МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ

ТЕОРИЈА АПРОКСИМАЦИЈА ФУНКЦИЈА

Садржај

О апроксимацији функција

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на дискретном или континуалном скупу тачака $X \in \mathbb{R}$.

Општи проблем апроксимације

Одредити функцију $\Phi(x) = \Phi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$, тј. параметре $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, тако да $\Phi(x)$ може да замени функцију $f(x)$ по извесним критеријумима.

$\Phi(x)$ – апроксимациона функција

- $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ – задати систем функција
- $\Phi(x)$ – линеарна по параметрима:

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x),$$

На основу избора система функција:
полиномске, тригонометријске, експоненцијалне или друге апроксимације.

Полиномске апроксимације

Ако је $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$:

$$\boxed{\Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}$$

апроксимациони полином

Вајерштрасова теорема

Ако је $f(x)$ функција непрекидна на $[a, b]$, тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n \in \mathbb{N}$ и полином $P_n(x)$ степена n тако да за свако $x \in [a, b]$ важи $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

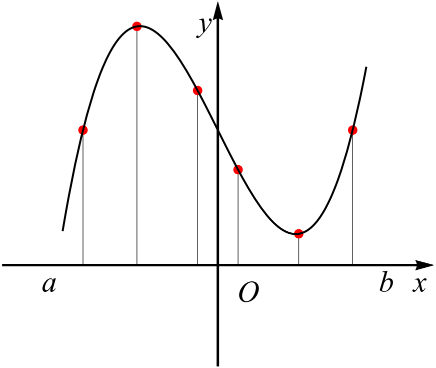
Врсте апроксимација

У зависности од критеријума за избор параметара у апроксимационој функцији разликују се врсте апроксимација.

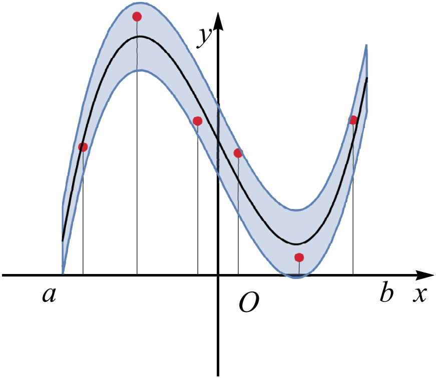
- интерполација:
  Параметри $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ се одређују тако да важи $\Phi(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где су x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, задате тачке.

- најбоља апроксимација:
  Параметари $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ се одређују тако да је $\|\delta\|$ минимално, где је $\delta(x) = f(x) - \Phi(x)$ грешка (одступања) при замени функције $f(x)$ апроксимационом функцијом $\Phi(x)$ на скупу X.

Врсте апроксимација



интерполација



најбоља апроксимција

Интерполација

- Функција $f(x)$ је дефинисана на скупу $X \subseteq [a, b]$.
- Задате су тачке $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ у којима функција има вредности $f(x_i) = f_i, \ i = 0, 1, \ldots, n$.

Проблем нтерполације

Поступак замене функције $f(x)$ функцијом

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x),$$

тако да су испуњени услови

$$\Phi(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

зове се интерполација.

- $\Phi(x)$ – интерполациона функција
- $x_i, \ i = 0, 1, \ldots, n$ – чворови интерполације

Интерполација

$$\Phi(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$\Rightarrow \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ могу да се добију решавањем система линеарних једначина

$$a_0\Phi_0(x_i) + a_1\Phi_1(x_i) + \cdots + a_n\Phi_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \cdots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Систем има јединствено решење $\Leftrightarrow$ $\det\left[\Phi_j(x_i)\right]_{i,j=0}^{n} \neq 0.$

Интерполација

Да би овај услов био испуњен за произвољан избор чворова, систем функција $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ мора да буде Чебишевљев систем, тј. такав да не постоји линеарна комбинација

$$a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x)$$

која има $n+1$ различитих нула на X.

Теорема

Нека су функције $\Phi_k(x)$ $n+1$ пута диференцијабилне на $[a, b]$. Систем функција $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ је Чебишевљев ако и само ако за свако $x \in [a, b]$ важи

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(x) & \Phi_1(x) & \cdots & \Phi_k(x) \\ \Phi_0'(x) & \Phi_1'(x) & & \Phi_k'(x) \\ \vdots & & & \\ \Phi_0^{(k)}(x) & \Phi_1^{(k)}(x) & & \Phi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad k = 0, 1, \ldots n.$$

Полиномска Интерполација

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \quad - \quad \text{Чебишевљев систем}$$

- чворови интерполације:

$$x_i \in X \subseteq [a, b], \quad f_i = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

- интерполациони полином:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Теорема

Нека је функција $f(x)$ *дефинисана на скупу* $X \subseteq [a, b]$ *и нека су дате различите тачке* $x_i \in X,$, $i = 0, 1, \ldots, n.$ *Тада постоји јединствен полином*

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

такав да је испуњен услов

$$P_n(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Полиномска интерполација

Доказ: Коефицијенти a_k, $k = 0, 1, \dots, n$, представљају решење система линеарних једначина $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, тј.

