STRUKTURE PODATAKA
LETNJI SEMESTAR

STABLA BINARNOG TRAŽENJA
SORTIRANA/UREĐENA BINARNA STABLA

Prof. Dr Leonid Stoimenov

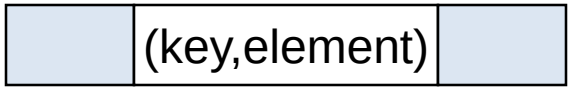
Katedra za računarstvo
Elektronski fakultet u Nišu

Stabla Binarnog Traženja - Pregled

- Definicija
- Operacije
- Primeri
- Gomila (Heap)
- Operacije

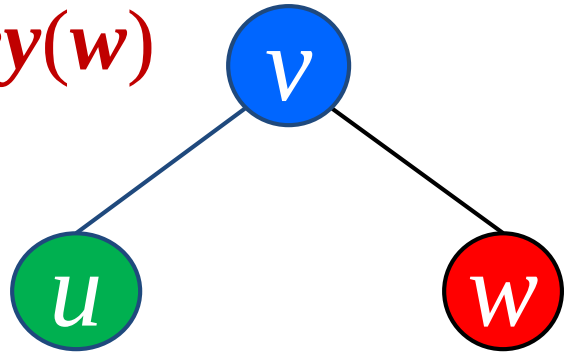
Pojam Stabla binarnog traženja

- Stablo binarnog traženja (SBT) je binarno stablo koje čuva ključeve (ili parove ključ-element) u čvorovima



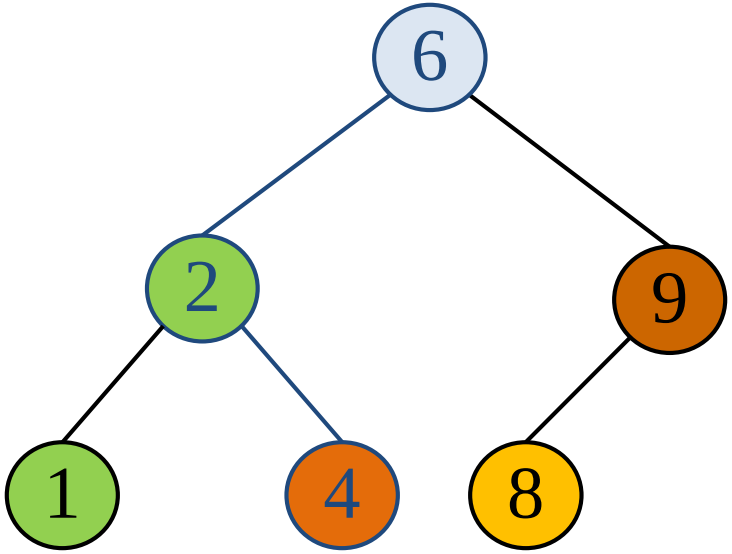
- i za koje važi:
  - Neka su ***u***, ***v***, i ***w*** tri čvora, takva da je ***u*** u levom podstablu čvora ***v,*** a ***w*** je u desnom podstablu ***v***. Tada važi da je

$$key(u) < key(v) \leq key(w)$$

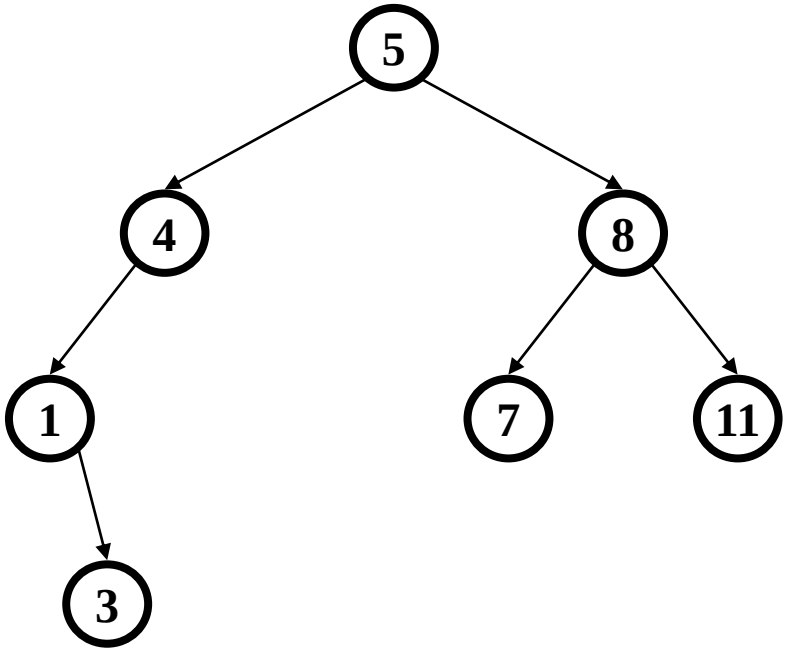


Pojam Stabla binarnog traženja (2)

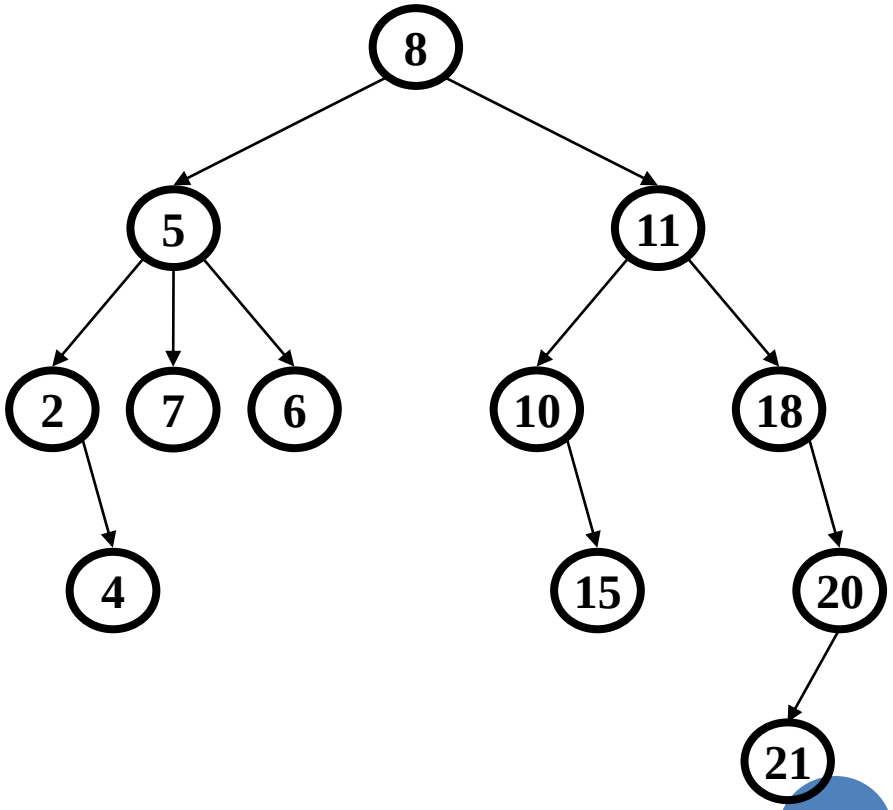
- Stablo binarnog traženja (SBT) - Navedeni uslov važi za sve čvorove u stablu, odnosno za celo levo i desno podstablo:
- Vrednost čvora je
  - veća od svih vrednosti ***levog podstabla*** i
  - manja ili jednaka od vrednosti ***desnog podstabla***



ZA VEŽBU:
DA LI SU ZADATA STABLA SBT?



S1

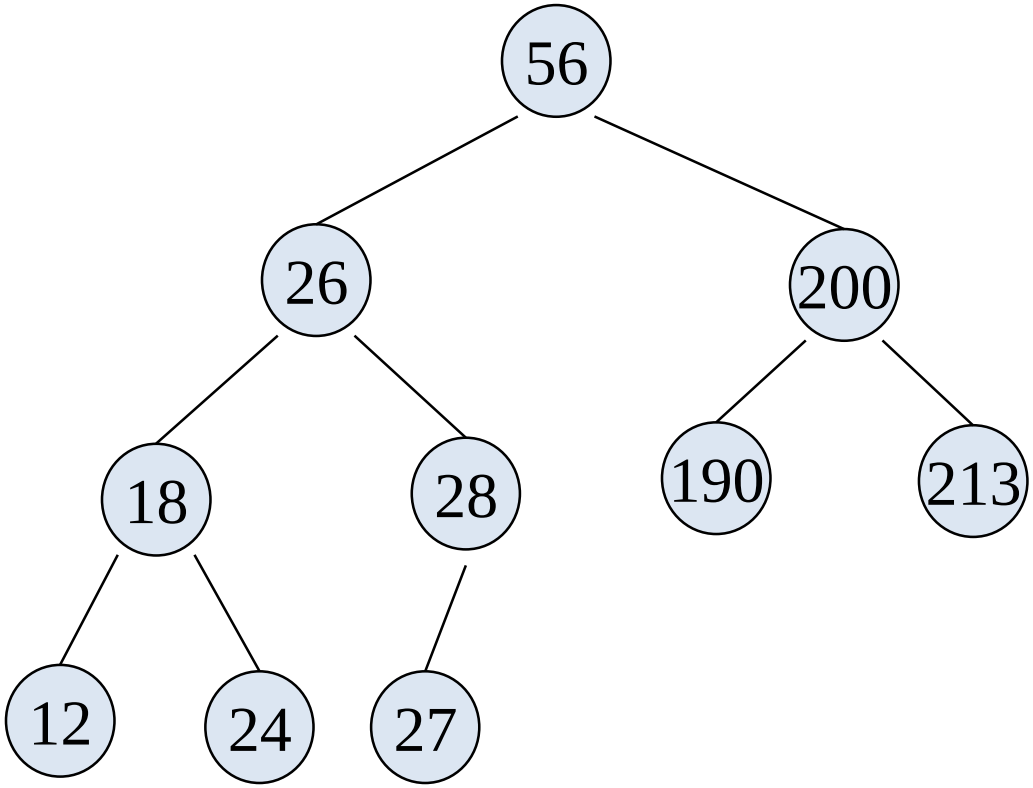


S2

Primer
Stabla binarnog traženja

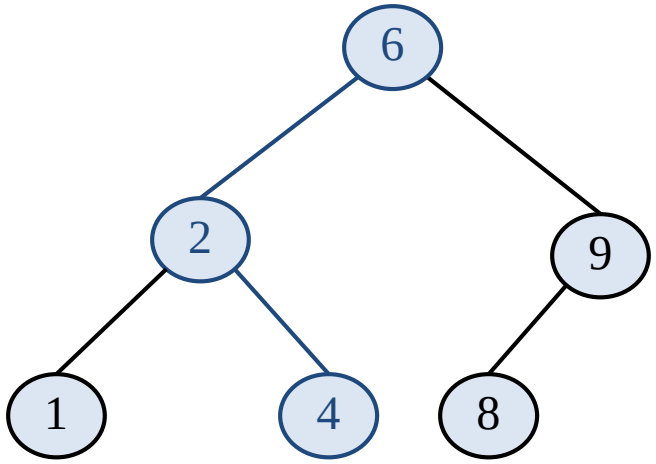
- Na osnovu niza formirati stablo bin. traženja:

