукције а шта вектора јачине електричног поља?

9.8.20. Да ли спектар поља вектора електричне индукције зависи од материјалне средине? У чему се разликује од спектра поља вектора јачине електричног поља истог распореда наелектрисања у вакууму?

9.8.21. Извести гранични услов за вектор електричне индукције на површини проводника.

9.8.22. Извести гранични услов за нормалне компоненте вектора електричне индукције на раздвојној површини два диелектрика.

9.8.23. Извести гранични услов за тангенцијалне компоненте вектора јачине електричног поља на раздвојној површини два диелектрика.

9.8.24. Извести закон преламања линија поља на раздвојној површини два диелектрика.

9.8.25. Шта је то критично поље, а шта коефицијент сигурности?

9.8.26. Како се може одредити капацитивност кондензатора са вишеслојним диелектриком када су раздвојне површине диелектрика нормалне на линије поља, а како када су тагенцијалне линијама поља?

9.8.32. Извести израз за густину енергије електростатичког поља у диелектрику.

10. Кретање наелектрисане честице у електростатичком пољу

Уколико честица масе m и наелектрисања Q улеће неком брзином $\vec{v}_0(x,y,z)$ у електрично поље $\vec{E}(x,y,z)$ на њу ће деловати, сходно II Њутновом закону, сила $\vec{F}(x,y,z)$ која ће јој саопштавати неко убрзање $\vec{a}(x,y,z)$. Одређивање брзине честице и њене трајекторије у најопштијем случају може бити веома сложен проблем. Овде ћемо обрадити само два посебна случаја: одређивање апсолутне вредности брзине честице када се она у електростатичком пољу произвољне конфигурације креће између две тачке и када честица почетном брзином $\vec{v}_0$ улеће у хомогено електрично поље управно на линије поља. Наравно, радићемо са брзинама које су далеко мање од брзине светлости, тако да ћемо занемарити релативистичке ефекте.

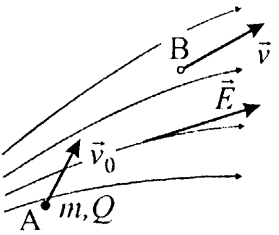
10.1. Одређивање интензитета вектора брзине наелектрисане честице у електричном пољу

Нека честица масе m и оптерећења Q у тачки А електричног поља има почетну брзину $\vec{v}_0$ (слика 10.1). Под дејством сила поља, или савлађујући силе поља, честица стиже у тачку В у којој има брзину $\vec{v}$. При овом кретању силе поља су извршиле рад (или је извршен рад противу сила поља)

$$A = Q(\varphi_A - \varphi_B) = QU_{AB}.$$

Овај рад, према Закону о одржању рада и енергије, одлази на прираштај кинетичке енергије честице,

$$A = \Delta W = W_B - W_A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$



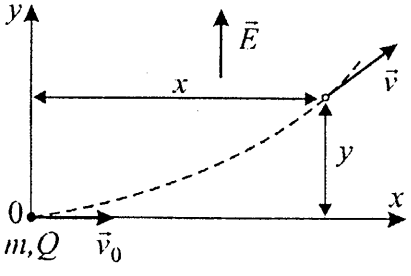
Слика 10.1.

тако да је интензитет вектора брзине честице у тачки B

$$v = \sqrt{\frac{2QU_{AB}}{m} + v_0^2}\,.$$

Не треба посебно напомињати да се Q и U_{AB} уносе у последњи израз са својим алгебарским знаком.

10.2. Кретање наелектрисане честице која улеће у хомогено електрично поље почетном брзином управном на линије поља



Слика 10.2.

Нека честица масе m и наелектрисања Q улеће у хомогено електрично поље $\vec{E} = E\hat{y}$ почетном брзином $\vec{v}_0$, $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ (слика 10.2). На наелектрисану честицу у пољу ће, у свакој тачки, деловати сила

$$\vec{F} = Q\vec{E} = QE\hat{y} = F\hat{y}\,.$$

Ова ће сила, сходно II Њутновом закону, саопштавати честици убрзање

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{QE}{m}\hat{y}\,.$$

Надаље је проблем најједноставније решавати преко параметарских једначина кретања. Како честица има убрзање само у правцу y–осе, x компонента брзине се неће мењати,

$$v_x = v_{0x} = v_0\,,$$

док ће y компонента брзине у сваком тренутку бити

$$v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{QE}{m}\,\mathrm{d}t = \frac{QE}{m}t\,.$$

Пређени пут до било ког тренутка t у правцу x–осе биће

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,\mathrm{d}t = \int_0^t v_0\,\mathrm{d}t = v_0 t\,,$$

док ће у правцу y–осе бити

$$y = y_0 + \int_0^t v_y \, \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{QE}{m} t \, \mathrm{d}t = \frac{QE}{2m} t^2 .$$

Ако се из једначине за x компоненту пута изрази време,

$$t = \frac{x}{v_0},$$

и то унесе у израз за y компоненту пута добиће се једначина путање по којој се креће честица,

$$y = \frac{QE}{2mv_0^2} x^2,$$

а то је једначина параболе.

10.3. Питања за проверу

10.3.1. Шта ће бити са апсолутном вредношћу брзине позитивно наелектрисане честице ако се она у електростатичком пољу креће од тачке нижег до тачке вишег потенцијала?

10.3.2. Како ће зависити промена интензитета брзине наелектрисане честице приликом њеног кретања у електростатичком пољу од њене масе, а како од њеног наелектрисања?

10.3.3. Извести једначину кретања наелектрисане честице која улеће задатом почетном брзином у хомогено електростатичко поље управно на линије поља.

ДЕО II

ЕЛЕКТРОКИНЕТИКА

11. Електрична струја

11.1. Основни појмови

Под електричном струјом се подразумева свако уређено кретање електричних оптерећења, без обзира на њихову врсту и узроке кретања. Електрична струја може постојати у чврстим, течним и гасовитим срединама, па чак и у вакууму. Једини услов је да постоје слободно покретљива наелектрисања и узрочник њиховог усмереног кретања.

Покретљива наелектрисања која учествују у формирању електричне струје могу бити, у зависности од средине кроз коју струја протиче, електрони и позитивни и негативни јони. На основу тога струје се могу поделити на електронске и јонске. Код електронских струја не долази ни до каквих материјалних промена у средини кроз коју протичу, док код јонских струја долази до преношења супстанце и до хемијских промена средине.

У чврстим телима, посебно у веома важној категорији коју чине метални проводници, слободно покретљива наелектрисања су електрони, такозвани електрони проводности, који су веома лабаво везани за

матичне атоме и молекуле те их, и под дејством веома малих сила, могу лако напустити.

Електрична струја се може образовати и у течним срединама, од којих су посебно значајни електролити (раствори киселина, база и соли). У њима су слободно покретљиви носиоци електрицитета позитивни и негативни јони.

И у гасовима, који су у принципу добри изолатори, под одређеним условима може доћи до појаве електричне струје (на пример флуоресцентне цеви). У овом случају су слободни носиоци електрицитета електрони и позитивни и негативни јони.

Коначно, електрична струја може постојати и у вакууму уколико се обезбеди присуство слободних електрона (на пример емисијом електрона са загрејане катоде електронске цеви).

Поред присуства слободно покретљивих наелектрисања за постојање електричне струје неопходан је и неки узрок који ће ова наелектрисања усмерено (уређено) покретати. Најчешћи и најважнији узрок је електрично поље, мада се наелектрисања могу кретати и услед других разлога (гравитационо поље, наелектрисани обруч који ротира око своје осе и тако даље).

Водећи рачуна о практичном значају и потребама, у овој књизи ће бити разматране искључиво *струје које настају у чврстим проводницима под дејством електричног поља* на слободне електроне. Ове струје *се називају кондукционим струјама.*

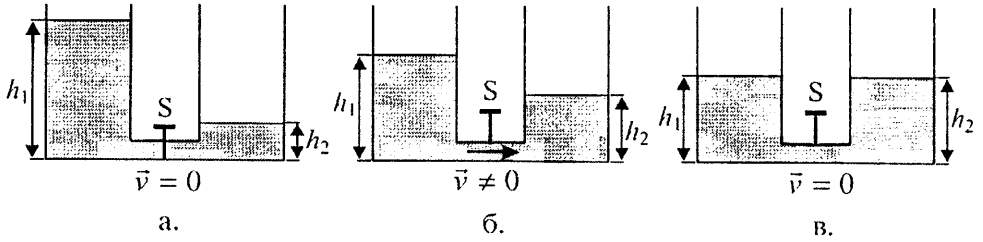
11.2. Стационарно електрично поље и стационарна електрична струја

Кондукционе електричне струје, као што је већ напоменуто, *представљају усмерено кретање слободних електрона* (или, како се још називају, *електрона проводности*) *кроз чврсте проводнике под дејством електричног поља. Да би електрична струја била стационарна (непромењива у времену) и електрично поље мора бити стационарно.* Мада се и стационарно и електростатичко поље не мењају у времену, и мада имају још неколико заједничких карактеристика, имају и две битне разлике:

- стационарно електрично поље, за разлику од електростатичког, постоји и унутар проводника и

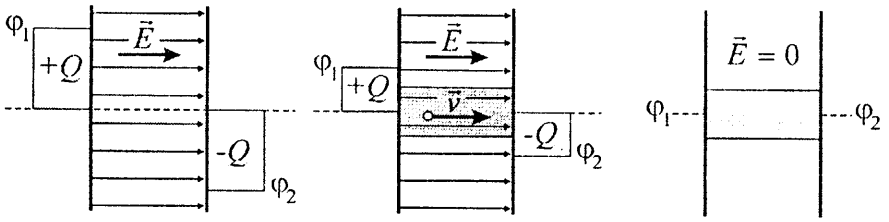
- за одржавање стационарног електричног поља потребно је стално вршити рад.

Ради лакшег уочавања сличности и разлика између електростатичког и стационарног електричног поља веома корисно може послужити једна хидродинамичка аналогија.



Слика 11.1.

Посматрајмо два суда са течношћу спојена једном цеви на којој се налази славина S. Када је славина затворена (слика 11.1.а) ниво течности у судовима је h_1, односно h_2 у односу на заједничко дно судова (референтни ниво). Мада постоји разлика нивоа $\Delta h = h_1 - h_2$, кроз спојну цев неће протицати течност јер је славина затворена (затворен спојни пут). Када се славина отвори и успостави спојни пут (слика 11.1.б), кроз цев почиње да протиче течност брзином $\vec{v}$. Ова брзина је највећа у тренутку отварања славине, када је и разлика нивоа течности Δh највећа. Са опадањем Δh опада и брзина да би на крају, када се нивои течности изједначе ($\Delta h = 0$), престало и протицање течности (слика 11.1.в). Значи да један овакав систем не може да обезбеди да кроз спојну цев протиче течност сталном брзином.



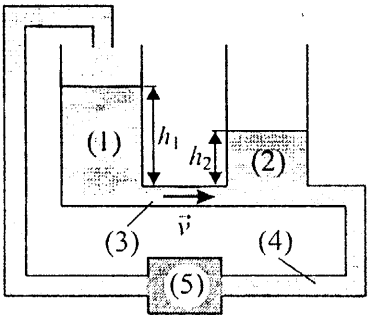
Слика 11.2.

Слично разматрање може се применити и код електростатичког поља. Нека су електроде равног кондензатора оптерећене једнаким количинама електрицитета супротног знака ($+Q$ и $-Q$). Потенцијали електрода у односу на произвољну референтну тачку су φ_1 и φ_2, тако да је напон између њих $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Уколико се занемари ивични ефекат, поље између електрода кондензатора је хомогено (слика 11.2.а).

Ако се између електрода кондензатора постави проводник (успостави проводни пут - тамније осенчена површина на слици 11.2.б), што одговара отварању славине у претходном хидродинамичком примеру, у

првом тренутку ће и у проводнику постојати електрично поље. То поље ће деловати силом на слободно покретљива наелектрисања која ће се усмерено кретати од једне електроде кондензатора ка другој, значи појавиће се електрична струја. Са пребацивањем наелектрисања са једне електроде на другу смањиваће се оптерећење електрода, поље и потенцијална разлика између њих. Смањивање јачине електричног поља имаће за последицу смањивање брзине покретљивих наелектрисања кроз проводни пут, а самим тим и смањивање јачине електричне струје. Када се пребаце сва наелектрисања са једне електроде на другу (слика 11.2.в) поље и потенцијална разлика између електрода постају једнаки нули тако да кроз проводни пут више нема кретања наелектрисања, односно не протиче више електрична струја. Значи, уз помоћ једног електростатичког система можемо остварити само краткотрајну променљиву струју.

Шта би требало учинити како би се у проводном путу одржавала стационарна (непроменљива у времену) електрична струја? Послужићемо се опет хидродинамичком аналогијом.



Слика 11.3.

Да би се у цеви која спаја два суда одржавала стална брзина течности неопходно је одржавати сталну разлику нивоа воде у судовима, $\Delta h = h_1 - h_2 = \text{const}$. Ово је могуће остварити (слика 11.3) ако се у сваком тренутку количина течности која је кроз спојну цев (3) из првог суда (1) дотекла у други суд (2) врати назад у први суд кроз цев (4) помоћу пумпе (5). Из овог се лако може закључити шта је неопходно за одржавање сталне брзине течности $\vec{v}$ у спојним цевима (3) и (4):

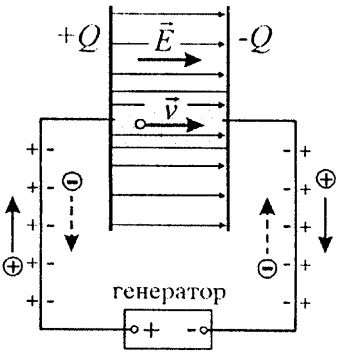
- *Стална разлика нивоа* $\Delta h = h_1 - h_2$. Ово се обезбеђује количинама течности у судовима (1) и (2) које се не мењају у времену. Ове количине течности се називају стационарним јер, мада је у сваком тренутку количина течности у сваком од судова остала непромењена, то није једна иста течност. Наиме, уместо сваког молекула течности који кроз спојну цев (3) напусти суд (1) у њега се кроз спојну цев (4) посредством пумпе (5) враћа неки други молекул, тако да количина течности остаје иста.

- *Постојање затвореног пута* кроз који ће струјати течност.

- *Стално улагање рада* како би пумпа (5) пребацивала течност из суда (1) у суд (2) и одржавала сталну разлику нивоа Δh.

Да се вратимо сада на електротехнику. Да би струја у спојном путу (слика 11.4) била стационарна мора се одржавати стационарном средња брзина слободних покретљивих наелектрисања, односно стационар-

но електрично поље. За одржавање стационарног електричног поља је неопходна стационарна расподела наелектрисања на електродама кондензатора. На рачун сваког позитивног наелектрисања које напусти позитивну електроду кроз спојни пут (осенчени проводник) мора доћи ново позитивно наелектрисање са негативне електроде. Пребацивање наелектрисања кроз проводнике и одржавање њихове стационарне расподеле врши елемент електричног кола ("струјна пумпа") који се назива струјни извор или електрични генератор. За електрични генератор, који ће касније бити детаљно обрађен, напоменућемо за сада само то да у њему владају силе "некулонског" карактера (силе које не потичу од електричног поља стационарних наелектрисања) које раздвајају позитивна и негативна наелектрисања и потискују их ка позитивном, односно негативном крају генератора.



Слика 11.4.

Из напред изнетог може се извући закључак да струја у проводној вези између две електроде кондензатора може бити стационарна само у случају када су испуњени следећи услови:

- Осенчена *проводна веза мора бити део затворског струјног кола сачињеног од проводника (затвореног проводног пута).*

- *У затвореном колу мора постојати електрични уређај (генератор) који, насупрот силама стационарног електричног поља, континуирано пребацује приспеле електроне проводности са позитивне електроде на негативну* (што је еквивалентно пребацивању позитивних оптерећења у супротном смеру, са негативне на позитивну електроду) *и тиме одржава сталну потенцијалну разлику између својих прикључака.*

Када се на прикључке генератора вежу крајеви неког проводника, у проводнику (а и ван њега) ће се успоставити стационарно електрично поље. Под дејством овог поља ће се у затвореном електричном колу успоставити стационарна електрична струја. Ван генератора на покретљива наелектрисања делују искључиво "кулонске" силе које су последица стационарног електричног поља, а које је последица стационарне расподеле наелектрисања.

Разлика између стационарне и статичке расподеле наелектрисања је у томе што се код стационарне расподеле наелектрисања стално померају, али им је заједничко то да је њихова густина у сваком елементу запремине константна у времену (као количина воде у судовима у хидродинамичком примеру). Из овога се може закључити:

Вектор јачине електричног поља стационарних електричних оптерећења истоветан је са вектором јачине електричног поља на исти начин расподељених оптерећења у електростатици. Због тога стационарно електрично поље, као и електростатичко, припада класи конзервативних поља. То значи да је циркулација вектора стационарног електричног поља по било којој затвореној контури једнака нули, тако да се и за ово поље може користити функција потенцијала и све оно што следи из тога.

Поред ових сличности између стационарног електричног и електростатичког поља постоји и једна битна разлика. *Стационарно електрично поље непрекидно врши рад покрећући слободна електрична оптерећења, па је за његово одржавање неопходно стално довођење енергије систему.* Ова се енергија доводи посредством генератора. У генератору се други видови рада и енергије трансформишу у енергију стационарног електричног поља која се, даље, трансформише у друге видове рада и енергије. За разлику од стационарног електричног поља, за одржавање већ успостављеног електростатичког поља у идеалном диелектрику није потребно вршити никакав рад.

11.3. Средња макроскопска брзина слободних носиоца и појам струјног поља

Кретање покретљивих наелектрисања (електрона проводности и позитивних и негативних јона) је, и без постојања страног електричног поља, веома сложено. То је хаотично термичко кретање, где се покретљива наелектрисања непрестано сударају са атомима и молекулима средине кроз коју се крећу, образујући при томе сложене цик-цак путање. Међутим, пошто се у физички бесконачно малом елементу запремине налази мноштво оваквих наелектрисања, векторски збир њихових брзина, а самим тим и вектор средње брзине, једнак је нули. Успостављањем страног стационарног електричног поља на хаотично кретање слободних носиоца суперпонира се кретање под дејством електричног поља (и само сложено у микроскопским размерама). По упрошћеној представи може се сматрати да се између два узастопна судара са атомима и молекулима средине слободни носиоци, под дејством сила поља, крећу убрзано и тиме повећавају своју кинетичку енергију. Због густине атома и молекула учестаност судара је веома велика, тако да су дужине путања између два узастопна судара веома кратке. Приликом судара са атомима и молекулима покретљива наелектрисања се заустављају или успоравају, уз промену правца кретања, предајући у потпуности, или делимично, стечену кинетичку енергију чији се део трансформише и у топлоту.

Како је кретање наелектрисања под дејством електричног поља у микро размерама у проводнику веома сложено може се посматрати само *средња брзина* $\vec{v}$ *мноштва наелектрисања у једном физички бесконачно малом елементу запремине* ΔV. Ова брзина *се назива средњом макроскопском брзином покретљивих наелектрисања.* Код металних проводника та покретљива наелектрисања су само електрони, док код електролита постоје две врсте покретљивих наелектрисања, позитивни и негативни јони који се крећу различитим средњим макроскопским брзинама $\vec{v}_+$ и $\vec{v}_-$.

Део простора у коме се под дејством поља крећу покретљива наелектрисања назива се струјно поље. Струјно поље се, као и свако друго векторско поље, *може сликовито представити линијама поља* (или струјницама) *које у свакој тачки за тангенту имају вектор средње макроскопске брзине покретљивих наелектрисања. Ако је ова брзина у свакој тачки струјног поља константна у времену, струјно поље се назива стационарним струјним пољем.*

11.4. Пратећи ефекти електричне струје

Протицање електричне струје кроз проводне средине праћено је увек одређеним ефектима, жељеним или нежељеним. Жељени ефекти електричне струје, самостално или у комбинацији са другим физичким појавама, чине основу њених бројних и разноврсних примена. *Пратећи ефекти електричне струје су електротермички, електрохемијски и електромагнетни.*

11.4.1. Електротермички ефекти

Најраније уочен, и један од основних ефеката који се појављује приликом кретања наелектрисања кроз проводник је његово загревање. Ова појава је позната под именом Џулов ефекат и већ је раније донекле објашњена. Наиме, покретљива наелектрисања, крећући се кроз проводну средину под дејством сила електричног поља, повећавају своју брзину и кинетичку енергију. Приликом судара са атомима и молекулима средине кроз коју се крећу део ове кинетичке енергије се трансформише у топлоту, што има за последицу загревање проводника.

Посматрано у макроскопским размерама може се рећи да се кретању слободних наелектрисања супротставља нека врста "електричног трења" која одржава динамичку равнотежу силама стационарног електричног поља. Ову особину проводника и других материјала да се "сила-

ма трења" супротстављају кретању наелектрисања називамо отпорношћу проводника. Она зависи од димензија проводника и материјала од кога је начињен, као и од његове температуре. Када се температура приближи апсолутној нули ($0\,K \approx -273^{o}\,C$) практично нема термичког кретања, тако да број судара покретљивих наелектрисања са атомима и молекулима средине кроз коју се крећу тежи нули, а самим тим и отпорност проводника. На температурама које су блиске апсолутној нули једанпут успостављена струја у колу се може одржавати веома дуго времена без присуства извора (улагања рада), односно стационарног електричног поља које делује на покретљива оптерећења. При томе изостаје и електротермички ефекат електричне струје. Међутим, у нормалним околностима, даље од апсолутне нуле, отпорност проводника и са њом повезан термички ефекат увек постоје.

Електротермички ефекат електричне струје налази веома широку примену свуда где је потребно трансформисати енергију стационарног електричног поља (електричну енергију) у топлоту: електротермички уређаји (бојлери, грејалице, штедњаци, пегле и тако даље), топљење метала, заваривање... Поред практичног коришћења за остваривање поменутих жељених ефеката, термоелектрични ефекат се појављује и као нежељена и некорисна појава: губици при трансформацији електричне енергије у механички рад, губици при трансформацији напона, губици при преносу електричне енергије и тако даље.

Напоменимо на крају да је електротермички ефекат електричне струје увек присутан, у већој или мањој мери, осим на температурама које су блиске апсолутној нули.

11.4.2. Електрохемијски ефекти

Електрохемијски ефекти долазе до изражаја само у проводницима друге врсте, електролитима, у које спадају водени и други раствори киселина, база и соли. Још пре успостављања страног електричног поља у електолитима се образују позитивни и негативни јони на које се распадају неутрални молекули раствора. По успостављању електричног поља позитивни јони се крећу у правцу и смеру електричног поља (ка аноди) а негативни у супротном смеру (ка катоди) што је праћено транспортом супстанце и разградњом електролита. Када јони стигну на електроде врши се њихова неутрализација и издвајање супстанце. Овај процес се назива електролиза.

Електролиза има веома значајне примене у електрохемији, као и у низу других технолошких поступака. Електрохемијски ефекти су основа рада електрохемијских извора електричне енергије који и данас имају велики практични значај (акумулатори, батерије), а посебно су, као једи-

ни извори електричне енергије, били значајни у раној фази истраживања електромагнетних појава.

Електрохемијске појаве могу изазвати и негативне ефекте. На пример, на месту споја два проводника, начињена од различитих материјала, услед електрохемијских појава може се формирати танак слој оксида, што представља значајан технички проблем.

11.4.3. Електромагнетни ефекти

Најзначајнији и апсолутно неизбежни пропратни ефекат електричне струје је њен електромагнетни ефекат чије су видне манифестације многобројне. У близини проводника кроз које протичу електричне струје опажају се следеће појаве:

- магнетна игла има тенденцију да заузме одређени положај,

- на сталне магнете и предмете начињене од феромагнетног материјала (гвожђе, никл, кобалт, неке њихове легуре и неке ретке земље) делује механичка сила,

- на наелектрисану честицу која се креће у близини проводника кроз који протиче електрична струја делује механичка сила,

- између два проводника кроз које протиче електрична струја јавља се механичка сила, такозвана електромагнетна сила,

- у проводнику који се креће у близини других струјних проводника индукује се електромоторна сила, а ако проводник чини затворену проводну контуру у њој се појављује индукована електрична струја,

- ако кроз један проводник протиче променљива електрична струја у блиској (покретној или непокретној) затвореној проводној контури се индукује електрична струја.

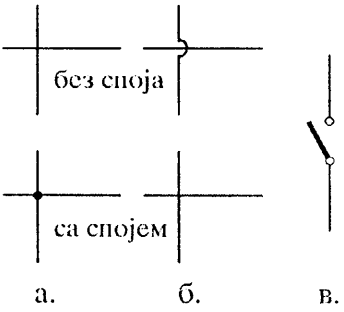
Све ове појаве, као и низ других, су видљиве манифестације посебног физичког стања простора у околини проводника са струјом и наелектрисаних честица у кретању, а које се назива магнетно поље. Изучавање закона који повезују магнетно поље и електричне струје је предмет области електротехнике која се назива Електромагнетизам.

Практична примена електромагнетног ефекта електричне струје је толико широка тако да нема смисла све набрајати. Поменимо само да се рад свих електричних машина (мотори, генератори, трансформатори), као и већине мерних инструмената заснива на овом ефекту електричне струје. Поред веома широке практичне примене електромагнетни ефекат може бити и непожељан, посебно код електронских система и уређаја који раде са малим напонима и струјама.

11.5. Шематско представљање електричних кола

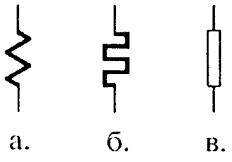
У Поглављу 11.2. је указано на чињеницу да се стационарна електрична струја може одржавати само у затвореном струјном колу уз услов да је у коло укључен генератор (струјни извор). Једно такво коло је приказано на слици 11.4. Међутим, то није уобичајени начин представљања електричних кола.

Како је електрично коло непрекидан ланац појединих елемената као што су електрични извори (генератори), потрошачи (пријемници) разних врста, проводници који их спајају и прекидачи којима се може прекинути струјно коло, и како те елементе не можемо цртати онако како они изгледају у природи, договорени су одређени графички симболи којима се они представљају. На тај начин добијају се такозване електричне шеме у којима се елементи кола (који могу бити веома различити по облику али су по функцији слични) представљају једноставним и јединственим графичким симболима.



Слика 11.5.

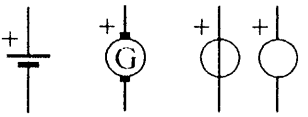
Проводници и водови који повезују поједине елементе електричних кола цртају се пуним линијама. За означавање споја и укрштања проводника без споја користе се два начина означавања. По првом начину (слика 11.5.а) на месту где се проводници укрштају без споја нема никакве ознаке, а спој проводника се означава тачком. Код другог начина (слика 11.5.б) на месту споја два проводника нема никакве ознаке, док се код укрштања без споја на једном од проводника црта мали полукруг. У литератури се, због једноставности, далеко више користити први начин означавања. Уобичајена шематска ознака за прекидач приказана је на слици 11.5.в.



Слика 11.6.

Термогени потрошачи електричне енергије, уколико није потребно детаљније назначити њихову функцију (која је без значаја за овај курс Електротехнике) означавају се једним од симбола приказаних на слици 11.6. Симбол са слике 11.6.а. је уобичајен и за означавање намотаја електричних машина, а симбол са слике 11.6.в. за означавање импедансе (елемента у колу наизменичних струја). Стога ће у овој књизи бити коришћен симбол са слике 11.6.б. Овим симболом се може представити било који термогени потрошач, отпорник у колу неког електронског уређаја или било који потрошач који се може представити преко своје еквивалентне отпорности (о чему ће касније бити више речи).

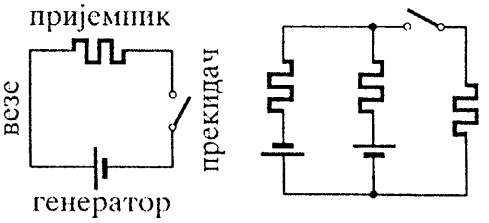
Електрични генератори (електрични извори) се могу означавати на више начина (слика 11.7). На слици 11.7.а. је приказан уобичајени симбол за електрохемијски генератор, при чему дужа и тања цртица означава позитиван пол (стога се поларитет - оријентација генератора не мора посебно означавати, што представља одређену предност при цртању електричних шема). На слици 11.7.б. дата је ознака електромашинског генератора, која може бити и сложенија уколико се желе нагласити неке од његових карактеристика. На слици 11.7.в. приказане су две опште ознаке генератора код којих се, као и код генератора са слике 11.7.б, мора посебно означити поларитет. Међутим, у колима која садрже и такозване струјне генераторе, могу се у брзини лако помешати њихове ознаке.



а. б. в.

Слика 11.7.

У проучавању електричних кола, где природа генератора није ни од каквог значаја, користићемо симбол са слике 11.7.а. због његове једноставности и због тога што није потребно посебно означавати поларитет. Са овим симболима електрична шема кола са слике 11.4. би имала изглед као на слици 11.8.а. На слици 11.8.б. приказан је пример електричне шеме једног, нешто сложенијег, електричног кола.



а. б.

Слика 11.8.

11.6. Јачина и смер електричне струје

Најважнија квантитативна карактеристика електричне струје, посебно када се ради о струји у релативно танким проводницима, је јачина електричне струје. *Јачина електричне струје је оријентисана скаларна величина, што значи да је одређена својом вредношћу и смером.* У случају да је временски променљива означава се симболом i, док се временски непроменљива (стационарна, стална једносмерна струја) означава са I.

Јачина стационарне електричне струје дефинише се као количник количине електрицитета Q која је протекла кроз попречни пресек проводника за неко време t и тог времена,

$$I = \frac{Q}{t}.$$

У општем случају, када се струја мења у времену, тренутна вредност јачине струје дефинише се као

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

За разлику од металних проводника, где струју образују електрони проводности, у електролитима су покретљива оптерећења позитивни и негативни јони. Иако се позитивни и негативни јони крећу у супротним смеровима, због различитог знака њихови ефекти се сабирају (кретање позитивних јона у једном смеру еквивалентно је кретању негативних јона у супротном смеру). Значи, ако посматрамо неки попречни пресек у електролиту у времену $\mathrm{d}t$, и ако кроз њега за то време протекне количина електрицитета $\mathrm{d}q_+$ у једном смеру и $\mathrm{d}q_-$ у другом, тренутна вредност јачине електричне струје је

$$i = \frac{\mathrm{d}q_+}{\mathrm{d}t} + \frac{|\mathrm{d}q_-|}{\mathrm{d}t}.$$

Наравно, у случају стационарних електричних струја може се узети коначан временски интервал, па је

$$I = \frac{Q_+}{t} + \frac{|Q_-|}{t}.$$

Као што смо већ напоменули, јачина електричне струје је скаларна величина, али има и одређени смер у проводнику кроз који протиче. Стога се и назива оријентисаном скаларном величином. Још пре открића структуре атома *конвенцијом је усвојено да је физички смер електричне струје супротан смеру кретања електрона проводности кроз проводнике* (што одговара смеру кретања позитивних јона у електролиту). Оваква конвенција је усвојена јер није била позната природа електричне струје и сматрало се да се "електрични флуид" увек креће од тачке вишег ка тачки нижег потенцијала (као што вода тече од вишег ка нижем нивоу). Да не бисмо мењали веома велики број закона који су откривени и изведени са оваквим смером струје, задржаћемо га и даље као физички смер струје, мада знамо да се електрони проводности крећу у супротном смеру (од тачке нижег ка тачки вишег потенцијала).

У сложеним електричним колима, која поседују већи број генератора, веома често се не зна унапред физички смер електричне струје у појединим гранама. Да би се оваква кола могла анализирати *у гранама кола се, потпуно произвољно, усвајају такозвани референтни смерови струја и након анализе добијају њихове вредности. Уколико се за неку од струја добије позитивна вредност онда је њен физички смер сагласан са референтним. Уколико се, пак, добије негативна вредност, физички смер струје је супротан изабраном референтном.*

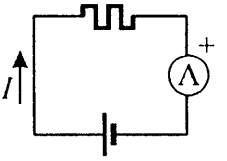
Јачина електричне струје је четврта основна физичка величина и њена јединица је $I_u = \mathrm{A}$ (Ампер). Јединица за јачину електричне струје је била раније дефинисана преко њеног електрохемијског ефекта: један Ампер је јачина сталне електричне струје која при протицању кроз водени раствор сребронитрата у току сваке секунде на катоди издвоји масу од 1.118 mg сребра. Савремена дефиниција за јединицу јачине електричне струје дата је преко њеног електромагнетног ефекта:

> ***Ампер је јачина сталне електричне струје која, при протицању кроз два неограничено дуга паралелна проводника кружног попречног пресека занемариве дебљине, који се налазе у вакууму на међусобном растојању од једног метра, изазива силу по јединици дужине проводника од*** $2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N}$.

Количина електрицитета, са којом смо у електростатици оперисали као са четвртом основном физичком величином, је изведена величина чија је јединица $Q_u = I_u t_u = \mathrm{As} = \mathrm{C}$.

За мерење јачине електричне струје користи се инструмент који се назива амперметар, док је за мерење малих јачина електричне струје (реда милиампера и микроампера) уобичајено да се такав инструмент назива милиамперметар или микроамперметар. Уколико је потребно мерити изузетно мале јачине електричне струје користи се галванометар, специјална, веома осетљива врста амперметра. Иако постоји више врста класичних амперметара, најраспрострањенији су они чији је принцип рада заснован на међусобном дејству струјне контуре и сталног магнета. Амперметар се у електричним шемама означава кружићем са уписаном ознаком A (или mA, односно μA уколико се ради о инструменту за мерење малих струја реда милиампера и микроампера). Ознака за галванометар је иста, само што унутар кружића стоји ознака G.

Да би се измерила јачина електричне струје у неком пресеку кола та струја мора да протиче кроз амперметар. Значи, коло треба на том месту прекинути и прикључити амперметар (слика 11.9), водећи рачуна о томе да физички смер струје кроз амперметар буде оријентисан од његовог позитивног ка негативном прикључку.



Слика 11.9.

Амперметар, као и други мерни инструменти има одређену отпорност која се назива унутрашња отпорност (или краће, отпорност) инструмента. Као што ће касније бити показано, унутрашња отпорност амперметра мора имати што је могуће мању вредност како би утицај амперметра на струју у колу био што мањи.

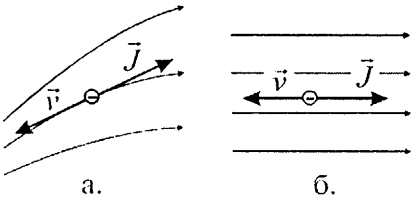
11.7. Вектор густине струје

11.7.1. Дефиниција вектора густине струје

За што прецизније описивање струјног поља, посебно у проводницима који се не могу сматрати танким, уводи се једна нова физичка величина, *вектор густине струје* $\vec{J}$.

Правац вектора густине струје у свакој тачки струјног поља одређен је правцем кретања електрона проводности, док му је смер супротан смеру њиховог кретања.

У Поглављу 1.3. дефинисали смо струјно поље и линије поља као линије које у свакој тачки за тангенту имају вектор средње макроскопске брзине покретљивих наелектрисања. Ако се има у виду дефиниција правца и смера вектора густине струје, ***линије струјног поља се могу дефинисати и као линије које у свакој тачки за тангенту имају вектор густине струје и оријентисане су у његовом смеру, односно супротно макроскопском смеру кретања електрона проводности.*** Оне практично представљају макроскопске трајекторије (путање) слободних носиоца електрицитета у струјном пољу, па се стога називају још и струјницама. ***Скуп линија поља назива се спектар поља и***, као и у случају електростатичког поља, ***у свакој тачки дефинише правац и смер вектора густине струје.*** Густина линија поља је пропорционална интензитету вектора густине струје. Струјно поље може бити нехомогено (слика 11.10.а) и хомогено (слика 11.10.б). Код хомогеног струјног поља линије поља су паралелне и еквидистантне.



Слика 11.10.

У случају дугих и танких проводника струјно поље се може сматрати хомогеним.

У хомогеном струјном пољу, када је струја I равномерно распоређена по попречном пресеку проводника S, интензитет вектора густине струје се дефинише као

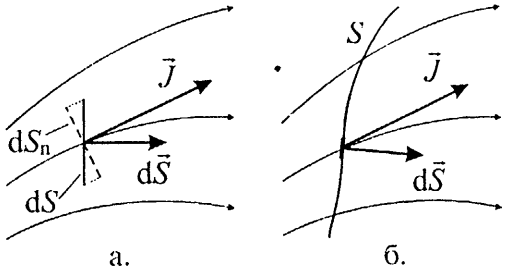
$$J = \frac{I}{S}.$$

Густина струје је физичка величина, а из претходног израза је очигледно да јој је јединица $J_{\text{ц}} = I_{\text{ц}}/S_{\text{ц}} = \text{A/m}^2$.

У општем случају нехомогеног струјног поља (слика 11.11.а) интензитет вектора густине струје се дефинише као

$$J = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\mathrm{n}}},$$

где је $\mathrm{d}S_{\mathrm{n}}$ елементарна површина управна на правац кретања наелектрисања, а $\mathrm{d}I$ јачина електричне струје кроз ову површину.



Слика 11.11.

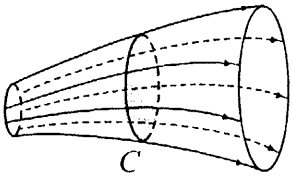
Из претходне дефиниције следи да је јачина електричне струје кроз произвољно оријентисану елементарну површину $\mathrm{d}\vec{S}$

$$\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}S_{\mathrm{n}} = J\,\mathrm{d}S\cos\measuredangle\left(\vec{J},\mathrm{d}\vec{S}\right) = \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

па, у најопштијем случају нехомогеног струјног поља (слика 11.11.б),

> ***јачина електричне струје кроз произвољну површину S,***
>
> $$I = \int_S \mathrm{d}I = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$
>
> ***једнака је флуксу вектора густине струје кроз ту површину.***

Површина S, по којој се врши интеграција у последњем изразу, може бити површина произвољног попречног пресека неког проводника или неке струјне тубе. Струјна туба (туба флукса вектора густине струје) је део простора у струјном пољу који је омеђен линијама поља вектора густине струје, односно скупом струјница које пролазе кроз једну затворену контуру C (слика 11.12).



Слика 11.12.

Алгебарски знак флукса вектора густине струје кроз неку површину (а самим тим и јачина електричне струје) може бити позитиван или негативан, што зависи од избора јединичног вектора нормале на ту површину. Уколико је $-\pi/2 < \measuredangle(\vec{J}, \hat{n}) < \pi/2$ струја је позитивна, док је у случају да је $\pi/2 < \measuredangle(\vec{J}, \hat{n}) < 3\pi/2$ струја негативна. На тај начин ***усвојени смер нормале на површину попречног пресека проводника аутоматски одређује референтни смер струје у том проводнику и обрнуто.***

11.7.2. Веза између вектора густине струје и средње брзине слободних носилаца електрицитета

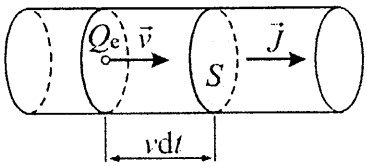
Вектор густине струје и средња брзина слободних носилаца електрицитета су макроскопске величине које описују струјно поље и између којих постоји одређена зависност. Та зависност се може изразити преко запреминске густине N' слободних носилаца електрицитета и њиховог оптерећења Q_e. Не умањујући општост коначних резултата, ова веза биће изведена на примеру струјне тубе сталног попречног пресека S (слика 11.13), при чему ће бити сматрано да је струјно поље хомогено. У најједноставнијем случају постоји само једна врста слободних носилаца електрицитета запреминске густине N' и оптерећења Q_e (при чему је у Q_e укључен и знак, на пример у случају електрона је $Q_e = -e$).

У временском интервалу $\mathrm{d}t$ свако елементарно наелектрисање Q_e пређе пут $v\,\mathrm{d}t$. Број слободних оптерећења која у овом временском интервалу прође кроз површину S једнак је укупном броју слободних оптерећења у запремини $Sv\,\mathrm{d}t$ (видети појам флукса у I делу књиге),

$$N = N'V = N'Sv\,\mathrm{d}t\,,$$

тако да је протекла количина електрицитета $\mathrm{d}q$ кроз површину S

$$\mathrm{d}q = NQ_e = N'Q_eSv\,\mathrm{d}t\,.$$



Слика 11.13.