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= f_0,\\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= f_1,\\
&\vdots\\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= f_n,
\end{aligned}$$

Његова детерминанта је Вандермондова детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0,$$

па постоји јединствено решење $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$. $\square$

Врсте интерполационих полинома

Систем једначина за одређивање коефицијената интерполационог полинома је слабо условљен, па се примењују други начини.
У зависности од начина формирања разликују се врсте интерполационих полинома.

- Лагранжов интерполациони полином,
- Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама,
- први Њутнов интерполациони полином,
- други Њутнов интерполациони полином,
- Гаусов, Беселов, Стирлингов, итд.

Врсте интерполационих полинома

За задати скуп чворова интерполациони полином функције је јединствен, а различити облици зависе од различитих база векторског простора полинома у којима се он представља.

Степен интерполационог полинома

$n+1$ чворова: $x_0,\ x_1,\ldots,x_n$

$$\updownarrow$$

$n+1$ коефицијената

$$\updownarrow$$

интерполациони полином степена n: $P_n(x)$

Лагранжов интерполациони полином

За $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)},$$

Особине:

- $L_k(x)$ – полином степена n;
- $L_k(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$;
- $L_k(x_k) = 1$.

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)}$$

Лагранжов интерполациони полином

Лагранжов интерполациони полином

$$\boxed{\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

$$\omega'(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{i\,=\,0 \\ i\,\neq\,k}}^{n} (x - x_i), \qquad \omega'(x_k) = \prod_{\substack{i\,=\,0 \\ i\,\neq\,k}}^{n} (x_k - x_i)$$

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

Грешка интерполационог полинома

Теорема

Нека je $f \in C^{n+1}[a,b]$ *и* $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$. *Тада постоји* $\xi \in (a,b)$ *тако да je*

$$R_n(f;x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x).$$

$$|R_n(f;x)| = |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\omega(x)|, \quad M_{n+1} = \max_{a \le t \le b} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

Теорема

Нека je $f \in C^{n+1}[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *и* $x_k - x_{k-1} = h$, $k = 1,2,\ldots,n$ $(h = const.)$. *Тада важи*

$$\left|R_n(f;x)\right| = \left|f(x) - P_n(x)\right| < \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}M, \quad M = \max_{a \le t \le b}\left|f^{(n+1)}(t)\right|.$$

Њутнови интерполациони полиноми

Нека је $f \in C^{n+1}[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

подељене разлике:

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1; f] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\\
[x_0, x_1, x_2; f] &= \frac{[x_1, x_2; f] - [x_0, x_1; f]}{x_2 - x_0},\\
&\vdots\\
[x_0, x_1, \dots, x_r; f] &= \frac{[x_1, x_2 \dots, x_r; f] - [x_0, x_1 \dots, x_{r-1}; f]}{x_r - x_0}.
\end{aligned}
$$

Њутнови интерполациони полиноми

x	f	$[\cdot,\cdot;f]$	$[\cdot,\cdot,\cdot;f]$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot;f]$
x_0	$\boxed{f_0}$			
		$\boxed{[x_0,x_1;f]}$		
x_1	f_1		$\boxed{[x_0,x_1,x_2;f]}$	
		$[x_1,x_2;f]$		$\boxed{[x_0,x_1,x_2,x_3;f]}$
x_2	f_2		$[x_1,x_2,x_3;f]$	
		$[x_2,x_3;f]$		
x_3	f_3			

Њутнови интерполациони полиноми

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0)[x_0, x_1; f] \\
f(x_2) &= f(x_0) + (x_2 - x_0)[x_0, x_1; f] \\
&\quad + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)[x_0, x_1, x_2; f] \\
&\ \ \vdots \\
f(x_r) &= f(x_0) + (x_r - x_0)[x_0, x_1; f] + \cdots \\
&\quad + (x_r - x_0)(x_r - x_1)\cdots(x_r - x_{r-1})[x_0, x_1, \ldots, x_r; f] \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + \cdots \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] \end{aligned}}
$$

$$
P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathrm{dg}\ P_n = n
$$

Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама

Први Њутнов интерполациони полином

Нека je $f \in C^{n+1}[a,b]$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

