

Драгутин Н. Митић

ЕЛЕКТРОТЕХНИКА 1
У ОБЛИКУ МЕТОДИЧКЕ
ЗБИРКЕ ЗАДАТАКА

Петрограф
Ниш, 2007.

Драгутин Н. Митић

ЕЛЕКТРОТЕХНИКА 1 У ОБЛИКУ МЕТОДИЧКЕ ЗБИРКЕ ЗАДАТКА

Рецензенти:

Проф. др Александар Д. Воргучић
Проф. др Предраг Д. Раичић

*Штампање овог уџбеника одобрено је одлуком Наставно-научног
већа Електронског факултета у Нишу бр. 07/05-028/07-001*

Издавач и штампа: Петрограф, Ниш

За издавача: Драган Петровић

ISBN 978-86-7934-1

Тираж: 200 примерака

*Препитампавање или умножавање ове књиге није дозвољено
без писмене дозволе издавача и представља кривично дело.*

ПРЕДГОВОР

Ова књига је плод дугогодишњег рада Аутора, некада као асистента и наставника на предмету Основи електротехнике, а сада као наставника на предметима Електротехника I и Електротехника II који се изучавају на првој години студија на Електронском факултету у Нишу. Мада је у потпуности усклађена са наставним плановима и програмима на овом Факултету, може корисно послужити и студентима других факултета и виших школа јер су наставни програми из предмета Електротехника на свим Електротехничким факултетима у Србији у великој мери усаглашени.

Књига следи традицију четири до сада објављене и веома добро прихваћене Методичке збирке задатака из Основа електротехнике које су користиле бројне генерације студената. Подељена је на три основна дела. У првом делу дат је кратак преглед основних закона и израза неопходних при решавању задатака. Други део садржи текстове задатака, док су у трећем делу њихова решења.

Редослед задатака, који су разврстани у 14 области, у потпуности је усклађен са редоследом излагања у уџбенику "Електротехника I" истог аутора. У свакој области се полази од задатака који су карактеристични за ту област и који су у потпуности решени уз одговарајуће коментаре. Након њих следе лакши, а затим тежи задаци. Неки од задатака су у потпуности решени, за неке је дато упутство за решавање са међурезултатима и коначним резултатом, док је за преостале задатке дат само коначан резултат.

Искрени савет Аутора корисницима ове књиге је да не почињу са решавањем задатака пре него што савладају теоретске основе предмета. Сваки покушај да се "наставно градиво савлада" или испит положи тако што ће се одређени број задака научити напамет је илузоран.

При решавању првог, карактеристичног задатка за једну област треба користити дато решење. Ма колико тај задатак био једноставан, у решењу можете наћи неку сугестију која ће Вам користити при решавању тежих задатака. Трудите се да већину осталих задатака решите сами.

Уколико то не успите, проверите да ли знате теорију која је неопходна за решавање тог задатка, па покушајте поново. Тек тада погледајте решење у трећем делу ове књиге.

Одређени број задатака у овој књизи је са испита и колоквијума из предмета Основи слектротехнике и дело су исказашњих и садашњих наставника и сарадника са Катедре за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу. На овај начин желим да им захвалим на труду који су уложили при њиховом формулисању.

За несметано праћење материје која се обрађује у овој књизи неопходно је, поред теоретских основа Електротехнике I, и солидно познавање средњошколске математике, посебно елементарне тригонометрије, векторског рачуна и детерминанти.

Аутор се захваљује свима који су на одређени начин допринели издавању ове књиге. Посебно захваљује мр Мирјани Перић и мр Драгани Живаљевић, асистентима на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу, које су пажљиво прегледале рукопис и исправиле одређене грешке.

Конечно, свестан да су у првом издању могуће одређене материјалне и штампарске грешке Аутор се унапред захваљује свима који му на њих укажу.

У Нишу, фебруара 2006.

Аутор

(mitic@elfak.ni.ac.yu)

САДРЖАЈ

◆ КРАТАК ПРЕГЛЕД ОСНОВНИХ ЗАКОНА И ИЗРАЗА 7.

◆ ЗАДАЦИ

1. Кулонов закон	27.
2. Електростатичко поље и потенцијал система тачкастих оптерећења у хомогеном диелектрику	31.
3. Гаусов закон, проводници у електростатичком пољу	37.
4. Капацитивност кондензатора са хомогеним диелектриком, енергија и сила	43.
5. Срезање кондензатора	49.
6. Електростатичко поље у материјалној средини, вектор електричне индукције	54.
7. Кретање наелектрисане честице у електростатичком пољу	65.
8. Јачина и густина струје, израчунавање отпорности и промена отпорности са температуром, Омов и Цулов закон	67.
9. Срезање отпорника	72.
10. Коло са једним генератором	77.
11. Просто коло, грана сложеног кола, напон између две тачке у колу	86.
12. Сложена електрична кола	91.
13. Нелинеарна електрична кола	101.
14. Прелазни режим у RC колу, кола са кондензаторима	104.



РЕШЕЊА

1. Кулонов закон	109.
2. Електростатичко поље и потенцијал система тачкастих оптерећења у хомогеном диелектрику	117.
3. Гаусов закон, проводници у електростатичком пољу	125.
4. Капацитивност кондензатора са хомогеним диелектриком, енергија и сила	138.
5. Срезање кондензатора	149.
6. Електростатичко поље у материјалној средини, вектор електричне индукције	155.
7. Кретање наелектрисане честице у електростатичком пољу	173.
8. Јачина и густина струје, израчунавање отпорности и промена отпорности са температуром, Омов и Цулов закон	179.
9. Срезање отпорника	185.
10. Коло са једним генератором	191.
11. Просто коло, грана сложеног кола, напон између две тачке у колу	203.
12. Сложена електрична кола	207.
13. Нелинеарна електрична кола	221.
14. Прелазни режим у RC колу, кола са кондензаторима	227.

КРАТАК ПРЕГЛЕД ОСНОВНИХ ЗАКОНА И ИЗРАЗА

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

■ **1. КУЛОНОВ ЗАКОН.** Између тачкастих наелектрисања Q_1 и Q_2 , која се налазе на међусобном растојању r у средини диелектричне константе ϵ , делује електростатичка сила интензитета

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} = k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}.$$

Сила делује дуж потега који спаја наелектрисања и привлачна је за случај разноимених наелектрисања, а одбојна у случају наслектрисања истог знака.

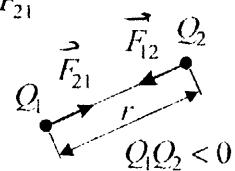
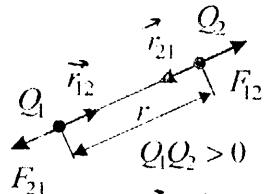
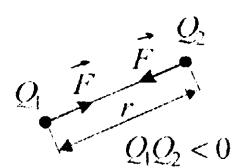
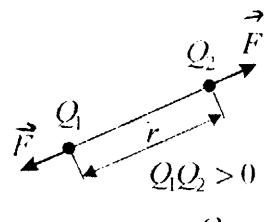
Кулонов закон се може прегледно написати у векторском облику. Сила \vec{F}_{12} , којом наелектрисање Q_1 делује на наелектрисање Q_2 , је

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12},$$

где је \hat{r}_{12} ($\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$) јединични вектор положаја наслектрисања Q_2 у односу на Q_1 . Јасно је да мора бити задовољен закон акције и реакције,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Константа k карактерише средину у којој се оптерећења налазе. Њена вредност је највећа у вакууму и износи $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. У рационализованом систему писања једначина уместо константе k користи се диелектрична константа. Најмања вредност диелектричне константе је у вакууму, $\epsilon_0 = 1/4\pi k_0 = 1/36\pi \cdot 10^9 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. У осталим срединама је $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, где је ϵ_r релативна диелектрична константа.

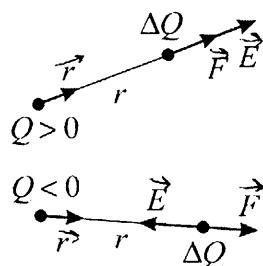


■ 2. ВЕКТОР ЈАЧИНЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА. Вектор јачине електричног поља се дефинише као количник силе \vec{F} која делује на пробно наелектрисање ΔQ , унето у поље, и пробног наелектрисања:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta Q}.$$

Пробно наелектрисање ΔQ је, по конвенцији, позитивно, тачкасто и мора имати веома малу вредност како својим присуством не би пореметило распоред наелектрисања која стварају поље.

■ 3. ПОЉЕ ТАЧКАСТОГ НАЕЛЕКТРИСАЊА. Тачкасто наелектрисање Q , које се налази у хомогној средини диелектричне константе ϵ у произвољној тачки простора, чији је положај у односу на тачкасто наелектрисање Q одређен вектором положаја $\vec{r} = r\hat{r}$, ствара електрично поље



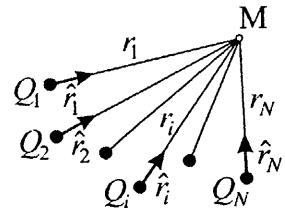
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

Поље тачкастог наелектрисања је радијално. Оријентисано је од наелектрисања у случају да је оптрећење позитивно и обрнуто.

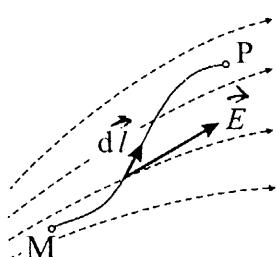
■ 4. ПОЉЕ СИСТЕМА ТАЧКАСТИХ НАЕЛЕКТРИСАЊА. Систем тачкастих наелектрисања, $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_N$, у некој тачки простора M ствара електрично поље које је једнако векторском збиру појединачних наелектрисања,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i,$$

где је $\vec{r}_i = r_i \hat{r}_i$ – вектор положаја тачке M у односу на наелектрисање Q_i .



■ 5. ЕЛЕКТРИЧНИ СКАЛАР - ПОТЕНЦИЈАЛ. Електрични скалар - потенцијал (потенцијал) неке тачке M у електричном пољу дефинише се као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од те тачке до, унапред изабране, референтне тачке P :



$$\Phi = \int_M^P \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Референтна тачка нултог потенцијала P се може изабрати и у бесконачности (уколико није посебно наглашено где се налази, сматра се да је референтна тачка у бесконачности). У том случају је:

$$\varphi = \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

■ 6. ПОТЕНЦИЈАЛ ТАЧКАСТОГ НАЕЛЕКТРИСАЊА. Потенцијал тачкастог наелектрисања Q у хомогеној средини диелектричнс константе ϵ , на растојању r од наелектрисања, у односу на референтну тачку P на растојању r_p је:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right).$$

У односу на референтну тачку у бесконачности потенцијал је:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}.$$

■ 7. ПОТЕНЦИЈАЛ СИСТЕМА ТАЧКАСТИХ НАЕЛЕКТРИСАЊА. Систем тачкастих наелектрисања, $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_N$, у некој тачки простора M , у хомогеној средини, има за последицу потенцијал који је једнак збиру потенцијала појединих наелектрисања,

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i},$$

где је r_i растојање између тачке M и наелектрисања Q_i .

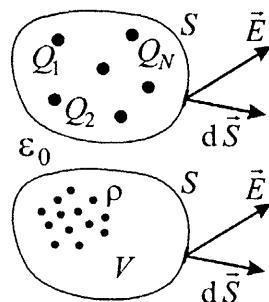
■ 8. ГАУСОВ ЗАКОН. Гаусов закон је један од основних законова електростатичких поља у вакууму. Гаусов закон гласи: Излазни флукс вектора електростатичког поља кроз произвољну затворену површину једнак је количнику укупне количине елекtriцитета обухваћене том површином и диелектричне константе вакуума,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0},$$

односно

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где је V запремина обухваћена површином S .



- 9. ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ И ПОТЕНЦИЈАЛ УСАМЉЕНЕ СФЕРЕ. Усамљена сфера, полупречника a , која се налази у хомогеној средини диелектричне константе ϵ и која је наелектрисана равномерно наелектрисањем Q , има за последицу у тачки A, чији је вектор положаја у односу на центар сфере $\vec{r} = r\hat{r}$, електрично поље и потенцијал (у односу на референтну тачку у бесконачности)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases} \quad \text{и} \quad \Phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon a}, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, & r \geq a \end{cases}$$

- 10. ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ И ПОТЕНЦИЈАЛ УСАМЉЕНОГ НЕОГРАНИЧЕНО ДУГОГ ЦИЛИНДРА. Усамљени цилиндар, кружног попречног пресека полупречника a , који се налази у хомогеној средини диелектричне константе ϵ и који је наелектрисан наелектрисањем сталне подужне густине q' , има за последицу у тачки A, чији је вектор положаја у односу на осу цилиндра $\vec{r} = r\hat{r}$, електрично поље и потенцијал (у односу на референтну тачку на растојању r_p од осе цилиндра)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{q'}{2\pi\epsilon r} \hat{r}, & r \geq a \end{cases} \quad \text{и} \quad \Phi = \begin{cases} \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_p}{a}, & r \leq a \\ \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_p}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

- 11. ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ НЕОГРАНИЧЕНЕ РАВНИ. Електрично поље неограничене равни, која се налази у хомогеној средини диелектричне константе ϵ и која је наелектрисана наелектрисањем сталне површинске густине η , је

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\epsilon} \hat{n},$$

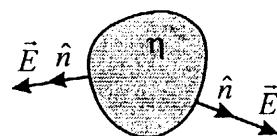
где је \hat{n} – јединични вектор нормале на раван.

- 12. ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ ИЗМЕЂУ ДВЕ НЕОГРАНИЧЕНЕ ПАРАЛЕЛНЕ РАВНИ. Вектор електричног поља између две неограничене паралелне равни, између којих је хомогена средина диелектричне константе ϵ , наелектрисаних равномерно наелектрисањима исте површинске густине супротног знака ($+\eta$ и $-\eta$), управан је на равни и оријентисан од позитивно ка негативно наелектрисаној равни, а интензитет му је:

$$E = \frac{|\eta|}{\epsilon}.$$

- 13. ПОНАШАЊЕ ПРОВОДНИКА У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ. Електростатичко поље у унутрашњости проводника мора бити једнако нули. На површини проводника електростатичко поље има само нормалну компоненту,

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\epsilon} \hat{n},$$



где је \hat{n} - јединични вектор излазне нормале на површину проводника. Количина слектрицитета доведена проводнику распоређује се по његовој површини, тако да је укупна количина слектрицитета у унутрашњости проводника једнака нули. Све тачке проводника налазе се на истом потенцијалу, а површина проводника је сквипотенцијална површина.

- 14. КАПАЦИТИВНОСТ УСАМЉЕНОГ ПРОВОДНИКА. Капацитивност усамљеног проводника дефинише се као количник количине слектрицитета на проводнику и потенцијала проводника:

$$C = \frac{Q}{\Phi}.$$

Капацитивност усамљене проводне лопте, полуупречника a , која се налази у хомогеној средини диелектричес константе ϵ је

$$C = 4\pi\epsilon a.$$

- 15. КАПАЦИТИВНОСТ КОНДЕНЗATORA. Систем од два проводника, или две групе међусобно повезаних проводника, оптерећених једнаким количинама слектрицитета супротног знака, назива се кондензатор. Капацитивност кондензатора се дефинише као

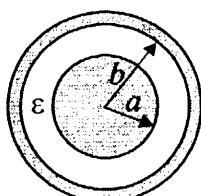
$$C = \frac{Q}{U},$$

где је Q – оптрећење проводника а U – потенцијална разлика (напон) између њих.

Капацитивност појединачних типова кондензатора са хомогеним диелектриком дислекстричне константе ϵ је:

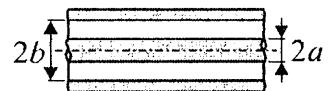
- *сферни кондензатор* полуупречника слектричних дијаметара a и b

$$C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a},$$



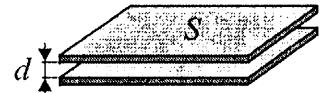
◆ **цилиндрични кондензатор** полупречника слсктрода a и b (подужна капацитивност)

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)},$$

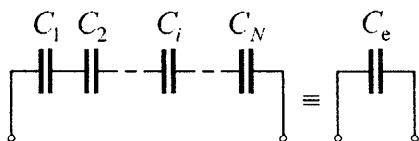


◆ **раван (плоочасти) кондензатор** површине електрода S и размака између њих d

$$C = \epsilon \frac{S}{d}.$$

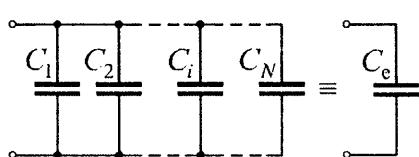


◆ 16. ЕКВИВАЛЕНТНА КАПАЦИТИВНОСТ РЕДНЕ И ПАРАЛЕЛНЕ ВЕЗЕ КОНДЕНЗАТОРА. Редна, односно паралелна веза N кондензатора, капацитивности $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_N$, може се заменити једним, еквивалентним кондензатором чија се капацитивност одређује као:



◆ **редна веза** кондензатора

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i},$$



◆ **паралелна веза** кондензатора

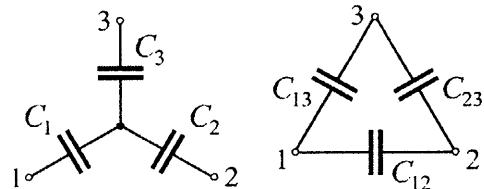
$$C_e = \sum_{i=1}^N C_i.$$

◆ 17. ТРАНСФИГУРАЦИЈА ЗВЕЗДА - ТРОУГАО. Веза кондензатора у звезду може се трансфигурирати у троугао и обрнуто. Уколико су познате капацитивности везе у звезду, капацитивности везе у троугао се израчунају као:

$$C_{12} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2 + C_3),$$

$$C_{13} = C_1 C_3 / (C_1 + C_2 + C_3),$$

$$C_{23} = C_2 C_3 / (C_1 + C_2 + C_3).$$



Из познатих капацитивности везе у троугао, капацитивности везе у звезду се израчунају као:

$$C_1 = C_{12} + C_{13} + C_{12} C_{13} / C_{23},$$

$$C_2 = C_{12} + C_{23} + C_{12} C_{23} / C_{13},$$

$$C_3 = C_{13} + C_{23} + C_{13} C_{23} / C_{12}.$$

■ 18. ВЕКТОР ЕЛЕКТРИЧНЕ ИНДУКЦИЈЕ. Вектор електричне индукције, или вектор дислектричног помераја, дефинише се као

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где је ϵ_0 – диелектрична константа вакуума и \vec{P} – вектор јачине поларизације. У изотропним срединама је

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E},$$

где је ϵ_r – релативна дислектична константа средине.

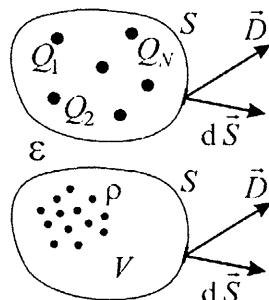
■ 19. МАКСВЕЛОВ ПОСТУЛАТ. Максвелов постулат представља генерализацију Гаусовог закона и гласи: Излазни флукс вектора електричне индукције кроз произвољну затворену површину једнак је укупно количини слободних наелектрисања која су обухваћена том површином,

$$\psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma Q,$$

односно

$$\psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV,$$

где је V запремина обухваћена површином S .



■ 20. ЕНЕРГИЈА КОНДЕНЗATORА. Енергија кондензатора капацитивности C може се одредити на основу израза

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

где је Q - количина електричитета на електродама кондензатора а U - напон између њих.

■ 21. ГУСТИНА ЕНЕРГИЈЕ ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОГ ПОЉА. Густина енергије електростатичког поља одређује се на основу израза

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}.$$

Ако је густина енергије електростатичког поља позната, енергија електростатичког поља у неком домену запремине V се одређује као

$$W = \int_V w dV.$$

■ 22. СИЛА ИЗМЕЂУ ЕЛЕКТРОДА КОНДЕНЗATORА. За одређивање силе између електрода кондензатора користи се метод виртуелних помераја. Ако се под дејством спољашње силе F_s једна од електрода помери за Δx у правцу дејства силе, извршиће се рад

$$\Delta A = F_s \Delta x.$$

Овај рад једнак је промени снергије кондензатора

$$\Delta W = W_2 - W_1,$$

где је W_1 енергија кондензатора пре, а W_2 после померања једног од електрода за Δx .

Интензитет силе између електрода кондензатора одређује се као

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \Big|_{Q=\text{const.}}$$

за случај да је оптерећење кондензатора константно, односно

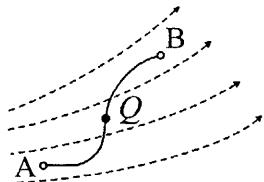
$$F = \frac{-\Delta W}{\Delta x} \Big|_{U=\text{const.}}$$

ако је напон између електрода кондензатора константан.

■ 23. РАД ПРИ ПОМЕРАЊУ НАЕЛЕКТРИСАЊА У ПОЉУ. Приликом померања наелектрисања Q у електростатичком пољу по произвольној путањи од тачке A , која се налази на потенцијалу Φ_A , до тачке B , која се налази на потенцијалу Φ_B , изврши се рад

$$A = Q(\Phi_A - \Phi_B).$$

Ако се за A добије позитивна вредност, рад врше силе поља. Ако се рад врши противу сила поља за A се добија негативна вредност.



ЕЛЕКТРОКИНЕТИКА

■ 24. ЈАЧИНА ЕЛЕКТРИЧНЕ СТРУЈЕ. Јачина стационарне електричне струје, I , кроз попречни пресек проводника дефинише се као количник протекле количине електричног струја, Q , и времена за које је та количина електричног струја протекла,

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Када се јачина електричне струје мења у времену, њена тренутна вредност, i , дефинисана је диференцијалним количником

$$i = \frac{dQ}{dt}.$$

■ 25. ВЕКТОР ГУСТИНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ СТРУЈЕ. Правац вектора густине струје у одређеној тачки струјног поља одређен је правцем кретања електрона проводности, док му је смер супротан смеру кретања електрона. У случају хомогеног струјног поља, када је струја равномерно распоређена по површини попречног пресека проводника, интензитет вектора густине електричне струје дефинисан је односом јачине електричне струје кроз проводник, I , и површине попречног пресека проводника, S ,

$$J = \frac{I}{S}.$$

У нехомогеном струјном пољу интензитет вектора густине електричне струје дефинише се као диференцијални количник

$$J = \frac{dI}{dS_n},$$

где је dS_n - елементарна површина управна на правац кретања покретљивих електричних оптерећења, а dI - јачина електричне струје кроз ову површину.

Вектор густине електричне струје може се израчунати на основу познате средње макроскопске брзине слободних носилаца електричног струја, \bar{v} , њихове запреминске густине, N' , и оптерећења, Q_e , као

$$\bar{J} = N' Q_e \bar{v}.$$

Уколико је познат вектор густине електричне струје, \vec{J} , јачина електричне струје I кроз произвољну површину S у струјном пољу одређује се као флукс вектора густине струје кроз ту површину,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

■ **26. ЈЕДНАЧИНА КОНТИНУИТЕТА И ПРВИ КИРХОФОВ ЗАКОН.** Једначина континуитета је математички исказ закона о конзервацији електричног поља и за стационарно поље гласи

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Овај израз је познат још и под именом I Кирхофов закон.

У анализи сложених електричних кола, сачињених од квазилинейних проводника, користи се једноставнији облик I Кирхофовог закона у коме се појављују јачине електричних струја у проводницима. За чвор сложеног електричног кола (место где се сустичу три и више проводника) I Кирхофов закон гласи: алгебарски збир јачина струја у проводницима који се сустичу у једном чвиру електричног кола је једнак нули,

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0.$$

Струје, чији су референтни смерови оријентисани од чвора (истичу из чвора) узимају се са позитивним предзнаком (јер одговарају позитивном излазном флуксу вектора густине струје), и обратно.

Веома често се I Кирхофов закон формулише и као: збир струја које истичу из једног чвора једнак је збиру струја које у тај чврор утичу,

$$\Sigma I_{\text{истичу из чвора}} = \Sigma I_{\text{утичу у чврор}}.$$

■ **27. ОМОВ ЗАКОН.** Код линеарних проводника, када им се темпера- тура одржава константном, постоји линеарна зависност између струје I кроз проводник и напона U на његовим крајевима,

$$I = GU, \quad G = \frac{I}{U}, \quad U = \frac{I}{G}.$$

Ова релација се назива Омов закон, а величина G електрична проводност. Рецирочна вредност електричне проводности, $R = 1/G$, назива се електрична отпорност, па се Омов закон може писати у облику

$$I = \frac{U}{R}, \quad R = \frac{U}{I}, \quad U = RI.$$

У случају танких жичаних проводника дужине l и константног попречног пресека површине S , начињених од хомогеног материјала специфичне отпорности ρ , електрична отпорност се израчујава као

$$R = \rho \frac{l}{S} .$$

Реципрочна вредност специфичне отпорности,

$$\sigma = \frac{1}{\rho} ,$$

назива се специфична проводност, па се проводност неког проводника (отпорника) може рачунати као

$$G = \sigma \frac{S}{l} .$$

28. УОПШТЕНА ФОРМУЛА ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ ОТПОРНОСТИ. Када су попречне димензије проводника мале у односу на његову дужину, и када се густина струје и остале величине које карактеришу струјно поље могу сматрати хомогеним по попречном пресеку, за проводник се каже да је квазилинеичан. У том случају проводник се може третирати као елементарна струјна туба, па се његова отпорност између сквипотенцијалних попречних пресека 1 и 2 израчујава као

$$R = \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} ,$$

при чему се, у најопштијем случају, ρ и S могу мењати дуж проводника.

29. ПРОМЕНА ОТПОРНОСТИ СА ТЕМПЕРАТУРОМ. Специфична отпорност материјала се мења са температуром и, у умереном опсегу промене температуре, може се израчујати као

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)] ,$$

где је ρ – специфична отпорност на температури θ , ρ_0 – специфична отпорност на температури θ_0 и α – температурни коефицијент отпорности.

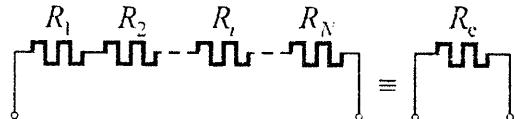
Уколико је позната отпорност неког проводника на температури θ_0 , R_0 , тада се његова отпорност на температури θ , R , може израчунати као:

$$R = R_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)] .$$

30. ЕКВИВАЛЕНТНА ОТПОРНОСТ (ПРОВОДНОСТ) РЕДНЕ И ПАРАЛЕЛНЕ ВЕЗЕ ОТПОРНИКА. Редна, односно паралелна веза N отпорника, чије су отпорности $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_N$, односно проводности $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_N$, може се заменити једним, еквивалентним отпорником чија се отпорност (проводност) одређује као:

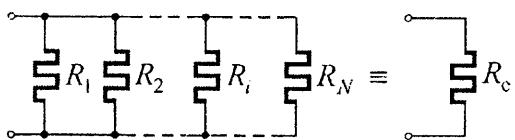
◆ *редна веза* отпорника

$$R_e = \sum_{i=1}^N R_i, \quad \frac{1}{G_e} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i},$$



◆ *паралелна веза* отпорника

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}, \quad G_e = \sum_{i=1}^N G_i.$$



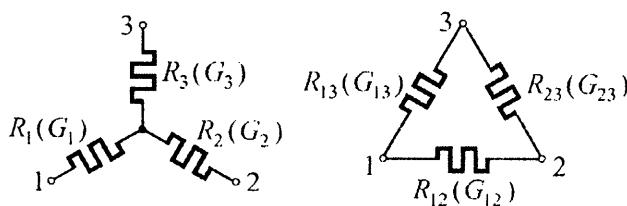
У случају редне везе два отпорника за одређивање еквивалентне проводности погодно је користити израз

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2},$$

док је у случају паралелне везе за одређивање еквивалентне отпорности погодно користити израз

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

31. ТРАНСФИГУРАЦИЈА ЗВЕЗДА - ТРОУГАО. Веза отпорника



у звезду може се трансфигурисати у троугао, и обрнуто. При томе, између појединих отпорности, односно проводности, постоје следеће везе:

◆ *звезда у троугао*

$$R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_3$$

$$G_{12} = G_1 G_2 / (G_1 + G_2 + G_3)$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + R_1 R_3 / R_2$$

$$G_{13} = G_1 G_3 / (G_1 + G_2 + G_3)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + R_2 R_3 / R_1$$

$$G_{23} = G_2 G_3 / (G_1 + G_2 + G_3)$$

◆ *троугао у звезду*

$$R_1 = R_{12}R_{13}/(R_{12} + R_{13} + R_{23}) \quad G_1 = G_{12} + G_{13} + G_{12}G_{13}/G_{23}$$

$$R_2 = R_{12}R_{23}/(R_{12} + R_{13} + R_{23}) \quad G_2 = G_{12} + G_{23} + G_{12}G_{23}/G_{13}$$

$$R_3 = R_{13}R_{23}/(R_{12} + R_{13} + R_{23}) \quad G_3 = G_{13} + G_{23} + G_{13}G_{23}/G_{12}$$

■ 32. ЦУЛОВ ЗАКОН. Снага P , којом се рад сила стационарног електричног поља трансформише у топлотну енергију на неком отпорнику, одређује се као

$$P = RI^2 = U^2/R = UI.$$

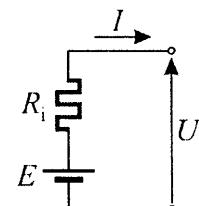
У случају потрошача произвљеног типа, снага P којом се рад сила стационарног електричног поља трансформише у друге видове рада и енергије, израчунава се као производ напона U на крајевима потрошача и струје I кроз потрошач,

$$P = UI.$$

■ 33. РЕАЛНИ НАПОНСКИ ГЕНЕРАТОР. Електрички генератор је део електричног кола у коме се врши трансформација других видова енергије или рада у енергију стационарног електричног поља. Основне карактеристике генератора су електромоторна сила, E , и унутрашња отпорност, R_i .

Генератор се може представити као редна веза електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i . Овакав генератор назива се реални напонски генератор. Напон на његовим прикључним крајевима функција је оптерећења генератора (струје кроз генератор):

$$U = E - R_i I.$$



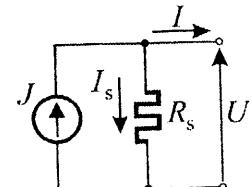
Овај последњи израз назива се спољашња карактеристика генератора.

Уколико је унутрашња отпорност генератора једнака нули, $R_i = 0$, напон на крајевима генератора независан је од оптерећења и једнак је електромоторној сили E . Такав генератор, који се састоји само од електромоторне силе, у пракси не постоји и назива се идеалан напонски генератор.

Реалан напонски генератор могуће је представити као редну везу идеалног напонског генератора и унутрашње отпорности. Уколико је унутрашња отпорност генератора много мања од отпорности потрошача ($R_i \ll R_p$) генератор се може сматрати идеалним.

■ 34. РЕАЛНИ СТРУЈНИ ГЕНЕРАТОР. У многим случајевима по-годно је користити једну другачију интерпретацију генератора - струјни генератор. Реални струјни генератор се састоји од идеалног струјног генератора, који даје сталну струју J без обзира на то какво је коло прикључено на генератор, и паралелно везане унутрашње отпорности R_s . Струја I којом реални струјни генератор напаја потрошач је функција оптерећења генератора (напона на његовим крајевима):

$$I = J - I_s = J - \frac{U}{R_s}.$$



Уколико је унутрашња отпорност генератора много већа од отпорности потрошача ($R_s \gg R_p$) генератор се може сматрати идеалним.

■ 35. ТРАНСФИГУРАЦИЈА ГЕНЕРАТОРА. На основу познатих елемената реалног напонског генератора (E, R_i) могу се одредити елементи еквивалентног реалног струјног генератора (J, R_s) и обратно,

$$J = E/R_i, \quad R_s = R_i, \quad E = JR_s.$$

Треба напоменути да трансфигурација идеалних генератора није могућа.

■ 36. ПРИЛАГОЂЕЊЕ ПРИЈЕМНИКА НА ГЕНЕРАТОР. За пријемник се каже да је прилагођен па генератор онда када се на њему развија максимална снага. Ово је испуњено у случају да је отпорност пријемника (R_p) једнака унутрашњој отпорности генератора (R_i),

$$R_p = R_i.$$

У том случају на пријемнику се развија снага

$$P = \frac{E^2}{4R_i},$$

док је степен корисног дејства система генератор - пријемник $\eta = 50\%$.

■ 37. ОМОВ ЗАКОН ЗА ПРОСТО КОЛО. Струја у простом колу одређује се као:

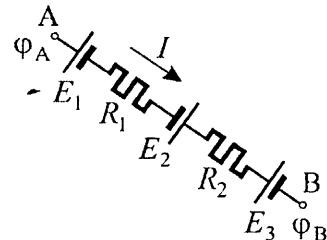
$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R_i + \Sigma R}.$$

При томе електромоторне силе чији је смер сагласан са референтним смером струје I треба узимати са позитивним предзнаком, и обратно.

38. ОМОВ ЗАКОН ЗА ГРАНУ СЛОЖЕНОГ КОЛА. Нека је задата грана АВ сложеног електричног кола која садржи произвољан број напонских генератора и отпорника и иска је референтни смер струје од тачке А ка тачки В. Потенцијална разлика (напон) између тачака А и В се одређује као

$$U_{AB} = \Phi_A - \Phi_B = \Sigma RI - \Sigma E,$$

при чему се напони на отпорницима узимају са позитивним предзнаком уколико је референтни смер струје оријентисан од тачке А ка тачки В и обрнуто. Електромоторне сile се, такође, узимају са позитивним знаком уколико су оријентисане од тачке А ка тачки В (E_2) и обрнуто (E_1 и E_3).



Струја у грани АВ (за референтни смер од А ка В) одређује се као

$$I = \frac{U_{AB} + \Sigma E}{\Sigma R} = \frac{\Phi_A - \Phi_B + \Sigma E}{\Sigma R},$$

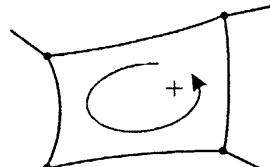
при чему се електромоторне сile узимају са позитивним знаком ако су оријентисане од тачке А ка тачки В и обрнуто. Овај последњи израз назива се још и Омов закон за грану сложеног кола.

39. ДРУГИ КИРХОФОВ ЗАКОН. У било којој затвореној контури електричног кола (затворена путања формирана од грана кола), која садржи произвољан број електромоторних сила и отпорника, мора бити задовољен други Кирхофов закон који се исказује следећом релацијом:

$$\Sigma E - \Sigma RI = 0,$$

односно

$$\Sigma E = \Sigma RI.$$



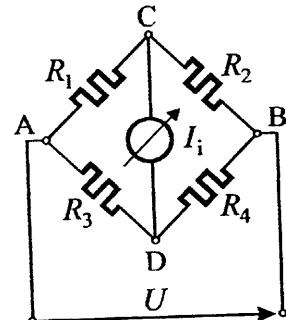
Електромоторне сile се узимају са позитивним знаком уколико је њихов смер сагласан са произвољно одабраним смером обиласка по контури и обрнуто. Напони на отпорницима (RI) се узимају са позитивним предзнаком ако је референтни смер струје кроз отпорник сагласан са смером обиласка по контури и обрнуто.

40. УСЛОВ РАВНОТЕЖЕ МОСТА ЗА ЈЕДНОСМЕРНУ СТРУЈУ. За мостно коло (мост) за једносмерну струју каже се да је у равнотежи када је напон између тачака С и D једнак нули ($U_{CD} = 0$), односно када је струја кроз дијагоналу CD једнака нули ($I_i = 0$).

Ово може бити испуњено само уколико је производ отпорности у наспрамним гранама моста међусобно једнак,

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 .$$

У случају да је испуњен услов равнотеже моста грана CD се може прекинути (јер је $I_i = 0$), односно тачке C и D се могу кратко спојити (јер су на истом потенцијалу, $U_{CD} = 0$).



◆ 41. СЛОЖЕНЕ ЛИНЕАРНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ МРЕЖЕ И МЕТОДИ ЊИХОВОГ РЕШАВАЊА. Линеарном слектричном мрежом (сложеним линеарним електричним колом) назива се скуп произвољно повезаних линеарних отпорника и генератора.

◆ Основни појмови

Грана кола је редна веза произвољног броја елемената (отпорника и генератора).

Чврт је место у колу где се сустичу (спајају) три и више грана.

Контура је произвољан затворени пут формиран од грана кола.

Независна контура је она контура која садржи бар једну грану која припада само њој и ни једној другој контури.

Независна грана је грана која припада само једној контури.

◆ Основни задаци

У највећем броју случајева, у једном сложеном слектричном колу познати су сви елементи (електромоторне силе напонских генератора, струје струјних генератора, унутрашње отпорности генератора и отпорности потрошача), а непознате су струје у појединим гранама кола, односно напони између поједињих чвркова. За одређивање непознатих величина користи се један од метода за решавање сложених слектричних кола.

◆ Методи решавања

Директна примена Кирхофових закона даје, у односу на друге методе, најгламазнији систем једначина. Број једначина, које треба поставити, једнак је броју непознатих струја у гранама кола. Након произвољног избора референтних смерова непознатих струја у појединим гранама, приступа се постављању једначина. По I Кирхофовом закону може се поставити (и поставља се) $N_C - 1$ независних једначина, где је N_C укупан број чвркова у колу. Преостали број потребних једначина поставља

се по II Кирхофовом закону за исти толики број произвољно одабраних независних контура. Независне контуре, за које се постављају једначина по II Кирхофовом закону, не смеју садржати идеалне струјне генераторе.

Метод независних (контурних) струја изведен је из Кирхофових закона и, у односу на њихову директну примену, има две битне предности: број једначина које се постављају за решавање једног сложног електричног кола једнак је броју једначина које би се поставиле по другом Кирхофовом закону, а тај систем једначина се поставља на веома једноставан и шематизован начин, независан од конфигурације кола. Уколико коло не садржи струјне генераторе, независне контуре и смерови контурних струја у њима се могу потпуно произвољно одабрати. У случају да у колу постоје струјни генератори, контуре се морају одабрати тако да идеални струјни генератори припадају независним гранама појединачних контура. У том случају струје тих контура су већ познате (једнаке струјама струјних генератора) и за њих се не постављају једначине.

Метод независних напона (потенцијала чворова) је, такође, изведен из Кирхофових закона. У односу на директну примену Кирхофових закона за решавање сложених електричних кола даје мањи број једначина (тај број је једнак броју једначина које би требало поставити по првом Кирхофовом закону), а систем једначина се поставља на једноставан и шематизован начин, независан од конфигурације кола. Уколико коло не садржи ни у једној од грана идеалне напонске генераторе, референтни чвор се може произвољно одабрати. Метод потенцијала чвррова се може применити и у случају да коло у појединим гранама садржи идеалне генераторе, под условом да су сви идеални генератори везани једним својим крајем за исти чвор. У том случају тај чвор се мора изабрати за референтни. Потенцијали чвррова, за које су везани други крајеви идеалних напонских генератора, су познати и једнаки електромоторним силама тих генератора. За те чврлове се не постављају једначине. Након одређивања потенцијала чвррова струје у појединим гранама се израчунавају директном применом Омовог закона за грану сложеног кола.

■ **42. ТЕОРЕМЕ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛА.** Од већег броја теорема сложених кола, овде ће бити наведене само неке од њих.

■ **Теорема суперпозиције**

Јачина струје у било којој грани сложеног линсарног електричног кола, настала као последица једновременог дејства свих генератора у колу, једнака је алгебарском збиру јачина струја које би у тој грани текле под дејством појединачних генератора када су сви остали генератори замењени својим унутрашњим отпорностима.

◆ Тевененова теорема

Сваки линеарни активни двопол са непроменљивим отпорницима и генераторима може се заменити једним реалним напонским генератором (Тевененовим генератором) чија је електромоторна сила једнака напону празног хода двопола а унутрашња отпорност еквивалентној отпорности двопола.

◆ Нортонова теорема

Сваки линеарни активни двопол са непроменљивим отпорницима и генераторима може се заменити једним реалним струјним генератором (Нортоновим генератором) чија је струја једнака струји кратког споја двопола а унутрашња отпорност еквивалентној отпорности двопола.

◆ Компензациона теорема

Компензациона теорема има два алтернативна исказа:

- Једна грана сложеног електричног кола, или њен део отпорности R , у којој се зна јачина струје I , може се заменити напонским генератором електромоторне силе $E = RI$, чији је смер супротан смеру струје.

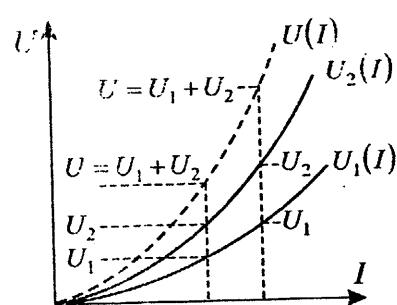
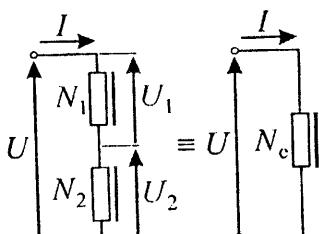
- Једна грана сложеног електричног кола, или њен део отпорности R , у којој се зна јачина струје I , може се заменити идејним струјним генератором чија је струја исте јачине и смера као и струја I .

◆ 43. РЕДНА ВЕЗА НЕЛИНЕАРНИХ ОТПОРНИКА. Редна веза два нелинеарна отпорника, N_1 и N_2 , чије су волтамперске карактеристике $U_1(I)$ и $U_2(I)$ задате, може се заменити једним еквивалентним нелинеарним отпорником, N_e .

Ову замену је могуће извршити под условом да, при било којој јачини струје, напон на еквивалентном отпорнику буде једнак збиру напона на отпорницима N_1 и N_2 ,

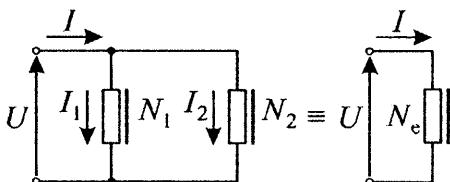
$$U = U_1 + U_2.$$

Из тог услова директно следи поступак за одређивање волтамперске карактеристике еквивалентног нелинеарног отпорника: за већи број различитих вредности струје I одређе се са волтамперских карактеристика $U_1(I)$ и $U_2(I)$ напони U_1 и U_2 на нелинеарним отпорницима N_1 и N_2 . Затим се одређује напон U на еквивалентном нелинеарном отпорнику као збир напона



U_1 и U_2 . На тај начин се добија низ тачака (I, U) карактеристике еквивалентног нелинеарног отпорника. Спајањем ових тачака добија се волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника.

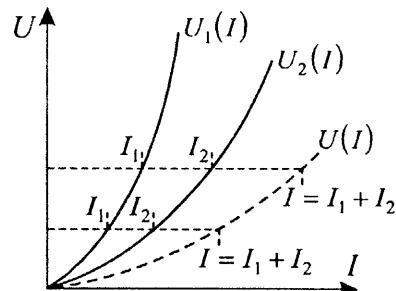
■ **44. ПАРАЛЕЛНА ВЕЗА НЕЛИНЕАРНИХ ОТПОРНИКА.** Паралелна веза два нелинеарна отпорника, N_1 и N_2 , чије су волтамперске карактеристике $U_1(I)$ и $U_2(I)$ задате, може се заменити једним еквивалентним нелинеарним отпорником, N_e . Ову замену могуће је извршити под условом да је, при било коме напону, струја кроз еквивалентни нелинеарни отпорник једнака збиру струја кроз нелинеарне отпорнике N_1 и N_2 ,



условом да је, при било коме напону, струја кроз еквивалентни нелинеарни отпорник једнака збиру струја кроз нелинеарне отпорнике N_1 и N_2 ,

$$I = I_1 + I_2.$$

Из тог услова директно следи поступак за одређивање волтамперске карактеристике еквивалентног нелинеарног отпорника: за већи број различитих вредности напона U одреде се са волтамперских карактеристика $U_1(I)$ и $U_2(I)$ струје I_1 и I_2 кроз нелинеарне отпорнике N_1 и N_2 . Затим се одреди струја I кроз еквивалентни нелинеарни отпорник сабирањем струја I_1 и I_2 . Тако се добија низ тачака (I, U) карактеристике еквивалентног нелинеарног отпорника. Спајањем ових тачака добија се волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника.



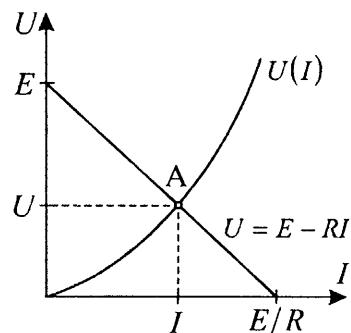
■ **45. РАДНА ПРАВА И РАДНА ТАЧКА.** Када је нелинеарни отпорник прикључен на генератор електромоторне силе E преко отпорника отпорности R (који се може сматрати унутрашњом отпорношћу генератора), радна тачка А је одређена пресеком волтамперске карактеристике нелинеарног отпорника и праве

$$U = E - RI.$$

Ова права, која представља спољашњу карактеристику генератора, назива се још и радна права. За њено цртање најпогодније је одабрати тачке на координатним осама,

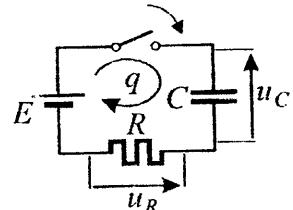
$$I = 0 \Rightarrow U = E$$

$$U = 0 \Rightarrow I = E/R.$$



46. ОПТЕРЕЋИВАЊЕ КОНДЕНЗATORA ПРЕКО ОТПОРНИКА. Када се неонтерећен кондензатор капацитивности C , затварањем прекидача у тренутку $t = 0$, прикључи преко отпорника отпорности R на генератор електромоторне сile E , количина слектрицитета q која до тренутка t протекне кроз коло је

$$q = EC(1 - e^{-t/\tau}),$$



где је $\tau = RC$ временска константа. Струја у колу и напон на кондензатору су

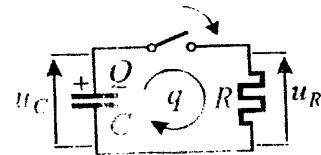
$$i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

и

$$u_C = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

47. РАСТЕРЕЋИВАЊЕ КОНДЕНЗATORA ПРЕКО ОТПОРНИКА. Када се електроде кондензатора капацитивности C , онтерећеног количином слектрицитета Q , у тренутку $t = 0$ затварањем прекидача споје преко отпорника отпорности R , количина слектрицитета q која до тренутка t протекне кроз коло је

$$q = Q(1 - e^{-t/\tau}),$$

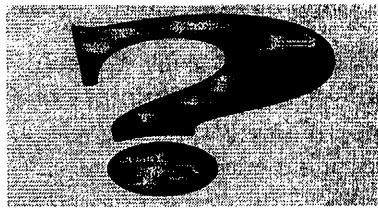


где је $\tau = RC$ временска константа. Струја у колу и напон на кондензатору су

$$i = \frac{Q}{RC} e^{-t/\tau}$$

и

$$u_C = \frac{Q}{C} e^{-t/\tau}.$$



ДЕО I

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

1. КУЛОНОВ ЗАКОН

- 1.1. Два тачкаста наелектрисања, $Q_1 = 2 \text{ pC}$ и $Q_2 = -3 \text{ pC}$, налазе се на међусобном растојању $d = 30 \text{ cm}$ у вакууму. Одредити карактер и интензитет силе између њих.
- 1.2. Два тачкаста наелектрисања, $Q_1 = Q$ и $Q_2 = 4Q$, налазе се на међусобном растојању $d = 20 \text{ cm}$ у вакууму. Између наелектрисања делује одбојна сила интензитета $F = 3.6 \text{ pN}$. Одредити вредност наелектрисања Q_1 и Q_2 .
- 1.3. Уколико се тачкаста наелектрисања из претходног задатка налазе у течном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 4$, одредити растојање између њих d_1 тако да сила има исту вредност као када се наелектрисања налазе на растојању d у вакууму.
- 1.4. Тачкаста наелектрисања $Q_A = 5 \text{ pC}$ и $Q_B = 4 \text{ pC}$ налазе се у тачкама A(0,0) и B(60cm,80cm) Декартовог правоуглог координатног система у вакууму. Одредити силу \vec{F}_{AB} којом наслектрисање Q_A делује на наелектрисање Q_B .
- 1.5. Тачкаста наелектрисања $Q_C = -5 \text{ pC}$ и $Q_D = 10 \text{ pC}$ налазе се у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 4$, у тачкама C(-0.3m,0.2m) и D(0.1m,-0.1m) Декартовог правоуглог координатног система система. Одредити силе \vec{F}_{CD} и \vec{F}_{DC} , као и њихов интензитет.
- 1.6. Две мале проводне куглице, истих димензија, оптерећене су количинама електрицитета $Q_1 = 10 \text{ pC}$ и $Q_2 = -20 \text{ pC}$ и налазе се у вакууму на међусобном растојању $d = 0.5 \text{ m}$. Одредити карактер и интензитет силе између куглица. Ако се куглице споје, а затим размакну на исто растојање d , одредити карактер и интензитет силе између њих.

1.7. Две мале проводне куглице, истих димензија, оптерећене су количинама елекtriцитета $Q_1 = Q$ и $Q_2 = 2Q$ и налазе се на међусобном растојању $d = 10\text{ cm}$, тако да је интензитет сile између њих F . Ако се куглице споје, а затим размакну на растојање d_1 , сила између њих ће остати иста. Одредити растојање d_1 . Куглице се налазе у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2.7$.

1.8. Одредити однос електростатичке и гравитациона сile између електрона и протона.

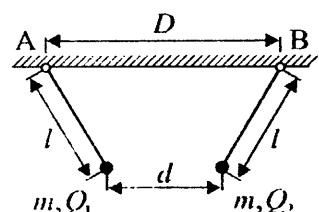
1.9. Две веома мале куглице, маса $m_1 = m_2 = m$, висе о кончићима једнаке дужине $l = 10\text{ cm}$, учвршћеним у тачки A. Када се куглице оптерете количинама слекtriцитета $Q_1 = Q_2 = Q = 10\text{ pC}$, онце се одбијају тако да сваки кончић заклапа са вертикалом угао $\alpha = \pi/6$ (слика 1.9). Одредити масу куглица.

Слика 1.9.

Напомена: Куглице сматрати тачкастим наелектрисањима. Масу кончића занемарити. Систем се налази у вакууму.

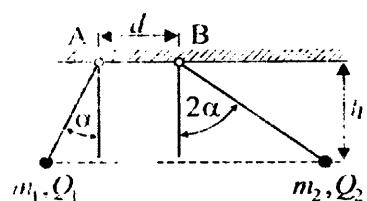
1.10. Када се систем куглица из претходног задатка потопи у течни диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$ и специфичне масе $\gamma_d = 0.8\text{ g/cm}^3$, угао који сваки кончић гради са вертикалом износиће $\alpha_1 = 26^\circ$. Одредити специфичну масу куглица.

1.11. Две мале куглице, истих димензија и исте масе, $m = 0.1\text{ g}$, висе о концима занемариво мале масе, дужине $l = 1\text{ m}$, учвршћеним у тачкама A и B на растојању $D = 1.9\text{ m}$. Систем се налази у вакууму. Када се куглице оптерете количинама слекtriцитета $Q_1 = Q$ и $Q_2 = -16Q$ оне се привлаче до међусобног растојања $d = 0.9\text{ m}$ (слика 1.11). Одредити наелектрисања куглица. Куглице сматрати тачкастим наелектрисањима.



Слика 1.11.

1.12. Две куглице висе о концима, занемариво мале масе, учвршћеним у тачкама A и B на растојању d . Систем се налази у вакууму. Када се куглице оптерете количинама слекtriцитета Q_1 и Q_2 оне ће заузети равнотежни положај као на слици 1.12. Ако је маса прве куглице m_1 позната, одредити масу друге куглице, дужине концића и висину h . Димензије куглица су

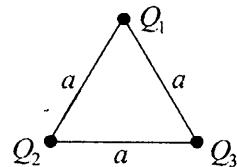


Слика 1.12.

много мање од њиховог међусобног растојања, тако да се могу сматрати тачкастим наслектрисањима. Нумерички подаци: $Q_1 = 50 \text{ nC}$, $Q_2 = 40 \text{ nC}$, $d = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $m_i = 20 \text{ mg}$.

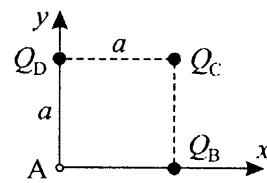
1.13. Тачкаста оптерећења $Q_A = 2 \text{ nC}$, $Q_B = -1.2 \text{ nC}$ и $Q_C = 1 \text{ nC}$ налазе се у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2.5$, у тачкама $A(0,0)$, $B(0,0.8 \text{ m})$ и $C(0.6 \text{ m}, 0.8 \text{ m})$ Декартовог правоуглог координатног система. Одредити силу на оптерећење Q_C .

1.14. Три тачкаста наелектрисања, $Q_1 = -10 \text{ pC}$ и $Q_2 = Q_3 = 10 \text{ pC}$, налазе се у теменима једнакостраног треугла странице $a = 10 \text{ cm}$. Распоред наслектрисања приказан је на слици 1.14. Одредити силу \vec{F} која делује на свако од наелектрисања. Систем се налази у вакууму.



Слика 1.14.

1.15. Три идентична тачкаста наслектрисања, $Q_B = Q_C = Q_D = Q = 10 \text{ pC}$, налазе се у вакууму, у теменима квадрата странице $a = 0.3 \text{ m}$ (слика 1.15). Одредити силу на наелектрисање Q_C .



Слика 1.15.

1.16. Непознато тачкасто наелектрисање Q_A и тачкаста наелектрисања $Q_B = 2 \text{ pC}$, $Q_C = -5.2 \text{ pC}$ и $Q_D = 2 \text{ pC}$ налазе се у теменима квадрата странице $a = 0.35 \text{ m}$ у хомогеном дислектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 1.8$. Одредити наелектрисање Q_A тако да сила на наелектрисање Q_C буде једнака нули.

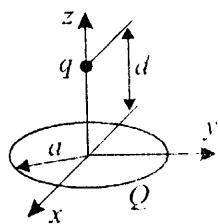
1.17. Тачкаста наелектрисања Q_A , $Q_B = 20 \text{ pC}$ и $Q_C = Q_D = -30 \text{ pC}$ налазе се у тачкама $A(0,0)$, $B(0.3 \text{ m}, 0)$, $C(0.3 \text{ m}, 0.3 \text{ m})$ и $D(0,0.3 \text{ m})$ Декартовог правоуглог координатног система. Наелектрисања се налазе у хомогеном дислектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$. Одредити наелектрисање Q_A тако да сила на наелектрисање Q_C има само x компоненту. За тако одређену вредност наелектрисања Q_A израчунати силу на наелектрисање Q_C .

1.18. Три тачкаста наслектрисања, $Q_A = Q_C = -Q$ и $Q_B = Q/4$, налазе се у тачкама $A(-a,0)$, $B(0,0)$ и $C(a,0)$ Декартовог правоуглог координатног система у вакууму. Одредити координате тачака на y оси у којима је сила на пробно наелектрисање ΔQ једнака нули.

1.19. Израчунати на који начин ће се распоредити количина електричитета Q довсдесна веома танком правом проводнику дужине l . За

решавање задатка претпоставити да је проводник подељен на 6 сегмената и да се у центру сваког сегмента налази сконцентрисано целокуно оптерећење тог сегмента (слика 1.19). Одредити оптерећење и подужно наслектрисање сваког сегмента ако је количина електричног зарјада доведена проводнику $Q = 10 \text{ pC}$ и дужина проводника $l = 24 \text{ cm}$.

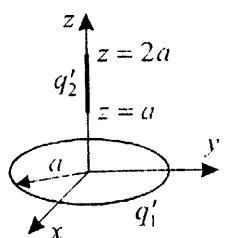
☞ 1.20. Решите претходни задатак за случај да је проводник подељен на 8 сегмената. Упоредите резултате са претходним.



Слика 1.21.

☞ 1.21. На танком кружном прстену полујречника a , чија се дебљина може занемарити, равномерно је распоређена количина електричног зарјада Q . На оси прстена, на растојању d од равни прстена, налази се тачкасто наслектрисање q (слика 1.21). Одредити силу на тачкасто наслектрисање. Систем се налази у вакууму. Нумерички подаци:

$$Q = 0.1 \text{ nC}, q = 1 \text{ pC}, a = 10 \text{ cm}, d = 15 \text{ cm}.$$



Слика 1.22.

☞ 1.22. Веома танак прстен, полујречника a , оптерећен је наслектрисањем сталне подужне густине q'_1 . Прстен се налази у равни $z = 0$ правоуглог координатног система са центром у координатном почетку. Дуж z -осе, од $z = a$ до $z = 2a$ (слика 1.22), налази се веома танак игла наслектрисан наслектрисањем сталне подужне густине q'_2 . Систем се налази у вакууму. Одредити силу којом прстен делује на иглу. Нумерички подаци: $q'_1 = q'_2 = 10 \text{ pC/m}$, $a = 10 \text{ cm}$.

☞ 1.23. У систему, описаном у претходном задатку, одредити вредност тачкастог наслектрисања Q које треба поставити у координатни почетак да би електростатичка сила на иглу била једнака нули.

☞ 1.24. Уколико се систем наслектрисања, описан у задатку 1.22, налази у хомогеном течном диелектрику релативне диселектричне константе $\epsilon_r = 2$, одредити вредност тачкастог наслектрисања Q које треба поставити у тачку $(0, 0, -a)$ тако да електростатичка сила на обруч буде једнака нули.



Слика 1.19

2. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ* И ПОТЕНЦИЈАЛ СИСТЕМА ТАЧКАСТИХ ОПТЕРЕЋЕЊА У ХОМОГЕНОМ ДИЕЛЕКТРИКУ

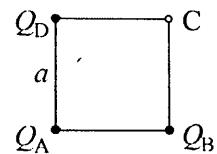
- 2.1.** Тачкасто оптерећење $Q = 100 \text{ pC}$ налази се у вакууму, у координатном почетку Декартовог правоуглог координатног система. Одредити вектор електричног поља и потенцијал (у односу на референтну тачку у бесконачности) у тачкама A(1 m, 0) и B(-0.8 m, 0.6 m).
- 2.2.** Тачкасто оптерећење $Q = -0.05 \text{ nC}$ налази се у хомогеном диселектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2.5$, у тачки A(0.3 m, 0) Декартовог правоуглог координатног система. Одредити вектор електричног поља и потенцијал у тачкама B(0, 0.4 m) и C(-0.5 m, -0.6 m).
- 2.3.** Електрично поље у тачки A на растојању $d = 0.2 \text{ m}$ од тачкастог наслектрисања Q има вредност $E_A = 90 \text{ V/m}$. Одредити електрично поље E_B у тачки B на растојању $d_1 = 0.4 \text{ m}$, као и потенцијал у обе тачке. Систем се налази у вакууму.
- 2.4.** Тачкасто наслектрисање Q налази се у хомогеном диселектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$. Познат је потенцијал у тачки A која се налази на растојању $d = 40 \text{ cm}$ од наслектрисања, $\Phi_A = 1.6 \text{ V}$. Израчунати електрично поље у тој тачки.
- 2.5.** Тачкасто оптерећење Q налази се у вакууму. Вектор електричног поља у тачки A, која се налази на растојању $r_A = 0.3 \text{ m}$ од наслектрисања, има интензитет $E = 100 \text{ V/m}$ и оријентисан је ка наслектрисању. Одредити потенцијале у тачкама B и C које се налазе на растојањима $r_B = 1 \text{ m}$ и $r_C = 100 \text{ m}$ од наслектрисања.
- 2.6.** Усамљено тачкасто оптерећење $Q = 80 \text{ pC}$ налази се у вакууму. Одредити потенцијал у тачки A, која се налази на растојању $a = 1 \text{ m}$ од тачкастог оптерећења, када је референтна тачка нултог потенцијала P:
- а* на растојању $r_p = 0.5 \text{ m}$ од тачкастог оптерећења,
 - б* на растојању $r_p = 2 \text{ m}$ од тачкастог оптерећења,
 - в* у бесконачности.
- 2.7.** Решити претходни задатак за случај да је $Q = -80 \text{ pC}$.

* У даљем тексту ће, због краткоће, уместо термина "вектор јачине електростатичког поља" и "интензитет вектора јачине електростатичког поља" бити коришћени термини "вектор електричног поља" и "електрично поље", или само "поље".

- 2.8.** Тачкаста наелектрисања $+Q$ и $-Q$ налазе се у вакууму, на међусобном растојању d . Израчунати електрично поље \vec{E} и потенцијал ϕ у тачки А која се налази на средини потега који спаја ова два наслектрисања. Нумерички подаци: $Q = 2 \text{ pC}$, $d = 10 \text{ cm}$.
- 2.9.** Два тачкаста наслектрисања, $Q_A = Q_B = 100 \text{ pC}$, налазе се у тачкама А(0,0) и В(1 m, 0) правоуглог координатног система, респективно. Одредити вектор електричног поља и потенцијал у тачки С(2 m, 0). Систем се налази у хомогеном дислектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$.
- 2.10.** Тачкаста наелектрисања $Q_A = 40 \text{ pC}$ и $Q_B = 10 \text{ pC}$ налазе се у вакууму, у тачкама А(0,0) и В(d , 0) правоуглог координатног система. Уколико је $d = 30 \text{ cm}$ одредити координате тачке С у којој је електрично поље једнако нули. Одредити потенцијал у тој тачки.
- 2.11.** Репити претходни задатак за случај да су вредности наелектрисања $Q_A = 40 \text{ pC}$ и $Q_B = -10 \text{ pC}$.
- 2.12.** Тачкасто наелектрисање $Q_A = Q$ налази се у хомогном диелектрику релативне диелектричне константе ϵ_r , у тачки А(0,0) правоуглог координатног система. Одредити координате тачке В у коју треба поставити наелектрисање $Q_B = 2Q$ тако да електрично поље у тачки С(d , 0) буде једнако нули. За тај случај израчунати потенцијал тачке С. Нумерички подаци: $Q = 0.1 \text{ nC}$, $d = 0.707 \text{ m}$, $\epsilon_r = 3$.
- 2.13.** Тачкаста наелектрисања Q_A и Q_B налазе се у тачкама А(0,0) и В(d , 0) правоуглог координатног система. Одредити координате тачака С и D на x -оси у којима је потенцијал једнак нули. Одредити вектор електричног поља у тим тачкама. Систем се налази у вакууму. Нумерички подаци: $Q_A = 20 \text{ pC}$, $Q_B = -30 \text{ pC}$, $d = 40 \text{ cm}$.
- 2.14.** Два тачкаста наслектрисања истих вредности, $Q_A = Q_B = Q$, налазе се у теменима А и В једнакостраног троугла странице $a = 10 \text{ cm}$ у вакууму. Одредити Q тако да потенцијал у темену С има вредност $\phi = -18 \text{ V}$. За овако одређену вредност Q одредити вектор електричног поља у темену С.
- 2.15.** Тачкаста наелектрисања $Q_A > 0$ и $Q_B > 0$ налазе се у тачкама А(0,0) и В(60 cm, 0) правоуглог координатног система у вакууму. Ако су познати потенцијали у тачкама С(20 cm, 0) и D(1 m, 0), $\phi_C = 1.8 \text{ V}$ и $\phi_D = 1.08 \text{ V}$, одредити наелектрисања Q_A и Q_B . Са овако одређеним наслектрисањима одредити вектор електричног поља у тачкама С и D.

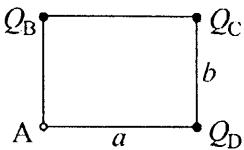
2.16. Решити претходни задатак за случај да је $Q_A > 0$ и $Q_B < 0$, и да су потенцијали у тачкама C и D, $\phi_C = 1.35 \text{ V}$ и $\phi_D = -0.09 \text{ V}$.

2.17. Три тачкаста наелектрисања, Q_A , Q_B и Q_D , налазе се у вакууму, у теменима A, B и D квадрата странице a (слика 2.17). Одредити вектор електричног поља и потенцијал у темену C. Бројни подаци: $a = 1 \text{ m}$, $Q_A = -6 \text{ nC}$, $Q_B = 4 \text{ nC}$, $Q_D = 3 \text{ nC}$.



Слика 2.17.

2.18. Тачкаста наелектрисања Q_B , Q_C и Q_D налазе се у теменима B, C и D правоугаоника страница a и b (слика 2.18). Одредити вектор електричног поља и потенцијал у темену A. Систем се налази у вакууму. Нумерички подаци: $Q_B = -2 \text{ pC}$, $Q_C = 16 \text{ pC}$, $Q_D = 5 \text{ pC}$, $a = 10\sqrt{3} \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$.



Слика 2.18.

2.19. У теменима правилног шестоугла странице a налазе се три позитивна и три негативна тачкаста наелектрисања истих апсолутних вредности Q . Одредити вектор електричног поља \vec{E} у центру шестоугла за различите комбинације распореда тачкастих наелектрисања. Систем се налази у хомогеном диселектрику релативне диелектричне константе ϵ_r .

2.20. У тачкама A($-a, 0$), B($0, a$) и C($a, 0$) правоуглог координатног система налазе се тачкаста наелектрисања $Q_A = 2Q$, $Q_B = -Q$ и $Q_C = Q$. Одредити вектор електричног поља и потенцијал у координатном почетку O($0, 0$). Систем се налази у вакууму. Нумерички подаци: $a = 0.3 \text{ m}$, $Q = 10 \text{ pC}$.

2.21. Три тачкаста наелектрисања, Q_A , $Q_B = -5 \text{ pC}$ и Q_C , налазе се у тачкама A($0, 3 \text{ cm}$), B($0, 0$) и C($4 \text{ cm}, 0$) правоуглог координатног система. Систем се налази у вакууму.

a* Одредити наелектрисања Q_A и Q_C тако да електрично поље у тачки D($4 \text{ cm}, 3 \text{ cm}$) буде једнако нули.

б* Са тако одређеним вредностима наелектрисања одредити потенцијал у тачки D.

2.22. Тачкаста наелектрисања $Q_A = 10 \text{ pC}$, Q_B и Q_C налазе се у теменима једнакостраног троугла странице $a = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ у хомогеном течном диселектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$.

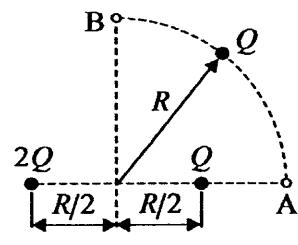
a* Одредити наелектрисања Q_B и Q_C тако да електрично поље у центру троугла, O, буде једнако нули.

б* Са тако одређеним вредностима наелектрисања одредити потенцијал у тачки О.

в* Одредити рад потребан да се тачкасто наелектрисање $q = 1 \text{ pC}$ пребаци из бесконачности у тачку О.

2.23. У теменима квадрата странице $a = 20 \text{ cm}$ налазе се четири тачкаста наелектрисања исте вредности Q . Систем се налази у вакууму. Да би се тачкасто наелектрисање $q = -2 \text{ pC}$ пребацило из центра квадрата у бесконачност потребно је извршити рад $A = 3.6\sqrt{2} \text{ pJ}$. Одредити вредност наелектрисања Q .

2.24. Тачкаста наелектрисања $Q > 0$ и $2Q$ налазе се на међусобном растојању $R = 0.1 \text{ m}$ у хомогеном течном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 1.8$ (слика 2.24). Када се тачкасто оптерећење Q пребацило по луку полу-пречника R из тачке А у тачку В силе поља изврше рад $A = 3.25 \text{ pJ}$. Одредити вредност наелектрисања Q .



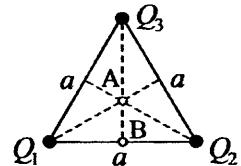
Слика 2.24.

2.25. Три тачкаста наелектрисања, Q_1 , Q_2 и Q_3 , налазе се у вакууму, у теменима једнакостраног троугла странице a (слика 2.25).

а* Одредити електрично поље у тачки А.

б* Одредити потенцијал тачке А.

в* Одредити рад потребан да се тачкасто наелектрисање Q пребаци из тачке В у тачку А.



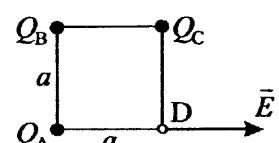
Слика 2.25.

Познато је: $Q_1 = -2 \text{ pC}$, $Q_2 = -8 \text{ pC}$, $Q_3 = 3 \text{ pC}$, $a = 12 \text{ cm}$, $Q = 1 \text{ pC}$.

2.26. Три тачкаста наелектрисања, $Q_A = 10 \text{ pC}$, Q_B и Q_C , налазе се у вакууму и распоређена су у теменима квадрата странице $a = 10 \text{ cm}$.

а* Одредити наелектрисања Q_B и Q_C тако да вектор електричног поља у тачки D има правца и смер као на слици 2.26. и да његов интензитет износи $E = 18 \text{ V/m}$.

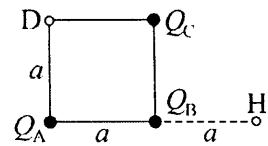
б* За вредности наелектрисања одређене под **а*** израчунати потенцијал тачке D и рад који се изврши при померању тачкастог наелектрисања $Q = 0.1 \text{ pC}$ из бесконачности у тачку D.



Слика 2.26.

2.27. Три тачкаста наелектрисања, $Q_A > 0$, Q_B и Q_C , распоређена су у теменима А, В и С квадрата странице $a = 10 \text{ cm}$, као на слици 2.27.

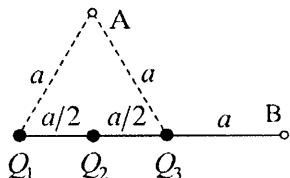
Систем се налази у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$. Одредити вредност свих наелектрисања тако да електрично поље у темену D буде једнако нули, $E_D = 0$, а да потенцијал у тачки H има вредност $\Phi_H = -1.459 \text{ V}$.



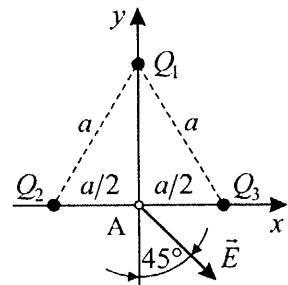
Слика 2.27.

2.28. Одредити вредност тачкастих наелектрисања $Q_1 > 0$, Q_2 и Q_3 , чији је положај приказан на слици 2.28, тако да слептрично поље у тачки A буде једнако нули, а да потенцијал у тачки B има вредност $\Phi_B = 0.35 \text{ V}$. За тако одређену вредност наелектрисања одредити рад при пребацивању тачкастог наелектрисања $q = 2 \text{ pC}$ из тачке B у тачку A. Познато је $a = 9 \text{ cm}$. Систем се налази у вакууму.

2.29. Три тачкаста наелектрисања, $Q_1 = 10 \text{ pC}$, $Q_2 = 20 \text{ pC}$ и Q_3 распоређена су у теменима једнakostranog троугла странице $a = 100 \text{ mm}$ у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2.5$. Одредити вредност наслептрисања Q_3 тако да вектор електричног поља у тачки A има правца и смер као на слици 2.29. За тако одређену вредност Q_3 израчунати интензитет вектора електричног поља и потенцијал у тачки A.

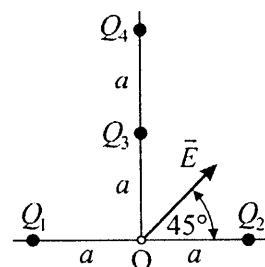


Слика 2.28.



Слика 2.29.

2.30. Четири тачкаста наелектрисања, $Q_1 = Q$, Q_2 и $Q_3 = Q_4 = -Q$, распоређена као на слици 2.30, налазе се у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ϵ_r . Одредити вредност свих наелектрисања тако да електрично поље у тачки O има правца и смер као на Слици и да је вредност потенцијала у тој тачки Φ_O . Са тако одређеним вредностима наелектрисања израчунати интензитет вектора електричног поља. Нумерички подаци: $a = 3 \text{ cm}$, $\epsilon_r = 2.25$, $\Phi_O = -1 \text{ V}$.



Слика 2.30.

2.31. Два тачкаста наелектрисања, $Q_A = Q_B = Q$, налазе се у тачкама A($-a, 0$) и B($a, 0$) правоуглог координатног система у вакууму.

a* Одредити вектор електричног поља на y -оси а затим, на основу познате функције $\vec{E}(y)$, функцију потенцијала на y -оси, $\vec{E}(y)$.

б* Одредити функцију потенцијала на y -оси а затим, на основу познате функције $\phi(y)$, вектор електричног поља на y -оси, $\vec{E}(y)$.

в* Одредити максималне вредности $E(y)$ и $\phi(y)$.

г* Нацртати дијаграме $E(y)$ и $\phi(y)$.

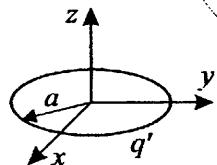
- 2.32. Кружни прстен полу пречника a , занемарљиве дебљине, налази се у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ϵ_r , у равни $z = 0$ правоуглог координатног система као на слици 2.32. Прстен је наелектрисан наелектрисањем сталне подужне густине q' .

а* Одредити електрично поље на z -оси а затим, на основу функције $\vec{E}(z)$, потенцијал на z -оси.

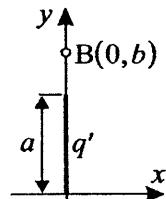
б* Одредити потенцијал на z -оси а затим, на основу функције $\phi(z)$, електрично поље на z -оси.

в* Одредити координате тачака на z -оси у којима је потенцијал два пута мањи него у координатном почетку (центру контуре).

- 2.33. Дуж y -осе правоуглог координатног система, између координатног почетка и тачке $(0, a)$, налази се веома танак штап наелектрисан наелектрисањем сталне подужне густине q' (слика 2.33). Одредити вектор електричног поља и потенцијал у тачки $B(0, b)$. Систем се налази у вакууму.

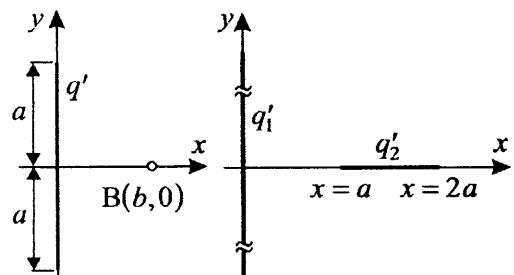


Слика 2.32.



Слика 2.33.

- 2.34. Веома танак штап, равномерно наелектрисан наелектрисањем подужне густине q' , постављен је дуж y -осе правоуглог координатног система између тачака $(0, -a)$ и $(0, a)$, као на слици 2.34. Одредити вектор електричног поља и потенцијал у тачки $B(b, 0)$. Систем се налази у вакууму.

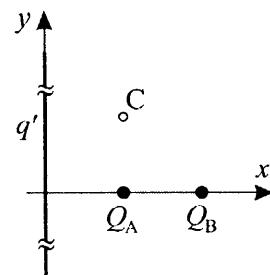


Слика 2.34.

- 2.35. Веома танак штап неограничене дужине, оптерећен наелектрисањем сталне подужне густине q'_1 , налази се на y -оси правоуглог координатног система у вакууму. На x -оси, од $x = a$ до $x = 2a$, налази се други веома танак штап (слика 2.35) оптерећен наелектрисањем сталне подужне густине q'_2 . Систем се налази у вакууму. Одредити силу на штап неограничене дужине.