Из дефиниције јачине електричне струје следи

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = N'Q_eSv\,.$$

Пошто се кренуло од претпоставке да је струјно поље хомогено (значи густина струје, односно средња брзина слободних носилаца електрицитета у свим тачкама попречног пресека иста), деобом обе стране последње једначине са S добија се

$$J = N'Q_ev\,.$$

Како је правац и смер вектора густине струје исти као и правац и смер кретања позитивних слободних носилаца електрицитета, вектори $\vec{J}$ и $\vec{v}$ су колинеарни па се може писати

$$\vec{J} = N'Q_e\vec{v}\,.$$

У случају кондукционе струје (усмерено кретање електрона проводности), вектор густине струје и вектор брзине слободних носиоца електрицитета имају супротне смерове,

$$\vec{J} = -N'e\vec{v}\,.$$

Када у појави електричне струје учествује више врста слободних наелектрисања запреминских густина $N_1', N_2' \ldots$, оптерећења $Q_{e1}, Q_{e2} \ldots$ и средњих брзина $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots$ (у случају електролита и у гасовима), вектор густине струје се одређује као

$$\vec{J} = N_1' Q_{e1} \vec{v}_1 + N_2' Q_{e2} \vec{v}_2 \ldots$$

Средња макроскопска брзина кретања електрона проводности у металима је веома мала, што ће бити показано на једном примеру. Нека кроз бакарни проводник (запреминска густина слободних електрона у бакру је око $N' \approx 8.5 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$) површине попречног пресека $S = 2.5\,\mathrm{mm}^2$ протиче струја јачине $I = 10\,\mathrm{A}$. У том случају је густина струје

$$J = \frac{I}{S} = \frac{10}{2.5 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}^2\,,$$

па је средња макроскопска брзина електрона проводности

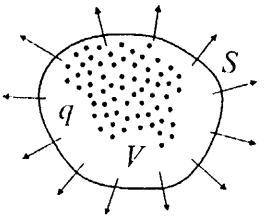
$$v = \frac{J}{N'\mathrm{e}} \approx \frac{4 \cdot 10^6}{8.5 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 29.4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s}\,.$$

11.8. Једначина континуитета и I Кирхофов закон

Нека се у неком домену запремине V, ограниченом затвореном површином S, налази количина слободних носилаца електрицитета q (слика 11.14). Ова количина електрицитета може се изменити само уколико оптерећења напуштају домен или у њега улазе кроз граничну површину S, образујући при томе електричну струју.

Како излазни флукс вектора густине струје кроз затворену површину S представља укупну струју кроз ову површину, на основу дефиниционог израза за јачину електричне струје следи

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,.}$$



Слика 11.14.

Знак "–" је последица чињенице да позитивном излазном флуксу вектора густине струје кроз површину S одговара смањење (негативан прираштај) количине електрицитета у домену ограниченом том површином.

Последња једначина се назива једначина континуитета у интегралном облику и представља математички исказ закона о очувању (конзервацији) количине електрицитета.

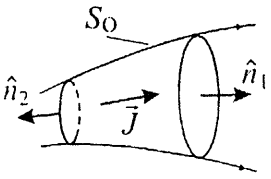
У случају стационарног струјног поља распоред наелектрисања је стационаран. Уместо оптерећења која напусте запремину V долазе нова, тако да количина електрицитета q унутар запремине V остаје непромењена ($\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = 0$), што значи да *је излазни флукс вектора густине струје кроз затворену површину* $\boldsymbol{S}$ *једнак нули,*

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 .}$$

Последњи израз представља *специјалан случај једначине континуитета за стационарно струјно поље и назива се I Кирхофов закон.*

Прва директна последица једначине континуитета за стационарно струјно поље (I Кирхофовог закона) јесте да је јачина електричне струје у било ком попречном пресеку једне струјне тубе (или проводника) иста. Посматраћемо омотач и два попречна пресека једне струјне тубе (слика 11.15), чиме је формирана једна затворена површина за коју важи једначина континуитета. Ова затворена површина се може представити као збир површина базиса и омотача (треба водити рачуна о томе да су површине оријентисане у смеру излазне нормале), па је

$$\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_O} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 .$$



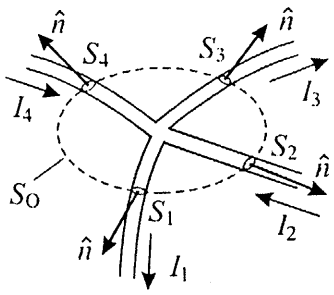
Слика 11.15.

Флукс вектора густине струје $\vec{J}$ кроз површину омотача једнак је нули (јер струјнице тангирају омотач), па из претходне једначине следи

$$\int_{S_{B1}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S_{B2}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} ,$$

односно

$$I_1 = I_2 .$$



Слика 11.16.

У анализи сложених електричних кола I Кирхофов закон има веома велики значај. Уочимо место на коме се спаја већи број проводника (у конкретном случају 4) и које се назива чвор, слика 11.16, и затворену површину S којом је обухваћено место споја. Можемо је поделити на пет делова,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_O ,$$

где су S_1, S_2, S_3 и S_4 површине попречних пресека проводника са струјама I_1, I_2, I_3 и

I_4, а S_O остатак затворене површине. Према једначини континуитета за стационарно струјно поље мора бити испуњен услов

$$\oint_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_4} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_O} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 .$$

Како је флукс вектора густине струје кроз остатак површине S_O једнак нули (јер кроз диелектрик у коме се налази спој не протиче електрична струја), горња једначина се своди на

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0 .$$

Референтни смерови струја I_1 и I_3 су сагласни са ортом излазне нормале тако да се за те струје добија позитиван знак, док су референтни смерови струја I_2 и I_4 супротни орту излазне нормале па се за њих добија негативан знак.

I Кирхофов закон закон за један чвор сложене мреже може се, дакле, формулисати као:

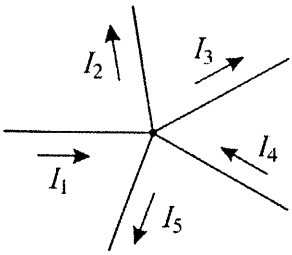
алгебарски збир струја које се сустичу у једном чвору једнак је нули,

$$\sum I = 0 .$$

При томе се струје које истичу из чвора узимају са позитивним знаком (јер одговарају позитивном излазном флуксу вектора густине струје) *и обрнуто.* Пошто је десна страна последње једначине једнака нули, све струје истог знака могу се пребацити на другу страну знака једнакости тако да се добија далеко познатија формулација I Кирхофовог закона:

збир струја које истичу из чвора једнак је збиру струја које у тај чвор утичу,

$$\sum I_{\text{ist.}} = \sum I_{\text{ut.}} .$$



Слика 11.17.

Ово се јасно може уочити на примеру са слике 11.17. где се једначина по I Кирхофовом закону може писати као

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

или, уколико се са једне стране знака једнакости задрже струје које истичу из чвора а на другу пребаце струје које утичу у чвор, као

$$I_2 + I_3 + I_5 = I_1 + I_4 .$$

11.9. Питања за проверу

11.9.1. Шта је то електрична струја?

11.9.2. Која наелектрисања могу учествовати у формирању електричне струје?

11.9.3. Шта је, осим наелектрисања, неопходно за појаву електричне струје?

11.9.4. У којим све срединама (обзиром на агрегатно стање) може доћи до појаве електричне струје?

11.9.5. Која врста наелектрисања образује електричну струју у металним проводницима?

11.9.6. Која врста наелектрисања образује електричну струју у електролитима?

11.9.7. Која врста наелектрисања образује електричну струју у гасовима?

11.9.8. Може ли доћи до појаве електричне струје у вакууму? Уколико може, навести пример.

11.9.9. Код које врсте струја долази до транспорта материјалне супстанце?

11.9.10. Које струје се називају кондукционим?

11.9.11. Шта је то стационарна електрична струја, а шта стационарно електрично поље?

11.9.12. Које су две битне разлике између електростатичког и стационарног електричног поља?

11.9.13. Због чега електростатичко поље не може одржавати стационарну електричну струју? Искористити за објашњење и хидродинамичку аналогију.

11.9.14. Шта је све неопходно за одржавање стационарне електричне струје?

11.9.15. Каква је улога генератора у одржавању стационарне електричне струје?

11.9.16. Какви су спектри електростатичког и стационарног електричног поља при истом распореду наелектрисања?

11.9.17. Да ли се у стационарном електричном пољу може користити функција потенцијала?

11.9.18. Шта је то средња макроскопска брзина слободних наелектрисања у проводнику?

11.9.19. Колика је средња макроскопска брзина слободних наелектрисања у одсуству стационарног електричног поља? Због чега се она мења када се успостави стационарно електрично поље у проводнику?

11.9.20. Шта су то струјно поље, линије и спектар струјног поља?

11.9.21. Када се струјно поље назива стационарним?

11.9.22. Који су пратећи ефекти електричне струје?

11.9.23. Набројте неколико примера електротермичког ефекта. Да ли се он може избећи и како?

11.9.24. Набројте неколико примера електрохемијског ефекта.

11.9.25. Набројте неколико примера електромагнетног ефекта. Да ли се он може избећи?

11.9.26. Набројте неке корисне и неке непожељне ефекте електричне струје.

11.9.27. Како се дефинише јачина стационарне, а како променљиве електричне струје?

11.9.28. Како се дефинише јачина електричне струје ако у њеном образовању учествује више врста слободних носиоца?

11.9.29. Који је физички смер електричне струје?

11.9.30. Шта је то референтни смер електричне струје? Како се на основу израчунате јачине електричне струје за неки одабрани референтни смер одређује физички смер струје?

11.9.31. Како се дефинише јединица јачине електричне струје?

11.9.32. Како се мери јачина електричне струје? Колика треба да буде унутрашња отпорност амперметра?

11.9.33. Како се дефинише правац и смер вектора густине струје?

11.9.34. Како се дефинише интензитет вектора густине струје у хомогеном, а како у нехомогеном струјном пољу?

11.9.35. Како се на основу познатог вектора густине струје одређује јачина електричне струје кроз неку произвољну површину?

11.9.36. При израчунавању флукса вектора густине струје кроз неку површину та површина мора бити оријентисана. Који је референтни смер струје у односу на позитивну оријентацију површине?

11.9.37. Шта је то струјна туба и које су њене особине?

11.9.38. Кроз веома дуг цилиндрични проводник протиче струја I. Шта је омотач струјне тубе највећег попречног пресека?

11.9.39. Извести везу између вектора густине струје и средње брзине слободних носилаца електрицитета.

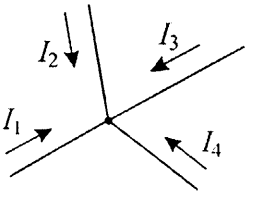
11.9.40. Уколико је средња брзина слободних носиоца у бакарном провоснику, површине попречног пресека $S = 4\,\mathrm{mm}^2$, $v = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{ms}^{-1}$ израчунати јачину струје кроз њега. Запреминска густина слободних електрона у бакру је $N' = 8.5 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$.

11.9.41. Написати једначину континуитета и исказати је речима?

11.9.42. Како гласи једначина континуитета (I Кирхофов закон) за стационарно струјно поље?

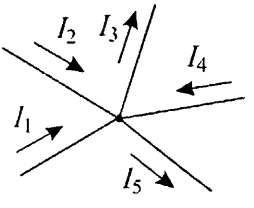
11.9.43. Доказати да је јачина електричне струје у било ком попречном пресеку једне струјне тубе иста.

11.9.44. Када је електрична струја каналисана танким проводницима, на месту споја више проводника (чвору) I Кирхофов закон се може написати преко јачина електричних струја. Како? Доказати.



Слика 11.18.

11.9.45. За место спајања проводника (чвор) приказано на слици 11.18. написати једначину по I Кирхофовом закону.



Слика 11.19.

11.9.46. За место спајања проводника (чвор) приказано на слици 11.19. написати једначину по I Кирхофовом закону.

12. Омов закон; израчунавање електричне отпорности

12.1. Омов закон

Јачина електричне струје у неком проводнику пропорционална је густини струје, односно средњој макроскопској брзини кретања електрона проводности. С друге стране средња макроскопска брзина слободних електрона зависи од јачине стационарног електричног поља у проводнику, а самим тим и од потенцијалне разлике између крајева проводника. Значи, јачина струје I у проводнику је пропорционална напону U на његовим крајевима, $I = f(U)$. Ова функција се назива волт - амперска карактеристика проводника. Код већине проводника, када им се температура одржава константном, ова функција је линеарна, односно

јачина електричне струје кроз проводник је директно пропорционална напону између његових крајева,

$$I = GU.$$

Ова релација је један од најраније експериментално откривених закона стационарних електричних струја и, по свом проналазачу, назива се ***Омов закон***. Константа пропорционалности G, која се појављује у Омовом закону, је физичка величина и назива се ***електрична проводност проводника. Реципрочна вредност електричне проводности,***

$$R = \frac{1}{G},$$

назива се електрична отпорност. Користећи електричну проводност и електричну отпорност, Омов закон се може написати у једном од уобичајених облика:

$$I = GU \qquad G = \frac{I}{U} \qquad U = \frac{I}{G},$$

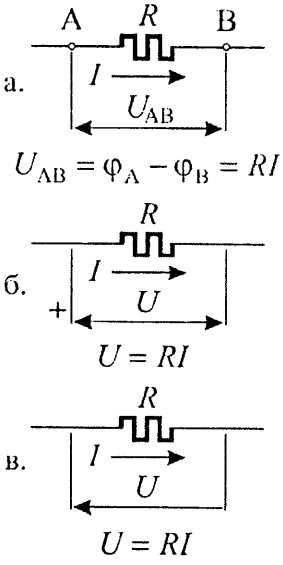
односно

$$U = RI \qquad R = \frac{U}{I} \qquad I = \frac{U}{R}.$$

Електрична отпорност и електрична проводност, као физичке величине, имају своје јединице. Тако је $R_u = U_u/I_u = \mathrm{V/A} = \Omega$ (Ом), односно $G_u = I_u/U_u = 1/R_u = \mathrm{A/V} = 1/\Omega = \mathrm{S}$ (Сименс).

У досадашњем излагању смо користили термине отпорник и проводник, као и електрична отпорност (отпорност) и електрична проводност (проводност). Треба напоменути да се ови термини могу потпуно равноправно користити и да се односе на исте физичке елементе. Наиме, ***сваки проводник је уједно и отпорник и има своју отпорност, као и проводност.*** Такође, и ***сваки отпорник је уједно и проводник који има своју проводност, односно отпорност.*** Међутим, уобичајено је да се термин отпорник користи за неки потрошач (елемент) кола који има одређену отпорност (проводност) а термин проводник за проводнике који спајају поједине елементе кола и који треба, због губитака на њима, да имају што је могуће мању отпорност (већу проводност).

12.2. Означавање и референтни смер напона на отпорнику

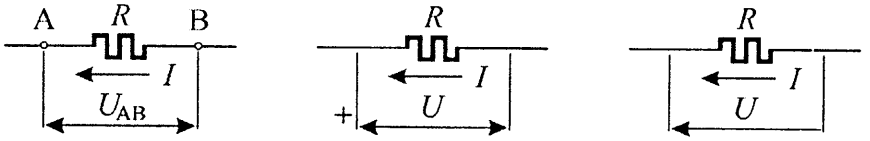


Слика 12.1.

Већ смо раније, код дефинисања јачине и смера електричне струје, напоменули да, по конвенцији, струја тече од тачке вишег ка тачки нижег потенцијала и да је то такозвани физички смер јачине електричне струје. У сложеним електричним колима, где се не зна унапред физички смер струје користи се такозвани референтни, унапред произвољно одабрани смер струје.

Код дефинисања Омовог закона није било потребно водити рачуна о оријентацији струје кроз отпорник и напона на њему. Међутим, јасно је да смер струје кроз отпорник одређује и оријентацију напона између његових прикључних крајева. Како је референтни смер струје општији појам од физичког, то ће и у случају напона бити коришћен исти појам, ***референтни смер напона***, па се сва израчунавања врше са референтним смеровима. Уколико се за напон добије позитивна вредност онда је физички смер напона сагласан са референтним и обрнуто.

Могућа су два начина означавања напона: када су референтни смерови напона и струје усаглашени (слика 12.1) и када нису усаглашени (слика 12.2). На сликама су приказани уобичајени начини означавања напона, као и одговарајући изрази за његово израчунавање.



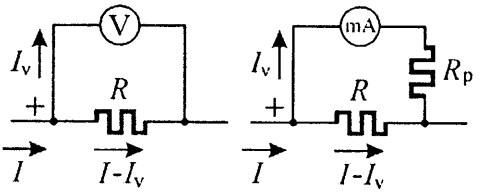
$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -RI$ а. $U = -RI$ б. $U = -RI$ в.

Слика 12.2.

У литератури се углавном користе усаглашени смерови напона и струје, па ће то бити учињено и у овој књизи. Због једноставности и прегледности биће коришћен начин означавања са слике 12.1.в.

12.3. Мерење напона

За мерење напона између две тачке у електричном колу, или на неком потрошачу (између прикључних крајева потрошача), користи се инструмент који се назива волтметар (за мерење врло великих, односно врло малих напона користи се киловолтметар, односно миливолтметар). Означава се кружићем са ознаком V (односно kV или mV). Волтметар се прикључује између тачака између којих се мери напон, односно паралелно потрошачу (слика 12.3.а). Волтметар представља редну везу осетљивог инструмента за мерење струје (mA) и једног отпорника отпорности R_p (слика 12.3.б). Струја кроз волтметар, I_V, пропорционална је напону на потрошачу, тако да је скретање казаљке на инструменту директно пропорционално напону.



а. б.

Слика 12.3.

Како кроз потрошач, након прикључивања волтметра, не протиче више струја I, која би иначе протицала без присуства волтметра, већ $I - I_V$ (слика 12.3.б), за тачност мерења напона веома је важно да отпорност волтметра (која се састоји од отпорности инструмента и редно везаног отпора R_p), R_V, буде што је могуће већа (да би струја I_V била што је могуће мања).

12.4. Отпорност и проводност хомогеног проводника сталног попречног пресека

Отпорност неког проводника при сталној температури, као што је већ показано, представља количник напона на његовим крајевима и струје кроз њега,

$$R = \frac{U}{I}.$$

Јачина електричне струје је, при константној густини струје у попречном пресеку проводника, директно пропорционална површини попречног пресека S, што значи да је отпорност обрнуто пропорционална тој површини. Са друге стране густина струје је пропорционална средњој макроскопској брзини електрона проводности, а ова брзина је пропорционална јачини стационарног електричног поља у проводнику. Уколико је проводник дужи, јачина стационарног поља у њему, при истом напону између његових крајева, биће мања. Самим тим биће мања и средња макроскопска брзина електрона проводности, густина и јачина електричне струје, што значи да ће отпорност бити већа, односно директно пропорционална дужини проводника. И, коначно, густина струје при истом стационарном пољу зависиће од запреминске густине слободних носилаца електрицитета у проводнику, односно од врсте материјала од кога је проводник начињен.

Према томе,

отпорност проводника дужине l, сталне површине попречног пресека S, начињеног од хомогеног материјала израчунава се као

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Константа пропорционалности ρ *је карактеристика материјала од кога је начињен проводник и назива се специфична електрична отпорност.* Као што ћемо касније видети, она зависи од температуре на којој се проводник налази. Уобичајено је да се њена вредност задаје на собној температури, $\theta_0 = 20^\circ$ C.

Специфична електрична отпорност је физичка величина чија је јединица $\rho_u = R_u S_u / l_u = \Omega\,\mathrm{m}^2/\mathrm{m} = \Omega\,\mathrm{m}$ (Омметар). У старијој литератури је за специфичну отпорност била коришћена јединица $\rho_u = \Omega/\mathrm{m}/\mathrm{mm}^2$ (Ом по метру по милиметру квадратном), при чему се површина у изразу за отпорност уноси у милиметрима квадратним.

Како је електрична проводност реципрочна вредност електричне отпорности, може се писти

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{S}{l},$$

односно

$$\boxed{G = \sigma\frac{S}{l}.}$$

где је величина $\sigma = 1/\rho$ - *специфична проводност материјала* чија је јединица $\sigma_u = 1/\rho_u = G_u l_u / S_u = \mathrm{Sm/m^2} = \mathrm{S/m}$ (Сименс по метру).

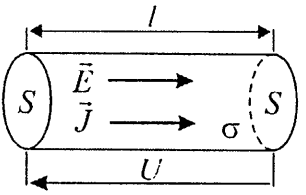
12.5. Омов закон у локалном облику

Омов закон у интегралном облику даје везу између напона на крајевима једног проводника и струје кроз њега. У претходном поглављу указано је на везе између напона (стационарног електричног поља), струје (густине струје) и карактеристика материјала кроз који протиче електрична струја. Према томе, очигледно је да између вектора густине струје, вектора јачине стационарног електричног поља и карактеристика материјала у свакој тачки струјног поља постоји међусобна веза. Ова веза се назива Омов закон у локалном облику.

Мада Омов закон у локалном облику има општу важност (важи и у случају нехомогеног струјног поља и нехомогеног материјала) биће, због једноставности, изведен на примеру танког проводника, сталног попречног пресека S, начињеног од хомогеног материјала чија је специфична проводност σ. Добијени резултати имаће општу важност.

Посматрајмо одсечак проводника дужине l (слика 12.4) кроз који протиче струја I. Према Омовом закону у интегралном облику струја кроз проводник је

$$I = GU,$$



Слика 12.4.

где је U напон између крајева одсечка. Пошто је проводник начињен од хомогеног материјала и линеичан (обзиром на његову издужену форму) може се сматрати да је густина струје у попречном пресеку константна и да је вектор густине струје нормалан на површину попречног пресека,

$$J = \frac{I}{S} \quad \Rightarrow \quad I = JS.$$

Такође, то значи и да је стационарно електрично поље хомогено и да су вектори $\vec{J}$ и $\vec{E}$ међусобно колинеарни. Како је у хомогеном пољу

$$E = \frac{U}{l} \quad \Rightarrow \quad U = El,$$

то се из Омовог закона у интегралном облику добија

$$I = GU = \sigma \frac{S}{l} U \quad \Rightarrow \quad JS = \sigma \frac{S}{l} El,$$

и, након дељења обе стране последње једначине са S,

$$J = \sigma E.$$

Како су вектори $\vec{J}$ и $\vec{E}$ међусобно колинеарни може се коначно писати

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E},}$$

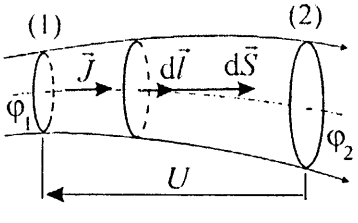
односно

$$\vec{E} = \rho \vec{J},$$

што представља ***Омов закон у локалном облику*** који ***даје везу између вектора густине струје и вектора јачине стационарног електричног поља у свакој тачки струјног поља.***

12.6. Уопштена формула за израчунавање отпорности

У Поглављу 12.4. добијен је израз за израчунавање отпорности танког проводника сталног попречног пресека, начињеног од хомогеног материјала. Поставља се питање како израчунати отпорност проводника који је начињен од нехомогеног материјала и чији се површина попречног пресека може мењати.



Слика 12.5.

Уочимо једну струјну тубу (или танак проводник) између два еквипотенцијална попречна пресека (1) и (2) који се налазе на потенцијалима φ_1 и φ_2 ($\varphi_1 > \varphi_2$). Површина попречног пресека струјне тубе се може произвољно мењати (слика 12.5). Једини услов је да струјно поље у једном попречном пресеку буде хомогено, односно да специфична проводност материјала у једном попречном пресеку струјне тубе буде константна (може се мењати дуж струјне тубе).

Већ је показано да у свакој тачки струјног поља важи Омов закон у локалном облику,

$$\vec{E} = \rho\vec{J},$$

што значи да је, према задатој оријентацији напона, вектор густине струје оријентисан од попречног пресека (1) ка попречном пресеку (2). Ако помножимо скаларно обе стране последње једначине оријентисаним елементом осе струјне тубе $\mathrm{d}\vec{l}$, колинеарним са вектором густине струје $\vec{J}$, а затим десну страну помножимо и поделимо површином $\mathrm{d}S$ попречног пресека струјне тубе, управном на правац осе, добићемо

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \rho\frac{\vec{J}\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Како је, због постављеног услова, вектор површине $\mathrm{d}\vec{S}$ колинеаран са $\mathrm{d}\vec{l}$ може се писати $\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}l$, тако да се добија

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \rho\frac{\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}l = \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}I,$$

где је $\mathrm{d}I = \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ јачина електричне струје кроз површину попречног пресека стујне тубе. Интеграција ове једначине дуж осе струјне тубе, од попречног пресека (1) до попречног пресека (2), даје

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}I = \mathrm{d}I\int_1^2 \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S},$$

јер је јачина електричне струје у сваком попречном пресеку једне струјне тубе иста и, као константа, може се извући испред знака интеграције. Интеграл на левој страни последње једначине представља, по дефиницији, напон између попречних пресека (1) и (2),

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}I\int_1^2 \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}.$$

Количник овог напона, U, и јачине струје кроз попречни пресек, $\mathrm{d}I$, је по природи отпорност и представља отпорност посматране елементарне струјне тубе,

$$R = \frac{U}{\mathrm{d}I} = \int_1^2 \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}.$$

Када су попречне димензије проводника много мање од његове дужине (а што је испуњено у највећем броју случајева) он се назива квазилинеичним и може се посматрати као елементарна струјна туба. Тада напон U у последњем изразу представља напон између крајева провод-

ника, док се $\mathrm{d}l$ може заменити јачином струје кроз попречни presek проводника, I, а $\mathrm{d}S$ површином његовог попречног presека, S. Значи, отпорност квазилинеичног проводника, чији се попречни presek и специфична отпорност мењају дуж његове осе, може се одредити као

$$\boxed{R=\int_1^2 \rho\frac{\mathrm{d}l}{S}.}$$

За случај да је проводник начињен од хомогеног материјала и да је површина попречног presека константна, добија се познати израз

$$R=\int_1^2 \rho\frac{\mathrm{d}l}{S}=\frac{\rho}{S}\int_1^2 \mathrm{d}l=\rho\frac{l}{S}.$$

12.7. Промена отпорности са температуром

Већ код саме формулације Омовог закона могло се уочити да отпорност проводника зависи од врсте материјала од кога је начињен, али и од температуре на којој се налази. Сваку врсту материјала карактерише његова специфична отпорност. Најбољи проводник је сребро које има најмању специфичну отпорност, односно највећу специфичну проводност. За њим следи бакар па алуминијум. Како се сребро, због своје цене веома ретко користи, за израду добрих проводника најчешће се користе бакар и алуминијум. Специфичне проводности појединих материјала су на једној одређеној температури константне величине, независне од димензија и облика проводника, и могу се наћи у таблицама. Уобичајено је да се дају на собној температури, $\theta = 20^0$ C.

Специфична отпорност метала расте са температуром. У широком опсегу промене температуре специфична отпорност ρ на температури θ може се одредити на основу познате специфичне отпорности ρ_0 на температури θ_0 као

$$\rho=\rho_0\left[1+\alpha_0(\theta-\theta_0)+\beta_0(\theta-\theta_0)^2+\gamma_0(\theta-\theta_0)^3+\ldots\right],$$

где су $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\ldots$ одређени коефицијенти на температури θ_0. Како је $\alpha >> \beta >> \gamma >>\ldots$, то се за умерени опсег промене температуре може, са довољном тачношћу, писати

$$\boxed{\rho=\rho_0\left[1+\alpha_0(\theta-\theta_0)\right].}$$

Коефицијент α *се назива температурни коефицијент отпорности* (јединица му је $\alpha_u = (^o)^{-1}$) и за поједине материјале даје се у таблицама на истој температури као и специфична отпорност ρ. Уобичајено је да се ове две величине дају на собној температури, $\theta = 20^o$ C, па је

$$\rho = \rho_{20}\left[1 + \alpha_{20}(\theta - 20)\right].$$

Уколико се занемари температурна дилатација материјала (што је за умерени опсег промене температуре сасвим оправдано) и обе стране израза за промену специфичне отпорности са температуром помноже дужином проводника l и поделе површином његовог попречног пресека S, добија се израз за израчунавање отпорности проводника на температури θ:

$$\boxed{R = R_0\left[1 + \alpha_0(\theta - \theta_0)\right],}$$

односно

$$R = R_{20}\left[1 + \alpha_{20}(\theta - 20)\right].$$

Температурни коефицијент отпорности већине метала који се користе као проводници је реда величине $10^{-3}(^o)^{-1}$. Међутим постоје одређене легуре (константан, манганин) код којих је температурни коефицијент отпорности веома мали, практично једнак нули. Температурни коефицијент отпорности графита је негативан, што значи да му специфична отпорност опада са температуром. Исти је случај и са електролитима.

На температурама блиским апсолутној нули ($\theta \approx 0\,\mathrm{K} \approx -273^o$ C) отпорност проводника нагло опада па се практично може занемарити. Овај ефекат се назива суперпроводност или суперпроводљивост и данас се веома интензивно истражује, тако да су произведени материјали код којих до овог ефекта долази и на температурама које су знатно изнад апсолутне нуле. Примене ефекта суперпроводности се тек могу наслутити. Напоменимо само да се струја, изазвана погодним начином у затвореној контури начињеној од суперпроводника, може одржавати веома дуго јер су топлотни губици (који су, као што ћемо касније видети, сразмерни отпорности) занемарљиви.

12.8. Питања за проверу

12.8.1. Написати везе између R, U и I (Омов закон). Када важе ове везе?

12.8.2. Написати везе између G, U и I (Омов закон). Када важе ове везе?

12.8.3. Када је уобичајено користити термин отпорник, а када термин проводник?

12.8.4. Шта је то референтни смер напона на отпорнику? Како се израчунава напон на отпорнику за случај усаглашених, а како за случај неусаглашених референтних смерова напона и струје?

12.8.5. Који инструмент се користи за мерење напона и како се прикључује?

12.8.6. Колика треба да буде отпорност волтметра? Објаснити због чега.

12.8.7. Написати изразе за израчунавање проводности и отпорности проводника начињеног од хомогеног материјала специфичне отпорности ρ, дужине l и површине попречног пресека S.

12.8.8. Написати изразе за израчунавање отпорности и проводности проводника начињеног од хомогеног материјала специфичне проводности σ, дужине l и површине попречног пресека S.

12.8.9. Написати јединице за специфичну отпорност и специфичну проводност.

12.8.10. Које величине повезује Омов закон у локалном облику?

12.8.11. Извести Омов закон у локалном облику.

12.8.12. Како се може израчунати отпорност проводника од нехомогеног материјала променљивог попречног пресека?

12.8.13. Извести уопштену формулу за израчунавање отпорности.

12.8.14. Под којим условима важи уопштена формула за израчунавање отпорности?

12.8.15. Написати израз за промену специфичне отпорности материјала са променом температуре. Када важи овај израз?

12.8.16. На који начин се добија израз за промену отпорности проводника са променом температуре?

12.8.17. Која је уобичајена температура на којој се задају специфична отпорност и температурни коефицијент отпорности материјала?

12.8.18. Шта је то ефекат суперпроводљивости и када настаје?

13. Џулов закон

Топлотни (термички) ефекат електричне струје је један од њена три пратећа ефекта. Може бити пожељан, када је сам себи циљ, и непожељан, када се врши трансформација енергије стационарног електричног поља у друге видове рада и енергије (изузев топлотне) или при преносу електричне енергије. Уобичајено је да се овај ефекат назива Џулов ефекат по имену енглеског физичара који га је први експериментално проучавао и успоставио квантитативне односе између појединих величина које у њему учествују.

13.1. Рад и снага на отпорнику

У својим експериментима Џул је уз помоћ калориметра мерио ослобођену топлотну енергију приликом протицања сталне електричне струје кроз проводник. Установио је да је та топлотна енергија W пропорционална квадрату јачине електричне струје I која протиче кроз проводник и дужини времена протицања t. Коефицијент пропорционалности зависио је од димензија проводника и материјала од кога је начињен, значи од његове отпорности R. Сагласно Закону о одржању рада и енергије ова топлотна енергија једнака је раду који изврше силе стационарног електричног поља,

$$W = A.$$

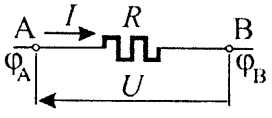
Према томе, рад A који стална електрична струја јачине I изврши на отпорнику (проводнику) отпорности R за време t је

$$A = RI^2t.$$

Деобом овог израза са t добија се брзина вршења рада, односно снага којом се енергија стационарног електричног поља трансформише у топлотну енергију,

$$P = \frac{A}{t} = RI^2.$$

До резултата који је добијен Џуловим експериментом може се доћи и једноставним теоријским разматрањем. Нека је између тачака A и B, које се налазе на потенцијалима φ_A и φ_B ($\varphi_A > \varphi_B$, $U = \varphi_A - \varphi_B$), прикључен отпорник отпорности R (слика 13.1) кроз који протиче стационарна електрична струја јачине I. У временском интервалу Δt силе стационарног електричног поља кроз отпорник, од тачке A до тачке B, пребаце наелектрисање



Слика 13.1.

$$\Delta q = I\Delta t$$

и при томе изврше рад (пошто за стационарно електрично поље "важи функција потенцијала и све што из тога следи" - видети Поглавље 11.2. и Поглавље 3.3)

$$\Delta A = \Delta q(\varphi_A - \varphi_B) = UI\Delta t.$$

Овај рад се на отпорнику у потпуности трансформише у топлотну енергију,

$$\Delta A = \Delta W,$$

са снагом

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = UI.$$

Имајући у виду везу између напона, јачине електричне струје и отпорности, дефинисану Омовим законом, израз за снагу се може написати у једном од следећа три облика:

$$\boxed{P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.}$$

Уколико је јачина електричне струје константна, рад сила електричног поља који се на отпорнику трансформише у топлоту за неко време t израчунава се као

$$\boxed{A = Pt = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t.}$$

Мада је то од раније већ познато, поновимо да је јединица за снагу P_u = W (Ват) а јединица за рад, односно енергију $A_u = W_u$ = J (Џул). Како је рад од једног Џула веома мали, у електротехници је дозвољена јединица A_u = kWh (киловатсат или киловатчас). Веза између једног киловатсата и основне јединице за рад се лако одређује,

$$1\,\text{kWh} = 1\,\text{kW}\cdot 1\,\text{h} = 1000\,\text{W}\cdot 3600\,\text{s} = 3.6\cdot 10^6\,\text{J} = 3.6\,\text{MJ}.$$

13.2. Густина снаге Џулових губитака

Уобичајено је да се енергија стационарног електричног поља која се на неком отпорнику, односно проводнику, трансформише у топлотну енергију назива Џуловим губицима а снага, којом се ова трансформација врши, снагом Џулових губитака. Трансформација енергије стационарног електричног поља у топлотну енергију је последица судара слободних носилаца електрицитета са атомима и молекулима средине кроз коју се крећу. Приликом судара се кинетичка енергија слободних носилаца у потпуности, или делимично трансформише у топлоту. Тај процес се одиграва у целој запремини проводника кроз који протиче електрична струја па, стога, има смисла говорити о снази Џулових губитака по јединици запремине, односно о густини снаге Џулових губитака.

Израз за густину снаге Џулових губитака биће изведен, ради једноставности, на примеру танког проводника сталног попречног пресека, начињеног од хомогеног материјала. Због уведених претпоставки може се сматрати да је струјно поље хомогено, али се добијени резултати, без ограничења, могу применити и у случају нехомогеног струјног поља.

Нека кроз проводник дужине l, површине попречног пресека S, начињен од материјала специфичне електричне отпорности ρ, протиче стална електрична струја јачине I. Ако се води рачуна о томе да је у хомогеном струјном пољу $I = JS$ за укупну снагу Џулових губитака у овом проводнику добија се

$$P = RI^2 = \rho\frac{l}{S}I^2 = \rho\frac{l}{S}(JS)^2 = \rho J^2 lS.$$

Дељењем обе стране горње једначине запремином проводника, $V = lS$, добија се израз за Џулове губитке по јединици запремине, односно за густину снаге Џулових губитака,

$$\boxed{\frac{P}{V} = \rho J^2 = \frac{1}{\sigma}J^2.}$$

Значи, у свакој тачки струјног поља *густина снаге Џулових губитака пропорционална је квадрату густине струје и специфичној отпорности* у тој тачки.

Из познате густине снаге Џулових губитака укупна снага Џулових губитака у неком проводнику запремине V може се одредити као

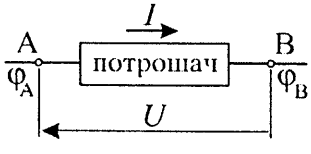
$$P = \int_V \rho J^2 \,\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{\sigma}J^2 \,\mathrm{d}V.$$

Лако се показује да се из овог најопштијег израза у случају хомогеног струјног поља добија познати израз $P = RI^2$.

13.3. Рад и снага потрошача произвољног типа; еквивалентна отпорност потрошача

Термогени потрошачи (пријемници) код којих се енергија електричног поља трансформише у топлоту нису и једини. Поред њих постоји читав низ потрошача код којих се ова енергија трансформише у друге видове рада и енергије (механички рад, хемијска, светлосна и звучна енергија и тако даље) и код којих је загревање само нежељени ефекат. Поставља се питање како израчунати њихову снагу и рад на њима. Извођење које следи је формално исто као и у Поглављу 13.1. Међутим, треба имати у виду да се ради о суштински различитим трансформацијама енергије.

Нека је задат (слика 13.2) потрошач произвољног типа прикључен између тачака A и B, које се налазе на потенцијалима φ_A и φ_B ($\varphi_A > \varphi_B$, $U = \varphi_A - \varphi_B$), и нека кроз њега протиче стационарна електрична струја јачине I. У временском интервалу Δt силе стационарног електричног поља кроз потрошач, од тачке A до тачке B, пребаце наелектрисање



Слика 13.2.

$$\Delta q = I\Delta t$$

и при томе изврше рад

$$\Delta A = \Delta q(\varphi_A - \varphi_B) = UI\Delta t.$$

Овај рад се у потрошачу трансформише у друге видове рада и енергије са снагом

$$\boxed{P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = UI}$$

Уколико је јачина електричне струје константна, рад сила електричног поља који се у потрошачу трансформише у друге видове рада и енергије за неко време t израчунава се као

$$A = Pt = UIt.$$

Без обзира на то какав је тип потрошача он, у случају стационарних електричних струја, оптерећује генератор на потпуно равноправан начин као и термогени потрошач, односно отпорник. Према томе, ***у анализи електричних кола потрошач произвољног типа можемо заменити једним еквивалентним отпорником*** отпорности R_e. Услов је да снага на еквивалентном отпорнику при истој јачини струје I буде једнака снази потрошача P, одакле следи

$$\boxed{R_e = \frac{P}{I^2}.}$$

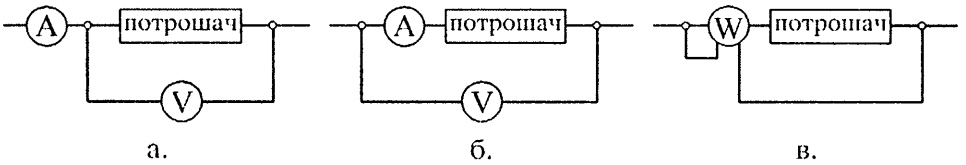
13.4. Мерење снаге и рада

Из дефиниционог израза за снагу,

$$P = UI,$$

јасно је да се снага мери посредно - мерењем напона на потрошачу и струје кроз њега. Напон на потрошачу мери се волтметром а струја кроз њега амперметром. При томе су могућа два начина прикључивања волтметра и амперметра (слика 13.3). И код једног и код другог начина прикључивања појављује се одређена систематска грешка.

Код везе са слике 13.3.а. амперметар мери збир струја кроз волтметар и потрошач. Овај начин повезивања користи се за мерење снаге потрошача мале отпорности и даје утолико тачнији резултат уколико је отпорност потрошача мања од отпорности волтметра.



Слика 3.13.

Веза са слике 13.3.б. користи се за мерење снаге потрошача веће отпорности. Волтметар мери збир напона на потрошачу и амперметру и резултат за снагу биће утолико тачнији уколико је отпорност потрошача већа од отпорности амперметра. Ово ће бити детаљније објашњено код мерења отпорности.