еквидистантни чворови: $x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$

предње разлике:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0,$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f_0) = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0,$$

$$\vdots$$

$$\Delta^r f_0 = \Delta(\Delta^{r-1} f_0) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} f_{r-j}.$$

$$f_1 = f(x_0 + h) = f_0 + \Delta f_0, \quad f_2 = f(x_0 + 2h) = f_0 + 2\Delta f_0 + \Delta^2 f_0,$$

$$\vdots$$

$$f_r = f(x_0 + rh) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \Delta^j f_0, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Први Њутнов Њутнов интерполациони полином

Тражимо интерполациони полином облика

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= f_0 \quad &\Rightarrow \quad & A_0 = f_0; \\
P_n(x_1) &= f_1 \quad &\Rightarrow \quad & A_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h}; \\
P_n(x_2) &= f_2 \quad &\Rightarrow \quad & A_2 = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}; \\
& \vdots & & \\
P_n(x_n) &= f_n \quad &\Rightarrow \quad & A_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}.
\end{aligned}$$

Први Њутнов интерполациони полином

$$\boxed{P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})}$$

Први Њутнов интерполациони полином

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	$\boxed{f_0}$			
		$\boxed{\Delta f_0}$		
x_1	f_1		$\boxed{\Delta^2 f_0}$	
		Δf_1		$\boxed{\Delta^3 f_0}$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

Други Њутнов интерполациони полином

Нека je $f \in C^{n+1}[a,b], \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad x_0 = a,\ x_n = b.$

еквидистантни чворови: $\quad x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n.$

задње разлике:

$$\begin{aligned} \nabla f_n &= f_n - f_{n-1}, \\ \nabla^2 f_n &= \nabla(\nabla f_n) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}, \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f_n + \frac{\nabla f_n}{h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) \\ + \cdots + \frac{\nabla^n f_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1) \end{aligned}}$$

Други Њутнов интерполациони полином

Други Њутнов интерполациони полином

$$\nabla^j f_k = \Delta^j f_{n-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 = \nabla f_1 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 = \nabla^2 f_2 & & \\
 & & \Delta f_1 = \nabla f_2 & & \Delta^3 f_0 = \boxed{\nabla^3 f_3} \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 = \boxed{\nabla^2 f_3} & & \\
 & & \Delta f_2 = \boxed{\nabla f_3} & & & \\
x_3 & \boxed{f_3} & & & &
\end{array}$$

Њутнови интерполациони полиноми

Увођењем одговарајућих смена добијају се другачији облици првог и другог Њутновог интерполационог полинома

Први Њутнов интерполациони полином: $\dfrac{x - x_0}{h} = p$:

$$P_n(x) = f_0 + \Delta f_0 p + \frac{\Delta^2 f_0}{2} p(p-1) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} p(p-1)\cdots(p-n+1).$$

Други Њутнов интерполациони полином: $\dfrac{x - x_n}{h} = p$:

$$P_n(x) = f_n + \nabla f_n p + \frac{\nabla^2 f_n}{2} p(p+1) + \cdots + \frac{\nabla^n f_n}{n!} p(p+1)\cdots(p+n-1).$$

Њутнови интерполациони полиноми

Ако се скуп чворова прошири додатним чвором x_{n+1}, за нови интерполациони полином степена $n+1$ користи се $P_n(x)$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; f],$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{\Delta^{n+1} f_0}{(n+1)!}\, p(p-1)\cdots(p-n+1)(p-n),$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{\nabla^{n+1} f_{n+1}}{(n+1)!}\, p(p+1)\cdots(p+n-1)(p+n).$$

Грешка Њутнових интерполационих полинома

Одговарајућом апроксимацијом $f^{(n+1)}(\xi)$ у формули за грешку интерполационих полинома добијају се погодније процене.