Слика 2.35.

2.36. Дуж y -осе правоуглог координатног система у вакууму налази се исограничено дуго линијско оптерећење сталне подужне густине q' . У тачки А($a, 0$) налази се тачкасто наелектрисање Q_A , а у тачки В($2a, 0$) тачкасто наелектрисање Q_B . Одредити наелектрисања Q_A и Q_B тако да вектор електричног поља у тачки С(a, a), буде једнак нули. Са тако одређеним вредностима Q_A и Q_B одредити потенцијал у тачки С у односу на референтну тачку Р($5a, 0$). Систем се налази у вакууму. Нумерички подаци: $q' = 1 \text{ nC/m}$, $a = 1 \text{ m}$.



Слика 2.36.

3. ГАУСОВ ЗАКОН, ПРОВОДНИЦИ У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ

3.1. Усамљена сфера полупречника a , која се налази у вакууму, равномерно је оптерећена количином електрицитета Q . Одредити вектор електричног поља и потенцијал у функцији растојања r од центра сфере ако је референтна тачка нултог потенцијала у бесконачности. Нацртати дијаграме $E(r)$ и $\phi(r)$.

3.2. Усамљена проводна лопта, полупречника a , оптерећена је количином електрицитета Q и налази се у вакууму. Одредити потенцијал у функцији растојања r од центра лопте ако се:

а* референтна тачка нултог потенцијала налази ван лопте на растојању r_p ($r_p > a$) од центра лопте,

б* референтна тачка нултог потенцијала налази унутар лопте на растојању r_p ($r_p < a$) од центра лопте.

3.3. Усамљена проводна лопта полупречника $a = 3 \text{ cm}$ налази се у вакууму. Одредити наелектрисање лопте тако да вектор електричног поља на њеној површини има интензитет $E = 100 \text{ kV/m}$.

3.4. Усамљена сфера полупречника $a = 10 \text{ cm}$ налази се у вакууму. Вектор електричног поља на растојању $R = 1 \text{ m}$ од центра сфере има интензитет $E = 900 \text{ V/m}$ и оријентисан је од сфере. Одредити наелектрисање и површинску густину наелектрисања на сferi, као и интензитет вектора електричног поља на површини сферс.

3.5. Електрично поље на површини усамљене сфере у вакууму има интензитет $E_a = 10 \text{ kV/m}$ и оријентисан је од сфере, док је његов интен-

зитет на растојању $r = 10\text{ cm}$ од центра сфере $E = 900\text{ V/m}$. Одредити оптерећење и полуупречник сфере.

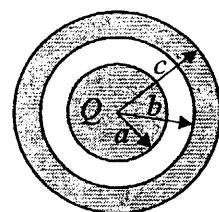
3.6. Усамљена проводна лопта у вакууму оптерећена је количином електрицитета Q и налази се на потенцијалу $\phi = -18\text{ V}$. Вектор електричног поља на растојању $r = 0.5\text{ m}$ од центра лопте има интензитет $E = 7.2\text{ V/m}$. Одредити полуупречник и оптерећење лопте.

3.7. Усамљена проводна лопта, оптерећена количином електрицитета $Q = 300\text{ nC}$, налази се у ваздуху. Одредити до које вредности се може смањити полуупречник лопте ако је максимално дозвољено (критично) поље за ваздух $E_{kr} = 3\text{ MV/m}$. Колики је минимални полуупречник лопте ако се рачуна са коефицијентом сигурности $ks = 4$.

3.8. Решити претходни задатак у случају да се лопта одржава на потенцијалу $\phi = 15\text{ kV}$ у односу на референтну тачку у бесконачности.

3.9. Усамљена проводна лопта, полуупречника $a = 3\text{ cm}$, налази се у вакууму на потенцијалу $\phi_a = 300\text{ V}$ у односу на референтну тачку у бесконачности. Одредити наелектрисање лопте, интензитет вектора електричног поља на њеној површини и полуупречнике еквипотенцијалних површина b и c које се налазе на потенцијалима $\phi_b = 100\text{ V}$ и $\phi_c = 50\text{ V}$. Колики би био потенцијал лопте у односу на референтну тачку која се налази на растојању $r_p = 9\text{ cm}$ од центра лопте.

3.10. Проводна лопта полуупречника a , оптерећена количином електрицитета Q , налази се унутар концентричне металне сферне љуске полуупречника b и дебљине $c - b$ (слика 3.10). Систем се налази у вакууму. Одредити вектор електричног поља и потенцијал у функцији растојања r од центра сфере. Нацртати дијаграме $E(r)$ и $\phi(r)$.



Слика 3.10.

3.11. Две проводне лопте, полуупречника a и b , налазе се у вакууму на међусобном растојању d , $d \gg a, b$ (тако да се њихов међусобни утицај може занемарити), и спојене су проводником занемарљиве дебљине. Када се овом систему доведе количина електрицитета Q она ће се распоредити по површинама лопти (оптерећење проводника којим су лопте спојене се може занемарити). Одредити површинску густину наелектрисања на лоптама.

3.12. N идентичних куглица живс, од којих је свака на потенцијалу ϕ_1 у односу на референтну тачку у бесконачности, спаја се у једну, већу куглицу. Одредити њен потенцијал ϕ . Систем се налази у вакууму. Куг-

лице сматрати усамљеним и њихов међусобни утицај на расподелу наелектрисања занемарити. Нумерички подаци: $N = 27$, $\phi_1 = 100 \text{ V}$.

3.13. Две концентричне сфере, полуупречника $a = 4 \text{ cm}$ и $b = 6 \text{ cm}$, налазе се у вакууму и оптерећене су равномерно количинама електричитета $Q_a = 12 \text{ nC}$ и $Q_b = -6 \text{ nC}$.

а* Скицирати спектар поља и одредити вектор електричног поља у функцији растојања r од центра сфера. Израчунати интензитет вектора спектричног поља на унутрашњој и спољашњој сфери.

б* Одредити потенцијал у функцији растојања r од центра сфера у односу на референтну тачку у бесконачности и израчунати потенцијале спољашње и унутрашње сфере.

3.14. Две концентричне сфере, полуупречника $a = 4 \text{ cm}$ и $b = 6 \text{ cm}$, налазе се у вакууму и оптерећене су равномерно количинама електричитета $Q_a = 6 \text{ nC}$ и $Q_b = -12 \text{ nC}$. Референтна тачка нултог потенцијала је у бесконачности.

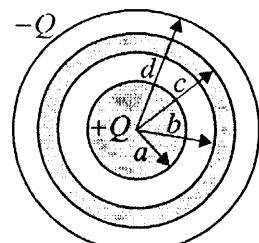
а* Скицирати спектар поља и израчунати вектор електричног поља на унутрашњој и спољашњој сфери.

б* Израчунати потенцијале спољашње и унутрашње сфере.

в* Израчунати полуупречнике c и d еквипотенцијалних површина које се налазе на потенцијалима $\Phi_c = \Phi_d = -600 \text{ V}$.

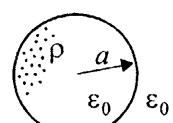
3.15. Две концентричне проводне сфере, полуупречника $a = 10 \text{ cm}$ и $b = 20 \text{ cm}$, налазе се у вакууму и оптерећене су равномерно количинама електричитета $Q_a = 10 \text{ nC}$ и $Q_b = -10 \text{ nC}$. Одредити вектор електричног поља у функцији растојања r од центра сфера. Израчунати напон између сфера.

3.16. Две концентричне проводне сфере, полуупречника a и d , налазе се у вакууму и оптерећене су равномерно количинама електричитета $Q_a = +Q$ и $Q_d = -Q$. Између сфера се налази концентрична метална љуска полуупречника b и дебљине $c - b$ (слика 3.16). Одредити електрично поље у функцији растојања r од центра сфера. Израчунати напон између сфера.



Слика 3.16.

3.17. Просторно наелектрисање, сталне запреминске густине ρ , омеђено је сфером полуупречника a и налази се у вакууму (слика 3.17). Одредити електрично поље и потенцијал у функцији растојања r од центра сфере. Нацртати дијаграме $E(r)$ и $\phi(r)$.



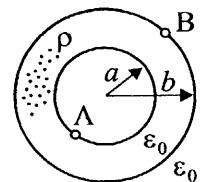
Слика 3.17.

3.18. Просторно наелектрисање омеђено је сфером полупречника a и налази се у вакууму (слика из претходног задатка). Запреминска густина наелектрисања мења се у радијалном правцу по закону $\rho = \rho_0 r/a$.

a* Одредити електрично поље и потенцијал у функцији растојања r од центра сфере.

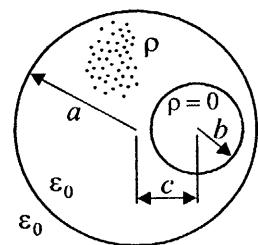
б* Израчунати потенцијал на површини (ϕ_a) и у центру (ϕ_0) сфере ако је $a = 30\text{ cm}$ и $\rho_0 = 4.425\text{ nC/m}^3$.

3.19. Између две концентричне сфере, полупреника a и b ($a < b$), налази се просторно оптерећење сталне запреминске густине ρ (слика 3.19). Одредити вектор електричног поља у функцији растојања r од центра сфера. Систем се налази у вакууму.



Слика 3.19.

3.20. Просторно наелектрисање, сталне запреминске густине ρ , ограничено је двема ексцентричним сферама полупречника a и b и ексцентричите c (слика 3.20). Систем се налази у вакууму. Одредити вектор електричног поља унутар сфере полупречника b .



Слика 3.20.

3.21. Неограничено дуг цилиндар, полупречника a , оптерећен је равномерно по површини наелектрисањем подужне густине $q' > 0$ и налази се у вакууму. Одредити поље и потенцијал у функцији растојања r од осе цилиндра и нацртати дијаграме $E(r)$ и $\phi(r)$. Ресферентна тачка нултог потенцијала налази се на растојању $r_p > a$.

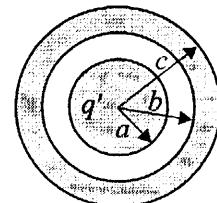
3.22. Неограничено дуг прав цилиндрични проводник, кружног попречног пресека полупречника $a = 1\text{ cm}$, оптерећен је наелектрисањем сталне подужне густине $q' = 0.1\text{ nC/m}$ и налази се у вакууму. Израчунати електрично поље на површини проводника, као и на растојању $b = 1\text{ km}$ од његове осе.

3.23. На растојању $R = 18\text{ m}$ од осе неограничено дугог правог цилиндричног проводника полупречника $a = 3\text{ mm}$, који се налази у вакууму, електрично поље има вредност $E_R = 1\text{ V/m}$. Одредити подужну количину електричитета на проводнику и електрично поље на површини проводника.

3.24. Нсограничено дуг цилиндрични проводник оптерећен је наелектрисањем сталне подужне густине $q' = 100\text{ nC/m}$ и налази се у ваздуху. Одредити минимални полупречник цилиндра ако је максимално допуштено поље за ваздух $E_{kr} = 3\text{ MV/m}$ и косфицијент сигурности $ks = 2$.

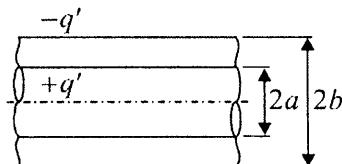
3.25. Неограничено дуг цилиндар, полупречника $a = e^0 \text{ cm}$ (e - основа природног логаритма), равномерно је оптерећен наелектрисањем подужне густине q' и налази се у вакууму. Ако је познат напон између еквипотенцијалних површина $b = e^1 \text{ cm}$ и $c = e^2 \text{ cm}$, $U_{bc} = 18 \text{ V}$, израчунати електрично поље на површини цилиндра.

3.26. Неограничено дуг проводни цилиндар полу пречника a , оптерећен наслектрисањем подужне густине q' , налази се унутар коаксијалне металне љуске полу пречника b и дебљине $c - b$ (слика 3.26). Систем се налази у вакууму. Одредити вектор електричног поља у функцији растојања r од осе цилиндра. Израчунати напон између цилиндра и љуске.



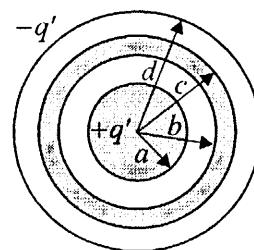
Слика 3.26.

3.27. Два коаксијална, неограничено дуга проводна цилиндра, полу пречника a и b , оптерећена су подужним наслектрисањима $+q'$ и $-q'$ (слика 3.27). Систем се налази у вакууму. Референтна тачка нултог потенцијала је на растојању r_p ($r_p > b$) од осе цилиндра. Одредити вектор електричног поља и потенцијал у функцији растојања r од осе система.



Слика 3.27.

3.28. Два коаксијална проводна цилиндра, полу пречника a и d , налазе се у вакууму и оптерећена су равномерно подужним наслектрисањима $q_a = +q'$ и $q_b = -q'$. Између цилиндра се налази коаксијална метална љуска полу пречника b и дебљине $c - b$ (слика 3.28). Одредити електрично поље у функцији растојања r од осе цилиндра и израчунати напон између њих.



Слика 3.28.

3.29. У систему наслектрисања, описаном у претходном задатку, познато је: $a = 1 \text{ mm}$, $b = 4 \text{ mm}$ и $c = 5 \text{ mm}$. Одредити полупречник спољашњег цилиндра, d , тако да напон између сквипотенцијалних површина $r = d$ и $r = a$ буде три пута већи од напона између еквипотенцијалних површина $r = d$ и $r = c$, $U_{da} = 3U_{dc}$.

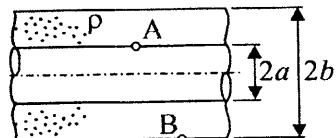
3.30. Просторно оптерећење, сталне запреминске густине ρ , ограничено је неограничено дугом цилиндричном површином полупречника a и налази се у вакууму. Одредити вектор слектричног поља и потенцијал у функцији растојања r од осе цилиндра. Референтна тачка нултог потенцијала налази се на растојању r_p ($r_p > a$) од осе цилиндра.

3.31. Просторно оштерећење сталне запреминске густине $\rho = 8.85 \text{ nC/m}^3$ налази се у вакууму између две коаксијалне цилиндричне површине полуупречника $a = 10\text{cm}$ и $b = 20\text{cm}$ (слика 3.31).

а* Одредити вектор електричног поља у функцији растојања r од осе цилиндра.

б* Израчунати интензитет електричног поља у тачкама А и В.

в* Израчунати напон између тачака А и В, U_{AB} .



Слика 3.31.

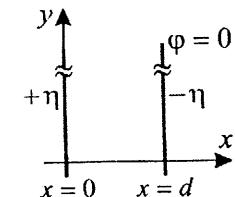
3.32. Просторно наелектрисање налази се у вакууму унутар неограђено дугог цилиндра полуупречника $a = 2\text{cm}$. Запреминска густина наелектрисања није константна већ се мења у функцији растојања r од осе цилиндра по закону $\rho = \rho_0 r^2/a^2$, где је $\rho_0 = 8.85 \text{ nC/m}^3$.

а* Одредити електрично поље у функцији растојања r од осе цилиндра.

б* Израчунати интензитет вектора електричног поља на површини цилиндра.

в* Израчунати напон између осе цилиндра и његове површине.

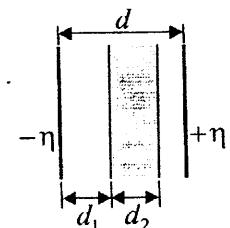
3.33. Две исограничес паралелне равни налазе се у вакууму на међусобном растојању d . Равни су равномерно наелектрисане наелектрисањима површинске густине $+η$ (раван $x = 0$) и $-η$ (раван $x = d$), а негативно наелектрисана раван се налази на нултом потенцијалу (слика 3.33). Одредити слектрично поље и потенцијал у функцији x координате.



Слика 3.33.

3.34. Две неограничене паралелне равни налазе се у вакууму на међусобном растојању $d = 5\text{cm}$. Равни су равномерно наелектрисане наелектрисањима једнаке површинске густине $η$ супротног смера, тако да је напон између њих $U = 200\text{V}$. Одредити површинску густину наелектрисања на равнима.

3.35. Две неограничене паралелне равни налазе се у вакууму на међусобном растојању $d = 10\text{cm}$. Равни су равномерно наелектрисане наелектрисањима једнаке површинске густине $η = 44.25 \text{ nC/m}^2$ супротног смера. Негативна раван је на нултом потенцијалу. Између равни, на растојању $d_1 = 4\text{cm}$ од негативне равни, налази се неограничена паралелна метална плоча дебљине $d_2 = 4\text{cm}$. Израчунати интензитет вектора слектричног поља између равни и напон између њих. Нацртати дијаграм промене потенцијала између равни.



Слика 3.35.

4. КАПАЦИТИВНОСТ КОНДЕНЗATORA СА ХОМОГЕНИМ ДИЕЛЕКТРИКОМ; ЕНЕРГИЈА И СИЛА

■ 4.1. Усамљена проводна сфера полуупречника $a = 3\text{ cm}$ оптерећена је количином електрицитета $Q = 1\text{ nC}$. Одредити вектор јачине електростатичког поља на површини сфере, потенцијал, капацитивност и енергију електростатичког поља сфере у случају да се она налази:

а* у вакууму,

б* у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$.

■ 4.2. Усамљена проводна лопта полуупречника a налази се у ваздуху и одржава на сталном потенцијалу $\phi = 15\text{ kV}$ у односу на референтну тачку у бесконачности. Одредити до које се вредности може смањити њен полуупречник ако је критично поље за ваздух $E_{kr} = 3\text{ MV/m}$ и кофицијент сигурности $ks = 4$.

■ 4.3. Усамљена проводна лопта полуупречника $a = 9\text{ cm}$ налази се у хомогеном течном диелектрику чија је релативна диелектрична константа $\epsilon_r = 2.4$ и критично поље $E_{kr} = 5\text{ MV/m}$. Израчунати на који потенцијал, у односу на референтну тачку у бесконачности, треба довести лопту да би дошло до пробоја у диелектрику. При тој вредности потенцијала израчунати оптерећење лопте и енергију електростатичког поља.

■ 4.4. Усамљена проводна лопта полуупречника a налази се у вакууму и оптерећена је количином електрицитета Q . Одредити енергију електростатичког поља локализовану између еквипотенцијалних сферних површина полуупречника b и c ($a < b < c$).

■ 4.5. Усамљена проводна лопта полуупречника $a = 10\text{ cm}$, оптерећена количином електрицитета $Q = 10\text{ nC}$, налази се у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$. Одредити полуупречник и потенцијал еквипотенцијалне површине унутар које је локализована половина енергије електростатичког поља лопте.

■ 4.6. Сферни кондензатор са ваздушним диселектриком, полуупречници електрода $a = 6\text{ cm}$ и $b = 12\text{ cm}$, оптерећен је количином електрицитета $Q = 12\text{ nC}$. Одредити интензитет вектора електричног поља на површини унутрашње и спољашње електроде, напон између слептроде, капацитивност и енергију овог кондензатора.

☞ 4.7. Репити претходни задатак за случај да је међуелектродни простор кондензатора испуњен хомогеним диелектриком релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$.

☞ 4.8. Сферни кондензатор, прикључен на сталан напон $U = 75 \text{ V}$, има електроде полупрсчника $a = 3 \text{ cm}$ и $b = 6 \text{ cm}$. Одредити капацитивност и оптерећење кондензатора, интензитет вектора јачине електричног поља на његовим електродама, полу пресчник с еквипотенцијалне површине која се налази на потенцијалу $\phi_c = U/2$ и енергију кондензатора. Задатак решити за случај да је између електрода

a^* вакуум

b^* хомоген диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$.

☞ 4.9. Одредити максимални напон на који сме да се прикључи сферни кондензатор полупрсчника електрода $a = 5 \text{ cm}$ и $b = 20 \text{ cm}$ ако је коефицијент сигурности $ks = 3$. Израчунати енергију кондензатора прикљученог на максимални напон. Између електрода кондензатора је

a^* ваздух чије је критично поље $E_{kr0} = 3 \text{ MV/m}$

b^* хомоген диелектрик чије је критично поље $E_{krd} = 5 \text{ MV/m}$ и релативна диелектрична константа $\epsilon_r = 2.5$.

☞ 4.10. Сферни ваздушни кондензатор, полу пресчника спољашње слек-троде $b = 4 \text{ cm}$, прикључен је на сталан напон $U = 2 \text{ kV}$. Израчунати у којим границама се сме крстати полу пресчник унутрашње електроде ако је критично поље $E_{kr} = 3 \text{ MV/m}$ и коефицијент сигурности $ks = 3$.

☞ 4.11. Сферни кондензатор, полу пресчника електрода a и b , прикључен је на сталан напон U . Ако је полу пресчник b спољашње слектро-де константан, а унутрашње a променљив, нацртати дијаграм промене интензитета вектора електричног поља на површини унутрашње сфере у зависности од односа a/b . Одредити однос спољашњег и унутрашњег полу пресчника тако да поље на површини унутрашње сфере има минималну вредност. Систем се налази у вакууму.

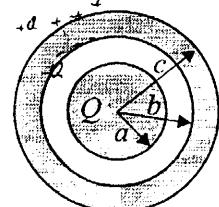
☞ 4.12. Када се сферни кондензатор, полу пресчника електрода a и b ($a < b$), прикључи на напон $U = 100 \text{ V}$ онтерстиће се количином слектричните $Q = 0.5 \text{ nC}$, док ће интензитет вектора слектричног поља на унутрашњој електроди бити девет пута већи него на спољашњој. Одредити полу пресчник електрода ако је између њих

a^* вакуум

b^* хомоген диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$.

4.13. Одредити максимални напон на који сме да се прикључи сферни ваздушни кондензатор, полупречника електрода $a = 3\text{ cm}$ и $d = 12\text{ cm}$, ако је критично поље за ваздух $E_{kr} = 3\text{ MV/m}$ и коефицијент сигурности $ks = 2.5$. Одредити полуупречнике b и c еквипотенцијалних површина које се налазе на потенцијалима $\phi_b = 2U/3$ и $\phi_c = U/3$, као и енергију електростатичког поља локализовану између њих у случају да је кондензатор прикључен на максимални напон.

4.14. Проводна лопта полуупречника $a = 20\text{ cm}$, оптерећена количином електричитета $Q = 100\text{ nC}$, налази се унутар концентричне металне сфере са лјуском полуупречника $b = 40\text{ cm}$ и дебљине $d = c - b = 10\text{ cm}$ (слика 4.14). Систем се налази у вакууму. Одредити капацитивност лопте и снерију електростатичког поља.

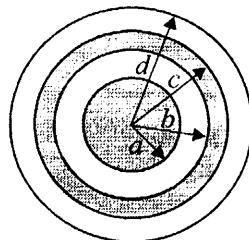


Слика 4.14.

4.15. Сферни ваздушни кондензатор, полуупречника електрода $a = 10\text{ cm}$ и $d = 40\text{ cm}$, прикључен је на сталан напон $U = 270\text{ V}$.

a* Израчунати капацитивност, оптерећење, интензитет вектора јачине поља на унутрашњој електроди и енергију електростатичког поља.

б* Ако се између слектрода убаци проводна лјуска (слика 4.15) полуупречника $b = 20\text{ cm}$ и дебљине $c - b = 10\text{ cm}$ одредити све величине као под а*.



Слика 4.15.

4.16. Неограничено дуг цилиндрични кондензатор са ваздушним диелектриком, полуупречника електрода $a = 1\text{ mm}$ и $b = 3\text{ mm}$, оптерећен је наелектрисањем сталне подужне густине $q' = 50\text{ pC/m}$. Одредити интензитет вектора слектричног поља на површини унутрашње и спољашње слектроде, напон између слектрода, подужну капацитивност и подужну енергију електростатичког поља овог кондензатора.

4.17. Решити претходни задатак за случај да се између електрода кондензатора налази хомоген диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$.

4.18. Веома дуг коаксијални кабл (цилиндрични кондензатор), код кога се ивиčни ефскат може занемарити, има слектроде полуупречника $a = 0.8\text{ mm}$ и $b = 3.5\text{ mm}$. Ако је коефицијент сигурности $ks = 3$ одредити максимални напон на који се овај кондензатор сме прикључити када је између његових слектрода диелектрик

a* релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$ и $E_{kr} = 8\text{ MV/m}$

б* релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$ и $E_{kr} = 4\text{ MV/m}$.

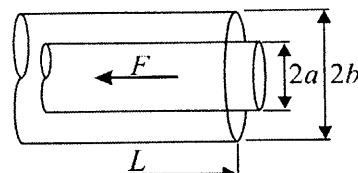
? 4.19. Веома дуг коаксијални кабл има хомоген дислектически релативне дислектичне константе $\epsilon_r = 2$ и критичног поља $E_{kr} = 5 \text{ MV/m}$, док је коефицијент сигурности $k_s = 3$. Полупречник унутрашњег проводника (електроде) кабла је $a = 0.6 \text{ mm}$. Одредити минимални полу пречник спољашњег проводника (електроде) b да би кабл смео да се прикључи на напон $U = 1500 \text{ V}$. За тај случај израчунати подужну капацитивност и подужну енергију електростатичког поља кабла.

? 4.20. Цилиндрични кондензатор, полу пречника слектрода a и b , прикључен је на сталан напон U . Ако је полу пречник b спољашње електроде константан, а унутрашње a променљив, одредити однос њихових полу пречника тако да поље на површини унутрашње електроде има минималну вредност. Ефекат крајева занемарити.

? 4.21. Између слектрода цилиндричног кондензатора уочено је пет еквипотенцијалних површина. Електроде кондензатора су полу пречника $R_1 = 1 \text{ cm}$ и $R_7 = 4 \text{ cm}$, а напон између њих је U . Потенцијалне разлике између било које две суседне еквипотенцијалне површине су једнаке. Одредити потенцијалну разлику између еквипотенцијалних површина и полу пречник R_4 треће еквипотенцијалне површине.

? 4.22. Кондензатор из претходног задатка има хомоген диелектрически релативне дислектичне константе $\epsilon_r = 3$ и оптерећен је на електрисањем сталне подужне густине $q' = 10 \text{ nC/m}$. Израчунати подужну снагу електростатичког поља локализовану између унутрашње електроде и треће еквипотенцијалне површине.

? 4.23. Дат је цилиндрични кондензатор са ваздушним диелектриком, полу пречника електрода a и b ($a < b$) и веома велике дужине L тако да се ивиčни ефекат може занемарити. Одредити силу на унутрашњу електроду кондензатора (слика 4.23) ако је кондензатор прикључен на сталан напон U .



Слика 4.23.

? 4.24. Растојање између електрода равног ваздушног кондензатора је $d = 0.1 \text{ mm}$. Површина електрода је $S = 50 \text{ cm}^2$. Познат је интензитет вектора електричног поља у кондензатору, $E = 100 \text{ kV/m}$. Израчунати површинску густину на електрисања на електродама, укупно оптерећење кондензатора, напон између електрода и капацитивност кондензатора. Ивиčни ефекат се може занемарити.

? 4.25. Шта ће се променити у претходном примеру ако је између електрода хомоген дислектически релативни диелектрически константе $\epsilon_r = 2$?

4.26. Раван ваздушни кондензатор, површине електрода S и растојања између њих d , прикључен је на извор напона U . После оптерећивања кондензатора растојање између слекстрода се повећа на $d' = 2d$, не искључујући при томе извор. Израчунати оптерећење кондензатора и интезитет електричног поља, као и енергију пре и после размицања слекстрода. Занемарити ивични ефекат. Бројни подаци: $S = 70 \times 70 \text{ cm}^2$, $d = 0.5 \text{ cm}$, $U = 5 \text{ kV}$.

4.27. Раван ваздушни кондензатор, површине електрода S и растојања између њих d , прикључен је на извор напона U . По извршеном оптерећивању кондензатор се искључи са извора и повећа му се растојање између слекстрода на $d_1 = 2d$. Одредити енергију и јачину поља у оба случаја, као и промену напона између електрода кондензатора до које долази при повећању растојања. Занемарити ивични сфекат. Бројни подаци: $S = 40 \times 60 \text{ cm}^2$, $d = 5 \text{ mm}$, $U = 2 \text{ kV}$.

4.28. Раван ваздушни кондензатор, површине слекстрода $S = 200 \text{ cm}^2$ и растојања између њих x , по извршном оптерећивању искључен је са извора. Позната је површинска густина наслектрисања на електродама комдемзатора, $\eta = 2 \text{ nC/m}^2$. Одредити колики се рад изврши при повећању растојања између електрода за $\Delta x = 0.1 \text{ mm}$. Занемарити ивични ефекат.

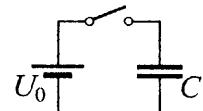
4.29. Раван ваздушни кондензатор, растојања између електрода d и капацитивности $C_0 = 10 \text{ pF}$, прикључен је преко прекидача на извор константног напона $U_0 = 300 \text{ V}$ (слика 4.29).

a* По извршном оптерећивању кондензатора прекидач се отвара и слекстроде размичу до растојања $x = 1.5d$.

б* По извршном размицању слекстрода прекидач се затвара а растојање између слекстрода смањује до $x = 0.5d$.

в* Након овога прекидач се отвара и растојање између електрода поново повећава до $x = d$.

Одредити изразе за количину елекtriцитета, напон и енергију кондензатора у функцији растојања x . Нацртати дијаграме $Q(x)$, $U(x)$ и $W(x)$. Занемарити ивични сфекат.



Слика 4.29.

4.30. Дат је раван кондензатор, површине електрода $S = 300 \text{ cm}^2$ и растојања између њих $d = 2 \text{ mm}$. Одредити максималну количину елекtriцитета којом се може оптеретити кондензатор ако је косфицијент сигурности $ks = 2$ и између електрода кондензатора

a* ваздух чије је критично поље $E_{kr0} = 3 \text{ MV/m}$

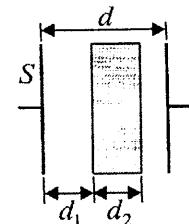
б* хомоген диелектрик чије је критично поље $E_{krd} = 6 \text{ MV/m}$ и релативна дислектрична константе $\epsilon_r = 4$.

Израчунати енергију кондензатора у оба случаја. Ивични ефекат се може занемарити.

4.31. Раван ваздушни кондензатор, површине електрода $S = 400 \text{ cm}^2$ и растојања између њих $d = 5 \text{ mm}$, оптерећен је количином електричног поља $Q = 10 \text{ nC}$. Занемарити ивични ефекат.

a* Израчунати јачину електричног поља, напон између електрода, капацитивност и енергију кондензатора.

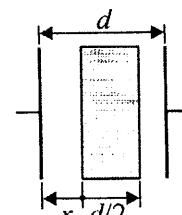
б* Ако се у међуелектродни простор, паралелно електродама на растојању $d_1 = 2 \text{ mm}$ од једне електроде, убаца метална плоча дебљине $d_2 = 2 \text{ mm}$ (слика 4.31) израчунати све величине као под а* .



Слика 4.31.

4.32. Кондензатор из претходног задатка прикључен је на сталан напон U . Одредити за колико процената ће се променити његово оптерећење након убаџивања металне плочице.

4.33. Раван ваздушни кондензатор, растојања између електрода d , има капацитивност C_0 . У међуелектродни простор кондензатора, паралелно електродама на растојању x од једне електроде, убачена је метална плоча дебљине $d/2$ (слика 4.33) и на тај начин добијен нови кондензатор капацитивности C . Одредити зависност капацитивности C од растојања x , $C(x)$. Ивични ефекат занемарити.



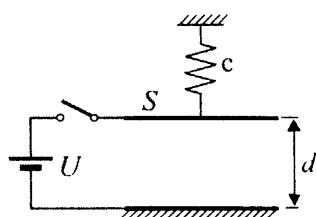
Слика 4.33.

4.34. Раван ваздушни кондензатор, површине електрода $S = 90 \text{ cm}^2$ и растојања између њих $d = 1 \text{ mm}$, прикључен је на извор сталног напона $U = 100 \text{ V}$. Одредити силу између електрода кондензатора. Занемарити ивични ефекат.

4.35. Ако се кондензатор из претходног задатка, након извршеног оптерећивања, искључи са извора напајања одредити силу између његових електрода.

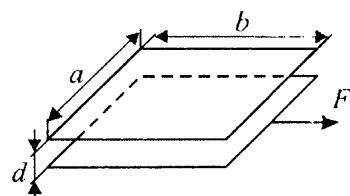
4.36. Раван ваздушни кондензатор, површине електрода S и растојања између њих $d = 1 \text{ mm}$, прикључен је на напон $U = 100 \text{ V}$. Одредити површину електрода кондензатора тако да сила између њих има вредност $F = 8.85 \text{ N}$. Занемарити ивични ефекат.

- 4.37.** Једна од електрода равног ваздушног кондензатора површине S је учвршћена, док је друга окачена о опругу константе c (слика 4.37). Када је кондензатор неоптерећен растојање између његових слсектрода је d . Када се кондензатор прикључи на извор напона U , опруга ће се истегнути за x . Одредити напон извора U . Нумерички подаци: $c = 11.275 \text{ N/m}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, $d = 2 \text{ mm}$, $x = 0.3 \text{ mm}$.



Слика 4.37.

- 4.38.** Раван ваздушни кондензатор, површине слсектрода $a \times b$ и размака између њих d , прикључен је на сталан напон U . Одредити потребну силу да би се извршило померање једног од електрода кондензатора у правцу и смеру као на слици 4.38. Познато је: $U = 500 \text{ V}$, $a = 10 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $d = 2.5 \text{ mm}$.



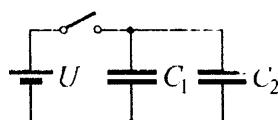
Слика 4.38.

5. СПРЕЗАЊЕ КОНДЕНЗАТОРА

- 5.1.** Два кондензатора, капацитивности $C_1 = 24 \text{ nF}$ и $C_2 = 12 \text{ nF}$, везана су на ред и прикључена на напон $U = 150 \text{ V}$. Израчунати оптерећења кондензатора, напоне на њима и њихове спрерије.

- 5.2.** Два равна ваздушна кондензатора, капацитивности $C_1 = 6 \text{ pF}$ и $C_2 = 3 \text{ pF}$, везана су на ред и прикључена на стални напон $U = 30 \text{ V}$. Израчунати промену оптерећења, напона и енергија кондензатора када се електроде кондензатора C_1 размакну на двоструко веће растојање.

- 5.3.** Два равна ваздушна кондензатора, капацитивности $C_1 = 20 \text{ pF}$ и $C_2 = 40 \text{ pF}$, везана су паралелно и прикључена на извор сталног напона $U = 300 \text{ V}$ (слика 5.3.). Након оптерећивања, отварањем прекидача, кондензатори се искључе са извора, а растојање између електрода кондензатора C_1 смањи на половину првобитног. Одредити оптерећења кондензатора после приближавања електрода кондензатора C_1 .



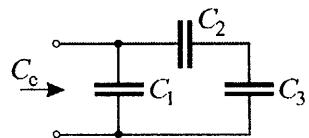
Слика 5.3.

- 5.4.** Два равна ваздушна кондензатора, капацитивности $C_1 = 24 \text{ pF}$ и $C_2 = 12 \text{ pF}$, везана су на ред и прикључена на напон $U = 500 \text{ V}$. Одредити за колико ће се променити њихово оптерећење и укупна енергија ако се

електроде кондензатора C_1 размакну на три пута веће растојање, а електроде кондензатора C_2 приближе на два пута мање растојање.

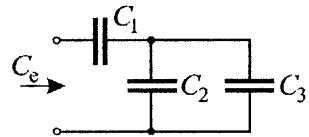
Задатак 5.5. Два равна ваздушна кондензатора, истих димензија, везана су на ред и прикључена на извор напона U . Након оптерећивања кондензатори се искључују са извора и растојање између електрода једног кондензатора повећа три пута. Одредити за колико ће се променити напон на овој редној вези.

Задатак 5.6. Одредити еквивалентну капацитивност везе кондензатора са слике 5.6. Уколико се ова веза прикључи на напон U одредити оптерећења и напоне свих кондензатора. Нумерички подаци: $C_1 = 8 \text{ nF}$, $C_2 = 6 \text{ nF}$, $C_3 = 3 \text{ nF}$, $U = 30 \text{ V}$.



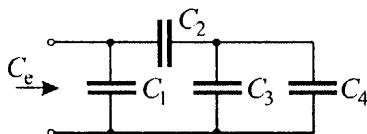
Слика 5.6.

Задатак 5.7. Одредити еквивалентну капацитивност везе кондензатора са слике 5.7. Уколико се ова веза прикључи на напон U одредити оптерећења и напоне свих кондензатора. Нумерички подаци: $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 6 \text{ nF}$, $C_3 = 4 \text{ nF}$, $U = 20 \text{ V}$.

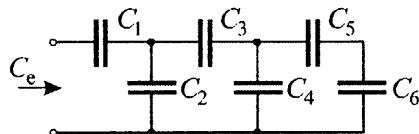


Слика 5.7.

Задатак 5.8. Израчунати еквивалентну капацитивност везе кондензатора са слике 5.8. Уколико се ова веза прикључи на напон $U = 300 \text{ V}$ одредити укупну енергију свих кондензатора. Бројни подаци: $C_1 = 4 \text{ nF}$, $C_2 = 9 \text{ nF}$, $C_3 = 10 \text{ nF}$, $C_4 = 8 \text{ nF}$.



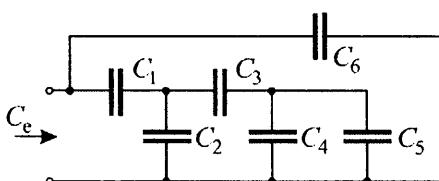
Слика 5.8.



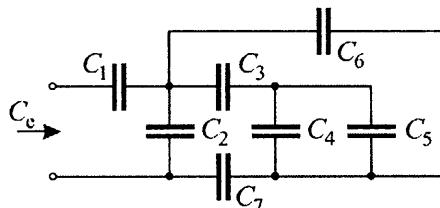
Слика 5.9.

Задатак 5.9. Израчунати еквивалентну капацитивност везе кондензатора са слике 5.9. Познато је: $C_1 = C_3 = C_5 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 5 \text{ nF}$, $C_4 = 4 \text{ nF}$, $C_6 = 15 \text{ nF}$.

Задатак 5.10. Одредити еквивалентну капацитивност везе са слике 5.10. Нумерички подаци: $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = C_3 = 6 \text{ nF}$, $C_4 = C_6 = 5 \text{ nF}$, $C_5 = 7 \text{ nF}$.



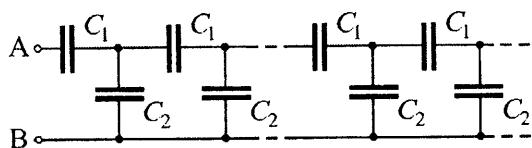
Слика 5.10.



Слика 5.11.

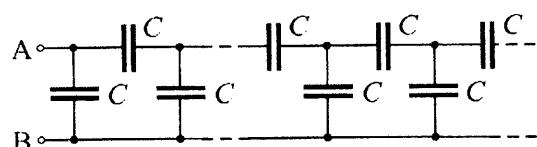
5.11. Одредити еквивалентну капацитивност везе са слике 5.11. Нумерички подаци: $C_1 = C_3 = C_7 = 3 \text{ nF}$, $C_2 = C_6 = 4 \text{ nF}$, $C_4 = 5 \text{ nF}$, $C_5 = 1 \text{ nF}$.

5.12. Бесконачно много кондензатора, капацитивности $C_1 = 0.2 \text{ nF}$ и $C_2 = 0.3 \text{ nF}$, повезано је као на слици 5.12. Одредити еквивалентну капацитивност између тачака А и В.



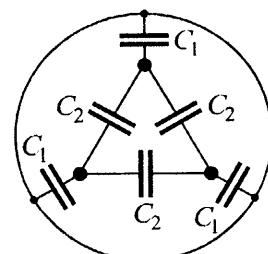
Слика 5.12.

5.13. Бесконачно много кондензатора, капацитивности $C = 0.3 \text{ nF}$, повезано је као на слици 5.13. Одредити еквивалентну капацитивност између тачака А и В.



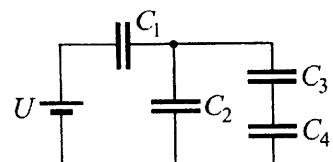
Слика 5.13.

5.14. Трожилни симетрични оклопљени кабл се састоји од три проводника око којих се, као механичка заштита, налази метални оклоп (слика 5.14). Капацитивност између било ког проводника и оклопа кабла је C_1 , док је капацитивност између било која два проводника C_2 . Мерсњем је установљено да укупна капацитивност између једног проводника и оклопа кабла износи $C_{po} = 2.25 \text{ nF}$, а да укупна капацитивност између два проводника износи $C_{pp} = 1.5 \text{ nF}$. Одредити капацитивности C_1 и C_2 .



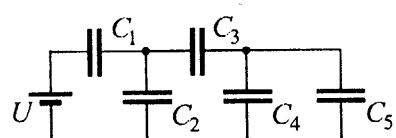
Слика 5.14.

5.15. Четири кондензатора, познатих капацитивности $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 8 \text{ nF}$, $C_3 = 3 \text{ nF}$ и $C_4 = 6 \text{ nF}$, повезана су као на слици 5.15. и прикључена на извор напона $U = 60 \text{ V}$. Одредити напоне, количине електрицитета и снергије свих кондензатора.



Слика 5.15.

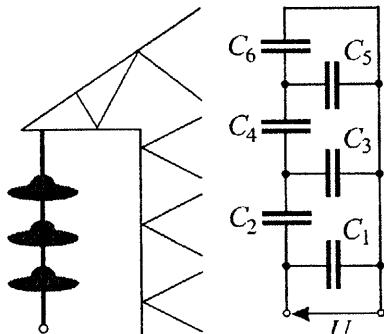
5.16. Пст кондензатора, познатих капацитивности, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = C_3 = 6 \text{ nF}$, $C_4 = 8 \text{ nF}$ и $C_5 = 4 \text{ nF}$, повезана су као на слици 5.16. Одредити еквивалентну капацитивност. Ако је ова веза прикључена на сталан напон $U = 200 \text{ V}$ одредити оптерећења и напоне свих кондензатора.



Слика 5.16.

5.17. Троделни високонапонски изолатор може се, у погледу капацитивности, представити еквивалентном шемом као на слици 5.17. Израчунати напон на сваком делу изолатора (U_{C2} , U_{C4} и U_{C6}) ако је напон на који је овај изолатор прикључен $U = 35 \text{ kV}$. Капацитивности појединачних кондензатора су:

$$C_1 = C_3 = C_5 = 20 \text{ pF}, \\ C_2 = C_4 = C_6 = 30 \text{ pF}.$$

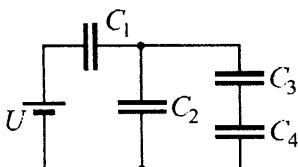


Слика 5.17.

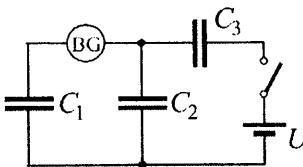
5.18. У вези кондензатора са слике 5.18. познати су напон U_2 на кондензатору C_2 и капацитивности свих кондензатора. Израчунати прикључени напон U . Нумерички подаци:

$$U_2 = 30 \text{ V}, C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = C_3 = 3 \text{ nF}, C_4 = 6 \text{ nF}.$$

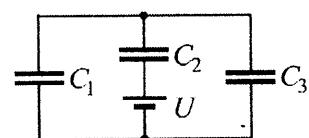
5.19. У колу, приказаном шемом на слици 5.19. прекидач k је отворен а количине електрицитета на свим кондензаторима су једнаке нули. По затварању прекидача балистички галванометар (инструмент за мерење протекле количине електрицитета) показује да је кроз њега, до успостављања стационарног стања, протекла количина електрицитета q . Уколико су познате капацитивности свих кондензатора одредити напон извора U . Бројни подаци: $q = 1 \mu \text{C}$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 20 \text{ nF}$, $C_3 = 30 \text{ nF}$.



Слика 5.18.



Слика 5.19.



Слика 5.20.

5.20. У колу, приказаном шемом на Слици 5.20, успостављено је стационарно стање.

a* Одредити количине електрицитета, напоне и енергије свих кондензатора.

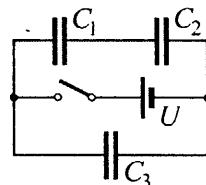
b* Одредити количине електрицитета, напоне и енергије свих кондензатора ако се разстојање између електрода кондензатора C_2 смањи четири пута.

b* Одредити промене напона, количина електрицитета и енергија свих кондензатора између ова два стационарна стања.

Бројни подаци: $C_1 = C_3 = 5 \text{ nF}$, $C_2 = 10 \text{ nF}$, $U = 2 \text{ kV}$.

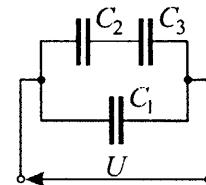
5.21. Три кондензатора са ваздушним диелектриком повезана су као на слици 5.21. Прекидач је затворен. По извршеном оптересћивању кондензатора прекидач се отвара а растојање између електрода кондензатора C_3 смањује на $2d/3$. Израчунати енергију кондензатора C_3 пре (W) и након (W') промене растојања између електрода. Нумерички подаци:

$$C_1 = 30 \text{ pF}, C_2 = 60 \text{ pF}, C_3 = 40 \text{ pF}, U = 1 \text{ kV}.$$



Слика 5.21.

5.22. Три кондензатора, капацитивности $C_1 = 5 \text{ nF}$ и $C_2 = C_3 = 10 \text{ nF}$, повезана су као на слици 5.22. и прикључена на напон $U = 1000 \text{ V}$. Одредити електростатичку енергију сваког од ових кондензатора. Колике ће бити њихове енергије ако се растојање између електрода кондензатора C_3 повећа два пута.



Слика 5.22.

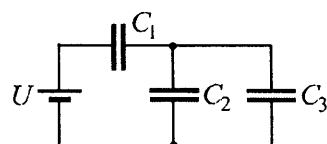
5.23. Два паралелно везана кондензатора, капацитивности $C_1 = 2 \text{ nF}$ и $C_2 = 5 \text{ nF}$ прикључују се на напон U . Максимални дозвољени напон за први кондензатор је $U_{\max 1} = 200 \text{ V}$, а за други $U_{\max 2} = 100 \text{ V}$. Одредити максималну количину електричитета којом се може оптеретити ова веза кондензатора.

5.24. Уколико се кондензатори из претходног задатка вежу редно, одредити максимални напон на који се та редна веза може прикључити.

5.25. Одредити максимални напон на који може да се прикључи мешовита веза кондензатора приказана шемом на слици 5.25. Капацитивности појединих кондензатора и њихови максимално дозвољени напони су познати:

$$C_1 = 30 \text{ pF}, C_2 = 40 \text{ pF}, C_3 = 20 \text{ pF},$$

$$U_{\max 1} = 250 \text{ V}, U_{\max 2} = 150 \text{ V}, U_{\max 3} = 200 \text{ V}.$$



Слика 5.25.

6. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ У МАТЕРИЈАЛНОЈ СРЕДИНИ; ВЕКТОР ЕЛЕКТРИЧНЕ ИНДУКЦИЈЕ

? 6.1. Усамљена проводна лопта полупречника a , оптерећена количином елекtriцитета Q , налази се у хомогеном диелектрику релативне диелектричне константе ϵ_r (слика 6.1). Референтна тачка нултог потенцијала налази се у бесконачности. Одредити:

а* Вектор електричне индукције у функцији растојања r од центра лопте и нацртати дијаграм $D(r)$.

б* Вектор јачине електричног поља у функцији растојања r од центра лопте и нацртати дијаграм $E(r)$.

в* Потенцијал у функцији растојања r од центра лопте и нацртати дијаграм $\phi(r)$.

г* Капацитивност лопте.

? 6.2. Усамљена проводна лопта полупречника $a = 10\text{ cm}$ обавијена је концентричним слојем диелектрика релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$, полупречника $b = 20\text{ cm}$ (слика 6.2), и налази се у ваздуху. Лопта је оптерећена наелектрисањем $Q = 10\text{ nC}$. Одредити:

а* Вектор електричне индукције у функцији растојања r од центра лопте и нацртати дијаграм $D(r)$.

б* Вектор јачине електричног поља у функцији растојања од центра лопте и нацртати дијаграм $E(r)$.

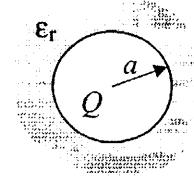
в* Потенцијал у функцији растојања од центра лопте и нацртати дијаграм $\phi(r)$.

г* Капацитивност лопте.

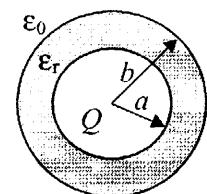
д* Максимални потенцијал на који се може довести лопту ако је коефицијент сигурности $k_s = 2$ а критична поља за диелектрик и ваздух $E_{krd} = 8\text{ MV/m}$ и $E_{kr0} = 3\text{ MV/m}$.

? 6.3. У систему наелектрисања из претходног задатка одредити енергију електростатичког поља локализовану у диелектрику.

? 6.4. У систему наслектрисања из задатка 6.2. одредити полу пречник раздвојне површине b тако да енергија електростатичког поља у диелектрику буде једнака енергији електростатичког поља у ваздуху.



Слика 6.1.



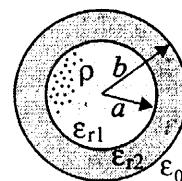
Слика 6.2.

6.5. Дата је проводна сфера, полуупречника $R = 6\text{ cm}$, обавијена слојем диелектрика дебљине $d = 3\text{ cm}$ и релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$. Потенцијал сфере у односу на референтну тачку у бесконачности је $\phi = 1250\text{ V}$. Систем се налази у вакууму. Израчунати наелектрисање сфере.

6.6. Проводна лопта, полуупречника $a = 20\text{ cm}$, обавијена са два концентрична слоја диелектрика и налази се у вакууму. Развојна површина првог и другог диелектрика је $b = 30\text{ cm}$, док је развојна површина другог диелектрика и вакуума $c = 50\text{ cm}$. Релативне диелектричне константе диелектрика су $\epsilon_{r1} = 5$ и $\epsilon_{r2} = 2$, респективно. Одредити оптерећење лопте Q тако да интензитет вектора јачине електричног поља ни у једној тачки не пређе вредност $E = 100\text{ kV/m}$. Са тако одређеним Q израчунати напон између еквијутенцијалних површина $r = b$ и $r = c$.

6.7. Уколико је у систему који је описан у претходном задатку познат напон између лопте и еквијутенцијалне површине $r = b$, $U_{ab} = 1\text{ kV}$, одредити потенцијал лопте.

6.8. Кугла полуупречника a начињена је од изолационог материјала релативне диелектричне константе ϵ_{r1} и омотана концентричним слојем диелектрика полуупречника b и релативне диелектричне константе $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ (слика 6.8). Кугла је равномерно оптерећена по запремини наслектрисањем сталне запреминске густине ρ . Систем се налази у вакууму. Одредити вектор електричне индукције, вектор јачине електричног поља и потенцијал у функцији растојања r од центра кугле. Начртати дијаграме $D(r)$, $E(r)$ и $\phi(r)$.

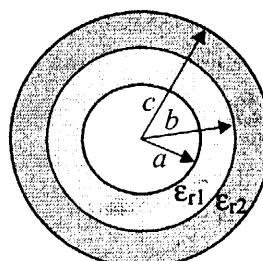


Слика 6.8.

6.9. У систему наелектрисања који је описан у претходном задатку одредити снергију електростатичког поља локализовану унутар кугле.

6.10. Сферни кондензатор, полуупречника електрода a и c , има диелектрик од два концентрична слоја релативних диелектричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2} . Развојна површина диелектрика је полуупречника b (слика 6.10), а оптерећење кондензатора Q . Одредити:

a* Вектор електричне индукције у функцији растојања r од центра кондензатора и начртати дијаграм $D(r)$.



Слика 6.10.

б* Вектор јачине електричног поља у функцији растојања од центра кондензатора и нацртати дијаграм $E(r)$.

в* Потенцијал у функцији растојања од центра кондензатора и нацртати дијаграм $\Phi(r)$.

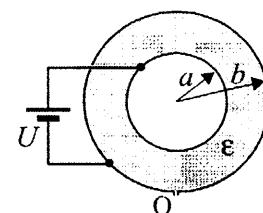
г* Капацитивност кондензатора.

■ 6.11. Одредити максималну количину електричитета којом се може оптеретити кондензатор из претходног задатка а да јачина електричног поља ни у једној тачки кондензатора не пређе задату вредност E . При том оптерећењу израчунати напон између електрода. Нумерички подаци: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $c = 40 \text{ cm}$, $\epsilon_{r1} = 5$, $\epsilon_{r2} = 3$, $E = 10 \text{ kV/m}$.

■ 6.12. Одредити максимални напон на који се сме прикључити кондензатор из претходног задатка ако је коефицијент сигурности $ks = 3$, а критична поља диелектрика $E_{kr1} = 4 \text{ MV/m}$ и $E_{kr2} = 2 \text{ MV/m}$.

■ 6.13. Ако се из кондензатора, анализираног у претходна три задатка, избаци диелектрик релативне диелектричне константе ϵ_{r2} и уместо њега остави ваздух ($E_{kr0} = 3 \text{ MV/m}$) одредити максимални напон на који се може прикључити тако добијени кондензатор.

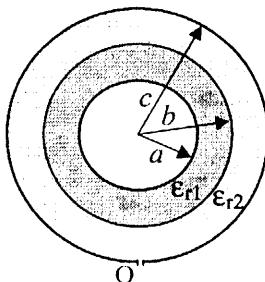
■ 6.14. Простор између електрода сферног кондензатора, полуиречника a и b , испуњен је хомогним течним дислекстриком релативне диелектричне константе ϵ_r (слика 6.14.). Кондензатор је прикључен на извор сталног напона U . Позната је јачина електричног поља на површини унутрашње електрода, $E_{r=a} = 100 \text{ kV/m}$, и снерија кондензатора, $W = 6 \mu \text{J}$. Ако се кроз мали отвор О на дну кондензатора испусти диелектрик (тако да између електрода остане ваздух, $\epsilon \approx \epsilon_0$), не искључујући при томе извор напајања, снерија кондензатора се смањи на $W' = 2 \mu \text{J}$. Одредити релативну дислекстричну константу диелектрика и поље на површини унутрашње електроде након испуштања диелектрика.



Слика 6.14.

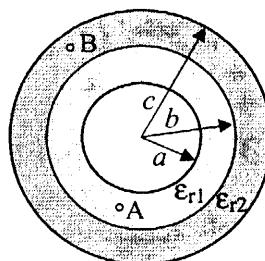
■ 6.15. Сферни кондензатор има електроде полуиречника $a = 2 \text{ cm}$ и $b = 6 \text{ cm}$ и прикључен је на напон $U = 900 \text{ V}$. Унутрашња електрода обавијена је концентричним слојем диелектрика дебљине d и релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$. Остатак међуелектродног простора испуњен је ваздухом. Одредити дебљину дислекстрика тако да снерије електростатичког поља локализоване у диелектрику и ваздуху буду једнаке. За тај случај одредити максималну јачину електричног поља.

6.16. Унутрашња електрода сферног кондензатора, полуупречника електрода a и c , омотана је слојем чврстог дислектрика дебљине $d = b - a$ и релативне диелектричне константе ϵ_{r1} . Остатак међуслесктродног простора испуњен је течним диелектриком релативне диелектричне константе ϵ_{r2} (слика 6.16). Кондензатор је прикључен на сталан напон U . Када се кроз мали отвор O на дну кондензатора испусти течни дислектир јачина поља на унутрашњој електроди се смањи два пута, док се јачина поља на спољашњој електроди повећа три пута. Одредити непознату диелектричну константу течног диелектрика, ϵ_{r2} .



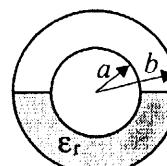
Слика 6.16.

6.17. Сферни кондензатор, полуупречника слесктрода $a = 1\text{ cm}$ и $c = 5\text{ cm}$, има диелектрик сасстављен из два концентрична слоја релативних диелектричних константи $\epsilon_{r1} = 2$ и $\epsilon_{r2} = 3$. Полуупречник раздвојне површине је $b = 3\text{ cm}$ (слика 6.17). Одредити напон U на који је кондензатор прикључен ако напон између тачака А и В, које се налазе на растојањима $r_A = 2\text{ cm}$ и $r_B = 4\text{ cm}$ од центра кондензатора, износи $U_{AB} = 100\text{ V}$.



Слика 6.17.

6.18. Сферни кондензатор има електроде полуупречника a и $b = 2a$. Одредити однос капацитивности кондензатора када је између његових електрода вакуум и када је међуслесктродни простор испуњен нехомогеним дислектиром чија релативна диелектрична константа линсарно расте у радијалном правцу од вредности $\epsilon_r = 1$ (непосредно уз унутрашњу електрому) до вредности $\epsilon_r = 2$ (непосредно уз спољашњу електрому).



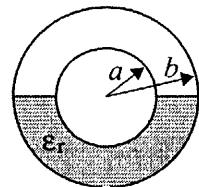
Слика 6.19.

6.19. Сферни кондензатор, полуупречника електрода a и b до половине је испуњен диелектриком релативне диелектричне константе ϵ_r (слика 6.19). Кондензатор је оптерећен количином електричног струја Q . Одредити векторе јачине електричног поља и електричне индукције, напон између електрода и капацитивност кондензатора.

6.20. Кондензатор, описан у претходном задатку, има електроде полуупречника $a = 3\text{ cm}$ и $b = 9\text{ cm}$, док је релативна диелектрична константа дислектира $\epsilon_r = 3$. Одредити капацитивност кондензатора. Уколико је кондензатор прикључен на напон $U = 200\text{ V}$ израчунати оптерећење кондензатора, површинску густину наелектрисања, као и интензи-

тест вектора електричне индукције и вектора јачине електричног поља на површинама електрода.

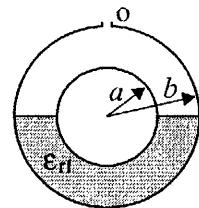
6.21. Сферни кондензатор, полуупречника електрода a и b , испуњен је до половине уљем непознате диселектричне константе (слика 6.21). Напон између електрода кондензатора је U . Након оптерећивања кондензатор се искључи са извора и кроз мали отвор на дну испусти уље. Када истекне уље напон између електрода се повећа на $U' = 1.75U$. Одредити релативну диселектричну константу уља које се налазило у кондензатору.



Слика 6.21.

6.22. Унутрашња електрода сферног кондензатора, полуупречника $a = 3\text{cm}$, који је прикључен на сталан напон $U = 300\text{V}$, учвршћена је у односу на спољашњу електроду, полуупречника $b = 2a$, постолјем од диелектрика релативних диселектричних константи $\epsilon_{r1} = 3$, као на слици 6.22. Ако се кондензатор не искључује са извора, а у ваздушни део кондензатора кроз мали отвор О на врху налије течан диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_{r2} = 9$, одредити промене:

- а* наелектрисања на електродама кондензатора,
- б* енергије кондензатора и
- в* максималне вредности електричног поља у кондензатору.



Слика 6.22.

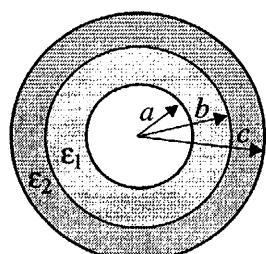
6.23. Коаксијални (цилиндрични) кондензатор, полуупречника електрода a и c , има диелектрик који се састоји из два коаксијална слоја (слика 6.23) релативних диелектричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2} ($\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$). Раздвојна површина диелектрика је полуупречника b . Кондензатор је оптерећен наелектрисањем сталне подужне густине q' . Одредити:

а* интензитет вектора електричне индукције у функцији растојања r од осе кондензатора и нацртати дијаграм $D(r)$,

б* интензитет вектора електричног поља у функцији растојања r од осе кондензатора и нацртати дијаграм $E(r)$,

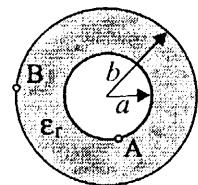
в* потенцијал у функцији растојања r од осе кондензатора и нацртати дијаграм $\phi(r)$ за случај да је спољашња електрода на нултом потенцијалу,

г* подужну капацитивност.



Слика 6.23.

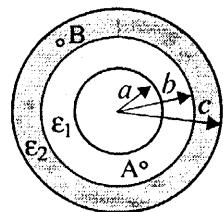
6.24. Неограничено дуг проводни цилиндар, полу-пречника $a = 2\text{ mm}$, омотан је коаксијалним слојем ди-електрика релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$ и дебљине $d = b - a = 1\text{ mm}$ (слика 6.24) и налази се у вакууму. Цилиндар је оптерећен наелектрисањем сталне подужне густине $q' = 50\text{ pC/m}$. Одредити максималне вредности електричне индукције и електричног поља. Израчунати напон U_{AB} између тачака А и В чији је положај приказан на слици.



Слика 6.24.

6.25. Одредити максимални напон на који сме да се прикључи кондензатор описан у задатку 6.23. ако је познато: $a = 0.5\text{ mm}$, $b = 2.5\text{ mm}$, $c = 3\text{ mm}$, $\epsilon_{r1} = 6$ и $\epsilon_{r2} = 2$. Критична поља за појединачне дислекстрике су $E_{kr1} = 5\text{ MV/m}$ и $E_{kr2} = 4\text{ MV/m}$, док је коефицијент сигурности $ks = 3$.

6.26. Веома дуг цилиндрични кондензатор (ефекат крајева се може занемарити), полуупречника слекстрода a и c има два коаксијална диелектрична слоја дислекстричних константи ϵ_1 и ϵ_2 (слика 6.26). Полупречник раздвојне површине диелектрика је b . Одредити на колики напон U треба прикључити кондензатор да би напон између тачака А и В, које се налазе на цилиндричним површинама полуупречника r_A и r_B , имао задату вредност. Нумерички подаци: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2$, $U_{AB} = 100\text{ V}$, $a = e^0\text{ cm}$, $r_A = e^{0.5}\text{ cm}$, $b = e^1\text{ cm}$, $r_B = e^{1.5}\text{ cm}$, $c = e^2\text{ cm}$, (e - основа природног логаритма).



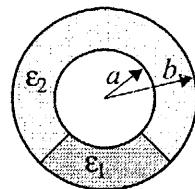
Слика 6.26.

6.27. Неограничено дуг цилиндрични кондензатор има слекстроде полуупречника $a = 1\text{ mm}$ и $c = 8\text{ mm}$. Унутрашња слекстрода је обавијена коаксијалним слојем дислекстрика релативне диелектричне константе $\epsilon_{r1} = 2$, док је остатак међуелектродног простора испуњен диелектриком релативне диелектричне константе $\epsilon_{r2} = 4$. Одредити полуупречник раздвојне површине диелектрика b тако да подужна енергија слекстростатичког поља у оба дислекстрика буде иста.

6.28. Всома дуг цилиндрични кондензатор (ефекат крајева се може занемарити) има електроде полуупречника $a = 20\text{ mm}$ и $b = 80\text{ mm}$. Унутрашња електрода је обавијена коаксијалним слојем дислекстрика дебљине d и релативне диелектричне константе ϵ_r . Остатак међуелектродног простора испуњен је ваздухом. Одредити d и ϵ_r тако да енергија електростатичког поља локализована у диелектрику буде три пута мања

од укупне енергије кондензатора, а електрично поље на унутрашњој слсектроди два пута веће од слсектричног поља на спољашњој електроди.

П 6.29. Цилиндрични кондензатор, полуупречника слсектрода $a = 0.8 \text{ mm}$ и $b = 5 \text{ mm}$ и дужине $L = 12 \text{ m}$ (ефекат крајева се може занемарити), има дислекстрик из два дела, као на слици 6.29. Дислекстрик релативне ди-слектричне константе $\epsilon_{r1} = 5$ испуњава $1/4$ међуелектродног простора кондензатора, док диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_{r2} = 2$ испуњава $3/4$ међуелектродног простора. Израчунати подужну и укупну капацитивност овог кондензатора. Ако је кондензатор прикључен на напон $U = 100 \text{ V}$ израчунати његову енергију.



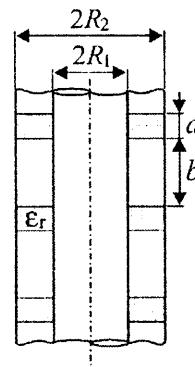
Слика 6.29.

П 6.30. Коаксијални кабл, дужине $L = 10 \text{ m}$, има проводнике полуупречника $R_1 = 1.5 \text{ mm}$ и $R_2 = 5 \text{ mm}$. Изолација је ваздух. Унутрашњи проводник се учвршићује помоћу држача од диелектричног материјала релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2.5$ и дебљине $a = 5 \text{ mm}$ који се налазе на међусобном растојању $b = 20 \text{ mm}$ (слика 6.30).

а* Израчунати подужну и укупну капацитивност кабла.

б* Израчунати максималан напон на који сме да се прикључи кабл ако су критична поља за диелектрик и ваздух $E_{dkr} = 20 \text{ MV/m}$ и $E_{0kr} = 3 \text{ MV/m}$ и коефицијент сигурности $ks = 3$.

в* Израчунати електростатичку енергију кабла у случају када је прикључен на максимални напон.



Слика 6.30.

П 6.31. Раван кондензатор капацитивности $C = 10 \text{ pF}$, прикључен на напон $U = 500 \text{ V}$, има између електрода диелектрик релативне дислекстричне константе $\epsilon_r = 2$.

а* Ако се кондензатор по извршеном оптерећивању искључи са извора, а затим извуче диелектрик, одредити енергију и напон између електрода кондензатора.

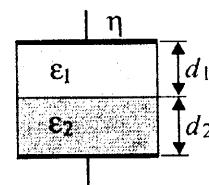
б* По извлачењу дислекстрика слсектроде се приближе на трећину првобитног растојања. Одредити промену енергије и напона између електрода кондензатора.

П 6.32. Редна веза два ваздушна кондензатора, чије су капацитивности $C_1 = 6 \text{ pF}$ и $C_2 = 3 \text{ pF}$, прикључена је на сталан напон $U = 1 \text{ kV}$. Одредити оптерећење кондензатора и њихову укупну енергију. Ако се цео међуел-

ектродни простор кондензатора C_2 испуни диелектриком релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$, одредити у том случају оптерећења кондензатора и њихову укупну енергију.

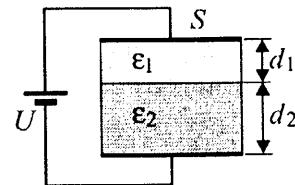
6.33. Два редно везана ваздушна кондензатора, једнаких капацитивности $C_1 = C_2 = 20 \text{ pF}$, прикључена су на напон $U = 300 \text{ V}$. После оптерећивања искључени су с извора а између електрода кондензатора C_2 убачен је диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$. Одредити напон U' на крајевима редне везе после убацивања диелектрика.

6.34. Раван кондензатор, оптерећен наелектрисањем површинске густине $\eta = 0.3 \text{ nC/m}^2$, има диелектрик састављен из два слоја (слика 6.34). Први слој је дебљине $d_1 = 3 \text{ mm}$ и релативне диелектричне константе $\epsilon_{r1} = 6$, док је други слој дебљине $d_2 = 3 \text{ mm}$ и релативне диелектричне константе $\epsilon_{r2} = 2$. Одредити интензитет вектора електричног поља у оба диелектрика и напон између електрода кондензатора.



Слика 6.34.

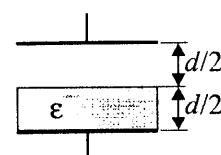
6.35. Раван кондензатор, површине електрода S и растојања између њих d , прикључен је на извор напона U . Између електрода се налазе два диелектрична слоја дебљина d_1 и d_2 (слика 6.35) и релативних диелектричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2} . Одредити векторе \vec{D} и \vec{E} у оба диелектрика, површинску густину слободних наелектрисања на електродама кондензатора и капацитивност кондензатора. Бројни подаци: $S = 72\pi \text{ cm}^2$, $U = 1 \text{ kV}$, $\epsilon_{r1} = 4$, $\epsilon_{r2} = 2$, $d_1 = 0.5 \text{ cm}$, $d_2 = 1.5 \text{ cm}$.



Слика 6.35.

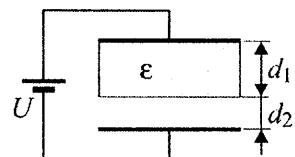
6.36. Раван кондензатор, површине електрода S и растојања између њих d , има нехомоген диелектрик чија се релативна диелектрична константа мења линсарно од вредности $\epsilon_r = 1$, непосредно уз једну електроду, до вредности $\epsilon_r = 4$ непосредно уз другу електроду. Ако је капацитивност ваздушног кондензатора истих димензија $C_0 = 13.86 \text{ pF}$, одредити капацитивност кондензатора са нехомогеним диелектриком.

6.37. Раван ваздушни кондензатор, чије је растојање између електрода d , има капацитивност C_0 . Између електрода се убацује плочица релативне диелектричне константе ϵ_r и дебљине $d/2$ (слика 6.37). Одредити ϵ_r плочице тако да капацитивност новодобијеног кондензатора буде $C = 1.6C_0$.



Слика 6.37.

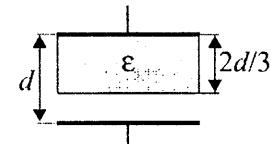
? 6.38. Раван кондензатор, чије је растојање између електрода $d = 4 \text{ mm}$, прикључен је на напон $U = 300 \text{ V}$. Део међуелектродног простора ширине $d_1 = 3 \text{ mm}$ испуњен је диелектриком релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3$ док је остатак, ширине $d_2 = 1 \text{ mm}$, ваздух (слика 6.38). Одредити интензитет вектора електричног поља у диелектрику, E_d , и у ваздуху, E_0 .



Слика 6.38.

? 6.39. Раван ваздушни кондензатор има растојање између електрода d и прикључен је на сталан напон U . Ако се у међуелектродни простор кондензатора убаца плашица од изолационог материјала релативне диелектричне константе ϵ_r и дебљине $d/2$, поље у ваздушном делу кондензатора повећаће се за 50% у односу на првобитно. Одредити ϵ_r .

? 6.40. За раван ваздушни кондензатор, растојања између електрода d , напон пробоја (напон при коме је поље у диелектрику једнако критичном пољу за тај диелектрик) износи $U_p = 15 \text{ kV}$. Између електрода кондензатора убацује се плашица дебљине $2d/3$ (слика 6.40) од диелектрика релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$ који има много веће критично поље од ваздуха, $E_{dkr} \gg E_{0kr} = 3 \text{ MV/m}$.



Слика 6.40.

a* Израчунати електрично поље у ваздуху и диелектричној плашици за случај да је кондензатор прикључен на напон U_p .

б* Одредити пробојни напон U'_p овог кондензатора.

? 6.41. Раван кондензатор као диелектрик има слој ваздуха дебљине $d_1 = 2 \text{ mm}$ и слој лискуна дебљине $d_2 = 3 \text{ mm}$ и релативне диселектричне константе $\epsilon_r = 6$. Коефицијент сигурности је $ks = 3$, док су критична поља за ваздух и лискун $E_{0kr} = 3 \text{ MV/m}$ и $E_{dkr} = 80 \text{ MV/m}$, респективно.

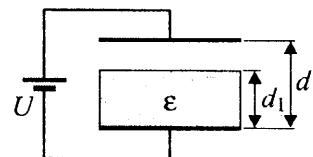
a* Израчунати напон на који сме да се прикључи овај кондензатор, U_{max1} .

б* Ако се из кондензатора одстрани слој лискуна израчунати напон на који сме да се прикључи тако добијени кондензатор, U_{max2} .

в* Одредити однос енергија кондензатора под а* и б* ако су прикључени на одговарајуће максималне напоне, U_{max1} и U_{max2} .

г* Одредити однос енергија ова два кондензатора ако су прикључени на исти напон U .

- 6.42.** Раван ваздушни кондензатор, растојања између електрода $d = 9\text{ mm}$, прикључен је на сталан напон U . Поље у кондензатору има вредност $E = 0.5\text{ MV/m}$. Ако се у међускетродни простор кондензатора убаци плашица дебљине $d_1 = 8\text{ mm}$, од материјала релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 4$ (слика 6.42), одредити електрично поље у обе средине.



Слика 6.42.

- 6.43.** Раван ваздушни кондензатор, растојања између електрода d и капацитивности C_0 , стављен је у веома велику посуду са уљем релативне диелектричне константе ϵ_r , као на слици 6.43. Ниво уља у посуди се може мењати.

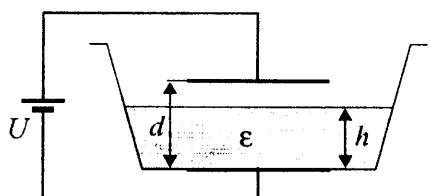
a* Одредити капацитивност овако добијеног кондензатора у зависности од нивоа уља у посуди, $C(x)$.

б* Одредити енергију кондензатора у зависности од x ако је кондензатор прикључен на сталан напон U .

в* Одредити енергију кондензатора у зависности од x ако је количина електрицитета Q на електродама кондензатора константна.

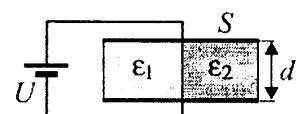
Напомена: Утицај посуде на кондензатор занемарити.

- 6.44.** Раван ваздушни кондензатор, чије је растојање између електрода $d = 9\text{ mm}$, смешта се у посуду од изолационог материјала тако да једна електрода лежи на дну посуде. Дебљина електрода је занемарљива. Кондензатор је прикључен на сталан напон U тако да ипак у њему, када је диселектрик ваздух, има вредност E_0 . До које висине h (слика 6.44) треба у посуду налити уље релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 4$ да би се поље у ваздушном делу кондензатора повећало три пута?



Слика 6.44.

- 6.45.** Раван кондензатор, приказан на слици 6.45, прикључен је на напон U . Растојање између електрода кондензатора је d , а њихова површина S . Диелектрик је састављен из два диелектрична слоја, релативних диелектричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2} , тако да сваки од њих заузима половину међускетродног простора кондензатора. Израчунати површинску густину наелектрисања на електрода-ма кондензатора и његову капацитивност.



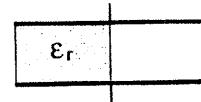
Слика 6.45.

?

6.46. Раван ваздушни кондензатор, капацитивности $C_0 = 100 \text{ pF}$, прикључен је на извор напона $U = 100 \text{ V}$. Када се кондензатор оптерећио извор је искључен а између електрода је, до половине (слика 6.46), убачен диелектрик релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 4$.

a* Одредити капацитивност и потенцијалну разлику између електрода кондензатора после убаџивања диелектрика.

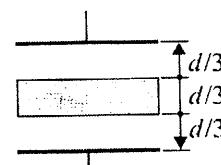
b* Израчунати енергију кондензатора пре и после убаџивања диелектрика.



Слика 6.46.

?

6.47. У раван ваздушни кондензатор, капацитивности C_0 , који је после оптерећивања искључен са напоном U , убаци се најпре плашица од материјала релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$ и дебљине $d/3$ (слика 6.47). Одредити за колико ће се променити капацитивност и енергија кондензатора ако се плашица од диелектрика замени проводном плашицом.



Слика 6.47.

?