56, 26, 28, 200, 18, 24, 190, 213, 27, 12

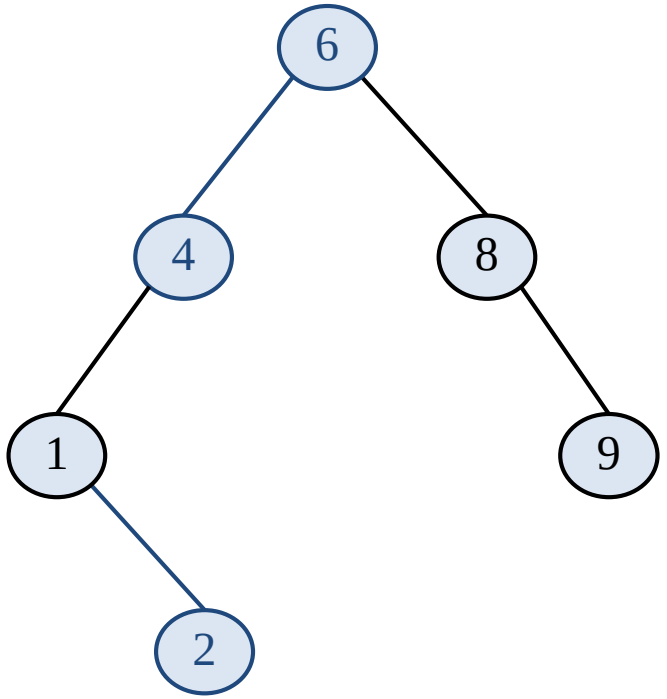


Primer
Stabla binarnog traženja

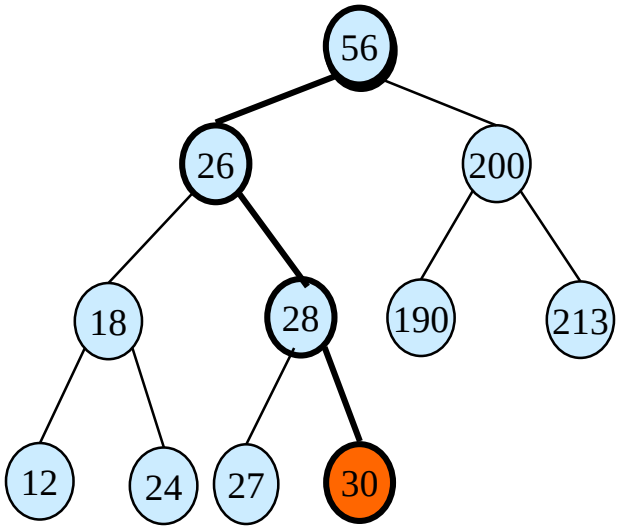
Niz: 6, 9, 2, 1, 4, 8



Niz: 6, 8, 4, 1, 2, 9



Operacija dodavanja



Algoritam SBT.3. Dodavanje

Tree-Insert(T, z)

```
1.   y ← null
2.   x ← root(T)
3.   while (x ≠ null)
4.       y ← x
5.       if (key(z) < key(x))
6.           then x ← left(x)
7.           else x ← right(x)
8.    end while
9.   p(z) ← y      //p-roditeljski čvor
10.  if (y = null)
11.      then root(T) ← z
12.      else if key(z) < key(y)
13.          then left(y) ← z
14.          else right(y) ← z
```

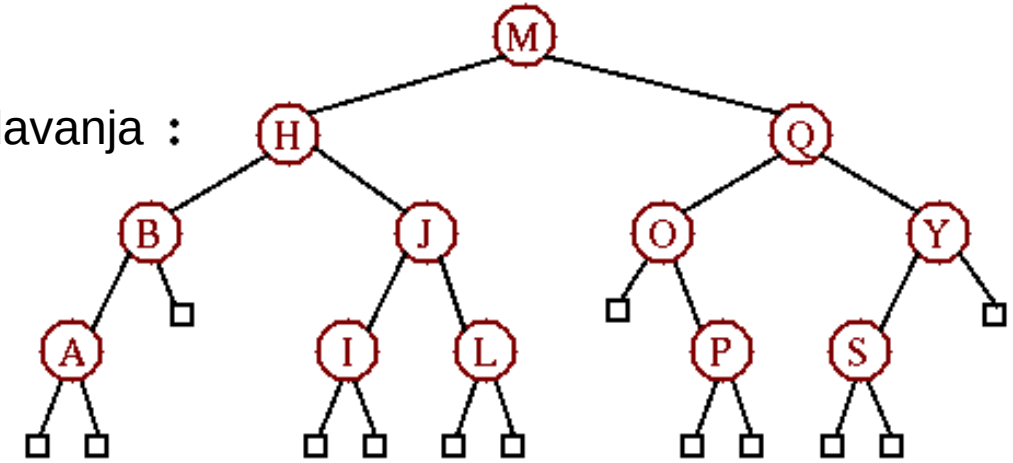
- Inicijalizacija: $O(1)$
- While petlja u linijama 3-8 traži mesto za ubacivanje z, vodeći računa o roditelju y
  Zahteva vreme $O(h)$
- Linije 9-14 dodaju vrednost: $O(1)$

$\Rightarrow$ UKUPNO: $O(h)$

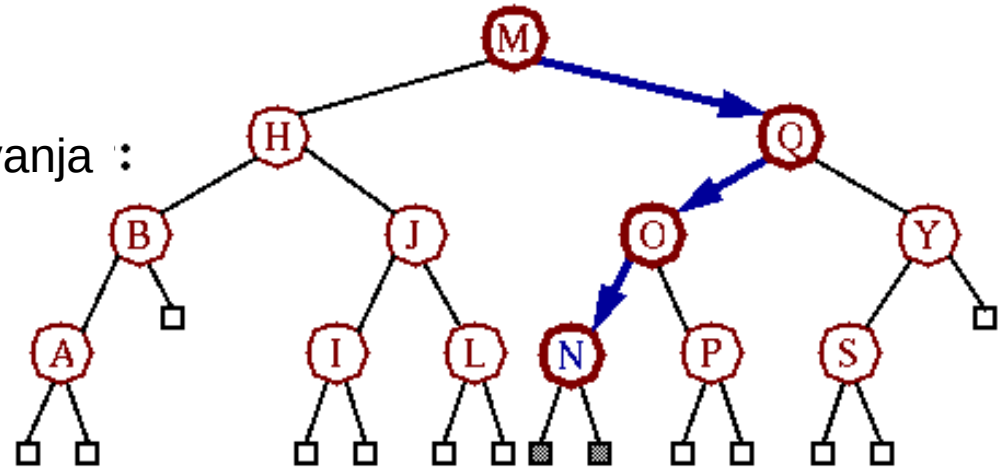
Ilustracija dodavanja

- Dodavanje elementa N

Pre dodavanja :



Posle dodavanja :



Stabla binarnog traženja – Operacije

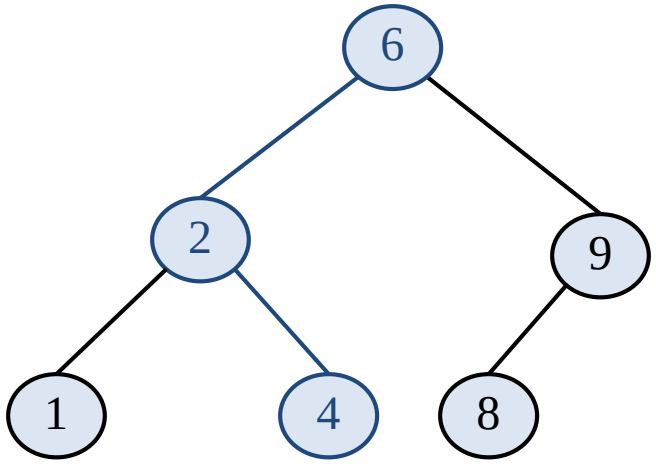
- Osnovne operacije sa stablom:
  obilazak stabla

- Dodatne operacije u odnosu na binarna stabla
  - **Traženje** čvora sa ključem k – operacija *find*
  - **Umetanje** – operacija *insertItem*
  - **Brisanje** čvora – operacija *removeElement*

Obilazak Stabla binarnog traženja

- Inorder obilazak stabla binarnog traženja

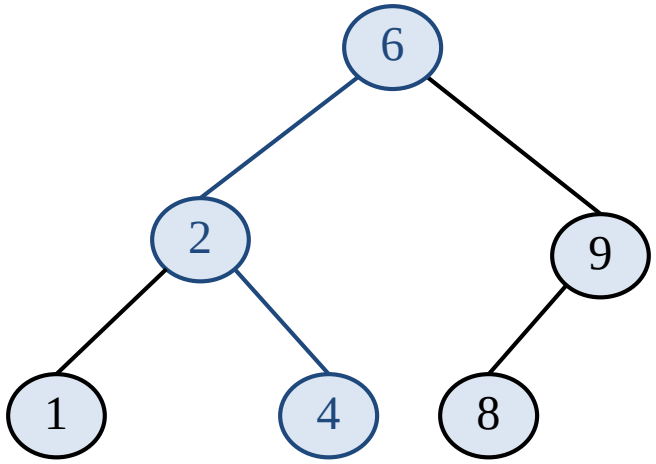
  rezultat je uređeni niz u rastućem poretku:



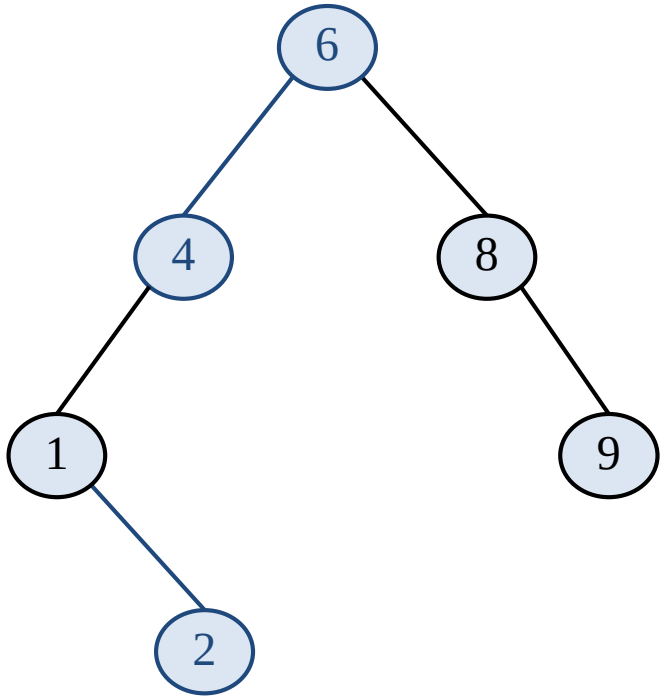
1 2 4 6 8 9

Primer
Obilazak Stabla binarnog traženja

Niz: 6, 9, 2, 1, 4, 8

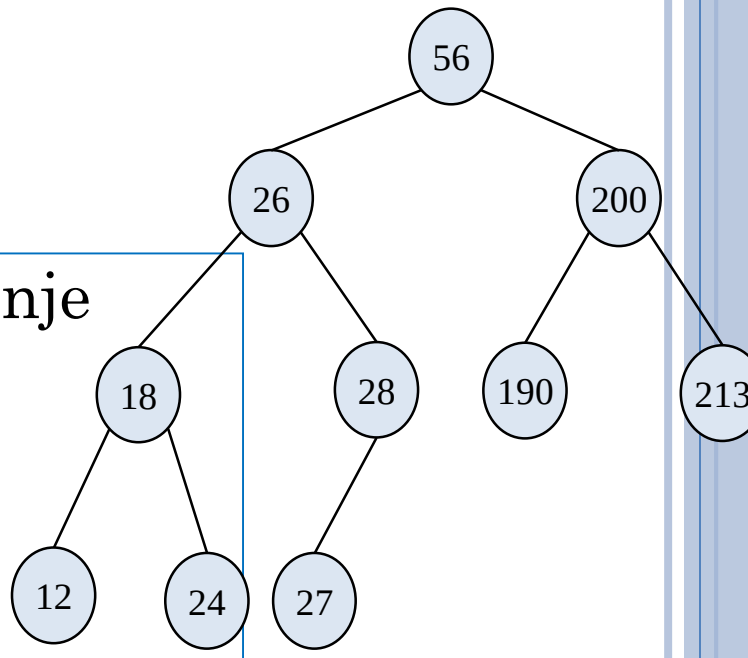


Niz: 6, 8, 4, 1, 2, 9



Obilazak: 1 2 4 6 8 9

Operacija traženja – rekurzivna



Algoritam SBT.1. Rekurzivno traženje

Tree-Search(*cvor*, *k*)

1. **if** (*cvor* = null *or* *k* = *key*(*cvor*))
2. **then** return *cvor*
3. **if** (*k* < *key*(*cvor*))
4. **then** return Tree-Search(*left*(*cvor*), *k*)
5. **else** return Tree-Search(*right*(*cvor*), *k*)

Složenost: $O(h)$

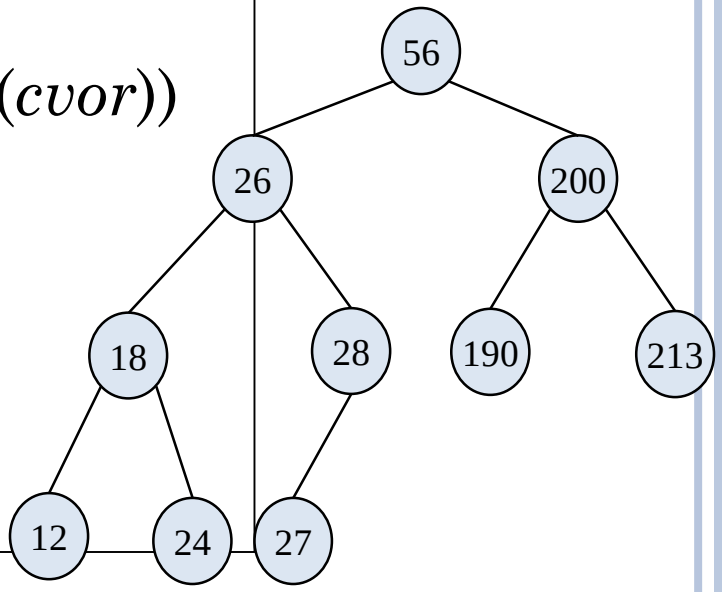
O(log n), n broj čvorova u stablu

Operacija traženja – Iterativna

Algoritam SBT.2. Iterativno traženje

Iterative-Tree-Search(*cvor*, *k*)

1. **while** (*cvor* ≠ *null* **and** *k* ≠ *key*(*cvor*))
2. **if** (*k* < *key*(*cvor*))
3. **then** *cvor* ← *left*(*cvor*)
4. **else** *cvor* ← *right*(*cvor*)
5. **return** *cvor*



Uglavnom **efikasnija** od rekurzivne.

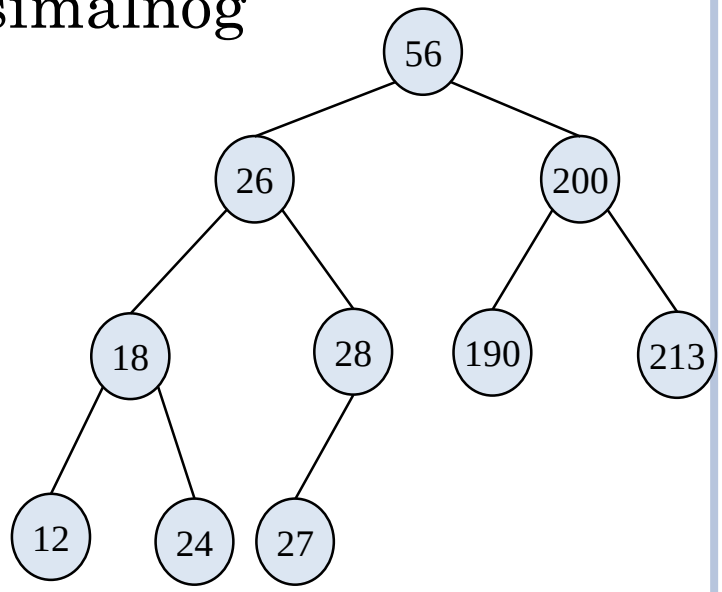
Ostale operacije traženja

- Traženje maksimalnog elementa – findMax

Algoritam SBT.3. Traženje maksimalnog elementa

findMax(*cvor*)

1. **if (***cvor != null***)**
2. **while (***right(cvor)* ≠ *null***)**
3. *cvor = right(cvor)*
4. **return** *cvor*



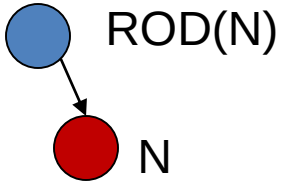
- Traženje minimalnog elementa – findMin

  Pseudokod?

Operacija brisanja čvora

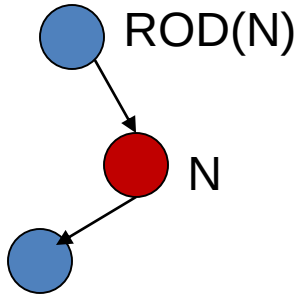
- Brisanje čvora je složeno zato što treba paziti da nakon brisanja ostane zadovoljen uslov uređenja stabla
- Čvor N koji se briše treba zameniti čvorom X koji treba pronaći u stablu, tako da se održi uređenje stabla
- **Postoje tri slučaja:**

1. Čvor je list

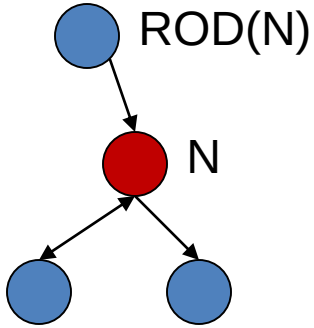


N je čvor koji se briše
ROD(N) je roditelj čvora N

2. Čvor je stepena 1



3. Čvor je stepena 2



OPERACIJA BRISANJA ČVORA

1. Naći čvor N i čvor ROD
2. Obrisati čvor N na sledeći način:

Slučaj 1 (Brisanje iz lista):

null→ ROD.link(N)

// link na N roditelja se postavlja na null

Slučaj 2 (brisanje čvora koji ima 1 dete):

N.link(D)→ROD.link(N)

// u roditeljski čvor čvora N se postavlja

// link na dete čvora N

Slučaj 3 (brisanje čvora sa 2 deteta):

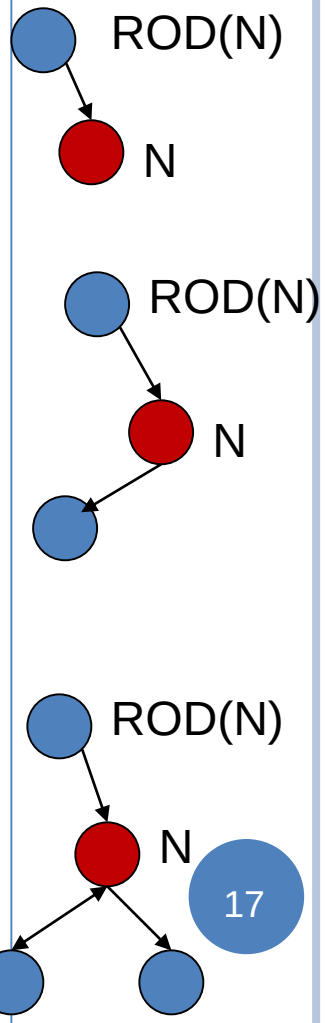
Naći čvor **S** (**inorder** sledbenik čvora N)

Obrisati čvor S korišćenjem slučaja 1 ili 2

S→ROD.link(N)