Теорема

Ако је $P_n(x)$ *Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама у тачкама* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *тада важи*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x; f].$$

Теорема

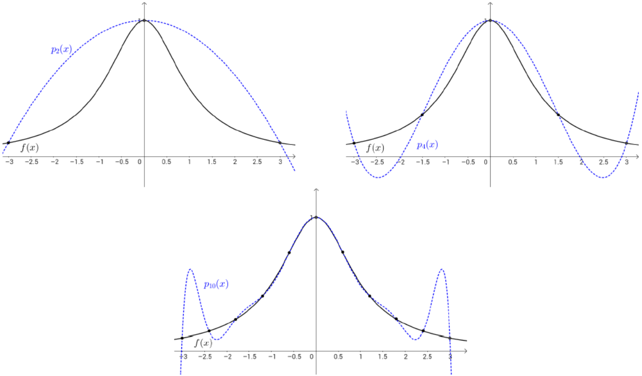
Ако је $P_n(x)$ *први или други Њутнов интерполациони полином у тачкама* $x_k = x_0 + kh,$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n,$ *и* $x = x_0 + ph,$ $p \in [0, n],$ *тада важи:*

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!}|p(p-1)\cdots(p-n)|,$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max|\nabla^{n+1} f|}{(n+1)!}|p(p+1)\cdots(p+n)|.$$

Још о интерполацији

Повећање степена полинома није гаранција боље интерполације.



$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in [-3, 3]$$

интерполациони полиноми степена $n = 2$, $n = 4$, $n = 10$.

Хермитова интерполација

Бољи квалитет интерполације даје Хермитов интерполациони полином који уважава и вредности извода функције у неким чворовима.

Задати подаци:

- чворови $x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m$
- вредности функције $f(x_i),\ i = 0, 1, 2 \ldots, m$
- вредности извода $f'(x_i),\ f''(x_i), \ldots, f^{(k_i-1)}(x_i),\quad i = 0, 1, 2 \ldots, m$

k_i – вишеструкост чвора x_i

укупно података: $k_0 + k_1 + \cdots + k_m = n + 1$

$\Rightarrow$ може се одредити $n+1$ коефицијената полинома $H_n(x)$

Хермитова интерполација

Интерполациони захтев:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),\ j = 0, 1, \ldots, k_i - 1,\ i = 0, 1, \ldots, m$$

Облик Хермитовог интерполационог полинома:

$$H_n(x) = P_m(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_m)H_k(x),$$

где је:

$P_m(x)$ Лагранжов интерполациони полином, формиран на основу вредности функције у чворовима $x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m,$

$H_k(x)$ полином степена $k = n - m$ са привремено неодређеним коефицијентима.

Грешка Хермитове интерполације

Теорема

Нека је $f \in C^{n+1}[a,b]$ *и* $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. *Тада постоји* $\xi \in (a,b)$ *тако да је*

$$R_n(f;x) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Omega(x),$$

где је $\Omega(x) = (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}$.

Најбоље апроксимације

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на дискретном или континуалном скупу тачака $X \in \mathbb{R}$.

$\Phi(x)$ — апроксимациона функција

- $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ — задати систем функција
- $\Phi(x)$ — линеарна по параметрима:

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x),$$

Проблем најбоље апроксимације

Одредити параметре a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, у функцији облика

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x)$$

тако да је величина $\|\delta_n\| = \|f - \Phi\|$, где је $\|\cdot\|$ изабрана норма у простору функција, минимална.

Полиномске најбоље апроксимације

Полиномске најбоље апроксимације:
$\{\Phi_k(x) \mid k = 0, 1, \dots, n\}$ — скуп полинома који чине базу у простору $\mathcal{P}_n$ полинома степена не већег од n

$$\{Q_k(x) \mid \text{дг}\ Q_k(x) = k,\ \ k = 0, 1, \dots, n\}$$

- најбоља апроксимација функције $f(x)$ по норми $\|\cdot\|$ у скупу полинома степена не већег од n:

$$Q^*(x) = a_0^* Q_0(x) + a_1^* Q_1(x) + \cdots + a_n^* Q_n(x)$$

- величина најбоље апроксимације:

$$\|\delta_n^*\| = \|f - Q^*\| = \min_{Q \in \mathcal{P}_n} \|f - Q\|$$

Норме у простору функција

- F – векторски простор функција φ дефинисаних на (a, b);
- $\varphi^p(x)$ апсолутно интеграбилне на (a, b) $(p \geq 1)$, тј.