6.48. Раван кондензатор, површине електрода $S = 100 \text{ cm}^2$ и растојања између њих $d = 2 \text{ mm}$, потопљен је у уље релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 3.2$. Кондензатор је оптерећен количином слектричитеља $Q = 50 \text{ nC}$. Израчунати енергију кондензатора и силу између његових електрода.

?

6.49. Раван кондензатор, површине електрода $S = 200 \text{ cm}^2$ и растојања између њих $d = 3 \text{ mm}$, потопљен је у уље испознате диелектричне константе. Када је кондензатор прикључен на напон $U = 300 \text{ V}$ између његових електрода делује привлачна сила интензитета $F = 2.5 \text{ mN}$. Одредити релативну диелектричну константу уља.

?

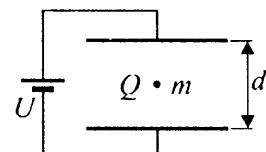
6.50. Између електрода равног ваздушног кондензатора, прикљученог на напон $U = 150 \text{ V}$, делује привлачна сила интензитета $F = 2.5 \text{ mN}$. Одредити силу између електрода кондензатора ако се кондензатор

a* потопи у уље релативне диелектричне константе $\epsilon_r = 2$ не искључујући при томе извор напона,

b* након оптерећивања искључи са извора и након тога потопи у уље исте диелектричне константе.

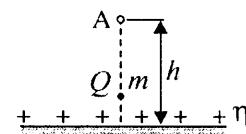
7. КРЕТАЊЕ НАЕЛЕКТРИСАНЕ ЧЕСТИЦЕ У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ

7.1. Наелектрисана честица масе $m = 0.001\text{ g}$ налази се у равнотежи у хомогеном електричном пољу хоризонталног равног ваздушног кондензатора (слика 7.1). Кондензатор је прикључен на напон $U = 2000\text{ V}$, док је растојање између слсктрода $d = 5\text{ mm}$. Одредити наелектрисање честице.



Слика 7.1.

7.2. Неограничена раван, у вакууму, оптерећена је наелектрисањем сталне површинске густине $\eta = 8.85 \mu\text{C/m}^2$. Са равни, без почетне брзине, полази под дејством сила поља тачкасто наелектрисање $Q = 10\text{ pC}$, масе $m = 10^{-8}\text{ kg}$. Одредити брзину наслектрисања у тачки А која се налази на висини $h = 40\text{ cm}$ изнад равни (слика 7.2). Занемарити дејство гравитационе силе на наелектрисану честицу.



Слика 7.2.

7.3. Решити претходни задатак под условом да се гравитациона сила на честицу не може занемарити.

7.4. Две паралелне металне плоче налазе се у вакууму, прикључене на напон $U = 20\text{ V}$. Са негативне плоче креће, из мира, електрон и после убрзавања у пољу удара у позитивну плочу. Одредити брзину слектрона непосредно пре удара у позитивну плочу.

7.5. Протон (језгро атома водоника) полази из бесконачности почетном брзином $v = 5 \cdot 10^3\text{ m/s}$ и креће се ка тачкастом наслектрисању $Q = 2 \cdot 10^{-14}\text{ C}$. Одредити на које се најкраће растојање може приближити тачкастом наелектрисању. Систем је у вакууму.

7.6. Ка проводној исиаслектрисаној лопти, ио-лупречнику a , која се налази у вакууму, крећу се по радијалном правцу из бесконачности, један за другим, електрони (слика 7.6). Сваки слектрон има исту почетну брзину. Одредити до које ће се вредности наелектрисати лопта. Бројни подаци: $a = 3\text{ cm}$, $v_0 = 10^7\text{ m/s}$.



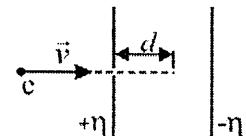
Слика 7.6.

7.7. Електрон улсће брзином \tilde{v} кроз мали отвор у простор између електрода равног ваздушног кондензатора (слика 7.7.). Кондензатор је оптерећен равномерно наелектрисањем површинске густине η .

a* Одредити удаљеност d до које ће доспети електрон.

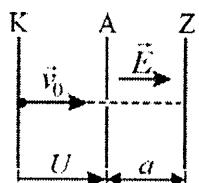
b* Одредити кинетичку енергију електрона при повратку, у тренутку проласка кроз отвор.

Бројни подаци: $\eta = 3.2 \text{ nC/m}^2$, $v = 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$.



Слика 7.7.

7.8. Две паралелне металне плоче прикључене су на напон U . Са негативне плоче (катоде - K) креће електрон почетном брзином v_0 . После убрзавања у електричном пољу пролази кроз мали отвор на позитивној плочи (аноди - A) и улеће у хомогено електрично поље \vec{E} , правца и смера као на слици 7.8. На растојању a од аноде налази се заслон Z у који удара електрон. Одредити брзину електрона у тренутку проласка кроз отвор на аноди и испосредно пре удара у заслон. Нумерички подаци: $a = 1 \text{ cm}$, $v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, $U = 200 \text{ V}$, $E = 15 \text{ kV/m}$.

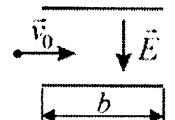


Слика 7.8.

7.9. Решите прстходни задатак за случај да је почетна брзина електрона једнака нули и вектор поља оријентисан од заслона ка аноди.

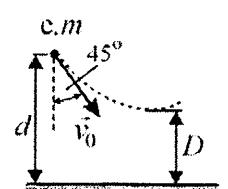
7.10. У тачкама A(-1m, 0) и B(1m, 0) Декартовог правоуглог координатног система, у вакууму, учвршћена су два једнака тачкаста наелектрисања, $Q_A = Q_B = 10 \text{ pC}$. Из тачке C(0, -1m) полази тачкасто наелектрисање $Q_l = -1 \text{ pC}$, масе $m = 10^{-15} \text{ kg}$, почетном брзином $v_0 = 10 \text{ m/s}$ у правцу и смеру y -осе. Одредити брзину наслектрисања Q_l у координатном почетку и ординату тачке у којој ће променити смер кретања.

7.11. У хомогено електрично поље измсђу електрода равног ваздушног кондензатора улеће електрон почетном брзином \vec{v}_0 , управном на правец поља (слика 7.11). Одредити скретање електрона у тренутку изласка из кондензатора. Познато је: $v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, $E = 10 \text{ V/m}$, $b = 0.1 \text{ m}$.



Слика 7.11.

7.12. Ка неограниченој равни, онтерећеној позитивним наелектрисањем сталне површинске густине η , креће се протон који се у тренутку $t = 0$ налази на висини d изнад равни и има почетну брзину правца и смера као на слици 7.12. Одредити минимално растојање на које се протон приближи равни и брзину у том тренутку. Познато је: $v_0 = 56 \text{ km/s}$, $\eta = 8.12 \text{ nC/m}^2$, $d = 38.2 \text{ mm}$.



Слика 7.12.



ДЕО II

ЕЛЕКТРОКИНЕТИКА

8. ЈАЧИНА И ГУСТИНА СТРУЈЕ, ИЗРАЧУНАВАЊЕ ОТПОРНОСТИ И ПРОМЕНА ОТПОРНОСТИ СА ТЕМПЕРАТУРОМ, ОМОВ И ЦУЛОВ ЗАКОН

8.1. Кроз веома дуг танак проводник, површине попречног пресека $S = 1.5 \text{ mm}^2$, противе стална једносмерна струја. У току једног сата кроз површину попречног пресека проводника протекла је количина електричног тока $Q = 21.6 \text{ kC}$. Одредити јачину и густину струје у проводнику.

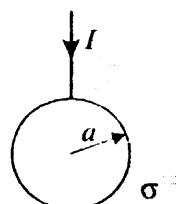
8.2. Кроз веома дуг танак проводник, кружног попречног пресека полупречника a , противе стална струја јачине I . Одредити за колико процената ће се променити густина струје кроз проводник ако се његов полупречник

а* смањи за 20%,

б* повећа за 20%.

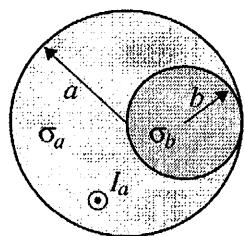
8.3. Кроз веома танак бакарни проводник кружног попречног пресека, полупречника $r = 0.5 \text{ mm}$, противе стална једносмерна струја густине $J = 3 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$. Одредити средњу брзину крстања слободних електрона ако је познато да у бакру има $8.5 \cdot 10^{28}$ слободних електрона по кубном метру.

8.4. Уземљивач у облику сфере, чији је полупречник $a = 0.5 \text{ m}$, начињен је од савршено проводног материјала и веома дубоко укопан у земљу која се може сматрати хомогеном средином специфичне проводности $\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$ (слика 8.4). Кроз веома танак проводник до уземљивача дотиче струја $I = 1000 \text{ A}$. Одредити вектор густине струје у функцији растојања r од центра уземљивача и потенцијал уземљивача у односу на референтну тачку у бесконачности.



Слика 8.4.

? 8.5. Неограничено дуг прав проводник, полу-пречника a , начињен је од нехомогеног материјала (попречни пресек приказан је на слици 8.5). Део проводника, полуупречника $b = a/2$, начињен је од материјала специфичне проводности σ_b , док је остатак проводника од материјала специфичне проводности $\sigma_a = 3\sigma_b$. Ако кроз део проводника специфичне проводности σ_a протиче струја I_a , одредити укупну струју кроз попречни пресек проводника.



Слика 8.5.

? 8.6. Проводник начињен од бакра, дужине $l = 1 \text{ km}$, има отпорност $R = 0.85 \Omega$. Одредити површину попречног пресека проводника ако је специфична отпорност бакра $\rho = 17 \text{ n}\Omega\text{m}$.

? 8.7. Одредити површину попречног пресека алуминијумског проводника дужине $l = 100 \text{ m}$ да би његова отпорност била $R = 1 \Omega$. Специфична проводност алуминијума је $\sigma = 38 \cdot 10^6 \text{ S/m}$.

? 8.8. На цилиндар од изолационог материјала, кружног попречног пресека полуупречника $a = 6 \text{ mm}$, густо и равномерно је намотано N на војака жице од волфрама, полуупречника $b = 0.2 \text{ mm}$. Одредити број на војака N тако да се добије укупна отпорност $R = 1.65 \Omega$. Специфична отпорност волфрама је $\rho = 55 \text{ n}\Omega\text{m}$.

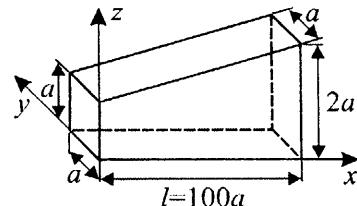
? 8.9. Танак проводник дужине l и сталног попречног пресека, површине S , начињен је од нехомогеног материјала, тако да се његова специфична отпорност линеарно мења од вредности $\rho_1 = \rho_0$ на једном крају до вредности $\rho_2 = 2\rho_0$ на другом крају. Одредити отпорност овог проводника. Нумерички подаци: $l = 10 \text{ m}$, $S = 1 \text{ mm}^2$, $\rho_0 = 6.667 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

? 8.10. Танак проводник, дужине $l = 8 \text{ m}$ и константног попречног пресека површине $S = 1.2 \text{ mm}^2$, начињен је од нехомогеног материјала чија се специфична отпорност мења по закону $\rho = \rho_0(1 + x^2/l^2)$, где је са x означен растојање од почетка проводника и где је $\rho_0 = 2 \mu\Omega\text{m}$. Одредити отпорност овог проводника.

? 8.11. Танак проводник, дужине $l = 10 \text{ m}$ и константног попречног пресека S , начињен је од материјала чија се специфична отпорност линеарно мења од вредности ρ_1 на почетку проводника ($x = 0$) до вредности $\rho_2 = 3\rho_1$ на крају проводника ($x = l$). Укупна отпорност проводника је позната и износи R . На ком растојању x од почетка треба пресечи проводник да би се добила два дела истих отпорности?

8.12. Танак проводник, дужине $l = 3\text{ m}$, начињен је од материјала специфичне проводности $\sigma = 18 \cdot 10^6 \text{ S/m}$. Проводник је кружног попречног пресека, а његов полупречник се линеарно мења од вредности $a = 0.5\text{ mm}$ на једном до вредности $b = 0.8\text{ mm}$ на другом крају. Израчунати отпорност овог проводника.

8.13. Одредити, између попречних пресека $x = 0$ и $x = l$, отпорност проводника који је приказан на Слици 8.13. Специфична отпорност материјала се дуж x -осе мења линсарно од вредности ρ_1 за $x = 0$ до вредности $\rho_2 = 2\rho_1$ за $x = l$. Нумерички подаци: $a = 1\text{ mm}$, $l = 100a$, $\rho_1 = 2.8 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$.



Слика 8.13.

8.14. На крајевима отпорника отпорности R , кроз који протиче струја $I = 0.1\text{ A}$, измерен је напон $U = 10\text{ V}$. Одредити:

- а* отпорност отпорника,
- б* снагу на отпорнику,
- в* снагу на отпорнику ако се струја повећа на $I_1 = 0.2\text{ A}$.

8.15. Кроз отпорник, познате проводности $G = 10\text{ mS}$, протиче струја $I = 20\text{ mA}$. Одредити:

- а* напон и снагу на отпорнику,
- б* снагу на отпорнику ако се напон на његовим крајевима повећа два пута.

8.16. Задат је отпорник отпорности R кроз који протиче струја I и на чијим крајевима је напон U . Снага на отпорнику је $P = 10\text{ W}$. Ако се отпорност отпорника смањи на $R_1 = R/2$, одредити снагу на њему ако је:

- а* струја кроз отпорник остала непромењена,
- б* напон на отпорнику остао непромењен.

8.17. Отпорник сталне отпорности R прикључен је на напон U . Одредити за колико процената ће се променити снага на отпорнику ако се:

- а* напон повећа за 20%,
- б* напон смањи за 20%.

8.18. Кроз отпорник сталне отпорности R протиче струја I . Одредити за колико процената ће се променити снага на отпорнику ако се:

- а* струја смањи за 10%,
- б* струја повећа за 10%.

8.19. Снага на отпорнику сталне отпорности R , прикљученом на напон $U = 10\text{ V}$, износи $P = 0.5\text{ W}$. Одредити колика ће бити снага на том отпорнику ако кроз њега протиче струја $I = 50\text{ mA}$.

8.20. Снага на отпорнику сталне проводности $G = 5 \text{ mS}$ при струји $I = 0.2 \text{ A}$ је P . Одредити на који напон треба прикључити овај отпорник да би се на њему развила четири пута већа снага.

8.21. Отпорност отпорника, начињеног од материјала чији температурни коефицијент отпорности износи $\alpha = 4.3 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$, на температури $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$ износи $R_0 = 18\Omega$. На којој температури се налази овај отпорник ако је при струји од 130 mA напон на његовим крајевима 3.38 V ?

8.22. Отпорност отпорника начињеног од волфрама на температури $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$ је R . На којој температури Θ ће његова отпорност износити $R' = 1.25R$? Температурни коефицијент отпорности волфрама има вредност $\alpha = 4.6 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$.

8.23. На температури $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$ при струји $I = 1 \text{ A}$ напон на крајевима отпорника је $U = 6 \text{ V}$. Ако се одржава сталан напон одредити струју кроз отпорник у случају да се он загреје на температуру $\theta = 90^{\circ}\text{C}$. Температурни коефицијент отпорности материјала од кога је начињен отпорник има вредност $\alpha = 4.6 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$.

8.24. Отпорник, који на собној температури ($\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$) има отпорност $R = 1 \text{ k}\Omega$, прикључен је на сталан напон $U = 12 \text{ V}$.

a* Израчунати снагу на отпорнику.

b* Израчунати снагу на отпорнику ако се он загреје на температуру $\theta = 60^{\circ}\text{C}$. Температурни коефицијент отпорности материјала од кога је начињен отпорник има вредност $\alpha = 3.8 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$.

8.25. Отпорник отпорности R , начињен од материјала чији је температурни коефицијент отпорности $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$, прикључује се на сталан напон U . На собној температури ($\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$) снага на отпорнику је P . Одредити температуру отпорника θ_1 при којој је снага на њему

a* $P_1 = 0.8P$, b* $P_1 = 1.25P$.

8.26. Загревно влакно сијалице начињено је од материјала чији је температурни коефицијент отпорности на 20°C $\alpha = 8 \cdot 10^{-4} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$. Сијалица се прикључује на напон $U = 200 \text{ V}$. При радиој температури загревног влакна ($\theta = 1270^{\circ}\text{C}$) њена снага је $P = 100 \text{ W}$. Одредити отпорност загревног влакна и струју која протиче кроз сијалицу

a* при радиој температури

b* при укључивању (хладно загревно влакно, $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$).

8.27. Отпорник, непознате отпорности, начињен је од материјала чији је температурни коефицијент отпорности приближно константан у температурном опсегу од -20^0C до 200^0C и износи $\alpha = 4.1 \cdot 10^{-3} (\text{ }^0\text{C})^{-1}$. Када се на собној температури ($\theta_0 = 20^0\text{C}$) отпорник прикључи на напон $U = 100\text{V}$ на њему се развија снага $P = 1\text{W}$. Одредити на колики напон треба прикључити отпорник да би се на њему развијала иста снага ако се он налази на температури

$$\alpha^* \theta = -20^0\text{C}, \quad \delta^* \theta = 120^0\text{C}.$$

8.28. Отпорник начињен од графита ($\alpha_1 = -5 \cdot 10^{-4} (\text{ }^0\text{C})^{-1}$) на собној температури ($\theta_0 = 20^0\text{C}$) има отпорност $R_1 = 25\Omega$. Отпорник начињен од волфрама ($\alpha_2 = 4.5 \cdot 10^{-3} (\text{ }^0\text{C})^{-1}$) на истој температури има отпорност $R_2 = 20\Omega$. Одредити температуру на којој ова два отпорника имају исту отпорност.

8.29. Танак жичани проводник, дужине l и стапа површине попречног пресека S , начињен је од материјала чији је температурни коефицијент отпорности приближно константан у температурном опсегу од 0^0C до 100^0C и износи $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} (\text{ }^0\text{C})^{-1}$. Ако отпорност овог проводника на температури $\theta_0 = 20^0\text{C}$ износи $R_0 = 1\Omega$, израчунати његову отпорност када се неравномерно загреје по дужини, тако да се температура линеарно мења дуж проводника од вредности $\theta_1 = 40^0\text{C}$ на једном до вредности $\theta_2 = 2\theta_1$ на другом крају.

8.30. Танак жичани проводник, дужине $l = 2.40\text{m}$ и површине попречног пресека $S = 0.8\text{ mm}^2$, начињен је од материјала чији су специфична отпорност (на $\theta_0 = 20^0\text{C}$) и температурни коефицијент отпорности $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$ и $\alpha = 6 \cdot 10^{-3} (\text{ }^0\text{C})^{-1}$. Проводник је неравномерно загрејан тако да се температура дуж њега мења по закону $\theta = \theta_0 (1 + 5x^2 / l^2)$, при чему је x – растојање од почетка проводника. Одредити отпорност овог проводника.

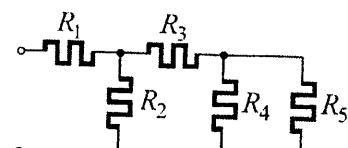
8.31. За проводник описан у претходном задатку одредити
 a^* струју кроз штап пре и после загревања ако је напон између његових krajeva $U = 12\text{V}$,
 b^* отпорности појединих делова проводника ако се он пресече на средини (R_1 – отпорност од $x = 0$ до $x = l/2$ и R_2 отпорност од $x = l/2$ до $x = l$).

8.32. Танак жичани проводник дужине $l = 1.5 \text{ m}$, кружног попречног пресека полуупречника $a = 1 \text{ mm}$, начињен је од материјала чији су специфична отпорност (на $\theta_0 = 20^\circ \text{C}$) и температурни коефицијент отпорности $\rho_0 = 1.8 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$ и $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$. Проводник је неравномерно загрејан, тако да му температура линеарно расте од вредности $\theta_1 = 25^\circ \text{C}$ на површини до вредности $\theta_2 = 30^\circ \text{C}$ на оси проводника. Израчунати отпорност овог проводника.

9. СПРЕЗАЊЕ ОТПОРНИКА

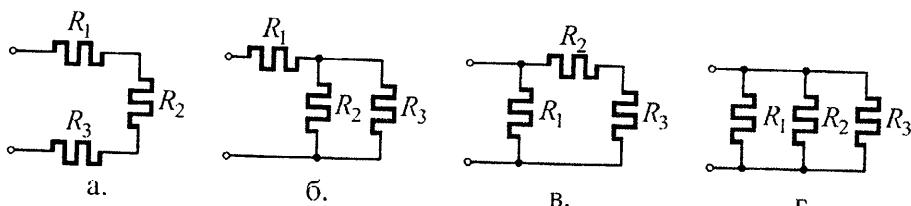
9.1. Одредити еквивалентну отпорност мешовите везе отпорника са слике 9.1. Нумерички подаци:

$$\begin{aligned} R_1 &= 5\Omega, \quad R_2 = 10\Omega, \\ R_3 &= R_4 = 6\Omega, \quad R_5 = 12\Omega. \end{aligned}$$



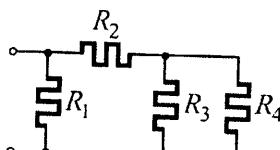
Слика 9.1.

9.2. Са три отпорника, једнаких отпорности $R_1 = R_2 = R_3 = 6\Omega$, остварене су четири различите везе са два приступна краја у којима учествују сви отпорници (слика 9.2). Израчунати еквивалентну отпорност сваке од ових веза.

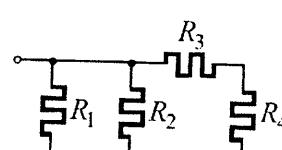


Слика 9.2.

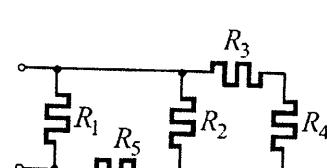
9.3. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.3. Нумерички подаци: $R_1 = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 6 \text{ k}\Omega$.



Слика 9.3.



Слика 9.4.



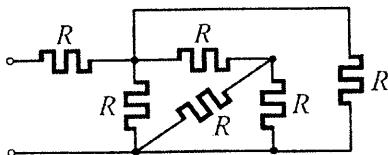
Слика 9.5.

9.4. Израчунати сквивалентну отпорност све отпорника са слике 9.4. Нумерички подаци: $R_1 = R_3 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$.

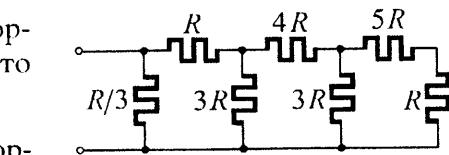
9.5. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.5. Нумерички подаци: $R_1 = R_2 = 6\Omega$, $R_3 = R_5 = 1\Omega$, $R_4 = 2\Omega$.

9.6. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.6. Познато је $R = 10\Omega$.

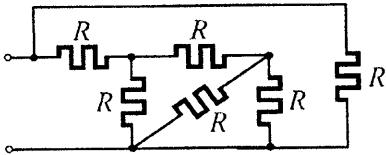
9.7. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.7. Познато је $R = 8\Omega$.



Слика 9.7.



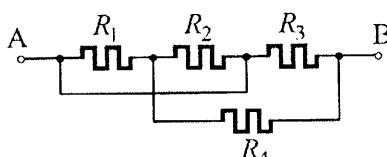
Слика 9.6.



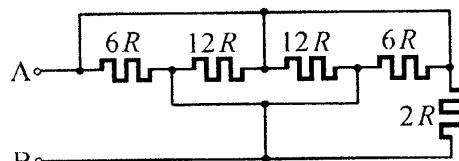
Слика 9.8.

9.8. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.8. Познато је $R = 26\Omega$.

9.9. Израчунати еквивалентну отпорност између тачака А и В везе отпорника са слике 9.9. Познато је: $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 2\Omega$.



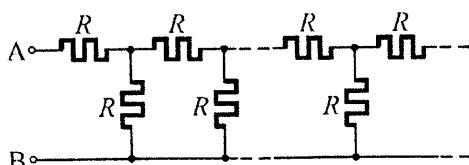
Слика 9.9.



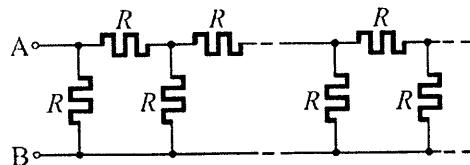
Слика 9.10.

9.10. Израчунати еквивалентну отпорност између тачака А и В везе отпорника са слике 9.10.

9.11. Задата је мрежа сачињена од неограниченог броја отпорника отпорности R , облика као на слици 9.11. Израчунати еквивалентну отпорност између тачака А и В.



Слика 9.11.



Слика 9.12.

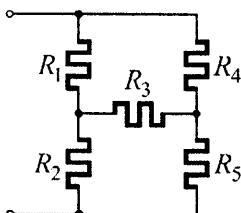
9.12. Задата је мрежа сачињена од неограниченог броја отпорника отпорности R , облика као на слици 9.12. Израчунати еквивалентну отпорност између тачака А и В.

9.13. Од дванаест отпорних жица, од којих свака има отпорност R , начињена је макета коцкса, као на слици 9.13. Израчунати отпорност између тачака A и G (велика дијагонала) коцкса.

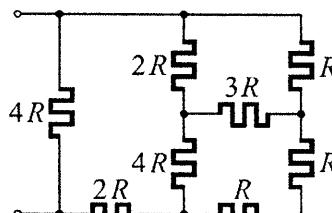
9.14. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.14. Нумерички подаци:

$$R_1 = 3\Omega, R_2 = R_4 = 6\Omega, R_3 = 9\Omega, R_5 = 12\Omega.$$

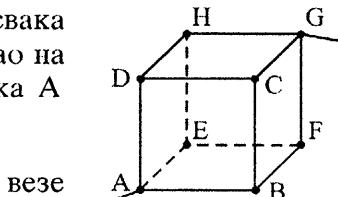
9.15. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.15. Познато је $R = 5\text{ k}\Omega$.



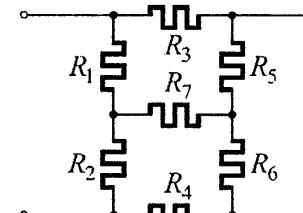
Слика 9.14.



Слика 9.15.



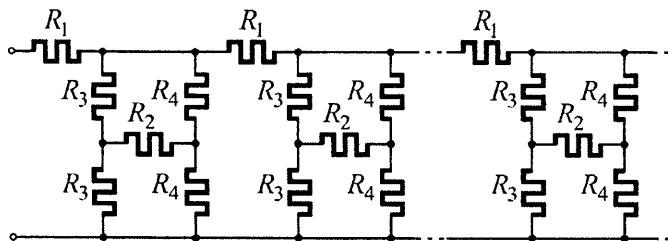
Слика 9.13.



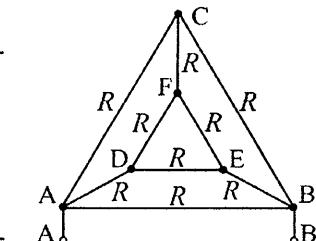
Слика 9.16.

9.16. Израчунати еквивалентну отпорност везе отпорника са слике 9.16. Познато је $R_1 = R_6 = 8\Omega, R_2 = R_7 = 6\Omega, R_3 = 16\Omega, R_4 = R_5 = 12\Omega$.

9.17. Отпорна мрежа (слика 9.17) сачињана је од исограниченог броја отпорника отпорности $R_1 = 10\Omega, R_2 = 40\Omega, R_3 = 15\Omega$ и $R_4 = 30\Omega$. Одредити еквивалентну отпорност мреже.



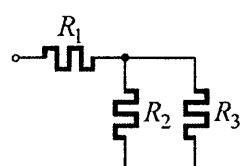
Слика 9.17.



Слика 9.18.

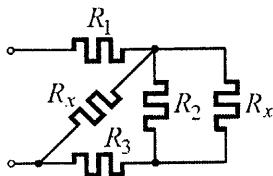
9.18. Од девет отпорних жица, исте отпорности $R = 150\Omega$, начињена је отпорна мрежа као на слици 9.18. Израчунати еквивалентну отпорност између тачака A и B.

9.19. У вези отпорника са слике 9.19. познате су вредности отпорности $R_1 = 300\Omega$ и $R_2 = 500\Omega$, као и еквивалентна отпорност $R_e = 400\Omega$. Одредити вредност отпорности отпорника R_3 .

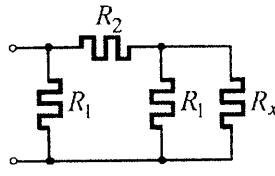


Слика 9.19.

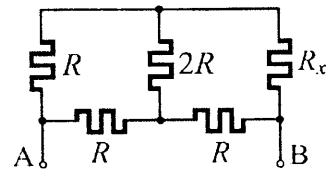
9.20. У вези отпорника, приказаној шемом на слици 9.20, познато је: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 6\Omega$ и $R_3 = 4\Omega$. Одредити непознату отпорност R_x тако да еквивалентна отпорност ове везе има вредност $R_e = 3\Omega$.



Слика 9.20.



Слика 9.21.



Слика 9.22.

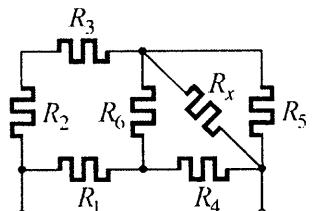
9.21. Задата је веза отпорника приказана шемом на слици 9.21. Ако су познате отпорности $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$ одредити отпорност R_x тако да еквивалентна отпорност ове везе отпорника буде једнака R_x , $R_e = R_x$.

9.22. У вези отпорника, која је приказана шемом на слици 9.22, одредити вредност отпорности отпорника R_x тако да еквивалентна отпорност између тачака А и В има вредност $R_{AB} = R$.

9.23. У вези отпорника, која је приказана шемом на слици 9.23, познате су вредности следећих отпорности:

$$R_1 = 6\text{ k}\Omega, R_2 = R_4 = R_5 = 3\text{ k}\Omega, R_3 = R_6 = 1\text{ k}\Omega.$$

Одредити отпорност R_x тако да еквивалентна отпорност ове везе отпорника не зависи од отпорности R_6 . За тај случај израчунати еквивалентну отпорност.

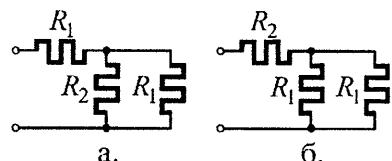


Слика 9.23.

9.24. Отпорник отпорности $R_1 = 3\Omega$ на 20^0C , начињен од графита чији је температурни коефицијент отпорности $\alpha_1 = -5 \cdot 10^{-4} ({}^0\text{C})^{-1}$, везан је паралелно са отпорником начињеним од материјала чији је температурни коефицијент отпорности $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-3} ({}^0\text{C})^{-1}$. Познато је да еквивалентна отпорност паралелне везе на температури $\theta_0 = 20^0\text{C}$ износи $R_e = 1.5\Omega$. Одредити температуру, различиту од 20^0C , на којој ће еквивалентна отпорност ове паралелне везе бити иста као и на 20^0C .

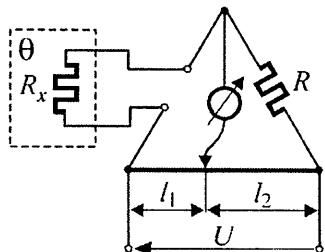
9.25. Два отпорника, чије су отпорности на температури $\theta_0 = 20^0\text{C}$ $R_1 = R_2 = R$, начињени су од материјала температурних коефицијената $\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-3} ({}^0\text{C})^{-1}$ и $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-3} ({}^0\text{C})^{-1}$. Одредити температуру θ на којој ће еквивалентна отпорност паралелне везе ова два отпорника бити једнака сквивалентној отпорности њихове редис везе на θ_0 .

9.26. Отпорници R_1 и R_2 начињени су од истог материјала који има температурни коефицијент отпорности $\alpha = 3.75 \cdot 10^{-4} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$. Познате су вредности њихових отпорности на температури $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$, $R_1 = 4\Omega$ и $R_2 = 3\Omega$. Одредити температуру θ на којој је еквивалентна отпорност везе отпорника са слике 8.32.б. једнака еквивалентној отпорности везе отпорника са слике 9.26.а. на θ_0 .



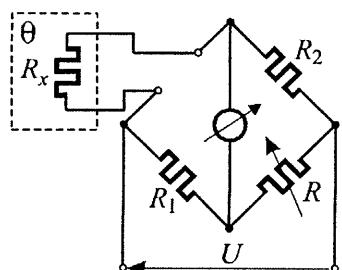
Слика 9.26.

9.27. Као саставни део уређаја за мерење температуре користи се отпорник R_x , који представља део моста приказаног шемом на слици 9.27. При температури $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$, отпорности $R = 6\text{k}\Omega$ и дужинама отпорне жице $l_1 = 40\text{ cm}$ и $l_2 = 60\text{ cm}$ мост је у равнотежи. После загревања отпорника R_x на температуру θ равнотежа се поново успостави када се клизач помери у десно за $\Delta l = 2\text{ cm}$ ($l'_1 = 42\text{ cm}$). Одредити температуру θ ако је температурни коефицијент материјала од кога је начињен отпорник R_x $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$.



Слика 9.27.

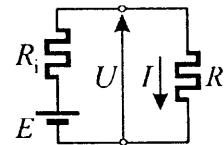
9.28. У једној од грана моста (слика 9.28.) налази се отпорник R_x начињен од материјала чији температурни коефицијент отпорности α није познат. Када се отпорник R_x налази на температури $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$ мост је доведен у равнотежу, при чему је вредност отпорности променљивог отпорника $R = 110\Omega$. Ако се само отпорник R_x загреје на температуру $\theta = 70^{\circ}\text{C}$ за довођење моста у равнотежу отпорност променљивог отпорника треба смањити на $R' = 100\Omega$, док отпорности R_1 и R_2 остају непромењене. Одредити непознати температурни коефицијент отпорности α .



Слика 9.28.

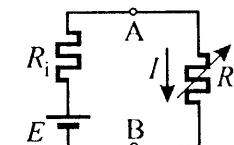
10. КОЛО СА ЈЕДНИМ ГЕНЕРАТОРОМ

? 10.1. На генератор електромоторне сile $E = 8\text{ V}$ и унутрашње отпорности $R_i = 2\Omega$ прикључен је потрошач отпорности $R = 14\Omega$ (слика 10.1). Израчунати струју у колу, напон на потрошачу, снагу потрошача, снагу Пулових губитака на унутрашњој отпорности генератора и снагу генератора.



Слика 10.1.

? 10.2. На генератор електромоторне сile $E = 5\text{ V}$ и унутрашње отпорности $R_i = 1\text{k}\Omega$ (слика 10.2) прикључује се потрошач променљиве отпорности R . Одредити струју у колу, напон и снагу на потрошачу у функцији његове отпорности. Одредити отпорност потрошача тако да:



Слика 10.2.

а* струја у колу има максималну вредност и за тај случај израчунати струју у колу, напон и снагу потрошача,

б* напон на потрошачу има максималну вредност и за тај случај израчунати струју у колу, напон и снагу потрошача,

в* снага на потрошачу има максималну вредност и за тај случај израчунати струју у колу, напон и снагу потрошача.

? 10.3. На генератор електромоторне сile E и унутрашње отпорности R_i прикључен је потрошач отпорности R .

а* При задатој унутрашњој отпорности генератора одредити отпорност потрошача тако да се на њему развија максимална снага. За тај случај израчунати снагу на потрошачу и степен корисног дејства система генератор - потрошач.

б* При задатој отпорности потрошача одредити унутрашњу отпорност генератора тако да се на потрошачу развија максимална снага. За тај случај израчунати снагу на потрошачу и степен корисног дејства система генератор - потрошач.

? 10.4. На генератор електромоторне сile $E = 10\text{ V}$ и унутрашње отпорности $R_i = 1\Omega$ прикључује се потрошач променљиве отпорности R . Израчунати напон и снагу на потрошачу, као и степен корисног дејства система генератор - потрошач за случај да је отпорност потрошача:

$$\text{а* } R = 0.1\Omega, \quad \text{б* } R = 1\Omega, \quad \text{в* } R = 10\Omega, \quad \text{г* } R = 100\Omega.$$

? 10.5. Трансфигурисати у струјни генератор напонски генератор задатих карактеристика

$$\text{а* } E = 100\text{ V}, R_i = 1\Omega, \quad \text{б* } E = 2\text{ V}, G_i = 50\mu\text{S}, \quad \text{в* } E = 10\text{ V}, G_i \rightarrow \infty.$$

☞ 10.6. Трансфигурисати у напонски генератор струјни генератор задатих карактеристика

$$\text{а* } J = 2 \text{ A}, G_s = 0, \text{ б* } J = 2 \text{ mA}, R_s = 10 \text{ k}\Omega, \text{ в* } J = 50 \text{ A}, G_s = 0.5 \text{ S}.$$

☞ 10.7. На напонски генератор, познате електромоторне силе $E = 8 \text{ V}$ и унутрашње отпорности $R_i = 2\Omega$, прикључен је потрошач отпорности $R = 3\Omega$.

а* Израчунати струју кроз потрошач.

б* Трансфигурисати задати генератор у струјни па затим израчунати струју кроз потрошач.

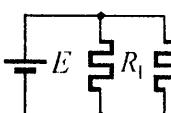
☞ 10.8. На струјни генератор, познате струје кратког споја $J = 3 \text{ mA}$ и унутрашње отпорности $R_s = 6 \text{ k}\Omega$, прикључен је потрошач отпорности $R = 3 \text{ k}\Omega$.

а* Израчунати снагу потрошача.

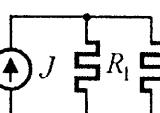
б* Трансфигурисати задати генератор у напонски па затим израчунати снагу потрошача.

☞ 10.9. У колу, приказаном шемом на слици 10.9, одредити отпорност отпорника R_2 да би се на њему развијала снага P . За ту вредност отпорности R_2 израчунати струју кроз њега I , као и рад који се на паралелној вези отпорника R_1 и R_2 у току времена t претвара у топлоту. Нумерички подаци: $E = 10 \text{ V}$, $R_1 = 20\Omega$, $P = 10 \text{ W}$, $t = 10'$.

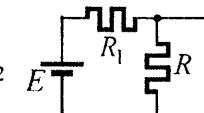
☞ 10.10. Решити прстходни задатак за случај да су отпорници, уместо на идеалан напонски, прикључени на идеалан струјни генератор (слика 10.10) струје кратког споја $J = 1.5 \text{ A}$.



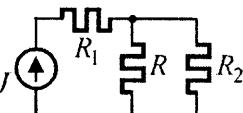
Слика 10.9.



Слика 10.10.



Слика 10.11.



Слика 10.12.

☞ 10.11. У колу, чија је шема приказана на слици 10.11, позната је електромоторна сила идеалног напонског генератора, као и вредности отпорности отпорника R_1 и R_2 . Одредити отпорност отпорника R тако да укупна снага везе отпорника буде $P = 1 \text{ W}$. За тај случај одредити снаге на свим отпорницима. Бројни подаци: $E = 100 \text{ V}$, $R_1 = 9 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$.

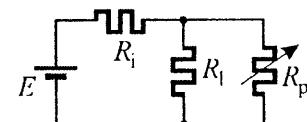
☞ 10.12. Решити прстходни задатак за случај да је веза отпорника прикључена на идеалан струјни генератор (слика 10.12) струје кратког споја $J = 10 \text{ mA}$.

10.13. Електрични бојлер има два грејача различитих отпорности и прикључује се на идеалан струјни генератор струје J . Када је прикључен грејач отпорности R_1 вода у бојлеру достигне одређену температуру за време $t_1 = 20'$. Када је прикључен други грејач, отпорности R_2 , вода достигне исту температуру за време $t_2 = 30'$. За које време ће се вода у бојлеру загрејати до исте температуре ако се грејачи повежу

а* редно, б* паралелно.

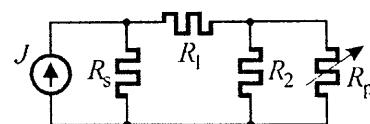
10.14. Решити претходни задатак за случај да се грејачи прикључују на идеалан напонски генератор електромоторне силе E .

10.15. У колу, приказаном шемом на слици 10.15, одредити вредност отпорности променљивог отпорника R_p да би генератор, електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i , предавао паралелној вези отпорника R_1 и R_p максималну снагу. За тај случај израчунати снаге свих елемената кола. Нумерички подаци: $E = 40\text{ V}$, $R_i = 20\Omega$, $R_1 = 30\Omega$.



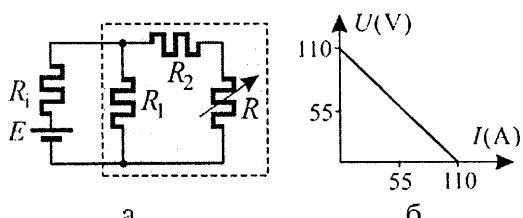
Слика 10.15.

10.16. У колу, приказаном шемом на слици 10.16, одредити вредност отпорности променљивог отпорника R_p да би генератор, познате струје J и унутрашње отпорности R_s , предавао меповитој вези отпорника R_1 , R_2 и R_p максималну снагу. За тај случај израчунати снаге на отпорницима R_p и R_s и снагу генератора. Бројни подаци: $J = 0.6\text{ A}$, $R_s = 10\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 12\Omega$.



Слика 10.16.

10.17. Електрични бојлер има три грејача: отпорности два грејача су $R_1 = 2\Omega$ и $R_2 = 1\Omega$, док је трећи грејач променљиве отпорности R . Бојлер се прикључује на генератор електромоторне силе E и унутрашње отпорности R_i (слика 10.17.а),



a.

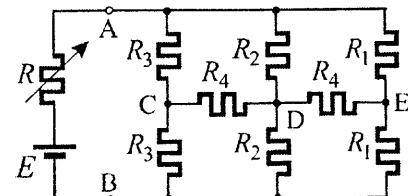
Слика 10.17.

познате спољашње карактеристике (слика 10.17.б).

а* Одредити отпорност R трећег грејача тако да температура воде у бојлеру достигне жељену вредност за најкраће време.

б* За вредност отпора R , одређену под а*, одредити снаге појединачних грејача у бојлеру.

10.18. Сложена веза отпорника прикључена је преко променљивог отпорника R на идеалан напонски генератор електромоторне сile E (слика 10.18). Одредити вредност отпорности променљивог отпорника R тако да се на њему развија максимална снага. За тај случај израчунати снаге на свим елементима у колу. Бројни подаци: $E = 6 \text{ V}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 7.5\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$.



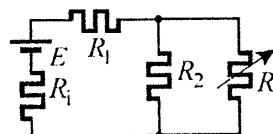
Слика 10.18.

10.19. Мешовита веза отпорника отпорности $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 60\Omega$ и R прикључена је на генератор електромоторне сile $E = 30 \text{ V}$ и унутрашње отпорности $R_i = 30\Omega$ (слика 10.19).

a* Одредити напон на променљивом отпорнику R у функцији његове отпорности.

б* Одредити отпорност отпорника R тако да се на мешовитој вези отпорника развија максимална снага и израчунати ту снагу, као и снагу на отпорнику R .

в* Одредити отпорност отпорника R тако да се на њему развија максимална снага и израчунати ту снагу, као и укупну снагу на мешовитој вези отпорника.



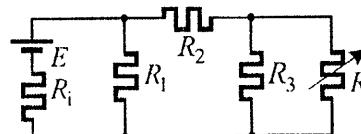
Слика 10.19.

10.20. У колу, представљеном шемом на слици 10.20, одредити вредност променљивог отпорника R тако

а* да генератор мешовитој вези отпорника даје максималну снагу и израчунати ту снагу и

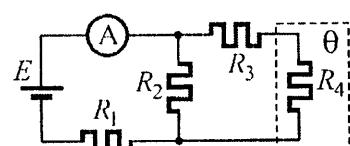
б* да се на отпорнику R развија максимална снага и израчунати ту снагу.

Познато је: $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_i = 7\Omega$, $E = 28 \text{ V}$.



Слика 10.20.

10.21. У колу, приказаном шемом на слици 10.21, познато је: $E = 30 \text{ V}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 6\Omega$ и $R_3 = 1.5\Omega$. Отпорност отпорника R_4 променљива је са температуром. Када је отпорник R_4 на температури $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$ изменена је амперметром струја $I_0 = 6 \text{ A}$, а када је на температури $\theta = 500^\circ \text{C}$ струја је $I_\theta = 5 \text{ A}$.



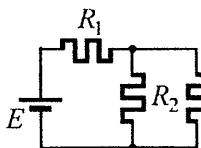
Слика 10.21.

а* Одредити отпорност отпорника R_4 на температури $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$.

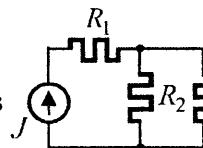
6* Одредити температурни коефицијент отпорности материјала од кога је начињен отпорник R_4 .

в* Одредити температуру отпорника R_4 да би се на њему развила максимална снага и израчунати ту снагу.

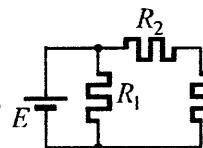
7 10.22. Мешовита веза отпорника, отпорности $R_1 = 800\Omega$, $R_2 = 2\text{ k}\Omega$ и $R_3 = 3\text{ k}\Omega$, прикључује се на идеалан напонски генератор електромоторне силе E (слика 10.22). Максимално дозвољене снаге на појединим отпорницима су $P_{1\max} = 2\text{ W}$, $P_{2\max} = 0.8\text{ W}$ и $P_{3\max} = 0.3\text{ W}$, респективно. Одредити највећу вредност електромоторне силе E на коју може да се прикључи ова група отпорника.



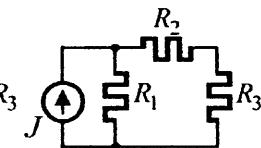
Слика 10.22.



Слика 10.23.



Слика 10.24.



Слика 10.25.

7 10.23. Мешовита веза отпорника из претходног задатка прикључује се на идеални струјни генератор струје кратког споја J (слика 10.23). Одредити највећу вредност струје кратког споја генератора J на који може да се прикључи ова група отпорника.

7 10.24. Решити задатак 10.22. за случај да су отпорници повезани као на слици 10.24.

7 10.25. Решити задатак 10.23. за случај да су отпорници повезани као на слици 10.25.

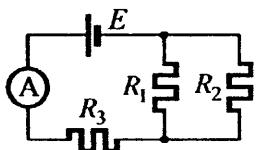
7 10.26. Сијалица номиналне снаге $P_n = 100\text{ W}$, при номиналном напону $U_n = 220\text{ V}$, прикључује се на генератор занемариве унутрашње отпорности и електромоторне силе $E = 220\text{ V}$ преко двожичног бакарног вода чија укупна отпорност на температури $\theta_0 = 20^0\text{ C}$ износи $R_0 = 5\Omega$. Температурни коефицијент отпорности за бакар је $\alpha = 3.93 \cdot 10^{-3} ({}^0\text{C})^{-1}$. Под претпоставком да се отпорност сијалице не мења одредити колика је њена снага:

а* када се напојни вод налази на температури $\theta_1 = 30^0\text{ C}$

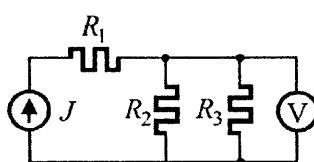
б* када се напојни вод налази на температури $\theta_2 = -10^0\text{ C}$.

7 10.27. У колу, које је приказано шемом на слици 10.27, познате су отпорности отпорника R_2 и R_3 , електромоторна сила E , као и струја I коју мери амперметар. Одредити снагу на отпорнику R_1 . Нумерички подаци: $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $E = 120\text{ V}$, $I = 2\text{ A}$.

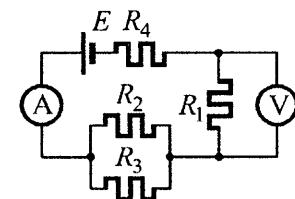
10.28. Потрошач, чија је номинална снага $P_n = 1\text{ kW}$ при номиналном напону $U_n = 220\text{ V}$, прикључује се на генератор електромоторне силе $E = 220\text{ V}$ занемариве унутрашње отпорности преко двожичног вода укупне отпорности $R_p = 2\Omega$. Израчунати снагу потрошача. Колика ће бити снага овог потрошача ако се паралелно њему прикључи још један потрошач исте номиналне снаге?



Слика 10.27.



Слика 10.29.



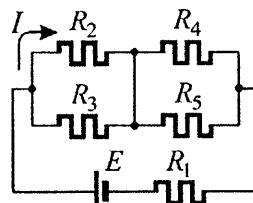
Слика 10.30.

10.29. У колу, приказаном шемом на слици 10.29, позната је струја струјног генератора, $J = 1.5\text{ A}$, његова снага, $P_J = 60\text{ W}$, и снага на отпорнику R_3 , $P_3 = 5\text{ W}$. Волтметром је измерен напон на паралелној вези отпорника R_2 и R_3 , $U = 10\text{ V}$. Одредити отпорност свих отпорника, као и снаге на отпорницима R_1 и R_2 .

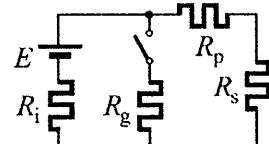
10.30. У колу, приказаном шемом на слици 10.30, познати су електромоторна сила генератора $E = 120\text{ V}$, као и отпорности отпорника $R_3 = 20\Omega$ и $R_4 = 25\Omega$. Амперметром је измерена струја $I = 2\text{ A}$ у грани са генератором а волтметром напон $U_1 = 40\text{ V}$ на отпорнику R_1 . Одредити отпорност отпорника R_2 .

10.31. У колу, приказаном шемом на слици 10.31, познате су отпорности свих отпорника и струја I кроз отпорник R_2 . Израчунати снаге свих отпорника, као и електромоторну силу E . Нумерички подаци:

$$R_1 = 6\Omega, R_2 = R_5 = 30\Omega, R_3 = R_4 = 20\Omega, I = 0.8\text{ A}.$$



Слика 10.31.

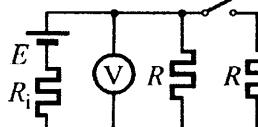


Слика 10.32.

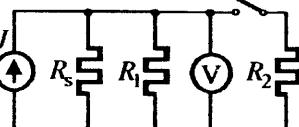
10.32. На аутомобилски акумулатор, чија је електромоторна сила $E = 12.6\text{ V}$ и унутрашња отпорност $R_i = 0.04\Omega$, преко проводника отпорности $R_p = 0.3\Omega$ прикључује се сијалица чија је отпорност $R_s = 7\Omega$. Одредити напон на сијалици U_s и њену снагу P_s . Ако се, затварањем прекидача (слика 10.32), на акумулатор прикључи и електропокрстач еквивалентне отпорности $R_g = 0.1\Omega$, одредити напон на сијалици и њену снагу у том случају.

10.33. При струји оптерећења $I_1 = 2\text{ A}$ напон на крајевима акумулатора је $U_1 = 2.1\text{ V}$, док је при струји оптерећења $I_2 = 4\text{ A}$ напон на његовим крајевима $U_2 = 2\text{ V}$. Одредити слектромоторну силу и унутрашњу отпорност акумулатора (E и R_i), као и струју кратког споја (I_{ks}).

10.34. У колу, чија је шема приказана на слици 10.34, при отвореном прекидачу волтметром је измерен напон $U_1 = 2\text{ V}$. По затварању прекидача показивање волтметра је $U_2 = 1.8\text{ V}$. Одредити електромоторну силу и унутрашњу отпорност генератора ако је $R = 4\Omega$.



Слика 10.34.



Слика 10.35.

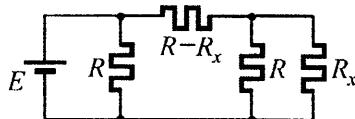
10.35. У колу, приказаном шемом на слици 10.35, познате су отпорности R_1 и R_2 . При отвореном прекидачу волтметар мери напон U_1 , а по затварању прекидача напон U_2 . Одредити струју струјног генератора, J , и његову унутрашњу отпорност R_s . Нумерички подаци: $R_1 = 600\Omega$, $R_2 = 200\Omega$, $U_1 = 300\text{ V}$, $U_2 = 120\text{ V}$.

10.36. У колу, приказаном шемом на слици 10.36, одредити отпорност непознатог отпорника R_x да би однос напона на паралелној вези отпорника R и R_x , U , и електромоторне силе E имао задату вредност U/E . Одредити R_x за случај да је $R = 10\Omega$ и

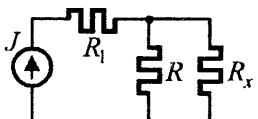
$$\text{a* } U/E = 0.25 \quad \text{б* } U/E = 0.75.$$

10.37. У колу, приказаном шемом на слици 10.37, одредити отпорност непознатог отпорника R_x да би однос струје кроз отпорник R , I , и струје струјног генератора, J , имао задату вредност. Одредити R_x у случају да је $R_1 = R = 10\Omega$ и

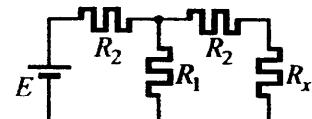
$$\text{а* } I/J = 0.25 \quad \text{б* } I/J = 0.75.$$



Слика 10.36.



Слика 10.37.

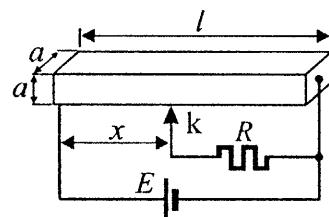


Слика 10.38.

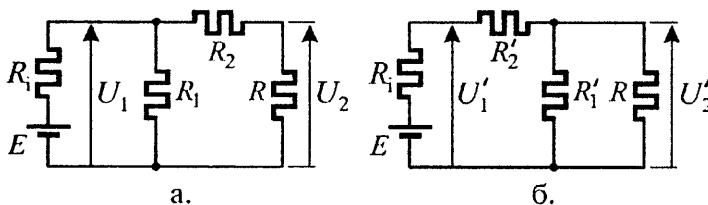
10.38. Мешовита веза отпорника прикључује се на идеалан напонски генератор електромоторне силе E (слика 10.38). Познате су вредности отпорности $R_1 = 16\Omega$ и $R_2 = 18\Omega$. Одредити отпорност отпорника R_x тако да се на њему развија 1/16 снаге генератора. За тај случај одредити однос електромоторне силе E и напона на отпорнику R_x , U_x .

10.39. Штап квадратног попречног пресека $a \times a$ и дужине l начињен је од нехомогеног материјала чија се специфична отпорност линеарно мења од вредности ρ_1 на једном, до вредности ρ_2 на другом крају штапа. Штап је прикључен у коло приказано на слици 10.39. Одредити закон промене струје кроз отпорник R у функцији положаја (x/l) клизног контакта k . Занемарити прелазну отпорност између контакта и штапа. Нумерички подаци:

$$\rho_1 = 5 \cdot 10^{-4} \Omega \text{m}, \rho_2 = 3\rho_1, E = 100 \text{ V}, a = 1 \text{ mm}, l = 10 \text{ cm}, R = 100 \Omega.$$



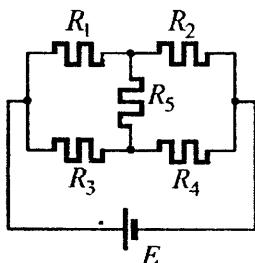
Слика 10.39.



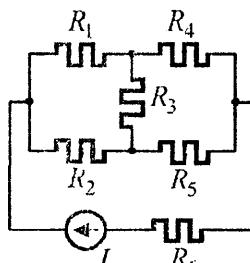
Слика 10.40.

10.40. Задата су два електрична кола, приказана на сликама 10.40.а. и 10.40.б. Одредити, у колу са слике 10.38.б, вредности отпорника R'_1 и R'_2 тако да буду задовољени услови $U'_1 = U_1$ и $U'_2 = U_2$. Бројни подаци: $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R = 50\Omega$.

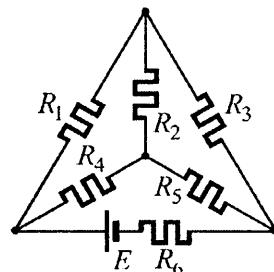
10.41. Одредити струју кроз отпорник R_2 у колу приказаном шемом на слици 10.41, као и снагу генератора E . Нумерички подаци: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 10\Omega$, $E = 14 \text{ V}$.



Слика 10.41.



Слика 10.42.

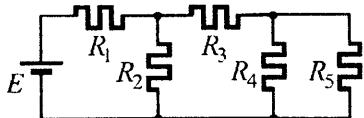


Слика 10.43.

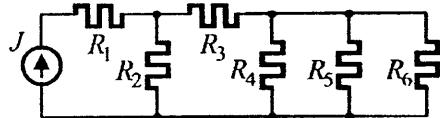
10.42. У колу, приказаном шемом на слици 10.42, израчунати снаге свих отпорника и снагу струјног генератора. Бројни подаци: $J = 0.3 \text{ A}$, $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_3 = R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 5\Omega$, $R_6 = 2\Omega$.

10.43. У колу, приказаном шемом на слици 10.43, одредити отпорност отпорника R_5 тако да кроз отпорник R_2 не тече струја. За тај случај израчунати струју кроз отпорник R_5 и снагу генератора. Нумерички подаци: $R_1 = 1\Omega$, $R_3 = 1.5\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_6 = 2\Omega$, $E = 10\text{ V}$.

10.44. Одредити све струје у колу приказаном шемом на слици 10.44. Нумерички подаци: $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = R_5 = 6\Omega$, $R_4 = 12\Omega$, $E = 20\text{ V}$.



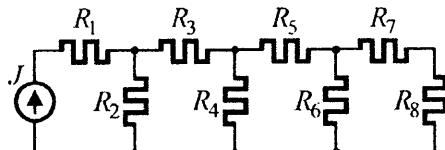
Слика 10.44.



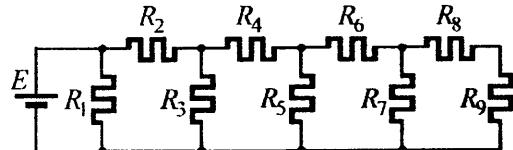
Слика 10.45.

10.45. У колу, приказаном шемом на слици 10.45, познате су вредности свих елемената. Одредити снагу струјног генератора и снаге на отпорница R_3 и R_6 . Бројни подаци: $R_1 = R_3 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = R_6 = 20\text{ k}\Omega$, $R_4 = 30\text{ k}\Omega$, $R_5 = 60\text{ k}\Omega$, $J = 1\text{ mA}$.

10.46. Мрежа отпорника, представљена шемом на слици 10.46, прикључена је на струјни генератор струје $J = 6.3\text{ A}$. Отпорности свих отпорника су исте и имају вредност $R_1 = R_2 = \dots = R_8 = 1\Omega$. Одредити струје у свим гранама кола и снагу којом је оптерећен генератор.



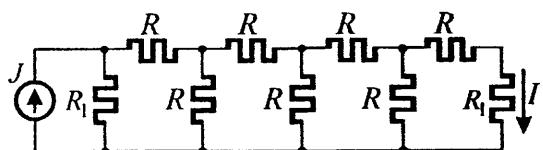
Слика 10.46.



Слика 10.47.

10.47. Мрежа отпорника, представљена шемом на слици 10.47, прикључена је на напон $U = 170\text{ V}$. Одредити снагу на отпорнику R_9 . Познато је: $R_1 = R_2 = \dots = R_9 = 1\Omega$.

10.48. У колу, приказаном шемом на слици 10.48, позната су струја I и струја струјног генератора J . Одредити однос отпорности R_1 / R . Бројни подаци: $I = 0.1\text{ A}$, $J = 5.2\text{ A}$.

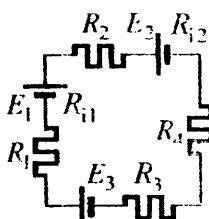


Слика 10.48.

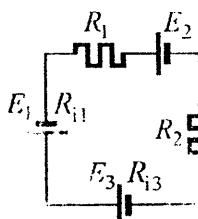
11. ПРОСТО КОЛО, ГРАНА СЛОЖЕНОГ КОЛА, НАПОН ИЗМЕЂУ ДВЕ ТАЧКЕ У КОЛУ

? 11.1. У простом колу, приказаном шемом на слици 11.1, познате су вредности свих елемената: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$, $E_3 = 8\text{ V}$, $R_1 = R_3 = 4\Omega$, $R_2 = R_4 = 3\Omega$, $R_{i1} = R_{i2} = 0.5\Omega$. Израчунати јачину електричке струје.

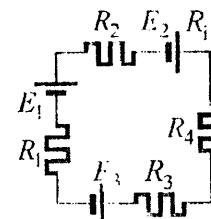
? 11.2. У простом колу, приказаном шемом на слици 11.2, познате су вредности свих елемената: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 5\text{ V}$, $E_3 = 20\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $R_{i1} = R_{i3} = 0.5\Omega$. Одредити струју у колу и израчунати снаге на свим елементима.



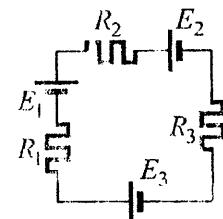
Слика 11.1.



Слика 11.2.



Слика 11.3.

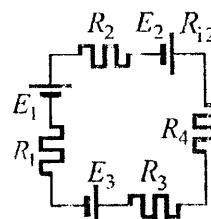


Слика 11.4.

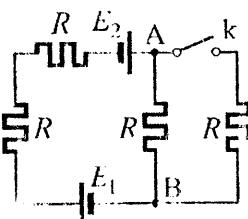
? 11.3. У простом колу, приказаном шемом на слици 11.3, позната је снага на отпорнику R_2 , $P_2 = 18\text{ W}$, као и вредности следећих елемената: $E_1 = E_2 = 30\text{ V}$, $E_3 = 15\text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 8\Omega$ и $R_4 = 5\Omega$. Одредити унутрашњу отпорност генератора E_2 , R_{i2} .

? 11.4. У простом колу, приказаном шемом на слици 11.4, познато је: $E_1 = E_2 = 10\text{ V}$ и $R_1 = R_2 = R_3 = 5\Omega$. Електромоторна сила E_2 се понапа као потрошач, снаге $P_{E2} = 10\text{ W}$. Израчунати снаге на свим елементима кола.

? 11.5. У колу, приказаном шемом на слици 11.5, познато је: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$, $R_{i2} = 1\Omega$ и $R_1 = R_3 = 10\Omega$. Ако се промени оријентација електромоторне силе E_3 , јачина струје у колу ће се повећати два пута. Одредити електромоторну силу E_3 .



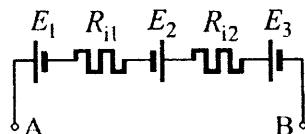
Слика 11.5.



Слика 11.6.

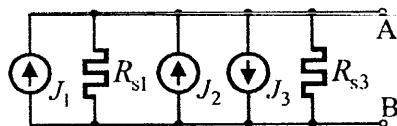
11.6. У колу са слике 11.6. при отвореном прекидачу k напон између тачака A и B је U_{AB} , а при затвореном U'_{AB} . Одредити U_{AB}/U'_{AB} .

11.7. Три напонска генератора везана су између тачака A и B на ред, као на слици 11.7. Два генератора су реална, слектромоторних сила E_1 и E_2 и унутрашњих отпорности R_{i1} и R_{i2} . Трећи генератор је идеалан, електромоторне силе E_3 . Заменити ову редну везу једним сквивалентним напонским генератором.



Слика 11.7.

11.8. Три струјна генератора везана су између тачака A и B паралелно, као на слици 11.8. Два генератора су реална, струја кратког споја J_1 и J_3 и унутрашњих отпорности R_{s1} и R_{s3} . Трећи генератор је идеалан, струје кратког споја J_2 . Заменити ову паралелну везу једним сквивалентним струјним генератором.



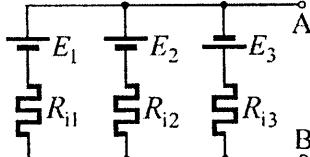
Слика 11.8.

11.9. Паралелну везу генератора са слике 11.9. заменити једним, еквивалентним напонским генератором. Нумерички подаци:

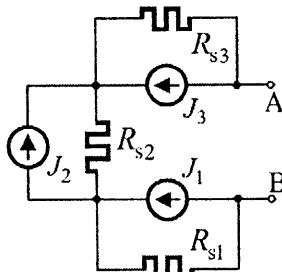
$$E_1 = 12 \text{ V}, R_{i1} = 6 \Omega, E_2 = 10 \text{ V}, R_{i2} = 2 \Omega, E_3 = 15 \text{ V}, R_{i3} = 3 \Omega.$$

11.10. Редну везу генератора са слике 11.10. заменити једним, еквивалентним струјним генератором. Нумерички подаци:

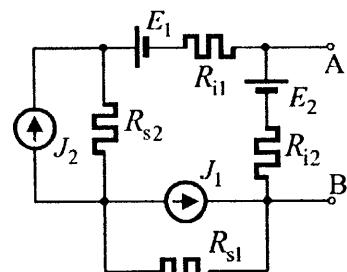
$$J_1 = 3 \text{ mA}, R_{s1} = 10 \text{ k}\Omega, J_2 = 1 \text{ mA}, R_{s2} = 20 \text{ k}\Omega, J_3 = 2 \text{ mA}, R_{s3} = 50 \text{ k}\Omega.$$



Слика 11.9.



Слика 11.10.



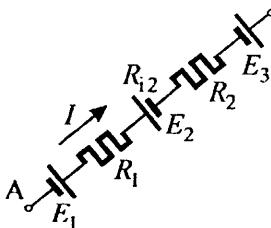
Слика 11.11.

11.11. Група генератора повезана је као на слици 11.11. Заменити је једним, еквивалентним напонским генератором. Нумерички подаци:

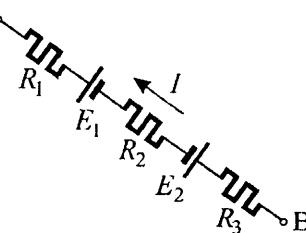
$$E_1 = 10 \text{ V}, R_{i1} = 1 \Omega, E_2 = 6 \text{ V}, R_{i2} = 3 \Omega,$$

$$J_1 = 1 \text{ A}, R_{s1} = 2 \Omega, J_2 = 2 \text{ A}, R_{s2} = 3 \Omega.$$

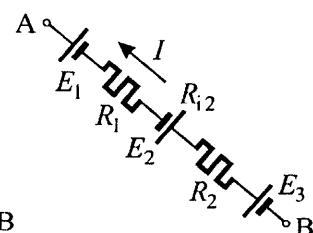
11.12. Кроз грану АВ сложеног кола (слика 11.12) протиче струја јачине $I = 8 \text{ mA}$, задатог смера. Одредити напон између тачака А и В. Познато је: $E_1 = 2 \text{ V}$, $E_2 = 4 \text{ V}$, $E_3 = 1 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 120\Omega$, $R_{i2} = 10\Omega$.



Слика 11.12.



Слика 11.13.



Слика 11.14.

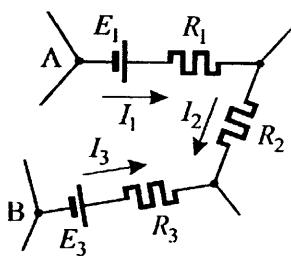
11.13. Кроз грану АВ сложеног кола (слика 11.13) протиче струја јачине $I = 0.5 \text{ A}$, задатог смера. Одредити напон U_{AB} . Нумерички подаци: $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 10 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 20\Omega$, $R_2 = 10\Omega$.

11.14. Израчунати јачину струје кроз грану АВ сложеног кола (слика 11.14) за задати референтни смер. Нумерички подаци:

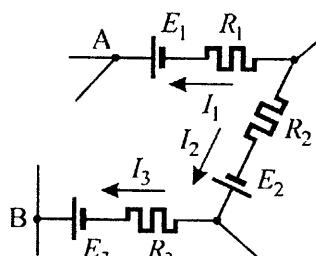
$$U_{AB} = 2 \text{ V}, E_1 = E_3 = 3 \text{ V}, E_2 = 5 \text{ V}, R_1 = R_2 = 1\Omega, R_{i2} = 0.5\Omega.$$

11.15. Израчунати напон између тачака А и В у делу сложеног кола приказаног на слици 11.15. Бројни подаци: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_3 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $I_1 = I_3 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$.

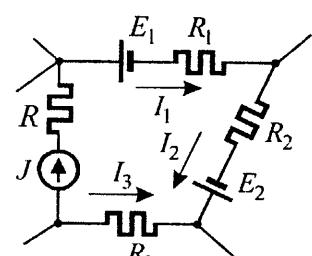
11.16. Израчунати напон између тачака А и В у делу сложеног кола приказаног на слици 11.16. Нумерички подаци: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = E_3 = 6 \text{ V}$, $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$.



Слика 11.15.



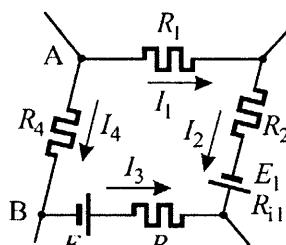
Слика 11.16.



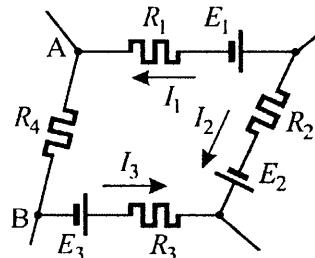
Слика 11.17.

11.17. У делу сложеног кола, приказаном на слици 11.17. познато је: $R_1 = R_2 = 5\Omega$, $R_3 = R = 10\Omega$, $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 10 \text{ V}$, $J = 1 \text{ A}$, $I_1 = I_2 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 1 \text{ A}$. Израчунати снагу струјног генератора.

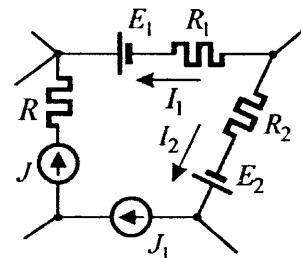
11.18. У делу сложеног кола, приказаном на слици 11.18, познато је: $I_1 = I_2 = I_3 = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\Omega$, $R_{i1} = 1\Omega$, $E_1 = E_2 = 10 \text{ V}$. Израчунати струју I_4 .



Слика 11.18.



Слика 11.19.



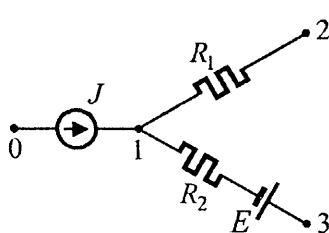
Слика 11.20.

11.19. У делу сложеног кола, приказаном на слици 11.19, познато је: $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = I_3 = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_3 = 5\Omega$, $R_2 = R_4 = 10\Omega$, $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$ и $E_3 = 15 \text{ V}$. Израчунати снагу на отпорнику R_4 .

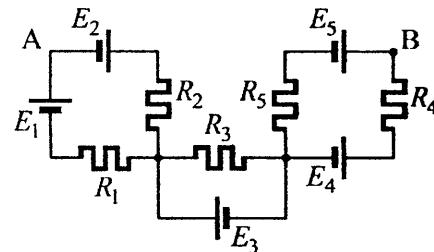
11.20. У делу сложеног кола, приказаном на слици 11.20, позната је снага на струјном генератору $J = 1 \text{ A}$, $P_J = 10 \text{ W}$, као и $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R = 20\Omega$, $E_1 = 15 \text{ V}$, $E_2 = 5 \text{ V}$ и $J_1 = 0.5 \text{ A}$. Израчунати снагу генератора J_1 .

11.21. У делу сложеног кола, који је приказан на слици 11.21, познати су потенцијали тачака 2 и 3 према тачки 0, као и вредности свих елемената. Одредити напон на крајевима струјног генератора и његову снагу. Нумерички подаци:

$$\varphi_2 = -7 \text{ V}, \varphi_3 = -17 \text{ V}, E = 6 \text{ V}, J = 5 \text{ mA}, R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_2 = 2 \text{ k}\Omega.$$



Слика 11.21.



Слика 11.22.

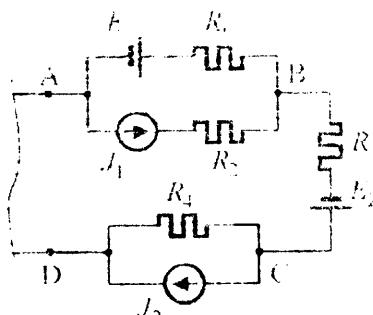
11.22. У колу, приказаном шемом на слици 11.22, одредити напон између тачака А и В, U_{AB} . Нумерички подаци:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 10 \text{ V}, R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \text{ k}\Omega.$$

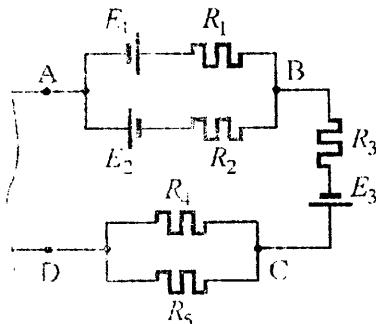
11.23. У делу сложеног кола (слика 11.23) познати су потенцијали тачака А и В, φ_A и φ_B , као и вредности свих елемената. Одредити напон U_{AD} и потенцијал тачке D, φ_D . Нумерички подаци:

$$\varphi_A = 3 \text{ V}, \varphi_B = 1 \text{ V}, U = 1 \text{ V}, E_2 = 2 \text{ V}, J_1 = 1 \text{ A}, J_2 = 2 \text{ A},$$

$$R_1 = R_4 = 1\Omega, R_3 = R_5 = 2\Omega.$$



Слика 11.23.

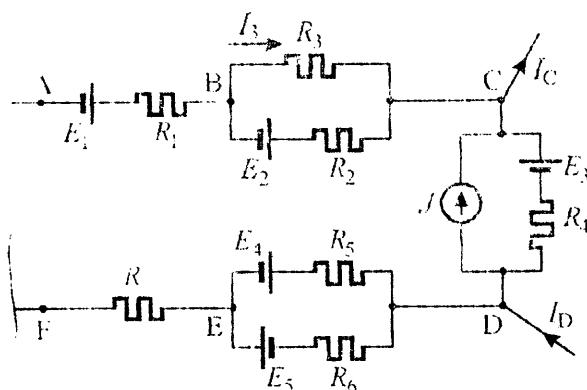


Слика 11.24.

11.24. У делу сложеног кола (слика 11.24) познати су потенцијали тачака В и С, φ_B и φ_C , као и вредности свих елемената. Одредити потенцијал тачака А и Д, φ_A φ_D . Нумерички подаци:

$$\varphi_B = 2 \text{ V}, \varphi_C = 33 \text{ V}, E_1 = 2 \text{ V}, E_2 = 1 \text{ V}, E_3 = 6 \text{ V},$$

$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 5\Omega, R_4 = 3\Omega, R_5 = 6\Omega.$$



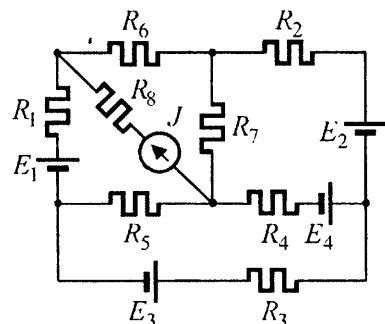
Слика 11.25.