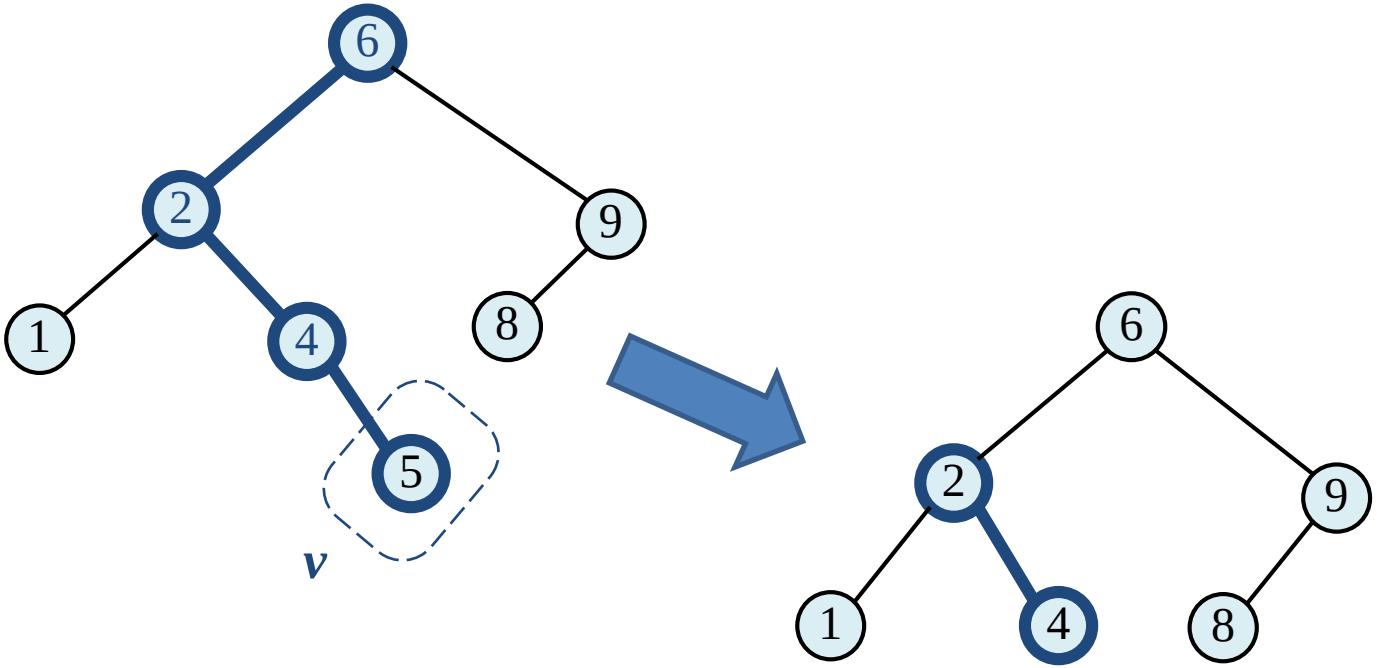
// u roditeljski čvor čvora N se postavlja

// link na inorder sledbenika čvora N



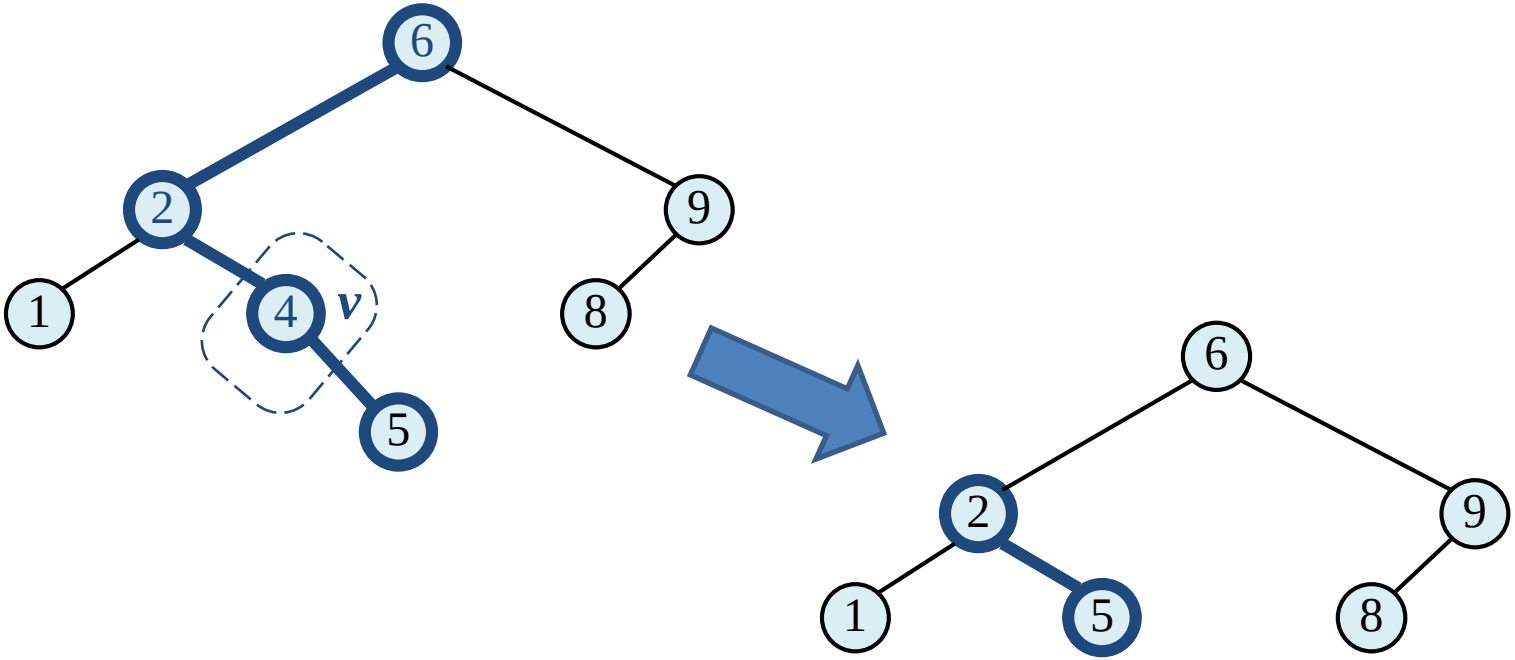
Ilustracija brisanja

- Brisanje lista (čvor 5)



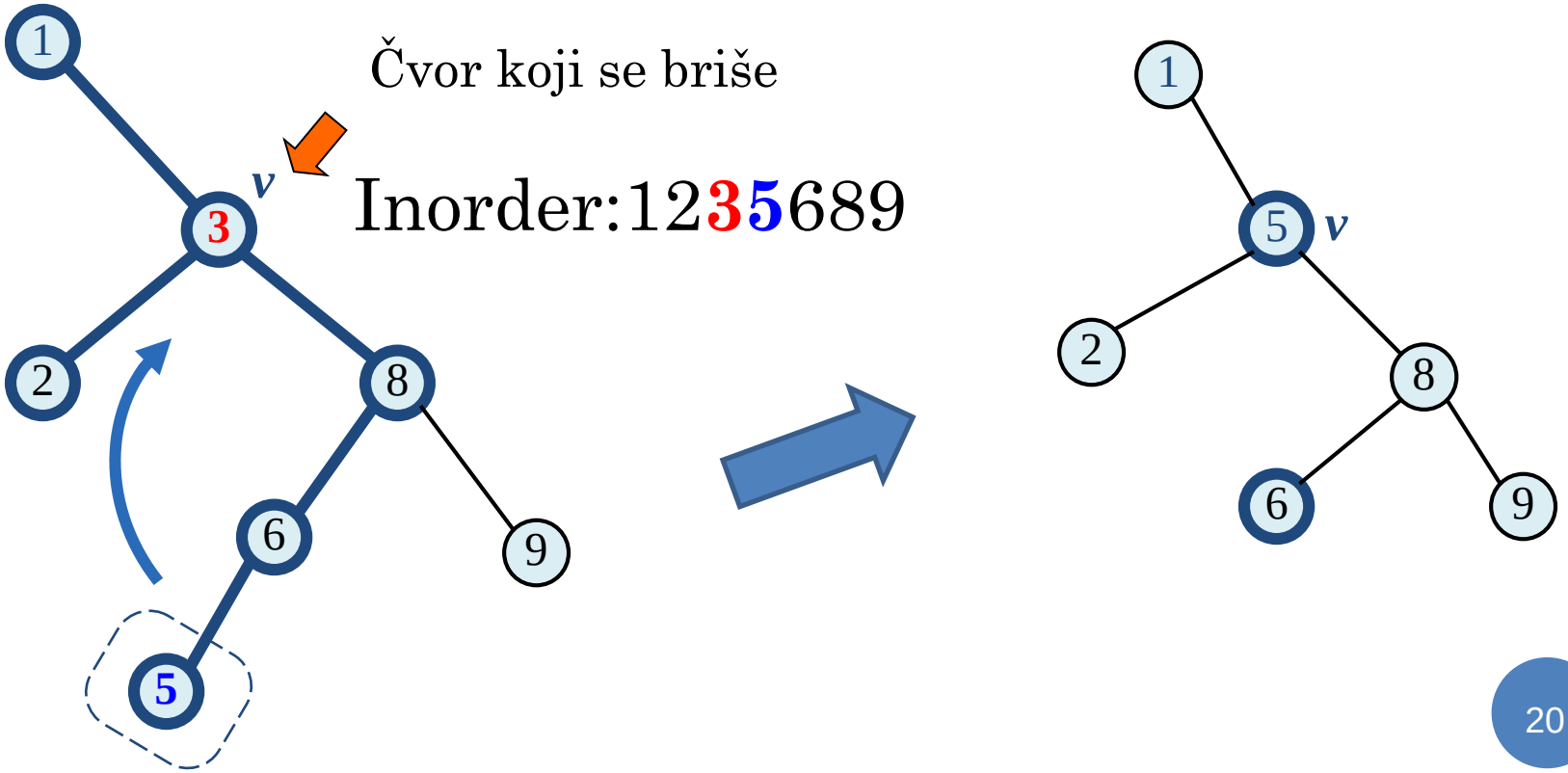
Ilustracija brisanja (2)

- Brisanje čvora stepena 1 (čvor 4)



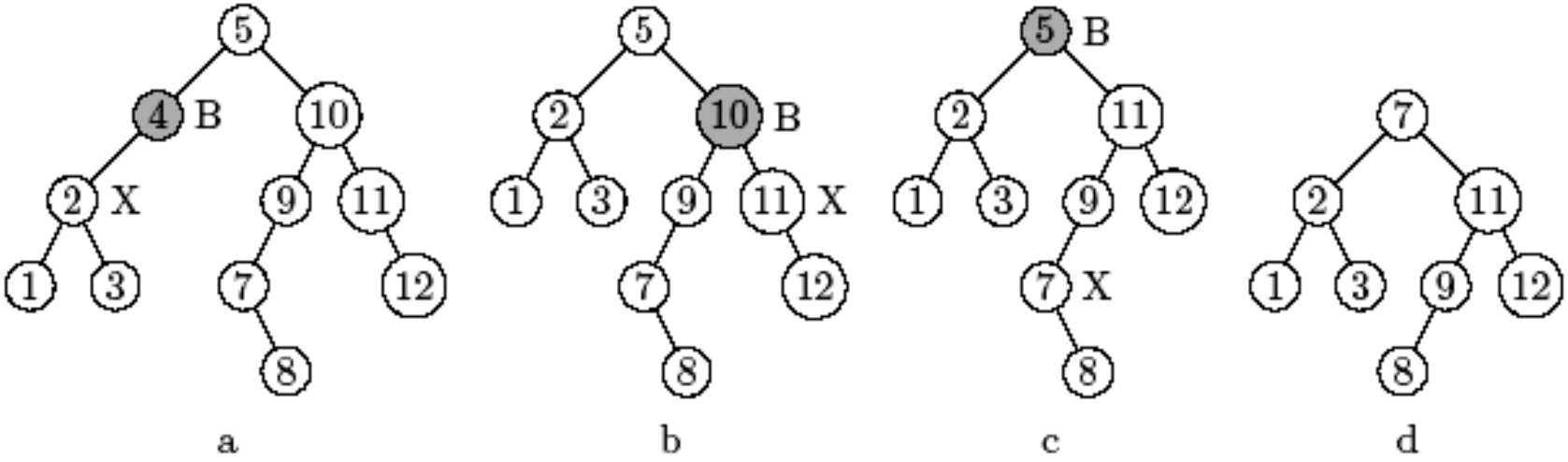
Ilustracija brisanja (3)

- Brisanje čvora stepena 2 (čvor 3)



Brisanje čvora - Primeri

- Prikaz prethodno opisanih slučajeva je na slici.
- Sa B je označen čvor koji se briše (siva boja), a sa X čvor koji ga zamenjuje.
- Svako iduće stablo ujedno je i rezultat brisanja čvora iz prethodnog stabla.