Уместо амперметра и волтметра за мерење снаге далеко чешће се користи један инструмент који се назива ватметар и који се симболички представља кружићем у коме се налази слово W. Ватметар има два калема (четири приступна краја). Кроз један калем, такозвани струјни калем, пропушта се струја потрошача. Други калем, такозвани напонски калем, везује се паралелно потрошачу тако да кроз њега протиче струја која је пропорционална напону на потрошачу. Скретање казаљке инструмента сразмерно је производу струја кроз калемове, односно производу струје кроз потрошач и напона на њему. Начин прикључивања ватметра приказан је на слици 13.3.в.

Рад који силе стационарног електричног поља при сталној струји I за време t изврше на неком потрошачу израчунава се као

$$A = Pt.$$

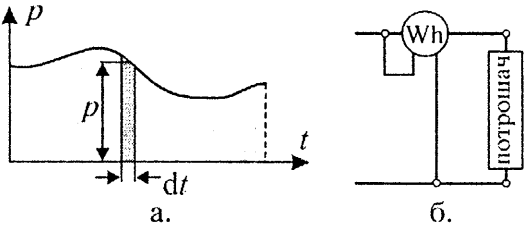
У најопштијем случају, када струја i није стална, снага p је променљива па је рад који се изврши на неком потрошачу за време $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}A = p\,\mathrm{d}t\,,$$

а укупан рад за време t

$$A = \int_0^t \mathrm{d}A = \int_0^t p\,\mathrm{d}t\,.$$

Тај рад одговара осенченој површини на слици 13.4.а.



Слика 13.4.

За мерење рада користи се инструмент који се назива електрично бројило и који се повезује на исти начин као и ватметар (слика 13.4.б). Овај инструмент је практично интегратор снаге.

13.5. Питања за проверу

13.5.1. Од чега зависи ослобођена топлотна енергија приликом протицања електричне струје кроз проводник?

13.5.2. Чему је, по Закону о одржању рада и енергије, једнака ова топлотна енергија?

13.5.3. Написати израз за рад који изврше силе стационарног електричног поља за време t уколико кроз проводник отпорности R протиче стационарна електрична струја јачине I.

13.5.4. Написати изразе за снагу којом се енергија стационарног електричног поља на отпорнику трансформише у топлоту.

13.5.5. Полазећи од израза за рад при померању оптерећења у електричном пољу извести израз за снагу на отпорнику.

13.5.6. Објаснити шта су то Џулови губици и како се израчунавају.

13.5.7. Извести израз за снагу Џулових губитака.

13.5.8. Извести израз за снагу којом се енергија стационарног електричног поља у потрошачу произвољног типа трансформише у друге видове рада и енергије.

13.5.9. Шта је то еквивалентна отпорност потрошача произвољног типа и како се одређује?

13.5.10. Како се мери снага помоћу амперметра и волтметра?

13.5.11. Нацртати везу амперметра и волтметра која се користи за мерење снаге потрошача мале отпорност и везу за мерење снаге потрошача велике отпорности.

13.5.12. Објаснити начин прикључивања ватметра.

13.5.13. Објаснити како се израчунава рад на потрошачу при сталној и при променљивој струји.

13.5.14. Којим инструментом се мери рад и како се тај инстумент прикључује?

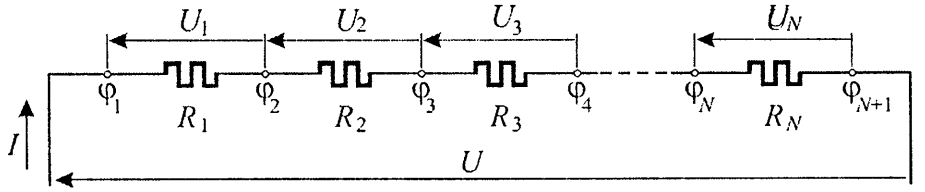
14. Спрезање отпорника; мерење отпорности

Отпорници се, као и кондензатори, могу спрезати (везивати, повезивати) редно, паралелно, мешовито, у звезду и у троугао. Прве три везе имају по два приступна краја и могу се заменити једним, еквивалентним отпорником. Везе у звезду и троугао имају по три приступна краја и код њих је, уколико је то потребно, могуће извршити трансфигурацију једне везе у другу и обрнуто.

14.1. Редна веза отпорника

Основна карактеристика редне везе отпорника је да кроз све отпорнике протиче једна иста струја. Посматрајмо редну везу N отпорника прикључену на напон U (слика 14.1). Кроз све отпорнике протиче иста струја I, тако да је напон на сваком од отпорника

$$U_i = \varphi_i - \varphi_{i+1} = R_i I.$$



Слика 14.1.

Саберимо напоне на појединим отпорницима

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = U_1 + U_2 + \cdots + U_i + \cdots + U_N$$

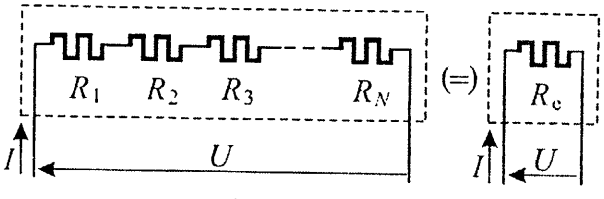
$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \cdots + \varphi_i - \varphi_{i+1} + \cdots + \varphi_N - \varphi_{N+1} = \varphi_1 - \varphi_{N+1}.$$

Како је $\varphi_1 - \varphi_{N+1}$ једнако укупном напону U на који је прикључена ова редна веза, може се писати

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \sum_{i=1}^{N} R_i I = I \sum_{i=1}^{N} R_i .$$

Пошто ова веза има два приступна краја може се заменити једним, еквивалентним, отпорником који има ту особину да је при истој јачини електричне струје напон на његовим крајевима исти као и напон на посматраној редној вези. Сликовито речено, ако би се у једној затвореној кутији са два приступна краја налазила редна веза N отпорника а у другој један, еквивалентни отпорник R_e (слика 14.2) мерењем јачине струје I и напона U између приступних крајева не би било могуће установити шта је у кутији.

Како за еквивалентни отпорник важи



Слика 14.2.

$$U = IR_e ,$$

изједначавањем два последња израза за напон,

$$IR_e = I \sum_{i=1}^{N} R_i ,$$

и дељења са I добија се

$$R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i .$$

Еквивалентна отпорност редне везе отпорника једнака је збиру отпорности отпорника који учествују у вези.

Како је проводност једнака реципрочној вредности отпорности, из последње једначине је очигледно

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{G_i} .$$

Реципрочна вредност еквивалентне проводности редне везе отпорника једнака је збиру реципрочних вредности проводности отпорника који учествују у тој вези.

У случају редне везе два отпорника израз за еквивалентну проводност се своди на

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} .$$

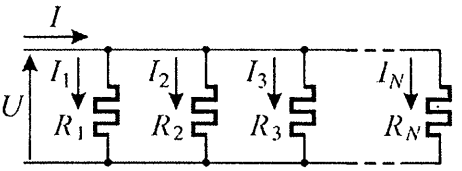
14.2. Паралелна веза отпорника

Основна карактеристика паралелне везе отпорника је да су сви отпорници прикључени на један исти напон. Посматраћемо паралелну везу N отпорника прикључену на напон U (слика 14.3). Кроз сваки од отпорника протиче струја

$$I_i = \frac{U}{R_i},$$

тако да је, сходно I Кирхофовом закону, укупна струја

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{U}{R_i} = U \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}.$$



Слика 14.3.

Ова веза се може заменити једним, еквивалентним, отпорником под условом да кроз њега при истом напону протиче иста струја као и кроз паралелну везу,

$$I = \frac{U}{R_e}.$$

Изједначавањем два последња израза за струју добија се

$$\frac{U}{R_e} = U \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i},$$

односно

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}.$$

Реципрочна вредност еквивалентне отпорности паралелне везе отпорника једнака је збиру реципрочних вредности отпорности отпорника који у њој учествују.

У случају паралелне везе два отпорника израз за еквивалентну отпорност се своди на

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

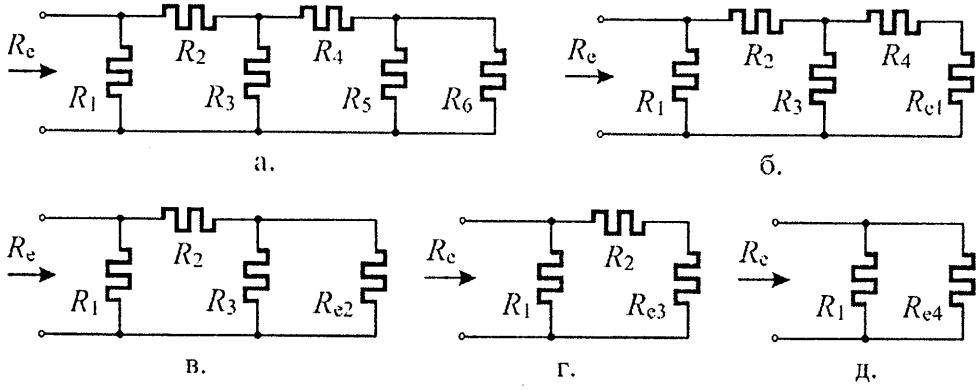
Како је $G = 1/R$, то следи

$$G_e = \sum_{i=1}^{N} G_i.$$

Еквивалентна проводност паралелне везе отпорника једнака је збиру проводности отпорника који у вези учествују.

14.3. Мешовита веза отпорника

Мешовита веза отпорника је мање или више сложена мрежа паралелно и редно везаних отпорника која има два приступна краја. Оваква веза се може, као и претходне две, заменити једним еквивалентним отпорником. Одређивање еквивалентне отпорности врши се поступним упрошћавањем: очигледне редне, односно паралелне везе замењују се еквивалентним отпорницима, затим тако упрошћена веза поново упрошћава и тако даље, све док се не дође до еквивалентне отпорности. При томе, бар на почетку, пожељно је цртати сваку од успутних еквивалентних шема. Поступак одређивања еквивалентне отпорности се најлакше може објаснити на конкретном примеру. Одредићемо еквивалентну отпорност мешовите везе отпорника приказане шемом на слици 14.а.



Слика 14.4.

У основној шеми а. отпорници R_5 и R_6 су везани паралелно и могу се заменити једним еквивалентним,

$$R_{e1} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

тако да се добија шема б. Очигледно је да су отпорници R_{e1} и R_4 везани редно тако да се могу заменити једним еквивалентним отпорником отпорности

$$R_{e2} = R_{e1} + R_4$$

који је (шема в.) везан паралелно са R_3. Паралелна веза отпорника R_{e2} и R_3 замењује се еквивалентним отпорником (шема г.) отпорности

$$R_{e3} = \frac{R_{e2} R_3}{R_{e2} + R_3}$$

везаним на ред са отпорником R_2. Редна веза отпорника R_{e3} и R_2,

$$R_{e4} = R_{e3} + R_2,$$

је везана паралелно са отпорником R_1 (шема д.) тако да је, коначно, еквивалентна отпорност

$$R_e = \frac{R_{e4} R_1}{R_{e4} + R_1}.$$

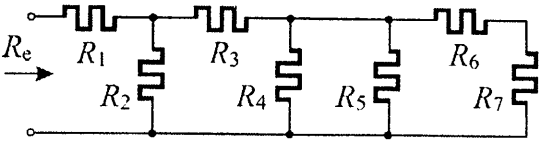
Као и у случају мешовите везе кондензатора и овде се може применити једноставна симболичка формула којом се у скраћеном и прегледном облику описује начин повезивања отпорника. У тој формули се симболом $\oplus$ означава редна, а симболом $\|$ паралелна веза отпорника. При томе операција $\|$ има приоритет над операцијом $\oplus$ док заграде, као и у математици, дефинишу приоритет извршавања операција. За везу отпорника са слике 14.4.а. симболичка формула за одређивање еквивалентне отпорности би гласила:

$$R_e = \left(\left(R_5 \| R_6 \oplus R_4\right) \| R_3 \oplus R_2\right) \| R_1.$$

Даћемо још два примера писања симболичких формула.

- За коло приказано на слици 14.5.

- R_6 и R_7 везани редно па затим паралелно са R_4 и R_5
- то је везано на ред са R_3 па затим паралелно са R_2
- коначно, све то је везано на ред са R_1.

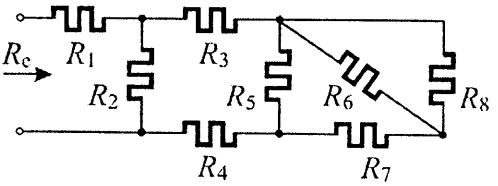


Слика 14.5.

$$R_e = \left(\left(R_6 \oplus R_7\right) \| R_4 \| R_5 \oplus R_3\right) \| R_2 \oplus R_1.$$

- За коло приказано на слици 14.6.

- R_6 и R_8 су везани паралелно па затим на ред са R_7
- то је везано паралелно са R_5 па затим на ред са R_3 и R_4
- коначно, све то је везано паралелно са R_2 па затим редно са R_1.

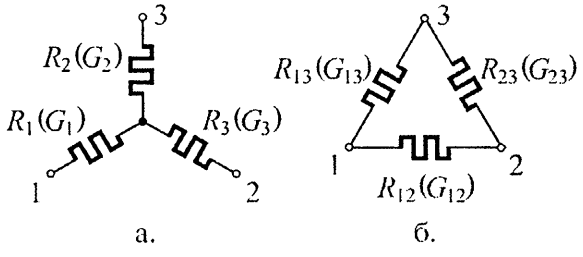


Слика 14.6.

$$R_e = \left(\left(R_6 \| R_8 \oplus R_7\right) \| R_5 \oplus R_3 \oplus R_4\right) \| R_2 \oplus R_1.$$

14.4. Трансфигурација звезда - троугао и обрнуто

Као што је већ напоменуто, поред веза отпорника са два приступна краја, код којих је било могуће одредити еквивалентну отпорност и заменити их једним еквивалентним отпорником, постоје и везе са три приступна краја - веза у звезду (слика 14.7.а), за коју се користи ознака Y, и веза у троугао (слика 14.7.б), за коју се користи ознака D. Јасно је да се ове везе не могу заменити једним еквивалентним отпорником. Међутим, уколико су познате отпорности (проводности) отпорника везаних у звезду, могу се одредити вредности отпорности (проводности) отпорника везаних у троугао, као и обрнуто, а да се у односу на остатак кола, односно тачке 1 , 2 и 3 ништа не промени. Ово се назива трансфигурацијом звезде у троугао и обрнуто.



Слика 14.7.

Везе између отпорности (проводности) код трансфигурације звезде у троугао и обрнуто даћемо без извођења. Нека су задате отпорности R_1, R_2 и R_3 (проводности G_1, G_2 и G_3) везе у звезду. Ако се ова веза трансфигурише у троугао отпорности (проводности) троугла ће бити

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \qquad G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \qquad G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

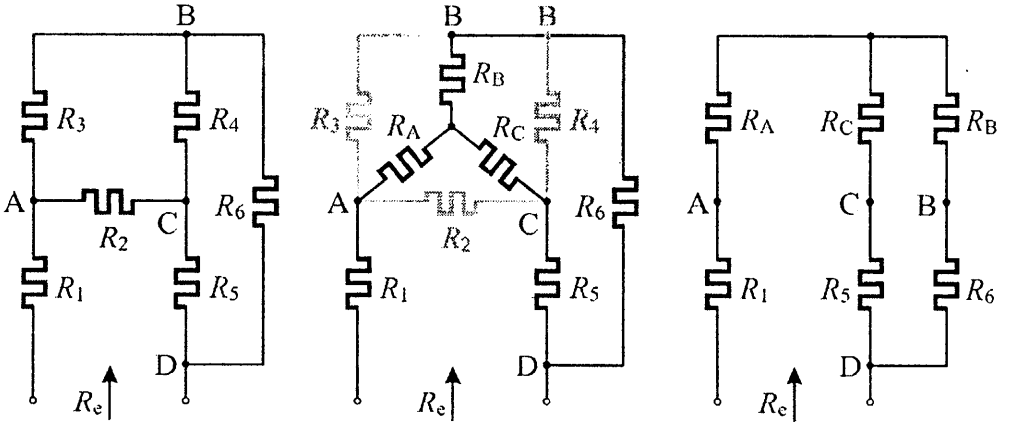
С друге стране, ако су задате отпорности R_{12}, R_{13} и R_{23} (проводности G_{12}, G_{13} и G_{23}) везе у троугао, тада су одговарајуће отпорности (проводности) везе у звезду

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad G_1 = G_{12} + G_{13} + \frac{G_{12} G_{13}}{G_{23}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad G_2 = G_{12} + G_{23} + \frac{G_{12} G_{23}}{G_{13}}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad G_3 = G_{13} + G_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{G_{12}}$$

Покажимо на једном примеру примену трансфигурације троугао - звезда при одређивању еквивалентне отпорности сложене везе отпорника. У колу на слици 14.8.а. не може се уочити ниједна редна или паралелна веза отпорника тако да није могуће директно извршити поступно упрошћавање кола у циљу одређивања еквивалентне отпорности. Зато је потребно најпре извршити трансфигурацију једне звезде ($R_1 - R_2 - R_3$, $R_2 - R_4 - R_5$ или $R_3 - R_4 - R_6$) у троугао или једног троугла ($R_2 - R_3 - R_4$ или $R_4 - R_5 - R_6$) у звезду.



Слика 14.8.

Трансфигурација звезде $R_1 - R_2 - R_3$ не доводи до резултата, што се лако може показати. Од преосталих могућности овде ће бити трансфигурисан троугао $R_2 - R_3 - R_4$ (A–B–C) у звезду.

Трансфигурацијом троугла A–B–C (сиво означени отпорници на слици 14.8.б) добија се звезда са отпорностима

$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4}, \quad R_B = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \quad \text{и} \quad R_C = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$$

и еквивалентна шема приказана на слици 14.8.в. Сада се еквивалентна отпорност може лако одредити као

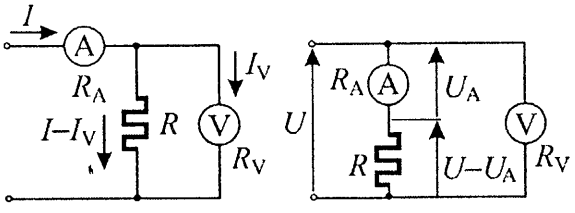
$$R_e = (R_5 \oplus R_C) \| (R_6 \oplus R_B) \oplus R_A \oplus R_1.$$

Читаоц може извршити и неку другу трансфигурацију, на пример трансфигурацију звезде $R_2 - R_4 - R_5$ у троугао. Тачност резултата може се проверити са конкретним нумеричким подацима: $R_1 = R_2 = R_3 = 100\Omega$, $R_4 = R_5 = 200\Omega$, $R_6 = 400\Omega$. Наравно, било коју трансфигурацију да изврши мора добити исти резултат, $R_e = 100\Omega$.

14.5. Мерење отпорности помоћу амперметра и волтметра

Отпорност неког отпорника (проводника) се може мерити, имајући у виду Омов закон, индиректно - мерењем напона U између његових крајева и струје I кроз њега. При томе се амперметар и волтметар могу прикључити на два начина (слика 14.9).

Уколико се инструменти повежу као на слици 14.9.а, амперметар мери укупну струју кроз паралелну везу волтметра и отпорника, док ће волтметар мерити напон на отпорнику. Количник напона U који мери волтметар и струје I коју мери амперметар, мерена отпорност, биће једнак еквивалентној отпорности паралелне везе отпорности отпорника R и отпорности волтметра R_V,



а. б.

Слика 14.9.

$$R_M = \frac{U}{I} = \frac{R_V R}{R_V + R}.$$

Када се бројиоц и именилац десне стране овог израза подели са R_V добија се

$$R_M = \frac{R}{1 + R/R_V},$$

одакле се лако може закључити да ће отпорност добијена мерењем бити једнака отпорности R само у случају када отпорност волтметра тежи бесконачности, $R_V \to \infty$ (идеални волтметар). Како отпорност реалног волтметра увек има неку коначну вредност, то ће и отпорност добијена мерењем увек бити мања од отпорности R. Резултат мерења ће бити утолико тачнији уколико је однос R/R_V мањи, што значи да овакву везу треба користити за мерење малих отпорности.

Код везе инструмената са слике 14.9.б. амперметар ће мерити струју кроз отпорник, док ће волтметар мерити укупан напон на редној вези отпорника и амперметра. Количник напона U који мери волтметар и струје I коју мери амперметар, мерена отпорност, биће једнак еквивалентној отпорности редне везе отпорности отпорника R и отпорности амперметра R_A,

$$R_M = \frac{U}{I} = R + R_A.$$

Јасно је да ће мерена отпорност бити једнака отпорности R само у случају да је отпорност амперметра једнака нули (идеални амперметар). Како је отпорност реалног амперметра увек различита од нуле, то ће и от-

порност добијена мерењем увек бити већа од отпорности R. Резултат ће бити утолико тачнији уколико је отпорност амперметра мања од мерене отпорности, што значи да ову везу треба користити за мерење великих отпорности.

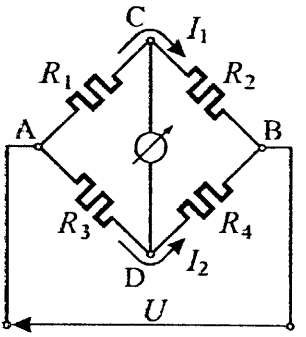
Мерење отпорности помоћу амперметра и волтметра је, значи, неминовно праћено одређеном грешком. Ова грешка је последица коначне отпорности инструмената и саме мерне методе и назива се систематском грешком. Поред систематске грешке при мерењу се јављају још две грешке: објективна (грешка инструмента) и субјективна (грешка при очитавању вредности).

14.6. Мерење отпорности мостом

Једно од најтачнијих мерења отпорности је мерење помоћу моста. Тачност се постиже тиме што је у потпуности елиминисана систематска грешка, док је величина субјективне грешке знатно смањена.

14.6.1. Услов равнотеже моста

Мост се, у принципу, састоји од четири отпорника везаних тако да формирају квадрат (слика 14.10). У једној дијагонали (AB) везан је извор сталног напона док је у другој (CD) веома осетљив инструмент за мерење струје.



Слика 14.10.

У најопштијем случају, када отпорности у гранама моста имају произвољне вредности, у појединим гранама, као и у дијагонали са инструментом протицаће струје које се могу одредити неком од метода за решавање електричних кола. Од посебног интереса је случај ***када је струја у дијагонали са инструментом једнака нули, односно када је напон између тачака*** **C** ***и*** **D** ***једнак нули,*** $U_{CD} = 0$. Када је овај услов испуњен ***за мост се каже да је у равнотежи.***

Пошто је код моста у стању равнотеже струја у грани CD једнака нули очигледно је да ће кроз отпорнике R_1 и R_2 протицати иста струја (редна веза отпорника прикључена на напон U),

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Такође ће и кроз отпорнике R_3 и R_4 протицати иста струја,

$$I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4}.$$

Како је напон U_{CD} једнак нули значи да су тачке C и D на истом потенцијалу, односно да су напони U_{AC} и U_{AD} међусобно једнаки,

$$U_{AC} = R_1 I_1 = R_3 I_2 = U_{AD}.$$

Уношењем израза за струје I_1 и I_2 у претходну једначину,

$$R_1 \frac{U}{R_1 + R_2} = R_3 \frac{U}{R_3 + R_4},$$

након сређивања се добија

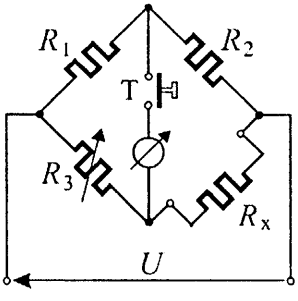
$$\boxed{R_1 R_4 = R_2 R_3.}$$

Овај услов, који треба да задовоље вредности отпорника у гранама моста да би струја у дијагонали са инструментом била једнака нули, назива се ***условом равнотеже моста***. Значи, ***мост је у равнотежи када је производ отпорности отпорника у наспрамним гранама моста међусобно једнак.***

14.6.2. Витстонов мост

Витстонов мост је по изгледу сличан мосту који је описан и анализиран у претходном поглављу. Разлика је у томе што се уместо отпорника R_4 прикључује отпорник R_x чију отпорност треба мерити, док се инструмент у дијагонали моста може повремено укључивати притиском на тастер T (слика 14.11). Из општег услова равнотеже моста,

$$R_1 R_x = R_2 R_3,$$



Слика 14.11.

следи

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3.$$

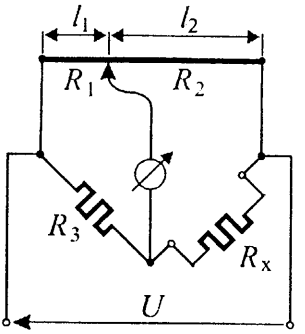
Код практичног извођења овог моста однос отпорности R_2/R_1 се може скоковито мењати, док се отпорност R_3 мења континуално. Притиском на тастер укључује се инструмент чија казаљка, уколико мост није у равнотежи скреће из нултог положаја (који се налази на средини) на једну или другу страну. Променом односа отпорности R_2/R_1 и отпорности R_3 мост се доводи у равнотежу - приликом притиска на тастер казаљка инструмента остаје у миру, на нули. Тада се, на основу претходног израза, израчунава непозната отпорност.

Постоји више разлога због којих мерење отпорности мостом спада у најтачнија мерења отпорности која се могу обавити без неке скупе опреме и посебних лабораторијских услова. Прво, у потпуности је избегнута систематска грешка јер резултати мерења не зависе од унутрашње отпорности инструмента и квалитета извора за напајање. Даље, тачност инструмента за мерење струје нема утицаја на тачност резултата јер није потребно мерити неку конкретну струју већ само установити да ли, при притиску на тастер, казаљка инструмента скреће из нултог положаја или остаје у миру. И, коначно, вредност отпорности R_3 може се веома пажљиво очитати и након завршетка мерења, и то са високом тачношћу.

Интересантно је још једно извођење моста за мерење отпорности код кога се вредност отпорности отпорника R_3 може дискретно мењати, док се однос отпорности R_2/R_1 континуално мења (слика 14.12). Могућност континуалне промене овог односа остварена је тако што су отпорници R_1 и R_2 замењени отпорном жицом по којој се може померати један клизач (клизни контакт). Према слици, лево од клизача је отпорност жице R_1 а десно отпорност R_2. Како је жица начињена од хомогеног материјала и има сталну површину попречног пресека, мост ће бити у равнотежи када је задовољен услов

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 = \frac{\rho l_2/S}{\rho l_1/S} R_3 = \frac{l_2}{l_1} R_3.$$

Значи, мерење непознате отпорности се практично своди на мерење односа дужина.



Слика 14.12.

14.7. Питања за проверу

14.7.1. Како се могу спрезати отпорници?

14.7.2. Шта је карактеристично за редну, а шта за паралелну везу отпорника?

14.7.3. Колико приступних крајева треба да има произвољна веза отпорника да би могла бити замењена једним еквивалентним отпорником?

14.7.4. Извести израз за еквивалентну отпорност редне везе произвољног броја отпорника.

14.7.5. Написати израз за еквивалентну проводност редне везе произвољног броја отпорника.

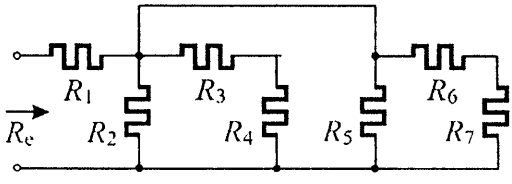
14.7.6. Написати уобичајени израз за еквивалентну проводност редне везе два отпорника.

14.7.7. Извести израз за еквивалентну отпорност паралелне везе произвољног броја отпорника.

14.7.8. Написати уобичајени израз за еквивалентну отпорност паралелне везе два отпорника.

14.7.9. Написати израз за еквивалентну проводност паралелне везе произвољног броја отпорника.

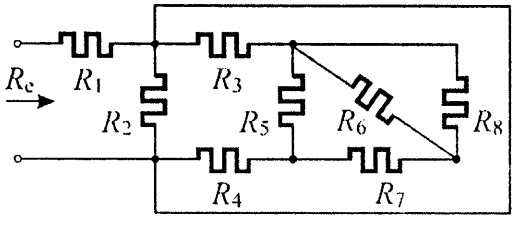
14.7.10. Описати поступак одређивања еквивалентне отпорности мешовите везе отпорника.



Слика 4.13.

14.7.11. Написати симболичку формулу за одређивање еквивалентне отпорности мешовите везе отпорника приказане на слици 14.13. Израчунати еквивалентну отпорност за случај да је:

$$R_1 = R_3 = 3\,\mathrm{k}\Omega,\ R_2 = 9\,\mathrm{k}\Omega,$$
$$R_4 = R_5 = 6\,\mathrm{k}\Omega,\ R_6 = R_7 = 4.5\,\mathrm{k}\Omega.$$



Слика 4.14.

14.7.12. Написати симболичку формулу за одређивање еквивалентне отпорности мешовите везе отпорника приказане на слици 14.13. Израчунати еквивалентну отпорност за случај да је:

$$R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = 1\Omega,$$
$$R_2 = R_4 = R_6 = R_8 = 1.8\Omega.$$

14.7.13. Нацртати везе отпорника у звезду и у троугао.

14.7.14. Да ли је могуће везу отпорника у звезду, односно троугао, заменити једним еквивалентним отпорником? Зашто?

14.7.15. Нацртати везу за мерење малих отпорности помоћу амперметра и волтметра. Како грешка у мерењу зависи од односа унутрашњих отпорности инструмената и вредности мерене отпорности?

14.7.16. Нацртати везу за мерење великих отпорности помоћу амперметра и волтметра. Како грешка у мерењу зависи од односа унутрашњих отпорности инструмената и вредности мерене отпорности?

14.7.17. Нацртати мост. Када се за мост каже да је у равнотежи? Извести услов равнотеже моста.

14.7.18. Нацртати Витстонов мост и описати поступак мерења непознате отпорности.

14.7.19. Нацртати мост са отпорном жицом и извести услов равнотеже. Описати поступак мерења непознате отпорности.

14.7.20. Објаснити због чега се постиже висока тачност при мерењу отпорности мостом.

15. Електрични генератор и просто електрично коло

Већ смо на почетку напоменули да је за одржавање стационарне електричне струје у затвореном електричном колу неопходно стално вршити рад. Овај рад врши елемент кола који се назива електрични генератор или, краће, генератор. У генератору се транспортују слободни носиоци електрицитета насупрот силама стационарног електричног поља и врши трансформација других видова рада и енергије (механички рад, хемијска енергија, топлотна енергија и тако даље) у енергију стационарног електричног поља.

15.1. Страна сила и страно поље

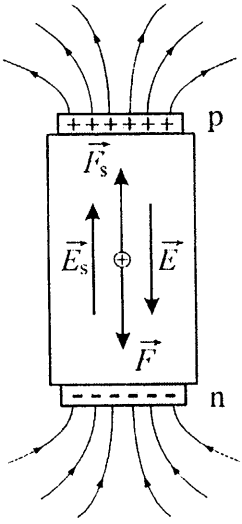
Генератор је средина кроз коју се врши транспорт слободних носиоца електрицитета под дејством некулонских сила (сила које не потичу од поља електричних оптерећења) *насупрот силама стационарног електричног поља. Ове силе се називају страним силама* и могу бити различите природе (електрохемијске, електромагнетне итд.).

Анализу рада генератора извршићемо за случај да су слободни носиоци електрицитета позитивна оптерећења. Овакав приступ се узима због физичког смера струје и нема никаквог утицаја на општост резултата, јер кретање позитивних оптерећења у једном смеру има за последицу исте ефекте као и кретање негативних оптерећења у супротном смеру.

Посматраћемо најпре генератор који није оптерећен, односно није укључен у струјно коло. За овакав генератор уобичајено је рећи да се налази у *празном ходу*.

Генератор можемо схватити као проводну средину кроз коју се, под дејством страних сила $\vec{F}_s$, крећу слободни носиоци електрицитета Q_e (слика 15.1). На једном крају генератора, позитивном полу **p**, долази до нагомилавања позитивних оптерећења док на другом крају, негатив-

ном полу **n**, остаје вишак негативних оптерећења (позитивни пол генератора долази на виши потенцијал у односу на негативни). Ова наелектрисања стварају стационарно електрично поље које постоји како у генератору, тако и ван њега. Стационарно електрично поље у унутрашњости генератора делује на слободне носиоце силом



Слика 15.1.

$$\vec{F} = Q_e \vec{E}$$

која је супротна сили $\vec{F}_s$. Са повећањем оптерећења на половима генератора расте стационарно електрично поље, а са њим и сила $\vec{F}$, тако да се смањује резултантна сила у смеру $\vec{F}_s$. Кретање наелектрисања кроз генератор трајаће све док се ове две силе не изједначе по интензитету, односно све док не буде задовољен услов

$$\vec{F} + \vec{F}_s = 0,$$

када се успоставља стационарно стање.

Мада стране силе могу бити веома различитог карактера, заједничко им је то да делују на слободне носиоце електрицитета и врше њихово пребацивање са негативног на позитивни пол генератора. Како је у електротехници много погодније радити са електричним пољима него са силама, то се код анализе рада генератора уводи једно фиктивно поље, такозвано страно поље. Дејством страног поља на слободне носиоце електрицитета у потпуности се замењује дејство страних сила, без обзира на то какава је њихов карактер.

> ***Страно поље се дефинише као електрично поље које би на слободне носиоце електрицитета деловало силом која је једнака страној сили,***
>
> $$\vec{E}_s = \frac{\vec{F}_s}{Q_e}.$$

Страно поље је локализовано унутар генератора и оријентисано од негативног ка позитивном прикључку, значи супротно од стационарног електричног поља. Мада му је јединица иста као и за електрично поље, страно поље по природи може (на пример код генератора који раде на принципу електромагнетне индукције), али не мора (на пример код електрохемијских генератора) бити електрично поље.

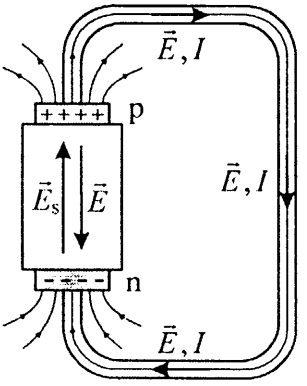
Увођењем страног поља анализа неоптерећеног генератора (генератора у празном ходу) се може извршити преко поља. Страно поље делује силом на слободне носиоце електрицитета и помера их од нега-

тивног ка позитивном полу генератора. Нагомилана наелектрисања на половима генератора стварају стационарно електрично поље које постоји и унутар и ван генератора. У генератору је стационарно електрично поље оријентисано супротно у односу на страно поље. ***Кретање наелектрисања кроз генератор у празном ходу траје*** све док на њих делује сила, односно ***све док резултантно поље у генератору не постане једнако нули,***

$$\boxed{\vec{E}+\vec{E}_s=0,}$$

када се успоставља стационарно, односно равнотежно стање.

Када се генератор укључи у струјно коло (оптерети) између његових прикључака (полова) се затвара проводни пут (слика 15.2). Стационарно електрично поље, које постоји и у проводнику, делује силом на слободне носиоце електрицитета. Под дејством ове силе слободни носиоци ће се кретати кроз проводник од позитивног ка негативном полу (прикључку) генератора (од тачке вишег ка тачки нижег потенцијала), образујући на тај начин електричну струју. Ово доводи до смањења оптерећења на крајевима генератора, а самим тим и до смањења стационарног електричног поља. У унутрашњости генератора нарушава се равнотежа која је постојала у празном ходу. ***Страно поље у оптерећеном генератору постаје по интензитету веће од стационарног електричног поља,***



Слика 15.2.

$$\boxed{\left|\vec{E}_s\right|>\left|\vec{E}\right|,}$$

па се појављује резултантна сила која на слободне носиоце електрицитета у генератору делује у смеру страног поља. Ова сила врши пребацивање слободних носилаца електрицитета од негативног ка позитивном прикључку генератора, тако да ***кроз генератор протиче електрична струја у смеру од тачке нижег ка тачки вишег потенцијала.*** Уочите разлику у односу на проводнике и потрошаче (пријемнике) код којих струја тече од тачке вишег ка тачки нижег потенцијала.

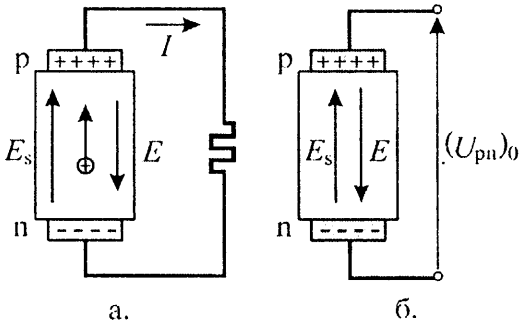
Рад који врше стране силе при померању слободних носилаца електрицитета кроз генератор трансформише се у енергију стационарног електричног поља. Ова енергија се, затим, у другим деловима електричног кола трансформише у друге видове рада и енергије.

15.2. Електромоторна сила и унутрашња отпорност

Мада су страна сила и страно поље веома погодне величине за анализу процеса у самом генератору, оне нису погодне као карактеристике генератора при анализи електричних кола. Стога се уводе две нове величине које у потпуности карактеришу генератор и које се искључиво користе при анализи електричних кола. То су електромоторна сила и унутрашња отпорност генератора.

Електромоторна сила је скаларна величина и дефинише се преко рада страних сила у генератору (слика 15.3.а):

> ***Електромоторна сила је једнака количнику рада који изврше стране силе приликом пребацивања количине електрицитета ΔQ кроз генератор од негативног до позитивног прикључка и саме те количине електрицитета,***
>
> $$E = \frac{A}{\Delta Q}.$$



Слика 15.3.

Ознака за електромоторну силу, E, коришћена је и за означавање интензитета вектора јачине електричног поља. Да не би дошло до забуне, у даљем излагању ће интензитет вектора јачине електричног поља бити означаван као апсолутна вредност од $\vec{E}$).

Рад који изврше стране силе при пребацивању оптерећења ΔQ кроз генератор од негативног до позитивног прикључка је, по дефиницији,

$$A = \int_n^p \vec{F}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_n^p \Delta Q \vec{E}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Delta Q \int_n^p \vec{E}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

тако да је електромоторна сила

$$E = \frac{A}{\Delta Q} = \int_n^p \vec{E}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Значи, ***електромоторна сила је линијски интеграл вектора страног поља кроз генератор од негативног до позитивног прикључка.***

Како је у празном ходу генератора (у случају неоптерећеног генератора) задовољен услов

$$\vec{E} + \vec{E}_s = 0,$$

то се након смене $\vec{E} = -\vec{E}_s$ у претходном изразу, за електромоторну силу добија

$$E = \int_n^p \vec{E}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_n^p \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

и, после промене граница интеграције у последњем интегралу,

$$E = \int_p^n \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Електромоторна сила једнака је линијском интегралу вектора јачине стационарног електричног поља од позитивног до негативног прикључка генератора који се налази у празном ходу.

Електромоторна сила је оријентисана скаларна величина усмерена од негативног ка позитивном прикључку генератора.

С друге стране је

$$E = \int_p^n \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi_p - \varphi_n = (U_{pn})_0,$$

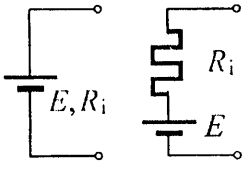
што значи да је ***електромоторна сила бројно једнака потенцијалној разлици између прикључних крајева генератора у празном ходу, односно напону празног хода генератора*** (слика 15.3.б). Мада је електромоторна сила бројно једнака напону празног хода генератора, и мада јој је јединица иста као и јединица за напон ($E_u = \mathrm{V}$), она по природи није напон. Треба је схватити као величину која на прикладан начин репрезентује стране силе у генератору.

Уобичајена ознака за напон празног хода генератора је U_0 или U_{ph} (p–празног, h–хода).