11.25. У делу сложеног кола, приказаном на слици 11.25, познате су струје I_3 , I_C и I_D , као и вредности свих елемената. Одредити напон U_{AF} . Нумерички подаци: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1\Omega$, $I_D = 2 \text{ A}$, $I_3 = I_C = 1 \text{ A}$, $J = 1 \text{ A}$, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 1 \text{ V}$.

12. СЛОЖЕНА ЕЛЕКТРИЧНА КОЛА

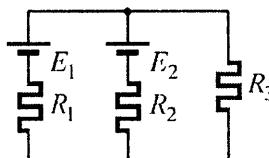
12.1. У колу, приказаном шемом на слици 12.1, познате су вредности свих елемената. Одредити струје у свим гранама кола и снаге на свим елементима. Задатак решити директном применом Кирхофових законова. Нумерички подаци:

$$E_1 = 11\text{ V}, E_2 = E_4 = 2\text{ V}, E_3 = 8\text{ V}, \\ J = 2\text{ A}, R_1 = R_2 = \dots = R_8 = 1\Omega.$$

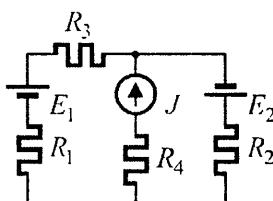


Слика 12.1.

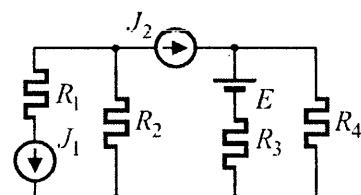
12.2. У колу, приказаном шемом на слици 12.2. применом Кирхофових законова одредити струје у свим гранама кола и снаге на свим елементима. Бројни подаци: $E_1 = 30\text{ V}$, $E_2 = 5\text{ V}$, $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$.



Слика 12.2.



Слика 12.3.

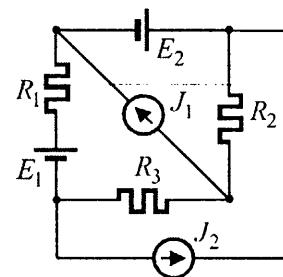


Слика 12.4.

12.3. Директном применом Кирхофових законова одредити струје у свим гранама кола приказаног шемом на слици 12.3. Израчунати снагу струјног генератора. Познато је: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega$, $E_1 = E_2 = 20\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$.

12.4. Применом Кирхофових законова одредити струје у свим гранама кола приказаног шемом на слици 12.4. Нумерички подаци: $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = R_4 = 2\Omega$, $E = 14\text{ V}$, $J_1 = J_2 = 1\text{ A}$.

12.5. У колу, приказаном шемом на слици 12.5, директном применом Кирхофових законова одредити јачине електричних струја у свим гранама. Израчунати снаге свих генератора. Бројни подаци: $E_1 = 25\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$, $J_1 = 1\text{ A}$, $J_2 = 2\text{ A}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = R_3 = 5\Omega$.

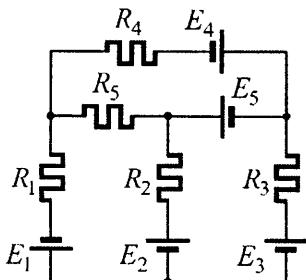


Слика 12.5.

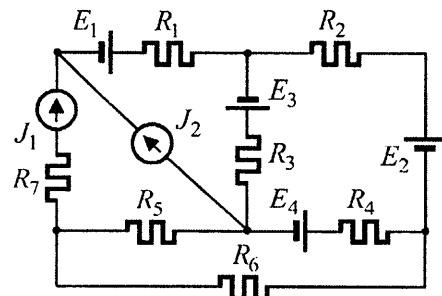
12.6. Одредити све струје у колу приказаном шемом на слици 12.6. Задатак решити применом метода контурних струја. Нумерички подаци:

$$E_1 = 1 \text{ V}, E_2 = 2 \text{ V}, E_3 = E_5 = 3 \text{ V}, E_4 = 7 \text{ V},$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = 1\Omega, R_2 = R_4 = 2\Omega.$$



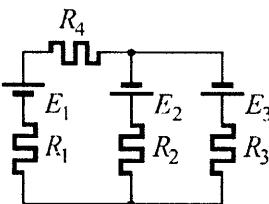
Слика 12.6.



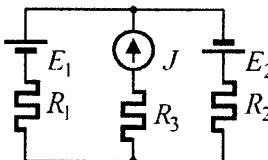
Слика 12.7.

12.7. У колу, приказаном шемом на слици 12.7, познате су вредности свих елемената. Користећи метод контурних струја одредити струје у свим гранама кола. Познато је: $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 15 \text{ V}$, $E_4 = 18 \text{ V}$, $J_1 = 1 \text{ A}$, $J_2 = 2 \text{ A}$, $R_1 = R_7 = 15\Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = 10\Omega$, $R_3 = R_5 = 5\Omega$.

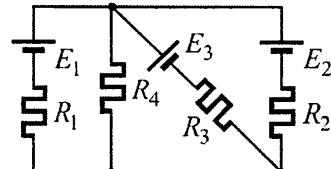
12.8. У колу, приказаном шемом на слици 12.8, познате су вредности свих елемената. Методом контурних струја одредити струје у свим гранама кола. Нумерички подаци: $E_1 = E_3 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 15 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5\Omega$, $R_3 = R_4 = 10\Omega$.



Слика 12.8.



Слика 12.9.

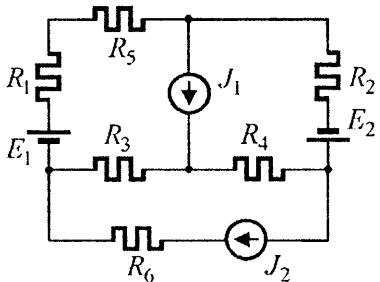


Слика 12.10.

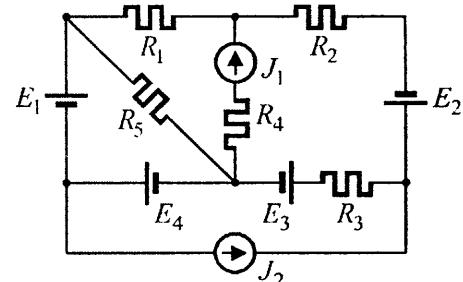
12.9. У колу, приказаном шемом на слици 12.9, методом контурних струја одредити струје у свим гранама. Нумерички подаци: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 5 \text{ V}$, $J = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 5\Omega$.

12.10. Применом метода контурних струја одредити струје у свим гранама кола које је приказано шемом на слици 12.10. Бројни подаци: $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 2 \text{ V}$, $E_3 = 10 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $R_3 = R_4 = 4\Omega$.

12.11. Одредити струје у свим гранама кола које је приказано шемом на слици 12.11. Задатак решити методом потенцијала чворова. Нумерички подаци: $E_1 = 5\text{ V}$, $E_2 = 2\text{ V}$, $J_1 = 3\text{ A}$, $J_2 = 1\text{ A}$, $R_1 = \dots = R_6 = 1\Omega$.



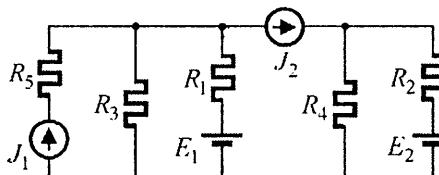
Слика 12.11.



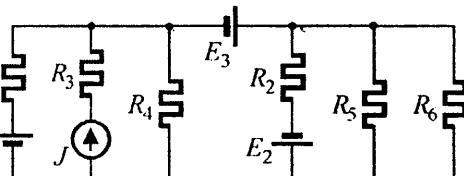
Слика 12.12.

12.12. У колу, приказаном шемом на слици 12.12, примсном мстода потенцијала чворова одредити све струје. Нумерички подаци: $E_1 = 3\text{ V}$, $E_2 = E_3 = 8\text{ V}$, $E_4 = 5\text{ V}$, $J_1 = J_2 = 1\text{ A}$, $R_1 = R_3 = R_5 = 1\Omega$, $R_2 = R_4 = 2\Omega$.

12.13. Методом потенцијала чворова одредити све струје у колу које је приказано шемом на слици 12.13. Одредити снаге струјних генератора J_1 и J_2 . Бројни подаци: $E_1 = 12\text{ V}$, $E_2 = 5\text{ V}$, $J_1 = J_2 = 10\text{ A}$, $R_1 = R_4 = 2\Omega$, $R_2 = R_3 = 1\Omega$, $R_5 = 3\Omega$.



Слика 12.13.



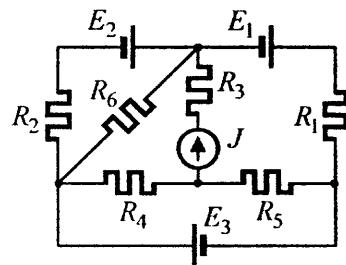
Слика 12.14.

12.14. Применом метода потенцијала чворова одредити струје у свим гранама кола чија је шема дата на слици 12.14, а затим одредити снагу струјног генератора J . Нумерички подаци: $E_1 = 1\text{ V}$, $E_2 = 2\text{ V}$, $E_3 = 4\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$, $R_1 = R_3 = R_4 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_5 = R_6 = 4\Omega$.

12.15. У колу, које је приказано шемом на слици 12.16, познате су вредности свих елемената. Коло решити методом потенцијала чворова, а затим израчунати напон на струјном генератору. Нумерички подаци:

$$E_1 = 6\text{ V}, E_2 = 3\text{ V}, E_3 = 4\text{ V}, J = 1\text{ A},$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = 2\Omega, R_2 = R_4 = R_6 = 1\Omega.$$



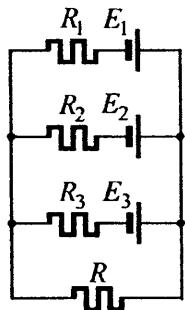
Слика 12.15.

Задатке 12.16. до 12.36. решити методом по избору.

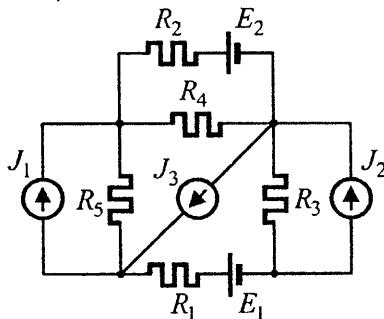
Задаци (намерно) нису дати неким одређеним редоследом. За сваки задатак су, поред слике чији број одговара броју задатка, дати нумерички подаци. У сваком задатку треба одредити све струје. Уколико је потребно одредити и неку другу величину то ће бити посебно наглашено. У решењима је за сваки задатак дат број једначина које би требало поставити код примене поједињих метода.

12.16. $E_1 = 215\text{ V}$, $E_2 = 200\text{ V}$, $E_3 = 225\text{ V}$,
 $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$, $R = 50\Omega$.

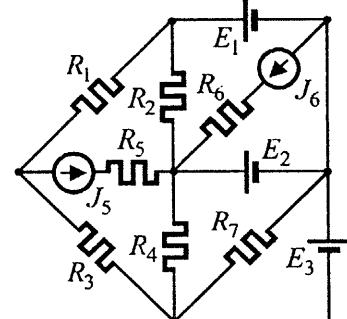
12.17. $E_1 = E_2 = 1\text{ V}$, $J_1 = 2\text{ A}$, $J_2 = J_3 = 1\text{ A}$, $R_1 = \dots = R_5 = 1\Omega$.



Слика 12.16.



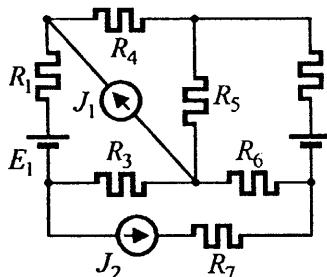
Слика 12.17.



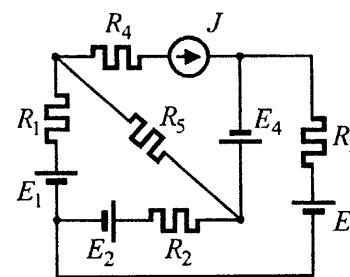
Слика 12.18.

12.18. $E_1 = 3\text{ V}$, $E_2 = 4\text{ V}$, $E_3 = 6\text{ V}$, $J_5 = 1\text{ A}$, $J_6 = 5\text{ A}$,
 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\Omega$, $R_5 = R_6 = R_7 = 2\Omega$.

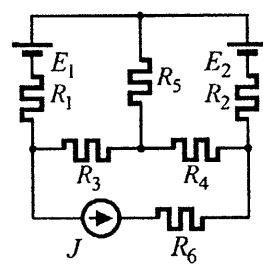
12.19. $E_1 = 60\text{ V}$, $E_2 = 40\text{ V}$, $J_1 = 1\text{ A}$, $J_2 = 2\text{ A}$,
 $R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = 5\Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = 10\Omega$.



Слика 12.19.



Слика 12.20.



Слика 12.21.

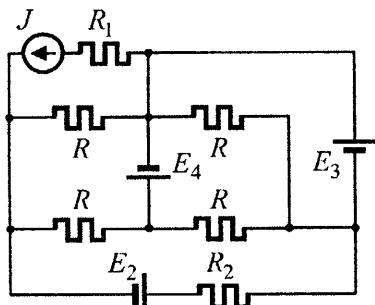
12.20. $E_1 = 40\text{ V}$, $E_2 = 10\text{ V}$, $E_3 = E_4 = 30\text{ V}$,
 $J = 2\text{ A}$, $R_1 = \dots = R_5 = 10\Omega$.

12.21. $E_1 = 25\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$,

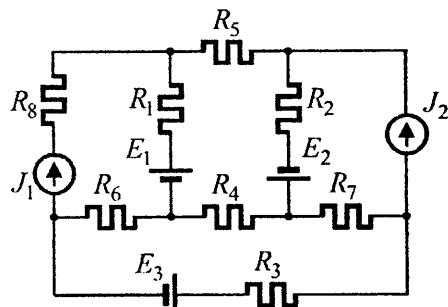
$$R_1 = R_3 = R_5 = 5\Omega, R_2 = R_4 = R_6 = 10\Omega.$$

12.22. $E_2 = 10\text{ V}$, $E_3 = 20\text{ V}$, $E_4 = 30\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$, $R = 10\Omega$,

$R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 5\Omega$. Одредити само снаге свих генератора.



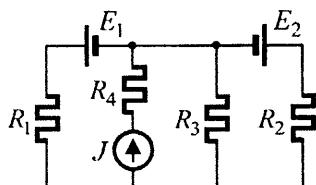
Слика 12.22.



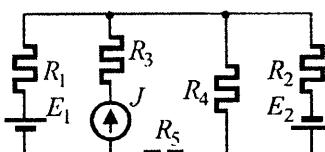
Слика 12.23.

12.23. $E_1 = 2\text{ V}$, $E_2 = E_3 = 4\text{ V}$, $J_1 = 1\text{ A}$, $J_2 = 2\text{ A}$, $R_1 = \dots = R_8 = 1\Omega$.

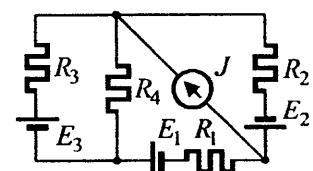
12.24. $E_1 = 2\text{ V}$, $E_2 = 5\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$, $R_1 = R_4 = 1\Omega$, $R_2 = R_3 = 2\Omega$.



Слика 12.24.



Слика 12.25.



Слика 12.26.

12.25. $E_1 = 3\text{ V}$, $E_2 = 2\text{ V}$, $J = 2\text{ A}$, $R_1 = R_3 = R_5 = 1\Omega$, $R_2 = R_4 = 2\Omega$.

12.26. $E_1 = 14\text{ V}$, $E_2 = 10\text{ V}$, $E_3 = 16\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$,

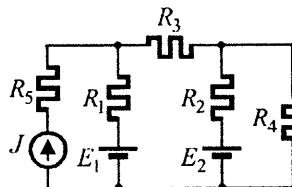
$R_1 = R_2 = 2\Omega$, $R_3 = R_4 = 4\Omega$. Одредити и снагу генератора J .

12.27. $J = 2\text{ A}$,

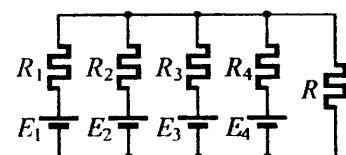
$$E_1 = E_2 = 2\text{ V},$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = 1\Omega,$$

$$R_2 = R_4 = 2\Omega.$$



Слика 12.27.

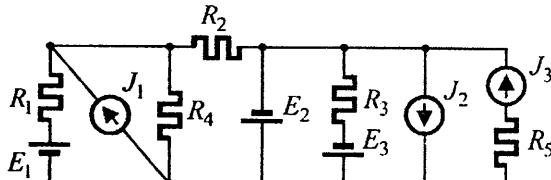


Слика 12.28.

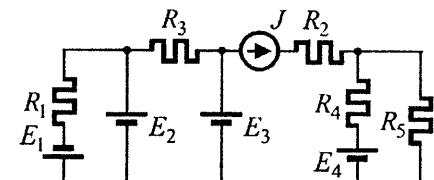
12.28. $E_1 = 12.3\text{ V}$, $E_2 = 12.5\text{ V}$, $E_3 = 12.6\text{ V}$, $E_4 = 12.5\text{ V}$, $R = 0.1\Omega$,

$$R_1 = 20\text{ m}\Omega, R_2 = 25\text{ m}\Omega, R_3 = 10\text{ m}\Omega, R_4 = 20\text{ m}\Omega.$$

- 12.29.** $E_1 = E_2 = E_3 = 10 \text{ V}$, $J_1 = J_2 = J_3 = 2 \text{ A}$,
 $R_1 = R_2 = R_5 = 10 \Omega$, $R_3 = R_4 = 5 \Omega$.



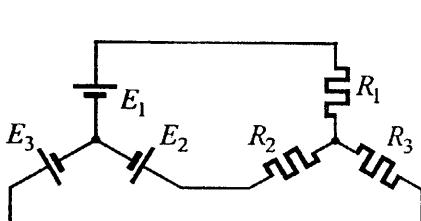
Слика 12.29.



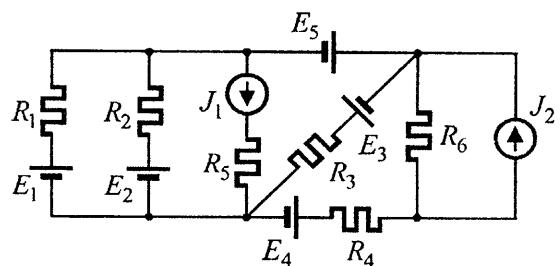
Слика 12.30.

- 12.30.** $E_1 = E_2 = 10 \text{ V}$, $E_3 = 15 \text{ V}$, $E_4 = 5 \text{ V}$, $J = 2 \text{ A}$,
 $R_1 = R_5 = 10 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 5 \Omega$.

- 12.31.** $E_1 = 15 \text{ V}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $E_3 = 45 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = R_3 = 2 \Omega$.



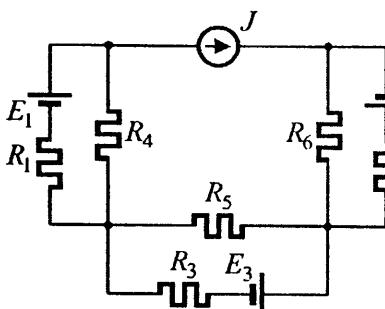
Слика 12.31.



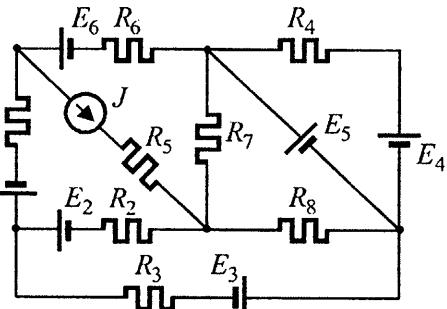
Слика 12.32.

- 12.32.** $E_1 = E_3 = E_5 = 10 \text{ V}$, $E_2 = E_4 = 20 \text{ V}$, $J_1 = 7 \text{ A}$, $J_2 = 2 \text{ A}$,
 $R_1 = R_3 = R_5 = 5 \Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = 10 \Omega$.

- 12.33.** $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 35 \text{ V}$, $E_3 = 40 \text{ V}$, $J = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$,
 $R_4 = R_5 = R_6 = 15 \Omega$. Одредити само снагу генератора J .



Слика 12.33.

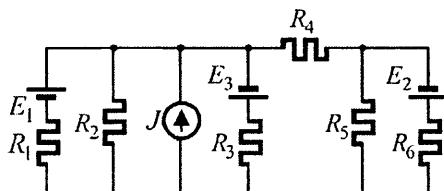


Слика 12.34.

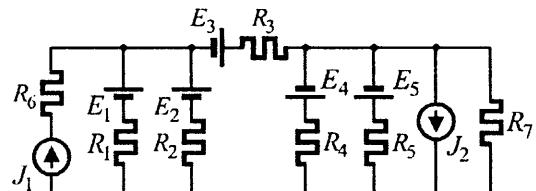
- 12.34.** $E_1 = 40 \text{ V}$, $E_2 = E_6 = 5 \text{ V}$, $E_3 = 45 \text{ V}$, $E_4 = 18 \text{ V}$, $E_5 = 25 \text{ V}$,
 $J = 1 \text{ A}$, $R_1 = \dots = R_8 = 1 \Omega$. Одредити само P_{E2} и P_{E3} .

12.35. $E_1 = E_2 = 12 \text{ V}$, $E_3 = 3 \text{ V}$, $J = 4 \text{ A}$,

$$R_1 = R_3 = R_5 = 1\Omega, R_2 = R_4 = R_6 = 2\Omega.$$



Слика 12.35.

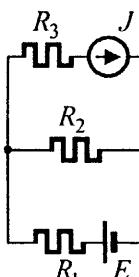


Слика 12.36.

12.36. $E_1 = E_2 = 4 \text{ V}$, $E_3 = 6 \text{ V}$, $E_4 = 2 \text{ V}$, $E_5 = 1 \text{ V}$, $J_1 = 3 \text{ A}$, $J_2 = 1 \text{ A}$,

$$R_1 = \dots = R_7 = 1\Omega. \text{ Одредити и снаге генератора } J_1 \text{ и } J_2.$$

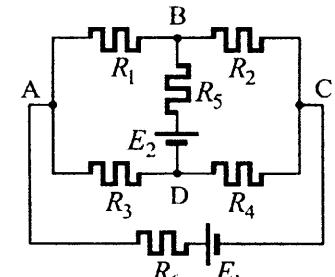
12.37. Применом теореме суперпозиције одредити све струје у колу приказаног шемом на слици 12.37. Бројни подаци: $E = 2 \text{ V}$, $J = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$.



Слика 12.37.

12.38. Одредити све струје у колу приказаног шемом на слици 12.38. Нумерички подаци:

$$E_1 = 7 \text{ V}, E_2 = 14 \text{ V}, R_1 = R_3 = R_5 = 10\Omega, R_2 = R_4 = R_6 = 20\Omega.$$



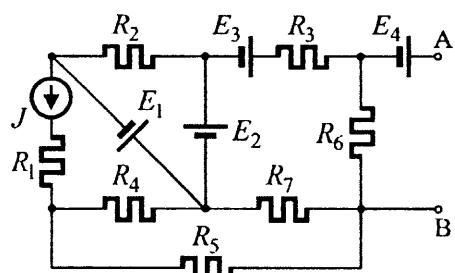
Слика 12.38.

12.39. Одредити елементе еквивалентног Тевененовог генератора којим се може заменити линеарни активни двопол приказани шемом на слици 12.39. Добијени еквивалентни генератор трансфигурисати у струјни. Нумерички подаци:

$$E_1 = E_2 = 20 \text{ V}, E_3 = 5 \text{ V}, E_4 = 10 \text{ V},$$

$$J = 1 \text{ A}, R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 10\Omega,$$

$$R_2 = R_6 = R_7 = 20\Omega.$$

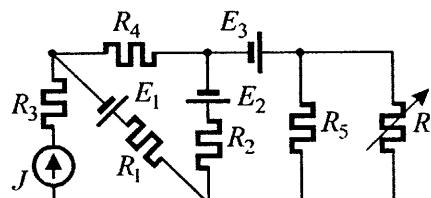


Слика 12.39.

12.40. Одредити елементе еквивалентног Нортоновог генератора којим се може заменити линеарни активни двопол из претходног задатка. Добијени еквивалентни генератор трансфигурисати у напонски.

12.41. Решити задатак 10.19. под в* применом Тевененове теореме.

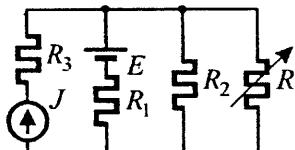
- 12.42.** У колу, приказаном шемом на слици 12.42, познате су вредности свих елемената, а отпорник R је променљив. Одредити струју кроз отпорник R у функцији његове отпорности. Нумерички подаци: $J = 1\text{ A}$, $E_1 = 66\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$, $E_3 = 60\text{ V}$, $R_2 = R_3 = 12\Omega$, $R_1 = R_4 = R_5 = 6\Omega$.



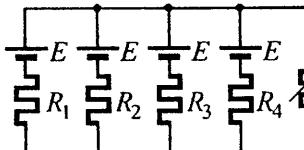
Слика 12.42.

- 12.43.** У колу, приказаном шемом на слици 12.43, одредити вредност променљивог отпорника R да би се на њему развила максимална снага и израчунати ту снагу. Нумерички подаци: $J = 1\text{ A}$, $E = 80\text{ V}$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = R_3 = 30\Omega$.

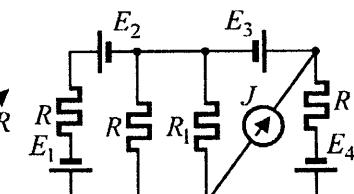
- 12.44.** Четири генератора истих електромоторних сила везана су паралелно (слика 12.44). Одредити отпорност R променљивог отпорника, који се прикључује на паралелну везу генератора, тако да се на њему развије максимална снага и израчунати ту снагу. Нумерички подаци: $E = 10\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 2\Omega$.



Слика 12.43.



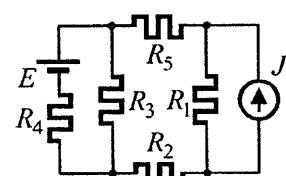
Слика 12.44.



Слика 12.45.

- 12.45.** У колу, које је приказано шемом на слици 12.45, одредити струју струјног генератора J тако да снага на отпорнику R_1 буде једнака нули. Познато је: $E_1 = E_2 = 9\text{ V}$, $E_3 = E_4 = 18\text{ V}$, $R = R_1 = 9\Omega$.

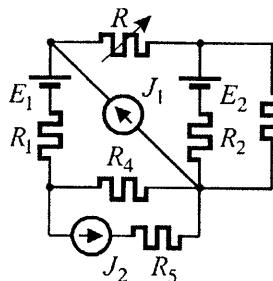
- 12.46.** У колу, приказаном шемом на слици 12.46, позната је снага отпорника R_5 , $P_5 = 10\text{ W}$. Одредити непознату струју струјног генератора J ако су вредности осталих елемената: $E = 20\text{ V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_5 = 40\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 20\Omega$.



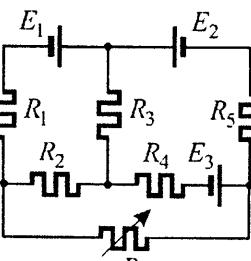
Слика 12.46.

- 12.47.** У колу, приказаном шемом на слици 12.47, одредити вредност променљивог отпорника R тако да се на њему развија максимална снага и израчунати ту снагу. Бројни подаци: $E_1 = E_2 = 10\text{ V}$, $J_1 = 3\text{ A}$, $J_2 = 1\text{ A}$, $R_1 = R_5 = 5\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega$.

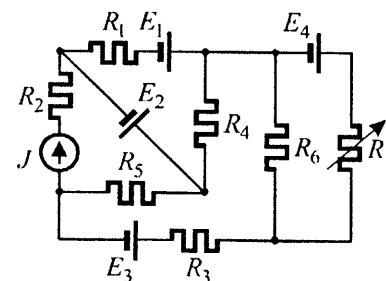
12.48. У колу, приказаном шемом на слици 12.48, отпорник R је променљив. Одредити максималну струју кроз отпорник и максималну снагу на њему. Њујоржни подаци: $E_1 = E_3 = 5\text{ V}$, $E_2 = 3\text{ V}$, $R_1 = \dots = R_5 = 1\Omega$.



Слика 12.47.



Слика 12.48.

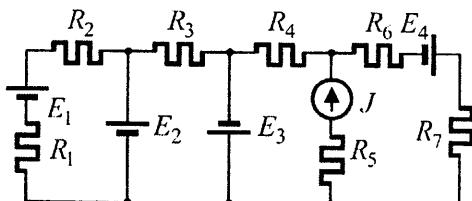


Слика 12.49.

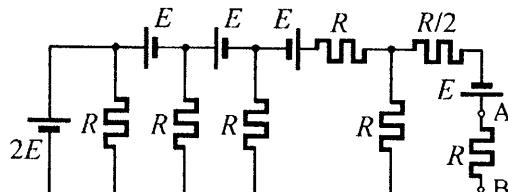
12.49. У колу, приказаном шемом на слици 12.49, одредити вредност променљивог отпорника R да би се на њему развила максимална снага и израчунати ту снагу. Нумерички подаци: $E_1 = 6\text{ V}$, $E_2 = E_3 = E_4 = 18\text{ V}$, $J = 2\text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_5 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_6 = 10\Omega$.

12.50. У колу, које је приказано шемом на слици 12.50, одредити струју кроз отпорник R_7 . Нумерички подаци:

$$J = 3\text{ A}, E_1 = E_3 = E_4 = 14\text{ V}, R_1 = \dots = R_7 = 10\Omega.$$



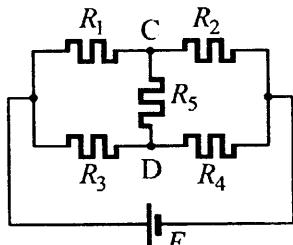
Слика 12.50.



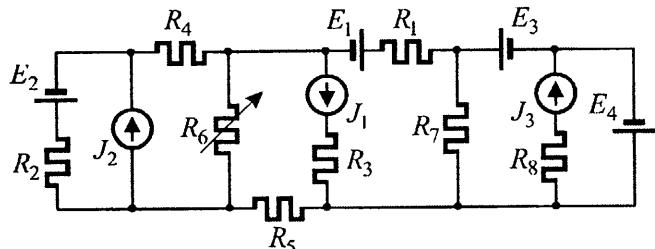
Слика 12.51.

12.51. У колу, које је приказано шемом на слици 12.51, одредити напон између тачака А и В, U_{AB} .

12.52. У мосту, који је приказан шемом на слици 12.52, отпорности поједињих отпорника на температуре $\theta_0 = 20^0\text{ C}$ имају следеће вредности: $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = R_3 = 40\Omega$, $R_4 = 20\Omega$ и $R_5 = 100\Omega$. Позната је електромоторна сила извора $E = 15\text{ V}$, као и темпратурни кофицијент материјала од кога је начињен отпорник R_1 , $\alpha = 0.005(0^0\text{ C})^{-1}$. Израчунати промену напона између тачака С и D када се темпратура отпорника R_1 повећа са $\theta_0 = 20^0\text{ C}$ па $\theta_1 = 50^0\text{ C}$.



Слика 12.52.



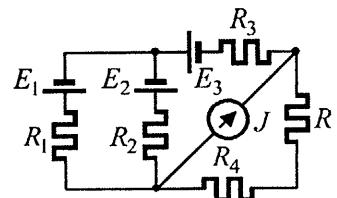
Слика 12.53.

12.53. У колу, приказаном шемом на слици 12.53, познате су вредности свих елемената. Одредити вредност променљивог отпорника R_6 тако да се на њему развија максимална снага и израчунати ту снагу. Бројни подаци: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 30\Omega$, $R_5 = 110\Omega$, $R_7 = R_8 = 50\Omega$, $J_1 = 1\text{ A}$, $J_2 = 2\text{ A}$, $J_3 = 3\text{ A}$, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 3\text{ V}$.

12.54. У колу, приказаном шемом на слици 12.54, одредити струју струјног генератора J тако да снага на отпорнику R има вредност $P = 0.4\text{ W}$. Нумерички подаци:

$$E_1 = E_2 = 40\text{ V}, E_3 = 15\text{ V},$$

$$R_1 = R_3 = 30\Omega, R_2 = 60\Omega, R_4 = 40\Omega, R = 10\Omega.$$



Слика 12.54.

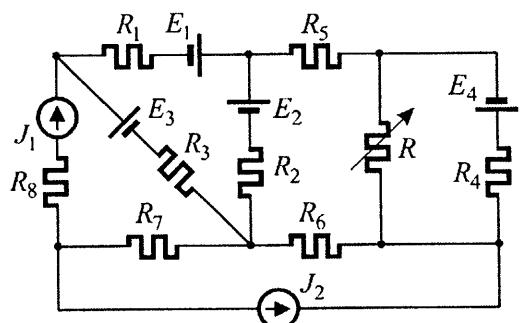
12.55. У колу, приказаном шемом на слици 12.55, познате су вредности свих елемената, док је отпорник R променљив. Одредити снагу генератора E_4 у функцији отпорности отпорника R . Нумерички подаци:

$$E_1 = E_3 = 20\text{ V}, E_2 = E_4 = 10\text{ V},$$

$$J_1 = 3\text{ A}, J_2 = 2\text{ A},$$

$$R_1 = R_3 = 10\Omega, R_2 = R_4 = 20\Omega,$$

$$R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 5\Omega.$$



Слика 12.55.

13. НЕЛИНЕАРНА ЕЛЕКТРИЧНА КОЛА

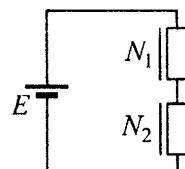
13.1. Два ислинсарна отпорника, N_1 и N_2 , чије се волтамперске карактеристике могу апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке

$$A_1(0,0), B_1(0.5\text{ A}, 5\text{ V}) \text{ и } C_1(1.5\text{ A}, 10\text{ V}),$$

односно

$$A_2(0,0), B_2(0.5\text{ A}, 10\text{ V}) \text{ и } C_2(1.5\text{ A}, 20\text{ V}),$$

респективно, везана су на ред и прикључена на идеални напонски генератор електромоторне силе $E = 25\text{ V}$ (слика 13.1). Одредити струју и напоне на нелинеарним отпорницима.



Слика 13.1.

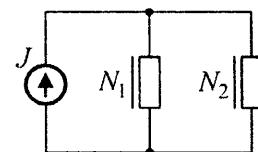
13.2. Два ислинсарна отпорника, N_1 и N_2 , чије се волтамперске карактеристике могу апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке

$$A_1(0,0), B_1(0.5\text{ A}, 10\text{ V}) \text{ и } C_1(0.75\text{ A}, 25\text{ V}),$$

односно

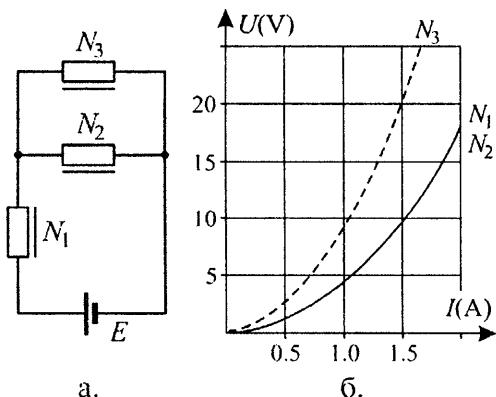
$$A_2(0,0), B_2(0.75\text{ A}, 10\text{ V}) \text{ и } C_2(1.5\text{ A}, 25\text{ V}),$$

респективно, везани су паралелно и прикључени на идеалан струјни генератор струје кратког споја $J = 1.75\text{ A}$ (слика 13.2). Одредити струје кроз ислинсарне отпорнике и напон на њима.



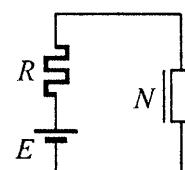
Слика 13.2.

13.3. Мешовита веза нелинеарних отпорника, чије су волтамперске карактеристике приказана на слици 13.3.б, прикључена је (слика 13.3.а) на идеални напонски генератор електромоторне силе $E = 17.5\text{ V}$. Одредити струје у свим гранама кола и напоне на свим нелинеарним отпорницима.



Слика 13.3.

13.4. Редна веза линеарног отпорника отпорности $R = 500\Omega$ и ислинсарног отпорника (слика 13.4), чија се волтамперска карактеристика може апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(20\text{ mA}, 5\text{ V})$ и $(50\text{ mA}, 30\text{ V})$, прикључена је на идеалан генератор електромоторне силе $E = 25\text{ V}$. Одредити струју у колу и напоне на отпорницима.



Слика 13.4.

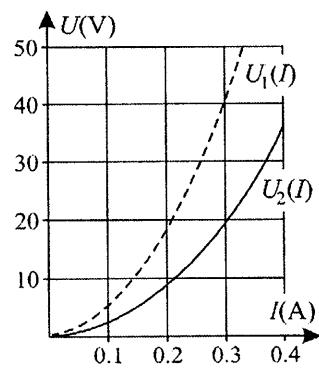
13.5. Два нелинеарна отпорника, N_1 и N_2 , чије су волтамперске карактеристике $U_1(I)$ и $U_2(I)$ задате на слици 13.5, везана су на ред и прикључена на идеалан напонски генератор електромоторне сile $E = 40\text{ V}$. Одредити струју у колу и напоне на појединим отпорницима.

13.6. У колу, које је приказано шемом на слици 13.6, познато је:

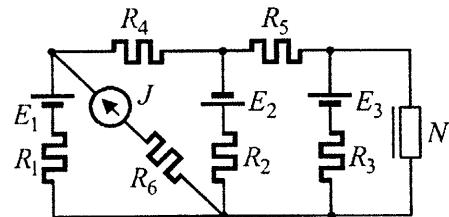
$$R_1 = R_4 = R_5 = 5\Omega, \quad R_2 = R_3 = R_6 = 10\Omega,$$

$$J = 1\text{ A}, \quad E_1 = 10\text{ V}, \quad E_2 = 15\text{ V}, \quad E_3 = 20\text{ V}.$$

Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника се може апрокси- мирана дужима које у $I-U$ коорди- натном систему спајају тачке $(0,0)$, $(1\text{ A}, 2\text{ V})$ и $(2\text{ A}, 10\text{ V})$. Одредити струју кроз нелинеарни отпорник и напон на њему, а затим израчунати снагу генератора E_3 .

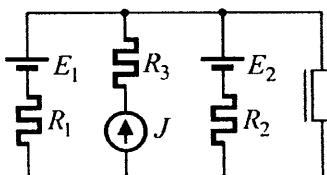


Слика 13.5.

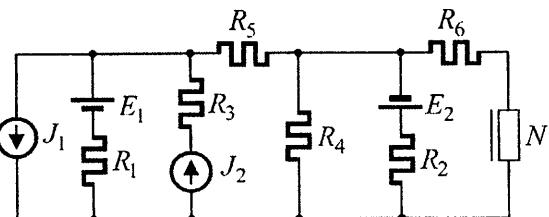


Слика 13.6.

13.7. У колу, које је приказано шемом на слици 13.7, познато је: $E_1 = 20\text{ V}$, $E_2 = 10\text{ V}$, $J = 1\text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$. Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника апроксимирана је дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(1\text{ A}, 2.5\text{ V})$ и $(3\text{ A}, 17.5\text{ V})$. Одредити снаге на свим елеменатима кола.



Слика 13.7.



Слика 13.8.

13.8. У колу, приказаном шемом на слици 13.8, познате су вредности свих елемената, као и волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника која се може апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(0.25\text{ A}, 0.5\text{ V})$ и $(1\text{ A}, 1.5\text{ V})$. Одредити струју, напон и снагу нелинеарног отпорника. Бројни подаци: $E_1 = 5\text{ V}$, $E_2 = 4\text{ V}$, $J_1 = 1\text{ A}$, $J_2 = 2\text{ A}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 3\Omega$, $R_5 = R_6 = 1\Omega$.

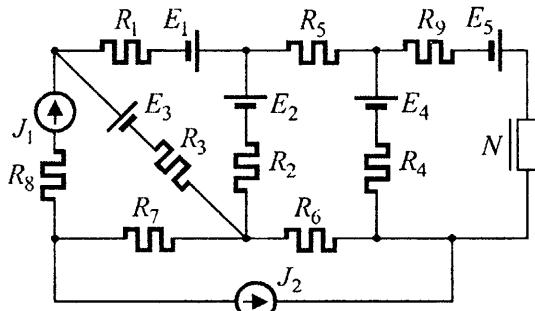
13.9. У колу, приказаном шемом на слици 13.9, познато је:

$$J_1 = 3 \text{ A}, J_2 = 2 \text{ A}, E_1 = E_3 = 20 \text{ V}, E_2 = E_4 = 10 \text{ V}, E_5 = 8 \text{ V},$$

$$R_1 = R_3 = 10\Omega, R_2 = R_4 = 20\Omega, R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 5\Omega, R_9 = 4\Omega.$$

Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника може се апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(0.5 \text{ A}, 5 \text{ V})$, $(1.5 \text{ A}, 25 \text{ V})$.

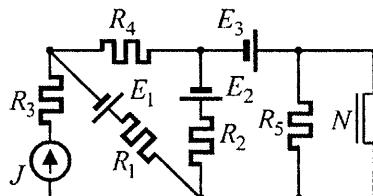
Одредити напон и струју нелинеарног отпорника, као и снагу генератора E_4 .



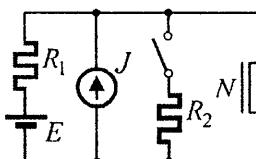
Слика 13.9.

13.10. У колу, приказаном

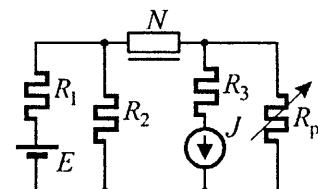
шемом на слици 13.10, познато је: $R_1 = R_4 = R_5 = 6\Omega$, $R_2 = R_3 = 12\Omega$, $J = 1 \text{ A}$, $E_1 = 66 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $E_3 = 60 \text{ V}$. Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника се може апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(1 \text{ A}, 1 \text{ V})$ и $(3 \text{ A}, 11 \text{ V})$. Израчунати све струје у колу.



Слика 13.10.



Слика 13.11.



Слика 13.12.

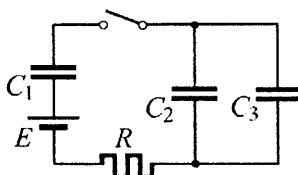
13.11. У колу, приказаном шемом на слици 13.11, позната је волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника која се може апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(1 \text{ A}, 10 \text{ V})$ и $(3 \text{ A}, 20 \text{ V})$, као и вредности свих елемената: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $J = 1.5 \text{ A}$, $E = 15 \text{ V}$. Одредити промену напона и струје нелинеарног отпорника до којих долази при затварању прекидача.

13.12. Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника се може апроксимирати дужима које у $I-U$ координатном систему спајају тачке $(0,0)$, $(0.5 \text{ A}, 4 \text{ V})$, $(1.5 \text{ A}, 8 \text{ V})$ и $(2.5 \text{ A}, 16 \text{ V})$. Одредити промену снаге струјног генератора, ако се вредност променљивог отпорника R_p (слика 13.12) смањи од вредности $R_{p1} = 4\Omega$ на вредност $R_{p2} = 2\Omega$. Остали нумерички подаци: $E = 8 \text{ V}$, $J = 2 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 4\Omega$.

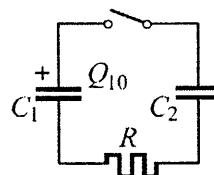
14. ПРЕЛАЗНИ РЕЖИМ У *RC* КОЛУ; КОЛА СА КОНДЕНЗАТОРИМА

Задатак 14.1. У колу, приказаном шемом на слици 14.1, кондензатори C_1 , C_2 и C_3 су неоптерећени а прекидач отворен. У тренутку $t = 0$ прекидач се затвара. Одредити струје кроз кондензаторе и напоне на њима у прелазном режиму.

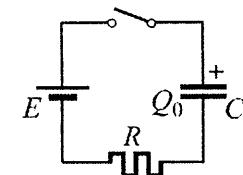
Задатак 14.2. У колу, приказаном шемом на слици 14.2, кондензатор C_1 је оптерећен количином електрицитета Q_{10} , док је кондензатор C_2 неоптерећен. У тренутку $t = 0$ затвара се прекидач. Одредити протеклу количину електрицитета кроз коло, струју у колу и напоне на отпорнику и кондензаторима у функцији времена t . Нацртати дијаграме $q(t)$, $i(t)$, $u_R(t)$, $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$. Одредити рад који се у току прелазног режима на отпорнику R претвори у тоналту.



Слика 14.1.



Слика 14.2.



Слика 14.3.

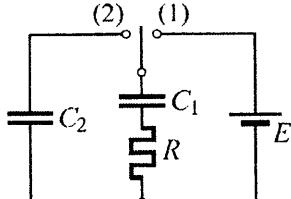
Задатак 14.3. У колу, приказаном шемом на слици 14.3, кондензатор капацитивности C оптерећен је количином електрицитета Q_0 а прекидач је отворен. У тренутку $t = 0$ прекидач се затвара и кондензатор прикључује преко отпорника R на генератор електромоторне сile E . Одредити струју прелазног режима за случај да је:

$$a^* E > Q_0 / C \quad b^* E < Q_0 / C$$

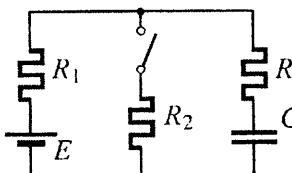
Задатак 14.4. У колу, приказаном шемом на слици 14.4, кондензатори C_1 и C_2 су неоптерећени а преклопник је у неутралном положају. У тренутку $t = 0$ преклопник се прсбацује у положај (1), а у тренутку $t_1 = 5\text{ ms}$ у положај (2). Одредити напоне на кондензаторима у тренутку $t_2 = 10\text{ ms}$. Израчунати Цулове губитке на отпорнику R у временском интервалу од $t = 0$ до $t_2 = 10\text{ ms}$. Нумерички подаци:

$$E = 1\text{ kV}, R = 1\text{ k}\Omega, C_1 = 10\mu\text{F}, C_2 = 5\mu\text{F}.$$

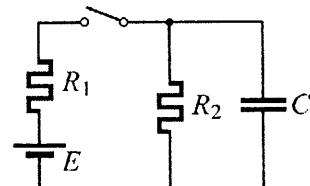
14.5. У колу, приказаном шемом на слици 14.5, познате су вредности свих елемената, а при затвореном прекидачу успостављено је стационарно стање. У тренутку $t = 0$ прекидач се отвара. Одредити струју i у колу у прелазном режиму.



Слика 14.4.



Слика 14.5.

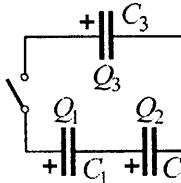


Слика 14.6.

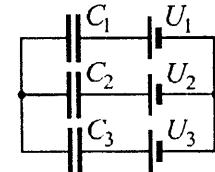
14.6. У колу, приказаном шемом на слици 14.6, познате су вредности свих елемената, кондензатор C је неоптерећен а прекидач отворен. У тренутку $t = 0$ прекидач се затвара. Одредити струје у свим гранама у прелазном режиму.

14.7. Кондензатори у колу, чија је шема приказана на слици 14.7, оптерећени су количинама електричитета Q_1 , Q_2 и Q_3 познатих смерова. Одредити протекле количине електричитета и промене напона на кондензаторима од тренутка затварања прекидача до успостављања стационарног стања. Израчунати промену енергије система кондензатора од тренутка затварања прекидача до успостављања новог стационарног стања. Бројни подаци:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 3\mu F, Q_1 = Q_3 = 3mC, Q_2 = 6mC.$$



Слика 14.7.



Слика 14.8.

14.8. У колу, приказаном шемом на слици 4.8, одредити количине електричитета и напоне на свим кондензаторима. Нумерички подаци:

$$C_1 = 5\mu F, C_2 = 3\mu F, C_3 = 2\mu F, U_1 = 16V, U_2 = 20V, U_3 = 30V.$$

14.9. Група оптерећених кондензатора повезана је као на слици 14.9. Познат је напон U на кондензатору C . Одредити количине електричитета које протекну кроз кондензаторе када се растојање између електрода кондензатора C повећа са d на $2d$. Одредити промену напона између тачака А и В. Бројни подаци:

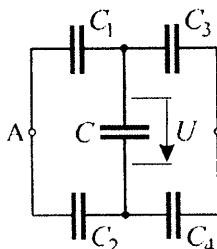
$$U = 1000V, C_1 = 3nF, C_2 = 6nF, C_3 = C_4 = C = 2nF.$$

14.10. У колу, приказаном шемом на слици 14.10, израчунати количине електричитета на кондензаторима C_1 и C_2 и то:

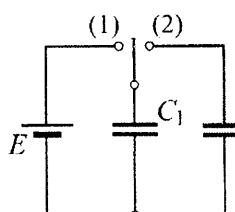
a* када се пресклопник пребаца из положаја (1) у положај (2) и

б* када се преклонник врати у положај (1) и поново пребаца у положај (2).

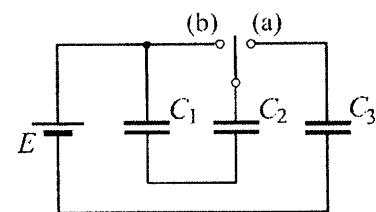
Нумерички подаци: $E = 3 \text{ kV}$, $C_1 = 5 \mu\text{F}$, $C_2 = 10 \mu\text{F}$.



Слика 14.9.



Слика 14.10.



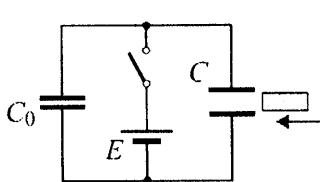
Слика 14.11.

?

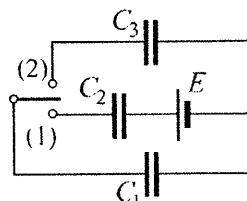
14.11. У колу, приказаном шемом на слици 14.11, одредити промене напона на кондензаторима када се преклонник пребаца из положаја (a) у положај (b). Познато је: $E = 2 \text{ kV}$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$, $C_3 = 6 \mu\text{F}$.

?

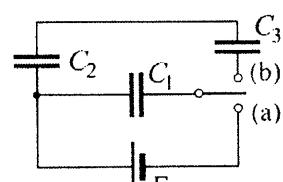
14.12. Два ваздушна кондензатора, капацитивности C_0 и C , приључени су на идсалан напонски генератор електромоторне силе E , као на слици 14.12. По извршеном цуњењу кондензатора прекидач се отвара а измсћу спектроде кондензатора C убацује плочица од диселектрика релативне диелектричне константе ϵ_r . Одредити напоне и количине електрицитета на кондензаторима након убаџивања диелектрика. Нумерички подаци: $C = 50 \text{ pF}$, $C_0 = 100 \text{ pF}$, $\epsilon_r = 3$, $E = 500 \text{ V}$.



Слика 14.12.



Слика 14.13.



Слика 14.14.

?

14.13. У колу, приказаном шемом на слици 14.13, одредити напоне на кондензаторима и протекле количине електрицитета кроз кондензаторе када се преклонник пребаца из положаја (1) у положај (2). Познато је: $C_1 = 3C$, $C_2 = C$, $C_3 = 2C$.

?

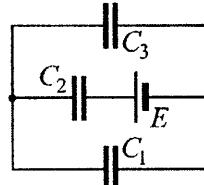
14.14. У колу, приказаном шемом на слици 14.14, одредити напоне и количине електрицитета на свим кондензаторима када се пресклопник пребаца из положаја (a) у положај (b). Нумерички подаци:

$$E = 5 \text{ kV}, C_1 = 10 \mu\text{F}, C_2 = 15 \mu\text{F}, C_3 = 30 \mu\text{F}.$$

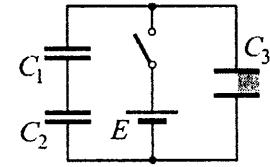
14.15. У колу, представљеном шемом на слици 13.15, успостављено је стационарно стање.

a* Одредити количине електрицитета, напоне и енергије свих кондензатора.

b* Одредити количине електрицитета, напоне и енергије свих кондензатора ако се између електрода кондензатора C_2 убаца диелектрик релативне дислектичне константе $\epsilon_r = 4$.



Слика 14.15.



Слика 14.16.

b* Одредити промене напона, количина електрицитета и енергија свих кондензатора између ова два стационарна стања.

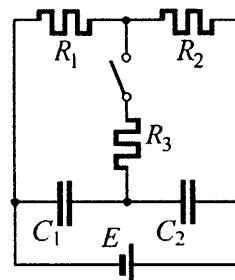
Нумерички подаци: $C_1 = C_3 = 5 \text{ nF}$, $C_2 = 10 \text{ nF}$, $E = 2 \text{ kV}$.

14.16. Три једнака кондензатора са ваздушним диелектриком повезана су као на слици 14.16. и прикључена на идеални напонски генератор електромоторне сile E . По завршеном оптерећивању кондензатора прекидач се отвара а између слекстрода кондензатора C_3 , чије је међусобно растојање d , до половине убаци диелектрик релативне дислектичне константе ϵ_r , дебљине d . Одредити количине електрицитета и напоне на свим кондензаторима пре и након убацања диелектрика. Нумерички подаци: $C_1 = C_2 = C_3 = 100 \text{ pF}$, $E = 2 \text{ kV}$, $\epsilon_r = 4$.

14.17. У колу, које је приказано шемом на слици 14.17, успостављено је стационарно стање при отвореном прекидачу. По затварању прекидача успоставља се ново стационарно стање. Одредити промене напона, количина електрицитета и енергија кондензатора између два стационарна стања. Нумерички подаци:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_2 = 4 \text{ k}\Omega, R_3 = 5 \text{ k}\Omega,$$

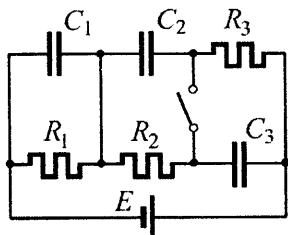
$$C_1 = 3 \text{ nF}, C_2 = 2 \text{ nF}, E = 2 \text{ kV}.$$



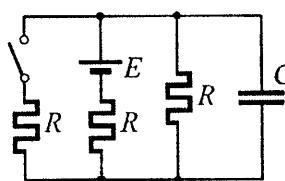
Слика 14.17.

14.18. У колу, приказаном шемом на слици 14.18 одредити промене количина електрицитета и енергија кондензатора од тренутка затварања прекидача до успостављања стационарног стања. Бројни подаци: $C_1 = 40 \text{ nF}$, $C_2 = 60 \text{ nF}$, $C_3 = 50 \text{ nF}$, $R_1 = R_3 = 100\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $E = 500 \text{ V}$.

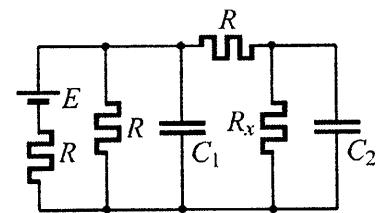
14.19. У колу, које је приказано шемом на слици 14.19, познато је: $E = 300 \text{ V}$, $R = 100\Omega$, и $C = 100 \text{ nF}$. Одредити за колико ће се променити оптерећење и енергија кондензатора након затварања прекидача.



Слика 14.18.

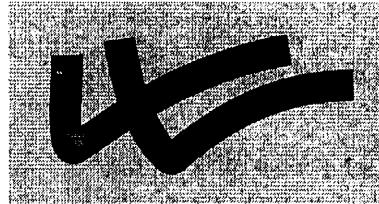


Слика 14.19.



Слика 14.20.

Задатак 14.20. У колу, приказаном шемом на слици 14.20, одредити непозната отпорност R_x да би енергија кондензатора C_1 била два пута већа од енергије кондензатора C_2 ($W_1 = 2W_2$). За тај случај израчунати енергије кондензатора. Познато је: $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 20 \text{ nF}$, $R = 100\Omega$, $E = 50 \text{ V}$.



ДЕО I

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

1. КУЛОНОВ ЗАКОН

1.1. Како су наелектрисања супротног знака сила је привлачна, интензитета

$$F = \frac{|Q_1||Q_2|}{4\pi\epsilon_0 d^2} = k_0 \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-12}}{0.3^2} = 0.6 \cdot 10^{-12} \text{ N} = 0.6 \text{ pN}.$$

1.2. $Q_1 = \pm 2 \text{ pC}$, $Q_2 = \pm 8 \text{ pC}$. **1.3.** $d_1 = d/\sqrt{\epsilon_r} = 10 \text{ cm}$.

1.4. Према Кулоновом закону је

$$\vec{F}_{AB} = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{AB} = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}_{AB},$$

где је $\vec{r}_{AB} = r \hat{r}_{AB}$ вектор положаја наелектрисања Q_B у односу на наелектрисање Q_A (слика 1.4). Како је

$$\vec{r}_{AB} = (0.6\hat{x} + 0.8\hat{y}) \text{ m}$$

и

$$r = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1 \text{ m},$$

то је

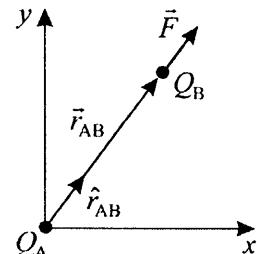
$$\vec{F}_{AB} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{1^3} (0.6\hat{x} + 0.8\hat{y}) = (0.108\hat{x} + 0.144\hat{y}) \text{ pN}.$$

Интензитет силе је $F_{AB} = \sqrt{0.108^2 + 0.144^2} \cdot 10^{-12} = 0.18 \text{ pN}$.

1.5. $\vec{F}_{CD} = (-0.36\hat{x} + 0.27\hat{y}) \text{ pN}$, $\vec{F}_{DC} = -\vec{F}_{CD}$, $F = 0.45 \text{ pN}$.

1.6. Сила између куглица је привлачна, интензитета $F = 7.2 \text{ pN}$. Ка-да се куглице споје, укупна количина слектрицитета на њима,

$$Q = Q_1 + Q_2 = -10 \text{ pC},$$



Слика 1.4.

ће се, због истих димензија куглица, равномерно распоредити, тако да ће њихова оптерећења бити

$$Q'_1 = Q'_2 = Q/2 = -5 \text{ pC}.$$

Сила између куглица ће бити одбојна и, након размицања на растојање d , њен интензитет ће износити $F' = 0.9 \text{ pN}$.

1.7. $d_1 = 0.75\sqrt{2}d = 7.5\sqrt{2} \text{ cm}$.

1.8. Интензитети електростатичке и гравитационе сила су

$$F = k_0 e^2/r^2 \quad \text{и} \quad F_G = \gamma m_p m_e / r^2,$$

где је γ гравитациона константа, тако да је њихов однос

$$\frac{F}{F_G} = \frac{k_0 e^2/r^2}{\gamma m_e m_p / r^2} = \frac{k_0 e^2}{\gamma m_e m_p} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 2.273 \cdot 10^{39}.$$

1.9. По оптерећивању куглица количинама слектрицитета Q оне се одбијају. Кретање куглица траје све до њиховог доласка у равнотежни положај у коме сума сила на сваку од куглица мора бити једнака нули,

$$\Sigma \vec{F} = 0.$$

На сваку од куглица делују три силе: електростатичка сила \vec{F} , сила земљине теже \vec{G} и сила реакције у концу \vec{F}_k . Пошто је сила реакције у концу по интензитету увек једнака сили којом се конац затеже, а супротна по смеру, то је доволjan услов да би систем био у равнотежи да резултантна сила \vec{F} и \vec{G} , \vec{F}_k , буде у правцу конца (слика 1.9), то јест

$$F/G = \tan \alpha.$$

Како је

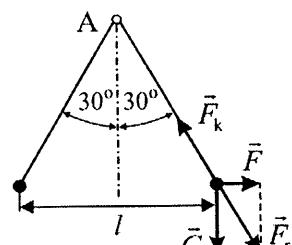
$$F = k_0 \frac{|Q||Q_2|}{l^2} = k_0 \frac{Q^2}{l^2}$$

и

$$G = mg,$$

то следи

$$m = \frac{k_0 Q^2}{g l^2 \tan \alpha} = 1.589 \cdot 10^{-11} \text{ kg}.$$



Слика 1.9.

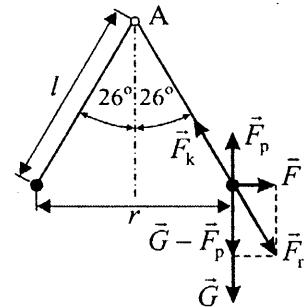
1.10. Када се наелектрисане куглице (тачкаста наелектрисања) налазе у диелектрику релативне диелектричне константе ϵ_r , електростатичка сила измсђу њих је ϵ_r пута мања него у вакууму,

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} = \frac{k_0 Q^2}{\epsilon_r r^2},$$

где је $r = 2l \sin 26^\circ$ растојање између куглица (слика 1.10). Да би систем био у равнотежи сума сила на сваку од куглица мора бити једнака нули.

У течном диелектрику на сваку од куглица ће деловати четири силе: електростатичка сила, \vec{F} , сила земљине теже, \vec{G} , сила потиска, \vec{F}_p , и сила реакције у концу, \vec{F}_k . Као и у претходном задатку, довољан услов да би систем био у равнотежи је да резултантна сила \vec{F} , \vec{G} и \vec{F}_p буде у правцу конца (слика), то јест

$$\frac{F}{G - F_p} = \tan 26^\circ.$$



Слика 1.10.

Из овог услова следи

$$F_p = G - \frac{Q^2}{16\pi l^2 \epsilon_0 \epsilon_r \sin^2 26^\circ \tan 26^\circ} = mg - \frac{k_0 Q^2}{4l^2 \epsilon_r \sin^2 26^\circ \tan 26^\circ},$$

где је маса куглице, m , одређена у претходном задатку. За задате нумеричке вредности добија се $F_p = 35.85 \text{ pN}$.

Како је, с друге стране, сила потиска

$$F_p = gV\gamma_d,$$

где је V запремина куглице, то се за запремину куглице добија

$$V = F_p/g\gamma_d,$$

а за њену специфичну масу

$$\gamma_{\text{kugl.}} = \frac{m}{V} = \frac{mg\gamma_d}{F_p} = 3.48 \text{ g/cm}^3.$$

1.11. $Q_1 = \pm 56.44 \text{ nC}$, $Q_2 = \mp 0.903 \mu\text{C}$.

1.12. $m_2 = 6.67 \text{ mg}$, $l_1 = 14.93 \text{ cm}$, $l_2 = 25.86 \text{ cm}$, $h = 12.93 \text{ cm}$.

1.13. Између наелектрисања Q_C и Q_A дслује одбојна сила, док је сила између наелектрисања Q_C и Q_B привлачна. Како су растојања

$$r_{AC} = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1 \text{ m} \quad \text{и} \quad r_{BC} = 0.6 \text{ m},$$

то су интензитети ових сила

$$F_{AC} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_A||Q_C|}{r_{AC}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{|Q_A||Q_C|}{r_{AC}^2} = \frac{k_0 |Q_A||Q_C|}{\epsilon_r r_{AC}^2} = 7.2 \text{ nN}$$

и

$$F_{BC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_B||Q_C|}{r_{BC}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{|Q_B||Q_C|}{r_{BC}^2} = \frac{k_0 |Q_B||Q_C|}{\epsilon_r r_{BC}^2} = 12 \text{ nN}.$$

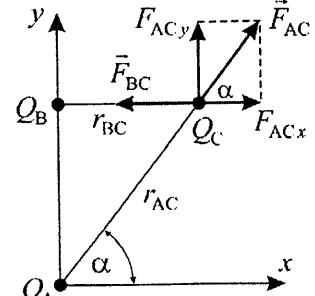
Свака од ових двеју сила може се разложити на две, x и y , компоненте (слика 1.13.a),

$$F_{ACx} = F_{AC} \cos \angle(\hat{x}, \vec{F}_{AC}) = F_{AC} \cos \alpha = 4.32 \text{ nN},$$

$$F_{ACy} = F_{AC} \sin \angle(\hat{x}, \vec{F}_{AC}) = F_{AC} \sin \alpha = 5.76 \text{ nN},$$

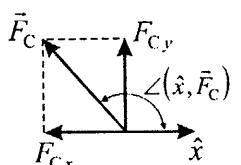
$$F_{BCx} = F_{BC} \cos \angle(\hat{x}, \vec{F}_{BC}) = F_{BC} \cos \pi = -12 \text{ nN},$$

$$F_{BCy} = F_{BC} \sin \angle(\hat{x}, \vec{F}_{BC}) = F_{BC} \sin \pi = 0$$



Слика 1.13.a.

(угао α не треба посебно израчунавати јер је $\cos \alpha = x_C/r_{AC} = 0.6/1 = 0.6$ и $\sin \alpha = y_C/r_{AC} = 0.8/1 = 0.8$). Поједине компоненте резултантне силе на наелектрисање Q_C су



$$F_{Cx} = F_{ACx} + F_{BCx} = -7.68 \text{ nN}$$

$$F_{Cy} = F_{ACy} + F_{BCy} = 5.76 \text{ nN},$$

тако да је њен интензитет (слика 1.13.б)

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = 9.6 \text{ nN},$$

док је угао који она заклапа са x осом

$$\angle(\hat{x}, \vec{F}_C) = \arctg \frac{F_{Cy}}{F_{Cx}} = \arctg \frac{5.76}{-7.68} = 143.13^\circ.$$

Задатак се може знатно брже решити уколико се примени Кулонов закон у векторском облику. Потребно је, најпре, одредити векторс положај наелектрисања Q_C у односу на наелектрисања Q_A и Q_B . Према слици 1.13.в. је

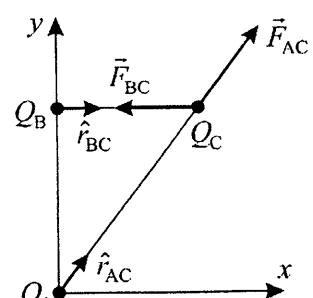
$$\vec{r}_{AC} = (0.6\hat{x} + 0.8\hat{y}) \text{ m} \quad \text{и} \quad \vec{r}_{BC} = 0.6\hat{x} \text{ m}.$$

Вектори сила којима наелектрисања Q_A и Q_B делују на наелектрисање Q_C су

$$\vec{F}_{AC} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{Q_A Q_C}{r_{AC}^2} \hat{r}_{AC} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{Q_A Q_C}{r_{AC}^3} \vec{r}_{AC}$$

и

$$\vec{F}_{BC} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{Q_B Q_C}{r_{BC}^2} \hat{r}_{BC} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{Q_B Q_C}{r_{BC}^3} \vec{r}_{BC},$$



Слика 1.13.в.

односно, за задате бројне вредности (водите рачуна о томе да се наелектрисања уносите са својим алгебарским знаком),

$$\vec{F}_{AC} = (4.32\hat{x} + 5.76\hat{y}) \text{ nN} \quad \text{и} \quad \vec{F}_{BC} = -12\hat{x} \text{ nN}.$$

Резултантна сила на наелектрисење Q_C је

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = (-7.68\hat{x} + 5.76\hat{y}) \text{ nN}.$$

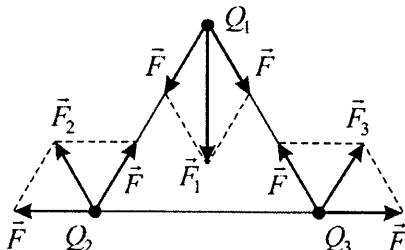
Лако се може проверити да је интензитет ове силе $F_C = 9.6 \text{ nN}$ и да она са x осом заклапа угао од 143.13° .

1.14. Како су сва три наелектрисања иста по апсолутној вредности, Q , и како се налазе на истом међусобном растојању, а у вакууму, интензитет силе између било која два наелектрисања биће исти,

$$F = k_0 \frac{|Q||Q|}{a^2} = k_0 \frac{Q^2}{a^2} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ N},$$

док су правци и смерови поједињих сила приказани на слици 1.14.

Резултантна сила на свако од наелектрисања одређује се као векторски збир поједињих сила које делују на то наелектрисање. Тако је интензитет силе на наелектрисање Q_1



Слика 1.14.

$$F_1 = F \cos 30^\circ + F \cos 30^\circ = 9\sqrt{3} \cdot 10^{-11} \text{ N},$$

док су резултантне силе на Q_2 и Q_3 истог интензитета

$$F_2 = F_3 = F \cos 60^\circ + F \cos 60^\circ = 9 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

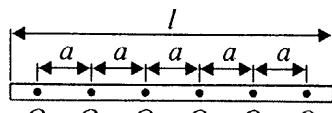
Правац и смер резултантних сила приказан је на Слици.

1.15. $\vec{F} = 10(\hat{x} + \hat{y}) \text{ pN}$. **1.16.** $Q_A = -4\sqrt{2} \text{ pC}$.

1.17. $Q_A = -40\sqrt{2} \text{ pC}$, $\vec{F}_C = 75\hat{x} \text{ pN}$.

1.18. $D_1(0, a\sqrt{3}/3)$, $D_2(0, -a\sqrt{3}/3)$.

1.19. Због симетрије је очигледно да ће наелектрисања на сегментима који се налазе симетрично у односу на средину штапа бити идентична (слика 1.19). Према томе, потребно је одредити три непозната наелектрисања, што значи да је неопходно поставити три услова.



Слика 1.19.

Да би систем био у равнотежи суме сила на свако од наелектрисања мора бити једнака нули:

$$\Sigma \vec{F}_{Q_1} = 0, \quad \Sigma \vec{F}_{Q_2} = 0, \quad \Sigma \vec{F}_{Q_3} = 0.$$

Услов да је сума сила на наелектрисање Q_1 једнака нули задовољен је за било које вредности наелектрисања Q_1 , Q_2 и Q_3 . Наиме, сва наелектрисања делују на наелектрисање Q_1 одбојном силом којој равнотежу одржава сила реакције (наелектрисање Q_1 не може да напусти штап).

Преостају само два условия равнотеже на основу којих се постављају две једначине: сума сила на наелектрисање Q_2 ,

$$k_0 \frac{Q_1 Q_2}{a^2} - k_0 \frac{Q_2 Q_3}{a^2} - k_0 \frac{Q_2 Q_3}{4a^2} - k_0 \frac{Q_2 Q_2}{9a^2} - k_0 \frac{Q_1 Q_2}{16a^2} = 0,$$

и сума сила на наелектрисање Q_3 ,

$$k_0 \frac{Q_1 Q_3}{4a^2} + k_0 \frac{Q_2 Q_3}{a^2} - k_0 \frac{Q_3 Q_3}{a^2} - k_0 \frac{Q_2 Q_3}{4a^2} - k_0 \frac{Q_1 Q_3}{9a^2} = 0,$$

где је $a = l/6$. Трсћа једначина се поставља на основу услова да је укупна количина електричитета на свим сегментима штапа једнака доведеном наелектрисању

$$2(Q_1 + Q_2 + Q_3) = Q.$$

Овако добијени систем од три једначине са три непознате,

$$135Q_1 - 16Q_2 - 180Q_3 = 0$$

$$5Q_1 + 27Q_2 - 36Q_3 = 0$$

$$2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 = Q,$$

има решење:

$$Q_1 = 0.207Q, \quad Q_2 = 0.151Q \quad \text{и} \quad Q_3 = 0.142Q.$$

Подужно наелектрисање сваког од сегмената ($q'_i = Q_i/a$, $i = 1, 2, 3$) је:

$$q'_1 = 1.242 Q/l, \quad q'_2 = 0.906 Q/l \quad \text{и} \quad q'_3 = 0.852 Q/l.$$

За задатс нумеричке податке добијају се следеће вредности:

$$Q_1 = 2.07 \text{ pC}, \quad q'_1 = 51.75 \text{ pC/m},$$

$$Q_2 = 1.51 \text{ pC}, \quad q'_2 = 37.75 \text{ pC/m},$$

$$Q_3 = 1.42 \text{ pC}, \quad q'_3 = 35.50 \text{ pC/m}.$$

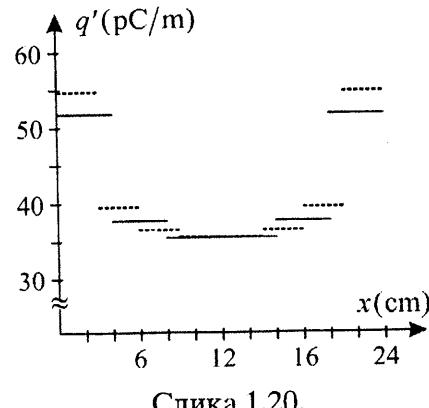
1.20. Вредности наелектрисања и подужних наелектрисања на појединим сегментима су:

$$Q_1 = 1.642 \text{ pC}, \quad q'_1 = 54.73 \text{ pC/m},$$

$$Q_2 = 1.186 \text{ pC}, \quad q'_2 = 39.54 \text{ pC/m},$$

$$Q_3 = 1.098 \text{ pC}, \quad q'_3 = 36.58 \text{ pC/m},$$

$$Q_4 = 1.069 \text{ pC}, \quad q'_4 = 35.62 \text{ pC/m}.$$



Слика 1.20.

Поређење са резултатима претходног задатка може се извршити помоћу дијаграма на коме је приказана подужна густина наелектрисања

дуж проводника (слика 1.20). Пуном линијом приказани су резултати за шест сегмената а испрекиданом за осам.

1.21. Пошто је наелектрисање Q равномерно распоређено по целом обиму прстена, подужна густина наелектрисања може се одредити као

$$Q' = Q/l = Q/2\pi a.$$

Прстен се може поделити на бесконачан број сегмената бесконачно мале дужине dl . На сваком од тих сегмената налази се количина електричног заряда $dQ = Q'dl$ која се може сматрати тачкастим наелектрисањем. Тачкасто наелектрисање dQ делује на тачкасто наелектрисање q силом чији је интензитет

$$dF = k_0 \frac{q dQ}{r^2} = k_0 \frac{q Q' dl}{a^2 + d^2},$$

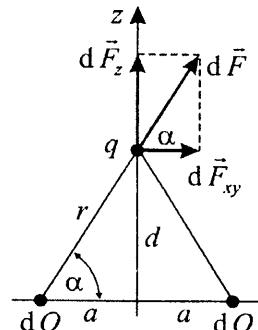
док су јој правац и смер приказани на слици 1.21.a.

Сила $d\vec{F}$ се може разложити на две компоненте - једну у правцу z -осе, $d\vec{F}_z$, и другу у равни xOy , $d\vec{F}_{xy}$. Њихови интензитети су:

$$dF_z = dF \sin \alpha$$

и

$$dF_{xy} = dF \cos \alpha.$$



Слика 1.21.a.

Резултантна сила на наелектрисање q , од свих елементарних наелектрисања dQ на целом прстену, одређује се као векторски збир сила $d\vec{F}$, то јест

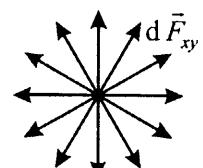
$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l d\vec{F}_z + \int_l d\vec{F}_{xy}.$$

Векторски збир сила $d\vec{F}_{xy}$ у равни xOy једнак је нули јер су све оне оријентисане као радијални зраци (слика 1.21.б). Према томе, резултантна сила има само z компоненту,

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F}_z = \int_l dF_z \hat{z} = \int_l dF \sin \alpha \hat{z}.$$

Смењујући у последњем изразу вредност за dF и

$$\sin \alpha = \frac{d}{r} = \frac{d}{(a^2 + d^2)^{1/2}}$$



Слика 1.21.б.