Primer za vežbu

Kreirati stablo binarnog traženja na osnovu vrednosti zadatih u navedenom redosledu:

`14, 2, 5, 20, 42, 1, 4, 16`

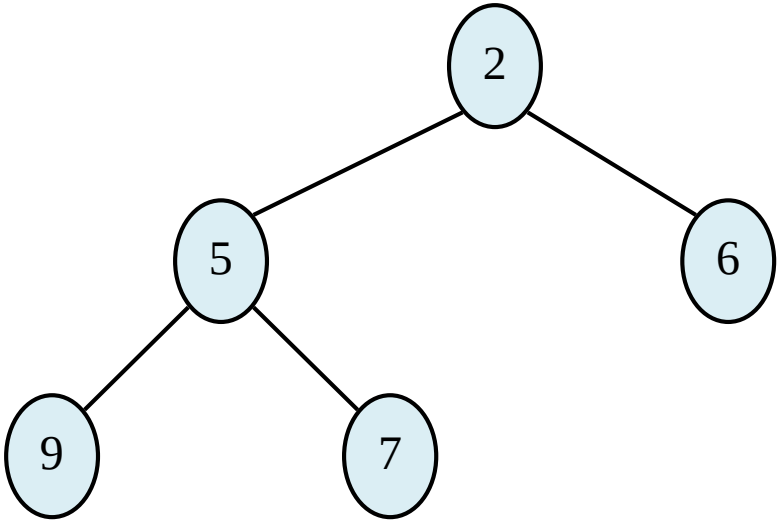
Nakon toga, obrisati čvorove u zadatom redosledu:

`42, 14`

Koji čvor će biti koren stabla nakon ovih operacija?

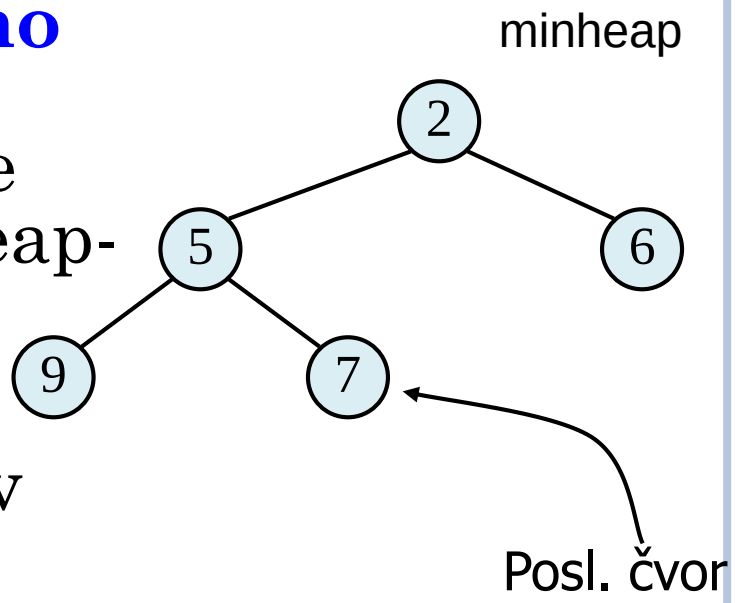
A. `2`
B. `4`
C. `5`
D. `16`

Gomila
Heap



Šta je heap?

- Heap je **gotovo kompletno binarno stablo** koje čuva vednosti u čvorovima i koje zadovoljava osobine tzv Heap-order.



- Heap-order: za svaki čvor v izuzev korena, važi:

Minheap

$$key(v) \geq key(parent(v))$$

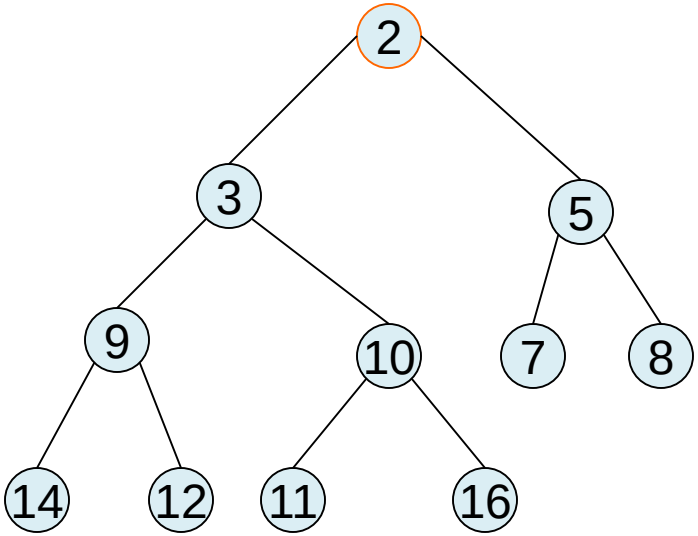
Maxheap

$$key(v) \leq key(parent(v))$$

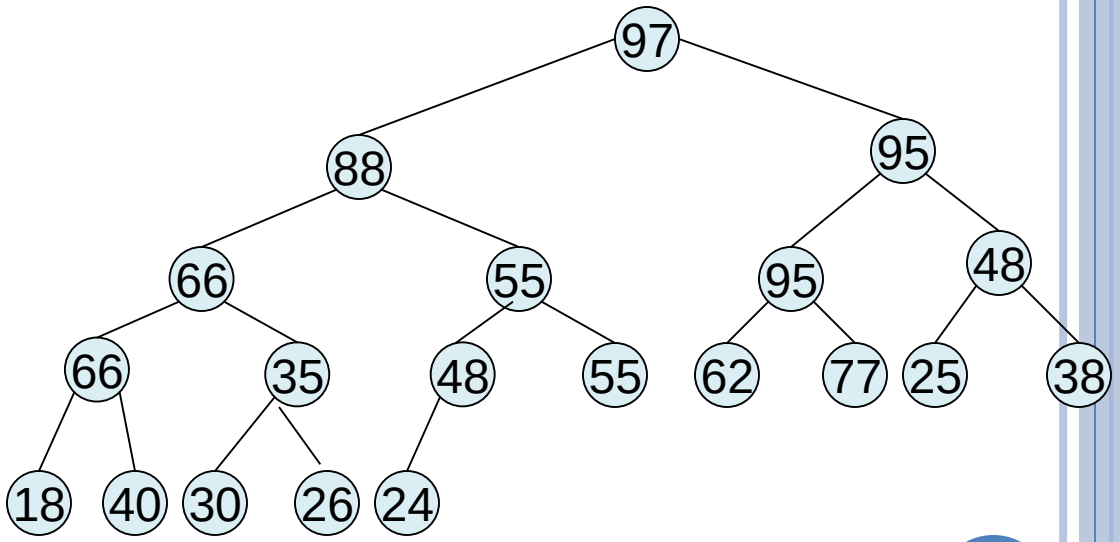
Min i Max Heap

- Svaki koren nekog podstabla mora da ima maksimalnu vrednost (**MAXHEAP**) ili minimalnu vrednost (**MINHEAP**) u odnosu na sve ostale čvorove

Min Heap

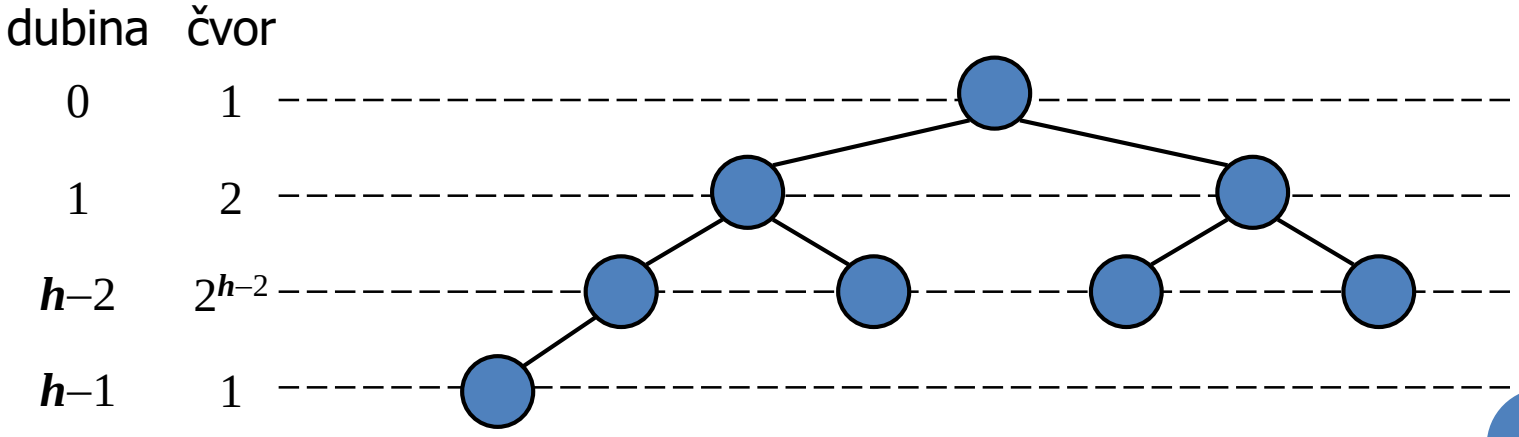


Max Heap



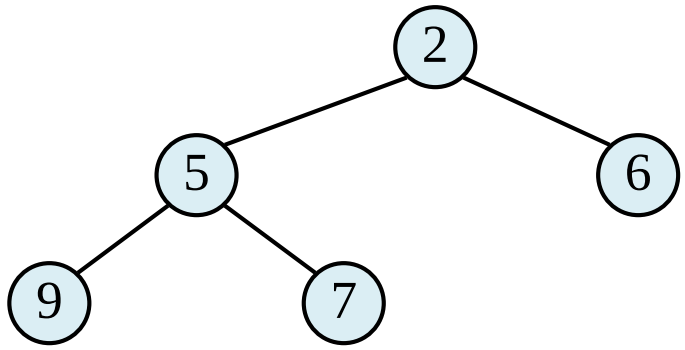
Visina Heap-a

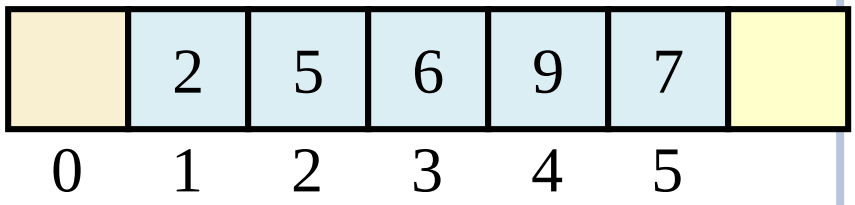
- Heap koji čuva n vrednosti ima visinu $O(\log n)$
  - Neka je h visina heap-a koji čuva n vrednosti
  - Pošto ima 2^i čvorova/vrednosti na nivou $i = 0, \ldots, h - 2$ i na nivou $h - 1$ je poslednji čvor