Генератор је проводна средина кроз коју се крећу слободни носиоци електрицитета. Ово кретање је неминовно праћено топлотним губицима који су пропорционални квадрату јачине струје кроз генератор. ***Репрезент Џулових губитака у генератору је унутрашња отпорност генератора*** која се дефинише као количник снаге Џулових губитака у генератору, P_J, при струји I кроз генератор и квадрата те струје,

$$\boxed{R_i = P_J / I^2\,.}$$

Електромоторна сила генератора и његова унутрашња отпорност се не могу међусобно раздвојити. То су две основне карактерике једног јединственог физичког појма - електричног генератора. У електричним шемама користе се равноправно два начина означавања електромоторне силе и унутрашње отпорности. Код једног начина означавања (слика 15.4.а) поред графичког симбола за генератор стављају се ознаке за електромоторну силу и унутрашњу отпорност, док се код другог начина (слика 15.4.б) електромоторна сила и унутрашња отпорност цртају одвојено. Мада су оба начина означавања равноправна, у овој књизи ћемо, углавном, користити начин са слике 15.4.б. где се ознака за унутрашњу отпорност лакше уочава.



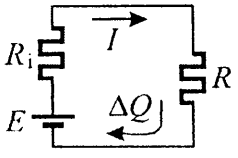
а. б.

Слика 15.4.

15.3. Коло са једним генератором и једним отпорником

15.3.1. Струја у колу

Потребно је одредити јачину струје у простом колу које се састоји од генератора, електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i, на који је прикључен потрошач отпорности R (слика 15.5). Референтни смер струје одређен је оријентацијом електромоторне силе генератора.



Слика 15.5.

Да би одредили струју у колу искористићемо Закон о одржању рада и енергије. Посматрајмо коло у току временског интервала Δt. Уколико је јачина струје I, кроз коло ће, а самим тим и кроз генератор, за време Δt протећи количина електрицитета

$$\Delta Q = I\Delta t.$$

Пребацујући ову количину електрицитета кроз генератор од негативног до позитивног прикључка, стране силе у генератору ће, сагласно дефиницији електромоторне силе, извршити рад

$$\Delta A = E\Delta Q = EI\Delta t.$$

За исто време овај рад се, сходно Џуловом закону, трансформише у топлоту на унутрашњој отпорности генератора ($R_i I^2 \Delta t$) и отпорности потрошача ($RI^2\Delta t$),

$$EI\Delta t = R_i I^2 \Delta t + RI^2 \Delta t.$$

Дељењем ове једначине са Δt добија се једначина

$$EI = R_i I^2 + RI^2$$

у којој су сви чланови по природи снага. На левој страни је снага којом се у генератору рад страних сила трансформише у енергију стационарног електричног поља, док чланови на десној страни представљају снагу Џулових губитака на унутрашњој отпорности генератора и отпорности потрошача. Како је и унутрашња отпорност генератора потрошач, то следи да је *снага генератора једнака збиру снага потрошача.*

Ако се последња једначина најпре подели са I,

$$E = R_i I + RI,$$

а затим реши по I, добија се израз за струју у овом простом колу

$$\boxed{I = \frac{E}{R + R_i}.}$$

15.3.2. Спољашња карактеристика генератора

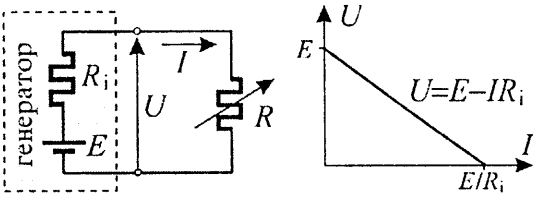
Нека је задато просто коло које се састоји од генератора, електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i, и потрошача променљиве отпорности R (слика 15.6.а). Променом отпорности потрошача може се мењати струја у колу, односно оптерећење генератора. Одредимо напон на прикључним крајевима генератора у функцији његовог оптерећења.

Полазећи од израза за струју у овом простом колу,

$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

лако се добија

$$RI = E - R_i I.$$



а. б.

Слика 15.6.

Како је $U = RI$ напон на потрошачу, а уједно и напон на прикључним крајевима генератора, може се писати

$$U = E - R_i I.$$

Једначина, која даје зависност напона на прикључним крајевима генератора у функцији струје оптерећења, назива се спољашња карактеристика генератора.

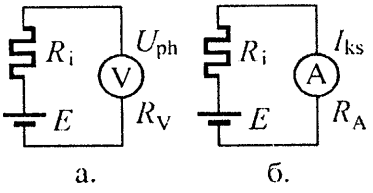
Спољашња карактеристика генератора (назива се још и волтамперском карактеристиком генератора) је у $U - I$ координатном систему

права линија (слика 15.6.б) са коефицијентом правца $-R_i$ и одсечком на U – оси E. Најједноставније се црта помоћу две тачке кроз које пролази: $I=0 \Rightarrow U=E$ и $U=0 \Rightarrow I=E/R_i$.

15.3.3. Одређивање електромоторне силе и унутрашње отпорности генератора

Електромоторна сила и унутрашња отпорност генератора могу се одредити мерењем. Да би се одредиле две непознате величине потребно је извршити два мерења.

Како је електромоторна сила једнака напону празног хода може се директно мерити волтметром (слика 15.7.а), $E=U_{ph}$. Јасно је да се, због коначне отпорности волтметра, чини одређена грешка. Струја кроз генератор није једнака нули већ



Слика 15.7.

$$I=\frac{E}{R_i+R_V},$$

тако да је напон који мери волтметар (напон на крајевима генератора)

$$U_{ph}=E-R_iI=E-R_i\frac{E}{R_i+R_V}=E\left(1-\frac{1}{1+R_V/R_i}\right)\approx E.$$

Из последњег израза је очигледно да ће мерена вредност напона празног хода бити утолико ближа електромоторној сили уколико је однос отпорности волтметра и унутрашње отпорности генератора већи.

Ако се генератор кратко споји (слика 15.7.б), напон на његовим крајевима биће једнак нули тако да се из спољашње карактеристике генератора за овај случај,

$$0=E-R_iI_{ks},$$

добија

$$R_i=\frac{E}{I_{ks}}=\frac{U_{ph}}{I_{ks}},$$

где је I_{ks} струја кратког споја (k – кратак, s – спој) генератора. Како амперметар има коначну отпорност, то струја кратког споја неће бити ограничена само унутрашњом отпорношћу генератора већ и отпорношћу амперметра,

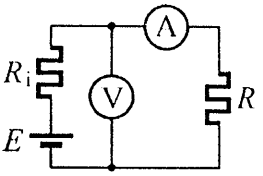
$$0=E-(R_i+R_A)I_{ks}.$$

Резултат за унутрашњу отпорност ће бити утолико тачнији уколико је однос отпорности амперметра и унутрашње отпорности мањи.

Велики број генератора, посебно они са релативно малом унутрашњом отпорношћу, није у стању да издржи струју кратког споја (кратко спајање прикључних крајева генератора имало би за последицу његово оштећење или уништење). Стога одређивање унутрашње отпорности генератора на напред описани начин није могуће па се користити један други поступак.

Нека је електромоторна сила генератора одређена мерењем напона празног хода. Оптеретимо генератор неким отпорником (слика 15.8) чију отпорност не морамо знати. Измеримо струју I којом је оптерећен генератор и напон U на његовим крајевима при тој струји оптерећења. Из израза за спољашњу карактеристику генератора директно се добија

$$R_i = \frac{E-U}{I}.$$



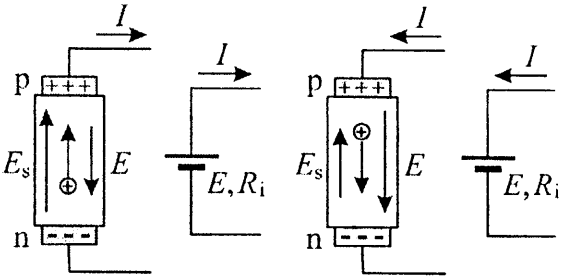
Слика 15.8.

15.3.4. Снага генератора

Као што је већ раније показано, у генератору се рад страних сила при пребацивању оптерећења ΔQ од негативног до позитивног пола генератора (слика 15.9.а), $\Delta A = E\Delta Q$, трансформише у енергију стационарног електричног поља. Снага којом се врши ова трансформација,

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{E\Delta Q}{\Delta t} = \frac{EI\Delta t}{\Delta t} = EI,$$

назива се снага генератора.



Слика 15.9.

Када у електричном колу делује више генератора могуће је да код једног, или више њих, смер струје и електромоторне силе нису сагласни. У том случају се слободни носиоци електрицитета кроз генератор крећу под дејством стационарног електричног поља од позитивног ка негативном прикључку (слика 15.9.б), значи насупрот страном пољу. При томе силе стационарног електричног поља врше рад противу страних сила, тако да се у генератору енергија стационарног електричног поља трансформише у друге видове рада и енергије. Генератор се, значи, понаша као потрошач за који је уобичајено рећи "потрошач (пријемник) са електромоторном силом".

Приликом пребацивања количине електрицитета ΔQ кроз генератор од позитивног до негативног прикључка, силе стационарног електричног поља изврше рад $\Delta A = E\Delta Q$ који се трансформише у друге видове рада и енергије. Снага којом се врши ова трансформација,

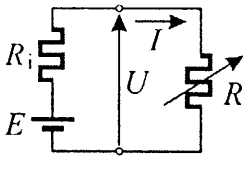
$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{E\Delta Q}{\Delta t} = \frac{EI\Delta t}{\Delta t} = EI,$$

је снага којом "потрошач са електромоторном силом" оптерећује остатак електричног кола.

Процес трансформације енергије стационарног електричног поља у генератору у друге видове рада и енергије може бити реверзибилан (повратан) и иреверзибилан (неповратан). Код реверзибилних процеса се енергија стационарног електричног поља трансформише у друге видове рада и енергије који се, затим, поново могу трансформисати у електричну енергију. Свима познат процес реверзибилних преображаја енергије одиграва се у акумулатору. Приликом пуњења акумулатора он се понаша као потрошач у коме се енергија стационарног електричног поља трансформише у хемијску енергију, док се при пражњењу одиграва обрнути процес - хемијска енергија акумулатора се трансформише у електричну енергију. Наравно, ови процеси су неминовно праћени неповратним губицима енергије.

Код иреверзибилних процеса долази до неповратних трансформација енергије. Рецимо, уколико бисмо желели да напунимо обичну батерију уложени рад би се у потпуности неповратно претворио у топлоту.

15.3.5. Степен корисног дејства генератора и прилагођење потрошача на генератор



Слика 15.10.

Нека је на генератор електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i прикључен потрошач отпорности R (слика 15.10). Део рада који изврше стране силе у генератору трансформише се у Џулове губитке на унутрашњој отпорности генератора, док се остатак предаје потрошачу у коме се трансформише у друге видове рада и енергије. Рад који се у потрошачу трансформише у друге, жељене видове рада и енергије, назива се користан рад. Користан рад је увек мањи од укупног рада који изврше стране силе у генератору, и то за Џулове губитке на унутрашњој отпорности генератора. ***Количник корисног рада, A_k, и укупног (уложеног) рада, A_u, назива се степен корисног дејства (степен искоришћења),***

$$\eta = \frac{A_k}{A_u},$$

и увек је мањи од јединице (или, у идеалном случају генератора без губитака, једнак јединици). Код стационарних електричних струја, где се снага не мења у времену, дељењем бројиоца и имениоца горње једначине са t добија се

$$\eta = \frac{P_k}{P_u},$$

где је P_k корисна снага потрошача, а P_u укупна снага генератора.

Одредимо сада степен корисног дејства задатог система генератор - потрошач. Струја у колу је

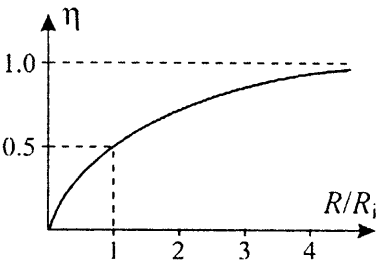
$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

тако да је степен корисног дејства

$$\eta = \frac{P_k}{P_u} = \frac{RI^2}{EI} = \frac{RI}{E} = \frac{R}{R + R_i},$$

односно, након дељења бројиоца и имениоца са R

$$\boxed{\eta = \frac{1}{1 + R_i/R}.}$$



Слика 15.11.

Из последњег израза је очигледно да се степен корисног дејства мења у границама од 0 до 1, као и да зависи од односа унутрашње отпорности генератора и отпорности потрошача. Када $R_i/R \to 0$, односно $R/R_i \to \infty$, степен корисног дејства тежи јединици, $\eta \to 1$. На слици 15.11. приказана је промена степена корисног дејства у функцији односа R/R_i. Треба уочити да је за $R/R_i = 1$ степен корисног дејства $\eta = 0.5$.

Степен корисног дејства је једна од изузетно важних величина, посебно у енергетици. Може се замислити шта би се десило када би генератори у електрани радили са малим степеном корисног дејства и, примера ради, на Ђердапу у генераторима неколико стотина MW претварало у топлоту.

У електроници, посебно када се ради са веома малим снагама, степен корисног дејства није од пресудног значаја већ захтев да се на потрошачу, који се прикључује на генератор одређених карактеристика, добије максимална снага.

Вратимо се на коло са слике 15.10. Струја у колу је већ одређена, тако да је снага на потрошачу

$$P = RI^2 = \frac{RE^2}{(R+R_i)^2} = P(R).$$

Јасно је да је при константној електромоторној сили и унутрашњој отпорности генератора снага на потрошачу функција његове отпорности, $P = P(R)$. Из претходног израза је очигледно да је за $R = 0$ и $R \to \infty$ снага потрошача једнака нули. Како је снага искључиво позитивна величина, између ове две граничне вредности постоји вредност отпорности потрошача за коју је снага на њему максимална. Максимум функције $P(R)$ одређује се из услова да је њен први извод по променљивој R једнак нули,

$$\frac{\mathrm{d}P(R)}{\mathrm{d}R} = E^2 \frac{(R+R_i)^2 - R\cdot 2(R+R_i)}{(R+R_i)^4} = 0,$$

одакле, након скраћивања са $R+R_i$, следи

$$R + R_i - 2R = 0$$

то јест

$$R = R_i.$$

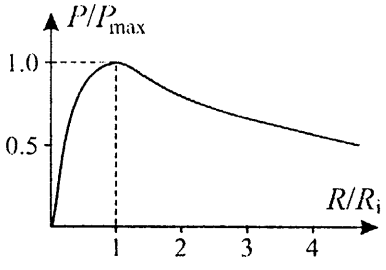
На потрошачу ће се развијати максимална снага када је његова отпорност једнака унутрашњој отпорности генератора. Овај услов се назива условом прилагођења потрошача на генератор.

Снага која се развија на потрошачу у случају прилагођења је

$$P = \frac{R_i E^2}{(R_i + R_i)^2} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{1}{2}E\frac{E}{2R_i} = \frac{1}{2}EI,$$

значи половина снаге генератора. Друга половина снаге генератора одлази на Џулове губитке на унутрашњој отпорности. Јасно је да је у том случају степен корисног дејства само $\eta = 0.5$,

$$\eta = \frac{1}{1+R_i/R} = \frac{1}{1+R_i/R_i} = 0.5.$$



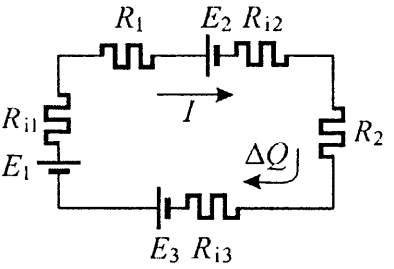
Слика 15.12.

На слици 15.12. приказан је дијаграм промене снаге на потрошачу у функцији његове отпорности. Дијаграм је дат у нормализованом облику: на ординати се налази однос снаге и максималне снаге на потрошачу а на апсциси однос отпорности потрошача и унутрашње отпорности генератора.

15.4. Просто коло са већим бројем генератора и отпорника

Простим колом назива се затворено струјно коло сачињено од редне везе произвољног броја генератора и отпорника, при чему генератори могу имати произвољну оријентацију.

Нека у простом колу, приказаном на слици 15.13, треба одредити струју I. Како у колу постоји већи број генератора који су различито оријентисани физички смер струје не мора бити унапред познат. Стога се може потпуно произвољно одабрати референтни смер струје, рецимо као на слици.



Слика 15.13.

Ако у временском интервалу Δt кроз коло протекне количина електрицитета $\Delta Q = I\Delta t$ у одабраном референтном смеру струје, стране силе у генераторима E_1 и E_3 ће извршити рад

$$\Delta A = E_1\Delta Q + E_3\Delta Q = E_1 I\Delta t + E_3 I\Delta t$$

који се трансформише у енергију стационарног електричног поља. Ова енергија се у генератору E_2 трансформише у друге видове рада и енергије, $E_2 I\Delta t$ (обратити пажњу на оријентацију електромоторне силе), а на унутрашњим отпорностима генератора и отпорницима у Џулове губитке, $RI^2\Delta t$. Према Закону о одржању рада и енергије је

$$E_1 I\Delta t + E_3 I\Delta t = E_2 I\Delta t + R_{i1}I^2\Delta t + R_{i2}I^2\Delta t + R_{i3}I^2\Delta t + R_1 I^2\Delta t + R_2 I^2\Delta t.$$

Дељењем обе стране ове једначине са Δt,

$$E_1 I + E_3 I = E_2 I + R_{i1}I^2 + R_{i2}I^2 + R_{i3}I^2 + R_1 I^2 + R_2 I^2,$$

добија се једначина у којој су сви чланови по природи снага и из које се може закључити:

збир снага свих генератора у колу једнак је збиру снага свих потрошача.

Када се последња једначина реши по непознатој струји добија се

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_1 + R_2},$$

што се, очигледно, може генерализовати

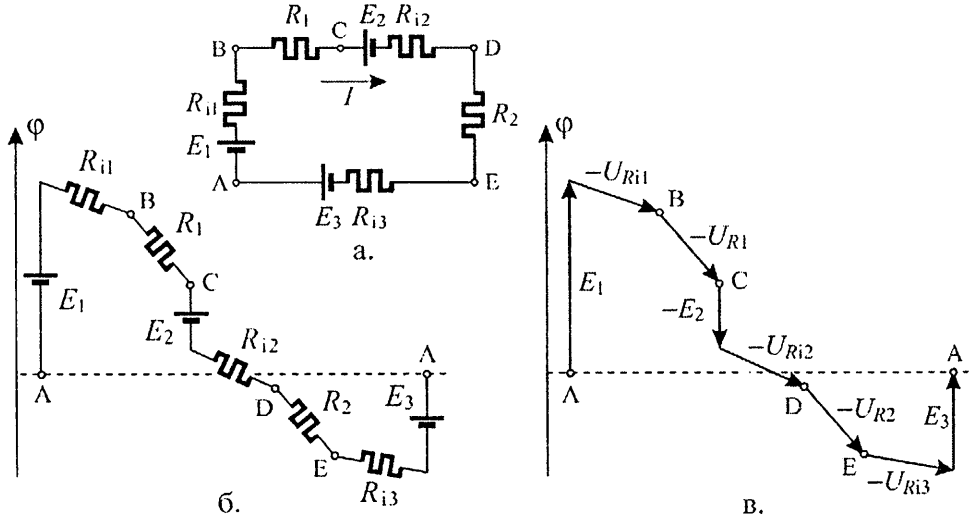
$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R_i + \Sigma R}.$$

Струја у простом колу једнака је количнику алгебарске суме електромоторних сила и збира свих отпорности у колу.

При томе се електромоторне силе чији је *смер сагласан са изабраним референтним смером струје узимају са позитивним знаком и обрнуто.* Ако се на крају израчунавања за струју добије позитивна вредност онда је њен физички смер сагласан са референтним и обрнуто.

Последњи израз за струју у простом колу познат је као *Омов закон за просто коло.*

Промене потенцијала у односу на једну, произвољно одабрану, референтну тачку у колу могу се веома прегледно пратити помоћу такозваног дијаграма потенцијала. То се најлакше може схватити на конкретном примеру. Нацртаћемо дијаграм потенцијала за просто коло које смо већ анализирали (слика 15.4.а).



Слика 15.14.

Одаберимо произвољно референтну тачку нултог потенцијала, рецимо тачку A, и крећимо се у изабраном референтном смеру струје по затвореној путањи A–B–C–D–E–A. При томе морамо водити рачуна о томе како се мења потенцијал при кретању преко појединих елемената: при кретању преко електромоторне силе од тачке нижег ка тачки вишег потенцијала потенцијал расте, док при кретању у супротном смеру потенцијал опада; у случају отпорника струја тече од тачке вишег ка тачки нижег потенцијала. На слици 15.14.б. је приказан дијаграм на коме се види промена потенцијала при проласку преко појединих елеме-

ната. Очигледно је да потенцијал расте при проласку преко електромоторних сила E_1 и E_3, док при проласку преко осталих елемената опада.

Исти дијаграм, али на коме су уцртани напони на појединим елементима, приказан је на слици 15.14.б. Јасно је да је збир свих напона и електромоторних сила приликом обиласка по затвореној путањи једнак нули (јер смо се вратили у исту тачку А),

$$E_1 - U_{Ri1} - U_{R1} - E_2 - U_{Ri2} - U_{R2} - U_{Ri3} + E_3 = 0,$$

одакле се добија

$$E_1 - E_2 + E_3 = U_{Ri1} + U_{R1} + U_{Ri2} + U_{R2} + U_{Ri3} = I(R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_1 + R_2).$$

Решавањем ове једначине по I добија се већ познати израз,

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_1 + R_2} = \frac{\Sigma E}{\Sigma R_i + \Sigma R}.$$

15.5. Напонска и струјна интерпретација генератора (напонски и струјни генератор)

Генератор је дефинисан као елемент електричног кола у коме се врши трансформација других видова рада и енергије у енергију стационарног електричног поља. Као његове основне електричне карактеристике увели смо електромоторну силу и унутрашњу отпорност и представили га као њихову редну везу. Оваква интерпретација (редна веза електромоторне силе и унутрашње отпорности) назива се ***напонском интерпретацијом генератора*** или ***напонским генератором.*** Поред ове, потпуно равноправно се користи и ***струјна интерпретација генератора*** за коју је уобичајени назив ***струјни генератор.***

Посматрајмо генератор електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i на који је прикључен потрошач отпорности R (слика 15.15.а). Струја у колу,

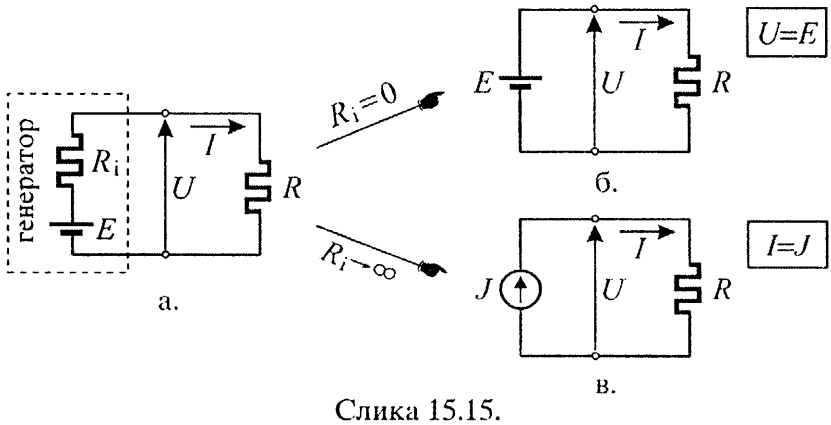
$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

и напон на крајевима генератора,

$$U = IR = \frac{E}{R + R_i} R = \frac{E}{1 + R_i/R},$$

при сталној електромоторној сили зависе од односа унутрашње отпорности генератора и отпорности потрошача.

Размотримо два гранична случаја: када је $R_i/R = 0$ ($R_i = 0$) и када $R_i/R \to \infty$ ($R_i \to \infty$). Наравно, у оба случаја је отпорност потрошача коначна јер само такав потрошач има смисла.



Слика 15.15.

У случају да је $R_i = 0$, из претходних једначина следи да је напон на крајевима генератора сталан и једнак електромоторној сили, $U = E$, без обзира на оптерећење R. Струја у колу одређена је само електромоторном силом генератора и отпорношћу потрошача, $I = E/R$. Овакав генератор се назива ***идеалан напонски генератор*** и у електричним шемама означава (слика 15.15.б) симболом за електромоторну силу.

У случају када је $R_i << R$ генератор се може сматрати идеалним напонским генератором на чијим крајевима је напон у функцији оптерећења R приближно константан, $U \approx E$.

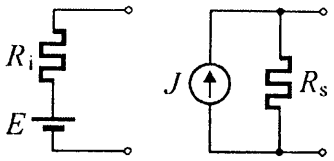
Уколико унутрашња отпорност генератора тежи бесконачности, $R_i \to \infty$, у претходном изразу за струју R се може занемарити у односу на R_i тако да се добија

$$I = \frac{E}{R + R_i} \approx \frac{E}{R_i} = \text{const} = J.$$

Значи, генератор даје сталну струју J (у литератури се користе и ознаке I_s и I_g) без обзира на оптерећење R, док је напон на његовим крајевима одређен само струјом J и отпорношћу потрошача, $U = JR$. Овакав генератор се назива ***идеалан струјни генератор*** и у електричним шемама означава графичким симболом са слике 15.15.в. ***Струја J назива се струјом кратког споја струјног генератора.***

У случају када је $R_i >> R$ генератор се може сматрати идеалним струјним генератором који даје приближно сталну струју без обзира на оптерећење, $I \approx J$.

У реалним условима сваки генератор се може представити и као напонски и као струјни. Код напонске интерпретације (реални напонски генератор) генератор се представља као редна веза идеалног напонског генератора електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i (слика 15.16.а). Код струјне интерпретације (реални струјни генератор) генератор се представља као паралелна веза идеалног струјног генератора струје кратког споја J и унутрашње отпорности R_s (слика 15.16.б).



а. б.

Слика 15.16.

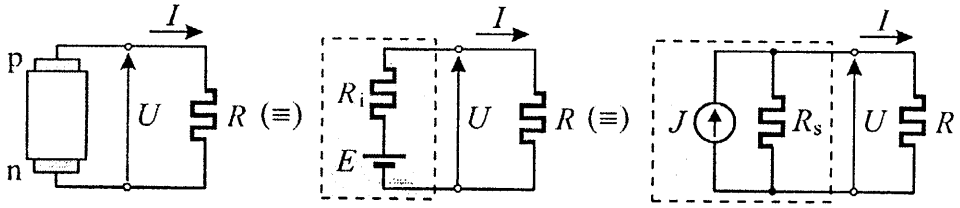
Како је генератор реалан физички елемент, обе интерпретације га потпуно равноправно описују, што значи да се реални напонски генератор може трансфигурисати у реални струјни генератор и обрнуто. Услов те трансфигурације је да се у односу на потрошач ништа не измени - напон на потрошачу и струја кроз њега морају остати исти без обзира на то како је генератор интерпретиран.

Посматрајмо реалан генератор на који је прикључен потрошач отпорности R (слика 15.17.а) као и две његове представе, реални напонски (слика 15.17.б) и реални струјни (слика 15.17.в) генератор. Код напонског генератора струја кроз потрошач је

$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

док је напон на његовим крајевима

$$U = RI = \frac{RE}{R + R_i}.$$



а. б. в.

Слика 15.17.

Код струјног генератора струја кратког споја струјног генератора, J, протиче кроз паралелну везу отпорника R и R_s па је напон на тој паралелној вези, а уједно и на потрошачу

$$U = R_e J = \frac{RR_s}{R + R_s} J,$$

док је струја кроз потрошач

$$I = \frac{U}{R} = \frac{R_s}{R + R_s} J.$$

У оба случају морају бити исти и напон на потрошачу,

$$\frac{E}{R + R_i} R = \frac{JR_s}{R + R_s} R,$$

и струја кроз потрошач,

$$\frac{E}{R + R_i} = \frac{JR_s}{R + R_s}.$$

Ови услови ће бити испуњени само ако је $R_i = R_s$ и $E = JR_s$.

Реални напонски генератор електромоторне силе $\boldsymbol{E}$ *и унутрашње отпорности* $\boldsymbol{R_i}$ *може се трансфигурисати у реални струјни генератор чији су елементи*

$$J = E/R_i \quad \textit{и} \quad R_s = R_i$$

Реални струјни генератор струје кратког споја $\boldsymbol{J}$ *и унутрашње отпорности* $\boldsymbol{R_s}$ *може се трансфигурисати у реални напонски генератор чији су елементи*

$$E = JR_s \quad \textit{и} \quad R_i = R_s$$

Мада је то очигледно, напоменимо да

трансфигурација идеалних генератора није могућа.

Снага напонског генератора је већ раније дефинисана, док се снага струјног генератора израчунава као производ струје кратког споја генератора, J, и напона на његовим крајевима,

$$P = JU.$$

Ово се лако може доказати ако се води рачуна о томе да је снага генератора једнака збиру снага потрошача у колу. Посматрајмо једноставан пример реалног струјног генератора оптерећеног потрошачем отпорности R (слика 15.17.в). Снага на потрошачу је U^2/R, док је снага Џулових губитака на унутрашњој отпорности генератора U^2/R_s. Снага генератора једнака је збиру ових двеју снага,

$$P = \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{R_s} = U^2 \frac{R + R_s}{RR_s} = \frac{U^2}{R_e} = \frac{U}{R_e} U = JU.$$

Треба водити рачуна о томе да се, у случају неусаглашених смерова струје кратког споја генератора и напона на њему, генератор понаша као потрошач.

15.6. Питања за проверу

15.6.1. Објаснити шта се дешава у генератору.

15.6.2. Шта су то стране силе и какав је њихов карактер?

15.6.3. У ком смеру стране силе пребацују слободне носиоце електрицитета кроз генератор?

15.6.4. Шта је то страно поље и како се дефинише?

15.6.5. Како је оријентисано стационарно електрично поље у генератору?

15.6.6. Докле траје кретање слободних носиоца електрицитета кроз генератор који није оптерећен (који се налази у празном ходу)?

15.6.7. Описати шта се дешава у генератору када се он оптерети (када се између његових прикључака формира затворен проводни пут).

15.6.8. Објаснити шта је то електромоторна сила, како се дефинише и како се израчунава.

15.6.9. Чему је бројно једнака електромоторна сила?

15.6.10. Како се дефинише унутрашња отпорност генератора?

15.6.11. Полазећи од Закона о одржању рада и енергије извести израз за струју у колу са генератором и једним отпорником.

15.6.12. Извести израз за спољашњу карактеристику генератора и објаснити шта она представља.

15.6.13. Нацртати спољашњу карактеристику генератора електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i.

15.6.14. Објаснити како се одређују електромоторна сила и унутрашња отпорност генератора мерењем напона празног хода и струје кратког споја.

15.6.15. Како се може одредити унутрашња отпорност генератора који се не смеју кратко спајати (код којих се не може мерити струја кратког споја)?

15.6.16. Како се израчунава снага генератора?

15.6.17. Када се генератор понаша као потрошач и како се у том случају израчунава снага?

15.6.18. Објаснити реверзибилне и нереверзибилне преображаје енергије у генератору. Навести примере.

15.6.19. Како се дефинише степен корисног дејства и која је његова максимална вредност?

15.6.20. Извести израз за степен корисног дејства система генератор - потрошач. Од чега зависи степен корисног дејства?

15.6.21. Нацртати дијаграм промене степена корисног дејства у функцији односа отпорности потрошача и унутрашње отпорности генератора.

15.6.22. Због чега је важан степен корисног дејства, посебно у електроенергетици?

15.6.23. Који услов треба да задовољи однос унутрашње отпорности генератора и отпорности потрошача да би се остварио што је могуће већи степен корисног дејства?

15.6.24. Када се за потрошач каже да је прилагођен на генератор?

15.6.25. У којој области електротехнике и због чега се врши прилагођење потрошача на генератор?

15.6.26. Извести услов прилагођења потрошача на генератор.

15.6.27. Нацртати дијаграм $P/P_{max}(R/R_i)$.

15.6.28. Колики је степен корисног дејства система генератор - потрошач у случају да је извршено прилагођење?

15.6.29. Извести израз за струју у простом колу са већим бројем генератора и потрошача.

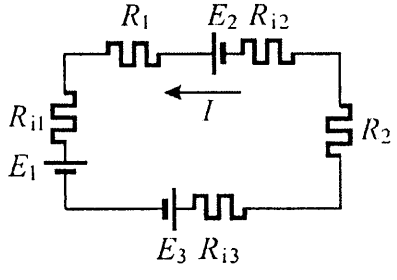
15.6.30. Написати Омов закон за просто коло.

15.6.31. Када се електромоторне силе у изразу за струју у простом колу узимају са позитивним, а када са негативним знаком?

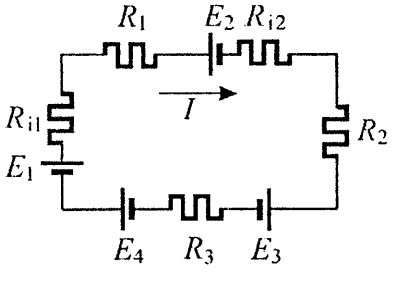
15.6.32. Чему је једнак збир снага свих генератора у простом колу?

15.6.33. За просто коло, приказано шемом на слици 15.18, написати израз за струју према задатом референтном смеру.

15.6.34. За просто коло, приказано шемом на слици 15.19, написати израз за струју према задатом референтном смеру.



Слика 15.18.



Слика 15.19.

15.6.35. Објаснити шта је то дијаграм потенцијала за просто коло.

15.6.36. Објаснити како се долази до појма идеалног напонског и појма идеалног струјног генератора.

15.6.37. Када се генератор може сматрати идеалним напонским, а када идеалним струјним генератором?

15.6.38. Како се представља реални напонски, а како реални струјни генератор?

15.6.39. Извести изразе за трансфигурацију напонског генератора у струјни и обрнуто.

15.6.40. Да ли је могуће вршити трансфигурацију идеалних генератора?

15.6.41. Како се израчунава снага струјног генератора?

15.6.42. Када се струјни генератор понаша као потрошач?

16. Сложена електрична кола и II Кирхофов закон

Сложеним електричним колом (сложеном електричном мрежом) назива се скуп произвољно повезаних отпорника и генератора који се не може сматрати простим колом дефинисаним у претходном поглављу. Сложено електрично коло може садржати и прекидаче или преклопнике којима се у коло укључују поједини елементи или се мења конфигурација кола. Електрично коло се назива линеарним ако су карактеристике елемената кола (отпорника и генератора) независне од јачине и смера струје кроз њих. У овом делу књиге проучаваћемо само линеарна електрична кола.

16.1. Елементи сложеног електричног кола

Основни елементи једног сложеног електричног кола су: *грана, чвор, контура, независна контура и независна грана.*

Грана кола је редна веза произвољног броја (један или више) елемената кола (отпорника и генератора).

Чвор је место на коме се спаја три или више грана кола.

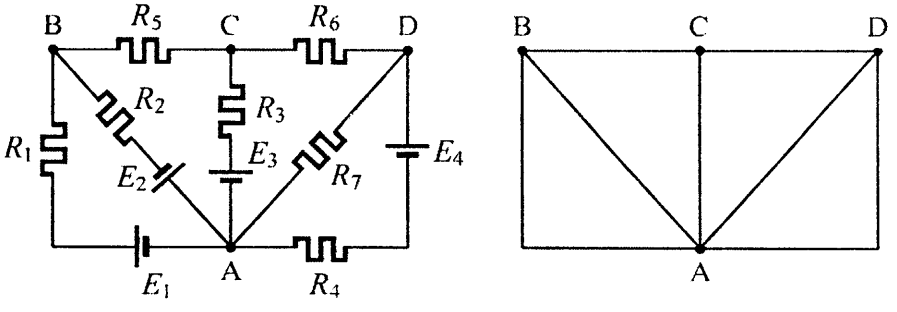
Контура је произвољан затворени пут сачињен од грана кола.

Независна контура је контура која садржи бар једну грану која припада само њој и ниједној више.

Независна грана је грана која припада само једној контури и ниједној више.

У анализи сложених електричних кола веома често се користи такозвани *граф кола* (*граф мреже*) који веома прегледно приказује геометријску структуру кола. На графу се цртају само гране кола, без елемената у њима, као и њихови спојеви (чворови). О графовима ће касније бити нешто више речи.

Да би објаснили основне елементе сложеног електричног кола послужићемо се колом чија је шема приказана на слици 16.1.а, а одговарајући граф на слици 16.1.б.



Слика 16.1.

Коло на слици има четири чвора и седам грана. Чворови су означени словима A, B, C и D док су гране A–B (E_1, R_1), A–B (E_2, R_2), A–C (E_3, R_3), A–D (R_7), A–D (E_4, R_4), B–C (R_5) и C–D (R_6).

Број контура које могу да се уоче у овом колу је веома велики, тако да ћемо навести само неке од њих:

$$(E_1 - R_1 - R_2 - E_2) \quad (E_3 - R_3 - R_6 - R_7) \quad (R_7 - E_4 - R_4)$$
$$(E_2 - R_2 - R_5 - R_3 - E_3) \quad (E_3 - R_3 - R_6 - E_4 - R_4) \quad (E_1 - R_1 - R_5 - R_6 - E_4 - R_4)$$

и тако даље.

Мада коло има четири независне контуре, постоји више могућности њиховог избора, односно већи број могућих комбинација четири независне контуре. Једна од комбинација би била

$$(E_1 - R_1 - R_2 - E_2) \quad (E_2 - R_2 - R_5 - R_3 - E_3)$$
$$(E_3 - R_3 - R_6 - R_7) \quad (R_7 - E_4 - R_4),$$

где су независне гране појединих контура: A–B (E_1, R_1), B–C, C–D и A–D (E_4, R_4), респективно.

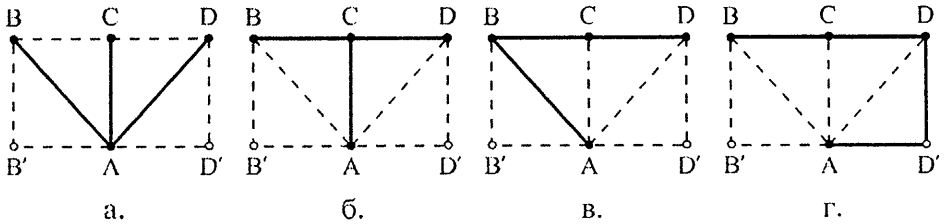
Друга могућа комбинација је

$$(E_1 - R_1 - R_5 - R_3 - E_3) \quad (E_2 - R_2 - R_5 - R_3 - E_3)$$
$$(E_3 - R_3 - R_6 - E_4 - R_4) \quad (R_7 - E_4 - R_4),$$

са независним гранама појединих контура: A–B (E_1, R_1), A–B (E_2, R_2), C–D и A–D (R_7), респективно. Читаоцу се оставља да сам пронађе још неке од могућих комбинација.

Избор независних контура се може у значајној мери олакшати коришћењем графа мреже. Но, пре тога, потребно је дефинисати два појма

из теорије графова: стабло графа и спојницу. *Стабло графа* је скуп грана које повезује све чворове мреже а да при томе не образују ни једну затворену контуру. *Спојнице* су гране које не припадају стаблу графа. У графу једног сложеног електричног кола могуће је одабрати већи број различитих стабала. Јасно је да избор стабла графа аутоматски одређује одговарајуће спојнице.



Слика 16.2.

На слици 16.2. нацртана су четири различита стабла графа кола са слике 16.1.а, као и одговарајуће спојнице. Стабла су нацртана пуним, а спојнице испрекиданим линијама. Тачке B′ и D′ не представљају чворове, већ су уцртане само зато да би се касније могле прегледно означити поједине спојнице. Напоменимо да је у овом графу могуће одабрати још неколико стабала, што се оставља читаоцу.

Када се нацртају стабло и спојнице графа, избор независних контура је веома једноставан. Свака од *спојница је независна грана* једне независне контуре (што значи да је број спојница једнак броју независних контура), док су остале гране те контуре гране стабла. Показаћемо то на претходном примеру и набројати независне контуре за свако од изабраних стабала графа. Независна грана (спојница) сваке независне контуре биће подвучена:

- за стабло са слике 16.2.а.

$$(\underline{A-B'-B}-A) \quad (\underline{B-C}-A-B) \quad (\underline{C-D}-A-C) \quad (\underline{D-D'-A}-D)$$

- за стабло са слике 16.2.б.

$$(\underline{A-B'-B}-C-A) \quad (\underline{A-B}-C-A) \quad (\underline{A-D}-C-A)$$
$$(\underline{A-D'-D}-C-A)$$

- за стабло са слике 16.2.в.