добија се

$$\vec{F} = \int_l k_0 \frac{q Q' d}{(a^2 + d^2)^{3/2}} d l \hat{z} = k_0 \frac{q Q' d}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z} \int_l dl = k_0 \frac{q Q' l d}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z},$$

а како је $Q'l = Q$ то је, коначно,

$$\vec{F} = k_0 \frac{qQd}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

За конкретне нумеричке податке $F = 23.04 \text{ pN}$.

У случају да је $d \gg a$ сила се може рачунати као сила између два тачкаста наелектрисања. Ово је лако провесити када се у имениону последњег израза a занемари у односу на d .

1.22. Штап се може поделити на бесконачан број бесконачно малих елемената дужине dz и сваки од њих сматрати тачкастим наелектрисањем $dQ = q'_2 dz$. На свако од ових тачкастих наелектрисања обруч, који је наелектрисан укупним наелектрисањем $Q_l = 2\pi a q'_1$, делује (према резултатима претходног задатка) силом

$$d\vec{F} = k_0 \frac{Q_l dQz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} = k_0 \frac{2\pi a q'_1 q'_2 z dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z},$$

где је z висина тачкастог оптерећења dQ изнад равни обруча. Резултантна сила на штап,

$$\vec{F} = \int_{z=a}^{z=2a} d\vec{F} = 2\pi a k_0 q'_1 q'_2 \int_{z=a}^{z=2a} \frac{z dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z},$$

лако се одређује увођењем смене $a^2 + z^2 = t^2$ ($2z dz = 2t dt \Rightarrow z dz = t dt$, $z = a \Rightarrow t = a\sqrt{2}$, $z = 2a \Rightarrow t = a\sqrt{5}$) и износи

$$\vec{F} = 2\pi a k_0 q'_1 q'_2 \int_{t=a\sqrt{2}}^{t=a\sqrt{5}} \frac{dt}{t^2} \hat{z} = 2\pi k_0 q'_1 q'_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \hat{z} = 1.47 \hat{z} \text{ pN}.$$

1.23. Тачкасто оптерећење Q делује на сваки елемент штапа dz , оптерећен наелектрисањем $dQ = q'_2 dz$, силом

$$d\vec{F} = k_0 \frac{Q dQ}{z^2} \hat{z} = k_0 \frac{Q q'_2 dz}{z^2} \hat{z}.$$

Укупна сила којом наелектрисање Q делује на штап је

$$\vec{F} = \int_{z=a}^{z=2a} d\vec{F} = k_0 Q q'_2 \int_{z=a}^{z=2a} \frac{dz}{z^2} \hat{z} = \frac{k_0 Q q'_2}{2a} \hat{z},$$

тако да се, коначно, добија $Q = -3.26 \text{ pC}$.

1.24. $Q = 0.735 \text{ pC}$

2. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ И ПОТЕНЦИЈАЛ СИСТЕМА ТАЧКАСТИХ ОПТЕРЕЂЕЊА У ХОМОГЕНОМ ДИЕЛЕКТРИКУ

2.1. $\vec{r}_A = \hat{x} \text{ m}$, $\vec{r}_B = (-0.8\hat{x} + 0.6\hat{y}) \text{ m}$, $r_A = r_B = 1 \text{ m}$,

$$\vec{E}_A = k_0 \frac{Q}{r_A^2} \hat{r}_A = k_0 \frac{Q}{r_A^3} \vec{r}_A = 0.9\hat{x} \text{ V/m}, \varphi_A = k_0 \frac{Q}{r_A} = 0.9 \text{ V},$$

$$\vec{E}_B = k_0 \frac{Q}{r_B^2} \hat{r}_B = k_0 \frac{Q}{r_B^3} \vec{r}_B = (-0.72\hat{x} + 0.54\hat{y}) \text{ V/m}, \varphi_B = 0.9 \text{ V}.$$

2.2. $\vec{E}_B = (0.432\hat{x} - 0.576\hat{y}) \text{ V/m}$, $\varphi_B = -0.36 \text{ V}$,

$$\vec{E}_C = (0.144\hat{x} + 0.108\hat{y}) \text{ V/m}, \varphi_C = -0.18 \text{ V}.$$

2.3. $E_B = 22.5 \text{ V/m}$, $\varphi_A = \pm 18 \text{ V}$, $\varphi_B = \pm 9 \text{ V}$.

2.4. $E_A = 4 \text{ V/m}$. 2.5. $\varphi_B = -9 \text{ V}$, $\varphi_C = -0.09 \text{ V}$.

2.6. $a^* \varphi_A = -0.72 \text{ V}$, $b^* \varphi_A = 0.36 \text{ V}$, $b^* \varphi_A = 0.72 \text{ V}$.

На слици 2.6. илустрована је зависност знака потенцијала од положаја референтне тачке и положаја тачке у којој се рачуна потенцијал.

2.7.

	$Q > 0$	P	A	$Q < 0$	P	A
$a^* \varphi_A = 0.72 \text{ V}$,	• + + - - - -	○	○	• - - + + + +	○	○
$b^* \varphi_A = -0.36 \text{ V}$,	• + + + + - -	○	○	• - - - - + + +	○	○
$b^* \varphi_A = -0.72 \text{ V}$.	• + + + + + +	○	○	• - - - - - + + +	○	○

На слици 2.7. илустрована је завис- $Q > 0$ A $r_p \rightarrow \infty$ $Q < 0$ A $r_p \rightarrow \infty$

ност знака потенцији- $+ + + + + + +$ $- - - - - - -$

ла од положаја рефе-

Слика 2.6.

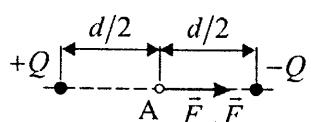
Слика 2.7.

рентне тачке и положаја тачке у којој се рачуна потенцијал.

2.8. Интензитет вектора електричног поља у тачки A од наелектри- сања $+Q$ и $-Q$ је

$$E_+ = E_- = k_0 \frac{Q}{(d/2)^2} = \frac{4k_0 Q}{d^2},$$

док је смер оба вектора ка наелектрисању $-Q$ (слика 2.8). Резултантно поље има исти смер а интензитет му је



Слика 2.8.

$$E = E_+ + E_- = \frac{8k_0 Q}{d^2} = 14.4 \text{ V/m}.$$

Потенцијал је $\phi = \phi_+ + \phi_- = 0$.

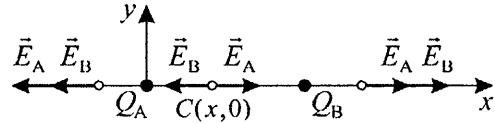
~~✓~~ 2.9. $\vec{E} = 0.5625\hat{x} \text{ V/m}$, $\phi = 0.675 \text{ V}$.

~~✓~~ 2.10. Да би електрично поље у некој тачки (изузев у бесконачности) било једнако нули вектори електричног поља наелектрисања Q_A и Q_B , \vec{E}_A и \vec{E}_B , морају бити супротног смера, што је могуће само на x -оси.

Како су на x -оси вектори електричног поља оријентисани као на слици 2.10, очигледно је да њихов збир може бити једнак нули само између наелектрисања. Тачка С се налази на месту где су интензитети E_A и E_B међусобно једнаки,

$$k_0 \frac{|Q_A|}{x^2} = k_0 \frac{|Q_B|}{(d-x)^2},$$

одакле следи $x = 2d/3 = 20 \text{ cm}$.



Слика 2.10.

Потенцијал у тачки С се одређује као збир потенцијала од наелектрисања Q_A и Q_B и износи $\phi = 2.7 \text{ V}$. Треба уочити да то што је поље у некој тачки једнако нули не значи и да је потенцијал нула.

~~✓~~ 2.11. $C(60 \text{ cm}, 0)$, $\phi_C = 0.3 \text{ V}$.

~~✓~~ 2.12. $C(\approx 1.707 \text{ m}, 0)$, $\phi_C \approx 1.024 \text{ V}$.

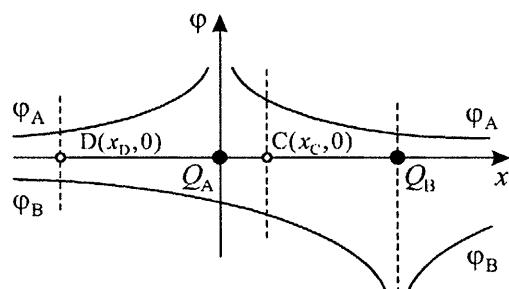
~~✓~~ 2.13. Како је референтна тачка у бесконачности, потенцијал тачкастог наелектрисања Q_A је у свим тачкама простора позитиван, а потенцијал тачкастог наелектрисања Q_B негативан. Еквипотенцијална површина нултог потенцијала, $\phi = \phi_A + \phi_B = 0$, обухватаће наелектрисање мање по апсолутној вредности, у овом случају Q_A .

На слици 2.13. је скициран дијаграм промене потенцијала ϕ_A и ϕ_B на x -оси. Са Слике је очигледно да постоје две тачке у којима је укупан потенцијал ϕ једнак нули, С и D. Из услова да је потенцијал у тачки С једнак нули,

$$\phi_{CA} + \phi_{CB} = k_0 \frac{Q_A}{x_C} + k_0 \frac{Q_B}{d-x_C} = 0,$$

следи $x_C = 0.16 \text{ m}$, док из услова

да је потенцијал у тачки D нула, $\phi_{DA} + \phi_{DB} = 0$, следи $x_D = -0.8 \text{ m}$.



Слика 2.13.

Вектори слетричног поља у тачкама С и D су

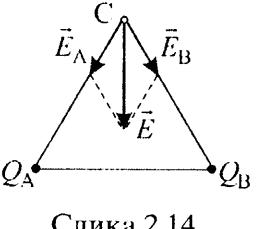
$$\vec{E}_C = 11.71875\hat{x} \approx 11.72\hat{x} \text{ V/m} \quad \text{и} \quad \vec{E}_D = -0.09375\hat{x} \approx -0.09\hat{x} \text{ V/m}.$$

☛ 2.14. Како је потенцијал у темену С

$$\varphi = k_0 \frac{Q_A}{a} + k_0 \frac{Q_B}{a} = 2 k_0 \frac{Q}{a},$$

то следи

$$Q = \frac{\varphi a}{2 k_0} = -100 \text{ pC}.$$



Слика 2.14.

Вектор електричног поља у темену С одређује се као векторски збир поља од наелектрисања Q_A и Q_B , $\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$. Правац и смер вектора \vec{E} приказан је на слици 2.14, а интензитет му је

$$E = 2 k_0 \frac{|Q|}{a^2} \cos \frac{\pi}{6} = 90\sqrt{3} \text{ V/m}.$$

☛ 2.15. $Q_A = 20 \text{ pC}$, $Q_B = 40 \text{ pC}$, $\vec{E}_C = 2.25\hat{x} \text{ V/m}$, $\vec{E}_D = 2.43\hat{x} \text{ V/m}$.

☛ 2.16. $Q_A = 40 \text{ pC}$, $Q_B = -20 \text{ pC}$, $\vec{E}_C = 10.125\hat{x} \text{ V/m}$, $\vec{E}_D = -0.765\hat{x} \text{ V/m}$.

☛ 2.17. Придружимо задатом систему наелектрисања правоугли координатни систем са координатним почетком у тачки С. Правци и смерови вектора слетричног поља поједињих наелектрисања приказани су на слици 2.17, док су им интензитети

$$E_A = k_0 \frac{|Q_A|}{(a\sqrt{2})^2} = 27 \text{ V/m}, \quad E_B = k_0 \frac{|Q_B|}{a^2} = 36 \text{ V/m} \quad \text{и} \quad E_C = k_0 \frac{|Q_D|}{a^2} = 27 \text{ V/m}.$$

Вектори \vec{E}_B и \vec{E}_D имају само y , односно x компоненту,

$$E_{Bx} = 0, \quad E_{By} = E_B$$

и

$$E_{Dx} = E_D, \quad E_{Dy} = 0,$$

док вектор \vec{E}_A има обе компоненте

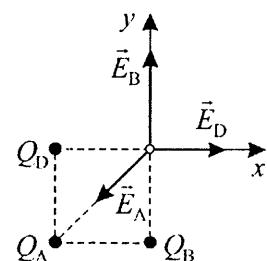
$$E_{Ax} = E_A \cos \frac{5\pi}{4}, \quad E_{Ay} = E_A \sin \frac{5\pi}{4}.$$

Компоненте резултантног вектора поља су, према томе,

$$E_x = E_{Ax} + E_{Bx} + E_{Dx} = 7.908 \text{ V/m}$$

и

$$E_y = E_{Ay} + E_{By} + E_{Dy} = 16.908 \text{ V/m}.$$



Слика 2.17.

Интензитет резултантног вектора поља је

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 18.666 \text{ V/m},$$

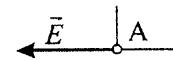
док је угао који заклапа са x -осом

$$\angle(\vec{E}, \hat{x}) = \arctg \frac{E_y}{E_x} = 64.93^\circ.$$

Потенцијал у тачки С је

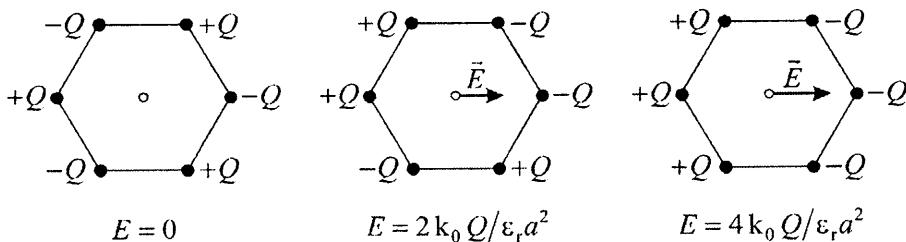
$$\phi = \phi_A + \phi_B + \phi_D = k_0 \frac{Q_A}{a\sqrt{2}} + k_0 \frac{Q_B}{a} + k_0 \frac{Q_C}{a} = 24.82 \text{ V}.$$

- 2.18. Вектор електричног поља има правац и смер као на слици 2.18, а интензитет му је $E = 4.62 \text{ V/m}$. Потенцијал има вредност $\phi = 0.8 \text{ V}$.



Слика 2.18.

- 2.19. Три могућа распореда наслектрисања, као и одговарајући вектори поља приказани су на слици 2.19.



Слика 2.19.

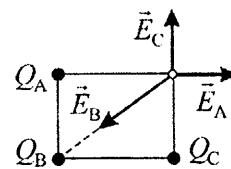
- 2.20. $E = \sqrt{2} \text{ V/m}$, $\angle(\vec{E}, \hat{x}) = \pi/4$, $\phi = 0.6 \text{ V}$.

- 2.21. a* Да би био испуњен задати услов (да је поље у тачки D једнако нули) очигледно је са слике 2.21. да наслектрисања Q_A и Q_C морају бити позитивна и да морају задовољити условс

$$E_D = |E_{By}| \quad \text{и} \quad E_C = |E_{Bx}|,$$

одакле следи $Q_A = 2.56 \text{ pC}$ и $Q_C = 1.08 \text{ pC}$.

$$\text{б* } \phi = 0.$$



Слика 2.21.

- 2.22. a* $Q_B = Q_C = 10 \text{ pC}$. б* $\phi_O = 0.9 \text{ V}$.

в* $A = q(\phi_\infty - \phi_O) = -0.9 \text{ pJ}$ (знак "—" у добијеном резултату значи да се рад врши противу сила поља).

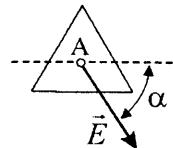
- 2.23. $Q = 10 \text{ pC}$.

- 2.24. $Q = 10 \text{ pC}$.

2.25. a* $E = 17.89 \text{ V/m}$, $\alpha = 57^\circ$ (слика 2.25).

$$\text{б* } \varphi_A = -0.909 \text{ V}.$$

$$\text{в* } \varphi_B = -1.24 \text{ V}, A = Q(\varphi_B - \varphi_A) = -0.331 \text{ pJ}.$$



2.26. a* Из услова да збир x компоненте поља од наелектрисања Q_B и поља од наелектрисања Q_A има задату

вредност следи $Q_B = 2\sqrt{2}Q_A$, док из услова да вектор резултантног поља има задати правац и смер (поље наелектрисања Q_C мора имати исти интензитет као y -компонента поља од наелектрисања Q_B или супротан смер) следи $Q_C = -Q_A$.

Слика 2.25.

$$\text{б* } \varphi_D = 1.8 \text{ V}, A = -0.18 \text{ pJ}.$$

2.27. Сличним разматрањем као у претходном задатку долази се до закључка да је $Q_B = -2\sqrt{2}Q_A$ и $Q_C = Q_A$ па се, на основу познатог потенцијала тачке II, добија $Q_A = Q_C = 20 \text{ pC}$ и $Q_B = -40\sqrt{2} \text{ pC}$.

2.28. $Q_1 = Q_3 = 5.52 \text{ pC}$, $Q_2 = -7.17 \text{ pC}$, $A = 0.148 \text{ pJ}$.

2.29. $Q_3 = 16.67 \text{ pC}$, $E = 4.8\sqrt{2} \text{ V/m}$, $\varphi_A = 3.056 \text{ V}$.

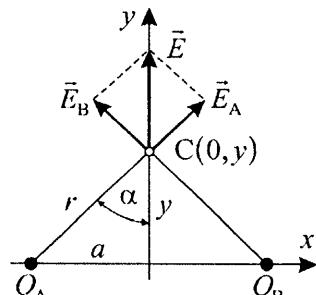
2.30. $Q_1 = 10 \text{ pC}$, $Q_2 = -2.5 \text{ pC}$, $Q_3 = Q_4 = -10 \text{ pC}$.

2.31. a* Вектор електричног поља у произвољној тачки на y -оси, $(0, y)$, има само y компоненту (пошто су x компоненте поља од појединачних наелектрисања истог интензитета а супротног смера, слика 2.31.a),

$$\bar{E} = 2k_0 \frac{Q}{r^2} \cos \alpha \hat{y} = 2k_0 \frac{Qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{y}.$$

Функција потенцијала на y -оси се одређује по дефиницији као линијски интеграл вектора јачине електричног поља од произвољне тачке на y -оси до референтне тачке,

$$\varphi = \int_C \bar{E} \cdot d\vec{l}.$$



Слика 2.31.a.

Како се путања интеграције може произвољно бирати, најпогодније је интеграцију вршити дуж y -осе ($d\vec{l} = d\vec{y}$),

$$\varphi = \int_y^{\infty} \bar{E} \cdot d\vec{y} = \int_y^{\infty} 2k_0 \frac{Qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{y} \cdot d\vec{y} = \int_y^{\infty} 2k_0 \frac{Qy dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Последњи интеграл се једноставно израчунава увођењем смене $a^2 + y^2 = t^2$ (видети задатак 1.22), тако да је

$$\varphi = 2k_0 Q \int_{t=\sqrt{a^2+y^2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2k_0 \frac{Q}{\sqrt{a^2+y^2}}.$$

б* Функција потенцијала се израчунава далеко једноставније:

$$\varphi = \varphi_A + \varphi_B = 2k_0 \frac{Q}{r} = 2k_0 \frac{Q}{\sqrt{a^2+y^2}}.$$

На основу познате функције потенцијала електрично поље се одређује као

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \right).$$

Како потенцијал дуж y -осе не зависи од променљивих x и z , то се за вектор електричног поља добија

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(2k_0 \frac{Q}{\sqrt{a^2+y^2}} \right) \hat{y} = 2k_0 \frac{Qy}{(a^2+y^2)^{3/2}} \hat{y}.$$

в* Максимум функције $E(y)$ је у тачки у којој је $dE/dy = 0$,

$$(a^2+y^2)^{3/2} - 3y^2(a^2+y^2)^{1/2} = 0 \Rightarrow a^2+y^2-3y^2=0 \Rightarrow y=a\sqrt{2}/2,$$

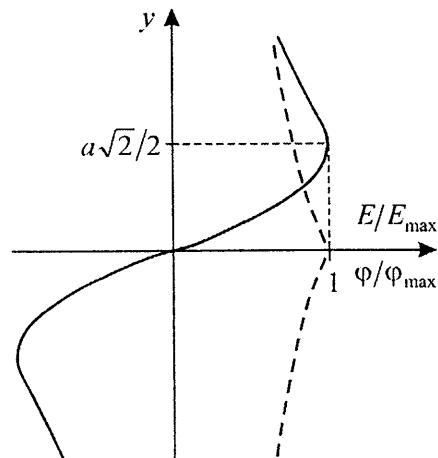
и има вредност

$$E_{\max} = k_0 \frac{Qa\sqrt{2}}{(3a^2/2)^{3/2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} k_0 \frac{Q}{a^2}.$$

Очигледно је, из израза за функцију потенцијала, да потенцијал има максималну вредност у координатном почетку ($y=0$) и да износи

$$\Phi_{\max} = 2k_0 Q/a.$$

г* На слици 2.31.б. приказани су нормализовани дијаграми промене електричног поља и потенцијала дуж y -осе, $E/E_{\max}(y)$ и $\Phi/\Phi_{\max}(y)$. Мада је интензитет вектора електричног поља увек позитивна величина, на дијаграму за $y < 0$ електрично поље има негативну вредност. На тај начин је указано и на смер вектора поља - за позитивне вредности \vec{E} има смер \hat{y} , док је за негативне вредности тај смер супротан.



Слика 2.31.б.

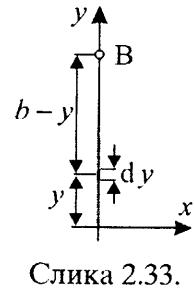
2.32. $\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q'az}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$, $\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q'a}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$, $z = \pm a\sqrt{3}$.

2.33. Сваки елемент штапа, оптерећен наелектрисањем $dQ = q'dy$, ствара у тачки В (слика 2.33) електрично поље

$$d\vec{E} = k_0 \frac{dQ}{(b-y)^2} \hat{y} = k_0 \frac{q'dy}{(b-y)^2} \hat{y},$$

на се укупно поље од свих елемената штапа (од $y=0$ до $y=a$) одређује се као

$$\vec{E} = \int_{y=0}^{y=a} d\vec{E} = k_0 q' \int_{y=0}^{y=a} \frac{dy}{(b-y)^2} \hat{y}.$$



Слика 2.33.

Последњи интеграл се лако израчуна ввођењем смене $b-y=t$,

$$\vec{E} = k_0 q' \int_{t=b}^{t=b-a} \frac{dt}{t^2} \hat{y} = k_0 q' \frac{a}{b(b-a)} \hat{y}.$$

На сличан начин се одређује и потенцијал,

$$\varphi = \int_{y=0}^{y=a} d\varphi = k_0 q' \int_{y=0}^{y=a} \frac{dy}{b-y},$$

на се, након увођења смене $b-y=t$, коначно добија

$$\varphi = k_0 q' \ln \frac{b}{b-a}.$$

2.34. Наелектрисана нит се може посматрати као континуалан низ тачкастих наелектрисања $dQ = q'dy$. Свако од ових наелектрисања има за последицу у тачки В електрично поље интензитета

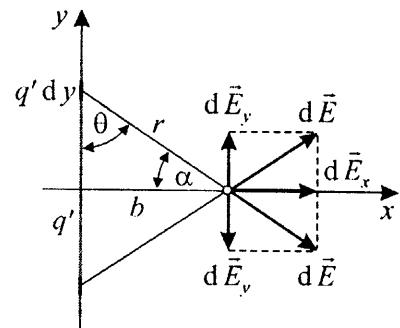
$$dE = k_0 \frac{dQ}{r^2} = k_0 \frac{q'dy}{r^2},$$

правца и смера као на слици 2.34.a.

Вектор електричног поља се може разложити на две компоненте,

$$dE_x = dE \sin \theta \quad \text{и} \quad dE_y = dE \cos \theta.$$

Збир $d\vec{E}_y$ компоненти од свих елемената једнак је пули (било која два тачкаста наелектрисања смештена симетрично у односу на x -осу имају $d\vec{E}_y$ компоненте истог интензитета а супротног смера). Према томе, резултантно поље ће имати само x компоненту,



Слика 2.34.a.

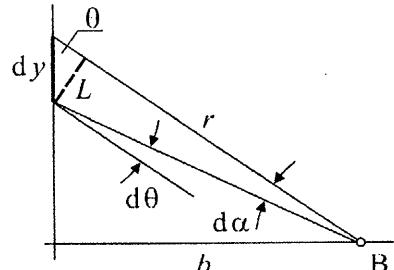
$$\vec{E} = \int_{y=a}^{y=-a} d\vec{E}_x = \int_{y=a}^{y=-a} dE \sin \theta \hat{x} = \int_{y=a}^{y=-a} k_0 \frac{q' dy}{r^2} \sin \theta \hat{x}.$$

Пошто се у овом интегралу појављују променљиве r и θ и диференцијал dy , потребно је подинтегрални израз свести на једну променљиву и њен диференцијал. Како је за мале углове дужина лука једнака дужини тетиве то се, према ознакама са слике 2.34.б, може писати

$$dy \sin \theta = \bar{L} \equiv \bar{L} = r d\alpha,$$

а како је $d\alpha = d\theta$, то је

$$dy \sin \theta = r d\theta.$$



Слика 2.34.б.

Уносећи последњи израз у израз за електрично поље добија се

$$\vec{E} = k_0 q' \int_{y=a}^{y=-a} \frac{r d\theta}{r^2} \hat{x} = k_0 q' \int_{y=a}^{y=-a} \frac{d\theta}{r} \hat{x}.$$

Са слике 2.34.а. је очигледно да је $r = b/\sin \theta$, па је

$$\vec{E} = k_0 \frac{q'}{b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \hat{x} = k_0 \frac{q'}{b} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{x}.$$

Слика 2.34.в. Углови θ_1 и θ_2 означени су на слици 2.34.в, а у конкретном случају је $\theta_1 = \arctg(b/a)$ и $\theta_2 = \pi - \theta_1$.

Потенцијал се може одредити као збир потенцијала система тачкастих наелектрисања $dQ = q' dy$ распоређених од $y = -a$ до $y = a$,

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{y=-a}^{y=a} k_0 \frac{dQ}{r} = k_0 q' \int_{y=-a}^{y=a} \frac{dy}{\sqrt{b^2 + y^2}} \\ &= k_0 q' \ln \left(y + \sqrt{b^2 + y^2} \right) \Big|_{y=-a}^{y=a} = k_0 q' \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a}. \end{aligned}$$

2.35. На основу резултата претходног задатка, водећи рачуна о томе да је у случају неограниченог штапа ($a \rightarrow \infty$) $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$, за вектор електричног поља у произвољној тачки на x -оси може се писати

$$\vec{E} = k_0 \frac{q'_1}{x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{x} = 2 k_0 \frac{q'_1}{x} \hat{x}.$$

На сваки елемент другог штапа дужине dx , који се може сматрати тачкастим наслектрисањем $dQ = q'_2 dx$, деловаће сила

$$d\vec{F}_2 = \bar{E} dQ = 2k_0 q'_1 q'_2 \frac{dx}{x} \hat{x},$$

тако да је укупна сила на тај штап

$$\vec{F}_2 = \int_{x=a}^{x=2a} d\vec{F}_2 = 2k_0 q'_1 q'_2 \int_{x=a}^{x=2a} \frac{dx}{x} \hat{x} = 2k_0 q'_1 q'_2 \ln 2 \hat{x}.$$

Сила на штап неограничене дужине је, према закону акције и реакције, истог интензитета и правца а супротног смсра,

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -2k_0 q'_1 q'_2 \ln 2 \hat{x}.$$

2.36. Да би електрично поље у тачки С било једнако нули наслектрисања Q_A и Q_B морају имати вредности $Q_A = -2 \text{ nC}$ и $Q_B = 4\sqrt{2} \text{ nC}$.

Укупан потенцијал у тачки С једнак је збиру потенцијала од неограничено дугог линијског оптерећења,

$$\Phi_\ell = \int_C^P \vec{E}_\ell \cdot d\vec{l} = \int_{x=a}^{x=5a} 2k_0 \frac{q'}{x} \hat{x} \cdot d\vec{x} = 2k_0 q' \int_{x=a}^{x=5a} \frac{dx}{x} = 2k_0 q' \ln 5,$$

и потенцијала од наелектрисања Q_A и Q_B ,

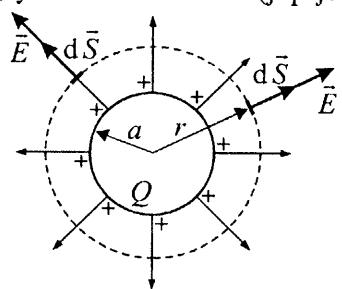
$$\Phi_A = k_0 Q_A \left(\frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{AP}} \right) \quad \text{и} \quad \Phi_B = k_0 Q_B \left(\frac{1}{r_{BC}} - \frac{1}{r_{BP}} \right),$$

и износи $\Phi = 34.5 \text{ V}$.

3. ГАУСОВ ЗАКОН, ПРОВОДНИЦИ У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ

3.1. Претпоставимо, а што неће имати никаквог утицаја на поступак решавања задатка, да је сфера оптерећена позитивним наелектрисањем. Позитивна оптерећења на сferи су извори линија поља док су њихови понори, одговарајућа негативна наслектрисања, у бесконачности (јер је сфера усамљена). Линије поља ће бити радијалне, полазиће од сфере и завршавати у бесконачности (слика 3.1.a). Како у унутрашњости сфере ($r < a$) нема линија поља очигледно је да је и поље једнако нули, $E = 0$.

За одређивање вектора слектричног поља ван сфере ($r \geq a$) применићемо Гаусов закон. Кроз тачку у којој желимо да израчунамо поље, а која се налази па растојању r од



Слика 3.1.a.

центра сфере, поставићемо затворену површину S и одредити флукс вектора електричног поља кроз њу,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Површину S треба одабрати тако да израчунавање горњег интеграла буде што једноставније. У овом случају то је сфера коцентрична онтерећеној сferи (слика). Сваки елемент површине сфере, $d\vec{S}$, је колинсаран са вектором поља (који је тангента на линију поља) тако да је

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS.$$

Из разлога потпуне симетрије интензитет вектора електричног поља је исти у свим тачкама површине S па се, као константа, може извући испред знака интеграције,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = 4\pi r^2 E.$$

(јер је интеграл dS по затвореној површини S једнак тој површини).

С друге стране, по Гаусовом закону, излазни флукс вектора електричног поља кроз затворену површину S једнак је количнику укупне количине електричног поља која је обухваћена том површином и диселектричне константе вакуума,

$$\Psi_E = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Изједначавањем ова два израза за флукс,

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

добија се интензитет вектора електричног поља за $r \geq a$,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Поље је радијално па коначан израз за вектор електричног поља гласи

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}.$$

Максимална вредност електричног поља је на површини сфере,

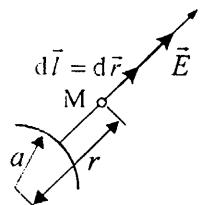
$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Q}{\epsilon_0 S_{\text{sphere}}} = \frac{\eta}{\epsilon_0},$$

где је η површинска густина наелектрисања на сferi.

Потенцијал се одређује по дефиницији као линијски интеграл вектора електричног поља од тачке у којој се потенцијал рачуна (тачке M

на растојању r од центра сфере) до референтне тачке P нултог потенцијала (у овом случају у бесконачности). Како се путања интеграције може произвољно бирати најпогодније је одабрати једну од линија поља (слика 3.1.б). У том случају је $d\vec{l} = d\vec{r}$, па је

$$\Phi = \int_M^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$



Слика 3.1.б.

Како се функција $\vec{E}(r)$ разликује за $r < a$ и за $r \geq a$, то ће се разликовати и функција потенцијала. Потенцијал треба одређивати најпре у тачкама које су ближе референтној тачки нултог потенцијала (јер се добијени резултати могу користити за одређивање потенцијала у тачкама које су даље од референтне). Према томе, за $r \geq a$ је

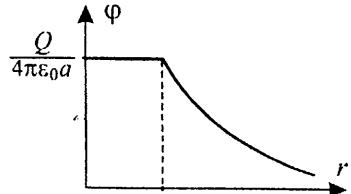
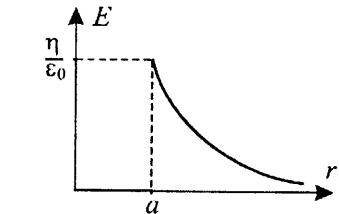
$$\Phi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Вредност потенцијала на површини сфере ($r = a$) је

$$\Phi_a = \Phi_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Поље у унутрашњости сфере је једнако нули па је потенцијална разлика између било које две тачке унутар сфере, односно између било које тачке у унутрашњости сфере и површине сфре, једнака нули. То значи да су све тачке у унутрашњости сфере на потенцијалу сфре. Јасно је да се до истог резултата долази и ако се потенцијал за $r \leq a$ рачуна по дефиницији,

$$\Phi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 + \Phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$



Слика 3.1.в.

Дијаграми $E(r)$ и $\Phi(r)$ приказани су на слици 3.1.в.

3.2. Изрази за вектор електричног поља и функцију потенцијала у односу на референтну тачку у бесконачности су идентични са одговарајућим изразима за случај усамљене сфере истог полу пречника.

$$a^* \Phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_p - a}{ar_p}, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_p - r}{rr_p}, & r \geq a \end{cases} \quad b^* \Phi = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a - r}{ar}, & r \geq a \end{cases}$$

3.3. $Q = \pm 10 \text{ nC}$. 3.4. $Q = 0.1 \mu\text{C}$, $\eta = 796 \text{ nC/m}^2$, $E = 90 \text{ kV/m}$.

3.5. $Q = 1 \text{ nC}$, $a = 3 \text{ cm}$. 3.6. $Q = -0.2 \text{ nC}$, $a = 10 \text{ cm}$.

3.7. Максимална вредност поља је на површини лопте,

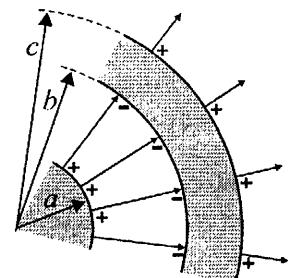
$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = k_0 \frac{Q}{a^2}$$

(карактеристике ваздуха и вакуума су приближно једнаке, $\epsilon \approx \epsilon_0$), па из услова $E_{\max} \leq E_{kr}$ следи $a_{\min} = 30 \text{ mm}$. Ако се узме у обзир косфицијент сигурности из услова $E_{\max} \leq E_{ks}$ следи $a_{\min} = 60 \text{ mm}$.

3.8. Из познатог потенцијала, $\phi = k_0 Q/a$, може се изразити Q и та вредност унести у израз за електрично поље на површини лопте, тако да се добија $E_{\max} = \phi/a$. Коришћење истог услова као у претходном задатку даје $a_{\min} = 5 \text{ mm}$, односно $a_{\min} = 20 \text{ mm}$.

3.9. $Q = 1 \text{ nC}$, $E = 10 \text{ kV/m}$, $b = 9 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$, $\phi = 200 \text{ V}$.

3.10. Наелектрисање Q металне (проводне) лопте распоредиће се по њеној површини. На површинама проводне љуске издвојиће се индукована наелектрисања исте вредности као и наелектрисање лопте - на унутрашњој површини супротног, а на спољашњој истог знака (слика 3.10.a). Ова наелектрисања, као и наелектрисања на лопти, су извори, односно понори линија поља. Јасно је да је поље у унутрашњости лопте ($r < a$) и у проводној љусци ($b < r < c$) једнако нули.



Слика 3.10.a.

У простору између лопте и љуске, као и ван љуске поље се одређује директном применом Гаусовог закона, на исти начин као и у Задатку 3.1,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \text{ за } a \leq r \leq b \text{ и } r \geq c.$$

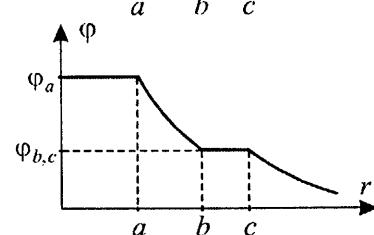
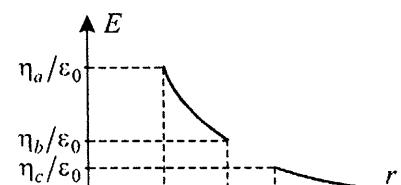
Интензитет вектора електричног поља на појединим проводним површинама,

$$E_a = Q/4\pi\epsilon_0 a^2 = Q/\epsilon_0 S_a = \eta_a/\epsilon_0,$$

$$E_b = Q/4\pi\epsilon_0 b^2 = Q/\epsilon_0 S_b = \eta_b/\epsilon_0,$$

$$E_c = Q/4\pi\epsilon_0 c^2 = Q/\epsilon_0 S_c = \eta_c/\epsilon_0,$$

задовољава гранични услов.



Слика 3.10.б.

Потенцијал се одређује по дефиницији (интеграцију је најпогодније вршити дуж линије поља), тако да за $r \geq c$

$$\varphi = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Проводна љуска је еквипотенцијална и њени потенцијал је $\varphi_{bc} = Q/4\pi\epsilon_0 c$. Између лопте и љуске ($a \leq r \leq c$) потенцијал је

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_r^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + 0 + \varphi_{bc} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-r}{rb} + \frac{1}{c} \right), \end{aligned}$$

док је потенцијал лопте

$$\varphi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} + \frac{1}{c} \right).$$

Дијаграми $E(r)$ и $\varphi(r)$ приказани су на слици 3.10.б.

3.11. Један део доведене количине електрицитета Q распоредиће се по површини лопте полупречника a (Q_a) а други по површини лопте полупречника b (Q_b). За одређивање испознатих количина електрицитета потребно је поставити два услова. Први услов је очигледан, $Q_a + Q_b = Q$. Други услов је последица чињенице да су лопте спојене проводником, а то значи да се морају налазити на истом потенцијалу:

$$\varphi_a = k_0 Q_a/a = k_0 Q_b/b = \varphi_b.$$

Из ова два услова следи

$$\eta_a = \frac{Q_a}{S_a} = \frac{1}{a} \frac{Q}{4\pi(a+b)}$$

и

$$\eta_b = \frac{Q_b}{S_b} = \frac{1}{b} \frac{Q}{4\pi(a+b)}.$$

3.12. Полазећи од услова да је укупна маса N куглица једнака маси куглице која настаје њиховим спајањем ($m_{vk} = Nm_{mk}$), као и услова да је укупно оптерећење N куглица једнако оптерећењу куглице која настаје њиховим спајањем ($Q_{vk} = NQ_{mk}$), добија се

$$\varphi = \varphi_1 N^{2/3} = 900 \text{ V}.$$

Оптерећење мале куглице, Q_{mk} , одређено је из познатог потенцијала φ_1 , при чисму је куглица сматрана усамљеном.

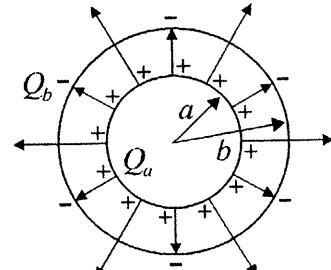
3.13. a* Спектар поља приказан је на слици 3.13. Очигледно је да је електрично поље у унутрашњости сфере полуцрнчника a једнако нули. За $r \geq a$ поље се одређује применом Гаусовог закона и износи

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & a \leq r \leq b \\ \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r \geq b \end{cases}$$

Електрично поље на површини унутрашње сфере има интензитет $E_{r=a} = 67.5 \text{ kV/m}$.

Интензитет електричног поља на унутрашњој страни спољашње сфере је $E_{r=b-0} = 30 \text{ kV/m}$,

док је на њеној спољашњој страни $E_{r=b+0} = 15 \text{ kV/m}$.



Слика 3.13.

b* Функција потенцијала се одређује по дефиницији и има облик

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b}{a} Q_a + Q_b \right), & r \leq a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b}{r} Q_a + Q_b \right), & a \leq r \leq b \\ \frac{Q_b + Q_a}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq b \end{cases}$$

Потенцијал спољашње сфере је $\varphi_{r=b} = 900 \text{ V}$, док је потенцијал унутрашње сфере (као и свих тачака унутар ње) $\varphi_{r \leq a} = 1800 \text{ V}$.

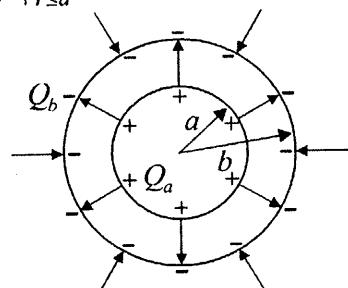
3.14. a* Спектар електричног поља приказан је на слици 3.14. Вредност вектора електричног поља на појединим површинама је:

$$\vec{E}_{r=a} = 33.75 \hat{r} \text{ kV/m},$$

$$\vec{E}_{r=b-0} = 15 \hat{r} \text{ kV/m}, \quad \vec{E}_{r=b+0} = -15 \hat{r} \text{ kV/m}.$$

$$\text{б* } \varphi_a = -450 \text{ V}, \varphi_b = -900 \text{ V}$$

$$\text{в* } c = 4.5 \text{ cm}, d = 9 \text{ cm}.$$



Слика 3.14.

3.15. Унутар унутрашње и ван спољашње сфере електрично поље је једнако нули. Између сфера поље је радијално, оријентисано од позитивне (унутрашње) ка негативној (спољашњој) сferи, а интензитет му се мења по закону $E = Q / 4\pi\epsilon_0 r^2$. Напон између сфера је $U = 450 \text{ V}$.

3.16. Унутар унутрашње ($r < a$) и ван спољашње ($r > d$) сфере, као и у проводној лјусци ($b < r < c$) поље је једнако нули. У простирујућем делу простора ($a \leq r \leq b$ и $c \leq r \leq d$) електрично поље се мења по закону

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Напон између сфера је

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d-c}{cd} + \frac{b-a}{ab} \right).$$

3.17. Како су оптерећења (извори линија поља) распоређена у унутрашњости сфере, електрично поље ће постојати и унутар и ван сфере. Линије поља су радијалне (слика 3.17.a).

Електрично поље одређује се применом Гаусовог закона

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Затворена површина кроз коју се израчунава флукс вектора електричног поља је концентрична сфера полу пречника r . Као и у задатку 3.1 излазни флукс вектора \vec{E} кроз ову површину је

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2,$$

без обзира на то да ли је $r \leq a$ или $r \geq a$. С друге стране, за $r \leq a$ је

$$\Psi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \int_V dV = \frac{1}{\epsilon_0} \rho V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} r^3 \pi,$$

јер је запреминска густина наелектрисања ρ константна у цлој запремини V која је обухватајеа површином S . Одавде следи да је $E = \rho r / 3\epsilon_0$.

За $r \geq a$ количина електричног поља обухватајеа затвореном површином S је количина електричног поља која се налази унутар сфере, па је

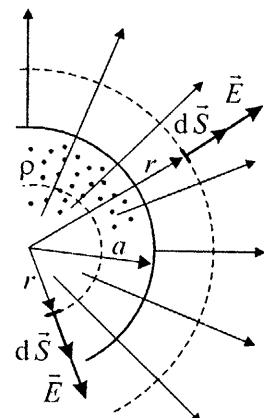
$$\Psi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} a^3 \pi,$$

одакле следи $E = \rho a^3 / 3\epsilon_0 r^2$.

Коначан израз за вектор електричног поља је, прсма томе,

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}.$$

Функција потенцијала у односу на референтну тачку у бесконачности одређује се по дефиницији као линијски интеграл вектора елект-

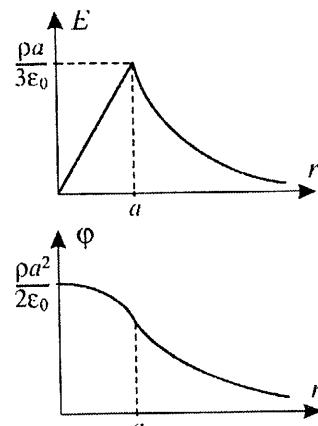


Слика 3.17.a.

ричног поља од тачке у којој се рачуна потенцијал (тачка на растојању r од центра сфере) до референтне тачке (у бесконачности). И овде се интеграција врши дуж линије поља ($d\vec{l} = d\vec{r}$) где су вектори \vec{E} и $d\vec{r}$ колинеарни. На тај начин се за функцију потенцијала добија

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}, & r \leq a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq a \end{cases}.$$

Дијаграми $E(r)$ и $\Phi(r)$ скицирани су на слици 3.17.б.



Слика 3.17.б.

3.18. а* Приликом примене Гаусовог закона, код израчунавања обухваћене количине електричитета, за елемент запремине dV треба узети $dV = 4\pi r^2 dr$ ($V = 4\pi r^3/3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$).

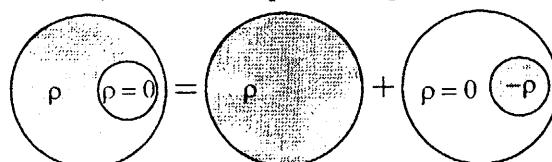
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 a} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}, \quad \Phi = \begin{cases} \frac{\rho_0}{12\epsilon_0 a} (4a^3 - r^3), & r \leq a \\ \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r}, & r \geq a \end{cases}.$$

$$\text{б* } \Phi_a = 11.25 \text{ V}, \Phi_0 = 15 \text{ V}.$$

3.19. Поље у унутрашњости сферс полупречника a једнако је нули, док је ван ње

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r \geq b \end{cases}.$$

3.20. Вектор електричног поља у произвољној тачки простора, па и у унутрашњој сferи полупречника b , може се одредити применом теореме суперпозиције. Задати систем наелектрисања може се посматрати као збир наелектрисања запреминске густине ρ , ограничног сфером полупречника a , и наслектрисања запреминске густине $-\rho$,

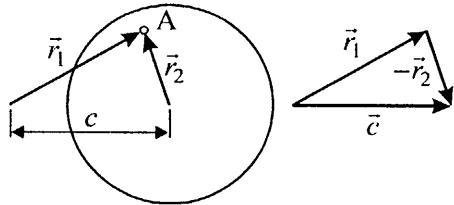


Слика 3.20.а.

ограниченог сфером полуупречника b (слика 3.20.а).

Поље у произвољној тачки А унутар сфере полуупречника b је, према томе,

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{c},$$



Слика 3.20.б.

где је \vec{c} вектор сексцентричитета сфере (слика 3.20.б). Интересантно је да поље у унутрашњости мање сфере (шутиљине) хомогено.

3.21. Позитивна оптерећења на цилиндру су извори линија поља док су њихови понори, одговарајућа негативна наелектрисања, у бесконачности (јер је цилиндар усамљен). Линије поља ће бити радијалне, полазиће од цилиндра и завршавати у бесконачности (слика 3.21.а). Како у унутрашњости цилиндра ($r < a$) нема линија поља очигледно је да је и поље једнако нули, $E = 0$.

За одређивање електричног поља ван цилиндра ($r \geq a$) применићмо Гаусов закон. Кроз тачку у којој желимо да израчунајмо поље, а која се налази на растојању r од осе цилиндра, поставићемо затворену површину S и одредити излазни флукс вектора електричног поља кроз њу,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

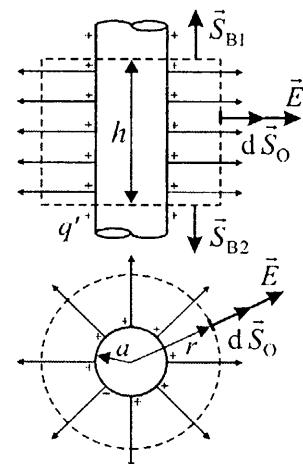
Површина S је коаксијални цилиндар висине h и полуупречника r .

Укупан излазни флукс кроз ову површину може се одредити као збир флуksа кроз базисе и флуksа кроз омотач цилиндра,

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_O} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Флукс кроз базисе је једнак нули јер су вектори површина базиса и вектор електричног поља међусобно нормални (слика). У свакој тачки на површини омотача вектори \vec{E} и $d\vec{S}$ су колинеарни па је $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$. Поред тога, због високог степена симетрије, интензитет вектора електричног поља је исти у свим тачкама омотача и може се (као константа) извучи испред знака интеграције. Према томе, излазни флукс је

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_O} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_O} E dS = E \int_{S_O} dS = ES_O = 2\pi h r E.$$



Слика 3.21.а.

С друге стране, излазни флукс вектора слектричног поља једнак је количнику количине електрицитета обухваћене површином S и диселектричне константе вакуума. Обухваћена количина електрицитета је количина електрицитета која се налази на делу онтерсјеног цилиндра дужине h тако да је

$$\Psi_E = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} = \frac{q'h}{\epsilon_0}.$$

Изједначавањем ова два израза за флукс,

$$2\pi hrE = \frac{q'h}{\epsilon_0},$$

добија се интензитет вектора електричног поља за $r \geq a$,

$$E = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Поље је радијално па коначан израз за вектор слектричног поља гласи

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$

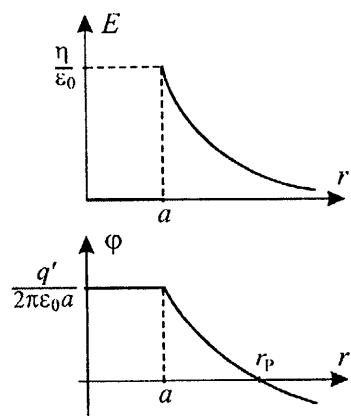
Максимална вредност електричног поља је на површини цилиндра,

$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{h}{h} = \frac{Q}{\epsilon_0 S_{\text{cilindra}}} = \frac{\eta}{\epsilon_0},$$

(Q - количина наелектрисања на делу цилиндра дужине h , S_{cilindra} - површина цилиндра дужине h) где је η површинска густина наслектрисања на цилиндру.

Потенцијал се одређује по дефиницији као линијски интеграл вектора слектричног поља од тачке у којој се потенцијал рачуна (тачке М на растојању r од осе цилиндра) до референтне тачке Р нултог потенцијала на растојању r_p . Како се путања интеграције може произвољно бирати најпогодније је одабрати једну од линија поља. У том случају је $d\vec{l} = d\vec{r}$, па је

$$\Phi = \int_M^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{r_p} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$



Слика 3.21.б.

Како се функција $\vec{E}(r)$ разликује за $r < a$ и за $r \geq a$, то ће се разликовати и функција потенцијала. Према томе, за $r \geq a$ је

$$\varphi = \int_r^P \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^P \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_r^P \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_r^P = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_p}{r}.$$

Вредност потенцијала на површини цилиндра ($r = a$) је

$$\Phi_a = \varphi_{r=a} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_p}{a}.$$

Поље у унутрашњости цилиндра једнако је нули па је потенцијална разлика између било које две тачке унутар цилиндра, односно између било које тачке у унутрашњости цилиндра и његове површине, једнака нули. То значи да су све тачке у унутрашњости цилиндра на потенцијалу његове површине.

Дијаграми $E(r)$ и $\varphi(r)$ приказани су на слици 3.21.б.

~~в~~ 3.22. $E_a = 180 \text{ V/m}$, $E_b = 1.8 \text{ mV/m}$.

~~в~~ 3.23. $q' = 1 \text{ nC/m}$, $E_a = 6 \text{ kV/m}$. ~~в~~ 3.24. $r_{\min} = 1.2 \text{ mm}$.

~~в~~ 3.25. Из познатог напона $U_{bc} = q' \ln(c/b)/2\pi\epsilon_0$, може се одредити q' и затим израчунати $E_a = 1800 \text{ V/m}$.

~~в~~ 3.26. Детаљан поступак решавања дат је у задацима 3.10. и 3.21. Поље унутар цилиндра ($r < a$) и у љусци ($b < r < c$), пошто се ради о проводницима, једнако је нули. Ван проводника ($a \leq r \leq b$ и $r \geq c$) поље је $\vec{E} = q' \hat{r} / 2\pi\epsilon_0 r$, док је тражени напон $U_{ab} = q' \ln(b/a) / 2\pi\epsilon_0$.

~~в~~ 3.27. $\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, & a \leq r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases}$, $\varphi = \begin{cases} q' \ln(b/a) / 2\pi\epsilon_0, & r \leq a \\ q' \ln(b/r) / 2\pi\epsilon_0, & a \leq r \leq b \\ 0, & r \geq b \end{cases}$.

~~в~~ 3.28. Унутар унутрашњег ($r < a$) и ван спољашњег ($r > d$) цилиндра, као и у проводној љусци ($b < r < c$) поље је једнако нули. У прсосталом делу простора ($a \leq r \leq b$ и $c \leq r \leq d$) склопично поље се миси по закону $\vec{E} = q' \hat{r} / 2\pi\epsilon_0 r$. Напон између цилиндара је

$$U_{ad} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{b}{a} + \ln \frac{d}{c} \right).$$

~~в~~ 3.29. Како је метална љуска еквијентенцијална ($U_{bc} = 0$) то из

$$U_{da} = U_{dc} + U_{cb} + U_{ba} = U_{dc} + U_{ba} = 3U_{dc}$$

следи $U_{ba} = 2U_{dc}$, односно $\ln(b/a) = 2\ln(d/c)$, па је $d = 10 \text{ mm}$.

3.30. Детаљан поступак решавања дат је у задацима 3.17. и 3.21.

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}, \quad \Phi = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0} \left(a^2 - r^2 + 2a^2 \ln \frac{r_p}{a} \right), & a \leq r \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_p}{a}, & r \geq a \end{cases}.$$

3.31. а* Поље у унутрашњости цилиндра полу пресечника a једнако је нули, док је ван њега

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - a^2/r \right) \hat{r}, & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \left(b^2 - a^2 \right) \hat{r}, & r \geq b \end{cases}.$$

$$\text{б* } E_A = 0, E_B = 75 \text{ V/m.} \quad \text{в* } U_{AB} = 4.03 \text{ V.}$$

3.32. Приликом примене Гаусовог закона, код израчунавања обухваћене количине електричитета, за елемент запремине dV треба узети $dV = 2\pi hr dr$ ($V = r^2 \pi h \Rightarrow dV = 2\pi hr dr$).

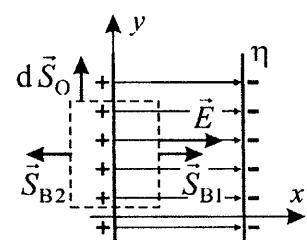
$$\text{а* } \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^3}{4\epsilon_0 a^2} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0 r} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}. \quad \text{б* } E = 5 \text{ V/m.} \quad \text{в* } U_{0a} = 25 \text{ mV.}$$

3.33. Позитивна оптерећења на равни $x = 0$ су извори линија поља, а одговарајући понори су негативна оптерећења на равни $x = d$ (слика 3.33.a). Јасно је да за $x < 0$ и $x > d$ нема поља. Између равни ($0 \leq x \leq d$) поље је хомогено и за његово одређивање применићемо Гаусов закон.

Уочимо затворену површину S у облику цилиндра, произвољног попречног пресека, чији су базиси S_{B1} паралелни равнима а омотач S_O нормалан на њих (Слика). Укупан излазни флукс вектора електричног поља кроз ову затворену површину се може одредити као

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_O} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Флукс кроз површину базиса S_{B2} једнак је нули (јер нема поља), као и кроз површину омотача (јер су у свакој тачки вектор излазне нормале и вектор електричног поља међусобно нормални). Како је поље хомогено, и како су вектори површине базиса S_{B1} и електричног поља колинеарни, излазни флукс вектора електричног поља кроз површину S биће



Слика 3.33.а.

$$\Psi_E = \int_{S_B} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S}_B = ES_B.$$

С друге стране, према Гаусовом закону, овај флукс је

$$\Psi_E = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} = \frac{\eta S_B}{\epsilon_0}$$

(унутар цилиндра је део равни површине S_B наелектрисане наслектрисањем површинске густине η). Изједначавањем ова два израза за флукс, $ES_B = \eta S_B / \epsilon_0$, добија се интензитет вектора електричног поља $E = \eta / \epsilon_0$. Поље је оријентисано у смjerу x – осе па је, коначно,

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \hat{x}.$$

Потенцијал се одређује по дефиницији као линијски интеграл вектора слектричног поља од тачке на растојању x до равни $x = d$ која се налази на нултому потенцијалу. Најпогодније је интеграцију вршити дуж линије поља где је $d\vec{l} = d\vec{x}$ (слика 3.33.б):

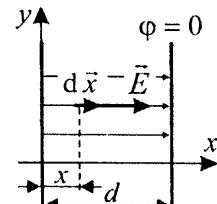
$$\varphi = \int_x^d \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_x^d \frac{\eta}{\epsilon_0} \hat{x} \cdot d\vec{x} = \int_x^d \frac{\eta}{\epsilon_0} d\hat{x} = \frac{\eta}{\epsilon_0} (d - x).$$

Значи, потенцијал линеарно опада од вредности $\eta d / \epsilon_0$ на позитивно наелектрисаној равни до нуле на негативно наслектрисаној равни, што је приказано на слици 3.33.в.

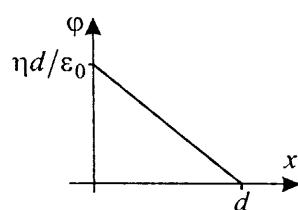
3.34. $\eta = 35.4 \text{ nC/m}^2$.

3.35. Поље у проводној плочи је једнако нули. У простору између равни, ван проводне плоче, вектор јачине електричног поља оријентисан је од позитивно ка негативно наслектрисаној равни а интензитет му је $E = 5 \text{ kV/m}$.

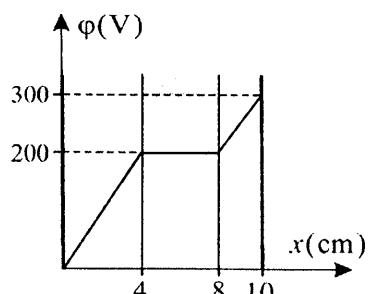
Напон између плоча је $U = 300 \text{ V}$, а дијаграм промене потенцијала приказан је на слици 3.35.



Слика 3.33.б.



Слика 3.33.в.



Слика 3.35.

4. КАПАЦИТИВНОСТ КОНДЕНЗATORA СА ХОМОГЕНИМ ДИЕЛЕКТРИКОМ; ЕНЕРГИЈА И СИЛА

4.1. a* Изрази за вектор јачине електростатичког поља и потенцијал усамљене сфере изведени су у Задатку 3.1. За задате бројне вредности добија се

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r} = k_0 \frac{Q}{a^2} \hat{r} = 10 \hat{r} \text{ kV/m}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = 300 \text{ V}.$$

Капацитивност се одређује по дефиницији,

$$C = \frac{Q}{\varphi_a} = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 a} = 4\pi\epsilon_0 a = \frac{a}{k_0} = 3.33 \text{ pF},$$

док је енергија електростатичког поља сфере,

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \varphi_a^2 = \frac{1}{2} Q \varphi_a = 0.15 \mu \text{J}.$$

6* У хомогеном дислектику, при истом распореду наелектрисања, поље и потенцијал су ϵ_r пута мањи него у вакууму, док је капацитивност ϵ_r пута већа:

$$\vec{E}_d = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r a^2} \hat{r} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{Q}{a^2} \hat{r} = \frac{\vec{E}}{\epsilon_r} = 5 \hat{r} \text{ kV/m}, \quad \varphi_d = \frac{\varphi}{\epsilon_r} = 150 \text{ V}.$$

$$C_d = \frac{Q}{\varphi_{ad}} = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 \epsilon_r a} = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r a = \epsilon_r \frac{a}{k_0} = \epsilon_r C = 6.66 \text{ pF}.$$

Енергија електростатичког поља је $W = 75 \text{ nJ}$.

4.2. Задатак је исти као и задатак 3.8. и може се решити поступком који је описан у задацима 3.7. и 3.8. Међутим, до решења се долази далеко брже коришћењем капацитивности. Максимално поље је на површини лопте и оно мора бити мање од максимално дозвољеног поља,

$$E_{max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{C\varphi_a}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 a \varphi_a}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\varphi_a}{a} \leq \frac{E_{kr}}{ks}.$$

Из последње једначине следи $a \geq ks \varphi_a / E_{kr}$, односно $a_{min} = 20 \text{ mm}$.

4.3. Уочите да потенцијал при коме долази до пробоја не зависи од дислектричне константе, $\varphi_a = aE_{kr} = 450 \text{ kV}$. Вредности оптерећења и енергије су: $Q = 10.8 \mu \text{C}$, $W = 2.43 \text{ J}$.

4.4. Еквипотенцијалне сфере $r = b$ и $r = c$ су концентричне са оптерећеном лоптом. Густина енергије електростатичког поља оптерећене лопте је

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(Q / 4\pi\epsilon_0 r^2 \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

Уколико је позната густина снерије електростатичког поља у некој запремини (у овом случају између сфера $r = b$ и $r = c$) снерија се израчунава као запремински интеграл густине снерије,

$$W = \int_V w dV = \int_b^c \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4r^2 \pi dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_b^c \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{c-b}{bc}.$$

Елемент запремине dV треба да буде такав да у свим његовим тачкама густина енергије буде иста, односно исти интеситет вектора јачине поља ($r = \text{const}$). Овај услов задовољава сферна лјуска полупречника r (чија је површина $4r^2\pi$) и дебљина dr . Или, $V = 4r^3\pi/3 \Rightarrow dV = 4r^2\pi dr$.

4.5. $b = 20 \text{ cm}$, $\phi = 150 \text{ V}$.

4.6. Директном смислом $r = a$ и $r = b$ у познатом изразу за електрично поље у сферном кондензатору добија се

$$E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{k_0 Q}{a^2} = 30 \text{ kV/m} \quad \text{и} \quad E_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{k_0 Q}{b^2} = 7.5 \text{ kV/m}.$$

Напон између електрода се израчунава као линијски интеграл поља од унутрашње до спољашње електроде (најједноставније је интеграцију врпчићи дуж линије поља, $d\vec{l} = d\vec{r}$),

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} = k_0 Q \frac{b-a}{ab},$$

и за конкретне нумеричке вредности износи $U = 900 \text{ V}$.

Капацитивност је, по дефиницији,

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{k_0} \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 13.33 \text{ pF}.$$

Бројна вредност капацитивности се могла и директно израчунати из познатих вредности оптерећења ($Q = 12 \text{ nC}$) и напона ($U = 900 \text{ V}$).

Енергија кондензатора се, такође, израчунава по дефиницији:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = 5.4 \mu\text{J}.$$

4.7. $E_a = 10 \text{ kV/m}$, $E_b = 2.5 \text{ kV/m}$, $U = 300 \text{ V}$, $C = 40 \text{ pF}$, $W = 1.8 \mu\text{J}$.

4.8. а* Капацитивност, онтерећење, интензитет вектора јачине поља на појединим електродама и сисргија кондензатора се израчунавају коришћењем познатих израза и износе:

$$C = 6.67 \text{ pF}, Q = 0.5 \text{ nC}, E_a = 5 \text{ kV/m}, E_b = 1.25 \text{ kV/m}, W = 18.75 \text{ nJ}.$$

Из услова $\Phi_c = U/2$ следи $U_{cb} = U_{ab}/2$, односно

$$\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_c^b \frac{d\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{r^2} \Rightarrow \frac{b-c}{bc} = \frac{1}{2} \frac{b-a}{ba},$$

на је тражени полуупречник $c = 4 \text{ cm}$.

$$6^* C = 13.33 \text{ pF}, Q = 1 \text{ nC}, E_a = 5 \text{ kV/m}, E_b = 1.25 \text{ kV/m},$$

$$W = 37.5 \text{ nJ}, c = 4 \text{ cm}.$$

4.9. Максимално поље је на површини унутрашње елекстроде и оно мора бити мање од максимално дозвољеног поља,

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon a^2} = \frac{CU}{4\pi\epsilon a^2} = \frac{4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} U}{4\pi\epsilon a^2} = U \frac{b}{a(b-a)} \leq \frac{E_{kr}}{ks}.$$

Одавде се лако одређује максимални напон, а након тога и енергија кондензатора (наравно, претходно треба израчунати капацитивност).

$$a^* U_{\max} = 37.5 \text{ kV}, C \approx 7.407 \text{ pF}, W \approx 5.208 \text{ mJ}.$$

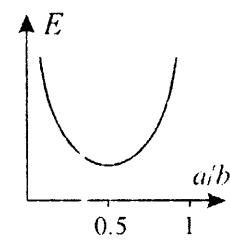
$$6^* U_{\max} = 62.5 \text{ kV}, C \approx 18.518 \text{ pF}, W \approx 36.170 \text{ mJ}.$$

4.10. Из израза за максимално поље, изведеног у прстходном задатку, добија се квадратна неједначина по a . За конкретне броје вредности решење ове неједначине је $0.211 \text{ cm} \leq a \leq 3.788 \text{ cm}$.

4.11. На основу израза за интензитет вектора електричног поља на површини унутрашње елекстроде (задатак 4.9) може се нацртати дијаграм $E_{r=a}(a/b)$, приказан на слици 4.11. Како за $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow b$ функција $E_{r=a}(a/b) \rightarrow \infty$, то значи да у интервалу $a \in (0, b)$ има минимум. Положај минимума одређује се из услова да је први извод функције $E_{r=a}(a/b)$ по променљивој a једнак нули,

$$\frac{d}{da} \left(U \frac{b}{a(b-a)} \right) = 0,$$

што даје $a = b/2$.



Слика 4.11.

4.12. Из услова за однос интензитета вектора поља добија се $b = 3a$, док се из познатог напона и оптерећења кондензатора може израчунати капацитивност.

$$a^* \ a = 3 \text{ cm}, \ b = 9 \text{ cm} \quad b^* \ a = 1 \text{ cm}, \ b = 3 \text{ cm}$$

4.13. $U_{\max} = 27 \text{ kV}, \ b = 4 \text{ cm}, \ c = 6 \text{ cm}, \ W = 0.54 \text{ mJ}.$

4.14. Описани систем на електрисања детаљно је анализиран у задатку 3.10. Изведени су изрази за поље и потенцијал и одређен потенцијал лопте,

$$\Phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} + \frac{1}{c} \right).$$

Капацитивност се одређује по дефиницији,

$$C = \frac{Q}{\Phi_a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{abc}{c(b-a) + ab},$$

што, за задате бројне вредности износи $C \approx 24.69 \text{ pF}$. Енергија је

$$W = \frac{Q^2}{2C} \approx 0.202 \text{ mJ}.$$

Међутим, уколико није потребно израчунавати поље и потенцијал, задатак се може решити на једноставнији начин. На површинама $r = b$ и $r = c$ индукују се електрична оптерећења једнака оптерећењу лопте. У самој љусци (проводнику) нема поља. Стога комплетну љуску можемо избацити и задржати само проводнице површине $r = b$ и $r = c$ (слика 4.14). Да би се очувао услов еквипотенцијалности (све тачке проводне љуске морају бити на истом потенцијалу) између проводних површина $r = b$ и $r = c$ задржаћемо проводну везу означену са pv на слици.

На тај начин проблем се свео на везу два кондензатора. Први кондензатор је сферни, полу-пречника електроде a и b , капацитивности

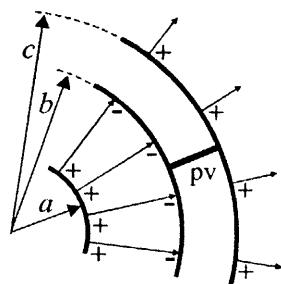
$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

Други кондензатор је усамљена проводна сфера полуупречника c , капацитивности

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 c.$$

Кондензатори су везани редно (оптерећени су истом количином слектрицитета Q) па је еквивалентна капацитивност

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{abc}{c(b-a) + ab}.$$



Слика 4.14.

4.15. a* $C \approx 14.815 \text{ pF}$, $Q = 4 \text{ nC}$, $E = 3.6 \text{ kV/m}$, $W = 0.54 \mu\text{J}$.

б* Видети други начин решавања претходног задатка.

$$C \approx 19.048 \text{ pF}, Q \approx 5.143 \text{ nC}, E \approx 4.629 \text{ kV/m}, W \approx 0.694 \mu\text{J}.$$

4.16. Директном сменом $r = a$ и $r = b$ у познатом изразу за електрично поље у цилиндричном кондензатору добија се

$$E_a = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 a} = 2k_0 \frac{q'}{a} = 900 \text{ V/m} \quad \text{и} \quad E_b = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 b} = 2k_0 \frac{q'}{b} = 300 \text{ V/m}.$$

Напон измсћу електрода се израчунава као линијски интеграл поља од унутрашње до спољашње електроде (најједноставније је интеграцију вршити дуж линије поља, $d\vec{l} = d\vec{r}$),

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = 2k_0 q' \ln \frac{b}{a},$$

и за конкретне нумеричке вредности износи $U \approx 0.989 \text{ V}$.

Подужна капацитивност је, по дефиницији,

$$C' = \frac{q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \approx 50.569 \text{ pF/m}.$$

Бројна вредност подужне капацитивности се могла и директно израчунати из познатих вредности подужног оптерећења ($q' = 50 \text{ pC/m}$) и напона ($U = 0.989 \text{ V}$).

Подужна енергија кондензатора је

$$W' = \frac{1}{2} q' U = \frac{1}{2} C' U^2 = \frac{q'^2}{2C} \approx 24.725 \text{ pJ/m}.$$

4.17. $E_a = 450 \text{ V/m}$, $E_b = 150 \text{ V/m}$, $U \approx 0.4945 \text{ V}$,

$$C' \approx 101.13 \text{ pF/m}, W' \approx 12.362 \text{ pJ/m}.$$

4.18. Максимално поље је на површини унутрашње електроде и оно мора бити мање од максимално дозвољеног поља,

$$E_{\max} = \frac{q'}{2\pi\epsilon a} = \frac{C' U}{2\pi\epsilon a} = \frac{\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} U}{2\pi\epsilon a} = \frac{U}{a \ln(b/a)} \leq \frac{E_{kr}}{ks}.$$

Одавде се лако одређује максимални напон

$$\text{a* } U_{\max} \approx 3148.6 \text{ V} \quad \text{б* } U_{\max} \approx 1574.3 \text{ V}$$

4.19. $b_{\min} = 2.689 \text{ mm}$, $C' \approx 74.14 \text{ pF/m}$, $W' \approx 83.34 \mu\text{J/m}$.

4.20. Видети задатке 4.18. и 4.11. Резултат је $b/a = e$ (е - основа природног логаритма).

4.21. Потенцијална разлика између било које две еквипотенцијалне површине је $U/6$. Пошто је спољашња електрода кондензатора на нултом потенцијалу то значи да је потенцијал треће еквипотенцијалне површине $U/2$. Функција потенцијала у цилиндричном кондензатору је позната (видети задатак 3.27) тако да се може писати

$$\Phi = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln(R_7/r) = \frac{C'U}{2\pi\epsilon} \ln(R_7/r) = \frac{U}{\ln(R_7/R_1)} \ln(R_7/r).$$

Из услова да је за $r = R_4$ потенцијал $\Phi = U/2$ добија се

$$\frac{U}{2} = \frac{U}{\ln(R_7/R_1)} \ln(R_7/R_4) \Rightarrow \ln(R_7/R_4) = \frac{1}{2} \ln(R_7/R_1) \Rightarrow R_4 = 2 \text{ cm}.$$

4.22. Из познатог поља између електрода кондензатора може се израчунати густина енергије електростатичког поља,

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{q'}{2\pi\epsilon r} \right)^2 = \frac{q'^2}{8\pi^2 \epsilon r^2},$$

а одатле енергија и као запремински интеграл густине енергије.

Како се ради о неограниченуј структури има смисла говорити само о подужним величинама. Подужна енергија се одређује као количник енергије у некој цилиндричној запремини дужине h и саме те дужине,

$$W' = \frac{W}{h} = \frac{1}{h} \int w dV.$$

Елемент запремине треба да буде такав да је у свим његовим тачкама густина енергије иста (интензитет вектора јачине поља исти). Овај услов задовољава цилиндрична љуска полупречника r , дебљине dr и дужине h ($dV = S dr = 2r\pi h dr$ или $V = r^2\pi h \Rightarrow dV = 2r\pi h dr$). Уносећи изразе за густину енергије и елемент запремине у израз за подужну енергију добија се (запремина у којој се израчунава подужна енергија, односно врши интеграција, је између површине унутрашње електроде, $r = R_1$, и треће еквипотенцијалне површине $r = R_4$)

$$W' = \frac{1}{h} \int_{R_1}^{R_4} \frac{q'^2}{8\pi^2 \epsilon r^2} 2r\pi h dr = \frac{q'^2}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_4} \frac{dr}{r} = \frac{q'^2}{4\pi\epsilon} \ln \frac{R_4}{R_1} = \frac{q'^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_4}{R_1}.$$

За задате бројне вредности је $W' \approx 0.208 \mu \text{J/m}$.

Задатак се може решити на једноставнији начин, без одређивања поља и интеграције густине енергије, ако се има у виду ионашање проводника у електростатичком пољу, као и задаци 3.28. и 4.14.

У електростатичком пољу гранични услови на површини проводника и еквипотенцијалној површини су идентични - све тачке се налазе на истом потенцијалу, а вектор јачине електричног поља је нормалан на површину. То значи да еквипотенцијалну површину можемо заменити проводном површином која се налази на истом потенцијалу.

Уместо еквипотенцијалне површине $r = R_4$ убацимо веома танку (бесконачно танку) проводну фолију. У систему се неће ништа изменити - спектар поља, оптерећење и капацитивност кондензатора, као и све остале величине остају непромењени. Сада применимо поступак описан у задатку 4.14. и приказан на одговарајућој слици. Добијамо два цилиндрична кондензатора (редно везана) оптерећена истим подужним наелектрисањем q' . Подужна капацитивност кондензатора са електродама популупречника R_1 и R_4 је

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(R_4/R_1)},$$

тако да му је подужна енергија

$$W' = \frac{q'^2}{2C'} = \frac{q'^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_4}{R_1}.$$

4.23. Сила се одређује методом виртуелних помераја. Како је капацитивност кондензатора $C = C'L$, померањем унутрашње електроде за Δx она ће се смањити за $\Delta C = C'\Delta x$ (јер се за Δx смањује ефективна дужина кондензатора), а самим тим смањиће се и енергија кондензатора,

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}U^2(C_2 - C_1) = \frac{1}{2}U^2C'((L - \Delta x) - L) = -\frac{1}{2}U^2C'\Delta x,$$

тако да је сила

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{1}{2}U^2C' = \frac{\pi\epsilon_0U^2}{\ln(b/a)}.$$

4.24. Применићемо већ познате изразе за раван кондензатор:

$$\eta = \epsilon_0E \approx 885 \text{ nC/m}^2, \quad Q = \eta S \approx 4.425 \text{ nC}, \quad U = Ed = 10 \text{ V},$$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \approx 442.5 \text{ pF} \quad \text{или} \quad C = \frac{Q}{U} \approx 442.5 \text{ pF}.$$

4.25. $\eta \approx 1.77 \mu \text{C/m}^2, Q \approx 8.85 \text{ nC}, C \approx 885 \text{ pF}.$

- 4.26.** $W = 10.84 \text{ mJ}$, $E = 1 \text{ MV/m}$, $Q = 4.3365 \mu\text{C}$,
 $W' = 5.42 \text{ mJ}$, $E' = 0.5 \text{ MV/m}$, $Q' = 2.1683 \mu\text{C}$.

- 4.27.** $E = E_1 = 400 \text{ kV/m}$, $W = 0.8496 \text{ mJ}$, $W_1 = 1.6992 \text{ mJ}$, $\Delta U = 2 \text{ kV}$.