Heap Implemenacija preko polja

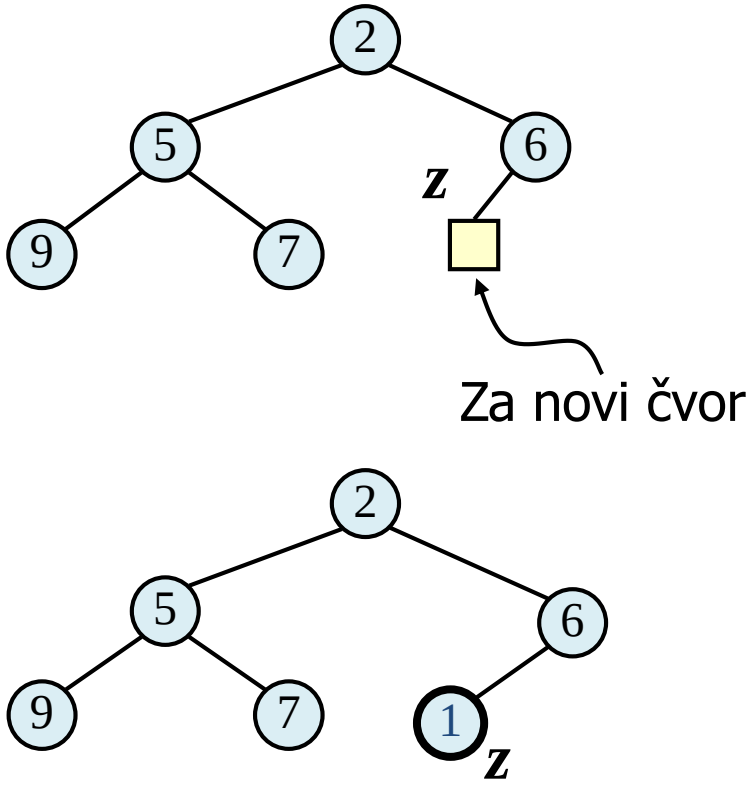
- Za heap sa ***n*** vrednosti koristi se polje veličine ***n*** + 1
- Za čvor koji se nalazi na poziciji ***i***
  - Levi potomak je na 2***i***
  - Desni potomak je na 2***i*** + 1
- Ćelija sa indeksom 0 se ne koristi





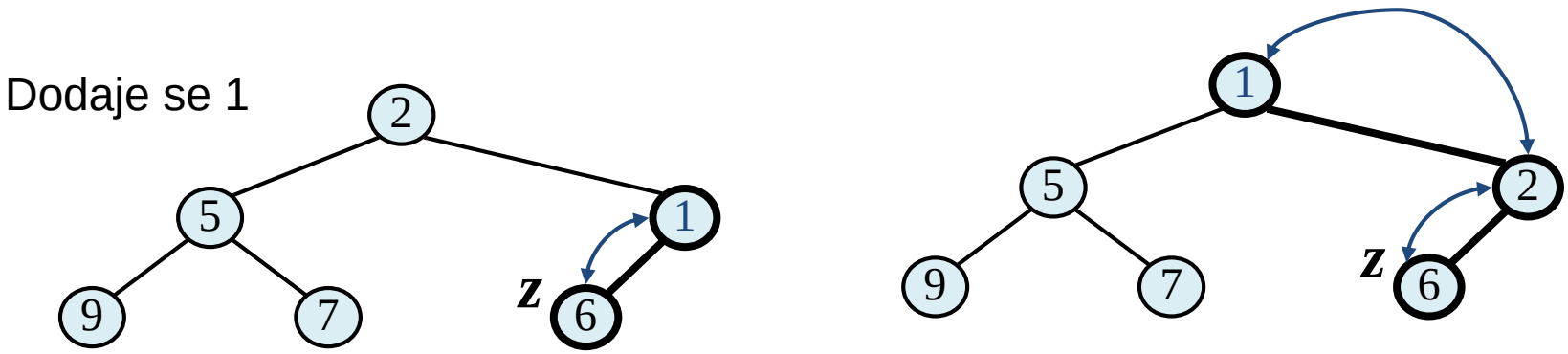
Dodavanje u Heap

- Operacija **insertItem** – dodavanje ključa ***k*** u heap
  - dodavanje u polje na poziciji ***n*** + 1
  - Preuređenje
- Algoritam u tri koraka:
  - Pronaći poslednji novi čvor ***z***
  - Smesti ***k*** u ***z***
  - Preuredi heap da poštuje uređenost - **upheap**



Operacija Upheap

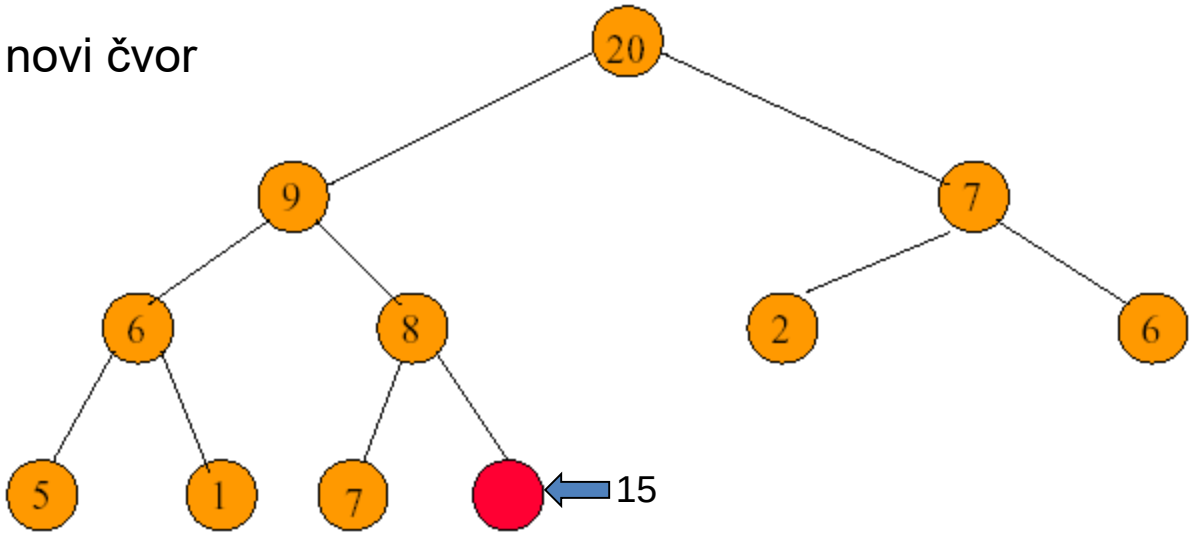
- Algoritam *upheap* ponovo uspostavlja heap-order osobinu premeštanjem ***k*** do prave pozicije
- upheap se završava kada ***k*** dostigne koren ili čvor čiji roditelj ima manju ili jednaku vrednost u odnosu na ***k*** (minheap)
- Pošto je visina heap-a ***O***(log ***n***), upheap zahteva ***O***(log ***n***)