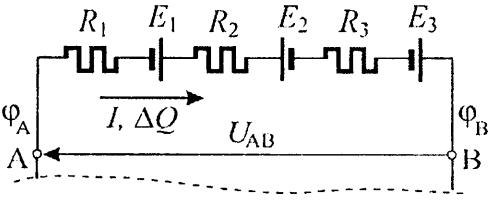
$$(\underline{A-B'-B}-A) \quad (\underline{A-C}-B-A) \quad (\underline{A-D}-C-B-A)$$
$$(\underline{A-D'-D}-C-B-A)$$

- за стабло са слике 16.2.г.

$$(\underline{A-B}-C-D-D'-A) \quad (\underline{A-C}-D-D'-A) \quad (\underline{A-D}-D'-A)$$
$$(\underline{A-B'-B}-C-D-D'-A)$$

16.2. Напон на крајевима гране сложеног кола

Нека је задата грана сложеног кола (између тачака А и В, слика 16.3) у којој се налази произвољан број електромоторних сила и отпорности познатих вредности. Кроз грану протиче струја познате јачине I, чији је референтни смер од тачке А ка тачки В. Потребно је одредити потенцијалну разлику између тачака А и В, односно напон на крајевима гране, $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.



Слика 16.3.

За решење овог проблема биће, као и у претходном поглављу, искоришћен Закон о одржању рада и енергије. У временском интервалу Δt од тачке А до тачке В се пребаци количина електрицитета $\Delta Q = I\Delta t$. При томе силе стационарног електричног поља остатка сложеног кола (део сложеног кола без гране А–В) изврше рад

$$\Delta A_{ost} = \Delta Q(\varphi_A - \varphi_B) = U_{AB} I \Delta t .$$

Поред тога рад врше и стране силе у генераторима E_1 ($\Delta A_1 = E_1 I \Delta t$) и E_3 ($\Delta A_3 = E_3 I \Delta t$), тако да је укупни извршени рад

$$\Delta A = U_{AB} I \Delta t + E_1 I \Delta t + E_3 I \Delta t .$$

Део овог рада се у генератору E_2 (потрошач са електромоторном силом) трансформише у друге видове рада и енергије ($E_2 I \Delta t$), док се остатак трансформише у топлотну енергију на отпорницима ($RI^2\Delta t$). Према Закону о одржању рада и енергије је

$$U_{AB} I \Delta t + E_1 I \Delta t + E_3 I \Delta t = E_2 I \Delta t + R_1 I^2 \Delta t + R_2 I^2 \Delta t + R_3 I^2 \Delta t ,$$

одакле се, након дељења са $I\Delta t$ и сређивања, добија

$$U_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3) I - E_1 + E_2 - E_3 = (R_1 + R_2 + R_3) I - (E_1 - E_2 + E_3).$$

На основу ове једначине лако се може извршити генерализација и написати општи израз за напон на крајевима гране А–В сложеног кола за случај да је референтни смер струје од тачке А ка тачки В,

$$\boxed{U_{AB} = \Sigma RI - \Sigma E .}$$

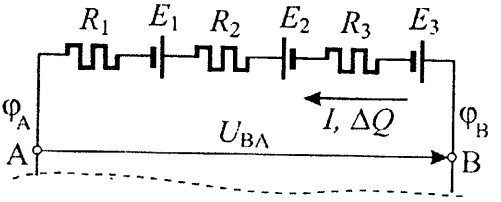
У последњем изразу *електромоторне силе се узимају са позитивним знаком уколико су оријентисане од тачке* **А** *ка тачки* **В**, *односно са негативним знаком уколико су оријентисане у супротном смеру, од тачке* **В** *ка тачки* **А**.

Уколико је, пак, познат напон U_{AB} на крајевима гране сложеног кола, ***струја у тој грани, за референтни смер од тачке* A *ка тачки* B**, добија се решавањем последње једначине по непознатој струји,

$$\boxed{I = \frac{U_{AB} + \Sigma E}{\Sigma R}.}$$

Електромоторне силе се узимају са позитивним знаком уколико је њихов смер сагласан са референтним смером струје, и обрнуто. Последњи израз је познат у литератури и као ***Омов закон за грану сложеног кола.***

Изведимо и израз за напон између тачака A и B, U_{AB}, у случају да је референтни смер струје у грани од тачке B ка тачки A (слика 16.4). На основу претходног разматрања следи да је напон U_{BA} за референтни смер струје од тачке B ка тачки A



Слика 16.4.

$$U_{BA} = (R_1 + R_2 + R_3)I - (-E_1 + E_2 - E_3),$$

па је

$$U_{AB} = -U_{BA} = -(R_1 + R_2 + R_3)I - (E_1 - E_2 + E_3) = -\Sigma RI - \Sigma E.$$

Овај израз је по форми идентичан изразу који смо добили за напон U_{AB} за случај референтног смера струје од тачке A ка тачки B. Једина разлика је у знаку првог члана на десној страни. Према томе, израз

$$U_{AB} = \Sigma RI - \Sigma E$$

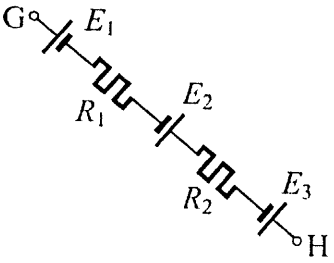
има општу важност, при чему треба водити рачуна ***да се напони на отпорницима (чланови облика RI) уносе са позитивним знаком уколико је референтни смер струје од тачке* A *ка тачки* B, *и обрнуто.*** Ово је само по себи разумљиво јер промена знака струје уствари значи промену њеног референтног смера.

Показаћемо ово на једном примеру. Задата је грана сложеног кола G–H (слика 16.5). Одредимо напон U_{GH} и струју у грани за два различита референтна смера струје:

- референтни смер струје од G ка H

$$U_{GH} = \Sigma RI - \Sigma E = (R_1 + R_2)I - (-E_1 + E_2 + E_3)$$

$$I_{G-H} = \frac{U_{GH} + \Sigma E}{\Sigma R} = \frac{U_{GH} - E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_2}$$



Слика 16.5.

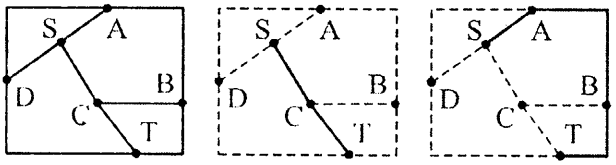
- за референтни смер струје од H ка G

$$U_{GH} = \Sigma RI - \Sigma E = -(R_1 + R_2)I - (-E_1 + E_2 + E_3)$$

$$I_{H-G} = -I_{G-H} = -\frac{U_{GH} + \Sigma E}{\Sigma R} = -\frac{U_{GH} - E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_2} = \frac{U_{HG} + E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2}.$$

16.3. Напон између две тачке у сложеном колу

Нека је у сложеном колу, чији је граф приказан на слици 16.6.а, потребно одредити напон између тачака S и T, U_{ST}. Да би се овај напон одредио потребно је изабрати произвољну путању између тачака S и T, сачињену од грана кола, и искористити раније добијени израз за напон на крајевима гране сложеног кола. Овај поступак ће бити приказан на примеру две различите путање.



Слика 16.6.

За путању S–C–T (означену пуном линијом на слици 16.6.б) може се писати

$$U_{ST} = \varphi_S - \varphi_T = (\varphi_S - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_T) = U_{SC} + U_{CT},$$

тако да је

$$U_{ST} = U_{SC} + U_{CT} = \sum_{SC} RI - \sum_{SC} E + \sum_{CT} RI - \sum_{CT} E = \sum_{SCT} RI - \sum_{SCT} E.$$

Уколико би се користила путања S–A–B–T (означена пуном линијом на слици 16.6.в), добило би се

$$U_{ST} = \varphi_S - \varphi_T = (\varphi_S - \varphi_A) + (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_T) = U_{SA} + U_{AB} + U_{BT},$$

тако да је

$$U_{ST} = U_{SA} + U_{AB} + U_{BT}$$
$$= \sum_{SA} RI - \sum_{SA} E + \sum_{AB} RI - \sum_{AB} E + \sum_{BT} RI - \sum_{BT} E = \sum_{SABT} RI - \sum_{SABT} E.$$

Јасно је да се коришћењем било ког од ова два израза, односно коришћењем било које путање између тачака S и T, мора добити идентичан резултат. Напоменимо на крају да се при одређивању напона између две тачке у колу мора строго водити рачуна о оријентацијама елек-

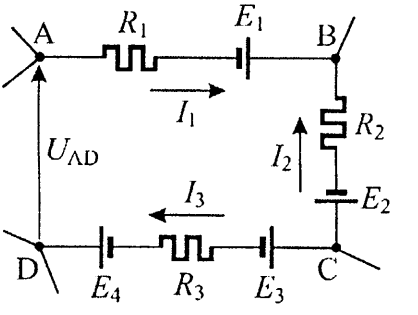
тромоторних сила и референтним смеровима струја. ***Уколико су смерови електромоторних сила и референтни смерови струја сагласни са смером кретања од тачке S ка тачки T, електромоторне силе и напони на отпорницима се узимају са позитивним знаком, и обрнуто.***

Покажимо ово на примеру дела кола са слике 16.7, где треба одредити напон U_{AD}. Како је

$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD},$$

може се писати

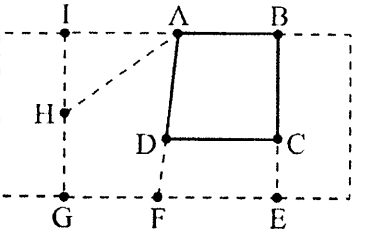
$$U_{AD} = \sum_{ABCD} RI - \sum_{ABCD} E$$
$$= R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - (E_1 + E_2 - E_3 + E_4).$$



Слика 16.7.

16.4. II Кирхофов закон

Уочимо у једном сложеном електричном колу произвољну затворену контуру, рецимо контуру ABCDA (означену пуном линијом на графу кола, слика 16.8). Потражимо збир напона између крајева појединих грана (између појединих чворова) задате контуре. Очигледно је да мора бити задовољен услов



Слика 16.8.

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_A) = 0.$$

Када се у ову једначину унесу познати изрази за напон на крајевима гране сложеног кола,

$$U = \Sigma RI - \Sigma E,$$

добија се

$$\sum_{AB} RI - \sum_{AB} E + \sum_{BC} RI - \sum_{BC} E + \sum_{CD} RI - \sum_{CD} E + \sum_{DA} RI - \sum_{DA} E = 0,$$

односно

$$\boxed{\sum_{ABCDA} RI - \sum_{ABCDA} E = 0.}$$

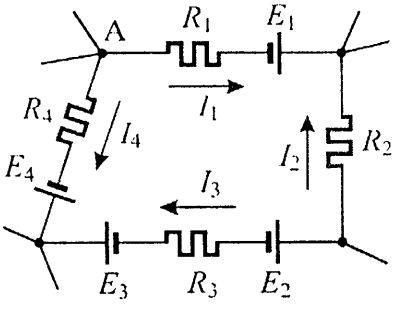
Ако се сума електромоторних сила пребаци на другу страну знака једнакости, добија се познати исказ ***II Кирхофовог закона:***

$$\sum_{ABCDA} RI = \sum_{ABCDA} E.$$

Алгебарски збир напона на свим отпорницима у једној затвореној контури једнак је алгебарском збиру свих електромоторних сила у тој контури.

Полазна тачка и смер обиласка по контури могу се произвољно бирати. Приликом примене II Кирхофовог закона се строго мора водити рачуна о знаку електромоторних сила и напона на отпорницима (RI). ***Уколико је смер струје сагласан са смером обиласка по контури напон на отпорнику се узима са позитивним знаком, и обрнуто. Исто важи и за електромоторне силе: уколико је њихов смер сагласан са смером обиласка по контури, узимају се са позитивним знаком, и обрнуто.***

Примена II Кирхофовог закона биће показана на примеру контуре са слике 16.9. Написаћемо једначину по II Кирхофовом закону за два различита смера обиласка по контури, при чему ћемо у оба случаја поћи од тачке A:



Слика 16.9.

- за обилазак по контури у смеру казаљке на сату

$$R_1I_1 - R_2I_2 + R_3I_3 - R_4I_4 = E_1 - E_2 + E_3 - E_4.$$

- за обилазак по контури у смеру супротном смеру казаљке на сату

$$R_4I_4 - R_3I_3 + R_2I_2 - R_1I_1 = E_4 - E_3 + E_2 - E_1.$$

Лако се може проверити да су ове две једначине еквивалентне.

16.5. Питања за проверу

16.5.1. Како се дефинише сложено електрично коло (сложена електрична мрежа)?

16.5.2. Који су основни елементи сложеног електричног кола?

16.5.3. Дефинисати грану, чвор и контуру сложеног електричног кола.

16.5.4. Дефинисати независну контуру и независну грану сложеног електричног кола.

16.5.5. Да ли у једном сложеном електричном колу постоји само једна или више могућих комбинација независних контура?

16.5.6. Шта је то граф електричног кола?

16.5.7. Који су основни елементи графа сложеног електричног кола?

16.5.8. Шта је то стабло графа, а шта спојница?

16.5.9. Да ли граф сложеног електричног кола има само једно стабло или може имати више њих?

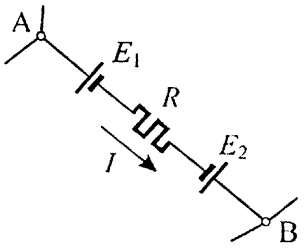
16.5.10. Како се уз помоћ графа сложеног електричног кола (стабла и спојница) бирају независне контуре?

16.5.11. Шта представља спојница у независној контури?

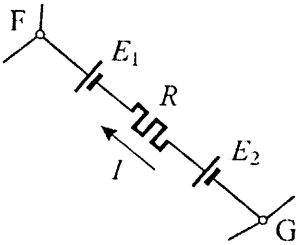
16.5.12. Извести израз за напон на крајевима гране сложеног кола.

16.5.13. Објаснити са којим знаком се у израз за напон на крајевима гране сложеног кола уносе напони на отпорницима и електромоторне силе.

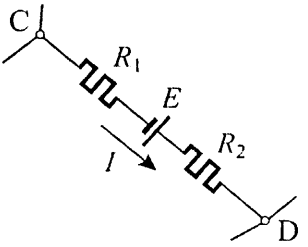
16.5.14. Написати израз за напон U_{AB} на крајевима гране сложеног кола са слике 16.10. за задати референтни смер струје.



Слика 16.10.



Слика 16.11.



Слика 16.12.

16.5.15. Написати израз за напон U_{FG} на крајевима гране сложеног кола са слике 16.11. за задати референтни смер струје.

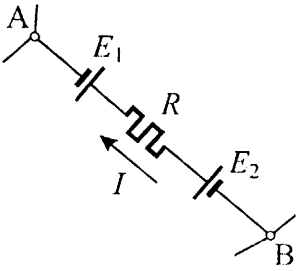
16.5.16. Написати Омов закон за грану сложеног кола.

16.5.17. Написати, за задати референтни смер, израз за струју у грани сложеног кола са слике 16.12. уколико је познат напон U_{CD}.

16.5.18. Написати, за задати референтни смер, израз за струју у грани сложеног кола са слике 16.13. уколико су познати потенцијали тачака A и B, φ_A и φ_B.

16.5.19. Написати израз за израчунавање напона између две тачке у сложеном колу.

16.5.20. Написати израз за израчунавање напона између тачака A и B (U_{AB}) у делу сложеног кола са слике 16.14.

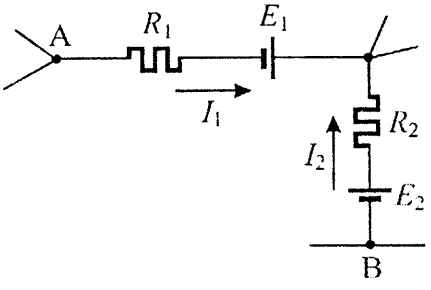


Слика 16.13.

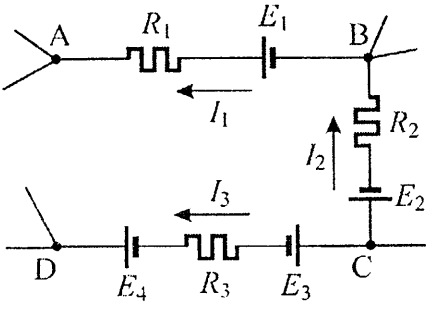
16.5.21. Написати изразе за израчунавање напона између тачака A и C (U_{AC}), B и D (U_{BD}) и A и D (U_{AD}) у делу сложеног кола са слике 16.15.

16.5.22. Извести II Кирхофов закон.

16.5.23. Са којим знаком се узимају електромоторне силе и напони на отпорницима приликом писања једначина по II Кирхофовом закону.

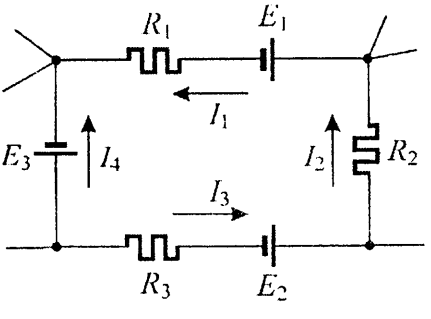


Слика 16.14.

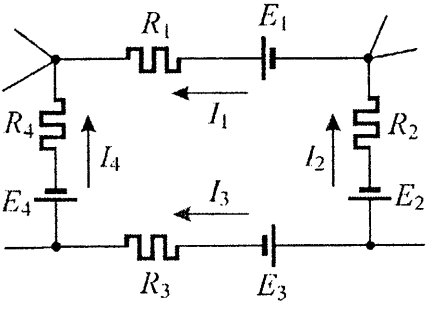


Слика 16.15.

16.5.24. За контуру са слике 16.16. написати једначину по II Кирхофовом закону за оба смера обиласка по контури.



Слика 16.16.



Слика 16.17.

16.5.25. За контуру са слике 16.17. написати једначину по II Кирхофовом закону за оба смера обиласка по контури.

17. Методи решавања сложених електричних кола

Сложено електрично коло садржи мањи или већи број грана у којима се налазе основни елементи кола, генератори и потрошачи. У највећем броју случајева познате су карактеристике генератора (унутрашње отпорности и електромоторне силе напонских, односно струје кратког споја струјних генератора) и отпорности потрошача, тако да се основни проблем анализе, односно решавања сложених електричних кола, своди на одређивање непознатих струја у појединим гранама.

Основу за анализу сложених електричних кола представљају Кирхофови закони. Ови закони су фундаментални природни закони. I Кирхофов закон исказује Принцип нестишљивости електрицитета, док је II Кирхофов закон специфичан исказ Закона о одржању рада и енергије.

Поред директне примене Кирхофових закона, у анализи сложених електричних кола користе се и два формална метода: *метод контурних струја (метод независних струја) и метод потенцијала чворова (метод независних напона).* Ови методи су изведени из Кирхофових закона и, у односу на њихову директну примену, имају значајне предности у смислу смањења броја једначина које треба поставити за решавање кола, као и у њиховом веома формалном постављању.

Мада су напонски и струјни генератор две различите интерпретације једног истог физичког појма, генератора, постоје извесне разлике приликом решавања кола која садрже идеалне напонске, односно идеалне струјне генераторе, посебно код примене формалних метода. Треба, такође, водити рачуна и о томе да се реални струјни генератор представља као паралелна веза идеалног струјног генератора и његове унутрашње отпорности. На тај начин се (уколико се не изврши његова трансфигурација у напонски генератор) практично своди на две паралелне гране у сложеном електричном колу, при чему је струја у једној грани позната и једнака струји кратког споја струјног генератора.

17.1. Метод директне примене Кирхофових закона

17.1.1. Опис метода

Нека је задато сложено електрично коло у коме су познати сви елементи. Нека коло има N_G грана и N_C чворова, и нека се у N_J грана налазе идеални струјни генератори. Према томе, број непознатих струја које треба одредити је

$$N_X = N_G - N_J,$$

што значи да треба поставити систем од N_X једначина са истим толиким бројем непознатих.

Први корак је избор и означавање референтних смерова струја у појединим гранама кола. Референтни смерови струја се могу потпуно произвољно бирати, осим у гранама са идеалним струјним генераторима где су смер и јачина струје већ одређени струјом кратког споја генератора (J). Затим се приступа постављању система једначина.

По I Кирхофовом закону се може поставити и поставља се

$$N_C - 1$$

независних једначина за исти толики број произвољно одабраних чворова (уколико би се поставила још једна једначина, за последњи чвор, она би практично била садржана у претходних $N_C - 1$ једначина). ***Преостали број од***

$$N_K = N_X - (N_C - 1) = N_G - N_J - N_C + 1$$

једначина поставља се по II Кирхофовом закону за исти толики број произвољно одабраних независних контура. При избору независних контура постоји једно ограничење: ***независна контура не сме садржати идеални струјни генератор.*** Наиме, како напон на струјном генератору није познат на почетку решавања (може се одредити тек након одређивања струја у колу), при постављању једначине за контуру са идеалним струјним генератором тај напон би се појавио као још једна непозната величина.

Након постављања система једначина приступа се његовом решавању. Препоручује се коришћење детерминанти јер се, углавном, ради о системима једначина са већим бројем непознатих. Поступак решавања се може знатно убрзати ако се, најпре, из једначина постављених по I Кирхофовом закону, одређени број струја изрази преко преосталих, па затим то унесе у једначине постављене по II Кирхофовом закону.

Решавањем система једначина добијају се јачине непознатих струја за референтне смерове који су изабрани на почетку. Уколико се за неке од струја добију негативне вредности, то значи да су њихови физички смерови супротни у односу на изабране референтне смерове.

Уколико се то захтева, након одређивања струја у појединим гранама кола могу се израчунати снаге појединих генератора и потрошача у колу. За одређивање напона на струјном генератору, који је потребан за израчунавање снаге тог генератора, може се директно користити раније изведен израз за напон између две тачке у колу.

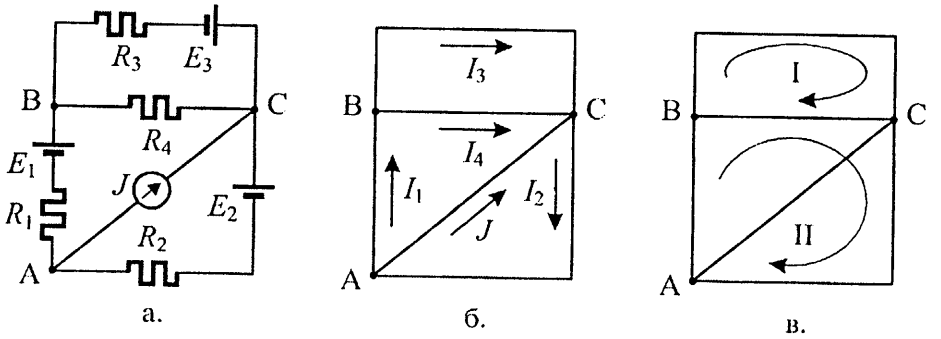
Провера тачности решења може се извршити тако што се, са израчунатим вредностима струја, провери да ли је задовољен II Кирхофов закон за неку од затворених контура. При томе то не сме бити контура за коју је већ постављана једначина по II Кирхофовом закону. Тачност решења се може проверити и провером такозваног "биланса снага":

збир снага свих генератора у колу мора бити једнак збиру снага свих потрошача,

што је директна последица Закона о одржању рада и енергије.

17.1.2. Пример директне примене Кирхофових закона

Поставићемо систем једначина за одређивање струја у колу, чија је шема приказана на слици 17.1.а, директном применом Кирхофових закона. Коло има пет грана, а како се у једној грани налази идеални струјни генератор, број непознатих струја је четири. Значи, потребно је поставити систем од четири једначине са четири непознате струје.



Слика 17.1.

Одаберимо произвољно референтне смерове струја у појединим гранама (граф на слици 17.1.б) кола. Смер и јачина струје у грани са идеалним струјним генератором су већ познати. Како коло има три чвора, према I Кирхофовом закону се могу поставити две независне једначине. Поставимо их за чворове A и B,

- чвор A: $I_2 = I_1 + J$

- чвор B: $I_1 = I_3 + I_4$.

Преостале две једначине постављају се по II Кирхофовом закону за две произвољно одабране независне контуре. Ако се контуре и смерови обиласка по њима одаберу као на слици 17.1.в, једначине гласе

- за I контуру: $R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_3$

- за II контуру: $R_1 I_1 + R_4 I_4 + R_2 I_2 = E_1 - E_2$.

Када се из једначина написаних по I Кирхофовом закону изразе струје I_1 и I_2 преко струја I_3 и I_4, и то унесе у једначине написане по II Кирхофовом закону, након сређивања се добија једноставнији систем,

$$R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_3$$

$$(R_1 + R_2) I_3 + (R_1 + R_2 + R_4) I_4 = E_1 - E_2 - JR_2,$$

чијим се решавањем одређују струје I_3 и I_4, а затим и струје I_1 и I_2.

По одређивању струја може се одредити и напон на струјном генератору као

$$U_J = U_{CA} = \sum_{CA} RI - \sum_{CA} E = R_2 I_2 + E_2,$$

или

$$U_J = U_{CA} = \sum_{CBA} RI - \sum_{CBA} E = -R_4 I_4 - R_1 I_1 + E_1.$$

17.2. Метод контурних струја

Метод контурних (независних) струја је формалан метод изведен из Кирхофових закона. Изведен је за коло које садржи само напонске генераторе али се, уз одређена ограничења у погледу избора контура, може користити и када коло садржи идеалне струјне генераторе.

У односу на директну примену Кирхофових закона метод контурних струја има две битне предности:

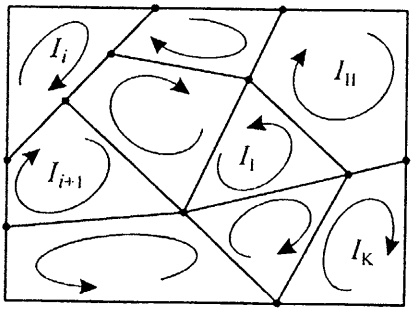
- број једначина које се постављају за решавање једног сложеног кола једнак је броју једначина које би требало поставити по II Кирхофовом закону и

- систем једначина се поставља на веома једноставан и шематизован начин, независан од конфигурације кола.

Како за примену метода није битан начин на који је изведен, а да би се избегло непотребно оптерећивање читаоца, то ће бити дат само његов опис и начин примене.

17.2.1. Опис метода

Посматраћемо најпре коло које садржи само напонске генераторе и које има N_K, произвољно изабраних, независних контура (слика 17.2). Претпоставићемо да кроз сваку од контура протиче независна струја те контуре, контурна струја I_i, чији се смер може произвољно одабрати. За одређивање N_K (I_I, I_{II}, ..., I_i,..., I_K) независних струја поставља се систем од N_K једначина облика:



Слика 17.2.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
I_I R_{11} & + & I_{II} R_{12} & + & \dots & + & I_i R_{1i} & + & \dots & + & I_K R_{1K} & = & (E)_I \\
I_I R_{21} & + & I_{II} R_{22} & + & \dots & + & I_i R_{2i} & + & \dots & + & I_K R_{2K} & = & (E)_{II} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \\
I_I R_{i1} & + & I_{II} R_{i2} & + & \dots & + & I_i R_{ii} & + & \dots & + & I_K R_{iK} & = & (E)_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \\
I_I R_{K1} & + & I_{II} R_{K2} & + & \dots & + & I_i R_{Ki} & + & \dots & + & I_K R_{KK} & = & (E)_K
\end{array}
$$

Значење појединих елемената у претходном систему једначина је следеће:

R_{ii} *је* такозвана "*сопствена отпорност*" *i – те контуре и представља збир отпорности свих отпорника који припадају i – тој контури.*

$R_{ij} = R_{ji}$ *је* такозвана *"међусобна отпорност" две (i – те и j – те) контуре и представља збир отпорности свих отпорника у гранама које су заједничке за i – ту и j – ту контуру. Уколико су референтни смерови i – те (I_i) и j – те (I_j) контурне струје у заједничким гранама те две контуре исти, R_{ij} има позитиван знак и обрнуто. Уколико i – та и j – та контура немају заједничку грану, или у заједничкој грани нема отпорности* (отпорност гране са идеалним напонским генератором једнака је нули), *тада је* $R_{ij} = 0$.

$(\Sigma E)_i$ *представља алгебарски збир свих електромоторних сила у i – тој контури. Уколико је смер електромоторне силе сагласан са референтним смером контурне струје узима се са позитивним знаком и обрнуто.*

По одређивању контурних струја струје у појединим гранама кола одређују се на следећи начин:

- Струја у независној грани неке контуре једнака је контурној струји те контуре.

- Струја у грани која припада већем броју контура једнака је алгебарском збиру контурних струја које кроз ту грану протичу. При томе се контурне струје чији је референтни смер сагласан са изабраним референтним смером струје у грани узимају са позитивним предзнаком и обрнуто.

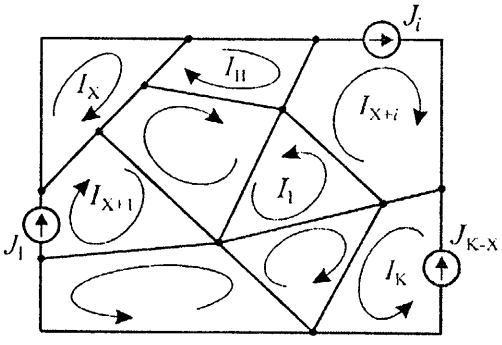
Када коло садржи и струјне генераторе (N_J струјних генератора), избор независних контура није слободан. Наиме, пошто је струја у грани са идеалним струјним генератором позната (једнака је струји кратког споја тог струјног генератора), *гране са идеалним струјним генераторима морају бити независне гране одговарајућих независних контура којима припадају* (слика 17.3). У том случају струје тих контура су познате и једнаке струјама кратког споја струјних генератора,

$$I_{X+i} = J_i$$

За те контуре се не постављају једначине. На тај начин се систем једначина редукује на

$$N_X = N_K - N_J$$

једначина са истим бројем непознатих независних (контурних) струја следећег облика:



Слика 17.3.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
I_I R_{11} & + & I_{II} R_{12} & + \cdots + & I_X R_{1X} & + & I_{X+1} R_{1,X+1} & + \cdots + & I_K R_{1K} & = & (\Sigma E)_I \\
I_I R_{21} & + & I_{II} R_{22} & + \cdots + & I_X R_{2X} & + & I_{X+1} R_{2,X+1} & + \cdots + & I_K R_{2K} & = & (\Sigma E)_{II} \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
I_I R_{X1} & + & I_{II} R_{X2} & + \cdots + & I_X R_{XX} & + & I_{X+1} R_{X,X+1} & + \cdots + & I_K R_{XK} & = & (\Sigma E)_X
\end{array}$$

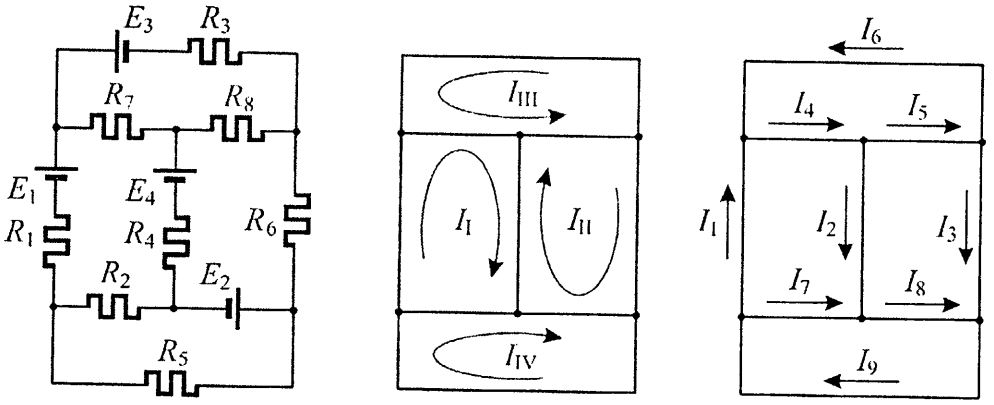
По одређивању контурних струја, струје у појединим гранама одређују се на исти начин као и у случају кола које садржи само напонске генераторе.

Уколико коло садржи реалне струјне генераторе могуће је извршити њихову трансфигурацију у напонске. Међутим, економичније је не вршити трансфигурацију и коло решавати као коло са идеалним струјним генераторима (реални струјни генератор представити као паралелну везу идеалног струјног генератора и његове унутрашње отпорности).

17.2.2. Примери примене метода контурних струја

Примена метода контурних струја биће приказана на два примера: када коло садржи само напонске генераторе и када се у колу, поред напонских, налазе и идеални струјни генератори.

Нека је задато коло, приказано шемом на слици 17.4.а, у коме су познате вредности свих елемената. Коло има девет грана, што значи да би за одређивање непознатих струја директном применом Кирхофових закона требало поставити систем од девет једначина са истим бројем непознатих. Међутим, како коло има четири независне контуре, метод контурних струја захтева постављање и решавање система од само четири једначине са четири непознате контурне струје.



а. б. в.

Слика 17.4.

Изаберимо потпуно произвољно четири независне контуре кроз које ће протицати четири контурне струје произвољно одабраних смерова (слика 17.4.б). Систем једначина је независан од облика кола:

$$
\begin{aligned}
I_I R_{11} &+ I_{II} R_{12} + I_{III} R_{13} + I_{IV} R_{14} = (\Sigma E)_I \\
I_I R_{21} &+ I_{II} R_{22} + I_{III} R_{23} + I_{IV} R_{24} = (\Sigma E)_{II} \\
I_I R_{31} &+ I_{II} R_{32} + I_{III} R_{33} + I_{IV} R_{34} = (\Sigma E)_{III} \\
I_I R_{41} &+ I_{II} R_{42} + I_{III} R_{43} + I_{IV} R_{44} = (\Sigma E)_{IV}
\end{aligned}
$$

Вредности појединих коефицијената су:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_4 + R_7, \quad R_{22} = R_4 + R_6 + R_8, \quad R_{33} = R_3 + R_7 + R_8, \quad R_{44} = R_2 + R_5,$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_4, \qquad R_{13} = R_{31} = R_7, \qquad R_{14} = R_{41} = -R_2,$$

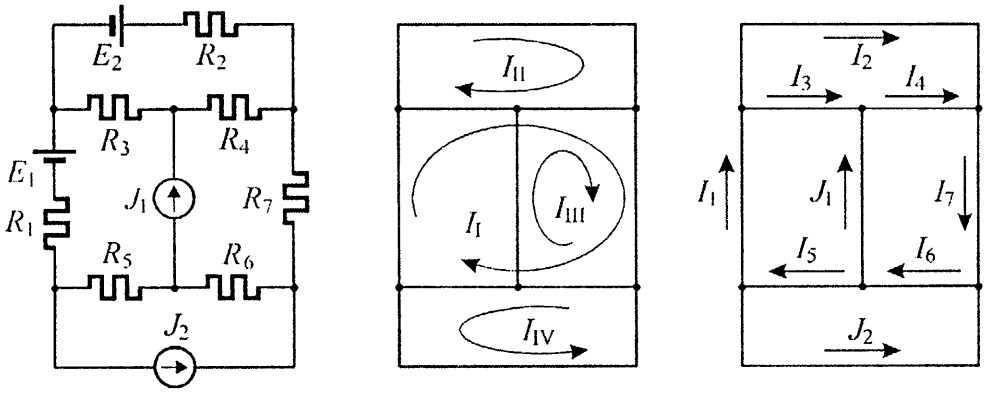
$$R_{23} = R_{32} = R_8, \qquad R_{24} = R_{42} = 0, \qquad R_{34} = R_{43} = 0,$$

$$(\Sigma E)_I = E_1 - E_4, \qquad (\Sigma E)_{II} = E_4 - E_2, \qquad (\Sigma E)_{III} = E_3, \qquad (\Sigma E)_{IV} = E_2.$$

Након одређивања непознатих контурних струја одређују се струје у појединим гранама. За референтне смерове са слике 17.4.в. јачине појединих струја су:

$$I_1 = I_{\mathrm{I}}, \quad I_2 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}}, \quad I_3 = I_{\mathrm{II}}, \quad I_4 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{III}}, \quad I_5 = I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}},$$
$$I_6 = I_{\mathrm{III}}, \quad I_7 = I_{\mathrm{IV}} - I_{\mathrm{I}}, \quad I_8 = I_{\mathrm{IV}} - I_{\mathrm{II}}, \quad I_9 = I_{\mathrm{IV}}.$$

Анализирајмо сада коло приказано шемом на слици 17.5.а. Коло, као и у претходном примеру, има девет грана. Струје у две гране су већ познате и једнаке струјама кратког споја струјних генератора који се налазе у тим гранама. Према томе, за одређивање непознатих струја у гранама кола директном применом Кирхофових закона било би потребно поставити систем од седам једначина са седам непознатих.



а. б. в.

Слика 17.5.

Примена метода контурних струја даје знатно мањи систем једначина. Како коло има четири независне контуре, и како су две контурне струје већ познате (струје кратког споја струјних генератора), потребно је поставити систем од само две једначине са две непознате. Ако се контуре одаберу као на слици 17.5.б. трећа и четврта контурна струја су познате ($I_{\mathrm{III}} = J_1$ и $I_{\mathrm{IV}} = J_2$), тако да систем једначина гласи:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{I}}R_{11} &+ I_{\mathrm{II}}R_{12} + I_{\mathrm{III}}R_{13} + I_{\mathrm{IV}}R_{14} = (\Sigma E)_{\mathrm{I}} \\ I_{\mathrm{I}}R_{21} &+ I_{\mathrm{II}}R_{22} + I_{\mathrm{III}}R_{23} + I_{\mathrm{IV}}R_{14} = (\Sigma E)_{\mathrm{II}} \end{aligned}$$

Вредности појединих коефицијената су:

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7, \qquad R_{22} = R_2 + R_3 + R_4,$$
$$R_{12} = R_{21} = -(R_3 + R_4), \qquad R_{13} = R_4 + R_6 + R_7,$$
$$R_{14} = R_5 + R_6, \qquad R_{23} = -R_4, \qquad R_{24} = 0,$$
$$(\Sigma E)_{\mathrm{I}} = E_1, \qquad (\Sigma E)_{\mathrm{II}} = E_2.$$

Јачине струја у појединим гранама кола, за референтне смерове на слици 17.5.в, су

$$I_1 = I_{\mathrm{I}}, \qquad I_2 = I_{\mathrm{II}}, \qquad I_3 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}}, \qquad I_4 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} + J_1,$$
$$I_5 = I_{\mathrm{I}} + J_2, \qquad I_6 = I_{\mathrm{I}} + J_1 + J_2, \qquad I_7 = I_{\mathrm{I}} + J_1.$$

17.3. Метод потенцијала чворова

Метод потенцијала чворова, или метод независних напона, је, као и метод контурних струја, формалан метод изведен из Кирхофових закона. Изведен је за коло које садржи само струјне генераторе (реални напонски генератори се могу трансфигурисати у струјне) али се, под одређеним ограничењима у погледу конфигурације кола и избора чворова, може користити и када коло садржи идеалне напонске генераторе.

У односу на директну примену Кирхофових закона метод потенцијала чворова има две битне предности:

- број једначина које се постављају за решавање једног сложеног кола једнак је броју једначина које би требало поставити по I Кирхофовом закону и

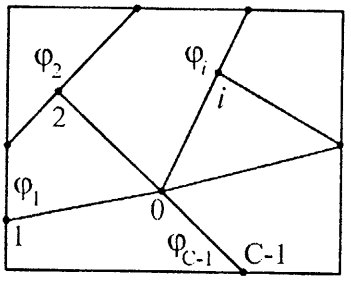
- систем једначина се поставља на веома једноставан и шематизован начин, независан од конфигурације кола.

И овде, као и у случају контурних струја, неће бити дато извођење метода, већ само његов опис и начин примене.

17.3.1. Опис метода

За разлику од метода контурних струја, где су одређиване струје појединих контура, код метода потенцијала чворова одређују се потенцијали појединих чворова кола у односу на један, унапред изабрани, референтни чвор.

Посматрајмо најпре коло које ни у једној од грана не садржи идеалне напонске генераторе (редна веза идеалног напонског генератора и отпорника отпорности R може се сматрати реалним напонским генератором унутрашње отпорности R). Нека коло (слика 17.6) има укупно N_C чворова. Један од чворова, било који, изаберимо за референтни (чвор нултог потенцијала) и означимо га са 0. Преостале чворове означи-



Слика 17.6.