- 4.28.** Пошто је кондензатор искључен са извора ($Q = \text{const}$), рад који се изврши приликом размицања електрода одлази на повећање енергије електростатичког поља кондензатора:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{(\eta S)^2}{2\epsilon_0 S} ((d + \Delta x) - d) = \frac{\eta^2 S}{2\epsilon_0} \Delta x \approx 0.452 \text{ pJ}.$$

- 4.29.** У почетном стању капацитивност кондензатора је C_0 , напон на њему U_0 , а његово оптерећење и енергија

$$Q_0 = U_0 C_0 = 3 \text{ nC} \quad \text{и} \quad W_0 = \frac{1}{2} Q_0 U_0 = 450 \text{ nJ}.$$

Промсном растојања између слектрода кондензатора његова капацитивност се мења по закону

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{x} \cdot \frac{d}{d} = \frac{d}{x} \epsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{d}{x} C_0.$$

a* Како је прекидач отворен оптерећење кондензатора се не може менјати, $Q = Q_0 = 3 \text{ nC}$. Због повећања растојања између електрода капацитивност се смањује од вредности C_0 на вредност $2C_0/3$. Напон

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C_0 d/x} = \frac{Q_0}{C_0} \frac{x}{d} = U_0 \frac{x}{d}$$

расте до вредности $U = 1.5U_0 = 450 \text{ V}$, а енергија

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} Q_0 U_0 \frac{x}{d} = W_0 \frac{x}{d}$$

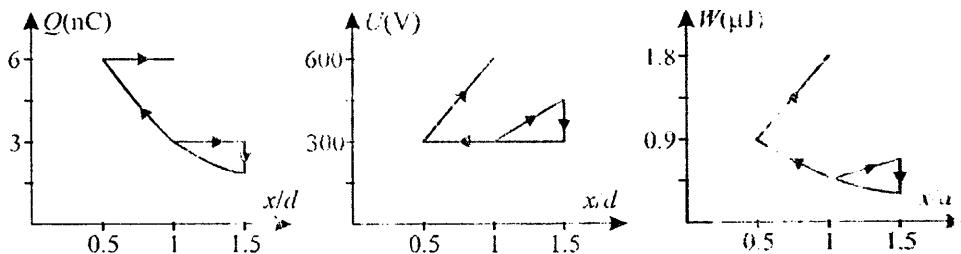
до вредности $W = 1.5W_0 = 675 \text{ nJ}$.

b* Затварањем прекидача напон на кондензатору се смањује на вредност напона извора напајања, $U = U_0 = 300 \text{ V}$, његово оптерећење на $Q = U_0 C = 2U_0 C_0/3 = 2Q_0/3 = 2 \text{ nC}$ и енергија на $W = 2W_0/3 = 300 \text{ nJ}$. Треба напоменути да се ове промене не одигравају тренутно (биће анализиране у оквиру области Електрокинетика) или ћемо, за сада, сматрати да до њих долази у тренутку затварања прекидача.

Размицањем слектрода кондензатора његова капацитивност се повећава од вредности $C = 2C_0/3$ до вредности $C = 2C_0$. Напон на кон-

дензатору се не мења и једнак је напону извора, $U = U_0 = 300\text{ V}$. Са повећањем капацитивности расте оптерећење кондензатора до вредности $Q = 2Q_0 = 6\text{ nC}$, као и енергија до вредности $W = 2W_0 = 900\text{ nJ}$.

v* Како је прекидот отворен оптерећер је кондензатора се не може мењати и остаје $Q = 2Q_0 = 6\text{ nC}$. Капацитивност се смањује од вредности $C = 2C_0$ на вредност $C' = C_0$, па напон расте од вредности $U = U_0$ до вредности $U = Q/C_0 = 2Q_0/C_0 = 2U_0 = 600\text{ V}$ а енергија до вредности $W = QU/2 = 4Q_0U_0 = 4W_0 = 1.8\mu\text{J}$.



Слика 4.29.

Дијаграми $Q(x)$, $U(x)$ и $W(x)$ приказани су на слици 4.29.

v 4.30. До резултата за максималну количину електричног струја и максималну енергију долази се коришћењем познатих израза

$$E_{\max} = \frac{E_{\text{kr}}}{ks} = \frac{\eta_{\max}}{\epsilon} \Rightarrow \eta_{\max} = \epsilon \frac{E_{\text{kr}}}{ks} \Rightarrow Q_{\max} = S\eta_{\max} = \epsilon S \frac{E_{\text{kr}}}{ks}$$

$$U_{\max} = dE_{\max} = d \frac{E_{\text{kr}}}{ks} \Rightarrow W_{\max} = \frac{1}{2} Q_{\max} U_{\max} = \frac{1}{2} \epsilon S d \left(\frac{E_{\text{kr}}}{ks} \right)^2.$$

Резултат за максималну енергију се може добити и на други начин. Максимална густина енергије је

$$w_{\max} = \frac{1}{2} \epsilon E_{\max}^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{E_{\text{kr}}}{ks} \right)^2$$

а, пошто је поље хомогено, енергија се израчунава једноставним множењем густине енергије и запремине међускелектродног простора (простора у коме постоји поље), $V = Sd$.

$$\text{a* } Q_{\max} \approx 0.398\mu\text{C}, W_{\max} \approx 0.597\text{ mJ}$$

$$\text{б* } Q_{\max} \approx 3.186\mu\text{C}, W_{\max} \approx 9.558\text{ mJ}.$$

v 4.31. a* $E \approx 28.24\text{ kV/m}$, $U \approx 141.2\text{ V}$, $C \approx 70.8\text{ pF}$, $W \approx 706\text{ nJ}$.

6* Убацивањем металне плоче оптерећење кондензатора се неће променити, а самим тим ни површинска густина наелектрисања на електродама. Поље на површини електрода мора да задовољи гранични услов ($E = \eta/\epsilon_0$), што значи да остаје исто као и пре убацивања плоче.

Поље у проводној плочи мора бити једнако нули. На њеним површинама се издвајају индукована слектрична оптерећења, исте вредности као и на електродама кондензатора, која представљају додатне изворе и поноре линија поља. У остатку међуелектродног простора кондензатора поље је хомогено и једнако је пољу на површини електрода (слика 4.31.а).

Напон између електрода кондензатора се лако израчунава (напон у хомогном пољу) и износи

$$U = Ed_1 + 0 \cdot d_2 + E(d - d_1 - d_2) = E(d - d_2) \approx 84.7 \text{ V}.$$

Мада се нумеричка вредност капацитивности може лако израчунати по дефиницији на основу познатих вредности оптерећења и напона, $C = Q/U \approx 118.06 \text{ pF}$, извешћемо и израз за њено одређивање преко димензија кондензатора:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E(d - d_2)} = \frac{\eta S}{\eta(d - d_2)/\epsilon_0} = \epsilon_0 \frac{S}{d - d_2}.$$

Уколико није потребно израчунавати поље и напон, до израза за капацитивност се могло доћи и на једноставнији начин, описан у задатку 4.14. Уместо металне плоче у којој нема поља могу се задржати само осма танка проводна фолије (површине плоче) на којима се налазе индукована слектрична оптерећења (слика 4.31.б). Фолије морају бити спојене проводником да би биле на истом потенцијалу. На тај начин се добија редна веза два кондензатора капацитивности

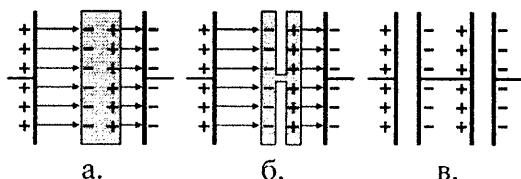
$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{(d - d_1 - d_2)},$$

чија је еквивалентна капацитивност

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d - d_2}.$$

Енергија овог кондензатора је $W \approx 423 \text{ nJ}$.

4.32. Поље у кондензатору ће се повећати на вредност E_1 како би се задовољио услов $U = Ed = E_1(d - d_2)$, значи за 66.67% у односу на E . За исти процес ће се повећати и η , а самим тим и Q .



Слика 4.31.

4.33. $C = 2C_0$, значи да не зависи од x . До овог резултата се лако долази на основу разматрања из задатка 4.31.

4.34. За одређивање силе можемо искористити образац добијен методом виртуелних помераја,

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} \Big|_{U=\text{const}} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2} \approx 398.25 \mu\text{N}.$$

4.35. Кондензатор се, док је био прикључен на извор напајања, оптеретио количином електричног струја

$$Q = CU = \epsilon_0 \frac{S}{d} U \approx 7.965 \text{nC}.$$

Ово оптерећење на електродама кондензатора остаје и након његовог искључивања са извора, тако да је

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \Big|_{Q=\text{const}} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \approx 398.25 \mu\text{N}.$$

Јасно је да су решења два последња задатка иста јер је сила између електрода кондензатора последица њиховог оптерећења, а оно је исто у оба случаја.

4.36. $F = \epsilon_0 S U^2 / 2d^2 \Rightarrow S = 2Fd^2 / \epsilon_0 U^2 = 200 \text{ m}^2$.

Апсурдан резултат! Замислите кондензатор тих димензија. Овај задатак није погрешно решен, већ су намерно дати такви нумерички подаци како бисте уочили ред величине електростатичких сила.

4.37. Када се кондензатор прикључи на извор напона U опруга ће се истегнути за x , што значи да на електроде, при растојању $(d-x)$, делује привлачна сила која је једнака сили опруге,

$$F = cx$$

На основу познате силе између електрода може се одредити напон U на који је кондензатор прикључен:

$$F = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d-x)^2} \Rightarrow U = (d-x) \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}} = (d-x) \sqrt{\frac{2cx}{\epsilon_0 S}} \approx 470 \text{ V}.$$

4.38. Сила F се одређује методом виртуелних помераја. Пре померања електроде за Δx (Слика 4.38) енергија кондензатора је

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{\epsilon_0 ab U^2}{2d},$$

а по извршеном померању

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{\epsilon_0 a(b - \Delta x) U^2}{2d}$$

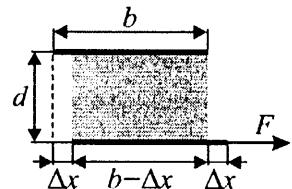
пошто се променила ефективна површина електрода кондензатора са $S_1 = ab$ на $S_2 = a(b - \Delta x)$.

Промена енергије је

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{\epsilon_0 a \Delta x U^2}{2d},$$

тако да је

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\epsilon_0 a U^2}{2d} = 44.25 \mu N.$$



Слика 4.38.

5. СПРЕЗАЊЕ КОНДЕНЗАТОРА

5.1. Еквивалентна капацитивност ове редне везе (слика 5.1.) је

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 8 \text{ nF}.$$

У случају редне везе оптерећење кондензатора је исто,

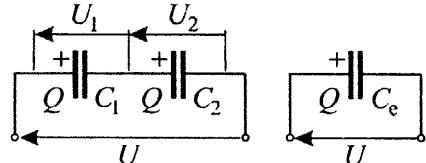
$$Q = C_e U = 1.2 \mu C,$$

на су напони на појединим кондензаторима

$$U_1 = Q/C_1 = 50 \text{ V} \quad \text{и} \quad U_2 = Q/C_2 = 100 \text{ V},$$

и њихове енергије

$$W_1 = Q U_1 / 2 = 30 \mu J \quad \text{и} \quad W_2 = Q U_2 / 2 = 60 \mu J.$$



Слика 5.1.

5.2. Пре размицања електрода је

$$Q = 60 \text{ pC}, U_1 = 10 \text{ V}, U_2 = 20 \text{ V}, W_1 = 300 \text{ pJ}, W_2 = 600 \text{ pJ}.$$

Размицањем електрода кондензатора C_1 на двоструко растојање смањује се његова капацитивност на вредност $C'_1 = C_1 / 2 = 3 \text{ pF}$, па је

$$Q' = 45 \text{ pC}, U'_1 = U'_2 = 15 \text{ V}, W'_1 = W'_2 = 337.5 \text{ pJ}.$$

Оптерећење кондензатора се смањило, $\Delta Q = Q' - Q = -15 \text{ pC}$, док су промене напона и енергија кондензатора

$$\Delta U_1 = U'_1 - U_1 = 5 \text{ V}, \Delta U_2 = U'_2 - U_2 = -5 \text{ V},$$

$$\Delta W_1 = W'_1 - W_1 = 37.5 \text{ pJ}, \Delta W_2 = W'_2 - W_2 = -262.5 \text{ pJ}.$$

~~5.~~ Када су кондензатори прикључени на извор напона U , њихове оптерећене су:

$$Q_1 = C_1 U = 6 \text{ nC} \quad \text{и} \quad Q_2 = C_2 U = 12 \text{ nC}.$$

Ова оптерећења остају на кондензаторима и након отварања прекидача све док промене растојања изменеју електрода кондензатора C_1 .

Приближавањем електрода кондензатора C_1 на двоструко мање растојање његова капацитивност се повећала на $C'_1 = 2C_1$, а самим тим и еквивалентна капацитивност паралелне везе кондензатора. Како је прекидач отворен, укупна количина електричитета на кондензаторима остаје неизмена, $Q_1 + Q_2$, тако да је напон на њима

$$U' = \frac{Q_1 + Q_2}{C'_e} = \frac{Q_1 + Q_2}{C'_1 + C_2} = 225 \text{ V}$$

на су оптерећења појединачних кондензатора

$$Q'_1 = U' C'_1 = 9 \text{ nC} \quad \text{и} \quad Q'_2 = U' C_2 = 9 \text{ nC}$$

~~5.4.~~ $\Delta Q = -1 \text{ nC}$, $\Delta W = -0.25 \mu \text{J}$.

~~5.5.~~ Повећаће се два пута.

~~5.6.~~ Кондензатори C_2 и C_3 су везни редно и могу се заменити једним еквивалентним кондензатором капацитивности

$$C_{\text{el}} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 2 \text{ nF}.$$

Кондензатор C_{el} је везан паралелно са кондензатором C_1 тако да је еквивалентна капацитивност ове везе кондензатора

$$C_e = C_1 + C_{\text{el}} = 10 \text{ nF}.$$

Комплетан претходни опис начина повезивања кондензатора може се у веома једноставном облику исказати симболичком формулом

$$C_e = C_1 \parallel (C_2 \oplus C_3).$$

Када се ради о одређивању оптерећења и напона кондензатора у некој сложеној вези корисно је пртати низ еквивалентних шема којима се коло поступно упростићава, што ће бити показано код сложенијих задатака. Резултати за ово једноставно коло се лако добијају. Кондензатор C'_1 прикључен је на напон U и његово оптерећење је $Q'_1 = C'_1 U = 240 \text{ nC}$. Кондензатори C_2 и C_3 су везани на ред па им је оптерећење исто, односно $Q_2 = Q_3 = C_{\text{el}} U = 60 \text{ nC}$. Напони су им $U_2 = 10 \text{ V}$ и $U_3 = 20 \text{ V}$.

5.7. Еквивалентна капацитивност је $C_e = C_1 \oplus C_2 \parallel C_3 = 5 \text{ nF}$. Оптерећење сквивалентног кондензатора, а самим тим и кондензатора C_1 и еквивалентног кондензатора који замсњује паралелну везу кондензатора C_2 и C_3 , је $Q_1 = Q_{23} = C_e U = 100 \text{ nC}$. Напон на C_1 је $U_1 = Q_1/C_1 = 10 \text{ V}$, а на паралелној вези C_2 и C_3 $U_{23} = Q_{23}/(C_2 + C_3) = 10 \text{ V}$. Оптерећења ова два кондензатора су $Q_2 = C_2 U_{23} = 60 \text{ nC}$ и $Q_3 = C_3 U_{23} = 40 \text{ nC}$.

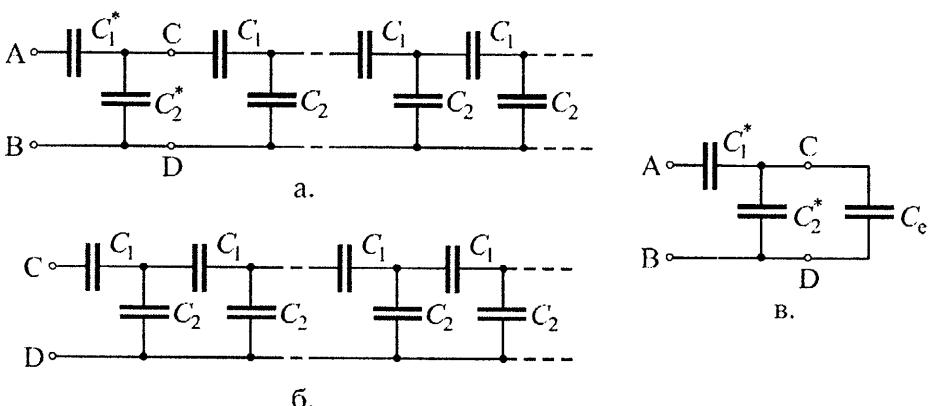
5.8. $C_e = (C_3 \parallel C_4 \oplus C_2) \parallel C_1 = 10 \text{ nF}$, $W = 450 \mu \text{J}$.

5.9. $C_e = ((C_5 \oplus C_6) \parallel C_4 \oplus C_3) \parallel C_2 \oplus C_1 = 5 \text{ nF}$.

5.10. $C_e = ((C_4 \parallel C_5 \oplus C_3) \parallel C_2 \oplus C_1) \parallel C_6 = 10 \text{ nF}$.

5.11. $C_e = ((C_4 \parallel C_5 \oplus C_3) \parallel C_6 \oplus C_7) \parallel C_2 \oplus C_1 = 2 \text{ nF}$.

5.12. Пошто је у вези бесконачно много кондензатора ништа се неће изменити ако се уклоне кондензатори C_1^* и C_2^* (слика 4.13.a), остаје



Слика 5.12.

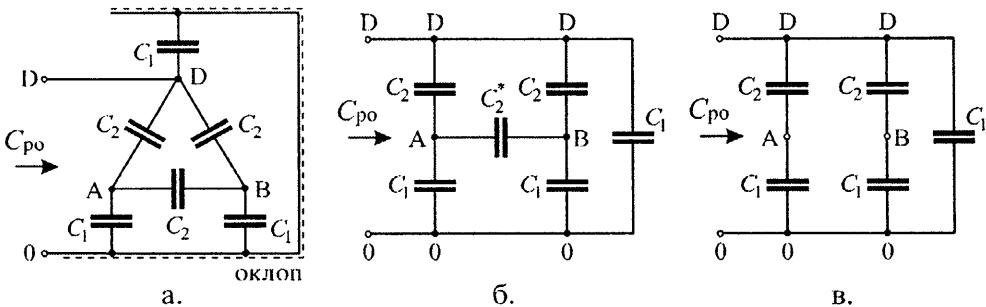
даље бесконачно много кондензатора. Еквивалентна капацитивност између тачака С и D биће у том случају (слика 4.13.б) иста као између тачака А и В. Према томе, веза кондензатора са слике 4.13.а. сквивалентна је вези са слике 4.13.в, тако да је

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_e)}{C_1 + C_2 + C_e}.$$

Решавањем ове квадратне једначине добија се $C_e = 0.137228 \text{ nF}$.

5.13. $C_e = 0.48541 \text{ nF}$.

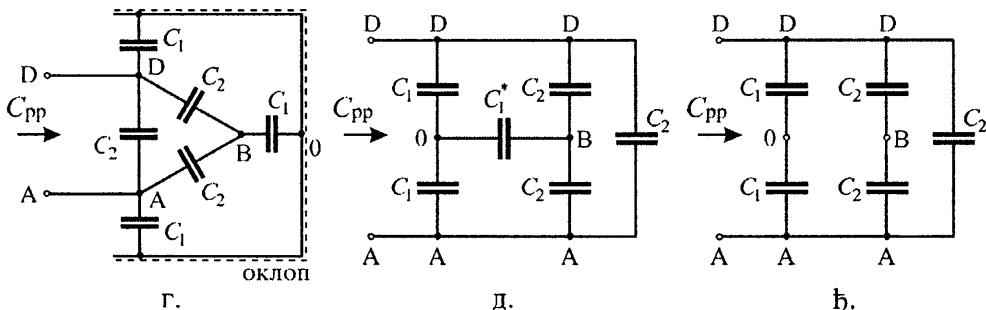
5.14. Када се капацитивност мери између једног од проводника и оклопа кабла (C_{po}) еквивалентна шема капацитивности кабла има изглед као на слици 5.14.а. Ова шема се може прегледније нацртати (слика 5.14.б.). За одређивање еквивалентне капацитивности може се извршити трансфигурација троугла ABD у трокраку звезду, или трокраке звезде ODA у троугао, што се оставља читаоцу да сам уради.



Слика 5.14.

Еквивалентна капацитивност се, у овом случају, може одредити и на знатно једноставнији начин. Наиме, ако се веза кондензатора са слике 5.14.б. прикључи на неки напон U , очигледно је да ће потенцијали тачака А и В, због симетрије, бити једнаки. Пошто је напон на кондензатору C_2^* једнак нули, биће једнака нули и количина електричитета на њему. То значи да кондензатор C_2^* нема утицаја на еквивалентну капацитивност те се може искључити. На тај начин добија се шема као на слици 5.14.в. из које се лако одређује еквивалентна капацитивност:

$$C_{po} = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_1.$$



Слика 5.14.

За одређивање еквивалентне капацитивности између два проводника кабла (C_{pp}) користи се шема на слици 5.14.г. односно 5.14.д. Ако се веза кондензатора са слике 5.14.д. прикључи на напон U потенцијали тачака В и О биће једнаки. Пошто је напон на кондензатору C_1^* једнак

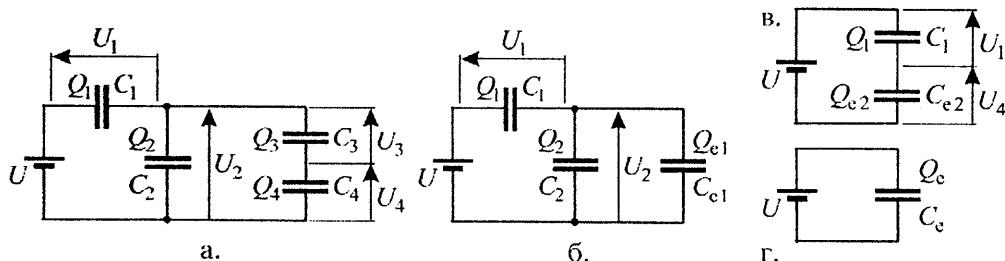
нули и количина електричноста на њему је једнака нули. То значи да сада кондензатор C_1 * нема утицаја на еквивалентну капацитивност и да се може искључити. На тај начин се добија шема као на слици 5.14.ћ, па је

$$C_{pp} = C_2 + \frac{C_2 C_2}{C_2 + C_2} + \frac{C_1 C_1}{C_1 + C_1} .$$

Из израза за C_{po} и C_{pp} може се формирати систем од две једначине по непознатим C_1 и C_2 . Решење је $C_1 = 1.5 \text{ nF}$ и $C_2 = 0.5 \text{ nF}$.

5.15. Веза кондензатора са слике 5.15.а. се може поступно упростити до једног, еквивалентног кондензатора (слика 5.15.г). Вредности појединих капацитивности су:

$$C_{e1} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 2 \text{ nF}, \quad C_{e2} = C_2 + C_{e1} = 10 \text{ nF}, \quad C_e = \frac{C_1 C_{e2}}{C_1 + C_{e2}} = 5 \text{ nF}.$$



Слика 5.15.

Водећи рачуна о томе да је оптерећење редно везаних кондензатора исто, односно да је напон на паралелно везаним кондензаторима исти, може се редом (излазећи од последње шеме у низу) писати

$$Q_e = Q_1 = Q_{e2} = C_e U = 0.3 \mu\text{C}$$

$$U_1 = Q_1 / C_1 = 30 \text{ V}, \quad U_{e2} = U_2 = Q_{e2} / C_{e2} = 30 \text{ V}$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 0.24 \mu\text{C}, \quad Q_{e1} = Q_3 = Q_4 = C_{e1} U_2 = 0.06 \mu\text{C}$$

$$U_3 = Q_3 / C_3 = 20 \text{ V}, \quad U_4 = Q_4 / C_4 = 10 \text{ V}.$$

Енергије појединих кондензатора су:

$$W_1 = 4.5 \mu\text{J}, \quad W_2 = 3.6 \mu\text{J}, \quad W_3 = 0.6 \mu\text{J}, \quad W_4 = 0.3 \mu\text{J}.$$

5.16. $C_e = C_1 \oplus C_2 \parallel (C_3 \oplus C_4 \parallel C_5) = 10 \oplus 6 \parallel (6 \oplus 12) = 10 \oplus 6 \parallel 4 = 10 \oplus 10 = 5 \text{ nF}$

$$Q_1 = 1 \mu\text{C}, \quad Q_2 = 0.6 \mu\text{C}, \quad Q_3 = 0.4 \mu\text{C}, \quad Q_4 = 0.267 \mu\text{C}, \quad Q_5 = 0.133 \mu\text{C}$$

$$U_1 = 100 \text{ V}, \quad U_2 = 100 \text{ V}, \quad U_3 = 66.67 \text{ V}, \quad U_4 = U_5 = 33.33 \text{ V}.$$

5.17. $U_{C2} \approx 19.727 \text{ kV}$, $U_{C4} \approx 9.546 \text{ kV}$, $U_{C6} \approx 5.727 \text{ kV}$.

5.18. $U = 45 \text{ V}$. **5.19.** $U = 200 \text{ V}$.

5.20. Уочите да су кондензатори C_1 и C_3 везани паралелно, а затим на ред са кондензатором C_2 .

$$\text{a}^* Q_1 = Q_3 = 5 \mu\text{C}, U_1 = U_3 = 1 \text{ kV}, W_1 = W_3 = 2.5 \text{ mJ},$$

$$Q_2 = 10 \mu\text{C}, U_2 = 1 \text{ kV}, W_2 = 5 \text{ mJ}.$$

$$\text{б}^* Q'_1 = Q'_3 = 8 \mu\text{C}, U'_1 = U'_3 = 1.6 \text{ kV}, W'_1 = W'_3 = 6.4 \text{ mJ},$$

$$Q'_2 = 16 \mu\text{C}, U'_2 = 0.4 \text{ kV}, W'_2 = 3.2 \text{ mJ}.$$

$$\text{в}^* \Delta Q_1 = \Delta Q_3 = 3 \mu\text{C}, \Delta U_1 = \Delta U_3 = 0.6 \text{ kV}, \Delta W_1 = \Delta W_3 = 3.9 \text{ mJ},$$

$$\Delta Q_2 = 6 \mu\text{C}, \Delta U_2 = -0.6 \text{ kV}, \Delta W_2 = -1.8 \text{ mJ}.$$

5.21. $W = 20 \mu\text{J}$, $W' = 16.875 \mu\text{J}$.

5.22. $W_1 = 2.5 \text{ mJ}$, $W_2 = 1.25 \text{ mJ}$, $W_3 = 1.25 \text{ mJ}$,

$$W'_1 = 2.5 \text{ mJ}, W'_2 = 5/9 \text{ mJ}, W'_3 = 10/9 \text{ mJ}.$$

5.23. Како су кондензатори везани паралелно напон на њима је исти па је $U_{\max} = U_{\max 2} = 100 \text{ V}$ и $Q_{\max} = C_1 U_{\max} + C_2 U_{\max} = 0.7 \mu\text{C}$.

5.24. Максималне количине електрицитета којима се могу оптеретити поједини кондензатори су

$$Q_{\max 1} = C_1 U_{\max 1} = 0.4 \mu\text{C} \quad \text{и} \quad Q_{\max 2} = C_2 U_{\max 2} = 0.5 \mu\text{C}.$$

Како су код редне везе кондензатори оптерећени истом количином електрицитета, то следи да је максимално дозвољено оптерећење $Q_{\max} = Q_{\max 1} = 0.4 \mu\text{C}$, односно максимални напон на који се ова веза сме приклучити $U_{\max} = Q_{\max} / C_1 + Q_{\max} / C_2 = Q_{\max} / C_e = 280 \text{ V}$.

5.25. Максимални дозвољени напон на паралелној вези кондензатора C_2 и C_3 је $U_{\max 2}$ (јер је $U_{\max 2} < U_{\max 3}$). При том напону укупно оптерећење паралелне везе је $Q_{23} = U_{\max 2} (C_2 + C_3) = 9 \text{ nC}$. Ово је уједно и оптерећење кондензатора C_1 , $Q_1 = Q_{23}$. При овом оптерећењу напон на кондензатору C_1 би био $U_1 = Q_1 / C_1 = 300 \text{ V} > U_{\max 1}$. Према томе, максимални напон се мора одредити према кондензатору C_1 , $Q_{\max} = C_1 U_{\max 1}$ и $U_{\max} = Q_{\max} / C_e = 375 \text{ V}$.

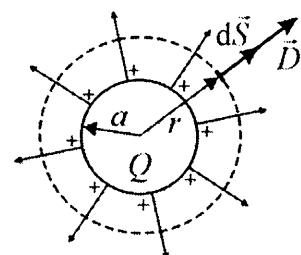
6. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ У МАТЕРИЈАЛНОЈ СРЕДИНИ; ВЕКТОР ЕЛЕКТРИЧНЕ ИНДУКЦИЈЕ

6.1. Генералисани Гаусов закон (Максвелов постулат) се за одређивање вектора електричне индукције у било каквој средини, хомогеној или нехомогеној, примисљује на идентичан начин као и Гаусов закон за одређивање вектора електростатичког поља у вакууму. Стога се читаоцу препоручује да погледа задатак 3.1. и детаљан поступак његовог решавања. Укажимо и на чињеницу да је при истом распореду наелектрисања спектар поља вектора електричне индукције у било каквој средини исти као и спектар вектора електричног поља у вакууму

a* Претпоставимо, а што неће имати никаквог утицаја на поступак решавања задатка, да је лопта оптерећена позитивним наелектрисањем. Позитивна оптерећења на лопти су извори линија поља вектора електричне индукције док су њихови понори, одговарајућа негативна наелектрисања, у бесконачности (јер је лопта усамљена). Линије поља ће бити радијалне, полазиће од лопте и завршавати у бесконачности (слика 6.1.a). Како у унутрашњости лопте ($r < a$) нема линија поља очигледно је да је и електрична индукција једнака нули, $D = 0$.

За одређивање вектора електричне индукције ван лопте ($r \geq a$) применићемо генералисани Гаусов закон. Кроз тачку у којој желимо да израчунамо поље, а која се налази на растојању r од центра лопте, поставићемо затворену површину S и одредити флукс вектора електричне индукције кроз њу,

$$\Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}.$$



Слика 6.1.a.

Површина S је сфера концентрична са оптерећеном лоптом тако да је сваки елемент површине сфере, $d\vec{S}$, колинеаран са вектором електричне индукције (слика). Из разлога потпуне симetriје интеситет вектора електричне индукције је исти у свим тачкама површине S па се, као константа, може извући испред знака интеграције. Тако се добија

$$\Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D dS = D \oint_S dS = DS = 4\pi r^2 D.$$

С друге стране, прсма генералисаном Гаусовом закону, излазни флукс вектора електричне индукције кроз затворену површину S једнак је укупној количини слободних наелектрисања обухваћених том површином,

$$\Psi_E = \Sigma Q = Q.$$

Изједначавањем ова два израза за флукс,

$$4\pi r^2 D = Q,$$

добија се интензитет вектора електричне индукције за $r \geq a$,

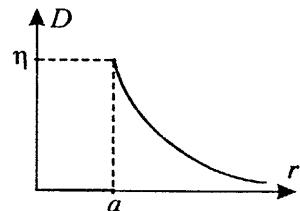
$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Поље је радијално па коначан израз за вектор електричне индукције гласи

$$\vec{D} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Максимална вредност електричне индукције је на површини лопте,

$$D_{\max} = D_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{Q}{S_{\text{lopte}}} = \eta,$$



Слика 6.1.б.

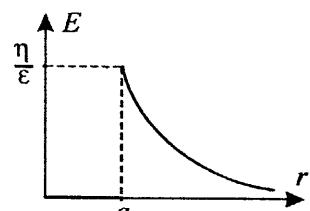
где је η површинска густина наслектрисања на лопти. Дијаграм $D(r)$ приказан је на слици 6.1.б.

б* По одређивању вектора електричне индукције вектор јачине електричног поља се лако одређује из дефиниционе везе,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Максимална вредност јачине електричног поља је на површини лопте,

$$E_{\max} = E_{r=a} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r a^2} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S_{\text{lopte}}} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

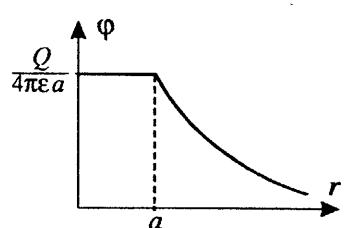


Слика 6.1.в.

Дијаграм $E(r)$ приказан је на слици 6.1.в.

в* Потенцијал се одређује на већ познати начин из функције вектора јачине поља и износи

$$\phi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r a}, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}, & r \geq a \end{cases}$$



Слика 6.1.г.

Дијаграм $\phi(r)$ приказан је на слици 6.1.г.

г* Капацитивност се одређује по дефиницији,

$$C = \frac{Q}{\Phi} = 4\pi\epsilon a = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r a .$$

Упоредите начин решавања и решења овог задатка са начином решавања и решењима задатака 3.1. и 4.1.б.

6.2. Истим поступком као у претходном задатку добијају се изрази за $D(r)$, $E(r)$ и $\phi(r)$.

а* Вектор електричне индукције,

$$\vec{D} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$$

има максималну вредност на површини лопте, $D_{\max} \approx 79.58 \text{ nC/m}^2$. Дијаграм $D(r)$ приказан је на слици 6.2.а.

б* Електрично поље у унутрашњости лопте је једнако нули, док је ван лопте

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r}, & a \leq r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b \end{cases} .$$

Вектор електричног поља на површини лопте има интензитет

$$E_{r=a} = Q / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r a^2 \approx 4.496 \text{ kV/m} .$$

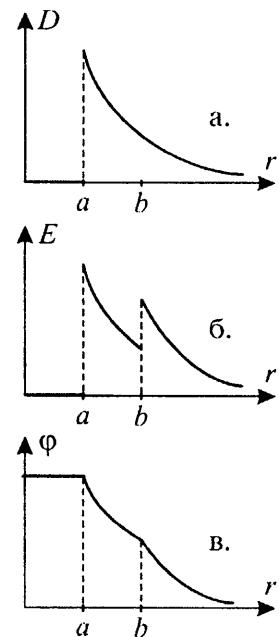
На развојној површини ($r = b$) диелектрика и ваздуха, због присуства везаних електричних оптерећења, поље се скоковито мења од вредности

$$E_{r=b-0} = Q / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r b^2 \approx 1.124 \text{ kV/m}$$

у диелектику испосредно уз развојну површину ($r = b - 0$) на вредност

$$E_{r=b+0} = Q / 4\pi\epsilon_0 b^2 \approx 2.248 \text{ kV/m}$$

у ваздуху непосредно уз развојну површину ($r = b + 0$). Дијаграм $E(r)$ приказан је на слици 6.2.б.



Слика 6.2.

6* Потенцијал се одређује по дефиницији као линијски интеграл поља. При томе, наравно, треба рачунати најпре потенцијал за $r \geq b$ а затим за $a \leq r \leq b$.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b-a}{\epsilon_r a} + 1 \right), & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b-r}{\epsilon_r r} + 1 \right), & a \leq r \leq b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq b \end{cases}$$

Потенцијал раздвојне површине је $\varphi_b = 450 \text{ V}$, док је потенцијал лопте $\varphi_a = 675 \text{ V}$. Дијаграм $\varphi(r)$ приказан је на слици 6.2.в.

Треба уочити да је потенцијал, за разлику од јачине електричног поља, непрекидна функција. На раздвојној површини диселектрика и ваздуха, где се поље скоковито мења, скоковито се мења и први извод функције потенцијала.

в* Уколико је одређен потенцијал лопте капацитивност се лако одређује по дефиницији

$$C = \frac{Q}{\varphi_a} = 4\pi\epsilon_0 b \left/ \left(\frac{b-a}{\epsilon_r a} + 1 \right) \right. = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r ab}{b + a(\epsilon_r - 1)}.$$

Нумеричка вредност капацитивности се може израчунати из овог израза, али и из познатих бројних вредности за Q и φ_a , $C \approx 14.81 \text{ pF}$.

У случају да је потребно израчунати само капацитивност лопте може се применити једноставнији поступак. Раздвојна површина диселектрика и ваздуха је еквипотенцијална па се уместо ње може убацити веома танка проводна фолија, што неће изменити структуру поља (видети задатке 4.22. и 4.14). На тај начин се добијају два редно везана кондензатора - сферни кондензатор полуупречника електрода a и b са диселектриком релативне диселектричне константе ϵ_r , капацитивности

$$C_d = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{ab}{b-a},$$

и усамљсна сфера полуупречника b у ваздуху, капацитивности

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 b.$$

Еквивалентна капацитивност ове редисе везе се лако одређује,

$$C = \frac{C_d C_0}{C_d + C_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r ab}{b + a(\epsilon_r - 1)}.$$

г* При одређивању максималног дозвољеног потенцијала лопте мора се водити рачуна о карактеристикама оба диелектрика. Максимално поље у диелектрику је на површини лопте,

$$E_{\max d} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r a^2} = \frac{C\Phi_a}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r a^2} = \frac{b\Phi_a}{ab + a^2(\epsilon_r - 1)},$$

и оно мора бити мање (или једнако) од максимално дозвољеног поља за диелектрик,

$$E_{\max d} \leq E_{krd}/ks.$$

Одавде следи да је, обзиром на диелектрик, максимални потенцијал

$$\Phi_{a\max d} \leq \frac{E_{krd}}{ks} \frac{ab + a^2(\epsilon_r - 1)}{b} = 600 \text{ kV}.$$

Максимално поље у ваздуху је на раздвојеној површини,

$$E_{\max 0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{C\Phi_a}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{\epsilon_r a \Phi_a}{b^2 + ab(\epsilon_r - 1)},$$

и оно мора бити мање (или једнако) од максимално дозвољеног поља за ваздух,

$$E_{\max 0} \leq E_{kr0}/ks.$$

Одавде следи да је, обзиром на диелектрик, максимални потенцијал

$$\Phi_{a\max 0} \leq \frac{E_{kr0}}{ks} \frac{b^2 + ab(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r a} = 450 \text{ kV}.$$

Максимални потенцијал на који се може довести лопта, а да при томе буду задовољени услови сигурности за оба диелектрика, је

$$\Phi_{\max} = \min \{ \Phi_{\max d}, \Phi_{\max 0} \} = 450 \text{ kV}.$$

6.3. Енергија се може одредити као запремински интеграл густине енергије електростатичког поља у диелектрику. До резултата се долази знатно једноставније ако се има у виду разматрање из претходног задатка под в*:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_d} = 1.125 \mu \text{ J}.$$

6.4. Имајући у виду разматрања у претходна два задатка, а пошто је оптерећење редно везаних кондензатора исто, задати услов ће бити испуњен када је

$$C_d = C_0 \Rightarrow 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 b \Rightarrow b = a(1 + \epsilon_r) = 30 \text{ cm}.$$

6.5. $Q = 10 \text{ nC}$.

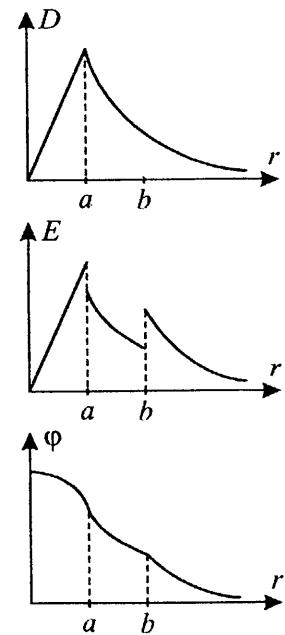
6.6. Најљећу вредност слектрично поље има на површини $r = b$ у диелектрику релативне диелектричне константе $\epsilon_{r2} = 2$. Из услова задатка добија се $Q = 2 \mu \text{ C}$ и $U_{bc} = 12 \text{ kV}$.

6.7. $\phi_a = 9 \text{ kV}$.

6.8. Поступак решавања детаљно је описан у задацима 3.17. и 6.1.

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{\rho a^3}{3r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}, \quad \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \hat{r}, & r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2} \hat{r}, & a < r < b \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \frac{\rho(a^2 - r^2)}{6\epsilon_0 \epsilon_{r1}} + \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0 b} \left(\frac{b-a}{\epsilon_{r2}} + a \right), & r \leq a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 b} \left(\frac{b-r}{\epsilon_{r2} r} + 1 \right), & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq b \end{cases}$$



Слика 6.8.

Дијаграми $D(r)$, $E(r)$ и $\phi(r)$ приказани су на слици 6.8.

6.9. На основу познатих израза за електричну индукцију и јачину електричног поља може се одредити густина енергије електростатичког поља у кугли,

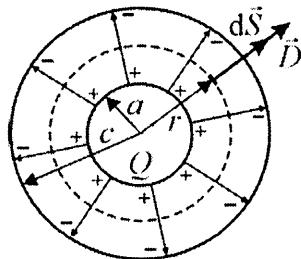
$$w = \frac{1}{2} ED = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{r1} E^2 = \frac{\rho^2 r^2}{16\epsilon_0 \epsilon_{r1}}.$$

Енергија се израчунава као интеграл густине енергије по запремини кугле (одређивање елемента запремине dV објашњено је у задатку 4.4):

$$W = \int_V w dV = \int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{18\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \cdot 4r^2 \pi dr = \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \int_0^a r^4 dr = \frac{2\pi \rho^2 a^5}{45\epsilon_0 \epsilon_{r1}}.$$

6.10. a* Нека је унутрашња електрода кондензатора позитивно наелектрисана. Спектар поља вектора електричне индукције (слика 6.10.а) у простору између електрода кондензатора истоветан је са спектром поља усамљене лопте (задатак 6.1). Линије поља почињу на позитивним наелектрисањима на унутрашњој и завршавају на негативним наслектрисањима на спољашњој електроди (код усамљене лопте у бесконачности). Значи да у унутрашњости унутрашње ($r < a$) и ван спољашње ($r > c$) електрода нема поља. Вектор електричне индукције у простору између електрода ($a \leq r \leq c$) добија се директном применом генерализаног Гаусовог закона (детаљан поступак приказан је у задатку 6.1),

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$



Слика 6.10.а.

Максималну вредност вектор електричне индукције има на површини унутрашње,

$$D_{\max} = Q / 4\pi a^2 = \eta_a ,$$

а минималну на површини спољашње електроде,

$$D_{\min} = Q / 4\pi c^2 = \eta_c .$$

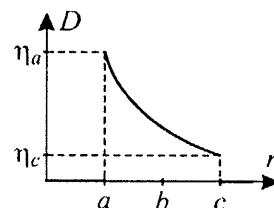
Треба уочити да је интензитет вектора електричне индукције на површини електрода једнак површинској густини наелектрисања на њима.

Дијаграм $D(r)$ приказан је на слици 6.10.б.

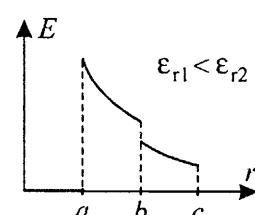
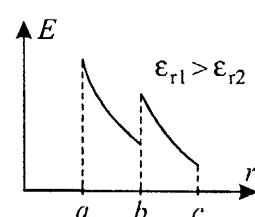
6* У унутрашњости унутрашње ($r < a$) и ван спољашње ($r > c$) електроде кондензатора електрично поље је једнако нули. У простору између електрода одређује се по дефиницији,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r^2} \hat{r}, & a \leq r < b \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2} \hat{r}, & b < r \leq c \end{cases} .$$

На граници два диелектрика долази до скоковите промене јачине електричног поља. Разлог за то је различита површинска густина везаних електричних оптерећења на површинама једног и другог диелектрика. Дијаграм $E(r)$ приказан је на слици 6.10.в.



Слика 6.10.б.

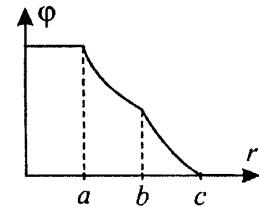


Слика 6.10.в.

в* Уколико је референтна тачка нултог потенцијала у бесконачности онда је спољашња слекстрода кондензатора на нултом потенцијалу (јер ван кондензатора нема поља). Функција потенцијала се одређује по дефиницији,

$$\Phi = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^c \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{c-b}{\epsilon_{r2} c} + \frac{b-a}{\epsilon_{r1} a} \right), & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{c-b}{\epsilon_{r2} c} + \frac{b-r}{\epsilon_{r1} r} \right), & a \leq r \leq b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \frac{c-r}{rc}, & b \leq r \leq c \end{cases}$$



Слика 6.10.г.

Дијаграм $\Phi(r)$ приказан је на слици 6.10.г.

г* Након одређивања потенцијала унутрашње електроде, што је уједно и напон између електрода кондензатора

$$\Phi_{r=a} = U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{c-b}{\epsilon_{r2} c} + \frac{b-a}{\epsilon_{r1} a} \right),$$

капацитивност се одређује по дефиницији

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} abc}{\epsilon_{r1} a(c-b) + \epsilon_{r2} c(b-a)}.$$

Уколико се не тражи израчунавање напона капацитивност је могуће израчунати и на начин описан у задатку 6.2.в. Задати кондензатор се може посматрати као редна веза два сферна кондензатора. Први од њих има слекстродс полупрсчника a и b и дислекстрик релативис диелектричес константе ϵ_{r1} . Други кондензатор има електроде полупрсчнике b и c и диелектрик релативне диелектричне константе ϵ_{r2} . Капацитивности ових кондензатора су

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{ab}{b-a} \quad \text{и} \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{bc}{c-b},$$

па је еквивалентна капацитивност њихове редне везе

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} abc}{\epsilon_{r1} a(c-b) + \epsilon_{r2} c(b-a)}.$$

 6.11. Поље је најјаче за $r = a$. $Q = 55.55 \text{ nC}$, $U \approx 917 \text{ V}$.

6.12. Максимални напон на који би кондензатор смео да се прикључи обзиром на први диелектрик је $U_{\max 1} \approx 122.2 \text{ kV}$, а обзиром на други $U_{\max 2} \approx 146.7 \text{ kV}$. Значи, $U_{\max} \approx 122.2 \text{ kV}$.

6.13. $U_{\max} \approx 140 \text{ kV}$. **6.14.** $\epsilon_r = 3$, $E'_{r=a} = 100 \text{ kV/m}$.

6.15. $d = 2 \text{ cm}$, $E_{\max} = E_{r=a} = 45 \text{ kV/m}$.

6.16. Нека је капацитивност кодензатора пре испуштања течног диелектрика C_1 , а након испуштања C_2 . Однос поља на унутрашњој слекетроди пре (E_{a1}) и након (E_{a2}) испуштања диелектрика даје однос ових капацитивности,

$$\frac{E_{a1}}{E_{a2}} = \frac{Q_1/4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}a^2}{Q_2/4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}a^2} = \frac{C_1 U}{C_2 U} = \frac{C_1}{C_2} = 2.$$

Из односа поља на спољашњој електроди,

$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{Q_1/4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}a^2}{Q_2/4\pi\epsilon_0a^2} = \frac{Q_1}{\epsilon_{r2}Q_2} = \frac{C_1 U}{\epsilon_{r2}C_2 U} = \frac{C_1}{\epsilon_{r2}C_2} = \frac{1}{3},$$

добија се непозната дислектрична константа $\epsilon_{r2} = 3C_1/C_2 = 6$.

6.17. Како су напони U_{AB} и U

$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b - r_A}{\epsilon_{r1} r_A} + \frac{r_B - b}{\epsilon_{r2} r_B} \right) \text{ и}$$

$$U = \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b - a}{\epsilon_{r1} a} + \frac{c - b}{\epsilon_{r2} c} \right),$$

то се на основу познате вредности U_{AB} добија $U = 340 \text{ V}$.

6.18. Вектор електричне индукције у кондензатору не зависи од диелектрика и одређен је раније. Релативна диелектрична константа линсарно расте са растојањем r од центра кондензатора и мења се по закону $\epsilon_r = r/a$ (једначина правс кроз две тачке). Вектор јачине електричног поља у кондензатору је, према томе,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r/a) r^2} \hat{r} = \frac{a Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r}.$$

Напон између слекетрода кондензатора се одређује по дефиницији,

$$\Phi = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{2a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{2a} \frac{aQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr = \frac{aQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2r^2} \right) \Big|_a^{2a} = \frac{3Q}{32\pi\epsilon_0 a},$$

тако да је капацитивност

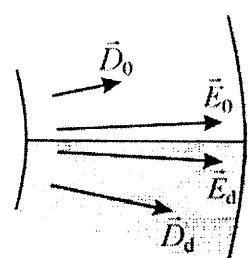
$$C = Q/U = 32\pi\epsilon_0 a/3.$$

Како је капацитивност истог кондензатора без диелектрика

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 ab/(b-a) = 8\pi\epsilon_0 a,$$

тражени однос је $C_0/C = 3/4$.

6.19. У овом случају линије поља тангирају раздвојну површину два дислектика. Како, према граничним условима, тангенијална компонента вектора јачине електричног поља остаје непромењена на граници два диелектрика, то значи да ће вектор јачине слектричног поља (слика 6.19.a) у обе средине (на истом растојању од центра кондензатора) имати исти интензитет, $E_0 = E_d$. До закључка да је структура електричног поља у оба диелектрика иста могло се доћи и на други начин. Наиме, како су спектроде екви-потенцијалне (проводници), линијски интеграл вектора јачине електричног поља од једне до друге електроде кондензатора (напон) мора бити исти без обзира на то кроз коју средину се врши интеграција.



Слика 6.19.a.

Пошто јачина слектричног поља не зависи од средине, мора се разликовати електрична индукција,

$$E_0 = E_d = E \Rightarrow \frac{D_0}{\epsilon_0} = \frac{D_d}{\epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow D_d = \epsilon_r D_0.$$

Значи, на истом растојању од центра кондензатора слектрична индукција у дислектику ће бити ϵ_r пута већа него у вакууму. То важи и за површине електрода (електрична индукција на површини проводника једнака је површинској густини наелектрисања): на делу електрода у диелектрику површинска густина наелектрисања ће бити ϵ_r пута већа него на делу електрода у вакууму, $\eta_d = \epsilon_r \eta_0$.

Унутар унутрашње и ван спољашње сфере нема поља. За одређивање вектора електричне индукције у простору између електрода применићемо генералисани Гаусов закон. Затворену површину S (концентричну сферу полупречника r), кроз коју се рачуна флукс вектора електричне индукције, можемо поделити на два дела - полусферу S_0 у делу кондензатора без диелектрика и полусферу S_d у делу кондензатора са

дислектриком (слика 6.19.б). Излазни флукс вектора електричне индукције кроз затворену површину S може се израчунати као збир флукса вектора \vec{D} кроз полусфере S_0 и S_d ,

$$\Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_d} \vec{D} \cdot d\vec{S}.$$

У свим тачкама сфере S вектори \vec{D} и $d\vec{S}$ су колинеарни. Такође, у свим тачкама полусфере S_0 вектор електричне индукције има исти интензитет, D_0 , као и у свим тачкама полусфере S_d , али је његов интензитет D_d . Према томе, излазни флукс вектора електричне индукције кроз затворену површину S је

$$\begin{aligned} \Psi_D &= \int_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_d} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_0} D dS + \int_{S_d} D dS \\ &= D_0 \int_{S_0} dS + D_d \int_{S_d} dS = D_0 S_0 + D_d S_d = 2\pi r^2 (D_0 + D_d) \end{aligned}$$

и једнак је обухваћеној количини електричног зарјада Q ,

$$2\pi r^2 (D_0 + D_d) = Q.$$

Ако се у последњи израз унесе веза $D_d = \epsilon_r D_0$ добиће се изрази за интензитет вектора електричне индукције у једној и другој средини

$$D_0 = \frac{Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2} \quad \text{и} \quad D_d = \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2}.$$

Како је вектор електричне индукције може се коначно писати

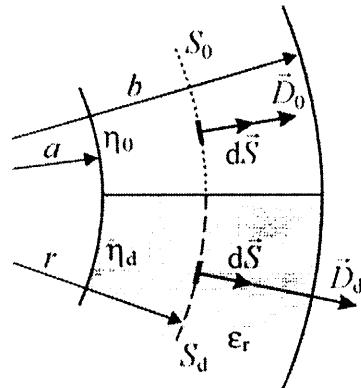
$$\vec{D}_0 = \frac{Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2} \hat{r} \quad \text{и} \quad \vec{D}_d = \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2} \hat{r}.$$

Вектор електричног поља не зависи од средине,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}_0}{\epsilon_0} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1+\epsilon_r) r^2} \hat{r}.$$

Лако се може проверити да се за $\epsilon_r = 1$ добија добро познати израз за поље у сферном кондензатору који за диелектрик има вакуум (ваздух).

Напон између електрода кондензатора се израчунава по дефиницији као линијски интеграл поља од једне до друге електроде,



Слика 6.19.б.

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)r^2} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)} \frac{b-a}{ab},$$

на је капацитивност кондензатора

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r) \frac{ab}{b-a}.$$

Уколико је потребно одредити само капацитивност овог кондензатора може се избечи цео претходни поступак одређивања електричне индукције, јачине електричног поља и паона.

Пошто линије поља тангирају раздвојну површину диелектрика низ пита се неће променити у структури поља ако кондензатор "пресесчимо" по раздвојној површини (слика 6.19.в). Наравно, да би се очувала еквипотенцијалност електрода, између делова једне електроде мора постојати проводна веза (означена са pv на слици). На тај начин посматрани кондензатор се може представити као паралелна веза два кондензатора. Један од њих има дислекстрик релативне диелектричне константе ϵ_r и капацитивност која је једнака половини капацитивности одговарајућег сферног кондензатора,

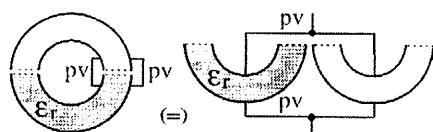
$$C_d = \frac{1}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a}.$$

Капацитивност другог кондензатора је

$$C_0 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 2\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a},$$

тако да је еквивалентна капацитивност њихове паралелне везе

$$C = C_d + C_0 = 2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r) \frac{ab}{b-a}.$$



Слика 6.19.в.

☛ 6.20. $C = 10 \text{ pF}$, $Q = 2 \text{ nC}$,

$$D_{a0} = \eta_{a0} \approx 88.4 \text{ nC/m}^2, D_{ad} = \eta_{ad} \approx 265 \text{ nC/m}^2, E_a = 10 \text{ kV/m},$$

$$D_{b0} = \eta_{b0} \approx 9.82 \text{ nC/m}^2, D_{bd} = \eta_{bd} \approx 29.47 \text{ nC/m}^2, E_b \approx 1.11 \text{ kV/m}.$$

☛ 6.21. $\epsilon_r = 2.5$. ☛ 6.22. $\Delta Q = 8 \text{ nC}$, $\Delta W = 1.2 \mu \text{J}$, $\Delta E_{\max} = 0$.

☛ 6.23. Примена генералисаног Гаусовог закона за одређивање вектора електричне индукције детаљно је описана на примеру лопите у задатку 6.2. Такође је, у задатку 3.21, описана примена Гаусовог закона на цилиндрични проблем. Стoga, при решавању овог проблема, треба имати у виду разматрања из поменутих задатака.

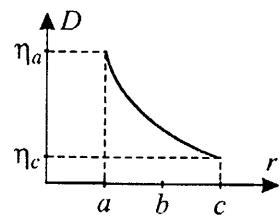
a* У унутрашњости унутрашње и ван спољашње електроде вектор електричне индукције је једнак нули. У простору између електрода мења се по закону

$$\vec{D} = \frac{q'}{2\pi r} \hat{r}$$

и највећу вредност има на унутрашњој слектоди,

$$D_{\max} = D_{r=a} = \frac{q'}{2\pi a} = \eta_a ,$$

где је η_a површинска густина наелектрисања на њој. Дијаграм $D(r)$ приказан је на слици 6.23.a.



Слика 6.23.a.

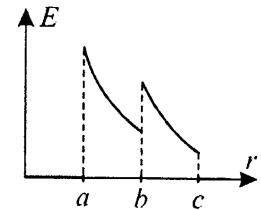
b* И електрично поље је у унутрашњости унутрашње и ван спољашње електроде једнако нули. У простору између електрода одређује се из познате електричне индукције,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} \frac{q'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r} \hat{r}, & a \leq r < b \\ \frac{q'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r} \hat{r}, & b < r \leq c \end{cases} .$$

На граници два диселектрика поље се скоковито мења. На дијаграму $E(r)$, који је приказан на слици 6.23.б, треба уочити да је на граничној површини диселектрика поље веће у средини са мањом диселектричном константом.

b* Потенцијал се одређује као линијски интеграл поља од тачке у којој се рачуна до референтне тачке нултог потенцијала, у овом случају спољашње електроде кондензатора,

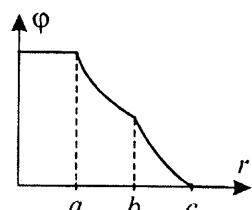
$$\varphi = \int_r^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \frac{q'}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{c}{b} \right), & r \leq a \\ \frac{q'}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{b}{r} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{c}{b} \right), & a \leq r \leq b . \\ \frac{q'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \ln \frac{c}{r}, & b \leq r \leq c \end{cases}$$



Слика 6.23.б.

Дијаграм $\varphi(r)$ приказан је на слици 6.23.в.

r* Напон између електрода кондензатора једнак је потенцијалу унутрашње електроде (јер је спољашња електрода на нултом потенцијалу) тако да је подужна капацитивност



Слика 6.23.в.

$$C' = \frac{q'}{U} = \frac{q'}{\Phi_{r=a}} = q' \left/ \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{c}{b} \right) \right. = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} \ln(b/a) + \epsilon_{r1} \ln(c/b)}.$$

До истог израза за капацитивност може се доћи и ако се овај кондензатор посматра као редна веза два кондензатора полуцречника елекстрода a и b , односно b и c , релативних диелектричних константи ϵ_{r1} , односно ϵ_{r2} , респективно. Проверите!

6.24. $D_{r=a} \approx 3.98 \text{ nC/m}^2$, $E_{r=b+0} = 300 \text{ V/m}$, $U_{AB} \approx 0.182 \text{ V}$.

6.25. $U_{\max} \approx 1.797 \text{ kV}$ (критичан је први диелектрик).

6.26. $U = 200 \text{ V}$. 6.27. $b = 2 \text{ mm}$.

6.28. $d = 20 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 2$.

6.29. Овај кондензатор се може посматрати као паралелна веза два кондензатора (видети задатак 6.19) подужних капацитивности

$$C'_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}{\ln(b/a)} \quad \text{и} \quad C'_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}{\ln(b/a)},$$

тако да је сквивалентна подужна капацитивност

$$C' = C'_1 + C'_2 = \frac{\pi\epsilon_0}{2 \ln(b/a)} (\epsilon_{r1} + 3\epsilon_{r2}) \approx 83.37 \text{ pF/m}.$$

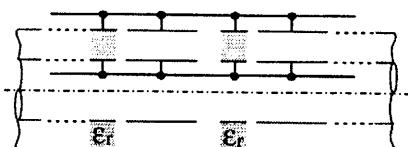
Укупна капацитивност је $C = C'L = 1 \text{ nF}$, а енергија $W = 5 \mu \text{J}$.

6.30. a* Цео кабл се може поделити на низ сегмената (слика 6. 30), од којих сваки садржи један коаксијални кондензатор дужине a , са диелектриком диселектричне константе ϵ , и коаксијални кондензатор дужине b са ваздушним диелектриком.

Сви ови кондензатори су вузани паралелно (једна елекстрода сваког од кондензатора је унутрашњи проводник кабла, а друга спољашњи, тако да је напон између слектрода свих кондензатора исти) а њихове капацитивности су

$$C_1 = C'_1 a = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} a \quad \text{и} \quad C_2 = C'_2 b = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} b.$$

Укупна дужина једног сегмента (два паралелно вузана кондензатора) је $a+b$, а капацитивност $C_1 + C_2$, тако да је подужна капацитивност сегмента



Слика 6.30.

$$C' = \frac{C_1 + C_2}{a+b} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} \frac{\epsilon_r a + b}{a+b} \approx 60 \text{ pF/m},$$

што је уједно и подужна капацитивност целог коаксијалног кабла. Укупна капацитивност кабла је $C = C'L = 0.6 \text{ nF}$.

b* Како су кондензатори C_1 и C_2 везани паралелно, максимални напон на који сме да се прикључи кабл је максимални напон на који сме да се прикључи кондензатор C_2 (поље у оба кондензатора је исто, док је максимално дозвољено поље за диелектрик веће од максимално дозвољеног поља за ваздух). Како је максимална вредност поља на површини унутрашње електроде кондензатора,

$$E_{r=R_1} = \frac{q'_1}{2\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{UC'_1}{2\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{U}{R_1 \ln(R_2/R_1)},$$

то из услова $E_{r=R_1} \leq E_{0\text{kr}}/\text{ks}$ следи $U_{\max} \approx 1.806 \text{ kV}$.

$$\text{b* } W_{\max} \approx 97.8 \mu \text{ J}.$$

6.31. Утицај хомогеног диелектрика на капацитивност кондензатора је десетаљно обраћен раније.

$$\text{a* } W = 2.5 \mu \text{ J}, U = 1 \text{ kV}. \quad \text{б* } \Delta W = -1.667 \mu \text{ J}, \Delta U = -666.7 \text{ V}.$$

6.32. Пре убаџивања диселектрика оптерећење и укупна енергија су били

$$Q = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 2 \text{ nC} \quad \text{и} \quad W = \frac{1}{2} C_e U^2 = 1 \mu \text{ J}.$$

Након убаџивања диелектрика у међуслекстродни простор кондензатора C_2 његова капацитивност се повећа ϵ_r пута, $C'_2 = 2C_2$, тако да је

$$Q' = C'_e U = \frac{C_1 C'_2}{C_1 + C'_2} U = 3 \text{ nC} \quad \text{и} \quad W' = \frac{1}{2} C'_e U^2 = 1.5 \mu \text{ J}.$$

6.33. $U' = 200 \text{ V}$.

6.34. Поље вектора слектричне индукције \vec{D} у простору између електрода равног кондензатора је хомогено, оријентисано од позитивне ка негативној електроди, а његов интензитет је

$$D = \eta = 0.3 \text{ nC/m}^2.$$

Вектор јачине слектричног поља у диелектрику одређује се из дефиниционе везе

$$\vec{E} = \vec{D}/\epsilon = \vec{D}/\epsilon_0 \epsilon_r,$$

тако да је његов интензитет у диелектрицима релативних диелектричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2}

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = 5.65 \text{ V/m} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = 16.95 \text{ V/m},$$

респективно. Напон између електрода кондензатора је линијски интеграл вектора јачине поља од једне до друге електроде,

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 0.0678 \text{ V}.$$

6.35. Интензитет вектора електричне индукције у оба диелектрика је исти и једнак је површинској густини наелектрисања на електродама кондензатора,

$$D = \eta,$$

тако да је интензитет вектора електричног поља у срединама диелектричних константи ϵ_1 и ϵ_2

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}.$$

Како је напон између слсктрода кондензатора

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right) = \frac{\eta}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right),$$

то се за интензитет вектора електричне индукције добија

$$D = \frac{\epsilon_0 U}{d_1/\epsilon_{r1} + d_2/\epsilon_{r2}} \approx 1.01 \mu \text{C/m}^2,$$

што је, уједно и површинска густина наелектрисања на електродама.

Бројна вредност јачине електричног поља у појединим диелектрицима је

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \approx 28.57 \text{ kV/m} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \approx 57.14 \text{ kV/m},$$

Капацитивност кондензатора се може одредити по дефиницији као

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\eta S}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2} = 23 \text{ pF}.$$

Капацитивност кондензатора је могла да се одреди и на већ раније описан начин: као сквивалентна капацитивност редне везе кондензатора са диелектриком ϵ_1 , растојања између електрода d_1 , и кондензатора са дислекстром ϵ_2 , растојања између слсктрода d_2 .

6.36. Да би одредили капацитивност кондензатора оптеретићемо га наслектрисањем Q и израчунати напон између његових електрода. Ради лакшег описивања проблема придружимо кондензатору правоугли координатни систем тако да је позитивна електрода у равни $x = 0$, а негативна у равни $x = d$ (слика 6.36). Нека је за $x = 0$ релативна диелектрична константа $\epsilon_r(x = 0) = 1$, а за $x = d$ $\epsilon_r(x = d) = 4$. У том случају се релативна диелектрична константа дуж x -осе мења по закону:

$$\epsilon_r(x) = \epsilon_r(x = 0) + \frac{\epsilon_r(x = d) - \epsilon_r(x = 0)}{d} x = 1 + \frac{3}{d} x.$$

Ако је оптерећење кондензатора Q , а површина електрода S , интензитет вектора електричне индукције је

$$D = \eta = \frac{Q}{S},$$

а интензитет вектора електричног поља

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{Q}{\epsilon_0 (1+3x/d) S} = \frac{Qd}{\epsilon_0 (d+3x) S}.$$

Електрично поље има правца и смер x -осе, тако да је $\vec{E} = E \hat{x}$.

Потенцијална разлика између електрода је, по дефиницији,

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{x=0}^d \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{x=0}^d E dx = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \int_{x=0}^d \frac{dx}{d+3x}.$$

Последњи интеграл у претходној једначини се лако израчунава сменом $t = d + 3x \Rightarrow dt = 3dx$ ($x = 0 \Rightarrow t = d$, $x = d \Rightarrow t = 4d$),

$$U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \int_{t=d}^{4d} \frac{dt}{3t} = \frac{Qd}{3\epsilon_0 S} \ln 4,$$

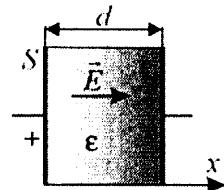
тако да је капацитивност кондензатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{3\epsilon_0 S}{d \ln 4} = \frac{3}{\ln 4} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{3}{\ln 4} C_0 \approx 30 \text{ pF}.$$

6.37. $\epsilon_r = 4$. **6.38.** $E_0 = 150 \text{ kV/m}$, $E_d = 50 \text{ kV/m}$.

6.39. $\epsilon_r = 3$.

6.40. a* $E_0 = 4.5 \text{ MV/m}$, $E_d = 2.25 \text{ MV/m}$. 6* $U'_p = 10 \text{ kV}$.



Слика 6.36.

6.41. a* $U_{\max 1} = 2.5 \text{ kV}$, б* $U_{\max 2} = 5 \text{ kV}$, в* 0.5, г* 2.

6.42. $E_0 = 1.5 \text{ MV/m}$, $E_d = 0.375 \text{ MV/m}$.

6.43. a* $C = \frac{d\epsilon_r}{x + \epsilon_r(d-x)} C_0$, б* $W = \frac{d\epsilon_r}{x + \epsilon_r(d-x)} W_0$,

$$\text{в* } W = \frac{x + \epsilon_r(d-x)}{d\epsilon_r} W_0. \quad 6.44. \quad x = 8 \text{ mm}.$$

6.45. а* Како је у оба диелектрика вектор електричног поља исти, интензитета $E = U/d$, мора се разликовати вектор електричне индукције у појединим диелектрицима, а самим тим и површинска густина наслеђивања на појединим деловима електрода,

$$\eta_1 = D_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{U}{d} \quad \text{и} \quad \eta_2 = D_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{U}{d}.$$

б* Укупно оптерећење кондензатора је

$$Q = \eta_1 \frac{S}{2} + \eta_2 \frac{S}{2} = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \frac{S}{2d} U,$$

па је капацитивност

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \frac{S}{2d} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{S/2}{d}.$$

Очигледно је да се капацитивност могла израчунати као еквивалентна капацитивност паралелне везе два кондензатора са диелектрицима релативних дислекстричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2} и површине електрода $S/2$.

6.46. а* $C' = 250 \text{ pF}$, $U' = 40 \text{ V}$. б* $W = 0.5 \mu \text{J}$, $W' = 0.2 \mu \text{J}$.

6.47. $\Delta C = 0.3C_0$, $\Delta W = -W_0/6$.

6.48. $W \approx 8.83 \mu \text{J}$, $F \approx 4.41 \text{ mN}$.

6.49. $\epsilon_r \approx 2.82$.

6.50. а* $F = 5 \text{ mN}$, б* $F = 1.25 \text{ mN}$.

7. КРЕТАЊЕ НА ЕЛЕКТРИСАНЕ ЧЕСТИЦЕ У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ

7.1. Да би честица била у равнотежи сума сила на њу мора бити једнака нули. Електростатичка сила, $F = QE$, мора бити једнака гравитацијом, mg , али супротног смера. Из ових услова следи $Q \approx -24.5 \text{ pC}$.

7.2. Пребацијући наелектрисану честицу са равни на висину h силе поља изврше рад

$$A = QU = QEh = Q \frac{\eta}{2\epsilon_0} h = 2\mu J.$$

Овај рад одлази на повећање кинетичке енергије честице,

$$A = \Delta W_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Како је честица била без почетне брзине, за брзину у тачки A се добија

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m}} = 20 \text{ m/s}.$$

7.3. Део рада који изврше силе поља одлази на повећање потенцијалне енергије честице а остатак на повећање њене кинетичке енергије,

$$A = \Delta W_k + \Delta W_p \Rightarrow \Delta W_k = A - \Delta W_p = A - mgh \Rightarrow v \approx 19.8 \text{ m/s}.$$

7.4. $v \approx 2.65 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

7.5. Пошто се протон (позитивно наелектрисање) креће из бесконачности ($\phi = 0$) ка позитивном наелектрисању (на било ком растојању од наелектрисања је $\phi > 0$) за рад при кретању наелектрисања у пољу,

$$A = Q_p (\phi_\infty - \phi) = -Q_p \phi,$$

се добија негативна вредност. То значи да се рад врши противу сила поља. Протон ће се кретати ка наелектрисању све док се његова почетна кинетичка енергија не утропи на рад противу сила поља, односно док не стигне на растојање x на коме потенцијал тачкастог наелектрисања задовољава услов

$$\frac{m_p v^2}{2} = Q_p \phi_x \Rightarrow \phi_x = \frac{m_p v^2}{2 Q_p}.$$

Из познатог израза за потенцијал тачкастог наелектрисања може се израчунати растојање на коме је задовољен овај услов, $x \approx 1.38 \text{ mm}$.

✓ 7.6. Са бројем електрона који доспеју на лопту повећава се и њено наелектрисање. Самим тим повећава се и потребан рад који треба извршити противу сила поља да би следећи електрон доспео на лопту. Кинетичка енергија последњег електрона који стиже на лопту једнака је раду који треба извршити противу сила поља,

$$\frac{m_e v_0^2}{2} = Q_e \Phi_a = Q_e k_0 \frac{Q}{a} \Rightarrow Q \approx -0.948 \text{ nC}.$$

✓ 7.7. a* $d \approx 1.26 \text{ mm}$. 6* $W_k = 72.8 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

✓ 7.8. Рад који изврше силе поља између катоде и аноде, $A = eU$, одлази на повећање кинетичке енергије електрона,

$$A = \Delta W_k = \frac{m_e v_a^2}{2} - \frac{m_e v_0^2}{2},$$

одакле се може израчунати брзина електрона у тренутку проласка кроз отвор на аноди,

$$v_a = \sqrt{\frac{2eU}{m_e} + v_0^2} \approx 9.76 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

На путу од аноде до заслона врши се рад противу сила поља на рачун смањења кинетичке енергије електрона,

$$A = eEa = -\Delta W_k = \frac{m_e v_a^2}{2} - \frac{m_e v_z^2}{2}.$$

Из последње једначине може се израчунати брзина електрона непосредно пре удара у заслон,

$$v_z = \sqrt{v_a^2 - \frac{2eEa}{m_e}} \approx 6.53 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

✓ 7.9. $v_a \approx 8.39 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, $v_z \approx 1.11 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.

✓ 7.10. a* Када се наелектрисање Q_l креће од тачке C до тачке O силе поља изврше рад

$$A = Q_l (\phi_C - \phi_O)$$

који одлази на повећање његове кинетичке енергије,

$$A = \Delta W_k = \frac{mv_O^2}{2} - \frac{mv_C^2}{2},$$

где је v_O брзина наелектрисања у тачки O а v_C брзина у тачки C и која је једнака задатој почетној брзини, $v_C = v_0$ (слика 7.10).

Потенцијали у тачкама С и О одређују се једноставно,

$$\varphi_C = k_0 \frac{Q_A}{\sqrt{2}} + k_0 \frac{Q_B}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} k_0 Q$$

и

$$\varphi_O = k_0 \frac{Q_A}{1} + k_0 \frac{Q_B}{1} = 2 k_0 Q,$$

тако да је брзина у координатном почетку

$$v_O = \sqrt{\frac{2W_k}{m} + v_C^2} = \sqrt{\frac{2Q_l(\varphi_C - \varphi_O)}{m} + v_C^2}$$

или, за задате нумеричке податке $v_O = 14.333 \text{ m/s}$.

После проласка наелектрисања Q_l кроз тачку О, у којој је брзина максимална, сила на наелектрисање Q_l мења смер. Брзина наелектрисања, односно његова кинетичка енергија, се смањује јер се врши рад противу сила поља. Наелектрисање Q_l ће се зауставити у тачки D када се његова кинетичка енергија потпуности утрони на рад који се врши противу сила поља,

$$W_k = \frac{mv_O^2}{2} = Q_l(\varphi_D - \varphi_O) = A$$

Из услова овог услова се лако одређује φ_D , а како је

$$\varphi_D = k_0 \frac{Q_A}{\sqrt{y^2 + 1}} + k_0 \frac{Q_B}{\sqrt{y^2 + 1}} = 2 k_0 \frac{Q}{\sqrt{y^2 + 1}},$$

и тражена ордината тачке D, $y = 2.104 \text{ m}$.

7.11. Ради лакшег описивања проблема поставићемо правоугли координатни систем, као на слици 7.11, тако да је $\vec{E} = -E\hat{y}$ и $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$. На електрон ће деловати сила

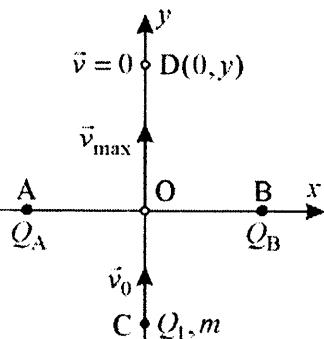
$$\vec{F} = -e\vec{E} = eE\hat{y}$$

која ће му саопштавати убрзане

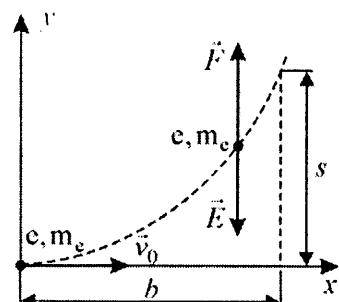
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{eE}{m}\hat{y}.$$

Правац вектора брзине електрона се мења дуж пута. Међутим, брзина се може разложити на две компоненте,

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}.$$



Слика 7.10.



Слика 7.11.