Primer: dodavanje u Heap

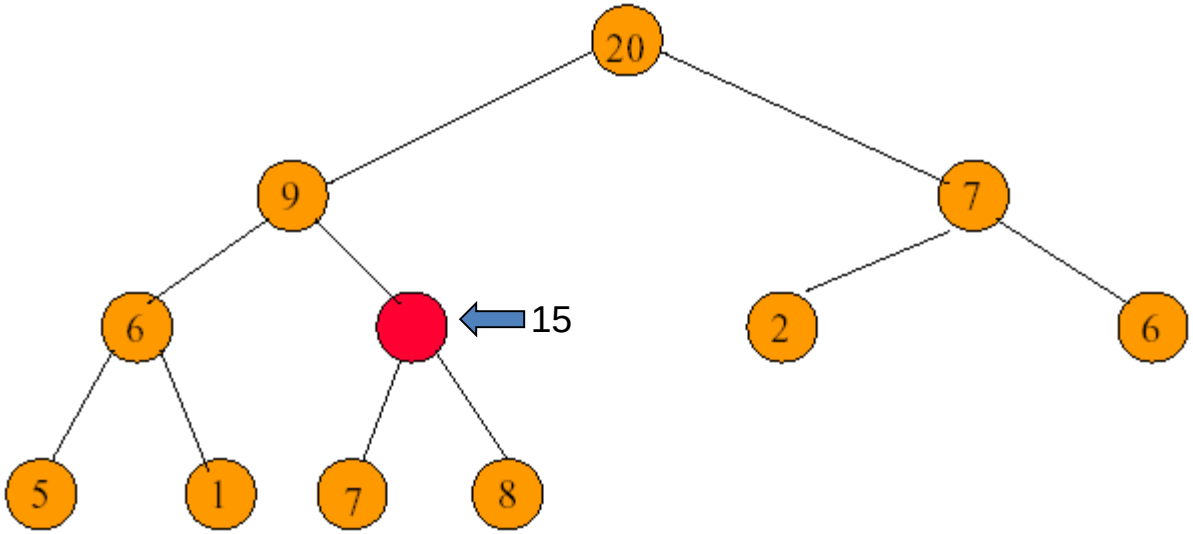
- Dodati element 15 u maxheap

Početno stablo + novi čvor



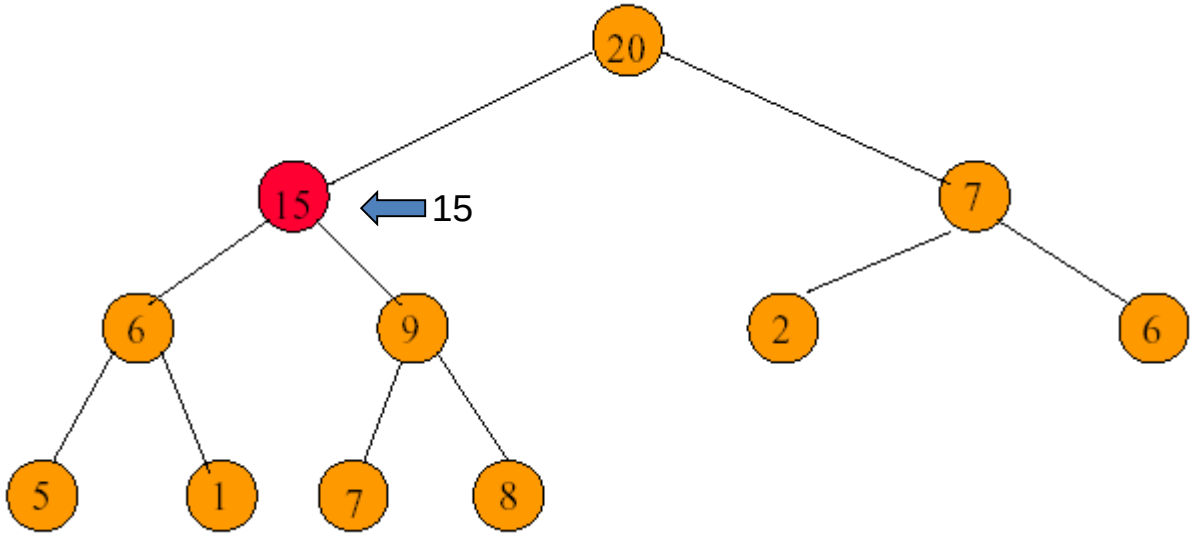
Primer: dodavanje u Heap (2)

- Traženje pozicije za novu vrednost uz stablo (*upheap*)



Primer: dodavanje u Heap (3)

- Upis 15 u novi čvor na pravom mestu



OPERACIJA DODAVANJA - PSEUDOKOD

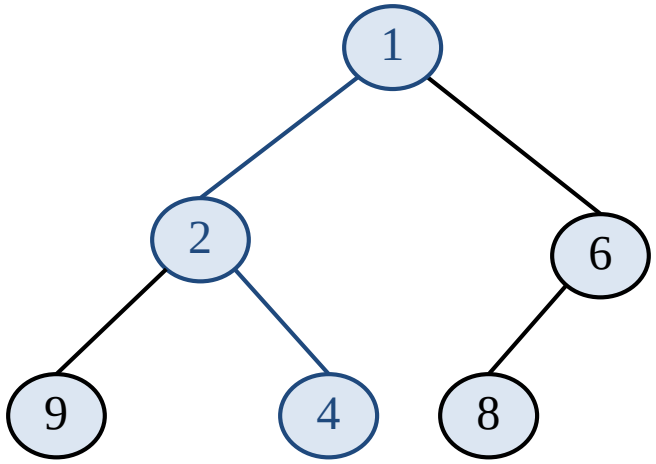
Algoritam SBT.4 Dodavanje elementa min-gomili

InsertHeap(h,n,e)

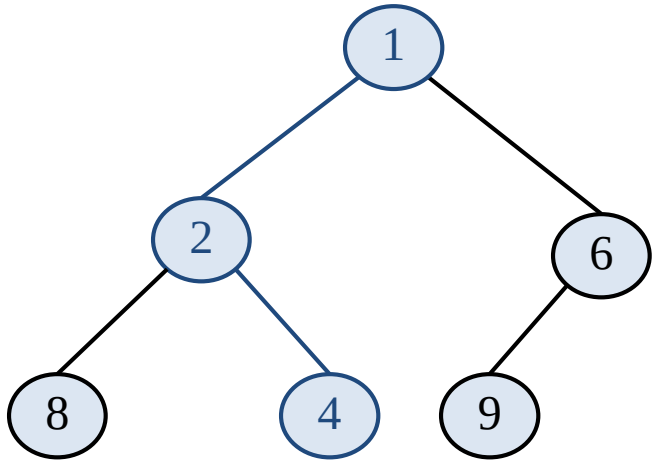
```
//h – gomila (heap), n – broj elemenata gomile, e – novi element
1.   n ← n+1, ptr ← n  // lokacija novog elementa
2.   repeat while (ptr>1)   {
3.   //nalaženje lokacije elementa e
4.      rod ← ⌊ptr/2⌋          // lokacija roditelja čvora
5.      if (e<=h(rod) then
6.         h(ptr) ← e
7.         return
8.      h(ptr) ← h(rod)       // pomeranje čvora naniže
9.      ptr ← rod             // ažuriranje ptr
10.   end repeat
11.   h(1) ← e                // smeštanje e u koren
12.  return
```

Primer
Kreiranje Min Heap-a

Niz: 6, 9, 2, 1, 4, 8

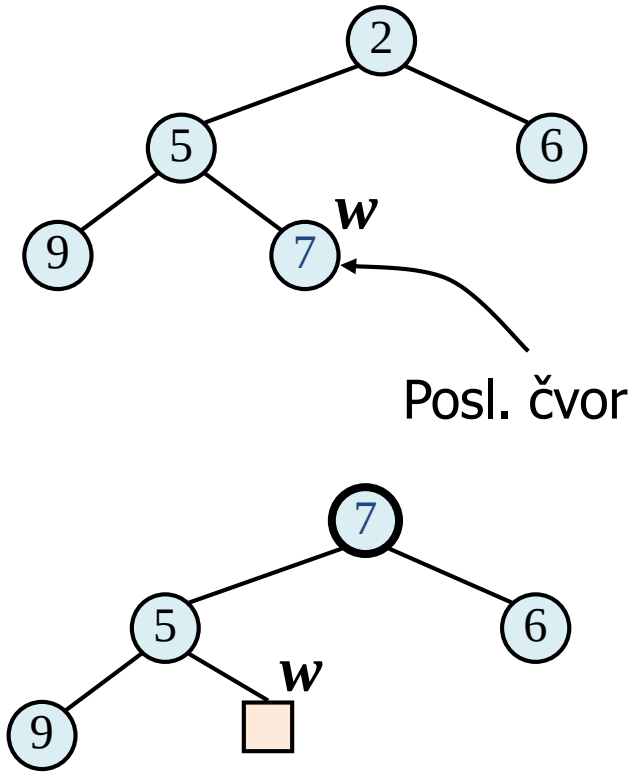


Niz: 6, 8, 4, 1, 2, 9



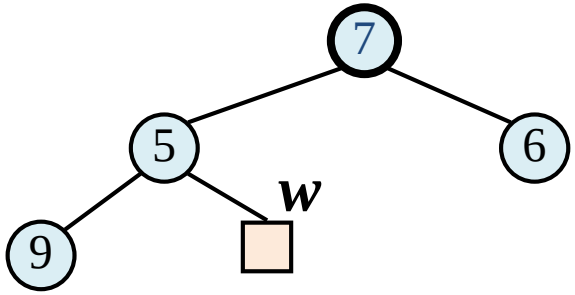
Brisanje korena Heap-a

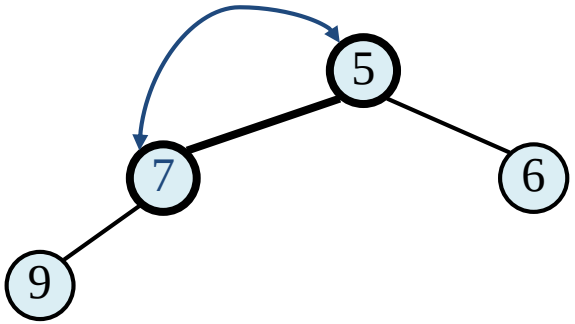
- Operacija **removeMin** – odnosi se na brisanje korena minheap-a
- Algoritam:
  - Zameni koren vrednošću koja se nalazi u poslednjem čvoru ***w***
  - Povrati uređenost heap-a odnosno heap-order osobinu - **downheap**



Operacija Downheap

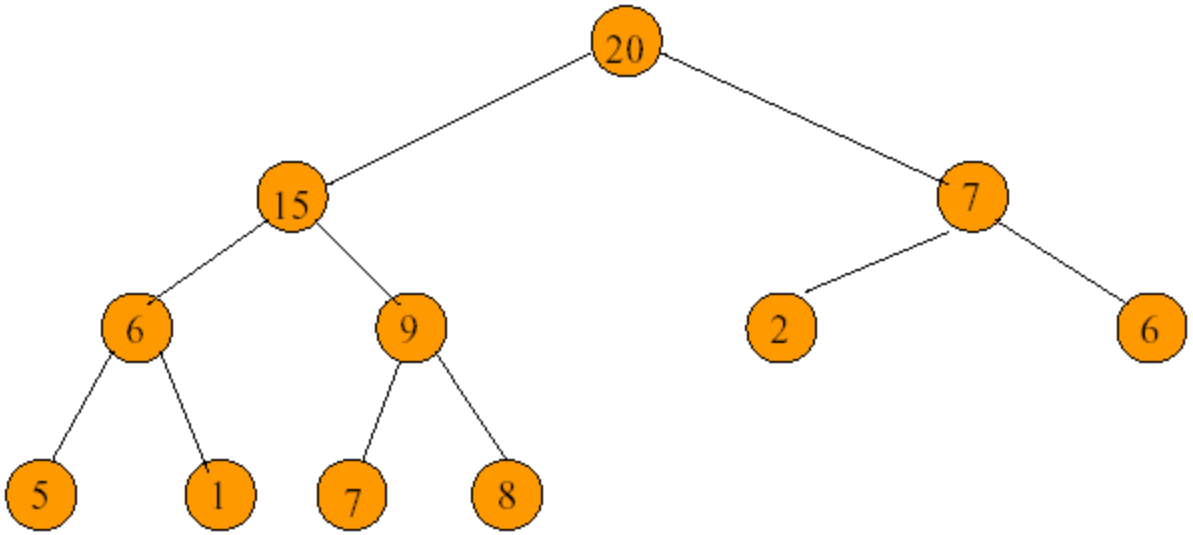
- Algoritam **downheap** ponovo uspostavlja heap-order zamenom ključa ***k*** sa čvorovima nadole od korena
- **Downheap** se završava kada ključ ***k*** dostigne list ili kada dođe do čvora čija deca imaju ključeve veće ili jednake ***k***
- Visina za heap je reda ***O***(log ***n***), za **downheap** treba ***O***(log ***n***)