мо бројевима 1,2,...,i,...,(C−1). Њихови потенцијали у односу на референтни чвор су $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots, \varphi_{C-1}$, док су напони између било ког чвора и референтног

$$U_{i0} = \varphi_i - \varphi_0 = \varphi_i.$$

За одређивање $N_X = N_{C-1}$ непознатих потенцијала чворова поставља се систем од N_X једначина. Пре постављања система једначина потребно је напонске генераторе трансфигурисати у струјне (када се постигне одређени степен рутине у примени метода није више потребно експлицитно вршити трансфигурацију напонских генератора у струјне, већ ту трансфигурацију "вршити" у току поступка постављања једначина).

Систем једначина који се поставља за одређивање непознатих потенцијала чворова има следећи облик:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\varphi_1 G_{11} & - & \varphi_2 G_{12} & - \cdots - & \varphi_i G_{1i} & - \cdots - & \varphi_{C-1} G_{1,C-1} & = & (\Sigma J)_1 \\
-\varphi_1 G_{21} & + & \varphi_2 G_{22} & - \cdots - & \varphi_i G_{2i} & - \cdots - & \varphi_{C-1} G_{2,C-1} & = & (\Sigma J)_2 \\
\vdots & & & & & & & & \\
-\varphi_1 G_{i1} & - & \varphi_2 G_{i2} & - \cdots + & \varphi_i G_{ii} & - \cdots - & \varphi_{C-1} G_{i,C-1} & = & (\Sigma J)_i \\
\vdots & & & & & & & & \\
-\varphi_1 G_{C-1,1} & - & \varphi_2 G_{C-1,2} & - \cdots - & \varphi_i G_{C-1,i} & - \cdots + & \varphi_{C-1} G_{C-1,C-1} & = & (\Sigma J)_{C-1}
\end{array}$$

Значење појединих елемената у претходном систему једначина је:

G_{ii} је такозвана *"сопствена проводност" i – тог чвора и представља збир проводности свих грана које се сустичу у i – том чвору.*

$G_{ij} = G_{ji}$ је такозвана *"међусобна проводност" два чвора (i – тог и j – тог) и представља збир проводности свих грана које су везане између i – тог и j – тог чвора. Уколико између два чвора нема директне везе, или је између њих везан идеални струјни генератор, међусобна проводност једнака је нули, $G_{ij} = 0$.*

$(\Sigma J)_i$ *представља алгебарски збир струја свих струјних генератора везаних за i – ти чвор. Уколико струја генератора утиче у чвор узима се са позитивним знаком и обрнуто.*

По одређивању потенцијала чворова (напона између појединих чворова и референтног) потребно је одредити напоне између појединих чворова као

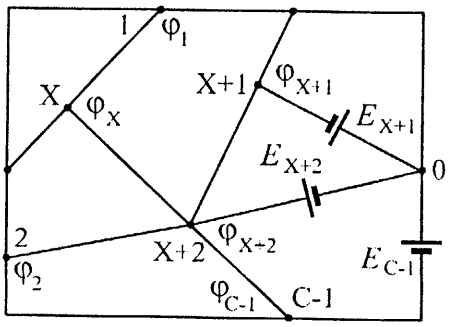
$$U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j = U_{i0} - U_{j0},$$

а затим и струје у појединим гранама. *Уколико грана садржи само отпорности, струја се одређује директном применом Омовог закона. Ако у грани постоје и електромоторне силе струја се одређује применом Омовог закона за грану сложеног кола.*

Метод потенцијала чворова може се применити и на коло које у одређеном броју грана (N_E) садржи идеалне напонске генераторе, али *само под условом да су све гране са идеалним напонским генераторима везане за један чвор који се мора изабрати за референтни* (слика 17.7). У том случају су потенцијали чворова, за које су везани други крајеви грана са идеалним напонским генераторима, познати и једнаки електромоторним силама генератора у тим гранама,

$$\varphi_{X+j} = U_{X+j,0} = \pm E_j .$$

При томе, наравно, треба водити рачуна о смеру електромоторних сила - уколико је електромоторна сила оријентисана од референтног чвора ка чвору N_{X+j} узима се са позитивним знаком и обрнуто.



Слика 17.7.

За чворове чији су потенцијали већ познати не постављају се једначине, тако да се систем једначина редукује на

$$N_X = N_C - N_E - 1$$

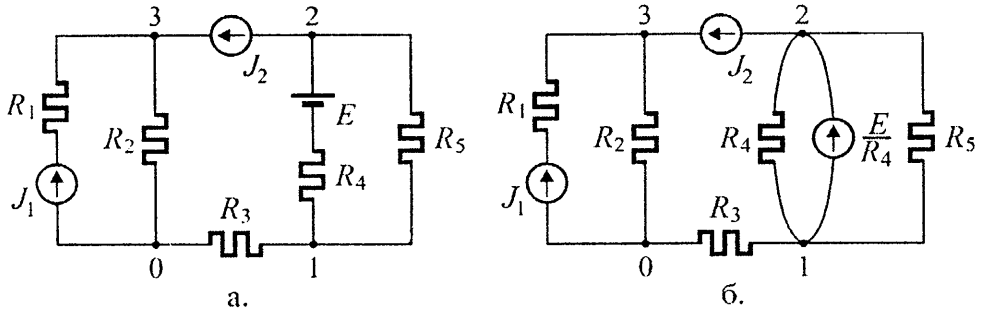
једначина са истим бројем непознатих потенцијала чворова:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
\varphi_1 G_{11} & - & \varphi_2 G_{12} & - \cdots - & \varphi_X G_{1X} & - & \varphi_{X+1} G_{1,X+1} & - \cdots - & \varphi_{C-1} G_{1,C-1} & = & (\Sigma J)_1 \\
-\varphi_1 G_{21} & + & \varphi_2 G_{22} & - \cdots - & \varphi_X G_{2X} & - & \varphi_{X+1} G_{2,X+1} & - \cdots - & \varphi_{C-1} G_{2,C-1} & = & (\Sigma J)_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
-\varphi_1 G_{X1} & - & \varphi_2 G_{X2} & - \cdots - & \varphi_X G_{XX} & - & \varphi_{X+1} G_{X,X+1} & - \cdots + & \varphi_{C-1} G_{X,C-1} & = & (\Sigma J)_X
\end{array}$$

Након одређивања напона између појединих чворова одређују се струје у појединим гранама кола директном применом Омовог закона или Омовог закона за грану сложеног кола. Изузетак су струје у гранама са идеалним напонским генераторима које се могу одредити једино применом I Кирхофовог закона на један од чворова за који је та грана везана.

17.3.2. Примери примене метода потенцијала чворова

Анализираћемо најпре коло (слика 17.8.а) које ни у једној од грана не садржи идеалан напонски генератор (редна веза електромоторне силе E и отпорности R_4 може се сматрати реалним напонским генератором). Коло има укупно четири чвора. Изаберимо произвољно референтни чвор и означимо остале чворове као на слици. Након трансфигурације напонског генератора у струјни (слика 17.8.б) пише се систем једначина:



Слика 17.8.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 G_{11} &- \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} = (\Sigma J)_1 \\
-\varphi_1 G_{21} &+ \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = (\Sigma J)_2 \\
-\varphi_1 G_{31} &- \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = (\Sigma J)_3
\end{aligned}$$

Вредности појединих косфицијената су:

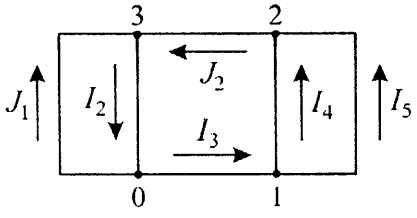
$$G_{11} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}, \qquad G_{22} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}, \qquad G_{33} = \frac{1}{R_2}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}, \qquad G_{13} = G_{31} = 0, \qquad G_{23} = G_{32} = 0$$

$$(\Sigma J)_1 = -\frac{E}{R_4}, \qquad (\Sigma J)_2 = \frac{E}{R_4} - J_2, \qquad (\Sigma J)_3 = J_1 + J_2.$$

Треба уочити да се нигде у једначинама не појављује отпорност R_1 која је везана на ред са идеалним струјним генератором, што је и разумљиво. Наиме, проводност редне везе идеалног струјног генератора (која је једнака нули) и било које проводности једнака је нули. Такође, струја у грани са идеалним струјним генератором не зависи од тога шта је везано на ред са њим, тако да отпорност R_1 не утиче на њу, а самим тим ни на остатак кола. Редно везана отпорност утиче једино на напон на струјном генератору, односно на његову снагу.

Након одређивања потенцијала чворова одређују се струје у појединим гранама кола. За референтне смерове означене на слици 17.9, јачине појединих струја се одређују као:



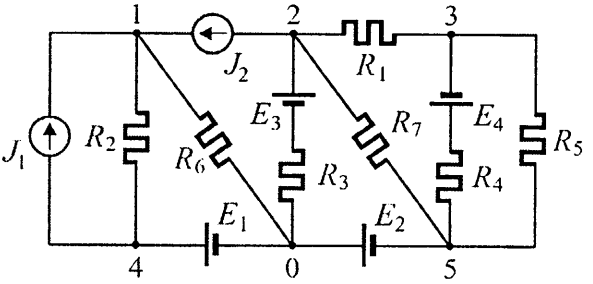
Слика 17.9.

$$I_2 = \frac{U_{30}}{R_2} = \frac{\varphi_3}{R_2}, \qquad I_3 = \frac{U_{01}}{R_3} = \frac{-\varphi_1}{R_3},$$

$$I_4 = \frac{U_{12} + E}{R_4} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E}{R_4},$$

$$I_5 = \frac{U_{12}}{R_5} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5}.$$

Примену метода потенцијала чворова у случају када коло садржи у појединим гранама идеалне напонске генераторе показаћемо на примеру кола са слике 17.10. Коло има шест чворова и садржи два идеална напонска генератора који су једним својим крајем везани за исти чвор. Тај чвор се мора изабрати за референтни. Како су потенцијали чворова 4 и 5 већ познати, $\varphi_4 = E_1$ и $\varphi_5 = -E_2$, то се за њих не пишу једначине па се систем једначина редукује на три једначине са три непознате:



Слика 17.10.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 G_{11} &- \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} - \varphi_4 G_{14} - \varphi_5 G_{15} = (\Sigma J)_1 \\
-\varphi_1 G_{21} &+ \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} - \varphi_4 G_{24} - \varphi_5 G_{25} = (\Sigma J)_2 \\
-\varphi_1 G_{31} &- \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} - \varphi_4 G_{34} - \varphi_5 G_{35} = (\Sigma J)_3
\end{aligned}$$

Вредности појединих коефицијената су:

$$G_{11} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}, \qquad G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7}, \qquad G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$$

$$G_{12} = G_{21} = 0, \qquad G_{13} = G_{31} = 0, \qquad G_{14} = \frac{1}{R_2}, \qquad G_{15} = 0,$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_1}, \qquad G_{24} = 0, \qquad G_{25} = \frac{1}{R_7}, \qquad G_{34} = 0, \qquad G_{35} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$$

$$(\Sigma J)_1 = J_1 + J_2, \qquad (\Sigma J)_2 = \frac{E_3}{R_3} - J_2, \qquad (\Sigma J)_3 = -\frac{E_4}{R_4}.$$

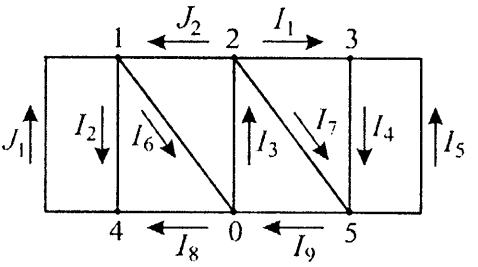
За референтне смерове означене на слици 17.11, јачине појединих струја су:

$$I_1 = \frac{U_{23}}{R_1} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{U_{14}}{R_2} = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_1},$$

$$I_3 = \frac{U_{02} + E_3}{R_3} = \frac{-\varphi_2 + E_3}{R_3},$$

$$I_4 = \frac{U_{35} + E_4}{R_4} = \frac{\varphi_3 - \varphi_5 + E_4}{R_4},$$



Слика 17.11.

$$I_5 = \frac{U_{53}}{R_5} = \frac{\varphi_5 - \varphi_3}{R_5}, \quad I_6 = \frac{U_{10}}{R_6} = \frac{\varphi_1}{R_6}, \quad I_7 = \frac{U_{25}}{R_7} = \frac{\varphi_2 - \varphi_5}{R_7}.$$

Струје у гранама са идеалним струјним генераторима одређују се директном применом I Кирхофовог закона за чворове 4 и 5:

$$I_8 = J_1 - I_2, \qquad I_9 = I_4 + I_7 - I_5.$$

17.4. О избору метода за решавање сложених електричних кола

Правилан избор метода у значајној мери може скратити поступак решавања сложеног електричног кола. У зависности од конфигурације кола разликује се број једначина које је потребно поставити и решити по појединим методима.

Директна примена Кирхофових закона, без обзира на конфигурацију кола, даје систем једначина са највећим бројем непознатих. Стога се метод директне примене Кирхофових закона за решавање сложених кола једносмерне струје изузетно ретко користи. Ако се, ипак, изабере овај метод, тада треба из једначина постављених по првом Кирхофовом закону изразити одређени број струја и унети их у једначине постављене по другом Кирхофовом закону. На тај начин се, релативно брзо, у значајној мери смањује систем једначина који треба решити.

Метод контурних струја и метод потенцијала чворова дају мањи број једначина у односу на директну примену Кирхофових закона, те се због тога много чешће користе. Пре избора једног од ова два метода треба најпре проверити да ли је могућа примена метода потенцијала чворова (како су повезани идеални напонски генератори, уколико их има у колу). Затим треба одредити колики ће се систем једначина добити применом једног, односно другог метода, и изабрати онај метод који даје мањи систем једначина. Уколико би оба метода дала системе једначина са истим бројем непознатих, онда би избор зависио од тога шта се у задатку захтева: уколико је потребно израчунати струје у појединим гранама, сврсисходно је применити метод контурних струја док је, за одређивање напона између појединих чворова, погоднији метод потенцијала чворова.

17.5. Питања за проверу

17.5.1. Шта се подразумева под појмом "решавање сложених електричних кола"?

17.5.2. Колико непознатих струја треба одредити приликом решавања сложеног електричног кола?

17.5.3. Каква веза постоји између броја грана у сложеном колу, броја идеалних струјних генератора и броја непознатих струја?

17.5.4. Која веза постоји између збира снага свих генератора у колу и збира снага свих потрошача?

17.5.5. Набројте методе за решавање сложених електричних кола.

17.5.6. Опишите директну примену Кирхофових закона за решавање сложених електричних кола.

17.5.7. Колико се независних једначина може поставити по I Кирхофовом закону.

17.5.8. Зашто се по I Кирхофовом закону не може поставити онолико независних једначина колико чворова има коло? За објашњење искористити једноставније коло са два или три чвора.

17.5.9. Колико је једначина потребно поставити по II Кирхофовом закону?

17.5.10. Да ли се по II Кирхофовом закону може поставити више независних једначина од потребног броја?

17.5.11. Како се бирају независне контуре у случају да коло садржи само напонске генераторе?

17.5.12. Како се бирају независне контуре у случају да коло садржи и струјне генераторе? Због чега?

17.5.13. Које су предности формалних метода у односу на метод директне примене Кирхофових закона?

17.5.14. Написати општи облик система једначина који се поставља за решавање сложеног електричног кола методом контурних струја.

17.5.15. Како се дефинише сопствена отпорност контуре?

17.5.16. Како се дефинише међусобна отпорност две контуре? Када је она позитивна, када негативна, а када једнака нули?

17.5.17. На какво сложено коло се, без икаквих ограничења, може применити метод контурних струја? Колико се једначина поставља у том случају?

17.5.18. Која ограничења постоје код примене метода контурних струја у случају да коло садржи идеалне струјне генераторе? Колико се једначина поставља у том случају?

17.5.19. Како се, након одређивања контурних струја, одређују струје у појединим гранама кола?

17.5.20. Написати општи облик система једначина који се поставља за решавање сложеног електричног кола применом метода потенцијала чворова.

17.5.21. Како се дефинише сопствена проводност чвора?

17.5.22. Како се дефинише међусобна проводност два чвора? Када је она једнака нули?

17.5.23. Колика је проводност гране са идеалним струјним генератором, а колика гране са редном везом идеалног струјног генератора и отпорника отпорности R?

17.5.24. Како се дефинише збир струја за један чвор?

17.5.25. На какво сложено коло се, без икаквих ограничења, може применити метод потенцијала чворова? Колико се једначина поставља у том случају?

17.5.26. Која ограничења постоје код примене метода потенцијала чворова у случају да коло садржи идеалне напонске генераторе? Колико се једначина поставља у том случају?

17.5.27. Како се, након одређивања потенцијала чворова, одређују струје у појединим гранама кола?

17.5.28. Како се, након одређивања потенцијала чворова, одређују струје у гранама кола у којима се налазе идеални напонски генератори?

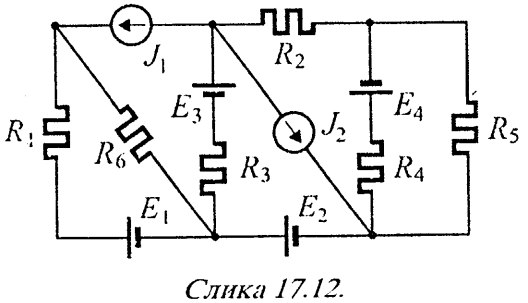
17.5.29. За коло са слике 17.1.а. написати систем једначина за решавање: а. методом контурних струја и б. методом потенцијала чворова.

17.5.30. Колико је једначина потребно поставити за решавање кола са слике 17.4.а. методом потенцијала чворова?

17.5.31. Колико је једначина потребно поставити за решавање кола са слике 17.5.а. методом потенцијала чворова?

17.5.32. Колико је једначина потребно поставити за решавање кола са слике 17.8.а. методом контурних струја?

17.5.33. Колико је једначина потребно поставити за решавање кола са слике 17.10. методом контурних струја?



Слика 17.12.

17.5.34. За коло са слике 17.12. написати систем једначина за решавање: а. методом контурних струја и б. методом потенцијала чворова. Колико би једначина требало поставити за решавање овог кола директном применом Кирхофових закона?

18. Теореме електричних кола

Приликом решавања одређених задатака и проблема сложених електричних кола, а и шире, веома велику примену имају одређене теореме. Овде ће бити обрађене само неке од најважнијих:

- *Теорема суперпозиције*
- *Тевененова теорема*
- *Нортонова теорема*
- *Компензациона теорема*
- *Теорема реципроцитета.*

18.1. Теорема суперпозиције

Теорема суперпозиције позната је у разним областима технике и физике и под именима принцип суперпозиције, теорема слагања линеарних стања, принцип слагања линеарних стања и тако даље. Важи у свим линеарним срединама и веома често се користи. Ми смо је, такође, често користили, при чему нисмо експлицитно наглашавали да се ради о њој: сабирање вектора сила и брзина, вектор јачине електричног поља и потенцијал система тачкастих оптерећења и тако даље.

Теорема суперпозиције важи само за линеарна електрична кола и директна је последица линеарности система једначина који се постављају за њихово решавање. Нећемо је посебно доказивати већ ћемо дати само њен исказ и пример њене примене.

18.1.1. Исказ теореме суперпозиције

Струја у било којој грани сложеног електричног кола, настала као последица једновременог дејства свих генератора у колу, једнака је алгебарском збиру струја у тој грани насталих под дејством појединих генератора када су остали генератори замењени својим унутрашњим отпорностима.

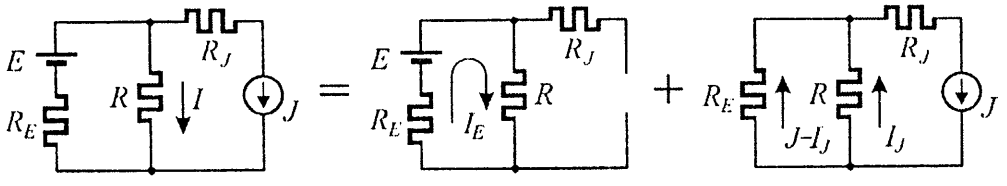
Из самог исказа теореме суперпозиције очигледан је начин њене примене. У колу, које има више генератора, укључује се само један генератор, док се остали замењују својим унутрашњим отпорностима (унутрашња отпорност идеалног напонског генератора је нула, док унутрашња отпорност идеалног струјног генератора тежи бесконачности) и израчунава струја у жељеној грани. Затим се поступак понавља са другим генератором, и тако даље до последњег. Тражена струја израчунава се као алгебарски збир (за изабрани референтни смер) струја насталих под дејством појединих генератора.

Напоменимо да се теорема суперпозиције може применити и тако да не делује сваки генератор понаособ, већ да делују поједине групе генератора (на пример прво делују сви напонски, а затим сви струјни генератори или било која друга комбинација).

Мада нема никаквих ограничења за примену теореме суперпозиције, њена примена има смисла само у случају електричних кола једноставније конфигурације. Ово је разумљиво, јер одређивање струје у једној грани неке сложене везе отпорника, чак и у случају када у колу делује само један генератор, може бити доста сложено и дуготрајно.

18.1.2. Пример примене теореме суперпозиције

Применићемо теорему суперпозиције да би одредили струју у грани са отпорником R кола чија је шема приказана на слици 18.1.а.



а. б. в.

Слика 18.1.

Нека најпре делује само напонски генератор електромоторне силе E. Уместо идеалног струјног генератора, чија унутрашња отпорност тежи бесконачности, остаје прекид (слика 18.1.б). Струја кроз отпорник R је, у том случају,

$$I_E = E/(R + R_E).$$

У случају да делује само струјни генератор струје кратког споја J, уместо напонског генератора остаје у колу само његова унутрашња отпорност R_E (слика 18.1.в). Напон на паралелној вези R и R_E је

$$U = J\frac{RR_E}{R + R_E},$$

па је струја кроз отпорник R

$$I_J = \frac{U}{R} = J\frac{R_E}{R+R_E}.$$

Када делују оба генератора струја кроз отпорник R, за референтни смер са слике 18.1.а, је

$$I = I_E - I_J = \frac{E}{R+R_E} - J\frac{R_E}{R+R_E}.$$

18.2. Тевененова теорема

Тевененова теорема има веома широку примену у решавању сложених електричних кола, посебно у случајевима када је потребно израчунати јачину струје само у једној грани кола. Применом Тевененове теореме смањује се систем једначина које треба решити најмање за једну, што у знатној мери скраћује време израчунавања.

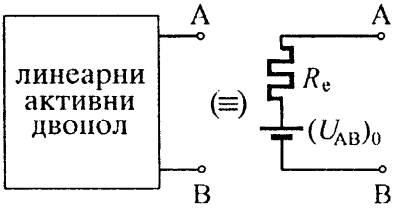
Поред тога, Тевененова теорема се користи при решавању сложених електричних кола која садрже само један нелинеарни отпорник или само у једној грани произвољну везу нелинеарних отпорника, као и при одређивању отпорности потрошача у сложеном електричном колу да би се на њему развила максимална снага. У овим случајевима, без примене Тевененове теореме проблем не би било могуће решити, или би решавање захтевало сложене и дуготрајне поступке.

Тевененова теорема има и многе друге примене и, поред Нортонове теореме, представља највише и најчешће примењивану теорему у анализи сложених електричних кола

18.2.1. Исказ Тевененове теореме

Пре но што се да исказ Тевененове теореме неопходно је објаснити *појам линеарног активног двопола.*

Двопол је било који део сложеног електричног кола који има два приступна краја (генератор, отпорник, редна, паралелна или мешовита веза отпорника, грана сложеног кола и тако даље). Уколико су сви елементи двопола линеарни, двопол се назива линеарним, а уколико садржи и активне елементе (генераторе) активним.

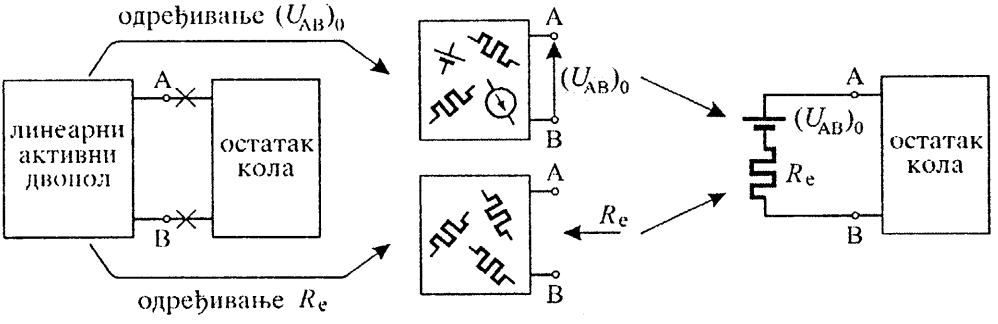


Слика 18.2.

Тевененова теорема (слика 18.2) гласи:

Сваки линеарни активни двопол са непромењивим отпорницима и генераторима може се заменити реалним напонским генератором (Тевененовим генератором) чија је електромоторна сила једнака напону празног хода двопола а унутрашња отпорност еквивалентној отпорности двопола.

Елементи Тевененовог генератора се одређују тако што се двопол између својих приступних крајева, тачака A и B, растерети, односно прекине веза са остатком кола (слика 18.3). Електромоторна сила Тевененовог генератора, $(U_{AB})_0$ (користи се и ознака E_T), једнака је напону празног хода двопола (осенчени део на слици) и може се измерити или израчунати коришћењем израза за напон између две тачке у колу. Наравно, пре тога је потребно, неким од познатих метода, израчунати јачине струја у појединим гранама неоптерећеног двопола.



Слика 18.3.

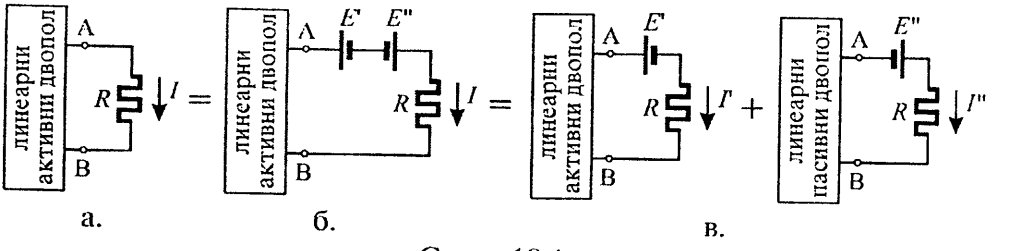
Еквивалентна отпорност двопола, R_e, којој је једнака унутрашња отпорност Тевененовог генератора, се такође може измерити или израчунати. При томе све генераторе треба искључити и, уместо њих, оставити само њихове унутрашње отпорности. Треба водити рачуна о томе да је унутрашња отпорност идеалног напонског генератора једнака нули (тако да се уместо њега ставља кратак спој), а да унутрашња отпорност идеалног струјног генератора тежи бесконачности (па на његовом месту остаје прекид у грани).

Коначно се, на Тевененов генератор са овако одређеним елементима, прикључује остатак кола. На тај начин се основно коло знатно поједностављује што, у многим случајевима, битно олакшава и убрзава решавање проблема.

18.2.2. Извођење Тевененове теореме

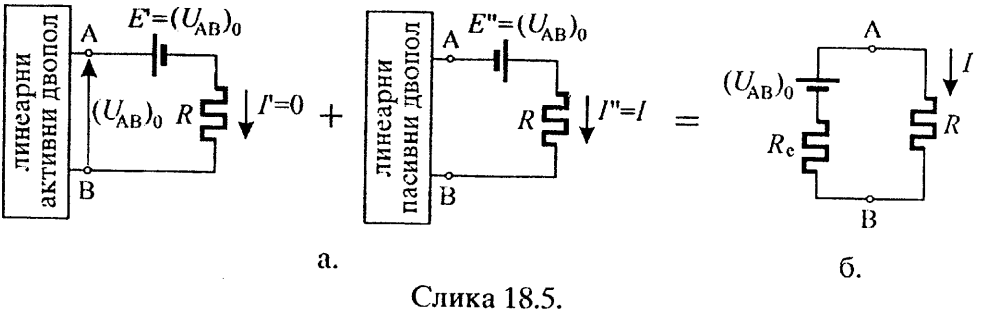
Посматрајмо један линеарни активни двопол између чијих је приступних крајева (А и В) прикључен отпорник отпорности R кроз који протиче струја I (слика 18.4.а). Струја кроз отпорник се неће променити уколико на ред са њим вежемо две идентичне електромоторне силе, $E' = E''$, супротне оријентације (слика 18.4.б). Примењимо сада, на овако добијено коло, теорему суперпозиције. Струја кроз отпорник се може одредити као збир две струје,

$$I = I' + I'',$$



Слика 18.4.

где је I' струја настала под дејством свих генератора у линеарном активном двополу и електромоторне силе E', док је I'' струја настала под дејством електромоторне силе E'' (слика 18.4.в). Према теореми суперпозиције, када делују сви генератори у линеарном активном двополу и електромоторна сила E', електромоторна сила E'' се замењује кратким спојем. Када делује електромоторна сила E'' електромоторна сила E' се замењује кратким спојем, док се сви генератори у линеарном активном двополу замењују својим унутрашњим отпорностима. Тако се добија пасиван двопол (сложена веза отпорника са два приступна краја) који се може заменити једним еквивалентним отпорником отпорности R_e.



Слика 18.5.

Мењајмо електромоторне силе E' и E'' ($E' = E''$) све док струја I' кроз отпорник R у колу са линеарним активним двополом и електромоторном силом E' не постане једнака нули, $I' = 0$ (слика 18.5.а). Када

је струја једнака нули двопол није оптерећен, тако да је напон између његових приступних крајева једнак напону празног хода, $(U_{AB})_0$. То значи да ће струја I' бити једнака нули када је испуњен услов

$$E' = E'' = (U_{AB})_0 .$$

Са овако одређеном вредношћу електромоторне силе E'' струја у колу са електромоторном силом E'' и пасивним двополом ће имати вредност

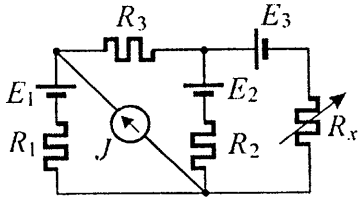
$$I'' = \frac{E''}{R + R_e} = \frac{(U_{AB})_0}{R + R_e},$$

а самим тим и струја I

$$I = I' + I'' = \frac{(U_{AB})_0}{R + R_e}.$$

Према томе, линеарни активни двопол се може у односу на отпорник R (у најопштијем случају у односу на остатак кола) заменити напонским генератором чија је електромоторна сила једнака напону празног хода двопола, док му је унутрашња отпорност једнака еквивалентној отпорности двопола (слика 18.5.б).

18.2.3. Пример примене Тевененове теореме



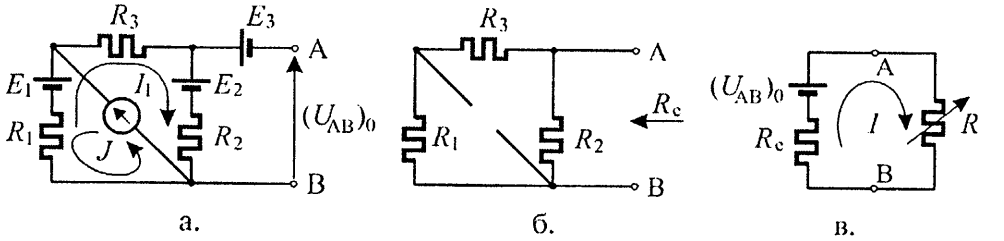
Слика 18.6.

У сложеном колу, чија је шема приказана на слици 18.6, отпорник R_x је променљив. Потребно је одредити његову отпорност тако да се на њему развија максимална снага, као и да се та снага израчуна. Познате су вредности свих елемената:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R,\ E_1 = 2E,\ E_2 = E_3 = E \text{ и } J.$$

Да би смо указали на предност примене Тевененове теореме описаћемо начин директног решавања постављеног задатка. Коло има три независне контуре и за одређивање непознатих струја потребно је поставити систем од две једначине са две непознате (јер се у једној грани налази идеални струјни генератор). Решавањем овог система једначина добија се струја кроз отпорник R_x у функцији његове отпорности, а затим и снага на отпорнику. Диференцирањем израза за снагу по R_x и изједначавањем са нулом добија се, коначно, вредност отпорности променљивог отпорника за коју ће се на њему развити максимална снага. Очигледно је да је описани поступак изузетно гломазан и дуготрајан.

Међутим, примена Тевенеснове теореме изузетно брзо и ефикасно доводи до резултата. У односу на променљиви отпорник заменићемо остатак кола (линеарни активни двопол) Тевененовим генератором. За одређивање напона празног хода (слика 18.7.а) потребно је одредити



Слика 18.7.

струју у грани са електромоторном силом E_2 и отпорником R_2 за шта је, по методу контурних струја, потребно поставити само једну једначину,

$$I_1(R_1+R_2+R_3)-JR_1=E_1-E_2,$$

одакле следи

$$I_1=\frac{E_1-E_2+JR_1}{R_1+R_2+R_3}=\frac{E+JR}{3R}.$$

Напон празног хода двопола одређује се коришћењем познатог израза за напон између две тачке у колу,

$$(U_{AB})_0=\sum RI-\sum E=R_2I_1+E_2-E_3=\frac{E+JR}{3}.$$

Еквивалентна отпорност двопола се лако одређује (слике 18.7.б) и износи:

$$R_e=(R_1\oplus R_3)\|R_2=\frac{(R_1+R_3)R_2}{R_1+R_3+R_2}=\frac{2R}{3}.$$

Коначно, на генератор електромоторне силе $(U_{AB})_0$ и унутрашње отпорности R_e прикључује се отпорник променљиве отпорности R_x (слика 18.7.в). Коло са једним отпорником и генератором је већ анализирано, тако да одмах закључујемо да се на променљивом отпорнику развија максимална снага када је испуњен услов $R_x=R_e$, и да је та снага

$$P_{max}=\frac{(U_{AB})_0^2}{4R_e}.$$

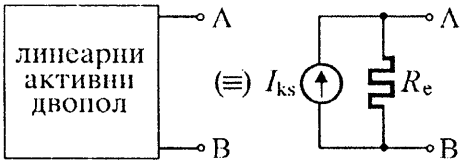
18.3. Нортонова теорема

Нортонова теорема има исти значај и исто тако широку примену као и Тевененова теорема. Нећемо је доказивати већ ћемо дати само њен исказ и пример њене примене.

18.3.1. Исказ Нортонове теореме

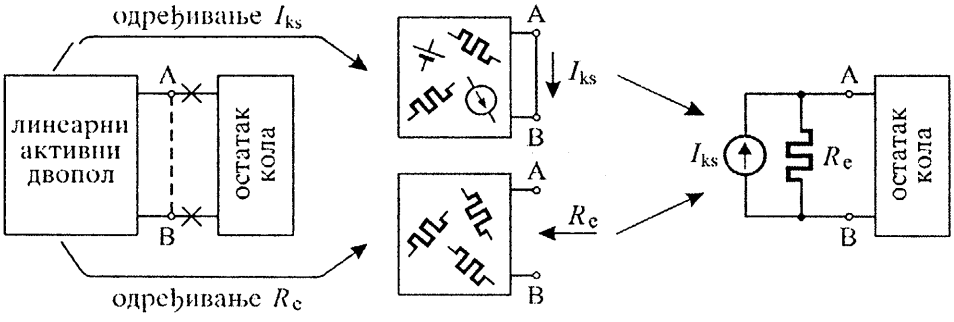
Нортонова теорема (слика 18.8) гласи:

Сваки линеарни активни двопол са непроменљивим отпорницима и генераторима може се заменити реалним струјним генератором (Нортоновим генератором) чија је струја једнака струји кратког споја двопола а унутрашња отпорност еквивалентној отпорности двопола.



Слика 18.8.

Елементи Нортоновог генератора се одређују тако што се веза двопола са остатком кола прекине, а затим тачке A и B кратко споје (слика 18.9). Струја кратког споја Нортоновог генератора једнака је струји кратког споја двопола (струји у грани AB), I_{ks}, и може се измерити или израчунати неким од познатих метода. Унутрашња отпорност Нортоновог генератора, R_e, одређује се на идентичан начин као и унутрашња отпорност Тевененовог генератора.



Слика 18.9.

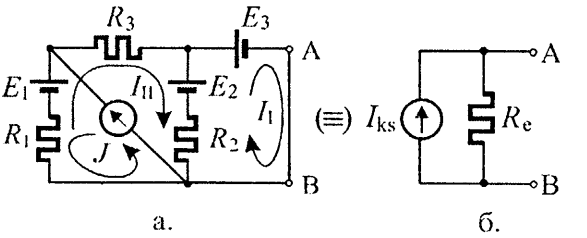
Како се кратким спајањем тачака A и B број контура линеарног активног двопола не смањује, то је за одређивање струје кратког споја Нортоновог генератора потребно решавати гломазнији систем једначи-

на него за одређивање електромоторне силе Тевененовог генератора. Због тога се, веома често, најпре одреде елементи Тевененовог генератора, а затим се он трансфигурише у струјни генератор и на тај начин добију елементи Нортоновог генератора.

18.3.2. Пример примене Нортонове теореме

Одредићемо еквивалентни Нортонов генератор којим се линеарни активни двопол са слике 18.6. може заменити у односу на променљиви отпорник R.

За одређивање струје кратког споја Нортоновог генератора потребно је кратко спојити приступне крајеве двопола А и В. На тај начин се добија троконтурно коло са слике 18.10.а. За решавање овог кола методом контурних струја потребно је поставити систем од две једначине са две непознате (јер је струја једне контуре већ позната и једнака струји струјног генератора J):



Слика 18.10.

$$I_I R_2 - I_{II} R_2 = E_2 - E_3$$

$$-I_I R_2 + I_{II}(R_1 + R_2 + R_3) - JR_1 = E_1 - E_2 .$$

Решавањем овог система једначина добија се за струју прве контуре, што је уједно и струја кратког споја Нортоновог генератора,

$$I_I = I_{ks} = \frac{E + RJ}{2R} .$$

Еквивалентна отпорност двопола се одређује на исти начин као и код примене Тевененове теореме,

$$R_e = (R_1 \oplus R_3) \| R_2 = \frac{(R_1 + R_3)R_2}{R_1 + R_3 + R_2} = \frac{2R}{3} .$$

Ако се овако добијени струјни генератор (слика 18.10.б) трансфигурише у напонски, добија се за његову електромоторну силу

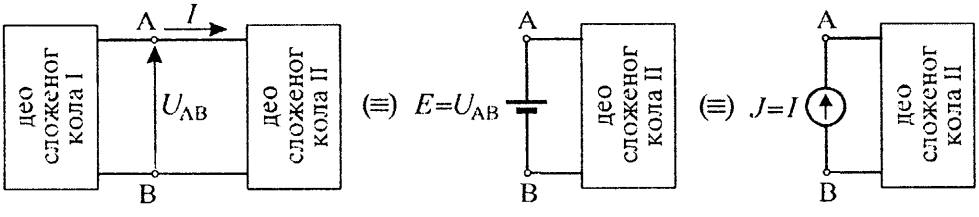
$$E = I_{ks} R_e = \frac{E + RJ}{2R} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{E + RJ}{3} .$$

Очигледно је ова електромоторна сила једнака електромоторној сили Тевененовог генератора која је добијена директном применом Тевененове теореме.

18.4. Компензациона теорема

Компензациона теорема важи како за линеарна, тако и за нелинеарна електрична кола. Нећемо је доказивати већ ћемо дати само њен исказ и пример њене примене.

Посматрајмо сложено електрично коло које се може поделити на два међусобно спојена дела (слика 18.11). Тачке у којима се спајају ова два дела кола су A и B, а напон између њих U_{AB}. Јачина струје у проводницима којима су спојени делови кола је I.



Слика 18.11.

Компензациона теорема има два алтернативна исказа:

- Један део сложеног електричног кола, који је са остатком кола везан преко два краја (тачака A и B) између којих се зна напон U_{AB}, може се у односу на остатак кола заменити идеалним напонским генератором електромоторне силе $E = U_{AB}$, чији је смер сагласан са оријентацијом напона U_{AB}.