Компонента v_x остаје непроменљивна,

$$v_x = v_0,$$

јер убрзање има само a_y компоненту. Компонента брзине v_y у било ком тренутку се може одредити као:

$$v_y = \int_0^t a_y dt = a_y t + v_{0y}.$$

Како је почетна брзина у правцу y -осе, v_{0y} , била једнака нули на почетку кретања, то је

$$v_y = a_y t = \frac{eE}{m} t.$$

И путања електрона се може разложити на две компоненте:

$$x = \int_0^t v_x dt = \int_0^t v_0 dt = v_0 t + x_0$$

и

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t \frac{eE}{m} t dt = \frac{eE}{2m} t^2 + y_0.$$

Пошто се електрон на почетку кретања налазио у координатном почетку ($x_0 = y_0 = 0$) то се за једначину кретања добија парабола

$$y = \frac{eE}{2m} (x/v_0)^2.$$

Електрон напушта електрично поље када је $x = b$, тако да је

$$s = \frac{eE}{2m} (b/v_0)^2 \approx 0.352 \text{ mm}.$$

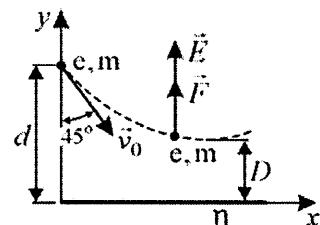
 7.12. И овде ћемо, ради лакшег описивања проблема, поставити правоугли координатни систем. Наелектрисана раван лежи у равни $y = 0$ (слика 7.12) тако да ствара поље

$$\vec{E} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \hat{y}$$

које протону саопштава убрзање које има само a_y компоненту

$$\vec{a} = a_y \hat{y} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e \vec{E}}{m} = \frac{e \eta}{2m\epsilon_0} \hat{y}.$$

Као и у предходном задатку v_x компонента брзине остаје непроменљивна,



Слика 7.12.

$$v_x = v_0 \sin 45^\circ,$$

док је v_y компонента брзине у било ком тренутку кретања

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t \frac{e\eta}{2m\varepsilon_0} dt = \frac{e\eta}{2m\varepsilon_0} t + v_{0y} = \frac{e\eta}{2m\varepsilon_0} t - v_0 \cos 45^\circ.$$

Протон ће променити смер кретања, односно доспети на минимално растојање од равни, у тренутку када је $v_y = 0$, одакле следи

$$t = \frac{2m\varepsilon_0}{e\eta} v_0 \cos 45^\circ.$$

Ордината тачке у којој се протон налази у било ком тренутку може се одредити као

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t \left(\frac{e\eta}{2m\varepsilon_0} t - v_0 \cos 45^\circ \right) dt = \frac{e\eta}{4m\varepsilon_0} t^2 - v_0 t \cos 45^\circ + y_0.$$

Како је протон у тренутку $t = 0$ на висини d изнад наелектрисане равни, то је $y_0 = d$.

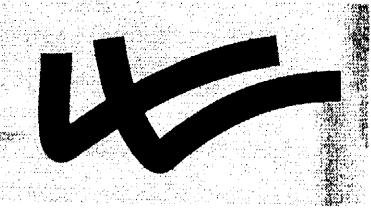
Минимално растојање D на које протон прилази равни добија се када се у последњи израз унесе вредност за време t након кога протон мења смер кретања и $y_0 = d$,

$$D = d - \frac{m\varepsilon_0}{e\eta} (v_0 \cos 45^\circ)^2.$$

Када се протон налази на минималном растојању од равни v_y компонента брзине је једнака нули, па је

$$\bar{v} = v_x \hat{x} = v_0 \cos 45^\circ \hat{x}.$$

За задате бројне податке је: $D = 20 \text{ mm}$, $t = 910 \text{ ns}$, $\bar{v} = 40 \hat{x} \text{ km/s}$.



ДЕО II

ЕЛЕКТРОКИНЕТИКА

8. ЈАЧИНА И ГУСТИНА СТРУЈЕ, ИЗРАЧУНАВАЊЕ ОТПОРНОСТИ И ПРОМЕНА ОТПОРНОСТИ СА ТЕМПЕРАТУРОМ, ОМОВ И ЦУЛОВ ЗАКОН

8.1. $I = 6 \text{ A}$, $J = 4 \text{ MA/m}^2$.

8.2. а* повећаје се за 56.25%, б* смањије се за 30.56%.

8.3. Како је интензитет вектора густине струје

$$J = Q_e N' v,$$

где је Q_e – оптерећење слободних носиоца електричног струје, N' – њихова запреминска густина и v – средња брзина, то из предходне једначине следи:

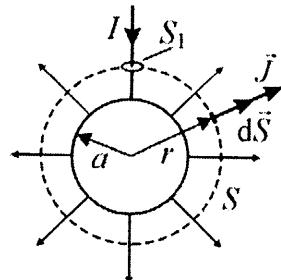
$$v = J/Q_e N'.$$

Пошто су слободни носиоци електричног струје електрони, за њихову средњу брзину се добија

$$v = \frac{J}{e N'} = \frac{3 \cdot 10^6}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 8.5 \cdot 10^{28}} = 2.203 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}.$$

8.4. Због потпуне симетрије проблема линије поља вектора густине струје \vec{J} (струјице) биће радијалне. Да би одредили вектор густине струје у некој тачки на растојању r од центра уземљивача кроз ту тачку поставићемо затворену површину S у облику сфере концентричне уземљивачу (слика 8.4) и применити једначину континуитета,

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$



Слика 8.4.

Површина S се може поделити на два дела: веома малу површину S_l , која је једнака површини попречног пресека проводника кроз који до уземљивача дотиче струја I , и остатак површине $S_2 = S - S_l$. Понито је проводник веома танак то $S_l \rightarrow 0$, па је $S_2 \approx S$. На основу овога, за излазни флукс вектора густине струје кроз затворену површину S може се писати:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_l} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Како је

$$\int_{S_l} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -I,$$

(знак "−" је последица чињенице да је на површини S_l вектор густине струје оријентисан у правцу улазне нормале, то јест струја I утиче у површину S), то на основу једначине континуитета следи:

$$\int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I.$$

У свим тачкама површине S_2 вектори \vec{J} и $d\vec{S}$ су колинеарни. Такође, из разлога симетрије, у свим тачкама површине S_2 вектор густине струје има исти интензитет па је

$$I = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} J dS = J \int_{S_2} dS = JS_2 \approx JS = 4r^2\pi J,$$

тако да је $J = I/4r^2\pi$, односно

$$\vec{J} = \frac{I}{4r^2\pi} \hat{r}.$$

Потенцијал уземљивача одређује се као линијски интеграл електричног поља од површине уземљивача до референтне тачке (рсферсистна тачка нултог потенцијала је у бесконачности),

$$\Phi = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Како је, према Омовом закону у локалном облику,

$$\vec{E} = \vec{J}/\sigma,$$

то се за потенцијал уземљивача добија

$$\Phi = \int_a^\infty \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_a^\infty \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \int_a^\infty \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma a} \approx 159.2 \text{ kV}.$$

8.5. Попито је сваки попречни пресек проводника еквипотенцијалан, то електрично поље у обе средине мора бити исто, то јест $\vec{E}_a = \vec{E}_b = \vec{E}$. На основу Омовог закона у локалном облику следи:

$$\frac{J_a}{\sigma_a} = \frac{J_b}{\sigma_b}.$$

Из познате струје I_a и попречног пресека S_a ,

$$S_a = (a^2 - b^2)\pi,$$

одређује се густина струје J_a , а на основу једначине постављене по Омовом закону у локалном облику и густина струје J_b . Укупна струја је

$$I = I_a + I_b = I_a + J_b S_b = \frac{10}{9} I_a.$$

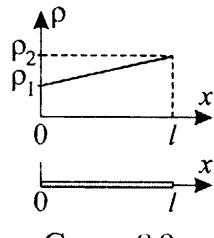
8.6. $S = 20 \text{ mm}^2$. **8.7.** $S \approx 2.63 \text{ mm}^2$. **8.8.** $N = 100$.

8.9. Ради лакшег математичког описивања проблема поставићемо проводник дуж x -осе правоуглог координатног система, тако да му се почетак налази у координатном почетку. У том случају се промена специфичне отпорности дуж проводника (слика 8.9) може изразити као

$$\rho = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} x = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right).$$

Пошто су попречне димензије проводника много мање од његове дужине, он се може сматрати квазилинсичним, па се његова отпорност може израчунати на основу уочитеог израза за израчунавање отпорности,

$$R = \int_0^l \rho \frac{dx}{S}.$$



Слика 8.9.

Сменом израза за ρ у претходном изразу добија се

$$R = \int_0^l \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{S} = \frac{\rho_0}{S} \left(\int_0^l dx + \int_0^l \frac{x dx}{l} \right) = \frac{3}{2} \rho_0 \frac{l}{S} = 1 \Omega.$$

8.10. $R = 4\rho_0 \frac{l}{3S} = 17.778 \Omega$. **8.11.** $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l = 6.18 \text{ m}$.

8.12. Као и у задатку 8.9. поставићемо дати проводник дуж x -осе правоуглог координатног система тако да му се почетак налази у координатном почетку. Површина попречног пресека проводника ће се, у том случају, мењати по закону

$$S = (a + Ax)^2 \pi,$$

где је, због прегледности, уведена ознака $A = (b - a)/l$.

Према уопштеном изразу за израчунавање отпорности, отпорност овог проводника је:

$$R = \int_0^l \frac{\rho dx}{S} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma S} = \frac{1}{\pi \sigma} \int_0^l \frac{dx}{(a + Ax)^2}.$$

Последњи интеграл се једноставно решава увођењем смене $t = a + Ax$ ($dt = Adx$, $x = 0 \Rightarrow t = a$, $x = l \Rightarrow t = b$), тако да се коначно добија

$$R = \frac{l}{\pi a b \sigma} \approx 0.1326 \Omega.$$

8.13. $R = 100\rho_1/a = 0.28 \Omega$.

8.14. а* $R = 100 \Omega$, б* $P = 1 \text{ W}$, в* $P_l = 4 \text{ W}$.

8.15. а* $U = 2 \text{ V}$, $P = 40 \text{ mW}$, б* $P_l = 160 \text{ mW}$.

8.16. а* $P_l = 5 \text{ W}$, б* $P_l = 20 \text{ W}$.

8.17. а* повећаје се за 44%, б* смањиће се за 36%.

8.18. а* смањиће се за 19%, б* повећаје се за 21%.

8.19. $P_l = 0.5 \text{ W}$. 8.20. $U = 80 \text{ V}$.

8.21. Отпорност отпорника на температури θ је

$$R_\theta = U/I = 26 \Omega.$$

Како се отпорност мења са температуром по закону

$$R_\theta = R_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)] = R_0 (1 + \alpha \Delta \theta),$$

то следи да је промена температуре

$$\Delta \theta = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_\theta}{R_0} - 1 \right) = \frac{1}{4.3 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{26}{18} - 1 \right) = 103.36^\circ \text{ C}.$$

Према томе, температура на којој се налази отпорник је $\theta = 123.36^\circ \text{ C}$.

8.22. $\theta = 74.35^\circ \text{ C}$. 8.23. $I_l = 0.756 \text{ A}$

8.24. а* $P = 0.144 \text{ W}$, б* $P = 0.125 \text{ W}$.

8.25. а* $\theta_l = 70^\circ \text{ C}$, б* $\theta_l = -20^\circ \text{ C}$.

8.26. а* $R_\theta = 400 \Omega$, $I_0 = 0.5 \text{ A}$, б* $R_0 = 200 \Omega$, $I_0 = 1 \text{ A}$.

8.27. Мада су познати снага и напон на отпорнику, за решавање овог задатка није потребно израчунавање отпорности. Из услова једнакости снага,

$$U^2/R_0 = U_1^2/R_0 ,$$

следи

$$U_1 = U \sqrt{R_0/R_0} = U \sqrt{1 + \alpha \Delta \theta} ,$$

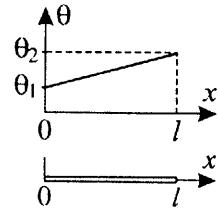
па су тражене вредности

$$\text{a* } U_1 \approx 91.43 \text{ V}, \quad \text{б* } U_1 \approx 118.74 \text{ V} .$$

8.28. $\theta \approx 68.78^\circ \text{C}$.

8.29. Као и у задатку 8.9, и овде се отпорност проводника одређује коришћењем уопштеног израза за израчунавање отпорности. Придруживимо проводнику координатни систем тако да се оса проводника поклапа са x -осом и да је почетак проводника у координатном почетку (слика 8.29). Према уопштеним изразима за израчунавање отпорности отпорност проводника је

$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{dx}{S} ,$$



Слика 8.29.

где је $\rho(x)$ – специфична отпорност проводника на растојању x од координатног почетка,

$$\rho(x) = \rho_0 [1 + \alpha(\theta_x - \theta_0)] ,$$

а θ_x – температура проводника на истом месту. Како се температура мења линеарно дуж проводника, то је

$$\theta_x = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} x = \theta_1 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

и

$$\rho(x) = \rho_0 \left[1 + \alpha \theta_1 \left(1 + \frac{x}{l}\right) - \alpha \theta_0\right] .$$

Сменом последњег израза у уопштеној изразу за израчунавање отпорности добија се

$$R = \int_0^l \rho_0 \left[1 + \alpha \theta_1 \left(1 + \frac{x}{l}\right) - \alpha \theta_0\right] \frac{dx}{S} = \rho_0 \frac{l}{S} \left[1 + \alpha \left(\frac{3}{2} \theta_1 - \theta_0\right)\right] .$$

Како је $R_0 = \rho_0 l / S$, то следи

$$R = R_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{3}{2} \theta_1 - \theta_0\right)\right] = 1.2 \Omega .$$

8.30. Како је

$$\Delta\theta(x) = \theta(x) - \theta_0 = 5\theta_0 x^2 / l^2$$

и

$$\rho(x) = \rho_0 [1 + \alpha \Delta\theta(x)] = \rho_0 \left(1 + 5\alpha\theta_0 x^2 / l^2\right),$$

то се за отпорност проводника од почетка ($x = 0$) до неке тачке на растојању x добија

$$R(x) = \int_0^x \frac{\rho(x) dx}{S} = \frac{\rho_0}{S} \left[\frac{x}{l} + \frac{5\alpha\theta_0}{3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right].$$

Отпорност целог проводника се добија ако се у претходни израз унесе $x = l$, $R = 10.8\Omega$.

8.31. a* $I_0 = 1.33\text{ A}$, $I_\theta = 1.11\text{ A}$, b* $R_1 = 4.725\Omega$, $R_2 = 6.075\Omega$.

8.32. Понито температура задатог проводника линеарно опада са растојањем r од његове осе од вредности θ_2 до вредности θ_1 , то ће температура на растојању r износити

$$\theta = \theta_2 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{a} r.$$

Специфична отпорност биће, такође, функција растојања r од осе проводника и износиће

$$\rho(r) = \rho_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)] = \rho_0 (A r + B),$$

где су A и B константе,

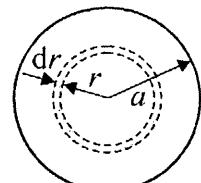
$$A = -\alpha \frac{\theta_2 - \theta_1}{a} = -20 \text{ m}^{-1} \quad \text{и} \quad B = 1 + \alpha(\theta_2 - \theta_0) = 1.04.$$

Сваки елемент проводника у облику цилиндричног слоја (слика 8.29) дужине l , полупречника r и дебљине зида dr , чија је површина попречног пресека

$$dS = 2r\pi dr,$$

имаће проводност

$$dG = \frac{1}{\rho(r)} \frac{dS}{l}.$$



Слика 8.29.

Сви ови елементарни проводници везани су паралелно, тако да је њихова еквивалентна проводност

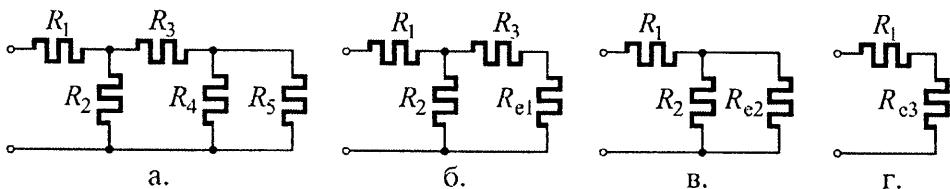
$$G = \int_0^a dG = \int_0^a \frac{1}{\rho(r)} \frac{dS}{l} = \frac{2\pi}{\rho_0 l} \int_0^a \frac{r dr}{Ar + B} = 1.13335 S,$$

односно отпорност задатог проводника $R = 882.34 \text{ m}\Omega$.

9. СПРЕЗАЊЕ ОТПОРНИКА

9.1. Поступно упростимо задату везу отпорника (слика 9.1.a). Отпорници R_4 и R_5 су везани паралелно па се могу заменити једним еквивалентним отпорником (слика 9.1.б) отпорности

$$R_{e1} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 4\Omega.$$



Слика 9.1.

Отпорници R_3 и R_{e1} везани су редно и могу се заменити еквивалентним отпорником R_{e2} (слика 9.1.в) отпорности

$$R_{e2} = R_3 + R_{e1} = 10\Omega.$$

Паралелна веза отпорника R_{e2} и R_2 може се заменити еквивалентним отпорником R_{e3} (Слика 9.1.г) отпорности

$$R_{e3} = \frac{R_2 R_{e2}}{R_2 + R_{e2}} = 5\Omega.$$

Конечно, отпорници R_{e3} и R_1 су везани редно, тако да је еквивалентна отпорност задате везе отпорника

$$R_c = R_{e3} + R_1 = 10\Omega.$$

Комплетан претходни опис начина повезивања отпорника може се веома сажето и једноставно исказати симболичком формулом

$$R_e = (R_5 \| R_4 \oplus R_3) \| R_2 \oplus R_1$$

односно, за задате нумеричке податке,

$$R_e = (12 \| 6 \oplus 6) \| 10 \oplus 5 = (4 \oplus 6) \| 10 \oplus 5 = 10 \| 10 \oplus 5 = 5 \oplus 5 = 10\Omega.$$

9.2. а* $R_c = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 = 18\Omega$, б* $R_e = R_3 \| R_2 \oplus R_1 = 9\Omega$,

$$\text{в* } R_c = (R_2 \oplus R_3) \| R_1 = 4\Omega, \quad \text{г* } R_e = R_1 \| R_2 \| R_3 = 2\Omega.$$

9.3. $R_e = (R_3 \| R_4 \oplus R_2) \| R_1 = 2\text{k}\Omega$.

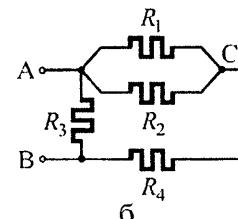
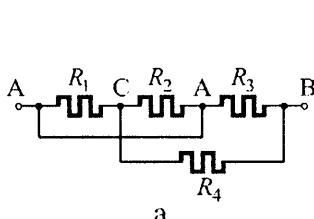
☛ 9.4. $R_c = (R_3 \oplus R_4) \parallel R_2 \parallel R_1 = 1\Omega$.

☛ 9.5. $R_c = ((R_3 \oplus R_4) \parallel R_2 \oplus R_5) \parallel R_1 = 2\Omega$.

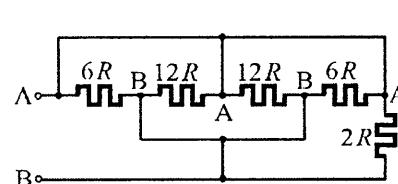
☛ 9.6. $R_e = 3\Omega$. ☛ 9.7. $R_e = 11\Omega$. ☛ 9.8. $R_e = 16\Omega$.

☛ 9.9. Мада је задата веза отпорника на први поглед доста сложена, еквивалентна отпорност се одређује веома једноставно. Означимо све спојеве (тачке) одговарајућим словима, као на слици 9.9.а. При томе тачке, које су кратко спојене, представљају практично једну тачку (налазе се на истом потенцијалу) и носије исту ознаку. Нацртајмо сада све тачке споја (слика 9.9.б.) и између њих прикључимо отпорнике који су били прикључени у оригиналној шеми. Сада се лако може уочити да је сквивалентна отпорност

$$R_e = (R_1 \parallel R_2 \oplus R_4) \parallel R_3 = 2\Omega$$



Слика 9.9.



Слика 9.10.

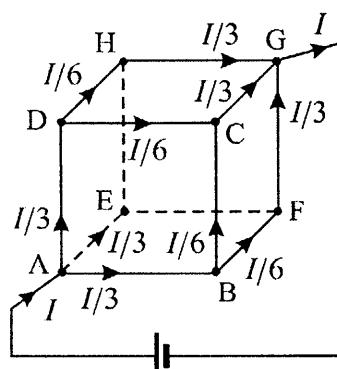
☛ 9.10. Применом истог поступка као у претходном задатку (тачке су означене на слици 9.10) добија се $R_e = R$.

☛ 9.11. Видети поступак решавања задатка 5.12. $R_e = R(1 + \sqrt{5})/2$.

☛ 9.12. $R_e = R(-1 + \sqrt{5})/2$.

☛ 9.13. Уколико би се развила мрежа коцке, при чemu би свака ивица била отпорник отпорности R , добијала би се веома сложена веза отпорника. За одређивање еквивалентне отпорности било би неопходно извршити низ трансфигурација звезда - троугао и обратно. Читаоцу се оставља да то покуша.

Међутим, задатак се може решити и на много једноставнији начин. Прикључимо макету коцке између тачака A и G на неки генератор, као на слици 9.13. Уколико је позната струја I и потенцијална разлика



Слика 9.13.

између тачака А и Г, U_{AG} , тражена еквивалентна отпорност се може одредити и као

$$R_e = U_{AG}/I.$$

Иска у тачку А утиче струја I . Она ће се гранати на три струје: кроз ивицу АВ, ивицу АД и ивицу АЕ. Ове три струје су, због потпуне симетрије, међусобно једнаке, што значи да је свака од њих $I/3$, па је напон између тачака А и В, сходно Омовом закону,

$$U_{AB} = RI/3.$$

Струја $I/3$, која утиче у тачку В кроз ивицу АВ, грана се на струје кроз ивице BF и BC. Због потпуне симетрије ове две струје ће бити међусобно једнаке, тако да ће свака бити једнака половини струје кроз ивицу АВ, то јест $I/6$. Пресма томе, напон између тачака В и С је

$$U_{BC} = RI/6.$$

У тачки С сустичу се струје из ивица BC и DC. Свака од ових струја је $I/6$, па ће струја у ивици CG бити $I/3$, а напон између тачака С и Г

$$U_{CG} = RI/3.$$

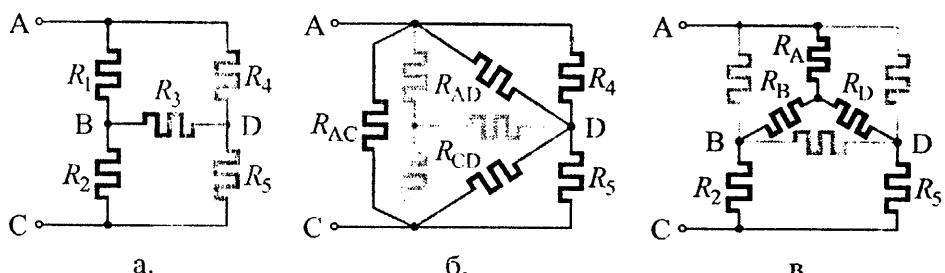
Укупан напон између тачака А и Г је

$$U_{AG} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CG} = 5RI/6,$$

тако да је еквивалентна отпорност између ових двеју тачака

$$R_e = U_{AG}/I = 5R/6.$$

 9.14. У оригиналној вези отпорника (слика 9.14.а) не може се уочити ни једна редна или паралелна веза, па еквивалентну отпорност није могуће одредити поступним укрупњавањем мреже. Могу се уочити две везе у троугао (АВD и ВСD) које се могу трансфигурисати у звезду, односно две везе у звезду (АDC и ABC) које се могу трансфигурисати у троугао. Било која трансфигурација мора дати исти резултат за еквивалентну отпорност.



Слика 9.14.

Ако се изврши трансфигурација отпорне звезде ADC у троугао (слика 9.14.б) вредности појединих отпорности троугла ће бити

$$R_{AC} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 11\Omega$$

$$R_{AD} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} = \frac{33}{2}\Omega$$

$$R_{CD} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 33\Omega,$$

тако да је еквивалентна отпорност

$$R_e = (R_{AD} \parallel R_4 \oplus R_{CD} \parallel R_5) \parallel R_{AC} = 6\Omega.$$

Када се изврши трансфигурација отпорног троугла ABD у звезду (слика 9.14.в) вредности појединачних отпорности звезде ће бити

$$R_A = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 1\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{3}{2}\Omega$$

$$R_D = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 3\Omega,$$

тако да је еквивалентна отпорност

$$R_e = R_A \oplus (R_B \oplus R_2) \parallel (R_D \oplus R_5) = 6\Omega.$$

Овај задатак се, имајући у виду конкретне нумеричке вредности за отпорности појединачних отпорника, може решити и на знатно једноставнији начин. Ако се уочи да је $R_1 R_5 = R_2 R_4$ закључује се да веза отпорника са слике 9.14.а. представља мост у равнотежи. Значи (као што је показано у Прегледу основних закона и израза, одељак 40.), грана B–D се може прекинути па је

$$R_e = (R_1 \oplus R_2) \parallel (R_4 \oplus R_5) = 6\Omega,$$

односно тачке B и D се могу кратко спојити па је

$$R_e = R_1 \parallel R_4 \oplus R_2 \parallel R_5 = 6\Omega.$$

~~9.15.~~ $R_e = 10\text{k}\Omega$.

~~9.16.~~ Отпорници R_5 и R_6 су везани паралелно, па затим на ред са отпорником R_7 и могу се заменити једним еквивалентним. На тај начин се добија шема истог облика као на слици 9.14.а. Како је $R_2 R_3 = R_1 R_4$ то ово коло представља мост у равнотежи тако да је

$$R_e = (R_1 \oplus R_2) \parallel (R_3 \oplus R_4) = R_1 \parallel R_3 \oplus R_2 \parallel R_4 = 28/3\Omega.$$

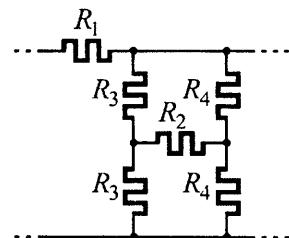
9.17. Посматрајмо једну од ћелија задате везе отпорника (слика 9.17). Очигледно је да група коју чине отпорници R_2 , R_3 и R_4 (R_3 и R_4 гране, R_2 дијагонала) представља мост у равнотежи па се може заменити једним, еквивалентним отпорником отпорности

20

$$R_{e1} = (R_3 \oplus R_3) \parallel (R_4 \oplus R_4) = R_3 \parallel R_4 \oplus R_3 \parallel R_4 = 10\Omega.$$

Даљи поступак решавања је исти као у задатку 9.11,

$$R_e = R_{e1} \parallel R_1 \Rightarrow R_e = 20\Omega.$$



Слика 9.17.

9.18. Трансфигурацијом троугла DEF добија се звезда DEF са отпорима $R/3$ који, везани на ред са отпорима R , дају звезду ABC са отпорима $4R/3$. Ова звезда се трансфигурише у троугао ABC са отпорима $4R$. На тај начин се коло своди на један троугао, ABC, који као сваку страницу има паралелну везу отпора R и $4R$, односно $4R/5$. Сада се еквивалентна отпорност између тачака А и В лако израчунава

$$R_e = \left(\frac{4R}{5} \oplus \frac{4R}{5} \right) \parallel \frac{4R}{5} = \frac{4R}{15} = 80\Omega.$$

9.19. $R_3 = 125\Omega$. **9.20.** $R_x = 3\Omega$. **9.21.** $R_x = R\sqrt{2}/2$.

9.22. $R_x = R$ (мост). **9.23.** $R_x = 6\text{k}\Omega$, $R_e = 3.6\text{k}\Omega$.

9.24. Како је еквивалентна отпорност паралелне везе два отпорника

$$R_e = R_1 R_2 / (R_1 + R_2),$$

из познати вредности отпорности R_1 и R_e на температури θ_0 добија се вредност отпорности R_2 на тој температури, $R_2 = 3\Omega$.

Из услова задатка,

$$R_{e\theta} = \frac{R_{1\theta} R_{2\theta}}{R_{1\theta} + R_{2\theta}} = \frac{R_1 (1 + \alpha_1 \Delta \theta) R_2 (1 + \alpha_2 \Delta \theta)}{R_1 (1 + \alpha_1 \Delta \theta) + R_2 (1 + \alpha_2 \Delta \theta)} = R_e,$$

добија се једначина по $\Delta \theta$. Решавање ове једначине се може знатно поједноставити ако се имају у виду вредности поједињих отпорности и уведу смене $R_1 = R_2 = R$ и $R_e = R/2$. На тај начин се добија једначина

$$2(1 + \alpha_1 \Delta \theta)(1 + \alpha_2 \Delta \theta) = 2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta \theta$$

чије је решење $\Delta \theta = 750^\circ \text{C}$, тако да је $\theta = 770^\circ \text{C}$.

9.25. Из условия

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{1\theta} R_{2\theta}}{R_{1\theta} + R_{2\theta}} = \frac{R_1 (1 + \alpha_1 \Delta \theta) R_2 (1 + \alpha_2 \Delta \theta)}{R_1 (1 + \alpha_1 \Delta \theta) + R_2 (1 + \alpha_2 \Delta \theta)},$$

односно

$$2 = \frac{(1 + \alpha_1 \Delta \theta)(1 + \alpha_2 \Delta \theta)}{2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta \theta},$$

дебија се квадратна једначина по $\Delta \theta$. Физичког смисла има само решење $\Delta \theta \approx 787.35^0 \text{ C}$, па је $\theta \approx 807.35^0 \text{ C}$.

9.26. $\theta = 401^0 \text{ C}$.

9.27. Отпорност отпорне жице је пропорционална њеној дужини,

$$R_1 = \rho l_1 / S \quad \text{и} \quad R_2 = \rho l_2 / S,$$

па из условия равнотеже моста ($R_2 R_x = R_1 R$) следи да ће мост бити у равнотежи када је

$$R_x = R l_1 / l_2.$$

На $\theta_0 = 20^0 \text{ C}$ је

$$R_{0x} = R l_1 / l_2 = 4 \text{ k } \Omega,$$

док је на температури θ

$$R_{\theta x} = R \frac{l_1 + \Delta l}{l_2 - \Delta l} = 4.345 \text{ k } \Omega.$$

Из познатог израза за промену отпорности са температуром добија се $\theta = 41.56^0 \text{ C}$.

9.28. Из условия равнотеже моста, који мора бити задовољен на обе температуре,

$$R_{x0} R = R_1 R_2 \quad \text{и} \quad R_{x0} R' = R_1 R_2,$$

дебија се

$$\frac{R}{R'} = \frac{R_{x0}}{R_{x0}} = 1 + \alpha \Delta \theta,$$

па је $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} ({}^0 \text{C})^{-1}$.

10. КОЛО СА ЈЕДНИМ ГЕНЕРАТОРОМ

10.1. Применом основног израза за струју у колу са једним генератором и једним отпорником,

$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

добија се за задате бројне вредности $I = 0.5 \text{ A}$. Напон на потрошачу је, уједно, и напон на крајевима генератора,

$$U = RI = E - R_i I = 7 \text{ V}.$$

Снага на потрошачу може се израчунати коришћењем било ког алтернативног израза,

$$P_R = UI = U^2/R = RI^2 = 3.5 \text{ W},$$

док је снага Цулових губитака на унутрашњој отпорности генератора

$$P_{R_i} = R_i I^2 = 0.5 \text{ W}.$$

Снага генератора,

$$P = EI = 4 \text{ W},$$

је, очигледно, једнака збиру снага на потрошачима.

10.2. Тражене зависности су одређене у претходном задатку:

$$I(R) = \frac{E}{R + R_i}, \quad U(R) = RI(R) = \frac{RE}{R + R_i}, \quad P(R) = RI^2(R) = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2}.$$

a* Струја у колу је максимална за $R = 0$ (кратак спој крајева генератора). То је такозвана струја кратког споја генератора и њена вредност је

$$I_{ks} = E/R_i = 5 \text{ mA}.$$

Напон на крајевима потрошача (кратког споја, $R = 0$) је нула, као и снага потрошача. Целокупна снага генератора одлази на покривање Цулових губитака на његовој унутрашњој отпорности.

b* Напон на крајевима потрошача је максималан када $R \rightarrow \infty$, односно када је коло између тачака А и В прекинуто (исонтеријен генератор). То је такозвани напон празног хода генератора,

$$U_{ph} = E = 5 \text{ V}.$$

Јасно је да је струја једнака нули (ис постоји затворено коло) и да су све снаге једнаке нули.

b* Снага на потрошачу ће имати максималну вредност када је извршено прилагођење по снази,

$$R = R_i = 1 \text{ k}\Omega.$$

У том случају струја у колу, напон и снага на потрошачу су

$$I = \frac{E}{2R_i} = 2.5 \text{ mA}, \quad U = R_i \frac{E}{2R_i} = \frac{E}{2} = 2.5 \text{ V}, \quad P = R_i I^2 = \frac{E^2}{4R_i} = 6.25 \text{ mW}.$$

10.3. a* При задатој унутрашњој отпорности генератора R_i на потрошачу ће се развити максимална снага када је отпорност потрошача R једнака унутрашњој отпорности генератора (добро познат услов прилагођења по снази), $R = R_i$. У том случају снага потрошача, снага генератора и степен корисног дејства су

$$P_R = R_i I^2 = \frac{E^2}{4R_i}, \quad P_E = EI = \frac{E^2}{2R_i} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{P_R}{P_E} = 0.5 \text{ (50%).}$$

б* У случају да је отпорност потрошача задата, а да се унутрашња отпорност генератора може мењати, максимална струја у колу, а са мним тим и максимална снага на потрошачу, биће у случају када је $R_i = 0$ (идеални напонски генератор). Тада су

$$P_R = RI^2 = \frac{E^2}{R}, \quad P_E = EI = \frac{E^2}{R} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{P_R}{P_E} = 1 \text{ (100%).}$$

10.4. Уочите како се мењају напон на потрошачу и степен корисног дејства у функцији односа унутрашње отпорности генератора и отпорности потрошача.

a* $U = 0.909 \text{ V}, P = 8.264 \text{ W}, \eta = 0.091,$

б* $U = 5.000 \text{ V}, P = 25.00 \text{ W}, \eta = 0.500,$

в* $U = 9.091 \text{ V}, P = 8.264 \text{ W}, \eta = 0.909,$

г* $U = 9.901 \text{ V}, P = 0.980 \text{ W}, \eta = 0.990.$

10.5. Коришћењем познатих израза за трансфигурацију добија се

a* $J = 100 \text{ A}, G_s = 1 \text{ S} (R_s = 1 \Omega),$

б* $J = 0.1 \text{ mA}, G_s = 50 \mu \text{S} (R_s = 20 \text{ k}\Omega),$

в* трансфигурација идеалног напонског ($G_i \rightarrow \infty, R_i = 0$) генератора у струјни није могућа.

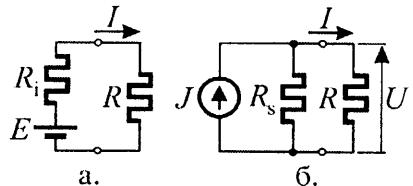
10.6. a* трансфигурација идеалног струјног ($G_i = 0, R_i \rightarrow \infty$) генератора у напонски није могућа,

б* $E = 20 \text{ V}, R_i = 10 \text{ k}\Omega (G_i = 100 \mu \text{S}),$

в* $E = 100 \text{ V}, R_i = 2 \Omega (G_i = 0.5 \text{ S}).$

10.7. a* Код напонске интерпретације генератора (слика 10.7.а) струја се одређује директном примени Омовог закона за просто коло,

$$I = \frac{E}{R + R_i} = 1.6 \text{ A}.$$



Слика 10.7.

6* Трансфигурацијом напонског генератора у струјни добија се коло са слике 10.7.б. Елементи струјног генератора су

$$J = E/R_i = 4 \text{ A} \quad \text{и} \quad R_s = R_i = 2\Omega.$$

Струја струјног генератора J протиче кроз паралелну везу отпорника R_s и R (која се може заменити једним еквивалентним отпорником) и на њима за последицу има напон

$$U = JR_e = J \frac{R_s R}{R_s + R},$$

тако да је струја кроз отпорник R

$$I = \frac{U}{R} = J \frac{R_s}{R_s + R} = 1.6 \text{ A}.$$

10.8. Резултати су дати према ознакама на слици 10.7.

a* $U = 6 \text{ V}$, $P_R = 12 \text{ mW}$.

6* $E = 18 \text{ V}$, $R_i = 6 \text{ k}\Omega$, $I = 2 \text{ mA}$, $P_R = 12 \text{ mW}$.

10.9. $R_2 = 10\Omega$, $I = 1 \text{ A}$, $A = 9 \text{ kJ}$.

10.10. Задатак има два решења: $R'_2 = 10\Omega$ и $R''_2 = 40\Omega$. Одговарајуће струје и рад су: $I' = 1 \text{ A}$, $A' = 9 \text{ kJ}$, $I'' = 0.5 \text{ A}$ и $A'' = 18 \text{ kJ}$.

10.11. $R = 2 \text{ k}\Omega$, $P_1 = 0.9 \text{ W}$, $P = P_2 = 0.05 \text{ W}$.

10.12. $R = 2 \text{ k}\Omega$, $P_1 = 0.9 \text{ W}$, $P = P_2 = 0.05 \text{ W}$.

10.13. Да би се вода загрејала до одређене температуре потребно је извршити одређени рад. Овај рад мора бити исти без обзира на то о каквом се грејачу ради, тако да је основни услов задатка

$$P_1 t_1 = P_2 t_2 = P_3 t_3 = P_4 t_4,$$

где су P_1 и P_2 снаге грсјача отпорности R_1 и R_2 , P_3 и P_4 снаге њихове редне и паралелне везе, а t_1 , t_2 , t_3 и t_4 одговарајућа времена загревања.

Из условия

$$P_l t_l = J^2 R_l t_l = J^2 R_2 t_2 = P_2 t_2$$

може се одредити однос отпорности два грејача,

$$R_l = R_2 \frac{t_2}{t_1}.$$

a* Када су грејачи везани редно еквивалентна отпорност је

$$R_e = R_l + R_2,$$

тако да је снага

$$P_3 = J^2 R_e = J^2 (R_l + R_2) = J^2 R_2 \left(\frac{t_2}{t_1} + 1 \right),$$

па из основног услова $P_3 t_3 = P_2 t_2$ следи

$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 12'.$$

б* Када се грајачи вежу паралелно еквивалентна отпорност је

$$R_e = \frac{R_l R_2}{R_l + R_2},$$

тако да је снага

$$P_4 = J^2 R_e = J^2 \frac{R_l R_2}{R_l + R_2} = J^2 R_2 \frac{t_2}{t_1 + t_2},$$

тако да из основног услова $P_4 t_4 = P_2 t_2$ следи

$$t_4 = t_1 + t_2 = 50'.$$

10.14. Поступак решавања је исти као и у претходном задатку, с тим што при израчунавању снаге треба водити рачуна о томе да је напон на потрошачу познат (једнак електромоторној сили генератора).

$$a* t = 50', \quad b* t = 12'.$$

10.15. Из услова прилагођења (да је унутрашња отпорност генератора једнака отпорности потрошача),

$$R_i = R_e = \frac{R_l R_p}{R_l + R_p},$$

следи

$$R_p = \frac{R_l R_i}{R_l - R_i} = 60\Omega,$$

па су снаге: $P_p = (40/6) W$, $P_l = (40/3) W$, $P_i = 20 W$, $P_E = 40 W$.

10.16. Након трансфигурације генератора из услова прилагођења следи $R_p = 24\Omega$, па су снаге $P_p = 0.24 W$, $P_s = 0.9 W$ и $P_J = 1.8 W$.

10.17. Спољашња карактеристика генератора,

$$U = E - R_i I,$$

сече U -осу у тачки ($I = 0$, $U = E$) и I -осу у тачки ($I = E / R_i$, $U = 0$), па се са задате спољашње карактеристике налази

$$E = 110 \text{ V} \quad \text{и} \quad R_i = 1\Omega.$$

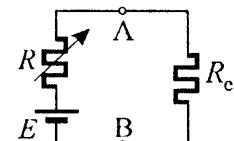
a* Да би вода достигла жељену температуру за најкраће време, генератор треба да предаје мешовитој вези грејача максималну снагу, односно потребно је да буде испуњен услов прилагођења пријемника на генератор,

$$R_i = R_e = \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R},$$

одакле следи да је $R = 1\Omega$.

b* Када је испуњен претходни услов снаге поједињих грејача су: $P_1 = 1512.5 \text{ W}$ и $P_2 = P = 756.25 \text{ W}$.

10.18. Сложна мрежа отпорника између тачака А и В може се заменити једним еквивалентним отпорником R_e , који се може третирати као унутрашња отпорност генератора електромоторне сile E на који је прикључен отпорник R (слика 10.18).



Слика 10.18.

Код израчунавања еквивалентне отпорности треба искористити чињеницу да су тачке С, Д, и Е на истом потенцијалу па се отпорници R_4 могу или искључити или краткоспојити (видети задатак 9.14). Ако се отпорници R_4 искључе за еквивалентну отпорност се добија

$$R_e = 2R_1 \parallel 2R_2 \parallel 2R_3 = 3\Omega,$$

тако да из услова прилагођења следи $R = R_e = 3\Omega$. Тражене снаге су:

$$P_1 = 0.45 \text{ W}, P_2 = 0.3 \text{ W}, P_3 = 0.75 \text{ W}, P_4 = 0, P = 3 \text{ W}, P_E = 6 \text{ W}.$$

10.19. a* Еквивалентна отпорност мешовите везе отпорника, која је прикључена на генератор електромоторне сile E и унутрашње отпорности R_i , је

$$R_e = R_i \oplus R \parallel R_2 = R_i + \frac{RR_2}{R + R_2},$$

па је струја у колу

$$I = \frac{E}{R_c + R_i}.$$

Напон на променљивом отпорнику је напон на паралелној вези R и R_2 ,

$$U = I \frac{RR_2}{R + R_2} = \frac{E}{R_i + R_l + \frac{RR_2}{R + R_2}} \cdot \frac{RR_2}{R + R_2} = \frac{18R}{R + 24}.$$

б* Из услова прилагођења по снази,

$$R_i = R_e = R_l \oplus R \parallel R_2,$$

добија се $R = 30\Omega$. Укупна снага на мешовитој вези отпорника се може одредити као збир снага на појединим отпорницима везе или као снага на еквивалентном отпорнику R_e и износи $P = 7.5 \text{ W}$. Снага на отпорнику R је $P_R \approx 3.33 \text{ W}$.

в* Из познатог напона на отпорнику R (који је одређен под а*) може се одредити снага на њему,

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{324R}{(R+24)^2}.$$

Снага је функција отпорности и имаће максимум за ону вредност отпорности R за коју је

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR} \left[\frac{324R}{(R+24)^2} \right] = 0,$$

што, након диференцирања, даје

$$(R+24)^2 - 2R(R+24) = 0.$$

Значи, на променљивом отпорнику R ће се развијати максимална снага када је његова вредност $R = 24\Omega$. Та снага износи $P_R = 3.375 \text{ W}$, док је укупна снага на мешовитој вези отпорника $P \approx 7.48 \text{ W}$.

Уочите разлику у резултатима добијеним под б* и в*.

Треба напоменути да се део задатка под в* може решити и на знатно једноставнији начин применом Тевененове теореме, што ће бити показано у задатку 12.41.

10.20. а* $R = 5\Omega$, $P = 28 \text{ W}$. б* $R \approx 7.069\Omega$, $P \approx 0.824 \text{ W}$.

10.21. а* $R_4 = 1.5\Omega$. б* $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$.

в* $\theta = 333.33^{\circ}\text{C}$, $P \approx 28.57 \text{ W}$,

10.22. Максимални напон на који сме да се приклучи паралелна веза отпорника R_2 и R_3 је, обзиром на максималну снагу на отпорнику R_2

$$U_{2\max} = \sqrt{R_2 P_{2\max}} = 40 \text{ V},$$

а обзиром на максималну снагу на отпорнику R_3

$$U_{3\max} = \sqrt{R_3 P_{3\max}} = 30 \text{ V}.$$

Значи, максимални напон на паралелној вези отпорника R_2 и R_3 је

$$U_{23\max} = 30 \text{ V}.$$

Како је струја кроз отпорник R_1 при овом напону на паралелној вези отпорника R_2 и R_3 ,

$$I = \frac{U_{23\max}}{R_2} + \frac{U_{23\max}}{R_3} = 25 \text{ mA},$$

снага на отпорнику R_1 биће мања од максимално допуштесне,

$$P_1 = R_1 I^2 = 0.5 \text{ W} < P_{1\max}$$

Према томе, највећа вредност електромоторне сile је

$$E = R_1 I + U_{23\max} = 50 \text{ V}.$$

~~10.23.~~ $J = 25 \text{ mA}$. ~~10.24.~~ $E = 40 \text{ V}$. ~~10.25.~~ $J = 58 \text{ mA}$.

~~10.26.~~ За одређивање струје кроз сијалицу, сходно Омовом закону,

$$I = \frac{E}{R_s + R},$$

потребно је познавати отпорност сијалице (R_s) и напојног вода (R). Отпорност сијалице може се одредити на основу познате номиналне снаге сијалице (P_n) при номиналном напону (U_n) и износи

$$R_s = U_n^2 / P_n = 484 \Omega.$$

a* Отпорност напојног вода на температури $\theta_1 = 30^\circ \text{C}$ износи

$$R_1 = R_0 (1 + \alpha \Delta \theta_1) = R_0 [1 + \alpha (\theta_1 - 20)] = 5.1965 \Omega,$$

па је струја кроз сијалицу

$$I_1 = \frac{E}{R_s + R_1} \approx 449.717 \text{ mA}$$

и њена снага

$$P_1 = I_1^2 R_s \approx 97.887 \text{ W}.$$

b* Отпорност напојног вода на температури $\theta_2 = -10^\circ \text{C}$ је

$$R_2 = R_0 (1 + \alpha \Delta \theta_2) = R_0 [1 + \alpha (\theta_2 - 20)] \approx 4.4105 \Omega,$$

па је струја кроз сијалицу $I_2 \approx 450.441 \text{ mA}$ и њена снага $P_2 \approx 98.202 \text{ W}$.

10.27. На основу познате електромоторне снаге E и измерене струје I може се израчунати еквивалентна отпорност задате везе отпорника

$$R_e = U/I = 60\Omega,$$

одакле се лако одређује $R_l = 60\Omega$. Напон на паралелној вези R_1 и R_2 је

$$U = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 60 \text{ V},$$

тако да је снага на отпорнику R_l

$$P = U^2/R_l = 60 \text{ W}.$$

10.28. На основу познате номиналне снаге и номиналног напона потрошача може се одредити његова отпорност (видети задатак 10.27). $R = 48.4\Omega$. Струја у овом колу је, према Омовом закону,

$$I = E/(R_p + R) \approx 4.365 \text{ A},$$

тако да је снага потрошача

$$P = RI^2 \approx 922.21 \text{ W}.$$

Ако се паралелно потрошачу веже још један потрошач исте снаге (исте отпорности) еквивалентна отпорност ове паралелне везе биће

$$R_e = \frac{RR}{R+R} = \frac{R}{2} = 24.2\Omega,$$

па ће струја у колу бити

$$I = E/(R_p + R_e) \approx 8.397 \text{ A}.$$

Напон на паралелној вези потрошача је

$$U = R_e I \approx 203.21 \text{ V},$$

тако да је снага потрошача

$$P = U^2/R \approx 853.16 \text{ W}.$$

10.29. Из познате снаге струјног генератора може се одредити напон на њему, $U_J = P_J/J = 40 \text{ V}$. Како је напон на отпорницима R_2 и R_3 , односно њиховој паралелној вези $U = 10 \text{ V}$, то следи да су напон на отпорнику R_l , његова отпорност и снага на њему $U_l = 30 \text{ V}$, $R_l = 20\Omega$ и $P_l = 45 \text{ W}$. Понито су познати снага и напон на отпорнику R_3 , може се одредити његова отпорност, $R_3 = 20\Omega$, као и струја кроз њега, $I_3 = 0.5 \text{ A}$. Применом I Кирхофовог закона, одређује се струја кроз отпорник R_2 , $I_2 = 1 \text{ A}$, па су његова отпорност и снага на њему $R_2 = 10\Omega$ и $P_2 = 10 \text{ W}$.

10.30. $R_2 = 60\Omega$.

10.31. $P_1 = 24 \text{ W}$, $P_2 = P_5 = 19.2 \text{ W}$, $P_3 = P_4 = 28.8 \text{ W}$, $E = 60 \text{ V}$.

10.32. $U_s \approx 12.016 \text{ V}$, $P_s \approx 20.63 \text{ W}$, $U'_s \approx 8.596 \text{ V}$, $P'_s \approx 10.56 \text{ W}$.

10.33. Како су при двс различите вредности струје оптерећења познате вредности напона на крајевима генератора (спољашња карактеристика генератора) добија се систем од двс једначине са две непознате. Решење је: $E = 2.2 \text{ V}$, $R_i = 0.05\Omega$, $I_{ks} = 44 \text{ A}$.

10.34. $E = 2.25 \text{ V}$, $R_i = 0.5\Omega$.

10.35. Напон U_1 на паралелној вези R_i и R_s је

$$U_1 = J \frac{R_i R_s}{R_i + R_s},$$

док је напон U_2 на паралелној вези R_i , R_2 и R_s

$$U_2 = J \frac{R_i R_2 R_s}{R_i R_2 + R_i R_s + R_2 R_s}.$$

Из овог система једначина добија се $J = 1 \text{ A}$ и $R_s = 600\Omega$.

10.36. За напон на паралелној вези R и R_x добија се

$$U = E \frac{R R_x}{R^2 + R R_x - R_x^2},$$

одакле следи

$$R_x^2 \frac{U}{E} - R_x R \left(1 - \frac{U}{E}\right) - R^2 \frac{U}{E} = 0.$$

За задате нумеричке податке је: а* $R_x \approx 3.028\Omega$ и б* $R_x \approx 8.471\Omega$.

10.37. Струја кроз отпорник R је

$$I = J \frac{(I/J) R_x}{1 - (I/J)},$$

па је

$$R_x = R \frac{I/J}{1 - (I/J)}.$$

За задате нумеричке податке је: а* $R_x = (10/3)\Omega$ и б* $R_x = 30\Omega$.

10.38. $R_x = 30\Omega$, $E/U_x = 4$.

10.39. Специфична отпорност материјала, од кога је начињен штап, на растојању x од почетка штапа износи

$$\rho(x) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} x = \rho_1 + p(\rho_2 - \rho_1),$$

где је уведена ознака $p = x/l$. Укупна отпорност штапа је

$$R_0 = \int_0^l \rho(x) \frac{dx}{S} = 2\rho_1 \frac{l}{S} = 100\Omega = R.$$

Отпорност штапа од почетка до клизног контакта k на растојању x је

$$R_1 = \int_0^x \rho(x) \frac{dx}{S} = \rho_1 \frac{l}{S} (p + p^2) = \frac{R}{2} (p + p^2),$$

а од клизног контакта до краја штапа

$$R_2 = \int_x^l \rho(x) \frac{dx}{S} = \rho_1 \frac{l}{S} (2 - p - p^2) = \frac{R}{2} (2 - p - p^2).$$

Еквивалентна отпорност везе отпорника прикључене на генератор електромоторне сile E је

$$R_e = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}.$$

Када се зна еквивалентна отпорност лако се одређује струја кроз коло (кроз отпорник R_1), напон на паралелној вези R и R_2 и струја кроз отпорник R у функцији положаја клизног контакта k:

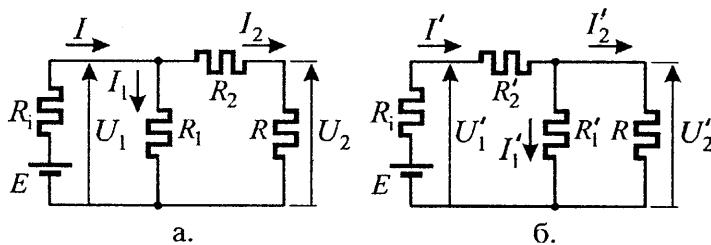
$$I = \frac{2E}{R} \frac{2 - p - p^2}{4 + 2p + p^2 - 2p^3 - p^4},$$

односно, за задате нумериčке податке

$$l = 2 \frac{2 - p - p^2}{4 + 2p + p^2 - 2p^3 - p^4} A.$$

10.40. Да би напоци U_1 и U'_1 били једнаки потребно је да еквивалентна отпорност мешовите везе отпорника R_1 , R_2 и R са слике 10.40.a. буде једнака еквивалентној отпорности мешовите везе отпорника R'_1 , R'_2 и R са слике 10.40.b,

$$R_e = \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R} = R'_1 + \frac{R'_2 R}{R'_2 + R} = R'_e.$$



Слика 10.40.

Из услова једнакости напона U_2 и U'_2 ,

$$I_2 R = I' \frac{R'_2 R}{R'_2 + R},$$

следи

$$\frac{U_1}{R + R_2} R = \frac{U_1}{R_e} \frac{R'_2 R}{R'_2 + R}.$$

Решење овог система једначина је: $R'_1 = 2.5\Omega$, $R'_2 = (50/3)\Omega$.

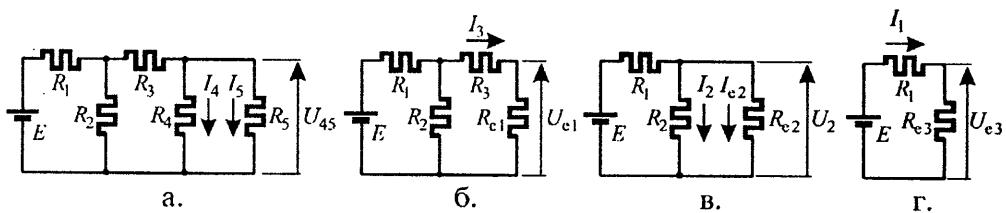
10.41. $I_2 = 1A$, $P = 42 W$ (мост).

10.42. $P_1 = 0.3 W$, $P_2 = 0.6 W$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0.1 W$,
 $P_5 = 0.2 W$, $P_6 = 0.18 W$, $P_J = 1.38 W$.

10.43. $R_5 = 6\Omega$, $I_5 = 0.5 A$.

10.44. Коло са слике 10.44.а. се поступно може упростити до кола са слике 10.44.в. При томе су поједине сквивалентне отпорности:

$$R_{e1} = R_4 \parallel R_5 = 4\Omega, \quad R_{e2} = R_{e1} \oplus R_3 = 10\Omega \quad \text{и} \quad R_{e3} = R_{e2} \parallel R_2 = 5\Omega.$$



Слика 10.44.

Водећи рачуна о томе да кроз редну везу отпорника противс иста струја, као и да је напон на паралелној вези отпорника исти, директном применом Омовог закона (полазећи од последње шеме у низу) може се писати:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{e3}} = 2 \text{ A}, \quad U_{e3} = U_2 = I_1 R_{e3} = 10 \text{ V},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 1 \text{ A}, \quad I_{e2} = I_3 = \frac{U_2}{R_{e2}} = 1 \text{ A}, \quad U_{e1} = U_{45} = R_{e1} I_3 = 4 \text{ V},$$

$$I_4 = \frac{U_{45}}{R_4} = \frac{1}{3} \text{ A}, \quad I_5 = \frac{U_{45}}{R_5} = \frac{2}{3} \text{ A}.$$

10.45. $P_J = 20 \text{ mW}$, $P_3 = 2.5 \text{ mW}$, $P_6 = 1.25 \text{ mW}$.

10.46. Ради једноставнијег писања, струје кроз поједине отпорнике и напони на њима биће означени истим индексом као и отпорности.

Задатак се најлакше решава ако се претпостави да кроз редну везу отпорника R_7 и R_8 протиче струја $I_{78} = 1 \text{ A}$. У том случају напон на овој редној вези, уједно и на њој паралелно везаном отпорнику R_6 , биће

$$U_6 = U_7 + U_8 = I_{78} R_7 + I_{78} R_8 = 2 \text{ V},$$

па је струја кроз R_6

$$I_6 = U_6 / R_6 = 2 \text{ A},$$

а кроз R_5

$$I_5 = I_6 + I_{78} = 3 \text{ A}.$$

Понављајући овај поступак до почетка мреже добија се за струју кроз отпорник R_1

$$I_1 = I_2 + I_3 = 21 \text{ A}.$$

Струја I_1 треба да буде једнака струји струјног генератора J . Међутим, њихов однос је

$$J/I = 0.3.$$

Како у линеарном колу владају линеарни односи то ће се стварне вредности свих струја и напона добити множењем претпостављених вредности фактором 0.3, тако да је напон на струјном генератору

$$U_J = U_2 + R_1 J = 0.3 \cdot 13 + 1 \cdot 6.3 = 10.2 \text{ V},$$

па је његова снага

$$P_J = U_J J = 64.26 \text{ W}.$$

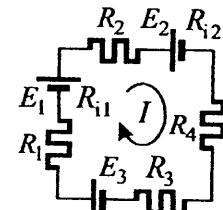
10.47. Применити исти поступак као у претходном задатку. Резултат је $P_9 = 25 \text{ W}$.

10.48. Задатак има два решења: $R_1/R = 1.5$ и $R_1/R = 1.75$.

11. ПРОСТО КОЛО, ГРАНА СЛОЖЕНОГ КОЛА, НАПОН ИЗМЕЂУ ДВЕ ТАЧКЕ У КОЛУ

■ 10.1. На почетку решавања задатка произвољно ћемо одабрати референтни смер струје, рецимо смер кретања казаљке на сату (слика 11.1.а). За тако одабрани референтни смер јачина електричне струје је, сходно Омовом закону за просто коло,

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R + \Sigma R_i} = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{i1} + R_{i2}} = 0.4 \text{ A.}$$



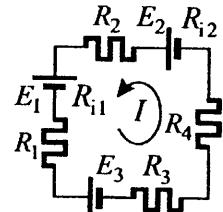
Слика 11.1.а.

Како је добијени резултат позитиван, физички смер струје је сагласан са одабраним референтним смером.

Да је одабран супротан референтни смер струје (слика 11.1.б) директна примена Омовог закона би за јачину електричне струје дала

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R + \Sigma R_i} = \frac{-E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{i1} + R_{i2}} = -0.4 \text{ A.}$$

Добијени негативан знак у резултату значи да је физички смер струје супротан у односу на изабрани референтни смер.



Слика 11.1.б.

■ 11.2. Смер струје сагласан је са оријентацијом електромоторне сile E_3 , а јачина јој је $I = 1 \text{ A}$. Електромоторна сила E_3 се понапа као генератор чија је снага

$$P_{E3} = E_3 I = 20 \text{ W},$$

док се електромоторне сile E_1 и E_2 понапају као потрошачи снага

$$P_{E1} = E_1 I = 10 \text{ W} \quad \text{и} \quad P_{E2} = E_2 I = 5 \text{ W}.$$

Отпорници и унутрашње отпорности генератора су, такође, потрошачи чије се снаге израчунивају као $P = RI^2$ и износе

$$P_{R1} = P_{R2} = 2 \text{ W} \quad \text{и} \quad P_{Ri1} = P_{Ri2} = 0.5 \text{ W}.$$

Лако се може проверити да је сума снага генератора, $\Sigma P_{\text{gen.}} = 20 \text{ W}$, једнака суми снага потрошача, $\Sigma P_{\text{pot.}} = 20 \text{ W}$.

■ 11.3. На основу познате снаге на отпорнику одређује се струја у колу а затим, применом Омовог закона за просто коло, и $R_{i2} = 1 \Omega$.

~~11.4.~~ $E_3 = 15 \text{ V}$, $P_{E1} = 10 \text{ W}$, $P_{E3} = 15 \text{ W}$, $P_{R1} = P_{R2} = P_{R3} = 5 \text{ W}$.

~~11.5.~~ $E_3 = 10 \text{ V}$. ~~11.6.~~ $U_{AB}/U'_{AB} = 5/3$.

~~11.7.~~ Како за редну везу елемената важи закон комутације можемо у задатој вези променити места појединих елемената и добити шему са слике 11.7.а. Потенцијалне разлике између појединих тачака су

$$\Phi_A - \Phi_C = E_1,$$

$$\Phi_C - \Phi_D = -E_2,$$

$$\Phi_D - \Phi_E = E_3.$$

Сабирањем ове три једначине добија се потенцијална разлика између тачака А и Е,

$$\Phi_A - \Phi_C + \Phi_C - \Phi_D + \Phi_D - \Phi_E = \Phi_A - \Phi_E = E_1 - E_2 + E_3.$$

Исту потенцијалну разлику између тачака А и Е (слика 11.7.б) одржаваће електромоторна сила еквивалентног генератора E_e ,

$$E_e = E_1 - E_2 + E_3.$$

Јасно је да се редна веза отпорника R_{i1} и R_{i2} може заменити једним еквивалентним отпорником,

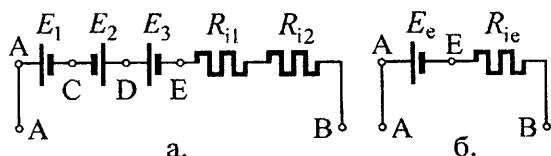
$$R_{ie} = R_{i1} + R_{i2}.$$

На тај начин је редна веза генератора између тачака А и В замењена једним еквивалентним генератором електромоторне сile E_e и унутрашње отпорности R_{ie} .

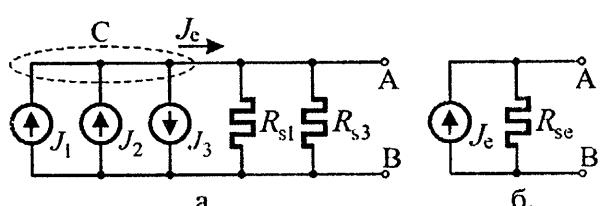
~~11.8.~~ Пошто су сви елементи везани паралелно између тачака А и В, редослед њиховог повезивања се слободно може променити (слика 11.8.а). Приложимо I Кирхофов закон на чвор С,

$$J_e = J_1 + J_2 - J_3$$

Јасно је да се паралелна веза ова три идеална струјна генератора може заменити једним еквивалентним (слика 11.8.б) чија је струја кратког споја J_e . Такође, паралелна веза унутрашњих отпорности R_{s1} и R_{s3} може се заменити једним еквивалентним отпорником R_{se} ($G_{se} = G_{s1} + G_{s2}$).



Слика 11.7.



Слика 11.8.

11.9. Генераторе трансфигурирати у струјне и применити поступак из претходног задатка. Добијени еквивалентни струјни генератор трансфигурирати у напонски: $E_e = 2 \text{ V}$ (оријентација ка тачки A), $R_{ie} = 1\Omega$.

11.10. $J_e = 0.625 \text{ mA}$ (оријентација ка тачки B), $R_{se} = 80 \text{ k}\Omega$.

11.11. $E_c = 2 \text{ V}$ (оријентација ка тачки A), $R_{ic} = 2\Omega$.

11.12. До резултата се лако долази директном применом израза за напон на крајевима гране сложеног кола

$$U_{AB} = I \sum R - \sum E = I(R_1 + R_2 + R_{i2}) - (E_1 - E_2 + E_3) = 3 \text{ V}.$$

11.13. Треба водити рачуна о смеру струје:

$$U_{AB} = I \sum R - \sum E = -I(R_1 + R_2 + R_3) - (-E_1 + E_2) = -15 \text{ V},$$

или

$$U_{BA} = I \sum R - \sum E = I(R_1 + R_2 + R_3) - (-E_2 + E_1) = 15 \text{ V} \Rightarrow U_{AB} = -U_{BA}.$$

11.14. Директна примена Омовог закона за грану сложеног кола (за задати референтни смер струје) даје

$$I = \frac{U_{BA} + \sum E}{\sum R} = \frac{-U_{AB} + \sum E}{\sum R} = \frac{-U_{AB} + E_3 - E_2 + E_1}{R_1 + R_2 + R_{i2}} = -0.4 \text{ A},$$

што значи да је физички смер струје од тачке A ка тачки B.

11.15. Директном примском израза за напон између две тачке у колу,

$$U_{AB} = \sum RI - \sum E,$$

за задате референтне смерове струја добија се

$$U_{AB} = R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - (E_1 - E_3) = 30 \text{ V}.$$

11.16. $U_{AB} = 6 \text{ V}$.

11.17. Напон на струјном генератору је

$$U_J = \sum RI - \sum E = RJ + R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - (-E_1 + E_2) = 30 \text{ V},$$

па је његова снага $P_J = JU_J = 30 \text{ W}$.

11.18. Напон између тачака A и B се може израчунати по било којој путањи (израчунаћемо га по путањи са познатим струјама) и износи $U_{AB} = 3 \text{ V}$, тако да је $I_4 = 1.5 \text{ A}$.

11.19. $P_4 = 40 \text{ W}$.

11.20. Из познате снаге струјног генератора J може се одредити напон на њему, $U_J = P_J / J = 10 \text{ V}$, а затим и напон на генератору J_1 ,

$$U_{J1} = RJ - R_1 I_1 + R_2 I_2 - (U_J - E_1 + E_2) = 20 \text{ V},$$

тако да је његова снага $P_{J1} = J_1 U_{J1} = 10 \text{ W}$.

11.21. $U_J = U_{10} = -9 \text{ V}$, $P_J = -45 \text{ mW}$ (потребник).

11.22. $U_{AB} = 0$.

11.23. Струја I_1 (слика 11.23) се може израчунати директном применом Омовог закона за трану сложеног кола и износи $I_1 = 3 \text{ A}$, а струје I_2 и I_3 применом првог Кирхофовог закона за чвор B, односно чвор C, и износе $I_2 = 4 \text{ A}$ и $I_3 = 2 \text{ A}$.

Напон између тачака A и D може се израчунати као

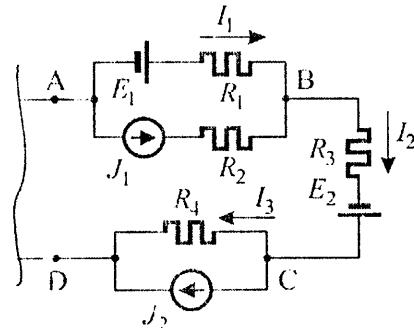
$$U_{AD} = \Sigma RI - \Sigma E$$

по било којој путањи између тачака A и D, па је

$$U_{AD} = R_1 I_1 + R_3 I_2 + R_4 I_3 - (E_1 + E_2) = 12 \text{ V},$$

тако да је потенцијал тачке D

$$\varphi_D = \varphi_A - U_{AD} = -9 \text{ V}.$$



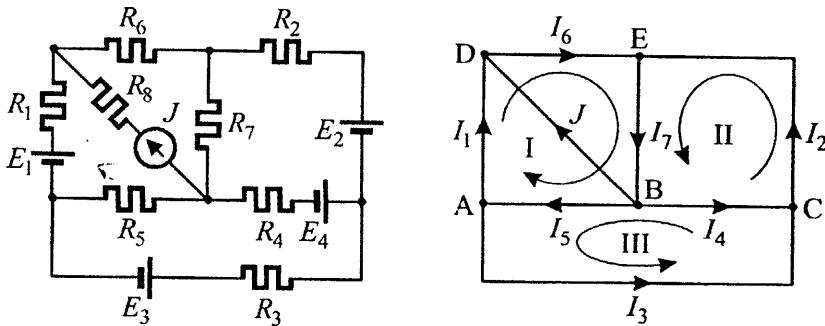
Слика 11.23.

11.24. $\varphi_A = -3 \text{ V}$, $\varphi_D = 43 \text{ V}$.

11.25. Обратите пажњу на то да у чврзовима C и D мора бити задовољен I Кирхофов закон. Тражени напон је $U_{AF} = 13 \text{ V}$.

12. СЛОЖЕНА ЕЛЕКТРИЧНА КОЛА

12.1. Задато коло има 8 грана и 7 непознатих струја (јер је струја у грани са идеалним струјним генератором позната), што значи да је потребно поставити систем од 7 једначина са 7 непознатих. Референтни смерови непознатих струја у појединим гранама могу се бирати потпуно произвољно (слика 12.1).



Слика 12.1.

Пошто коло има пет чвррова по првом Кирхофовом закону могу се поставити 4 независне једначине за 4 произвољно одабрана чвора:

$$A: \quad I_5 = I_1 + I_3$$

$$C: \quad I_2 = I_3 + I_4$$

$$D: \quad I_6 = I_1 + J$$

$$E: \quad I_7 = I_2 + I_6$$

Преостали број једначина поставља се по другом Кирхофовом закону за 3 произвољно одабране независне контуре (при чему контура не сме да садржи идејан струјни генератор). За контуре, одабране као на слици, једначине гласе:

$$I: \quad I_1 R_1 + I_6 R_6 + I_7 R_7 + I_5 R_5 = E_1$$

$$II: \quad I_2 R_2 + I_7 R_7 + I_4 R_4 = E_2 + E_4$$

$$III: \quad I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_5 R_5 = E_3 - E_4$$

Из једначине за чвр Е следи да је

$$I_7 = I_1 + I_3 + I_4 + J$$

тако да се сменом израза за \$I_2\$, \$I_5\$, \$I_6\$ и \$I_7\$ у I, II и III добија следећи систем једначина:

$$I_1(R_1 + R_5 + R_6 + R_7) + I_3(R_5 + R_7) + I_4 R_7 = E_1 - J(R_6 + R_7)$$

$$I_1 R_7 + I_3(R_2 + R_7) + I_4(R_2 + R_4 + R_7) = E_2 + E_4 - JR_7$$

$$I_1 R_5 + I_3(R_3 + R_5) - I_4 R_4 = E_3 - E_4$$

Након упоншења нумеричких вредности добија се

$$4I_1 + 2I_3 + I_4 = 7$$

$$I_1 + 2I_3 + 3I_4 = 2$$

$$I_1 + 2I_3 - I_4 = 6$$

па је решење (препоручује се решавање преко детерминанти) овог система једначина: $I_1 = 1\text{ A}$, $I_3 = 2\text{ A}$ и $I_4 = -1\text{ A}$.

Сменом вредности за струје I_1 , I_3 и I_4 у једначинама које су постављене по првом Кирхофовом закону, добијају се вредности преосталих струја: $I_2 = 1\text{ A}$, $I_5 = 3\text{ A}$, $I_6 = 3\text{ A}$ и $I_7 = 4\text{ A}$. Физички смерови свих струја су сагласни са изабраним референтним смеровима, осим струје I_4 , чији је физички смер супротан референтном.

Снаге на појединим отвореницима у колу се израчунавају према Џуловом закону и износе: $P_1 = P_2 = 1\text{ W}$, $P_3 = 4\text{ W}$, $P_4 = 1\text{ W}$, $P_5 = P_6 = 9\text{ W}$, $P_7 = 16\text{ W}$ и $P_8 = 4\text{ W}$. Као потрошач се понапа и генератор E_4 (јер су смерови електромоторне силе и струје супротни) чија је снага

$$P_{E4} = E_4 I_4 = 2\text{ W}$$

тако да је укупна снага свих потрошача у колу

$$\Sigma P_p = P_1 + P_2 + \dots + P_8 + P_{E4} = 47\text{ W}.$$

За одређивање снаге струјног генератора потребно је познавати напон на њему. Овај напон се може одредити по било којој затвореној контури којој припада генератор J . Најједноставније је изабрати контуру А–В–Д–А, па је

$$U_J = R_6 I_6 + R_7 I_7 + R_8 J = 9\text{ V}.$$

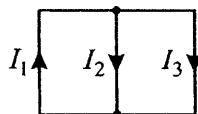
Снага струјног генератора је $P_J = J U_J = 18\text{ W}$, док су снаге напонских генератора $P_E = IE$, и износе: $P_{E1} = 11\text{ W}$, $P_{E2} = 2\text{ W}$ и $P_{E3} = 16\text{ W}$. Укупна снага свих генератора у колу је

$$\Sigma P_G = P_J + P_{E1} + P_{E2} + P_{E3} = 47\text{ W}$$

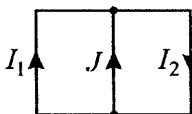
и једнака је укупној снази свих потрошача.

12.2. $I_1 = 2\text{ A}$, $I_2 = I_3 = 1\text{ A}$, $P_{E1} = 60\text{ W}$, $P_{E2} = -5\text{ W}$ (понаша се као потрошач), $P_1 = 40\text{ W}$, $P_2 = 5\text{ W}$, $P_3 = 10\text{ W}$. Смерови струја дати су на слици 12.2. *У свим наредним задацима смерови струја биће дати на слици која има исти број као и задатак.*

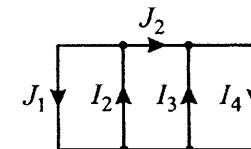
12.3. $I_1 = 1\text{ A}$, $I_2 = 2\text{ A}$, $P_J = 10\text{ W}$.



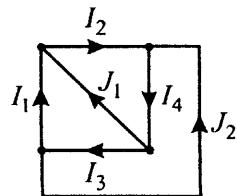
Слика 12.2.



Слика 12.3.



Слика 12.4.



Слика 12.5.

12.4. $I_2 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 4 \text{ A}$.

12.5. $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 4 \text{ A}$,

$$P_{J1} = 0, P_{J2} = 70 \text{ W}, P_{E1} = 25 \text{ W}, P_{E2} = 40 \text{ W}.$$

12.6. Пошто коло садржи три независне контуре потребно је поставити систем од три једначине са три непознате контурне струје, облика

$$I_1 R_{11} + I_{II} R_{12} + I_{III} R_{13} = (\Sigma E)_1$$

$$I_1 R_{21} + I_{II} R_{22} + I_{III} R_{23} = (\Sigma E)_{II}$$

$$I_1 R_{31} + I_{II} R_{32} + I_{III} R_{33} = (\Sigma E)_{III}$$

Ако се независне контуре и смерови појединих контурних струја одаберу као на слици 12.6.а, вредности појединачних елемената ће бити:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 = 4\Omega, \quad R_{22} = R_2 + R_3 = 3\Omega, \quad R_{33} = R_4 + R_5 = 3\Omega,$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -2\Omega, \quad R_{13} = R_{31} = R_5 = 1\Omega, \quad R_{23} = R_{32} = 0,$$

$$(\Sigma E)_1 = E_1 + E_2 = 3 \text{ V}, \quad (\Sigma E)_{II} = E_3 + E_5 - E_2 = 4 \text{ V}, \quad (\Sigma E)_{III} = E_4 + E_5 = 10 \text{ V},$$

па се горњи систем једначина своди на:

$$4I_1 - 2I_{II} + I_{III} = 3$$

$$-2I_1 + 3I_{II} + 0 = 4$$

$$I_1 + 0 + 3I_{III} = 10$$

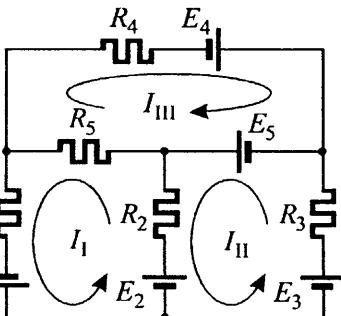
Решавањем овог система једначина за појединачне контурне струје се добија:

$$I_1 = 1 \text{ A} \quad I_{II} = 2 \text{ A} \quad I_{III} = 3 \text{ A}.$$

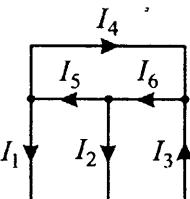
Смерови струја у појединим гранама кола приказани су на слици 12.6.б, а јачине су им:

$$I_1 = I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = I_{II} - I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_3 = I_{II} = 2 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{III} = 3 \text{ A}, \quad I_5 = I_1 + I_{III} = 4 \text{ A}, \quad I_6 = I_{II} + I_{III} = 5 \text{ A}.$$



Слика 12.6.а.