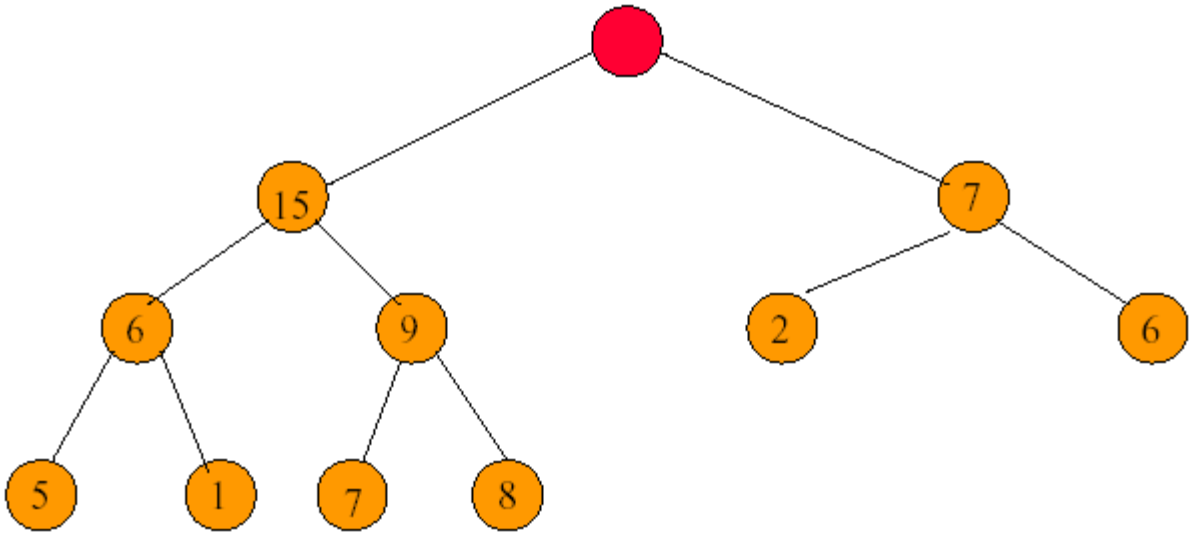
Primer brisanja korena gomile (1)

- Koren sadrži max element



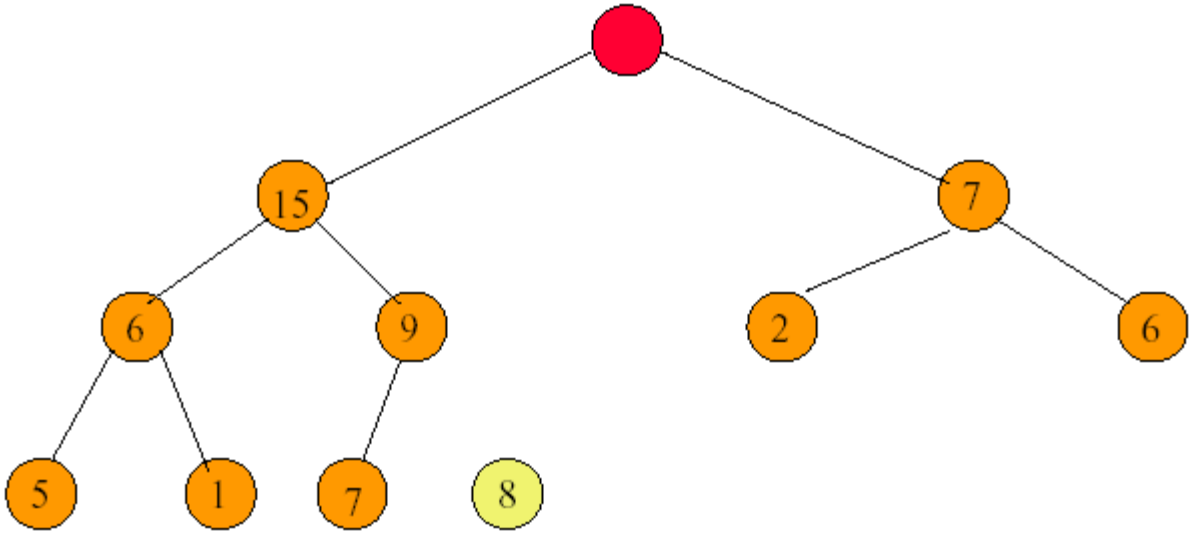
Primer brisanja korena gomile (2)

- Brisanje vrednosti iz korena



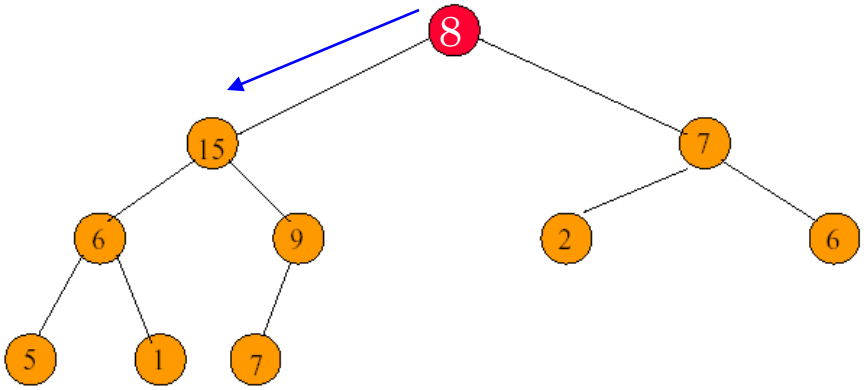
Primer brisanja korena gomile (3)

- Uzimanje poslednjeg čvora 8 iz heap-a

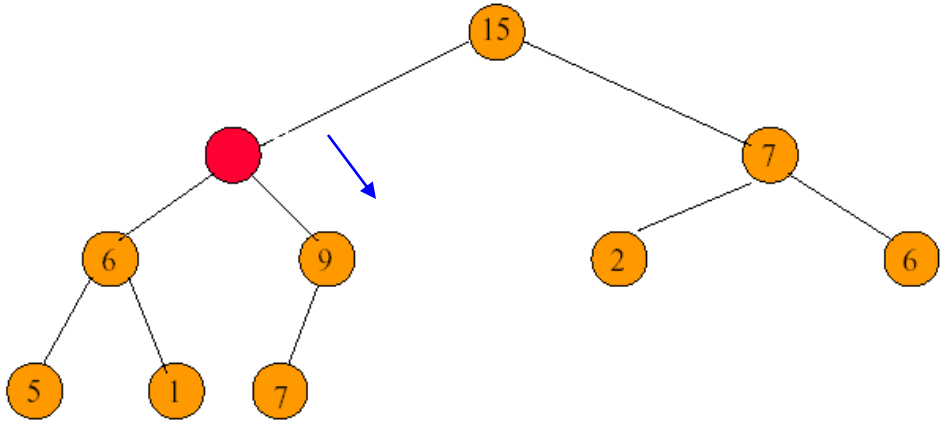


Primer brisanja korena gomile (4)

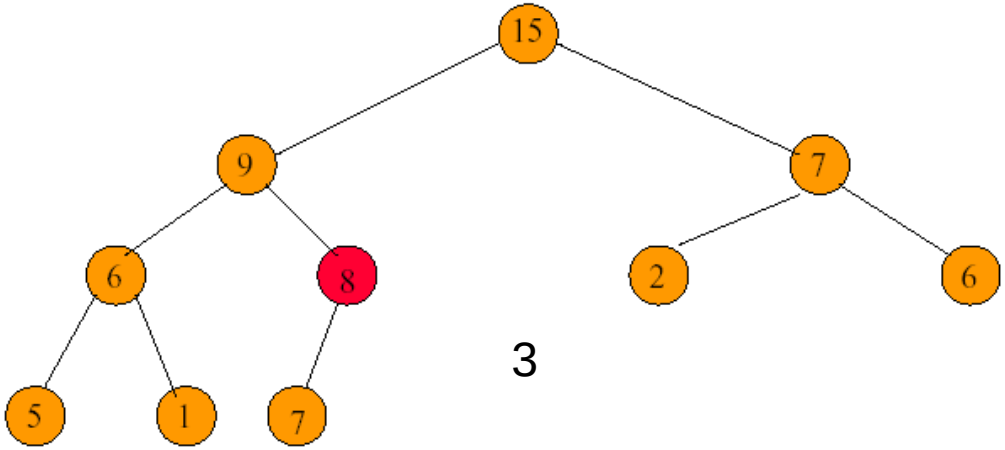
- Traženje mesta za vrednost 8



1



2



3

BRISANJE KORENA GOMILE

Algoritam SBT.5 Brisanje korena gomile

DeleteHeap(h,n,e)

```
/* h – heap, n – broj el. gomile, e – obrisani el., posl - vrednost iz poslednjeg
      elem. Gomile, ptr - lokacija poslednjeg elementa,  levo i desno – deca
      posl. elementa gomile  */
1.    e ← h[1]  // uklanjanje korena gomile
2.    posl ← h[n]; n ← n-1 // brisanje posl. elementa
3.    if (n=0) then return //brisanje jedinog elem. gomile
4.    ptr ← 1; levo ← 2; desno ← 3  // inicijalizacija
5.    repeat while (desno<=n)
6.    //nalazenje prave lokacije elementa
7.       if (posl>h[levo] and posl>= h[desno])
8.         then {h[ptr] ← posl; return}
9.       if (h[desno]<=h[levo]
10.        then {h[ptr] ← h[levo]; ptr ← levo}
11.        else {h[ptr] ← h[desno]; ptr ← desno }
12.      levo ← 2*ptr; desno ← levo + 1
13.   end repeat
14.   if (levo = n) and if(posl < h[levo]) then ptr ← levo
15.   h[ptr] ← posl
16.   return
```

- Petlja 5-13 se ponavlja sve dok čvor posl ima desno dete
- Korak 14 obrađuje granični slučaj kada posl nema desno dete, ali ima levo dete
- U koraku 14 dve if naredbe su stavljene jer h[levo] ne mora biti definisan kada je levo>n

Heap-Sort

- Neka heap sadrži n elemenata
  - Zahtevani prostor je $O(n)$
  - Operacije insertItem i removeMin zahtevaju $O(\log n)$
  - Operacije size, isEmpty, minKey, i minElement zahtevaju $O(1)$
- Korišćenjem heap-a možemo sortirati sekvencu od n elemenata za $O(n \log n)$
- Takvo sortiranje se zove **Heap-sort**
- Heap-sort je mnogo brži od algoritama kao što su insertion-sort i selection-sort

HEAPSORT – PSEUDOKOD

Algoritam SBT.6. Heap sort

heapSort(a,n)

// sortira polje *a* od *n* elemenata

// formiranje min ili max gomile od elemenata polja *a*

1. **repeat for** j=1,n-1
2. **call** insertHeap(a,j,a[j+1])

// sortiranje brisanjem korena gomile dok se gomila ne isprazni

1. **repeat while** n>1
2. **call** deleteHeap(a,n,e)
3. a[n+1] = e
4. **exit**

Pitanja, ideje, komentari