- Један део сложеног електричног кола, који је са остатком кола везан преко два краја у којима је позната јачина струје I, може се у односу на остатак кола заменити идеалним струјним генератором струје кратког споја $J = I$, чији је смер сагласан са смером струје I.

Не треба посебно објашњавати да компензациона теорема важи и у случају да је било који део сложеног кола само једна грана или само један отпорник.

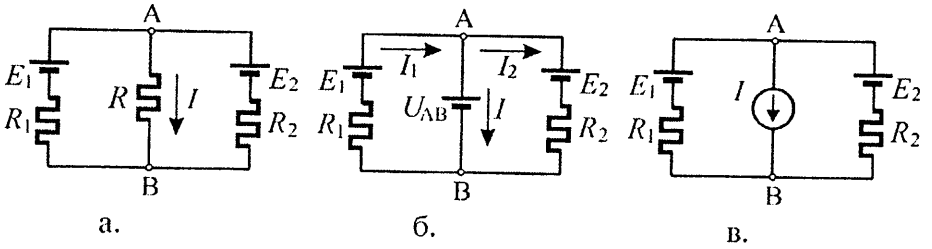
Примена компензационе теореме биће показана на једноставном примеру са конкретним нумеричким подацима. У колу са слике 18.12.а. познато је: $E_1 = 20\,\text{V}$, $E_2 = 10\,\text{V}$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$. Отпорност отпорника R није позната.

Нека је познат напон између тачака A и B, $U_{AB} = 12\,\text{V}$ (први исказ компензационе теореме). Потребно је одредити струју кроз отпор-

ник R и његову отпорност. Грану АВ заменићемо идеалним напонским генератором електромоторне силе U_{AB} и добити коло са слике 18.12.б. Да је коло сложеније могло би се решити неком од метода за решавање кола. Међутим, за ово једноставно коло можемо одмах писати

$$I_1 = \frac{U_{BA} + E_1}{R_1} = \frac{-U_{AB} + E_1}{R_1} = 0.8\,\text{A} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{U_{AB} - E_2}{R_2} = 0.2\,\text{A},$$

тако да је $I = I_1 - I_2 = 0.6\,\text{A}$ и $R = U_{AB}/I = 20\Omega$.



Слика 18.12.

Нека је сада позната струја кроз отпорник R, $I = 0.6\,\text{A}$ (други исказ компензационе теореме). Потребно је одредити напон на отпорнику и његову отпорност. Грану АВ заменићемо идеалним струјним генератором струје кратког споја I и добити коло са слике 18.12.в. Коло је најједноставније решити методом потенцијала чворова,

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)U_{AB} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - I,$$

што даје $U_{AB} = 12\,\text{V}$ и $R = U_{AB}/I = 20\Omega$.

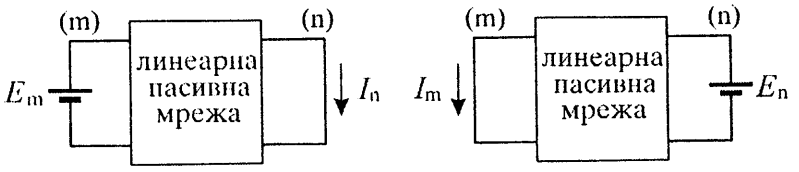
18.5. Теорема реципроцитета (узајамности)

Теорема реципроцитета (узајамности) важи за линеарне електричне мреже које садрже само један генератор (слика 18.13) и гласи:

Ако електромоторна сила E_m, делујући у грани **m** *линеарне пасивне мреже, има за последицу у грани* **n** *струју I_n, тада ће електромоторна сила E_n, делујући у грани* **n**, *имати за последицу у грани* **m** *струју I_m, при чему је*

$$I_m E_m = I_n E_n.$$

У специјалном случају, када је $E_m = E_n$, ове две струје су једнаке.



Слика 18.13.

18.6. Питања за проверу

18.6.1. Како гласи теорема суперпозиције?

18.6.2. Када, приликом примене теореме суперпозиције, делује само један од генератора у колу, шта се чини са осталим генераторима?

18.6.3. Да ли, приликом примене теореме суперпозиције, мора деловати сваки генератор посебно, или може деловати више генератора једновремено?

18.6.4. Шта је то линеарни активни двопол?

18.6.5. Како гласи Тевененова теорема?

18.6.6. Како се одређује електромоторна сила еквивалентног Тевененовог генератора, а како његова унутрашња отпорност?

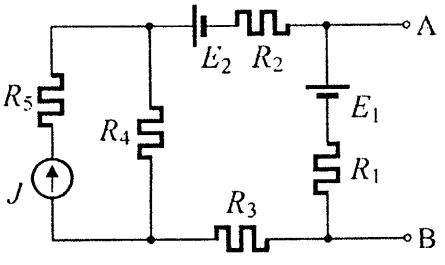
18.6.7. Шта се ради са идеалним генераторима приликом одређивања еквивалентне отпорности двопола.

18.6.8. Навести неке примене Тевененове теореме.

18.6.9. Како гласи Нортонова теорема?

18.6.10. Како се одређује струја кратког споја еквивалентног Нортоновог генератора?

18.6.11. Да ли се из елемената еквивалентног Тевененовог генератора могу одредити елементи еквивалентног Нортоновог генератора?



Слика 18.14.

18.6.12. Одредити елементе еквивалентног Тевененовог генератора којим се замењује линеарни активни двопол приказан на слици 18.14. Познато је:

$$J = 1\,\text{A},\ E_1 = 30\,\text{V},\ E_2 = 20\,\text{V},$$
$$R_1 = 20\Omega,\ R_2 = R_3 = 5\Omega,\ R_4 = R_5 = 10\Omega.$$

18.6.13. Одредити, по дефиницији, елементе еквивалентног Нортоновог генератора којим се замењује линеарни активни двопол са слике 18.14, а затим те елементе одредити на основу познатих елемената еквивалентног Тевененовог генератора. Шта је лакше?

18.6.14. Како гласе оба исказа компензационе теореме?

18.6.15. Како гласи теорема реципроцитета?

19. Електрична кола са нелинеарним отпорницима

Нелинеарним отпорницима се називају отпорници код којих, за разлику од линеарних отпорника, не постоји линеарна зависност између напона на крајевима отпорника и струје кроз њега, односно за које не важи Омов закон дефинисан као у Поглављу 12.1. Код ових отпорника однос напона и струје, који је по природи отпорност, није константна величина већ нека, мање или више сложена функција струје, односно напона.

Строго гледано, и они отпорници које називамо линеарним, немају сталну отпорност, независну од јачине струје. Наиме, при протицању струје кроз отпорник долази до његовог, макар и минималног, загревања а самим тим и до промене његове отпорности. Међутим, у највећем броју случајева, при уобичајеним густинама струје, промене температуре, а са њима и промене отпорности су тако мале да се могу занемарити. Стога, потпуно оправдано, такве отпорнике називамо линеарним. Електрична кола, која садрже само линеарне отпорнике и генераторе (нелинеарни генератор се може представити као идеални напонски, односно струјни генератор са нелинеарном унутрашњом отпорношћу) називамо линеарним електричним колима и на њих се могу применити сви до сада обрађени методи решавања, као и набројане теореме.

Код нелинеарних отпорника, односно потрошача са нелинеарном еквивалентном отпорношћу, нелинеарна зависност између напона и струје се не може занемарити. Електрична кола са оваквим, нелинеарним елементима, називају се нелинеарним електричним колима и за њихово решавање се не могу користити методи до сада обрађени у овој књизи.

Како између напона на крајевима нелинеарног елемента и струје кроз њега постоји нелинеарна зависност, то би и системи једначина који се постављају за решавање кола са нелинеарним елементима, били нелинеарни. Решавање оваквих система једначина је веома сложено и захтева коришћење сложених нумеричких метода. Стога ћемо у овом курсу обрадити само графичке методе које, и поред своје једноставности, дају резултате задовољавајуће тачности.

Узроци нелинеарности једног нелинеарног елемента могу бити различите природе. Нелинеарност може бити само пропратна последица разних физичких процеса (загревање сијалице и грејних тела, електрични лук и тако даље) или намерно изазвана (NTC отпорник, диода и слично).

Међутим, за анализу електричних кола узрок нелинеарности није ни од каквог значаја. Битно је познавати само зависност напона на крајевима отпорника у функцији струје кроз њега, такозвану ***волтамперску карактеристику нелинеарног отпорника.***

У електричним шемама за означавање нелинеарног отпорника биће коришћен симбол —▭— .

Поменимо, на крају, још један веома важан разлог за изучавање нелинеарних електричних кола. Магнетна кола, која се израђују искључиво од нелинеарних магнетних материјала, решавају се истим методама као и нелинеарна електрична кола

19.1. Волтамперска карактеристика отпорника

Било да се ради о линеарном или нелинеарном отпорнику

функција која одређује зависност између напона на крајевима отпорника и струје кроз њега назива се волтамперском, или $U-I$ карактеристиком отпорника.

Волтамперска карактеристика отпорника може се задати на три начина: ***аналитички, табеларно и графички.*** Показаћемо сва три начина, како за линеарне, тако и за нелинеарне отпорнике.

У случају линеарних отпорника, ***аналитички*** задата волтамперска карактеристика, $U = U(I)$, је једначина праве која пролази кроз координатни почетак,

$$U = U(I) = RI,$$

и чији је коефицијент правца једнак отпорности R. Код нелинеарних отпорника то може бити било каква нелинеарна функција, рецимо

$$U = U(I) = \mathrm{A}\, I^{3/2},$$

где је, у конкретном случају, A константа чија је димензија $\mathrm{A}(=)UI^{-3/2}$.

Код ***табеларног*** начина приказивања, у таблици се задаје низ парова вредности струје кроз отпорник и одговарајућег напона на њему. Пример табеларног задавања волтамперске карактеристике приказан је у таблицама T19.1. (за линеарни) и T19.2. (за нелинеарни отпорник).

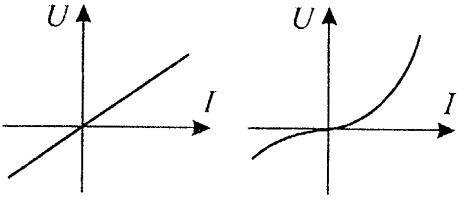
I(A)	-2	-1	0	1	2	3
U(V)	-4	-2	0	2	4	6

Таблица Т19.1.

I(A)	-3	-1	0	1	2	3
U(V)	-2	-1	0	1	3	9

Таблица Т19.2.

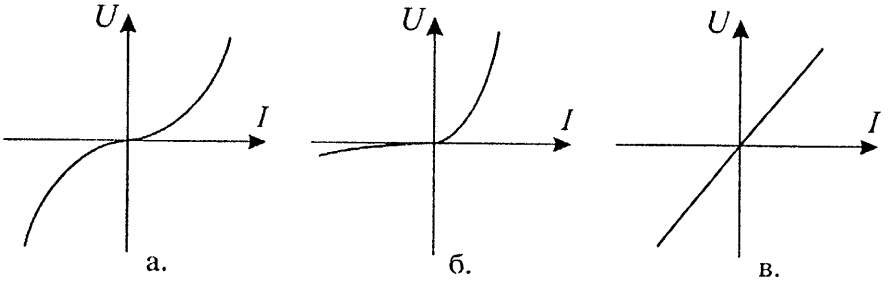
Како ћемо радити само графичке методе за решавање нелинеарних електричних кола, за нас је најважније ***графичко*** задавање карактеристике нелинеарног отпорника. У $I-U$ координатном систему задаје се (црта) график функције $U = U(I)$, односно крива која спаја одговарајуће парове вредности струје кроз отпорник и напона на њему. Волтамперске карактеристике линеарног и нелинеарног отпорника приказане су на сликама 19.1.а. и 19.1.б, респективно. Напоменимо да волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника не одговара карактеристици задатој таблицом Т19.2. (не ради се о истом отпорнику).



а. б.

Слика 19.1.

Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника може бити симетрична у односу на координатни почетак (слика 19.2.а) или несиметрична (слика 19.2.б). Код нелинеарних отпорника са симетричном карактеристиком вредност напона на отпорнику, при истој јачини струје, не зависи од смера струје. У случају отпорника са несиметричном карактеристиком, вредност напона на отпорнику зависи како од јачине,

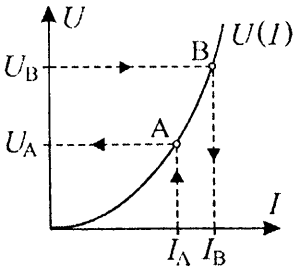


а. б. в.

Слика 19.2.

тако и од смера струје кроз њега. Симетричну карактеристику има, на пример, сијалица са загревним влакном, а несиметричну полупроводничка диода. Јасно је да је волтамперска карактеристика линеарних отпорника симетрична (слика 19.2.в).

19.2. Радна тачка нелинеарног отпорника; статичка и динамичка отпорност

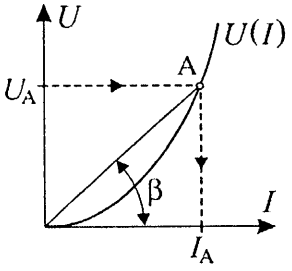


Слика 19.3.

Када кроз нелинеарни отпорник протиче струја I напон на његовим крајевима је U. Јасно је и да при напону U на крајевима нелинеарног отпорника кроз њега протиче струја I (слика 19.3). Овај

пар вредности, струја кроз нелинеарни отпорник - напон на нелинеарном отпорнику, дефинише радну тачку нелинеарног отпорника

Радна тачка је одређена струјом кроз нелинеарни отпорник (радна тачка A), односно напоном на њему (радна тачка B).



Слика 19.4.

Однос напона и струје у радној тачки је по димензији отпорност и назива се статичком отпорношћу,

$$R_s = \frac{U_A}{I_A}.$$

Ову отпорност не треба схватити као отпорност дефинисану Омовим законом јер није константна величина, већ се мења од једне до друге радне тачке. Са слике 19.4. се може уочити да је статичка отпорност једнака тангенсу угла између дужи која спаја радну тачку са координатним почетком и I – осе,

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{U_A}{I_A} = R_s .$$

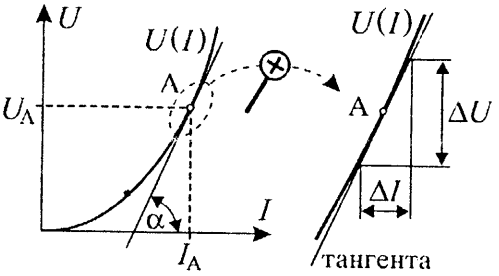
Реципрочна вредност статичке отпорности је статичка проводност,

$$G_s = \frac{1}{R_s} = \frac{I_A}{U_A} .$$

Статичка отпорност и статичка проводност немају неког већег практичног значаја.

Далеко већи значај и практичну примену има динамичка отпорност која се, као и статичка, дефинише у радној тачки нелинеарног отпорника. Познато је да се било која непрекидна функција може, за веома мале промене аргумента, сматрати линеарном. Посматрајмо волтам-

перску карактеристику нелинеарног отпорника (слика 19.5). У блиској околини радне тачке A (увећани део карактеристике на слици), за веома мале промене струје ΔI, односно веома мале промене напона ΔU, волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника је практично линеарна (ΔU је пропорционално ΔI).



Слика 19.5.

Количник промене напона и одговарајуће промене струје у околини радне тачке, када промена струје тежи нули, назива се динамичком отпорношћу нелинеарног отпорника у тој тачки,

$$r_d = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta I}\bigg|_{I=I_A} = \frac{dU}{dI}\bigg|_{I=I_A}$$

Очигледно је (слика) да је динамичка отпорност у радној тачки A једнака коефицијенту правца тангенте повучене на волтамперску карактеристику нелинеарног отпорника у радној тачки,

$$r_d = \frac{dU}{dI}\bigg|_{I=I_A} = \operatorname{tg}\alpha,$$

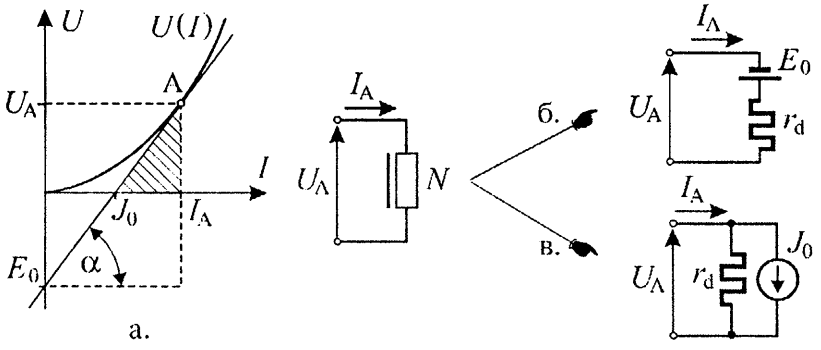
где је α угао који тангента заклапа са $I-$ осом. Реципрочна вредност динамичке отпорности назива се динамичка проводност,

$$g_d = \frac{1}{r_d} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Као и статичка, и динамичка отпорност није константна, већ зависи од положаја радне тачке на волтамперској карактеристици, односно од јачине струје кроз нелинеарни отпорник.

19.3. Линеаризација нелинеарног отпорника

Нека је на волтамперској карактеристици нелинеарног отпорника дефинисана радна тачка A (слика 19.6.а). Њоме су одређени струја кроз нелинеарни отпорник, I_A, и напон на њему, U_A. Коефицијент правца тангенте на волтамперску карактеристику у радној тачки је једнак динамичкој отпорности, $r_d = \operatorname{tg}\alpha$.



Слика 19.6.

Посматрајмо осенчени (већи) троугао на слици. На основу елементарних тригонометријских односа може се писати

$$\frac{U_A + E_0}{I_A} = \operatorname{tg}\alpha = r_d,$$

одакле следи

$$U_A = r_d I_A - E_0.$$

Ова једначина у потпуности одговара једначини која би била постављена за напон на крајевима редне везе отпорника и електромоторне силе, приказане на слици 19.6.б, а према познатом изразу за напон на крајевима гране сложеног кола. Значи, ***у блиској околини радне тачке, где се волтамперска карактеристика може сматрати линеарном, нелинеарни отпорник се може заменити редном везом електромоторне силе E_0 и линеарног отпорника чија је отпорност једнака динамичкој отпорности у радној тачки.*** Вредност електромоторне силе једнака је одсечку који на U – оси одсеца тангента на волтамперску карактеристику у радној тачки. Оријентација електромоторне силе зависи од тога да ли је волтамперска карактеристика конвексна или конкавна, што се оставља читаоцу да провери.

За мањи (шрафирани) троугао са слике 19.6.а. може се писати

$$\frac{I_A - J_0}{U_A} = \operatorname{ctg}\alpha = g_d = \frac{1}{r_d},$$

одакле следи

$$I_A = J_0 + U_A g_d = J_0 + \frac{U_A}{r_d}.$$

Очигледно је да ова једначина у потпуности одговара вези елемената са слике 19.6.в. На основу тога може се закључити да се ***нелинеарни отпорник у блиској околини радне тачке може заменити паралелном везом***

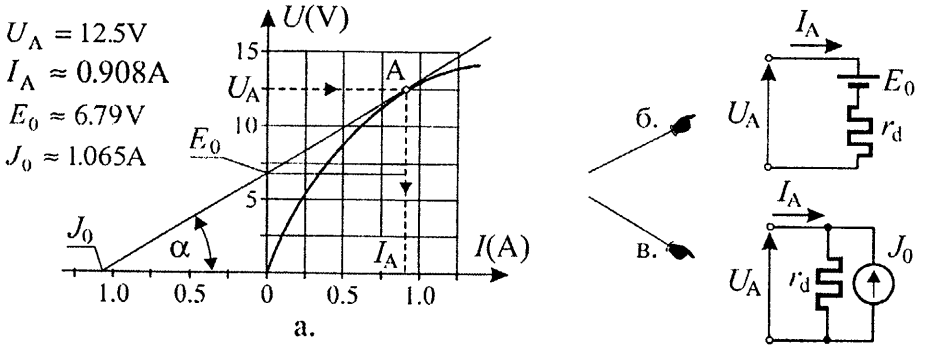
идеалног струјног генератора струје кратког споја J_0 и линеарног отпорника чија је отпорност једнака динамичкој отпорности у радној тачки. Вредност струје кратког споја једнака је одсечку који на I – оси одсеца тангента на волтамперску карактеристику у радној тачки. И у овом случају оријентација генератора зависи од облика волтамперске карактеристике нелинеарног отпорника.

Показаћемо на једном конкретном примеру могућности које пружа линеаризација. Нелинеарни отпорник, чија је волтамперска карактеристика задата на слици 19.7.а, прикључен је на напон $U = 12.5\,\text{V}$. Напон на крајевима отпорника, $U = U_A = 12.5\,\text{V}$, дефинише радну тачку A па се са волтамперске карактеристике може одредити струја кроз нелинеарни отпорник у радној тачки, $I_A \approx 0.908\,\text{A}$. Тангента на волтамперску карактеристику у радној тачки сече координатне осе у тачкама $J_0 \approx 1.065\,\text{A}$ и $E_0 \approx 6.79\,\text{V}$. Са слике (троугао $J_0 - I_A - \text{A}$) је очигледно да је динамичка отпорност у радној тачки

$$r_d = \operatorname{tg}\alpha = \frac{U_A}{I_A + J_0} \approx 6.34\Omega,$$

односно (осенчени троугао)

$$r_d = \operatorname{tg}\alpha = \frac{U_A - E_0}{I_A} \approx 6.29\Omega.$$



Слика 19.7.

Одређена несагласност ова два резултата је пратећа појава свих графичких метода решавања, а последица је ограничене прецизности очитавања са графика. Међутим, пажљивим цртањем и очитавањем (сва очитавања у овом примеру извршена су веома тачно приликом цртања слике на рачунару) може се постићи задовољавајућа тачност (грешка до 2%, мада се и одступања до 5% могу сматрати задовољавајућим). Пример ће до краја бити рађен са вредношћу $r_d = 6.3\Omega$.

На основу елементарних тригонометријских односа за два троугла са слике 19.7.а. може се писати

$$U_A = r_d I_A + E_0$$

и

$$I_A = \frac{U_A}{r_d} - J_0$$

Очигледно је да се нелинеарни отпорник у блиској околини радне тачке може заменити (линеаризовати) напонским, односно струјним генератором (слика 19.7.б. и в) познатих елемената (E_0, J_0, r_d).

Нека се напон на нелинеарном отпорнику мења у блиској околини радне тачке у границама од $12.4\,\mathrm{V}$ до $12.6\,\mathrm{V}$ са кораком $0.05\,\mathrm{V}$. Потребно је одредити одговарајуће вредности струје кроз њега. Уместо да за сваку вредност напона са волтамперске карактеристике очитавамо одговарајућу вредност струје (што би било практично немогуће због веома малих промена напона) линеаризоваћемо нелинеарни отпорник паралелном везом идеалног струјног генератора J_0 и линеарне отпорности r_d и одговарајуће вредности струје израчунати коришћењем израза

$$I = \frac{U}{r_d} - J_0 .$$

Такође је једноставно и решавање обрнутог проблема: потребно је одредити напон на нелинеарном отпорнику када се струја мења у блиској околини радне тачке од $0.895\,\mathrm{A}$ до $0.925\,\mathrm{A}$ са кораком од $0.01\,\mathrm{A}$. Када се нелинеарни отпорник линеаризује редном везом електромоторне силе E_0 и линерног отпорника отпорности r_d тражене вредности напона се лако израчунавају коришћењем израза

$$U = r_d I + E_0 .$$

Добијени нумерички резултати за случај да је линеаризација извршена струјним, односно напонским генератором приказани су у таблицама Т19.3. и Т19.4, респективно.

U(V)	U/r_d (A)	I(A)
12.40	1.968	0.903
12.45	1.976	0.911
12.55	1.992	0.927
12.60	2.000	0.935

Таблица Т19.3.

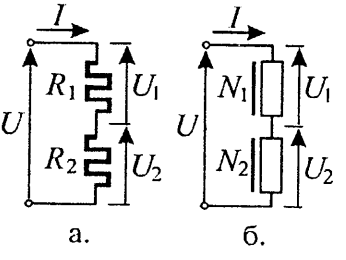
I(A)	Ir_d(V)	U(V)
0.895	5.638	12.428
0.905	5.702	12.492
0.915	5.764	12.554
0.925	5.828	12.618

Таблица Т19.4.

19.4. Редна и паралелна веза нелинеарних отпорника

Редна веза N нелинеарних отпорника, задатих волтамперских карактеристика, увек се може заменити једним, еквивалентним нелинеарним отпорником. Услов еквиваленције је исти као и у случају редне везе линеарних отпорника: при било којој струји напон на еквивалентном отпорнику мора бити једнак збиру напона на отпорницима који учествују у вези,

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i .$$

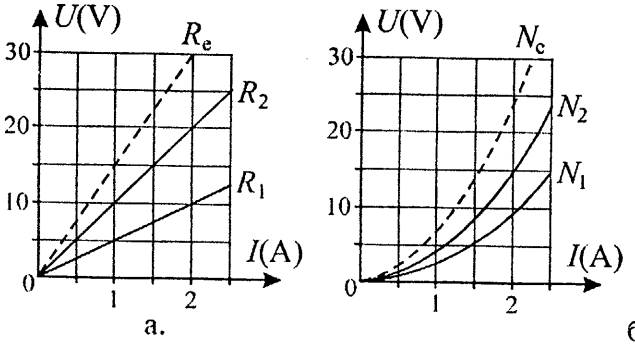


Слика 19.8.

Волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника се добија графичким путем. Поступак ће бити објашњен на примеру редне везе два линеарна отпорника (слика 19.8.а), отпорности $R_1 = 5\Omega$ и $R_2 = 10\Omega$, чије су волтамперске карактеристике задате на слици 19.9.а. За сваку вредност струје напон на еквивалентном отпорнику мора бити једнак збиру напона на отпорницима R_1 и R_2,

$$U = U_1 + U_2 .$$

Како је за цртање волтамперске карактеристике линеарног отпорника довољно узети две тачке, одредићемо напон на еквивалентном отпорнику за две вредности струје. При струји $I = 0$ напони на појединим отпорницима су једнаки нули, па је и напон на еквивалентном отпорнику $U = 0$. За струју $I = 1\,\text{A}$ са волтамперских карактеристика отпорника се очитава $U_1 = 5\,\text{V}$ и $U_2 = 10\,\text{V}$, тако да је напон на еквивалентном отпорнику $U = 15\,\text{V}$. Права провучена кроз тачке $(0,0)$ и $(1\,\text{A}, 15\,\text{V})$ претставља волтамперску карактеристику еквивалентног отпорника R_e.



I	U_1	U_2	U
0.5	0.85	1.39	2.24
1.0	2.54	4.12	6.66
1.5	5.32	8.53	13.85
2.0	9.17	14.68	23.85

Слика 19.9.

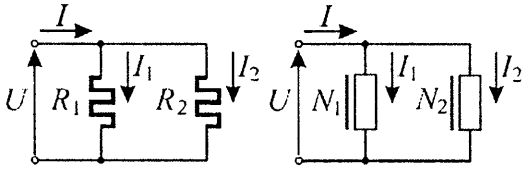
На идентичан начин се одређује волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника који замењује редну везу два нелинеарна отпорника (слика 19.8.б), а чије су волтамперске карактеристике задате на слици 19.9.б.

За већи број вредности струје са волтамперских карактеристика нелинеарних отпорника N_1 и N_2 одређују се одговарајуће вредности напона U_1 и U_2. Напон на еквивалентном нелинеарном отпорнику, N_e, једнак је збиру ова два напона,

$$U = U_1 + U_2 .$$

Овим поступком (приказан је и у таблици уз слику 19.9.б) одређује се низ парова вредности (I, U), односно низ тачака у $I-U$ координатном систему. Волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника добија се спајањем ових тачака. Јасно је да ће волтамперска карактеристика бити утолико тачније одређена уколико је број тачака већи.

И паралелна веза N нелинеарних отпорника, задатих волтамперских карактеристика, може се увек заменити једним, еквивалентним нелинеарним отпорником. Услов еквиваленције је исти као и у случају паралелне везе линеарних отпорника: при било ком напону струја кроз еквивалентни отпорник мора бити једнака збиру струја кроз отпорнике који учествују у вези,



а. б.

Слика 19.10.

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i .$$

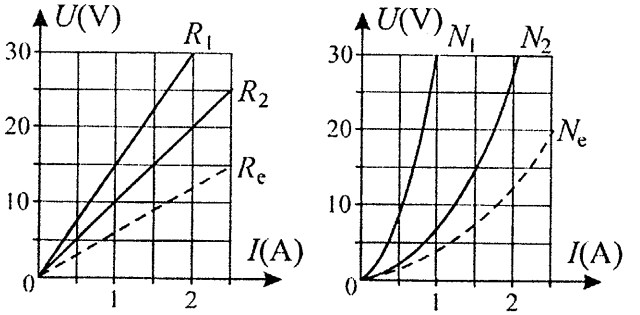
Одредићемо најпре, графичким путем, волтамперску карактеристику отпорника који је еквивалентан паралелној вези (слика 19.10.а) два линеарна отпорника, отпорности $R_1 = 15\Omega$ и $R_2 = 10\Omega$, а чије су волтамперске карактеристике задате на слици 19.11.а. За сваку вредност напона струја кроз еквивалентни отпорник, I, мора бити једнака збиру струја кроз отпорнике R_1 и R_2,

$$I = I_1 + I_2 .$$

Као и код редне везе, и овде је за цртање волтамперске карактеристике еквивалентног отпорника довољно узети две тачке. При напону $U = 0$ струје кроз оба отпорника су једнаке нули па је и струја кроз еквивалентни отпорник $I = 0$. При напону $U = 15\,\text{V}$ са волтамперских карактеристика отпорника одређујемо $I_1 = 1\,\text{A}$ и $I_2 = 1.5\,\text{A}$, тако да је струја кроз еквивалентни отпорник $I = 2.5\,\text{A}$. Права провучена кроз тачке

(0,0) и (2.5 A,15 V) представља волтамперску карактеристику еквивалентног отпорника R_e.

Поступак одређивања волтамперске карактеристике еквивалентног нелинеарног отпорника који замењује паралелну везу два нелинеарна отпорника (слика 19.10.б), чије су волтамперске карактеристике задате на слици 19.11.б, је идентичан.



а.

U	I_1	I_2	I
5	0.36	0.83	1.19
10	0.55	1.23	1.78
15	0.68	1.52	2.20
20	0.80	1.75	2.55

б.

Слика 19.11.

За већи број вредности напона са волтамперских карактеристика нелинеарних отпорника N_1 и N_2 одређују се одговарајуће вредности струја I_1 и I_2. Струја кроз еквивалентни нелинеарни отпорник, N_e, једнака је збиру ове две струје,

$$I = I_1 + I_2 .$$

Овим поступком (који је приказан и таблицом уз слику 19.11.б) одређује се низ парова вредности (I,U), односно низ тачака у $I-U$ координатном систему. Волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника добија се спајањем ових тачака.

У случају мешовите везе нелинеарних отпорника поступак је исти као и у случају мешовите везе линеарних отпорника. Врши се поступно упрошћавање везе заменом очигледних редних, односно паралелних веза еквивалентним нелинеарним отпорницима чије се волтамперске карактеристике добијају на описани начин.

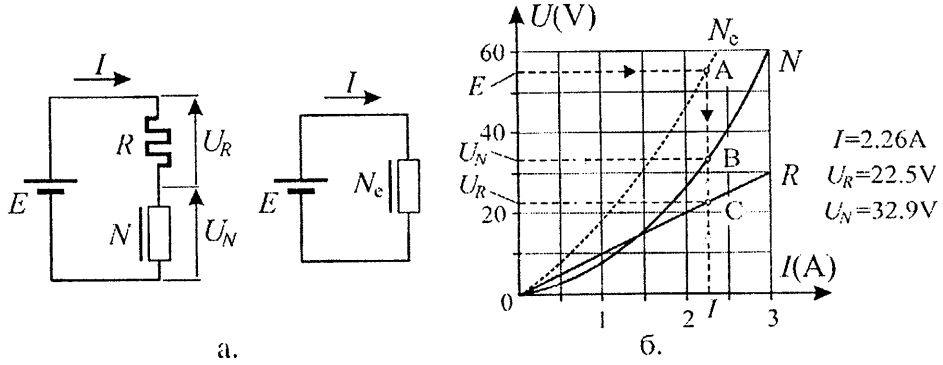
Мада је то очигледно, истакнимо да

уколико у било каквој вези отпорника учествује бар један нелинеарни отпорник, еквивалентна отпорност је нелинеарна.

19.5. Просто коло са нелинеарним отпорницима

Графички методи, који се обрађују у оквиру овог курса, могу се користити само за решавање простих кола са једним нелинеарним отпорником, односно везом нелинеарних отпорника која се може свести на један, еквивалентни. Редослед поступака приликом решавања кола са нелинеарним отпорницима је истоветан као и при решавању линеарних кола. Једина разлика је у томе што се овде, уместо одређених израчунавања, врши графичко сабирање волтамперских карактеристика и очитавање са њих.

Поступке решавања је најједноставније објаснити на конкретним примерима. Обрадимо најпре поступак директног решавања сабирањем волтамперских карактеристика.



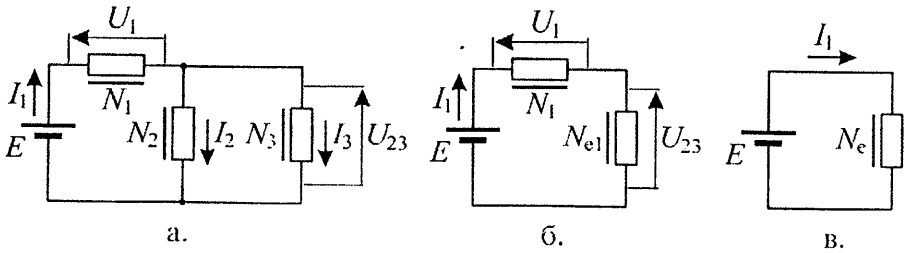
Слика 19.12.

Нека је нелинеарни отпорник, чија је волтамперска карактеристика задата на слици 19.12.б, прикључен преко отпорника отпорности $R = 10\Omega$ на идеалан напонски генератор електромоторне силе $E = 55\,\text{V}$ (слика 19.12.а). Потребно је одредити струју у колу и напоне на појединим отпорницима. Како се задатак решава графички потребно је нацртати и волтамперску карактеристику линеарног отпорника. Пошто је то права довољно је одредити две тачке кроз које она пролази, рецимо тачке $(0,0)$ и $(2\,\text{A}, 20\,\text{V})$.

Редна веза ова два отпорника (напоменимо да оба отпорника могу бити нелинеарна, што нема никаквог утицаја на поступак решавања) може се заменити једним, еквивалентним, нелинеарним отпорником чија се волтамперска карактеристика (нацртана испрекиданом линијом на слици 19.12.б) добија поступком који је описан у претходном поглављу. Напон на крајевима еквивалентног нелинеарног отпорника, N_e, једнак је прикљученој електромоторној сили, $E = 55\,\text{V}$, чиме је одређена њего-

ва радна тачка A и струја кроз њега, $I = 2.26\,\mathrm{A}$ (следити црне стрелице на графику). Струја I протиче кроз редну везу нелинеарног и линеарног отпорника и одређује њихове радне тачке B и C, респективно, а самим тим и вредности напона на њима, $U_R = 22.5\,\mathrm{V}$ и $U_N = 32.9\,\mathrm{V}$ (следити беле стрелице на графику). Разумљиво је да су резултати само приближно тачни због неминовних грешака које настају при сабирању карактеристика и очитавању резултата. Тачност се лако може проверити сабирањем напона на отпорницима ($U_R + U_N = 55.4\,\mathrm{V} \approx 55\,\mathrm{V} = E$).

Описани поступак се може применити на било какву мешовиту везу нелинеарних отпорника. Задату везу треба поступним упрошћавањем свести на један, еквивалентни, нелинеарни отпорник а затим се враћати уназад и одређивати тражене величине. Ово ће бити показано на примеру кола са слике 19.13.а, у коме су познати електромоторна сила и волтамперске карактеристике свих нелинеарних отпорника, и где треба одредити све струје и напоне.



Слика 19.13.

Све волтамперске карактеристике које су потребне за решавање задатка цртају се на једном дијаграму (слика 19.14), а редослед решавања је исти као и у случају кола са линеарним отпорницима:

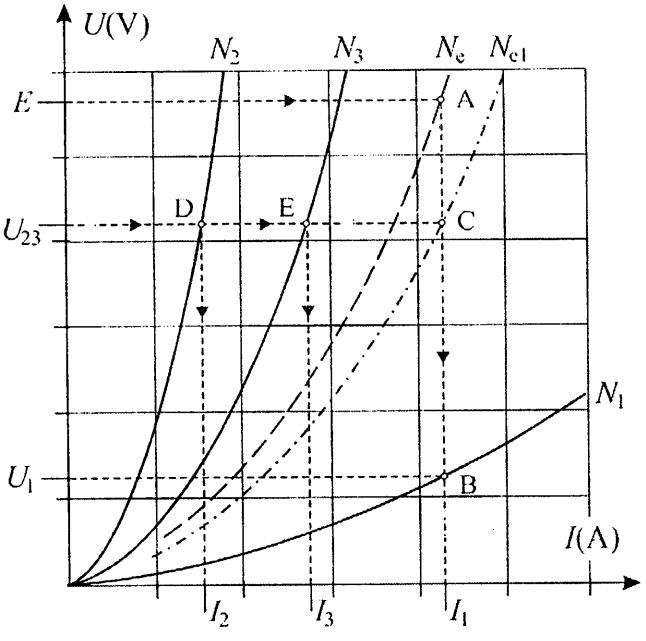
- Паралелна веза нелинеарних отпорника N_2 и N_3 замењује се еквивалентним нелинеарним отпорником N_{e1} (слика 19.13.б) чија је волтамперска карактеристика нацртана тачка-црта линијом на слици 19.14.

- Редна веза нелинеарних отпорника N_1 и N_{e1} замењује се еквивалентним нелинеарним отпорником N_e (слика 19.13.в) чија је волтамперска карактеристика нацртана испрекиданом линијом на слици 19.14.

- За задату вредност електромоторне силе E на карактеристици нелинеарног отпорника N_e одређује се његова радна тачка A и, за њу, очитава струја у колу I_1 (пратити црне стрелице на слици 19.14).

- Струја I_1 протиче кроз нелинеарне отпорнике N_1 и N_{e1} и на њиховим карактеристикама одређује радне тачке B и C, а самим тим и напоне на њима, U_1 и U_{23} (пратити беле стрелице на слици 19.14).

- Добијена вредност напона U_{23} ($U_{23} = U_2 = U_3$) одређује радне тачке D и E нелинеарних отпорника N_2 и N_3, а самим тим и струје кроз њих, I_2 и I_3 (пратити црне стрелице на слици 19.14).



Слика 19.14.

На крају треба проверити тачност решења тако што ће се проверити да ли су задовољени услови

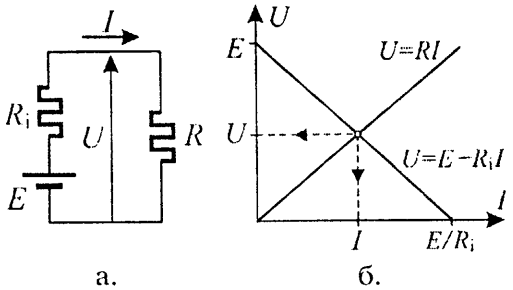
$$I_2 + I_3 \approx I_1$$

и

$$U_1 + U_{23} \approx E.$$

У случају када коло садржи редну везу само два отпорника, или се може свести на то, могуће је применити један други поступак решавања. Поступак је такође графички, али прецизнији, и најједноставније се може објаснити на примеру линеарног кола (слика 19.15.а).

Отпорник отпорности R прикључен је на генератор електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i, што се може посматрати и као редна веза два отпорника прикључена на идеалан напонски генератор. Потребно је одредити струју у колу и напон на отпорнику R, значи две непознате величине. Струја у колу одређена је Омовим законом за просто коло,



а. б.

Слика 15.