Слика 12.6.б.

12.7. Пошто коло садржи и идеалне струјне генераторе, независне контуре се не могу бирати тако да струјни генератори буду у независним гранама одговарајућих контура. У конкретном случају, избор независних контура и одабрани смерови контурних струја приказани су на слици 12.7.а. Како су струје III и IV контурсе већ познате ($I_{\text{III}} = J_1$ и $I_{\text{IV}} = J_2$) поставља се систем од две једначине

$$I_1 R_{11} + I_{\text{II}} R_{12} + I_{\text{III}} R_{13} + I_{\text{IV}} R_{14} = (\Sigma E)_1$$

$$I_1 R_{21} + I_{\text{II}} R_{22} + I_{\text{III}} R_{23} + I_{\text{IV}} R_{24} = (\Sigma E)_{\text{II}}$$

где је:

$$R_{11} = R_2 + R_3 + R_4 = 25\Omega, \quad R_{22} = R_4 + R_5 + R_6 = 25\Omega, \quad R_{12} = R_{21} = R_4 = 10\Omega,$$

$$R_{13} = R_3 = 5\Omega, \quad R_{14} = R_3 = 5\Omega, \quad R_{23} = -R_5 = -5\Omega, \quad R_{24} = 0,$$

$$(\Sigma E)_1 = E_2 + E_3 + E_4 = 41\text{V}, \quad (\Sigma E)_{\text{II}} = E_4 = 18\text{V},$$

на се горњи систем једначина своди на

$$25I_1 + 10I_{\text{II}} = 26$$

$$10I_1 + 25I_{\text{II}} = 23$$

Решавањем овог система једначина за непознате контурне струје се добија

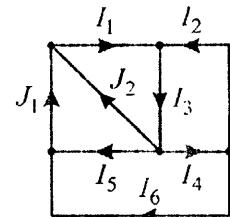
$$I_1 = 0.8\text{A} \quad \text{и} \quad I_{\text{II}} = 0.6\text{A}.$$

Смерови струја у појединим гранама приказани су на слици 12.7.б, док су њихове јачине:

$$I_1 = J_1 + J_2 = 3\text{A}, \quad I_2 = I_1 = 0.8\text{A},$$

$$I_3 = J_1 + J_2 + I_1 = 3.8\text{A}, \quad I_4 = I_1 + I_{\text{II}} = 1.4\text{A},$$

$$I_5 = J_1 - I_{\text{II}} = 0.4\text{A}, \quad I_6 = I_{\text{II}} = 0.6\text{A}.$$



Слика 12.7.6.

12.8. $I_1 = 2\text{A}$,

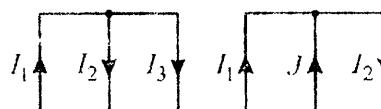
$$I_2 = I_3 = 1\text{A}$$



Слика 12.8.

12.9. $I_1 = 1\text{A}$.

$$I_2 = 2\text{A}$$



Слика 12.9.



Слика 12.10.

12.10. $I_1 = 0.5 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $I_3 = 1.5 \text{ A}$, $I_4 = 1 \text{ A}$.

12.11. Како је метод потенцијала чврова изведен за коло које садржи искључиво струјне генераторе, то најпре треба трансфигурирати све напонске генераторе у струјне. Након трансфигурације добија се шема као на слици 12.11.а. Коло има укупно четири чвора од којих се један, потпуно произвольно, бира за референтни (слика). За коло које има три независна чвора систем једначина гласи:

$$\begin{aligned} G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} &= (\Sigma J)_1 \\ -G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} &= (\Sigma J)_2 \\ -G_{31}U_{10} - G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} &= (\Sigma J)_3 \end{aligned}$$

где је

$$G_{11}^* = \frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_3} = 1.5 \text{ S}, \quad G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 2 \text{ S}, \quad G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = 2 \text{ S},$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_3} = 1 \text{ S}, \quad G_{13} = G_{31} = 0, \quad G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_4} = 1 \text{ S},$$

$$(\Sigma J)_1^* = J_2 - \frac{E_1}{R_1 + R_5} = -1.5 \text{ A}, \quad (\Sigma J)_2 = J_1 = 3 \text{ A}, \quad (\Sigma J)_3 = \frac{E_2}{R_2} - J_2 = 1 \text{ A},$$

одакле се добија

$$\begin{aligned} 1.5U_{10} - U_{20} - 0 &= -1.5 \\ -U_{10} + 2U_{20} - U_{30} &= 3 \\ 0 - U_{20} + 2U_{30} &= 1 \end{aligned}$$

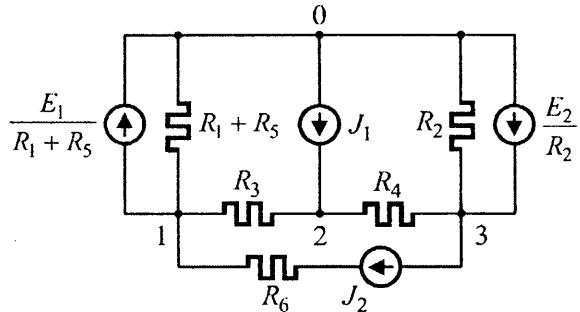
Решења овог система једначина су:

$$U_{10} = 1 \text{ V}, \quad U_{20} = 3 \text{ V}, \quad U_{30} = 2 \text{ V}.$$

* Веома често, посебно када се не црта трансфигурисано коло, чине се грешке следећег облика:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1}^* + \frac{1}{R_5}^* + \frac{1}{R_3} \quad G_{11}^* = \frac{1}{R_1}^* + \frac{1}{R_5}^* + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}^* \quad (\Sigma J)_1 = J_2 - \frac{E_1}{R_1}^*,$$

на шта треба обратити посебну пажњу.

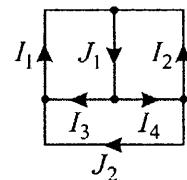


Слика 12.11.а.

па се, директном примском Омовог закона за грану сложеног кола, за појединачне струје добија:

$$I_1 = 3 \text{ A}, I_2 = 0, I_3 = 2 \text{ A} \text{ и } I_4 = 1 \text{ A}.$$

Ознаке и смерови појединачних струја приказани су на слици 12.12.б.



Слика 12.11.6.

12.12. Како коло садржи идеалне напонске генераторе у појединачним гранама, то избор рефлектичног (0) чвора није слободан. Он се мора бирати тако да за њега буду везани идеални напонски генератори (слика 12.12.а). Како коло има четири независна чвора, а пошто су потенцијали чворова 3 и 4 већ познати ($U_{30} = E_1$ и $U_{40} = -E_4$), то се поставља систем од две једначине:

$$\begin{aligned} G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} - G_{14}U_{40} &= (\Sigma J)_1 \\ -G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} - G_{24}U_{40} &= (\Sigma J)_2 \end{aligned}$$

где је

$$G_{11} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 1.5 \text{ S}, \quad G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 1.5 \text{ S}, \quad G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_2} = 1 \text{ S},$$

$$G_{13} = G_{24} = 0, \quad G_{14} = \frac{1}{R_3} = 1 \text{ S}, \quad G_{23} = \frac{1}{R_1} = 1 \text{ S},$$

$$(\Sigma J)_1 = J_2 + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} = 13 \text{ A}, \quad (\Sigma J)_2 = J_1 - \frac{E_2}{R_2} = -3 \text{ A}.$$

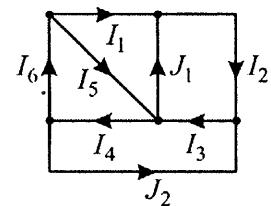
Решење система једначина је

$$U_{10} = 6 \text{ V} \quad \text{и} \quad U_{20} = 2 \text{ V},$$

па су струје у појединачним гранама (слика 12.12.б):

$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 2 \text{ A}, \quad I_3 = 3 \text{ A},$$

$$I_4 = 10 \text{ A}, \quad I_5 = 8 \text{ A}, \quad I_6 = 9 \text{ A}.$$



Слика 12.12.6.

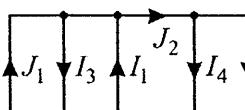
12.13.

$$I_1 = I_3 = 4 \text{ A},$$

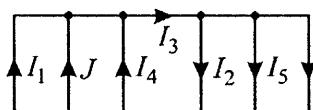
$$I_2 = I_4 = 5 \text{ A},$$

$$P_{J1} = 340 \text{ W},$$

$$P_{J2} = 60 \text{ W}$$



Слика 12.13.



Слика 12.14.

12.14. $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 2.5 \text{ A}$, $I_3 = 4 \text{ A}$, $I_4 = 1 \text{ A}$, $I_5 = I_6 = 0.75 \text{ A}$, $P_J = 0$.

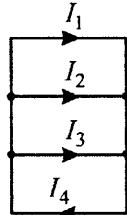
12.15. $U_J = 3.6 \text{ V}$.

12.16. (Кирхофови закони - 4, контурне струје - 3, потенцијали чврова - 1)

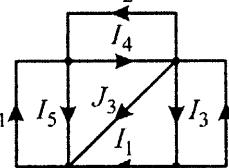
$$I_1 = 1.5 \text{ A}, I_2 = 0, I_3 = 2.5 \text{ A}, I_4 = 4 \text{ A}.$$

12.17. (Кирхофови закони - 5, контурне струје - 2, потенцијали чврова - 3)

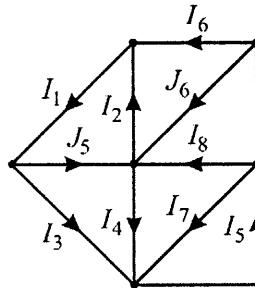
$$I_1 = I_2 = 0, I_3 = I_4 = I_5 = 1 \text{ A}.$$



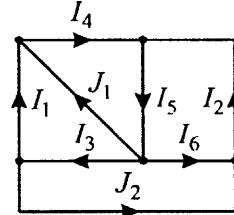
Слика 12.16.



Слика 12.17.



Слика 12.18.



Слика 12.19.

12.18. (Кирхофови закони - 8, контурне струје - 4, потенцијали чврова - 1)

$$I_1 = I_8 = 5 \text{ A}, I_2 = 1 \text{ A}, I_3 = I_6 = 4 \text{ A}, I_4 = 10 \text{ A}, I_5 = 17 \text{ A}, I_7 = 3 \text{ A}.$$

12.19. (Кирхофови закони - 6, контурне струје - 2, потенцијали чврова - 4)

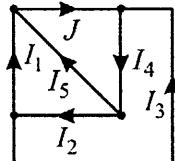
$$I_1 = 1 \text{ A}, I_2 = I_4 = 2 \text{ A}, I_3 = 3 \text{ A}, I_5 = 4 \text{ A}, I_6 = 0.$$

12.20. (Кирхофови закони - 5, контурне струје - 2, потенцијали чврова - 2)

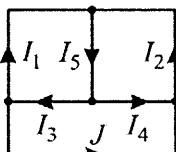
$$I_1 = I_5 = 1 \text{ A}, I_2 = 3 \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A}, I_4 = 4 \text{ A}.$$

12.21. (Кирхофови закони - 5, контурне струје - 2, потенцијали чврова - 3)

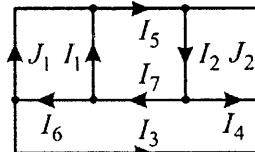
$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}, I_3 = I_5 = 2 \text{ A}, I_4 = 0.$$



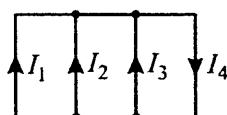
Слика 12.20.



Слика 12.21.



Слика 12.23.



Слика 12.24.

12.22. (Кирхофови закони - 7, контурне струје - 4, потенцијали чврова - 1)

$$P_{E2} = 50 \text{ W}, P_{E3} = 240 \text{ W}, P_{E4} = 255 \text{ W}, P_J = 1 \text{ W}.$$

12.23. (Кирхофови закони - 7, контурне струје - 2, потенцијали чвррова - 5)

$$I_1 = 0, I_2 = 3 \text{ A}, I_3 = I_4 = I_5 = 1 \text{ A}, I_6 = I_7 = 2 \text{ A}.$$

12.24. (Кирхофови закони - 3, контурне струје - 2, потенцијали чвррова - 1)

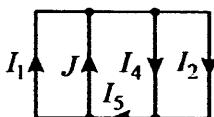
$$I_1 = 0.25 \text{ A}, I_2 = 1.625 \text{ A}, I_3 = 0.875 \text{ A}.$$

12.25. (Кирхофови закони - 4, контурне струје - 2, потенцијали чвррова - 2)

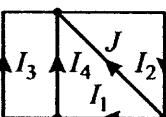
$$I_1 = 0, I_2 = 1.5 \text{ A}, I_4 = 0.5 \text{ A}, I_5 = 2 \text{ A}.$$

12.26. (Кирхофови закони - 4, контурне струје - 2, потенцијали чвррова - 2)

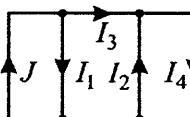
$$I_1 = 5 \text{ A}, I_2 = 6 \text{ A}, I_3 = 4.5 \text{ A}, I_4 = 0.5 \text{ A}, P_J = 2 \text{ W}.$$



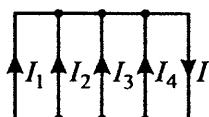
Слика 12.25.



Слика 12.26.



Слика 12.27.



Слика 12.28.

12.27. (Кирхофови закони - 4, контурне струје - 2, потенцијали чвррова - 2)

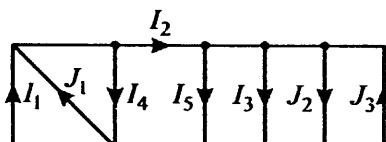
$$I_1 = I_3 = I_4 = 1 \text{ A}, I_2 = 0.$$

12.28. (Кирхофови закони - 5, контурне струје - 4, потенцијали чвррова - 1)

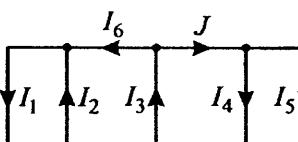
$$I_1 = 15 \text{ A}, I_2 = 20 \text{ A}, I_3 = 60 \text{ A}, I_4 = 25 \text{ A}, I = 120 \text{ A}.$$

12.29. (Кирхофови закони - 5, контурне струје - 3, потенцијали чвррова - 1)

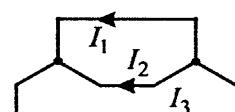
$$I_1 = 0.5 \text{ A}, I_2 = I_5 = 1.5 \text{ A}, I_3 = 0, I_4 = 1 \text{ A}.$$



Слика 12.29.



Слика 12.30.



Слика 12.31.

12.30. (Кирхофови закони - 6, контурне струје - 3, потенцијали чвррова - 1)

$$I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = I_4 = I_5 = I_6 = 1 \text{ A}, I_3 = 3 \text{ A}.$$

12.31. (Кирхофови закони - 3, контурне струје - 2, потенцијали чвррова - 1)

$$I_1 = (90/16) \text{ A}, I_2 = (15/16) \text{ A}, I_3 = (105/16) \text{ A}.$$

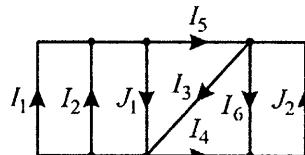
12.32. (Кирхофови закони - 6, контурне струје - 3, потенцијали чвррова - 2)

$$I_1 = 4 \text{ A}, I_2 = 3 \text{ A}, I_3 = I_4 = 2 \text{ A}, I_5 = I_6 = 0.$$

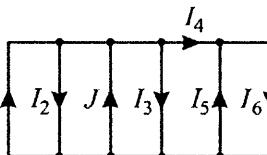
12.33. (Кирхофови закони - б, контурне струје - 3, потенцијали чврова - 3. Код примене метода контурних струја добијају се три једначине са по једном непознатом струјом) $P_J = 15 \text{ W}$.

12.34. (Кирхофови закони - 9, контурне струје - 4, потенцијали чврова - 3)

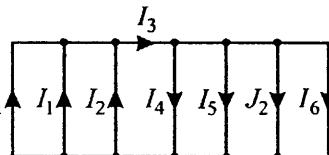
$$P_{E2} = 55 \text{ W}, P_{E3} = 1935 \text{ W}.$$



Слика 12.32.



Слика 12.35.



Слика 12.36.

12.35. (Кирхофови закони - б, контурне струје - 4, потенцијали чврова - 2)

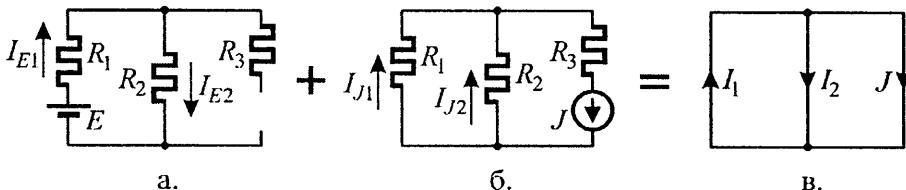
$$I_1 = 8 \text{ A}, I_2 = I_5 = 2 \text{ A}, I_3 = 7 \text{ A}, I_4 = 3 \text{ A}, I_6 = 5 \text{ A}.$$

12.36. (Кирхофови закони - б, контурне струје - 4, потенцијали чврова - 2)

$$I_1 = I_2 = I_5 = 2 \text{ A}, I_3 = 7 \text{ A}, I_4 = 3 \text{ A}, I_6 = 1 \text{ A}.$$

12.37. Када делује само генератор E (Слика 12.37.а) струја кроз отпорнике R_1 и R_2 је иста,

$$I_{E1} = I_{E2} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1 \text{ A}.$$



Слика 12.37.

Када делује само генератор J (Слика 12.37.б) напон на паралелно вези отпорника R_1 и R_2 је

$$U = J \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

па су струје:

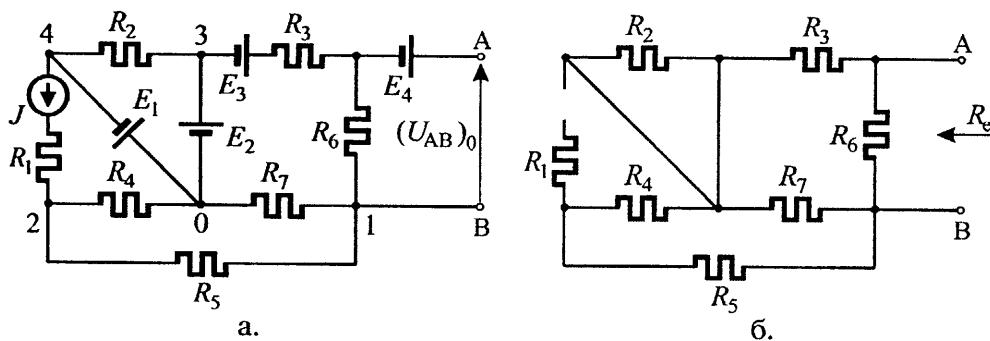
$$I_{J1} = \frac{U}{R_1} = \frac{JR_2}{R_1 + R_2} = 0.5 \text{ A} \quad \text{и} \quad I_{J2} = \frac{U}{R_2} = \frac{JR_1}{R_1 + R_2} = 0.5 \text{ A}.$$

Када оба генератора делују истовремено струје су (Слика 12.37.в):

$$I_1 = I_{E1} + I_{J1} = 1.5 \text{ A} \quad \text{и} \quad I_2 = I_{E2} - I_{J2} = 0.5 \text{ A}.$$

12.38. Задатак се најлакше решава применом метода суперпозиције (применом метода контурних струја, односно метода потенцијала чврова добио би се систем од три једначине са три непознате). Када делује само генератор E_1 , добија се мост у равнотежи, па је струја у дијагонали BD једнака нули. Такође се, када делује само генератор E_2 , ради о уравнотеженом мосту па је струја у дијагонали AC једнака нули. Тражене струје су: $I_1 = I_2 = 0.3\text{ A}$, $I_3 = 0.5\text{ A}$, $I_4 = 0.1\text{ A}$, $I_5 = 0.6\text{ A}$, $I_6 = 0.2\text{ A}$.

12.39. За одређивање напона празног хода двопола неопходно је решити коло са Слике 12.39.а. Најпогоднији је метод потенцијала чврова јер даје систем од само две једначине:



Слика 12.39.

$$\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_3 + R_6} \right) U_{10} - \frac{1}{R_5} U_{20} - \frac{1}{R_3 + R_6} E_2 = \frac{E_3}{R_3 + R_6}$$

$$- \frac{1}{R_5} U_{10} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) U_{20} = J,$$

чије је решење

$$U_{10} = U_{20} = 10\text{ V}.$$

Струја I_6 израчунава се директном применом Омовог закона за грану сложеног кола,

$$I_6 = \frac{U_{31} + E_3}{R_3 + R_6} = \frac{U_{30} - U_{10} + E_3}{R_3 + R_6} = \frac{E_2 - U_{10} + E_3}{R_3 + R_6} = 0.5\text{ A},$$

тако да је напон празног хода двопола

$$(U_{AB})_0 = \Sigma RI - \Sigma E = R_6 I_6 + E_4 = 20\text{ V}.$$

За одређивање еквивалентне отпорности двопола све генераторе у колу треба заменити њиховим унутрашњим отпорностима, као на слици 12.39.б. Очигледно је да отпорници R_1 (јер је откачен) и R_2 (јер је кратко спојен) немају утицаја на еквивалентну отпорност, па је

$$R_e = ((R_4 \oplus R_5) \parallel R_7 \oplus R_3) \parallel R_6 = 10\Omega.$$

Трансфигурацијом овако добијеног еквивалентног Тевененовог генератора, електромоторне силе и унутрашње отпорности

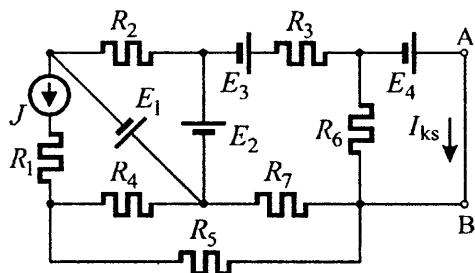
$$E = (U_{AB})_0 = 20V \quad \text{и} \quad R_i = R_e = 10\Omega,$$

у струјни генератор,

$$J = E/R_i = 2A \quad \text{и} \quad R_s = R_i = 10\Omega,$$

добија се еквивалентни Нортонов генератор.

12.40. Да би се одредила струја кратког споја Нортоновог генератора, I_{ks} , приступне крајеве A и B двопола треба кратко спојити као на слици 12.40. Овако добијено коло трсба решити неком методом за решавање сложених електричних кола. У овом случају није могуће примснити метод потенцијала чврова (јер идеални напонски генератори нису везани за исти чвр). Метод контурних струја даје четири једначине са чтири непознате. Погодним избором контура ($E_1 - E_2 - R_2$, $E_2 - E_3 - R_3 - R_7$, $E_4 - R_6$, $R_4 - R_5 - R_7$ и $J - R_1 - R_4 - E_1$) добија се релативно једноставан систем једначина. Као решење за струју кратког споја се добија $I_{ks} = 2A$. Еквивалентна отпорност се одређује на идентичан начин као и у претходном задатку и износи $R_e = 10\Omega$.



Слика 12.40.

Трансфигурацијом овако добијеног еквивалентног Нортоновог генератора, струје кратког споја и унутрашње отпорности

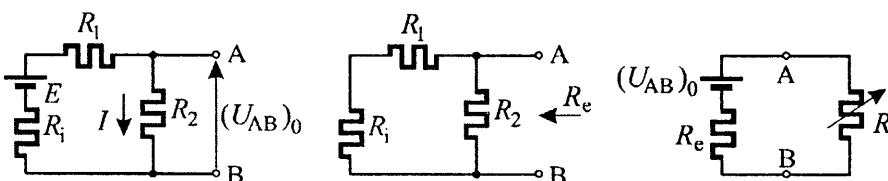
$$J = I_{ks} = 2A \quad \text{и} \quad R_s = R_e = 10\Omega,$$

у напонски генератор,

$$E = JR_s = 20V \quad \text{и} \quad R_i = R_s = 10\Omega,$$

добија се еквивалентни Тевененов генератор.

12.41. Поступак решавања може се пратити уз помоћ слике 12.41.



Слика 12.41.

У односу на променљиви отпорник остатак кола (двопол A–B) се може заменити еквивалентним Тевененовим генератором. Електромоторна сила и унутрашња отпорност овог генератора су

$$(U_{AB})_0 = IR_2 = \frac{E}{R_i + R_l + R_2} R_2 = 18 \text{ V} \quad \text{и} \quad R_e = (R_i + R_l) \| R_2 = 24 \Omega.$$

Како је на тај начин добијено коло са једним генератором и једним потрошачем, може се директно искористити услов прилагођења. На отпорнику R ће се развијати максимална снага када је његова отпорност једнака унутрашњој отпорности генератора, $R = R_e = 24 \Omega$, и износиће

$$P_{\max} = (U_{AB})_0^2 / 4R_e = 3.375 \text{ W}.$$

☛ 12.42. У односу на грану са променљивим отпорником остатак кола се може заменити еквивалентним Тевененовим генератором чији су електромоторна сила $(U_{AB})_0 = 12 \text{ V}$ и унутрашња отпорност $R_e = 3 \Omega$. Струја кроз отпорник R је, сходно Омовом закону,

$$I = \frac{(U_{AB})_0}{R_e} = \frac{12}{3 + R}.$$

☛ 12.43. $(U_{AB})_0 = 60 \text{ V}$, $R = R_e = 12 \Omega$, $P_{\max} = 75 \text{ W}$.

☛ 12.44. $(U_{AB})_0 = 10 \text{ V}$, $R = R_e = 1 \Omega$, $P_{\max} = 25 \text{ W}$.

☛ 12.45. Остатак кола у односу на R_l може се заменити Тевененовим генератором. Из услова да је снага на R_l једнака нули следи да је електромоторна сила Тевененовог генератора једнака нули. То ће бити испуњено када је $J = 6 \text{ A}$.

☛ 12.46. У односу на R_s остатак кола заменити Тевененовим генератором. Решење је $J = 5 \text{ A}$.

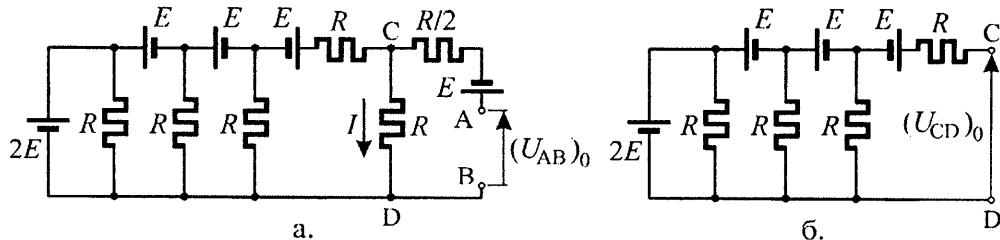
☛ 12.47. $(U_{AB})_0 = 40 \text{ V}$, $R = R_e = 20 \Omega$, $P_{\max} = 20 \text{ W}$.

☛ 12.48. У односу на променљиви отпорник остатак кола се може заменити Тевененовим генератором електромоторне силе $(U_{AB})_0 = 3.5 \text{ V}$ и унутрашње отпорности $R_e = 1 \Omega$. Максимална струја кроз отпорник је када је његова отпорност једнака нули и износи $I_{\max} = 3.5 \text{ A}$. Максимална снага је у случају прилагођења, $R = R_e$, и износи $P_{\max} = 3.0625 \text{ W}$.

12.49. $(U_{AB})_0 = 8 \text{ V}$, $R = R_e = 5\Omega$, $P_{\max} = 3.2 \text{ W}$.

12.50. $(U_{AB})_0 = 30 \text{ V}$, $R_e = 20\Omega$, $I = 1 \text{ A}$.

12.51. За израчунавање напона U_{AB} потребно је познавати струју у грани AB. Ту струју је најједноставније одредити применом Тевененове теореме (слика 12.51.a). За одређивање напона $(U_{AB})_0$ неопходно је одредити струју I у грани CD. Струја I се може одредити применом метода контурних струја (примена метода потенцијала чворова није могућа јер идсални напонски генератори нису везани за исти чвор), при чему је потребно поставити систем од четири једначине са истим бројем непознатих. Међутим струја I се може одредити тако што ће се још једном применити Тевененова теорема.



Слика 12.51.

Линеарни двопол између тачака C и D (слика 12.51.b) се може замснити еквивалентним Тевенензовим генератором чије су електромоторна сила

$$(U_{CD})_0 = E - E - E + 2E = E$$

и унутрашња отпорност

$$R_{e1} = R.$$

Сада се, према слици 12.51.b, лако могу одредити елементи Тевененовог генератора којим се замењује двопол AB. Струја кроз отпорник R је

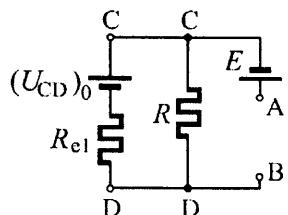
$$I = \frac{(U_{CD})_0}{R + R_{e1}} = \frac{E}{2R},$$

тако да је

$$(U_{AB})_0 = RI + E = \frac{3E}{2},$$

док је еквивалентна отпорност

$$R_e = \frac{R}{2} \oplus R_{e1} \| R = R.$$



Слика 12.51.b.

Струја у грани АВ је

$$I_{AB} = \frac{(U_{AB})_0}{R_e + R} = \frac{3E}{4R},$$

тако да је тражени напон U_{AB}

$$U_{AB} = I_{AB}R = \frac{3}{4}E.$$

12.52. $\Delta U_{CD} = -0.322$ V.

12.53. $(U_{AB})_0 = 30$ V, $R_6 = R_e = 42\Omega$, $P_{max} \approx 5.36$ W.

12.54. $J = 1.5$ A.

12.55. У односу на променљиви отпорник остатак кола се може заменити еквивалентним Тевененовим генератором електромоторне сile $(U_{AB})_0 = 10$ V и унутрашње отпорности $R_e = 10\Omega$ (слика 12.55.а). Струја кроз отпорник R је

$$I = \frac{(U_{AB})_0}{R_e + R} = \frac{10}{10 + R},$$

а напон на његовим крајевима

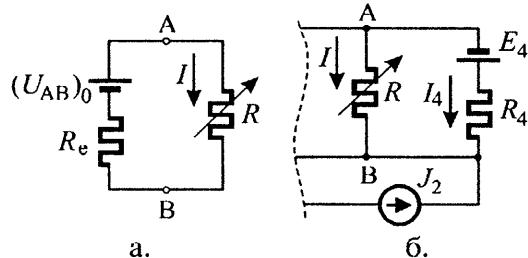
$$U_{AB} = RI = \frac{10R}{10 + R}.$$

Јасно је да је напон између тачака А и В и у основном колу (слика 12.55.б) исти, па је струја кроз генератор E_4

$$I_4 = \frac{U_{AB} + E_4}{R_4} = \frac{5 + R}{10 + R}$$

и његова снага

$$P_{E4} = I_4 E_4 = 10 \frac{5 + R}{10 + R}.$$



Слика 12.55.

13. НЕЛИНЕАРНА ЕЛЕКТРИЧНА КОЛА

13.1. Редна веза нелинеарних отпорника N_1 и N_2 може се заменити једним, еквивалентним нелинеарним отпорником, N_e (слика 13.1.a). Услов еквиваленције је да при свакој вредности струје напон на еквивалентном нелинеарном отпорнику буде једнак збиру напона на нелинеарним отпорницима N_1 и N_2 . Имајући у виду овај услов, лако се може добити волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника N_e (слика 13.1.b).

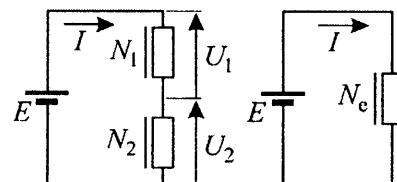
Напон на еквивалентном нелинеарном отпорнику (у овом случају тај напон је једнак електромоторној сили E) одређује његову радну тачку А, а самим тим и струју кроз њега, $I \approx 1.17\text{ A}$ (беле стрелице). Ова струја протиче кроз нелинеарне отпорнике N_1 и N_2 и одређује њихове радне тачке В и С, а самим тим и напоне на њима, $U_1 \approx 8.34\text{ V}$ и $U_2 \approx 16.62\text{ V}$ (црне стрелице). Лако се може проверити да је

$$U_1 + U_2 = 8.34 + 16.62 = 24.96 \approx 25\text{ V},$$

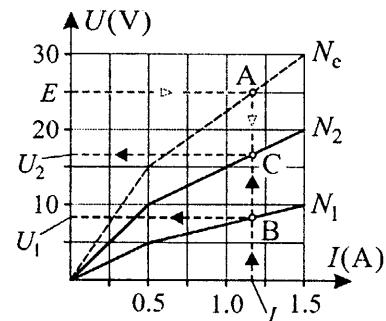
што је задовољавајућа тачност.

13.2. Паралелна веза нелинеарних отпорника N_1 и N_2 може се заменити једним, еквивалентним нелинеарним отпорником, N_e (слика 13.2.a). Услов еквиваленције је да за сваку вредност напона кроз еквивалентни нелинеарни отпорник протиче струја која је једнака збиру струја кроз нелинеарне отпорнике N_1 и N_2 . Имајући у виду овај услов, лако се може добити волтамперска карактеристика еквивалентног нелинеарног отпорника N_e (слика 13.2.b).

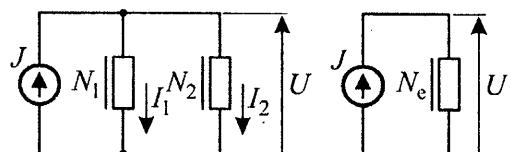
Струја кроз сквивалентни нелинеарни отпорник (у овом случају та струја је једнака струји кратког споја струјног генератора, J) од-



Слика 13.1.a.



Слика 13.1.b.

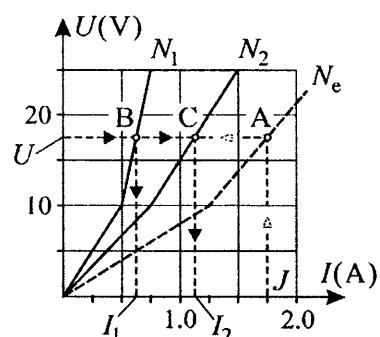


Слика 13.2.a.

ређује његову радну тачку А, а самим тим и напон на њему, $U \approx 17.5$ V (беле стрелице). Овај напон је уједно и напон на нелинеарним отпорницима N_1 и N_2 , тако да одређује њихове радне тачке В и С, а самим тим и струје кроз њих, $I_1 \approx 0.624$ A и $I_2 \approx 1.128$ A (црне стрелице). Лако се може проверити да је

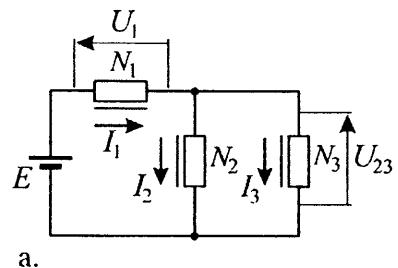
$$I_1 + I_2 = 0.624 + 1.128 = 1.752 \approx 1.75 \text{ A},$$

што је задовољавајућа тачност.

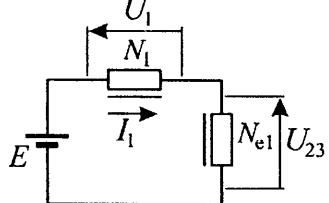


Слика 13.2.6.

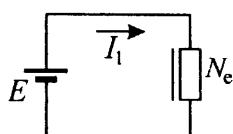
13.3. Паралелна веза нелинеарних отпорника N_2 и N_3 (слика 13.3.а) може се заменити једним сквивалентним нелинеарним отпорником N_{el} (слика 13.3.б), а затим редна веза N_1 и N_{el} сквивалентним отпорником N_e (Слика 13.3.в). На слици 13.3.г. приказане су карактеристике нелинеарних отпорника N_1 , N_2 , N_3 , N_{el} и N_e .



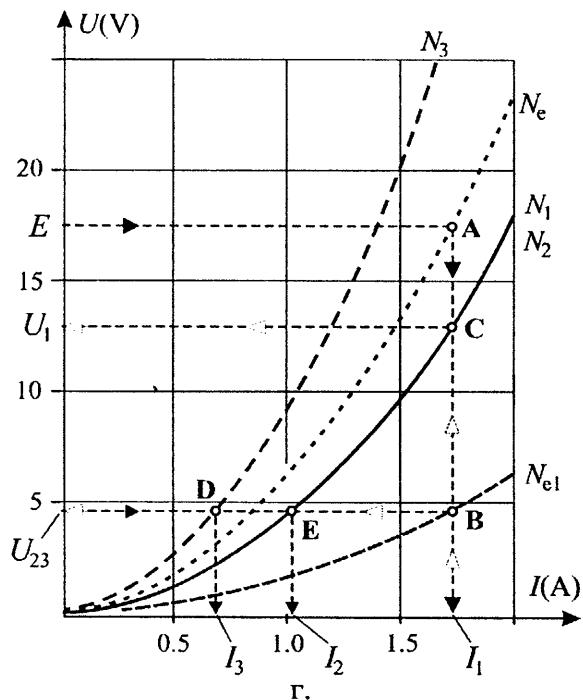
a.



б.



в.



Слика 13.3.

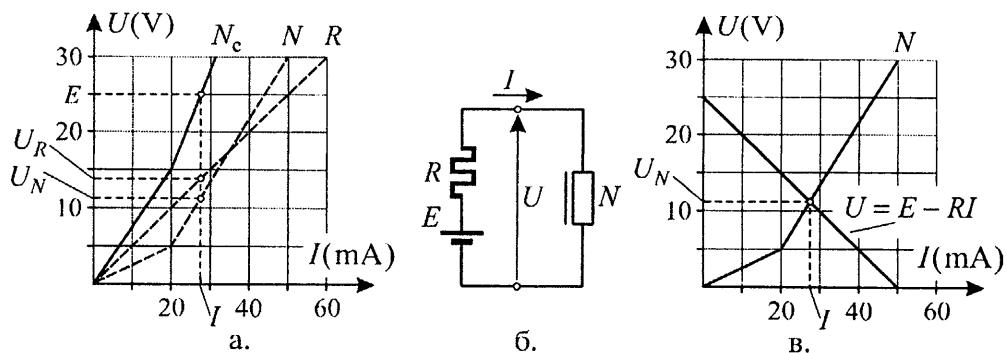
Напон на нелинеарном отпорнику (једнак је слектромоторној сили E) N_e одређује његову радну тачку А, а самим тим и струју I_1 (веће

црне стрелице) која износи $I_1 \approx 1.74 \text{ A}$. Струја I_1 (слика 13.3.б) одређује радне тачке В и С нелинеарних отпорника N_{el} и N_1 , респективно, а самим тим и напоне на њима, $U_{23} \approx 4.7 \text{ V}$ и $U_1 \approx 12.9 \text{ V}$ (беле стрелице на дијаграму).

Конечно, напон U_{23} на паралелној вези N_3 и N_2 (слика 13.3.а) одређује радне тачке Д и Е нелинсарних отпорника N_3 и N_2 , респективно, а самим тим и струје кроз њих, $I_3 \approx 0.69 \text{ A}$ и $I_2 \approx 1.03 \text{ A}$ (мање црне стрелице на дијаграму). Тачност решења се може лако проверити,

$$U_1 + U_{23} = 17.6 \text{ V} \approx E = 17.5 \text{ V} \quad \text{и} \quad I_2 + I_3 = 1.72 \text{ A} \approx I_3 = 1.74 \text{ A}.$$

13.4. Када се нацрта волтамперска карактеристика линеарног отпорника (права) задатак се може решити на идентичан начин као и задатак 13.1. (видети решење на слици 13.4.а). Резултати су $I \approx 27.56 \text{ mA}$, $U_N \approx 11.23 \text{ V}$ и $U_R \approx 13.81 \text{ V}$.



Слика 13.4.

Задатак се може решити и на једноставнији начин, при чему се избегава цртање карактеристике еквивалентног нелинсарног отпорника, а самим тим повећава прецизност.

Посматрајмо задато коло (слика 13.4.б). Напон на нелинеарном отпорнику, U , је функција струје кроз њега, I , и мора задовољити волтамперску карактеристику нелинсарног отпорника, то јест

$$U = U(I).$$

С друге стране, напон U се може одредити као електромоторна сила E умањена за напон на линеарном отпорнику R ,

$$U = E - RI,$$

што практично представља спољашњу карактеристику генератора електромоторне силе E и унутрашње отпорности R .

На тај начин се добија систем од две једначине са две непознате, U и I . Понито је прва једначина нелинеарна, систем се решава графички. Решење је у пресеку графика функција

$$U = U(I) \quad \text{и} \quad U = E - RI.$$

Први график је већ задат (волтамперска карактеристика ислинсарног отпорника), док друга једначина представља једначину праве која се лако црта на основу две тачке. Најједноставније је узети тачке на координатним осама

$$I = 0 \quad U = E = 25 \text{ V}$$

$$U = 0 \quad I = E / R = 50 \text{ mA.}$$

У пресеку карактеристике нелинеарног отпорника и ове праве (спољашње карактеристике генератора или, како се јоп назива, радне праве) налази се радна тачка (слика 13.4.в) која дефинише струју у колу и напон на нелинеарном отпорнику:

$$I \approx 27.55 \text{ mA} \quad \text{и} \quad U_N \approx 11.25 \text{ V.}$$

Напон на линсарном отпорнику се одређује као $U_R = E - U_N \approx 13.75 \text{ V.}$

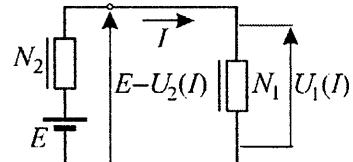
13.5. Задатак се може решити на исти начин као и задатак 13.1, али је далеко ефикасније применити поступак из претходног задатка. Један од ислинсарних отпорника, рецимо N_2 , може се сматрати унутрашњом отпорношћу генератора (слика 13.5.а). Напон на крајевима овог генератора ће за сваку вредност струје бити једнак електромоторној сили E умањеној за напон на нелинеарном отпорнику N_2 (спољашња карактеристика нелинеарног генератора),

$$U = E - U_2(I).$$

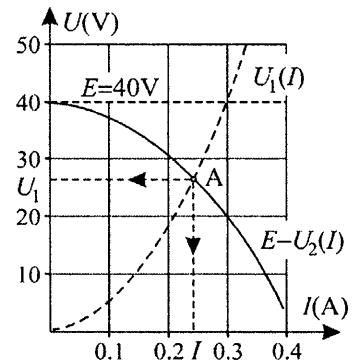
С друге стране, тај напон је једнак напону на нелинеарном отпорнику N_1 ,

$$U = U_1(I).$$

Решење овог система једначина налази се у пресеку спољашње карактеристике генератора и волтамперске карактеристике ислинсарног отпорника N_1 (слика 13.5.б). На тај начин одређена је радна тачка А нелинеарног отпорника N_1 , напон на њему $U_1 \approx 26.5 \text{ V}$ и струја у колу $I \approx 0.242 \text{ A}$. Напон на нелинеарном отпорнику N_2 лако се одређује као $U_2 = E - U_1 \approx 13.5 \text{ V.}$



Слика 13.5.а.



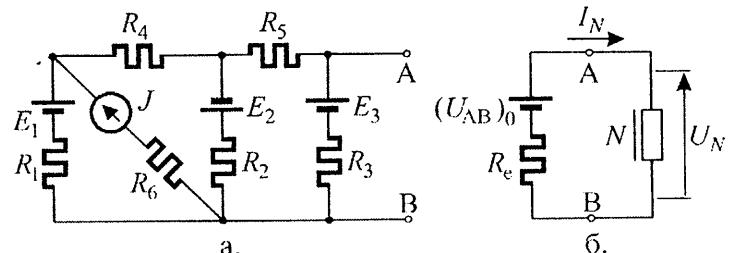
Слика 13.5.б.

13.6. Применом Тевененове теореме цело коло се, у односу на нелинеарни отпорник (слике 13.6.а. и б), може заменити сквивалентним Тевененовим генератором чији су електромоторна сила и унутрашња отпорност

$$(U_{AB})_0 = 10 \text{ V}.$$

и

$$R_e = 5\Omega.$$



Слика 13.6.

Волтамперска карактеристика нелинеарног отпорника и спољашња карактеристика Тевененовог генератора одређују у пресеку (слика 13.6.в) радну тачку, односно струју кроз нелинеарни отпорник и напон на њему,

$$I_N \approx 1.23 \text{ A} \quad \text{и} \quad U_N \approx 3.85 \text{ V}.$$

По одређивању струје и напона нелинеарног отпорника, треба се вратити на оригинално коло како би се одредила струја кроз грану \$E_3 - R_3\$ (део кола приказан на слици 13.6.г). Уколико се примени компензациона теорема може се нелинеарни отпорник заменити идеалним напонским генератором чија је електромоторна сила једнака напону на нелинеарном отпорнику (слика 13.6.д), тако да је

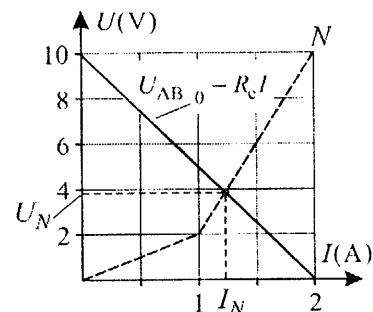
$$E_3 - U_N = R_3 I_3,$$

одакле следи

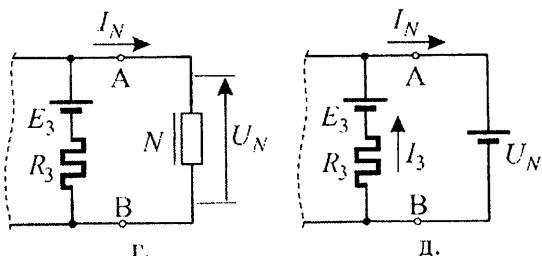
$$I_3 = \frac{E_3 - U_N}{R_3} \approx 1.615 \text{ A}.$$

Снага генератора \$E_3\$ је

$$P_{E3} = E_3 I_3 \approx 32.3 \text{ W}.$$



Слика 13.6.в.



Слика 13.6.

13.7. \$(U_{AB})_0 = 20 \text{ V}\$, \$R_e = 5\Omega\$, \$U_N = 10 \text{ V}\$, \$I_N = 2 \text{ A}\$. Након одређивања напона на нелинеарном отпорнику лако се, применом Омовог закона за грану сложеног кола, одређују све струје, а затим и снаге на свим елементима кола: \$P_{E1} = 0\$, \$P_{E2} = 20 \text{ W}\$, \$P_J = 20 \text{ W}\$, \$P_{R1} = 0\$, \$P_{R2} = 10 \text{ W}\$, \$P_{R3} = 10 \text{ W}\$, \$P_N = 20 \text{ W}\$.

13.8. $I_N = 0.25 \text{ A}$, $U_N = 0.5 \text{ V}$, $P_N = 0.125 \text{ W}$.

13.9. $U_N = 14.4 \text{ V}$, $I_N = 0.97 \text{ A}$, $P_{E4} = -0.14 \text{ W}$.

13.10. $(U_{AB})_0 = 12 \text{ V}$, $R_e = 3\Omega$, $U_N = 6 \text{ V}$, $I_N = 2 \text{ A}$. Након одређивања напона на нелинеарном отпорнику и струје кроз њега, за одређивање осталих струја у колу може се искористити компензационој теорема. Међутим, веома брзо се до резултата може доћи и применом првог Кирхофовог закона и Омовог закона за грану сложеног кола (слика 13.10).

Струја кроз отпорник R_5 (за смер $A \rightarrow B$) је

$$I_5 = U_N / R_5 = 1 \text{ A},$$

па је струја кроз E_3 (за смер $C \rightarrow A$)

$$I_3 = I_5 + I_N = 3 \text{ A}.$$

Напон између тачака С и В је

$$U_{CB} = R_5 I_5 - E_3 = -54 \text{ V},$$

па је струја кроз R_2 и E_2 (за смер $B \rightarrow C$)

$$I_2 = (U_{BC} - E_2) / R_2 = 3.5 \text{ A}$$

и струја кроз R_4 (за смер $C \rightarrow D$)

$$I_4 = I_2 - I_3 = 0.5 \text{ A}.$$

Коначно, струја кроз E_1 и R_1 (за смер $D \rightarrow B$) је

$$I_1 = I_4 + J = 1.5 \text{ A}.$$

Лако је проверити да је збир снага генератора, $\Sigma P_{gen} = 192 \text{ W}$, једнак збиру снага потрошача.

13.11. Задатак треба решити посебно за случај када је прекидач отворен,

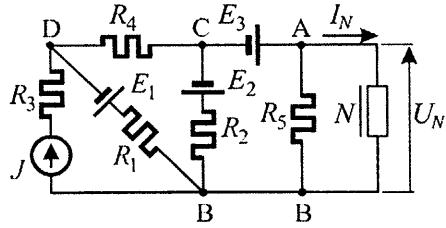
$$(U_{AB})_0 = 15 \text{ V}, R_e = 5\Omega, U_N = 10 \text{ V}, I_N = 1 \text{ A},$$

и за случај када је прекидач затворен,

$$(U_{AB})_0 = 10 \text{ V}, R_e = (10/3)\Omega, U_N = 7.5 \text{ V}, I_N = 0.75 \text{ A}.$$

Тражене промене су: $\Delta U_N = -2.5 \text{ V}$, $\Delta I_N = -0.25 \text{ A}$.

13.12. $P_{J1} = 24 \text{ W}$, $P_{J2} = 21 \text{ W}$, $\Delta P_J = -3 \text{ W}$.



Слика 13.10.

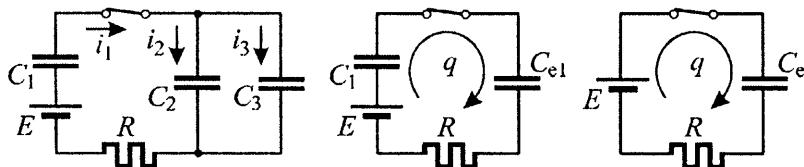
14. ПРЕЛАЗНИ РЕЖИМ У RC КОЛУ; КОЛА СА КОНДЕНЗАТОРИМА

14.1. Коло се може поступно упростити као на слици 14.1. Израз за протеклу количину електричитета q дат је у Прегледу основних законака и израза, одељак 46,

$$q = EC_e \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

При томе треба водити рачуна да је

$$\tau = RC_e = R \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$



Слика 14.1.

Струја i_1 је, по дефиницији,

$$i_1 = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Напони на C_1 и паралелној вези C_2 и C_3 (C_{el}) су

$$u_1 = \frac{q}{C_1} = E \frac{C_2 + C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

и

$$u_2 = u_3 = \frac{q}{C_{el}} = E \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

па се из познатих напона u_2 и u_3 могу одредити струје кроз кондензаторе C_2 и C_3 ,

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt} = C_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{E}{R} \frac{C_2}{C_2 + C_3} e^{-t/\tau}$$

и

$$i_3 = \frac{dq_3}{dt} = C_3 \frac{du_3}{dt} = \frac{E}{R} \frac{C_3}{C_2 + C_3} e^{-t/\tau}.$$

Лако је проверити да је

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

14.2. У трснутку затварања прекидача кроз коло ће почети да пратиче променљива струја i , односно до било ког тренутка t кроз коло ће протећи укупна количина електричног струја q (слика 14.2.а). Количина електричног струја на кондензатору C_1 ће се смањивати и у било ком тренутку t износиће

$$q_1 = Q_{10} - q,$$

док ће се на кондензатору C_2 повећавати и у било ком тренутку t биће

$$q_2 = q.$$

Напони на појединим кондензаторима су пропорционални њиховом оптерећењу,

$$u_{C1} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{Q_{10} - q}{C_1} \quad \text{и} \quad u_{C2} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q}{C_2},$$

док ће напон на отпорнику, имајући у виду дефинициони израз за струју, бити

$$u_R = R i = R \frac{dq}{dt}.$$

Како у сваком тренутку мора бити задовољен II Кирхофов закон,

$$u_{C1} = u_R + u_{C2},$$

то следи

$$\frac{Q_{10} - q}{C_1} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_2}.$$

Добијена хомогена диференцијална једначина првог реда која раздава променљивс се лако може свести на погоднији облик за решавање,

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_{10} - q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} R \frac{dq}{dt}.$$

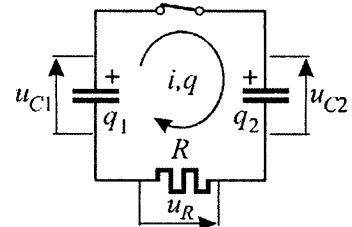
Константа на десној страни последње једначине има димензију времсна и назива се временска константа

$$\tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Сређивањем горње једначине коначно се добија

$$\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_{10} - q} = \frac{dt}{\tau},$$

и након интеграције обе стране



Слика 14.2.а.

$$-\ln\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_{10}-q\right)=\frac{t}{\tau}+A,$$

где је A константа интеграције која се одређује из почетних услова.

Када се последња једначина помножи са -1 и обсма странама степенује е (основа природног логаритма) добија се много погоднија веза између q и t

$$\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_{10}-q=Ae^{-t/\tau},$$

односно

$$q=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_{10}-Ae^{-t/\tau}.$$

(Да не би дошло до забуне треба напоменути да се константа интеграције може писати у било ком облику до њеног коначног одређивања.)

У овом случају константа интеграције се одређује из услова да је у тренутку $t=0$ протекла количина електричитета кроз коло једнака нули, $q=0$, па из

$$0=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_{10}-Ae^0 \Rightarrow A=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_{10}.$$

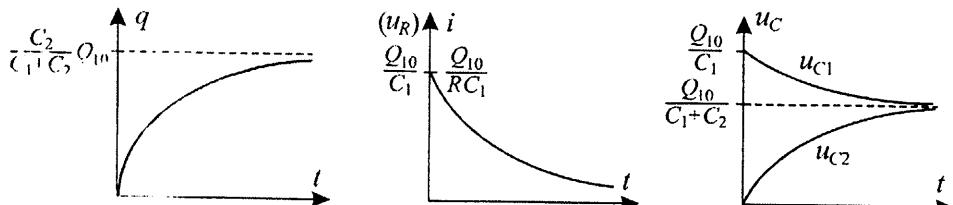
Према томе, количина слектричитета q која је до било ког тренутка t протекла кроз коло је

$$q=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_{10}\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

на су струја у колу и напони на појединим елементима:

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{Q_{10}}{RC_1}e^{-t/\tau}, \quad u_R=Ri=\frac{Q_{10}}{C_1}e^{-t/\tau},$$

$$u_C=\frac{Q_{10}-q}{C_1}=\frac{Q_{10}}{C_1+C_2}\left(1+\frac{C_2}{C_1}e^{-t/\tau}\right) \quad \text{и} \quad u_{C2}=\frac{q}{C_2}=\frac{Q_{10}}{C_1+C_2}\left(1-e^{-t/\tau}\right).$$



Слика 14.2.6.

Потенцијали $q(t)$, $i(t)$, $u_R(t)$, $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$ приказани су на слици 14.2.6.

Пошто је струја кроз отпорник променљива, биће променљива и снага на њему,

$$p = Ri^2,$$

шта је рад на отпорнику једнак интегралу снаге у току прелазног режима (који теоретски траје бесконачно дуго)

$$A = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R \left(\frac{Q_{10}}{RC_1} \right)^2 e^{-2t/\tau} dt = R \left(\frac{Q_{10}}{RC_1} \right)^2 \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} Q_{10}^2 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Рад на отпорнику се може одредити и на други начин, при чему није потребно познавати струју у прелазном режиму, $i(t)$. Наиме, прес затварања прекидача укупна енергија система кондензатора је

$$W_1 = Q_{10}^2 / 2C_1,$$

јер је кондензатор C_2 неоптерсћен.

Након затварања прекидача и успостављања стационарног стања укупна количина електричитета на паралелној вези кондензатора C_1 и C_2 ће остати непромењена, Q_{10} , па је енергија система

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}^2}{C_e} = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}^2}{(C_1 + C_2)}.$$

Промена енергије система је

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} Q_{10}^2 \left(\frac{1}{C_1 + C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = -\frac{1}{2} Q_{10}^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)}.$$

Према закону о одржању рада и енергије очигледно је да се разлика енергија ΔW трансформисала у топлоту на отпорнику. Треба уочити интересантну чињеницу да рад на отпорнику R не зависи од његове отпорности.

14.3. a* У овом случају је напон на кондензатору мањи од прикључене слектромоторне силе па се кондензатор мора допунити да би се напони изједначили. Стога ће у колу течи струја

$$i = \left(\frac{E}{R} - \frac{Q_0}{RC} \right) e^{-t/\tau}$$

у смеру казаљке на сату.

b* Пошто је напон на кондензатору већи од слектромоторне силе он се мора празнити. Струја ће течи у смеру супротном смеру казаљке на сату и износиће

$$i = \left(\frac{Q_0}{RC} - \frac{E}{R} \right) e^{-t/\tau}.$$

■ 14.4. Када се преклопник пребаци у положај (1) проблем се своди на једноставан проблем оптерсћивања кондензатора преко отпорника. У тренутку $t_1 = 5 \text{ ms}$ количина електричитета и напон на кондензатору C_1 ће бити

$$q_1(t = 5 \text{ ms}) \approx 3.935 \text{ mC} \quad \text{и} \quad u_{C1}(t = 5 \text{ ms}) \approx 393.47 \text{ V}.$$

Након пребацивања преклопника у положај (2) проблем се своди на проблем из задатка 14.2. У тренутку $t_2 = 10 \text{ ms}$ (водити рачуна да је ово 5 ms од тренутка пребацивања преклопника) напони на кондензаторима су

$$u_{C1}(t = 10 \text{ ms}) \approx 291.58 \text{ V} \quad \text{и} \quad u_{C2}(t = 10 \text{ ms}) \approx 203.78 \text{ V}.$$

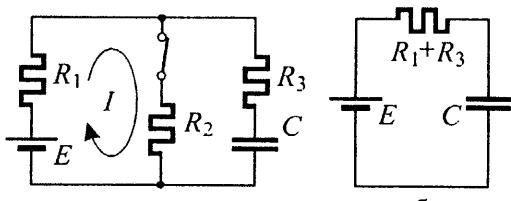
Цулови губици на отпорнику R су $A \approx 5.619 \text{ J}$.

■ 14.5. Када је прекидач затворен и успостављено стационарно стање кроз кондензатор не протиче струја (слика 14.5.а) па је

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Напон на кондензатору једнак је напону на отпорнику R_2

$$U_C = IR_2 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$



Слика 14.5.

а количина електричитета на њему

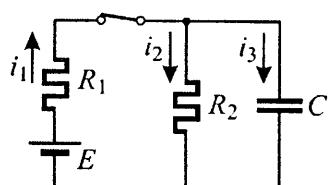
$$Q_0 = CU_C = CE \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Након отварања прекидача добија се коло чија је шема приказана на слици 14.5.б. Очигледно је да се проблем своди на проблем из задатка 14.3.а*, па ће и решење бити исто

$$i = \left(\frac{E}{R_1 + R_3} - \frac{Q_0}{(R_1 + R_3)C} \right) e^{-t/\tau},$$

где је $\tau = (R_1 + R_3)C$ - временска константа.

■ 14.6. Када се прекидач затвори кроз све гране кола ће почети да протичу струје пре лазног режима (слика 14.6). Наравно, и у овом колу, у сваком тренутку морају бити задовољени Кирхофови закони. За одређивање три непознате струје треба поставити систем од три једначине:



Слика 14.6.

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = E$$

$$R_2 i_2 = \frac{q_C}{C} = \frac{1}{C} \int i_3 dt .$$

Поступак решавања овог система једначина је доста сложен и дуготрајан, што се препушта читаоцу да провери.

Међутим, проблем се може далеко брже и једноставније решити применом Тевененове теореме. Наиме, уколико се у односу на кондензатор C остатак кола замени еквивалентним Тевененовим генератором електромоторне силе и унутрашње отпорности

$$(U_{AB})_0 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

проблем се своди на једноставан случај оптерећивања кондензатора пре-ко отпорника.

Количина електричног тока q на кондензатору C у сваком тренутку t је

$$q = (U_{AB})_0 C (1 - e^{-t/\tau}) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} C (1 - e^{-t/\tau}),$$

где је

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C .$$

Напон на кондензатору и струја кроз њега су

$$u_C = \frac{q}{C} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

и

$$i_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R_1} e^{-t/\tau} .$$

Како је напон на отпорнику R_2 једнак напону на кондензатору, то је

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}),$$

па је

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{E}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-t/\tau} \right) .$$

14.7. Пре затварања прекидача укупна енергија свих кондензатора са слике 14.7. је:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_3^2}{2C_3} = 9 \text{ J}.$$

Укупан напон на редној вези кондензатора C_1 и C_2 у тренутку затварања прекидача,

$$U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = 3000 \text{ V},$$

већи је од напона на кондензатору C_3 ,

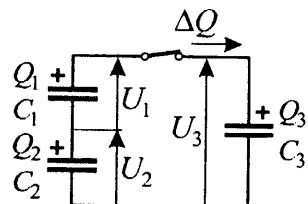
$$U_3 = Q_3/C_3 = 1000 \text{ V}.$$

Због тога ће, од тренутка затварања прекидача до успостављања стационарног стања, кроз коло протечи количина електрицитета ΔQ , смера као на слици, да би се укупан напон на кондензаторима C_1 и C_2 ,

$$U'_1 + U'_2 = \frac{Q_1 - \Delta Q}{C_1} + \frac{Q_2 - \Delta Q}{C_2},$$

изједначио са напоном на кондензатору C_3 ,

$$U'_3 = \frac{Q_3 + \Delta Q}{C_3}.$$



Из овог услова,

$$\frac{Q_1 - \Delta Q}{C_1} + \frac{Q_2 - \Delta Q}{C_2} = \frac{Q_3 + \Delta Q}{C_3},$$

Слика 14.7.

следи да је протекла количина електрицитета $\Delta Q = 2 \text{ mC}$.

Енергија система кондензатора по успостављању новог стационарног стања је

$$W' = W'_1 + W'_2 + W'_3 = \frac{(Q_1 - \Delta Q)^2}{2C_1} + \frac{(Q_2 - \Delta Q)^2}{2C_2} + \frac{(Q_3 + \Delta Q)^2}{2C_3} = 7 \text{ J}$$

тако да је промена енергије

$$\Delta W = W' - W = -2 \text{ J}.$$

14.8. Задата веза кондензатора и генератора у овом примеру представља сложено коло. Попито су непознате три количине електрицитета (Q_1 , Q_2 и Q_3) потребно је формирати систем од три једначине за њихово одређивање.

На почетку решавања задатка смерови наелектрисања појединих кондензатора могу се потпуно произвољно одабрати. Ако су смерови одабрани као на слици 14.8, мора бити испуњен услов

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Овај услов је директна последица принципа одржавања количине електричитета. Наиме, укупно оптерећење у чвору A мора бити једнако нули јер у тај чвор није споља доведена никаква количина електричитета.

Преостале две једначине добијају се из услова да је напон на крајевима грана $U_1 - C_1$, $U_2 - C_2$ и $U_3 - C_3$ исти јер су те три гране паралелно везане:

$$U_1 - U_{C1} = U_2 - U_{C2}$$

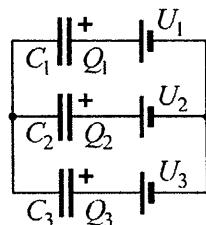
$$U_1 - U_{C1} = U_3 - U_{C3}.$$

Како је $U_{Ci} = Q_i/C_i$, коначно се добија следећи систем једначина

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$C_2 Q_1 - C_1 Q_2 = C_1 C_2 (U_1 - U_2)$$

$$C_3 Q_1 - C_1 Q_3 = C_1 C_3 (U_1 - U_3).$$

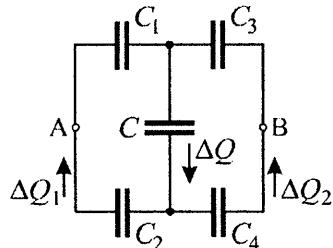


Слика 14.8.

Решавањем овог система једначина за задате нумеричке вредности добија се коначно: $Q_1 = -20\mu\text{C}$, $Q_2 = 0$ и $Q_3 = 20\mu\text{C}$. Знак минус за количину електричитета Q_1 значи да је смер оптерећења на кондензатору C_1 супротан од смера који је претпостављен на почетку решавања.

14.9. Напон на кондензатору C једнак је напону на редној вези C_1 и C_2 , односно C_3 и C_4 . Из познатог напона U могу се одредити оптерећења свих кондензатора пре размишљања електрода кондензатора C . Током размишљања електрода кроз коло ће протећи количине електричитета

$\Delta Q = 0.75\mu\text{C}$, $\Delta Q_1 = 0.5\mu\text{C}$ и $\Delta Q_2 = 0.25\mu\text{C}$, смера као на слици 14.9. $\Delta U_{AB} = (1/24)\text{kV}$.



Слика 14.9.

14.10. Када се преклопник налази у положају (1) количина електричитета на кондензатору C_1 је

$$Q_1 = C_1 E = 15\text{ mC},$$

а кондензатор C_2 је неоптерећен ($Q_2 = 0$).

a* Пребацивањем преклопника у положај (2) кондензатори се везују паралелно, тако да им је сквивалентна капацитивност $C_e = 1.5\mu\text{F}$. Укупно оптерећење ове паралелне везе је

$$Q' = Q_1 + Q_2 = 15 \text{ mC} ,$$

па је напон на њој

$$U' = Q'/C_e = 1000 \text{ V} ,$$

тако да су оптерећења појединих кондензатора

$$Q'_1 = C_1 U' = 5 \text{ mC} \quad \text{и} \quad Q'_2 = C_2 U' = 10 \text{ mC} .$$

б* По враћању преклопника у положај (1) количина електричног струја на кондензатору C_2 остаје непромењена,

$$Q''_2 = Q'_2 = 10 \text{ mC} .$$

Кондензатор C_1 се прикључује на електромоторну силу E па ће количина електричног струја на њему бити

$$Q''_1 = C_1 E = Q_1 = 15 \text{ mC} .$$

Враћањем преклопника у положај (2) кондензатори се поново паралелно везују. Укупна количина електричног струја на паралелној вези је сада

$$Q''' = Q''_1 + Q''_2 = 25 \text{ mC} ,$$

па је напон на кондензаторима

$$U = Q'''/C_e = (5/3) \text{ kV} ,$$

а појединачне количине електричног струја

$$Q''_1 = C_1 U''' = (25/3) \text{ mC} \quad \text{и} \quad Q''_2 = C_2 U''' = (50/3) \text{ mC} .$$

■ ■ ■ 14.11. $\Delta U_1 = -1 \text{ kV}$, $\Delta U_2 = -\frac{2}{3} \text{ kV}$, $\Delta U_3 = 0$.

■ ■ ■ 14.12. Када је прескидач затворен количине електричног струја на појединачним кондензаторима су

$$Q_0 = C_0 E = 50 \text{ nC} \quad \text{и} \quad Q = CE = 25 \text{ nC} .$$

Укупно оптерећење паралелне везе ова два кондензатора,

$$Q_u = Q_0 + Q = 75 \text{ nC} ,$$

остаје исто и након отварања прескидача.

Убаџавањем диелектрика капацитивност кондензатора C се повећава ϵ_r пута, па је еквивалентна капацитивност паралелне везе кондензатора C и C_0

$$C_e = \epsilon_r C + C_0 = 250 \text{ pF} ,$$

напон на њој $U' = Q_u/C_e = 300 \text{ V}$ и оптерећења појединих кондензатора

$$Q'_0 = C_0 U' = 30 \text{ nC} \quad \text{и} \quad Q' = \epsilon_r C U' = 45 \text{ nC} .$$

14.13. Пресклопник у положају (1):

$$Q_1 = Q_2 = \frac{3CE}{4}, \quad Q_3 = 0, \quad U_1 = \frac{E}{4}, \quad U_2 = \frac{3U}{4}, \quad U_3 = 0.$$

Пресклопник у положају (2):

$$Q'_1 = \frac{9CE}{20}, \quad Q'_2 = \frac{3CE}{4}, \quad Q'_3 = \frac{6CE}{20}, \quad U'_1 = \frac{3E}{20}, \quad U'_2 = \frac{3E}{4}, \quad U'_3 = \frac{3E}{20}.$$

Између два стационарна стања количина електричног тока на кондензатору C_2 се не меси, док кроз кондензаторе C_1 и C_3 протекне количина електричног тока $\Delta Q = 6CE/20$.

14.14. $U'_1 = 2.5 \text{ kV}$, $U'_2 = (5/3) \text{ kV}$, $U'_3 = (5/6) \text{ kV}$,

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 = 25 \text{ mC}.$$

14.15. a* $Q_1 = Q_3 = 5 \mu \text{C}$, $U_1 = U_3 = 1 \text{ kV}$, $W_1 = W_3 = 2.5 \text{ mJ}$,

$$Q_2 = 10 \mu \text{C}, \quad U_2 = 1 \text{ kV}, \quad W_2 = 5 \text{ mJ}.$$

b* $Q'_1 = Q'_3 = 8 \mu \text{C}$, $U'_1 = U'_3 = 1.6 \text{ kV}$, $W'_1 = W'_3 = 6.4 \text{ mJ}$,

$$Q'_2 = 16 \mu \text{C}, \quad U'_2 = 400 \text{ V}, \quad W'_2 = 3.2 \text{ mJ}.$$

b* $\Delta Q_1 = \Delta Q_3 = 3 \mu \text{C}$, $\Delta U_1 = \Delta U_3 = 600 \text{ V}$, $\Delta W_1 = \Delta W_3 = 3.9 \text{ mJ}$,

$$\Delta Q_2 = 6 \mu \text{C}, \quad \Delta U_2 = -600 \text{ V}, \quad \Delta W_2 = -1.8 \text{ mJ}$$

14.16. $Q_1 = Q_2 = 100 \text{ nC}$, $Q_3 = 200 \text{ nC}$, $U_1 = U_2 = 1 \text{ kV}$, $U_3 = 2 \text{ kV}$,

$$Q'_1 = Q'_2 = 50 \text{ nC}, \quad Q'_3 = 250 \text{ nC}, \quad U'_1 = U'_2 = 500 \text{ V}, \quad U'_3 = 1 \text{ kV}.$$

14.17. Пре затварања прекидача редна веза кондензатора C_1 и C_2 је прикључена на електромоторну силу E , па је

$$Q_1 = Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 2.4 \mu \text{C}.$$

Након затварања прекидача кондензатор C_1 прикључен је на напон на отпорнику R_1 , а C_2 на напон на отпорнику R_2 , тако да је:

$$\Delta Q_1 = -1.2 \mu \text{C}, \quad \Delta U_1 = -400 \text{ V}, \quad \Delta W_1 = -0.72 \text{ mJ},$$

$$\Delta Q_2 = 0.8 \mu \text{C}, \quad \Delta U_2 = 400 \text{ V}, \quad \Delta W_2 = 1.12 \text{ mJ}.$$

14.18. При отвореном прекидачу напон на кондензаторима C_2 и C_3 је једнак електромоторној сили E , док је напон на кондензатору C_1 једнак нули. По затварању прекидача кроз редну везу отпорника R_1 , R_2 и

R_3 протиче струја, тако да су кондензатори C_1 , C_2 и C_3 прикључени на напоне на одговарајућим отпорницима R_1 , R_2 и R_3 . Тражене промене су:

$$\Delta Q_1 = 8\mu C, \Delta Q_2 = -24\mu C, \Delta Q_3 = -15\mu C,$$
$$\Delta W_1 = 0.8\text{mJ}, \Delta W_2 = -7.2\text{mJ}, \Delta W_3 = -5.25\text{mJ}.$$

14.19. $\Delta Q = -5\mu C, \Delta W = -0.625\text{mJ}$.

14.20. $R_x = R = 100\Omega, W_1 = 2\mu J, W_2 = 1\mu J$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сурутка, Ј.В. : Основи електротехнике (Електростатика, Сталне једносмерне струје), Научна књига, Београд, 1989.
2. Митић, Д.Н. : Електротехника 1, Петрограф, Ниш, 2007.
3. Воргучић, А.Д. : Основи електротехнике (Нелинеарна кола једносмерне струје), Универзитет у Нишу, Ниш, 1991.
4. Воргучић, А.Д, Митић, Д.Н. : Основи електротехнике - Електростатика у облику методичке збирке задатака, Научна књига, Београд, 1988.
5. Митић, Д.Н. : Основи електротехнике - Електрокинетика у облику методичке збирке задатака, SuperautomatX, Ниш, 2001.
6. Митић, Д.Н. : Збирка задатака из основа електротехнике I (за први разред слектротехничке школе), Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

537.2/3(075.8)(076)

621.3.011.7(075.8)(076)

621.3.049(075.8)(076)

МИТИЋ, Драгутин Н.

Електротехника I у облику методичке збирке
задатака/ Драгутин Н. Митић, - Нип

: Петрограф, 2007 (Нип : Петрограф). -

237 стр. : граф. прикази ; 24цм

Тираж 200. - Библиографија : стр. (238)

ISBN 978-86-7934-000-9

- а) Електростатика - задаци
- б) Електрокинетика - задаци
- ц) Електрична кола - задаци

COBISS.SR-ID 144252660

Након изласка књиге из штампе уочен је одређени број штампарских грешака.
Молимо читаоца да у свом примерку књиге ове грешке исправи.

Страна	Задатак	Стоји	Треба да стоји
7.	став 1, слика	$F, F_{12}, F_{21}, r_{12}, r_{21}$	$\vec{F}, \vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \vec{r}_{12}, \vec{r}_{21}$
8.	став 3, слика	F, E, r	$\vec{F}, \vec{E}, \hat{r}$
8.	став 5, слика	E, dl	$\vec{E}, d\vec{l}$
14.	став 22.	$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \Big _{U=ct}$	$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} \Big _{U=ct}$
33.	2.18, 2. ред	... теменима В, D и С теменима В, С и D ...
93.	12.12, 1. ред	... слици 12.11. слици 12.12. ...
137.	3.33, на крају	$\dots \int_x^d \frac{\eta}{\varepsilon_0} \hat{x} d\bar{x} = \int_x^d \frac{\Pi}{\varepsilon_0} d = \dots$	$\dots \int_x^d \frac{\eta}{\varepsilon_0} \hat{x} d\bar{x} = \int_x^d \frac{\eta}{\varepsilon_0} dx = \dots$
165.	6.19, 15. ред	... индукцијс може индукцијс радијалан може ...
225.	13.7, на крају	$\dots P_{E1} = 0, P_{E2} = 20 \text{ W} \dots$ $\dots P_{R1} = 0, P_{R2} = 10 \text{ W} \dots$	$\dots P_{E1} = 20 \text{ W}, P_{E2} = 0 \dots$ $\dots P_{R1} = 20 \text{ W}, P_{R2} = 0 \dots$
230.	14.2, на крају	$\dots = -\frac{1}{2} Q_{10}^2 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$	$\dots = -\frac{1}{2} Q_{10}^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)}.$