$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

тако да је напон на отпорнику

$$U = RI = R\frac{E}{R + R_i}.$$

Међутим, задатак се може решити и на други начин. Како имамо две непознате величине, U и I, потребно је поставити два услова, односно две једначине са две непознате. Прва једначина је једначина која

даје везу између напона на крајевима отпорника R и струје кроз њега, односно његова волтамперска карактеристика,

$$U = U(I) = RI.$$

Друга једначина је спољашња карактеристика генератора која даје везу између напона на крајевима генератора (што је уједно и напон на отпорнику R) и струје оптерећења генератора (што је уједно и струја у колу, односно струја кроз отпорник R),

$$U = E - R_i I.$$

Лако се може проверити да су решења овог система једначина управо она која смо добили директном применом Омовог закона.

Из математике је познато да се решење система од две једначине са две непознате,

$$y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y = f_2(x),$$

може добити графички тако што се нацртају графици задатих функција. У пресеку ових графика налази се пар вредности (x, y) који задовољава обе функције, односно решење система једначина.

Овај поступак применићемо и за решавање постављеног задатка (слика 9.15.б). Нацртаћемо графике једне (волтамперска карактеристика отпорника, $U = U(I) = RI$) и друге (спољашња карактеристика генератора, $U = E - R_i I$) функције. Њихов пресек одређује решење система једначина (пар вредности I – струја кроз отпорник, U – напон на отпорнику), односно радну тачку отпорника.

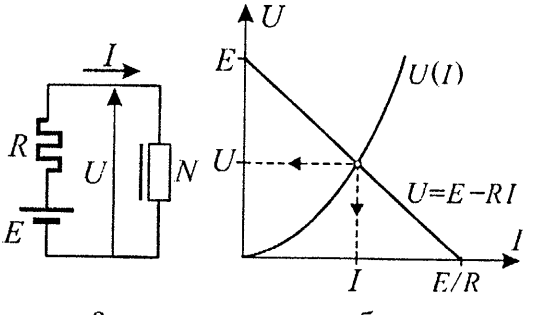
Истим поступком се може решити и коло са слике 19.16.а: редна веза линеарног отпорника отпорности R и нелинеарног отпорника задате волтамперске карактеристике, прикључена на идеалан напонски генератор електромоторне силе E.

Напон на нелинеарном отпорнику, с једне стране, мора да задовољи његову волтамперску карактеристику,

$$U = U(I),$$

док је, с друге стране, тај напон једнак електромоторној сили E умањеној за напон на отпорнику R,

$$U = E - RI$$



а. б.

Слика 19.16.

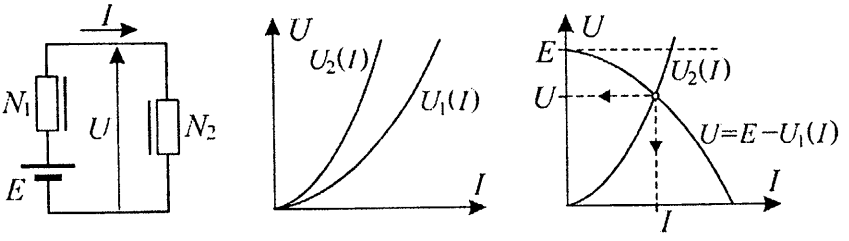
(што би претстављало спољашњу карактеристику генератора електромоторне силе E и унутрашње отпорности R). Овај систем једначина ћемо решити графички (слика 19.16.б). График функције $U = U(I)$ је већ задат као волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника. Потребно је нацртати праву $U = E - RI$ (често се назива још и ***радна права***). За цртање праве довољно је одредити две тачке, а најпогодније је да то буду тачке $(0, E)$ и $(E/R, 0)$. У пресеку ова два графика налази се радна тачка нелинеарног отпорника која одређује напон на њему и струју кроз њега.

И у случају редне везе два нелинеарна отпорника прикључена на идеалан напонски генератор (слика 19.17.а) могуће је применити исти поступак. Нека је позната електромоторна сила идеалног напонског генератора, E, и нека су задате волтамперске карактеристике нелинеарних отпорника N_1 и N_2 (слика 19.17.б). Непознате су две величине: струја у колу, I, и напон на нелинеарном отпорнику N_2, U (наравно, непознат је и напон на нелинеарном отпорнику N_1 али, уколико се одреди напон U, тај напон се лако може израчунати као разлика електромоторне силе E и напона U). За одређивање две непознате величине потребно је поставити два услова, односно две једначине са две непознате. Као и у претходним примерима, напон на нелинеарном отпорнику N_2 мора да задовољи његову волтамперску карактеристику,

$$U = U_2(I).$$

С друге стране овај напон мора бити једнак електромоторној сили генератора умањеној за напон на нелинеарном отпорнику N_1,

$$U = E - U_1(I).$$



а. б. в.

Слика 19.17.

График функције $U_2(I)$ је већ задат (волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника N_2), док се график друге функције лако црта тако што се за већи број различитих вредности струје од електромоторне силе одузме напон на нелинеарном отпорнику N_1. Пресек ова

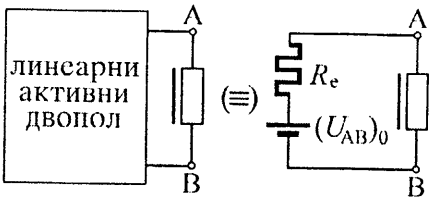
два графика (слика 19.16.в) одређује радну тачку нелинеарног отпорника N_2, а тиме и напон на њему, U, и струју у колу, I.

Напоменимо да се редна веза идеалног напонског генератора електромоторне силе E и нелинеарног отпорника познате волтамперске карактеристике $U = U(I)$ може сматрати реалним нелинеарним генератором чија је спољашња карактеристика дата једначином

$$U = E - U(I).$$

19.6. Сложено електрично коло са једним нелинеарним отпорником

Имајући у виду Тевененову теорему, очигледно је да се графичке методе могу применити и на решавање сложених електричних кола која само у једној грани садрже нелинеарни отпорник, или мешовиту везу нелинеарних отпорника која се може свести на један, еквивалентни, нелинеарни отпорник. У таквим колима се остатак кола (линеарни активни двопол) у односу на грану са нелинеарним отпорником замењује еквивалентним Тевененовим генератором (слика 19.18). На тај начин се добија просто коло које се решава већ описаним поступцима. Након одређивања струје кроз нелинеарни отпорник, I_N, и напона на њему, U_N, треба се вратити на задато (првобитно) коло. Са познатим вредностима I_N и U_N могуће је одредити све остале струје и напоне у колу применом компензационе теореме или коришћењем првог Кирхофовог закона и Омовог закона за грану сложеног кола.



Слика 19.18.

19.7. Питања за проверу

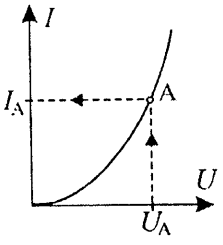
19.7.1. Објаснити разлику између линеарних и нелинеарних отпорника, као и разлику између линеарних и нелинеарних електричних кола.

19.7.2. На које начине се може задати линеарни, а на које начине нелинеарни отпорник?

19.7.3. Шта је то волтамперска карактеристика отпорника?

19.7.4. Шта је то радна тачка нелинеарног отпорника и како се она одређује?

19.7.5. Да ли појам радне тачке има смисла и код линеарних отпорника?



Слика 19.19.

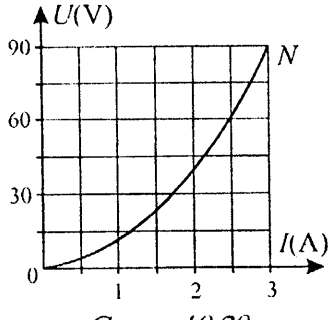
19.7.6. Како се дефинише статичка, а како динамичка отпорност нелинеарног отпорника?

19.7.7. За нелинеарни отпорник, чија је волтамперска карактеристика приказана на слици 19.19. одредити да ли је у радној тачки A већа статичка или динамичка отпорност.

19.7.8. Објаснити поступак линеаризације нелинеарног отпорника у блиској околини радне тачке напонским генератором.

19.7.9. Објаснити поступак линеаризације нелинеарног отпорника у блиској околини радне тачке струјним генератором.

19.7.10. Линеаризовати, у блиској околини радне тачке A, напонским и струјним генератором нелинеарни отпорник чија је волтамперска карактеристика приказана на сици 19.19.



Слика 19.20.

19.7.11. Одредити волтамперску карактеристику еквивалентног нелинеарног отпорника који замењује редну везу отпорника отпорности $R = 10\Omega$ и нелинеарног отпорника чија је волтамперска карактеристика приказана на слици 19.20.

19.7.12. Одредити волтамперску карактеристику еквивалентног нелинеарног отпорника који замењује паралелну везу отпорника отпорности $R = 60\Omega$ и нелинеарног отпорника чија је волтамперска карактеристика приказана на слици 19.20.

19.7.13. Линеарни отпорник отпорности $R_1 = 10\Omega$ и нелинеарни отпорник чија је волтамперска карактеристика приказана на слици 19.20. везани су на ред. Паралелно овој редној вези везан је линеарни отпорник отпорности $R_2 = 90\Omega$. Одредити волтамперску карактеристику еквивалентног нелинеарног отпорника.

19.7.14. Уколико је веза из Питања 19.7.13. прикључена на идеалан напонски генератор електромоторне силе $E = 60\,V$ одредити све струје и напоне на свим отпорницима.

19.7.15. Објаснити начин решавања нелинеарних електричних кола помоћу радне праве (спољашње карактеристике генератора).

19.7.16. Објаснити како се у случају редне везе два нелинеарна отпорника, прикључене на идеални напонски генератор, може одредити струја у колу помоћу спољашње карактеристике генератора.

19.7.17. Објаснити како се може претставити реални нелинеарни генератор.

20. Оптерећивање и растерећивање кондензатора преко отпорника; кола са кондензаторима

У Електростатици је кондензатор обрађен као систем од два проводна тела (или две групе међусобно повезаних проводних тела) оптерећена једнаким количинама електрицитета супротног знака. Када се кондензатор оптерети количином електрицитета Q напон између његових електрода је U, док је енергија његовог електростатичког поља W. Самом процесу оптерећивања нисмо посветили већу пажњу. Напоменули смо само да се кондензатор прикључује на генератор који пребацује наелектрисања са једне електроде кондензатора на другу све до успостављања стационарног стања, односно све док се напон између електрода кондензатора не изједначи са напоном на крајевима генератора. Да би се кондензатор растеретио формира се проводни пут између његових електрода, што доводи до неутрализације наелектрисања на њима.

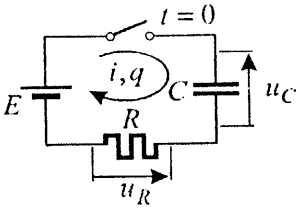
Процес оптерећивања и растерећивања кондензатора (уобичајени термини су и термини пуњење и пражњење кондензатора) ***не може бити тренутан***, што се лако може објаснити. Наиме, енергија неоптерећеног кондензатора је једнака нули, док енергија оптерећеног кондензатора има коначну вредност. Уколико би се кондензатор оптеретио тренутно дошло би до коначне промене енергије за бесконачно кратко време. То значи да би снага којом се врши трансформација других видова рада и енергије у енергију електростатичког поља кондензатора била бесконачно велика, што је физички немогуће. Исто разматрање се може применити и код растерећивања кондензатора: енергија електростатичког поља кондензатора се не може тренутно трансформисати у друге видове рада и енергије.

Значи, процес оптерећивања и растерећивања кондензтора није тренутан већ траје одређено време, теоретски бесконачно дуго. Стање кондензатора у коме нема промене количине електрицитета на његовим електродама назива се ***стационарним стањем. Процес током кога се врши оптерећивање, односно растерећивање кондензатора (процес између два стационарна стања) назива се прелазним стањем или прелазним режимом.***

20.1. Оптерећивање кондензатора преко отпорника

20.1.1. Оптерећивање неоптерећеног кондензатора

Нека се неоптерећени кондензатор, капацитивности C, затварањем прекидача у тренутку $t = 0$ прикључује, преко отпорника отпорности R, на идеалан напонски генератор електромоторне силе E (слика 20.1). У том тренутку кроз коло почиње да протиче струја i (све величине које се мењају у времену, оносно за које претпостављамо да се мењају у времену, означаваћемо малим словима). Како је електрична струја усмерено кретање наелектрисања, то значи да ће кроз коло протицати количина електрицитета којом ће се оптерећивати кондензатор. До произвољног тренутка t кроз коло ће протећи укупна количина електрицитета q, тако да ће оптерећење кондензатора у том тренутку бити такође q.



Слика 20.1.

Пошто *за било коју затворену контуру у сваком тренутку важи II Кирхофов закон*, то за коло са слике мора бити задовољен услов

$$u_R + u_C = E\,.$$

Како је, по дефиницији, јачина електричне струје $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, напон на отпорнику је

$$u_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

док је, као што је познато из Електростатике, напон на кондензатору

$$u_C = \frac{q}{C}.$$

Уношењем вредности за напоне на отпорнику и кондензатору у једначину која је постављена по II Кирхофовом закону,

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E\,,$$

након сређивања добија се

$$\frac{\mathrm{d}q}{EC - q} = \frac{\mathrm{d}t}{RC}.$$

Величина RC има димензију времена,

$$RC(=)\frac{U}{I}\cdot\frac{Q}{U}(=)\frac{Q}{I}(=)t\,,$$

и назива се *временска константа*,

$$\tau = RC\,,$$

па се последња једначина може писати у облику

$$\frac{\mathrm{d}q}{EC-q}=\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\,.$$

Добијена једначина је линеарна хомогена диференцијална једначина која раздваја променљиве и која се веома једноставно решава интеграцијом обе стране,

$$\int\frac{\mathrm{d}q}{EC-q}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\,,$$

што даје*

$$-\ln(EC-q)=\frac{t}{\tau}+\mathrm{A}\,,$$

односно

$$\ln(EC-q)=-\frac{t}{\tau}+\mathrm{A}\,,$$

где је A константа интеграције коју треба одредити и која се, до одређивања, може писати у било ком облику. Када се обема странама последње једначине степенује основа природног логаритма,

$$\mathrm{e}^{\ln(EC-q)}=\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

добија се

$$EC-q=\mathrm{A}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

одакле следи

$$q=EC-\mathrm{A}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Константа интеграције одређује се из почетног услова, протекле количине електрицитета кроз коло у тренутку $t=0$. Како је време протицања струје кроз коло једнако нули, то је и протекла количина електрицитета једнака нули

$$0=EC-\mathrm{A}\mathrm{e}^{0}=EC-\mathrm{A}\,,$$

---

* *Код прелазних режима се увек појављује интеграл истог облика,*

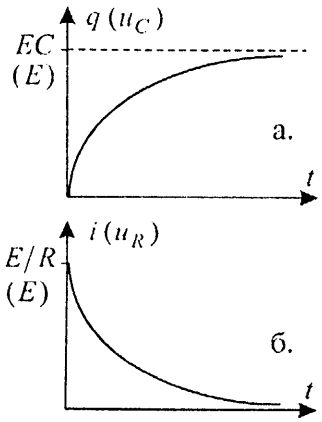
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{A}+\mathrm{B}x}=\frac{1}{\mathrm{B}}\ln(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)+\mathrm{C}\,.$$

на је $\Lambda = EC$. Коначно се за протеклу количину електрицитета кроз коло (уједно и оптерећење кондензатора) у функцији времена добија

$$q = EC(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

Значи, оптерећење кондензатора расте, по закону експоненцијалног облика, од вредности 0 (у тренутку затварања прекидача, $t = 0$) па до вредности $Q = EC$ (када $t \to \infty$) коју има у стационарном стању. Дијаграм $q(t)$ приказан је на слици 20.2.а.

Теоретски, прелазни режим траје бесконачно дуго али се, практично, завршава за неколико временских константи. Тако за $t = 5\tau$ оптерећење кондензатора достиже 99.3% своје стационарне вредности, а за $t = 7\tau$ чак 99.9%.



Слика 20.2.

Напон на кондензатору такође расте по експоненцијалном закону,

$$u_C = \frac{q}{C} = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}),$$

од нуле у тренутку затварања прекидача, па до вредности $u_C = E$ у стационарном режиму. Дијаграм $u_C(t)$ је идентичног облика као и дијаграм $q(t)$ (слика 20.2.а).

Напон на отпорнику је најједноставније одредити као

$$u_R = E - u_C = E\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

У тренутку затварања прекидача напон на отпорнику је максималан, јер једини одржава равнотежу електромоторној сили. Са порастом напона на кондензатору овај напон опада, да би постао једнак нули у стационарном стању. Дијаграм $u_R(t)$ приказан је на слици 20.2.б.

Струја у колу такође експоненцијално опада,

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

од максималне вредности E/R, у тренутку затварања прекидача, до нуле, када је успостављено стационарно стање. Дијаграм $i(t)$ је истог облика као и дијаграм $u_R(t)$ (слика 20.2.б).

Струју у колу је било могуће одредити и као

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(EC\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(EC\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

а одатле и напон на отпорнику,

$$u_R = Ri = Ee^{-t/\tau}.$$

Ако се у изразу за струју замени $t = \tau$, добија се

$$i = \frac{E}{R}e^{-1} = \frac{1}{e}\frac{E}{R},$$

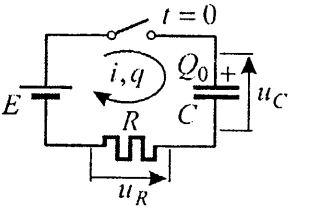
на основу чега се може рећи да је временска константа време за које струја у колу опадне на $1/e$ своје максималне вредности.

20.1.2. Оптерећивање кондензатора са почетном енергијом

Када је кондензатор оптерећен неком количином електрицитета, он поседује одређену енергију електростатичког поља. Ако се тако оптерећени кондензатор прикључи на генератор (чија је електромоторна сила различита од напона између електрода кондензатора) доћи ће до његовог додатног оптерећивања, или растерећивања, све док се напон између његових електрода не изједначи са електромоторном силом генератора. У анализи прелазног режима у колу које садржи већ оптерећени кондензатор, такав кондензатор се назива кондензатором са почетном енергијом.

Нека је, пре затварања прекидача, кондензатор (слика 20.3) оптерећен количином електрицитета Q_0 задате оријентације, и нека се у тренутку $t = 0$ затвара прекидач. Уколико је напон на кондензатору у тренутку затварања прекидача,

$$U_0 = Q_0/C,$$



Слика 20.3.

мањи од електромоторне силе E кондензатор ће се додатно оптеретити. Кроз коло ће почети да протиче струја прелазног режима i, смера као на слици, све до успостављања равнотежног (стационарног) стања. Уколико је, пак, почетни напон на кондензатору већи од електромоторне силе, доћи ће до растерећивања кондензатора.

Обрадимо случај додатног оптрећивања кондензатора. Једначина, која се поставља по II Кирхофовом закону за одређивање струје прелазног режима у датом колу, идентична је са једначином која је постављена у претходном поглављу. Једина разлика је у изразу за напон на кондензатору,

$$u_C = \frac{Q_0 + q}{C},$$

јер је укупно оптерећење кондензатора у било ком тренутку збир почетног оптерећења (оптерећење у тренутку затварања прекидача) и количине електрицитета која је до тог тренутка протекла кроз коло. Након уношења овог израза за u_C у основну једначину, као и њеног сређивања, добија се диференцијална једначина

$$\frac{\mathrm{d}q}{EC - Q_0 - q} = \frac{\mathrm{d}t}{\tau},$$

где је $\tau = RC$ временска константа.

Поступак решавања ове диференцијалне једначине је већ раније обрађен, тако да је њено решење

$$q = EC - Q_0 - \mathrm{A}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Константа интеграције одређује се из почетног услова, протекле количине електрицитета кроз коло у тренутку $t = 0$ ($q = 0$)

$$0 = EC - Q_0 - \mathrm{A}\mathrm{e}^{0} = EC - Q_0 - \mathrm{A},$$

одакле следи

$$A = EC - Q_0$$

па се за протеклу количину електрицитета кроз коло у функцији времена добија

$$q = (EC - Q_0)(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

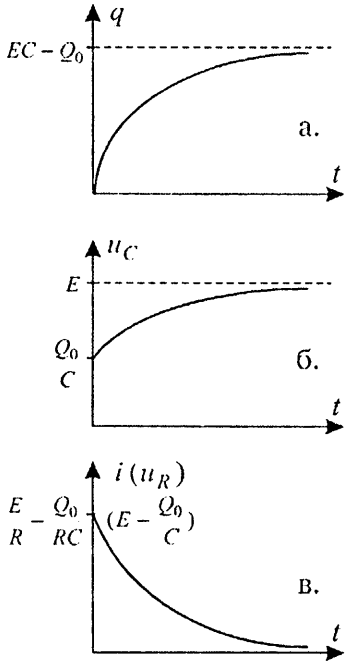
Из израза за протеклу количину електрицитета лако се добијају изрази за напоне на отпорнику и кондензатору и струју у колу:

$$u_C = \frac{Q_0 + q}{C} = \frac{Q_0}{C}\mathrm{e}^{-t/\tau} + E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right),$$

$$u_R = E - u_C = \left(E - \frac{Q_0}{C}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

и

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{1}{R}\left(E - \frac{Q_0}{C}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

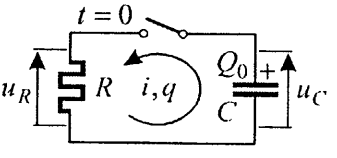


Слика 20.4.

Дијаграми $q(t)$ и $u_C(t)$ приказани су на слици 20.4.а. и 20.4.б, респективно, док су дијаграми $i(t)$ и $u_R(t)$ исти по облику и приказани на слици 20.4.в.

20.2. Растерећивање кондензатора преко отпорника

Анализа растерећивања кондензатора преко отпорника врши се на истоветан начин као и претходне анализе. Нека је кондензатор оптерећен количином електрицитета Q_0 и нека се у тренутку $t = 0$, затварањем прекидача, између његових електрода прикључује отпорник отпорности R (слика 20.5). Кондензатор ће почети да се растерећује (празни) па ће кроз коло почети да протиче струја i, а самим тим и количина електрицитета q. У сваком тренутку t у овом колу мора бити задовољен II Кирхофов закон, односно напон на отпорнику мора бити једнак напону на кондензатору, $u_R = u_C$.



Слика 20.5.

Напон на отпорнику је, као и раније,

$$u_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

док је напон на кондензатору

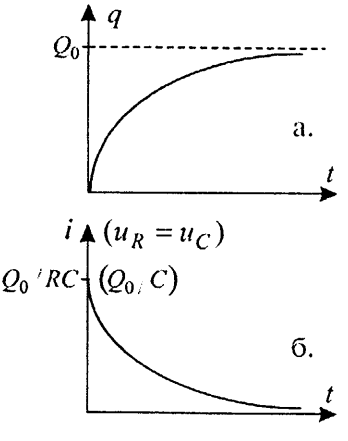
$$u_C = \frac{Q_0 - q}{C},$$

јер је до тренутка t са кондензатора отекла количина електрицитета q. Према томе, може се писати

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_0 - q}{C},$$

што, након сређивања, даје диференцијалну једначину познатог облика

$$\frac{\mathrm{d}q}{Q_0 - q} = \frac{\mathrm{d}t}{\tau},$$



Слика 20.6.

где је $\tau = RC$ временска константа.

Интеграцијом ове диференцијалне једначине добија се

$$q = Q_0 - \mathrm{A}e^{-t/\tau}.$$

Константа интеграције се и овде одређује из почетног услова, протекле количине електрицитета q кроз коло у тренутку $t = 0$ ($q = 0$),

$$0 = Q_0 - \mathrm{A}\,e^0 = Q_0 - \mathrm{A},$$

одакле следи $\mathrm{A} = Q_0$, тако да се коначно добија

$$q = Q_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$$

Очигледно је да до успостављања стационарног стања ($t \to \infty$) кроз коло протекне количина електрицитета Q_0, односно кондензатор се у потпуности растерети (испразни). Дијаграм $q(t)$ приказан је на слици 20.6.а.

Напони на отпорнику и кондензатору су једнаки и одређују се као

$$u_R = u_C = \frac{Q_0 - q}{C} = \frac{Q_0}{C}\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

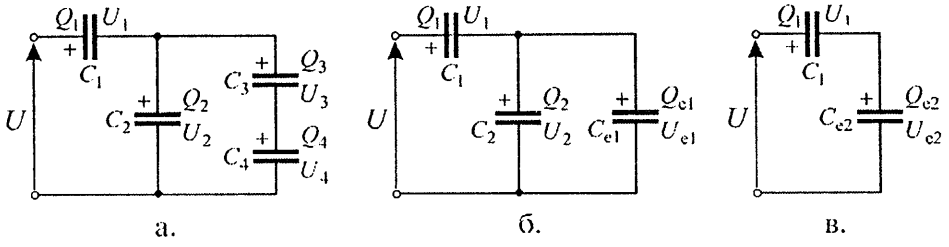
док је струја у колу

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{u_R}{R} = \frac{Q_0}{RC}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Дијаграми $i(t)$ и $u_R(t) = u_C(t)$ приказани су на слици 20.6.б.

20.3. Кола са кондензаторима

Када је произвољна веза кондензатора прикључена на напон U, оптерећења појединих кондензатора у стационарном стању се релативно једноставно могу одредити користећи се поступним упрошћавањем шеме (као код одређивања еквивалентне капацитивности), а затим поступним враћањем на почетну шему. При томе треба водити рачуна о томе да је оптерећење редно везаних кондензатора исто, као и да је напон на паралелној вези кондензатора исти. Ово је најлакше разумети на конкретном примеру мешовите везе кондензатора са слике 20.7.а.



Слика 20.7.

Постуним упрошћавањем ова веза се може, преко везе на слици 20.7.б, свести на једноставну везу са слике 20.7.в. При томе су поједине еквивалентне капацитивности

$$C_{e1} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \qquad \text{и} \qquad C_{e2} = C_{e1} + C_2.$$

Кондензатори C_1 и C_{e2} су везани на ред и прикључени на напон U, тако да је њихово оптерећење

$$Q_1 = Q_{e2} = C_e U = \frac{C_1 C_{e2}}{C_1 + C_{e2}} U ,$$

док су напони на њима

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \qquad \text{и} \qquad U_{e2} = \frac{Q_{e2}}{C_{e2}} .$$

Вратимо се сада на коло са слике 20.7.б. Напон на паралелној вези кондензатора C_2 и C_{e1} је, очигледно, напон на кондензатору C_{e2} којим смо заменили паралелну везу ова два кондензатора,

$$U_2 = U_{e1} = U_{e2} ,$$

тако да су оптерећења кондензатора C_2 и C_{e1}

$$Q_2 = U_2 C_2 \qquad \text{и} \qquad Q_{e1} = U_{e1} C_{e1} .$$

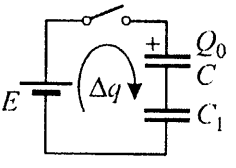
Коначно, из основне шеме је јасно да су оптерећења кондензатора C_3 и C_4 једнака и једнака оптерећењу кондензатора C_{e1} којим је замењена ова редна веза,

$$Q_3 = Q_4 = Q_{e1}$$

тако да су напони на њима

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} \qquad \text{и} \qquad U_4 = \frac{Q_4}{C_4} .$$

Међутим, уколико су неки од кондензатора у вези (или сви) већ оптерећени одређеним количинама електрицитета пре прикључивања на напон, или се на неки начин мења конфигурација кола (затварањем неког прекидача, пребацивањем преклопника из једног положаја у други и слично), описани приступ у неким случајевима не може довести до резултата. То најбоље илуструје пример са слике 20.8.



Слика 20.8.

Кондензатор капацитивности C, оптерећен количином електрицитета Q_0, затварањем прекидача прикључује се на идеални напонски генератор електромоторне силе E преко неоптерећеног кондензатора капацитивности C_1. Уколико је напон на кондензатору C, Q_0/C, различит од E, а како је напон на кондензатору C_1 једнак нули, кроз коло мора протећи нека количина електрицитета Δq (која ће про-

менити оптерећење оба кондензатора) како би се успоставила напонска равнотежа,

$$E = u_C + u_{C1}.$$

У случају да је Q_0/C мање од E кроз коло ће, до успостављања стационарног стања, протећи количина електрицитета Δq, смера као на слици (ако је Q_0/C веће од E протекла количина електрицитета ће бити супротног смера), тако да ће у стационарном стању оптерећења кондензатора бити

$$Q = Q_0 + \Delta q \qquad \text{и} \qquad Q_1 = \Delta q.$$

Очигледно је да оптерећења ова два кондензатора нису иста, тако да их не можемо сматрати редно везаним кондензаторима и заменити једним еквивалентним, односно применити раније описани поступак.

У таквим случајевима се за решавање кола са кондензаторима, односно за одређивање оптерећења појединих кондензатора, може применити једна модификација Кирхофових закона.

Коло са кондензаторима, као и свако друго електрично коло, може имати одређени број грана и чворова. Нека су у једном (првом) стационарном стању позната оптерећења свих кондензатора, односно напони на њима (оптерећења и напони у првом стационарном стању биће означени индексом 0), и нека се у тренутку $t = 0$ на било који начин промени конфигурација кола. Да би се успоставило ново стационарно стање кроз поједине гране кола протицаће струје прелазног режима

$$i_j,\ j = 1, 2, \ldots, N,$$

где је N број грана у колу. За сваки од чворова кола мора бити задовољен I Кирхофов закон,

$$\Sigma i_k = 0.$$

Интеграцијом ове једначине по времену у границама од 0 до ∞ (до успостављања новог стационарног стања)

$$\int_0^\infty \Sigma i_k \, \mathrm{d}t = \Sigma \int_0^\infty i_k \, \mathrm{d}t,$$

а водећи рачуна о томе да је

$$\int_0^\infty i_k \, \mathrm{d}t = \Delta q_k$$

количина електрицитета која протекне кроз $k-$ту грану у току прелазног режима (између два стационарна стања), може се писати

$$\boxed{\Sigma \Delta q_k = 0\,.}$$

Значи, алгебарски збир количина електрицитета, које између два стационарна стања протекну кроз гране кола, у сваком чвору мора бити једнак нули. Ово се може формулисати и као:

збир количина електрицитета које између два стационарна стања утекну у један чвор једнак је збиру количина електрицитета које из тог чвора истекну.

Поред тога, за сваку затворену контуру у оба стационарна стања мора бити задовољен II Кирхофов закон,

$$\boxed{\Sigma U = \Sigma E\,.}$$

Напони на појединим кондензаторима у другом стационарном стању одређују се као

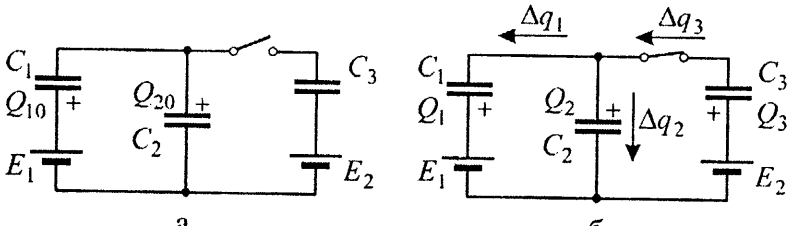
$$U_k = \frac{Q_k}{C_k} = \frac{Q_{k0} \pm \Delta q_k}{C_k}\,,$$

при чему треба водити рачуна о оријентацији наелектрисања.

Покажимо ово на примеру кола са слике 20.9. Када је прекидач отворен (слика 20.9.а) успостављено је стационарно стање. Оптерећења појединих кондензатора се лако одређују и износе

$$Q_{10} = Q_{20} = C_e E_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E_1 \qquad \text{и} \qquad Q_{30} = 0\,,$$

а њихове оријентације приказане су на слици.



а. б.

Слика 20.9.

Након затварања прекидача успоставиће се друго стационарно стање. Између два стационарна стања кроз поједине гране кола протећи ће количине електрицитета Δq чији се референтни смерови могу произвољно одабрати (слика 20.9.б). За одређивање три непознате протекле количине електрицитета потребно је поставити систем од три једначине са три непознате: једну по I,

$$\Delta q_1 + \Delta q_2 = \Delta q_3$$

и две по II Кирхофовом закону,

$$U_1 + U_2 = E_1$$

$$U_2 + U_3 = E_2 .$$

Уношењем вредности за напоне на појединим кондензаторима,

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_{10} - \Delta q_1}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_{20} + \Delta q_2}{C_2} \quad \text{и} \quad U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{\Delta q_3}{C_3},$$

у једначине постављене по II Кирхофовом закону добија се систем једначина по непознатим протеклим количинама електрицитета. По израчунавању протеклих количина електрицитета лако се одређују све величине у другом стационарном стању.

20.4. Питања за проверу

20.4.1. Због чега се кондензатор не може тренутно оптеретити и растеретити?

20.4.2. Извести израз за протеклу количину електрицитета у функцији времена при оптерећивању кондензатора преко отпорника.

20.4.3. Одредити напоне на отпорнику и кондензатору, као и струју у колу при оптерећивању кондензатора преко отпорника.

20.4.4. Извести израз за протеклу количину електрицитета у функцији времена при растерећивању кондензатора преко отпорника.

20.4.5. Одредити напоне на отпорнику и кондензатору, као и струју у колу при растерећивању кондензатора преко отпорника.

20.4.6. Колико дуго (теоријски) траје прелазни режим?

20.4.7. Када се, практично, може сматрати да је прелазни режим завршен?

20.4.8. Објаснити начине решавања кола са кондензаторима.

Одговори на питања

Поглавље 1.

1.6.20. $q' \approx 1.59\,\text{nC/m}$ 1.6.21. $Q = q_0' l/2$ 1.6.22. $Q \approx 25.13\,\text{nC}$

1.6.23. $\rho \approx 298\,\text{nC/m}^3$, $Q_a = 1.25\,\text{nC}$, $Q_c = 10\,\text{nC}$ 1.6.24. $Q \approx 176\,\text{pC}$

Поглавље 2.

2.7.5. $F = 0.6\,\text{pN}$, привлачна 2.7.6. $F = 0.3\,\text{pN}$ 2.7.15. $E = 0.9\,\text{V/m}$

2.7.16. $E = 0.36\,\text{V/m}$ 2.7.17. $E = 20\,\text{V/m}$ 2.7.18. $\varepsilon_r = 5$

2.7.19. $F = 1\,\text{nN}$ 2.7.20. $F = 1\,\text{nN}$

Поглавље 3.

3.8.9. $A = -0.3\,\text{nJ}$, рад се врши противу сила поља 3.8.11. $\varphi = -0.18\,\text{V}$

3.8.12. $\varphi = -0.09\,\text{V}$ 3.8.13. $\varphi_a = -24\,\text{mV}$, $\varphi_b = 18\,\text{mV}$

3.8.15. $\varphi_{cent} \approx 4.68\,\text{V}$, $\varphi_{str} \approx 4.64\,\text{V}$, $U \approx 40\,\text{mV}$ 3.8.16. $U \approx 20\,\text{mV}$

Поглавље 7.

7.5.7. $C_e = (C_3 \| C_4 \oplus C_2 \oplus C_5) \| C_1 = 2\,\text{nF}$

7.5.8. $C_e = ((C_2 \oplus C_3) \| C_4 \oplus C_5) \| C_1 = 50\,\text{pF}$

Поглавље 11.

11.9.40. $I = 10.88\,\text{A}$ 11.9.45. $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

11.9.46. $I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$

Поглавље 14.

14.7.11. $R_c = (R_6 \oplus R_7) \| R_5 \| (R_3 \oplus R_4) \| R_2 \oplus R_1 = 5\,\text{k}\Omega$ 14.7.12. $R_c = R_1$

Поглавље 15.

15.6.33. $I = \dfrac{E_2 + E_3 - E_1}{R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_1 + R_2}$ 15.6.34. $I = \dfrac{E_1 + E_4 - E_2 - E_3}{R_{i1} + R_{i2} + R_1 + R_2 + R_3}$

Поглавље 16.

16.5.14. $U_{AB} = RI + E_1 - E_2$ 16.5.15. $U_{FG} = -RI + E_1 + E_2$

16.5.17. $I = (U_{CD} + E)/(R_1 + R_2)$ 16.5.18. $I = (\varphi_B - \varphi_A + E_2 - E_1)/R$

16.5.20. $U_{AB} = R_1 I_1 - R_2 I_2 - E_1 + E_2$

16.5.21. $U_{AC} = -R_1 I_1 + E_1$, $U_{BD} = -R_2 I_2 + R_3 I_3 - E_2 + E_3 - E_4$

$U_{BD} = -R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + E_1 - E_2 + E_3 - E_4$

16.5.24. $R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_2 I_2 = -E_1 + E_3 + E_2$

16.5.24. $R_1 I_1 - R_4 I_4 - R_3 I_3 + R_2 I_2 = E_1 + E_4 + E_3 - E_2$

Поглавље 17.

17.5.29. За контуре и чворове изабране као на слици.

- метод контурних струја

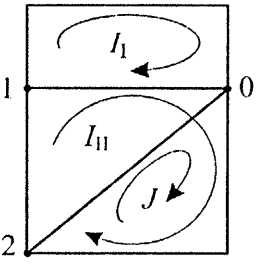
$$I_1(R_3 + R_4) - I_{II} R_4 = E_3$$

$$-I_1 R_4 + I_{II}(R_1 + R_2 + R_4) = E_1 - E_2 - JR_2$$

- метод потенцијала чворова

$$U_{10}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}\right) - U_{20}\frac{1}{R_1} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3}$$

$$-U_{10}\frac{1}{R_1} + U_{20}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}$$



17.5.30. Четири 17.5.31. Пет 17.5.32. Једну 17.5.33. Четири

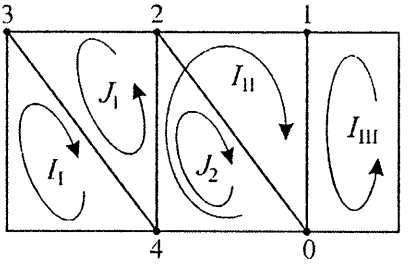
17.5.34. За контуре и чворове изабране као на слици.

- метод контурних струја

$$I_1(R_1 + R_6) + J_1 R_6 = E_1$$

$$I_{II}(R_2 + R_3 + R_4) + I_{III} R_4 =$$
$$= E_2 + E_3 + E_4 - J_1 R_3 - J_2 R_3$$

$$I_{II} R_4 + I_{III}(R_4 + R_5) = E_4$$



- метод потенцијала чворова

$$U_{10}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-U_{20}\frac{1}{R_2}=-\frac{E_4}{R_4}$$

$$-U_{10}\frac{1}{R_2}+U_{20}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=\frac{E_2}{R_2}-J_1-J_2+E_2\frac{1}{R_3}$$

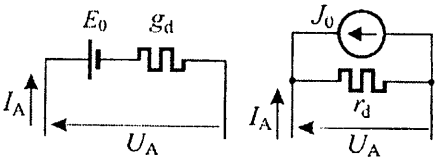
$$U_{30}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}\right)=\frac{E_1}{R_1}+J_1+E_2\frac{1}{R_6}$$

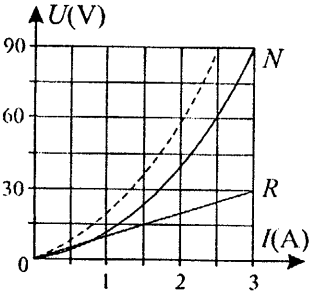
Поглавље 18.

18.6.12. $(U_{AB})_0=10\,\text{V}$, $R_e=10\Omega$ 18.6.13. $I_{ks}=1\,\text{A}$, $R_e=10\Omega$

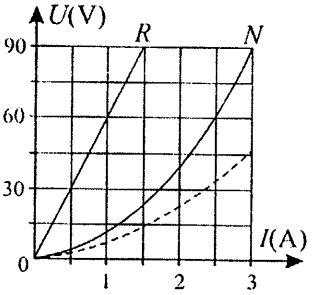
Поглавље 19.

19.7.7. $R_s>r_d$ 19.7.10.

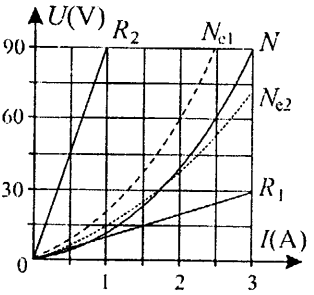




19.7.11.



19.7.12.



19.7.13.

19.7.14. $I_N=2\,\text{A}$, $I_{R2}=(2/3)\text{A}$, $I_E=(2/3)\text{A}$, $U_N=40\,\text{V}$, $U_{R1}=20\,\text{V}$