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p \, dx < \infty$$

$$\boxed{\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p}} \quad - \quad \text{норма у } F$$

Најчешће коришћене норме и одговарајуће апроксимације:

$$p = 2: \qquad \|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_a^b \big(\varphi(x)\big)^2 \, dx} \quad -$$ средње–квадратна

$$p \to \infty: \qquad \|\varphi\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| \quad -$$ Чебишевљева мини–макс

Норме у простору функција

- F – векторски простор функција φ дефинисаних на $X = \{x_j \mid j = 0, 1, \ldots, m\} \subseteq [a, b]$ $(m > n)$;

$$\boxed{\|\varphi\|_p = \left(\sum_{j=0}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}} \quad – \quad \text{норма у } F$$

Најчешће коришћене норме и одговарајуће апроксимације:

$p = 2:$ $\quad \|\varphi\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \left(\varphi(x_j)\right)^2}$ – дискретна средње–квадратна

$p \to \infty:$ $\quad \|\varphi\|_\infty = \max_{0 \le j \le m} |\varphi(x_j)|$ – дискретна мини–макс

Средње–квадратна апроксимација

- F – векторски простор функција φ дефинисаних на (a,b)
- скаларни производ $\quad (\varphi,\psi) = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$
- индукована норма $\quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)} = \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(\varphi(x)\big)^2\,dx}$

Уопштење:

- тежинска функција $\quad p : (a,b) \to \mathbb{R}_0^+$
- скаларни производ $\quad (\varphi,\psi) = \displaystyle\int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx$
- индукована норма $\quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)} = \sqrt{\displaystyle\int_a^b p(x)\big(\varphi(x)\big)^2\,dx}.$

Средње–квадратна апроксимација

Најбоља средње–квадратна апроксимација

Апроксимациона функција облика

$$Q^*(x) = a_0^* Q_0(x) + a_1^* Q_1(x) + \cdots + a_n^* Q_n(x)$$

таква да је

$$\|\delta_n^*\| = \|f - Q^*\| = \sqrt{\int_a^b p(x)\big(f(x) - Q^*(x)\big)^2\, dx}$$

минимално за све $Q \in \mathcal{P}_n$ зове се најбоља средње–квадратна апроксимација функције $f(x)$ са тежином $p(x)$ на интервалу (a, b) у скупу полинома степена не већег од n.

Средње–квадратна апроксимација

$$\|\delta_n\| \text{ минимално} \quad \Leftrightarrow \quad \|\delta_n\|^2 \text{ минимално}$$

Тражи се тачка минимума функције:

$$J(a_0, a_1, \dots, a_n) = \|\delta_n\|^2 = (\delta_n, \delta_n) = \int_a^b p(x)(\delta_n(x))^2 \, dx$$

$$= \int_a^b p(x)\big(f(x) - a_0 Q_0(x) - a_1 Q_1(x) - \cdots - a_n Q_n(x)\big)^2 \, dx$$

стационарна тачка:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} J(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Средње–квадратна апроксимација

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_k} J(a_0, a_1, \ldots, a_n) \\
&= \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\int_a^b p(x)\big(f(x) - a_0Q_0(x) - a_1Q_1(x) - \cdots - a_nQ_n(x)\big)^2\,dx\right) \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_k}\left(p(x)\big(f(x) - a_0Q_0(x) - a_1Q_1(x) - \cdots - a_nQ_n(x)\big)^2\right)\,dx \\
&= 2\int_a^b p(x)\big(f(x) - a_0Q_0(x) - a_1Q_1(x) - \cdots - a_nQ_n(x)\big)\big(-Q_k(x)\big)\,dx \\
&= -2\left(\int_a^b p(x)f(x)Q_k(x)\,dx - \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b p(x)Q_j(x)Q_k(x)\,dx\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b p(x)Q_j(x)Q_k(x)\,dx = \int_a^b p(x)Q_k(x)f(x)\,dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,
$$

Средње–квадратна апроксимација

Параметри a_k^*, $k = 0, 1, \ldots, n$ могу да се добију решавањем система линеарних једначина

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (Q_j, Q_k) = (f, Q_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

у развијеном облику

$$\begin{aligned}
(Q_0, Q_0)a_0 + (Q_1, Q_0)a_1 + \cdots + (Q_n, Q_0)a_n &= (f, Q_0), \\
(Q_0, Q_1)a_0 + (Q_1, Q_1)a_1 + \cdots + (Q_n, Q_1)a_n &= (f, Q_1), \\
&\vdots \\
(Q_0, Q_n)a_0 + (Q_1, Q_n)a_1 + \cdots + (Q_n, Q_n)a_n &= (f, Q_n).
\end{aligned}$$

Средње–квадратна апроксимација

Ако је $\{Q(x) \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ скуп полинома који су ортогонални у односу на скаларни производ

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx,$$

тј. важи

$$(Q_i, Q_k) = \int_a^b p(x)Q_i(x)Q_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \|Q_k\|^2, & i = k, \end{cases}$$

систем је дијагоналан и решење је

$$a_k^* = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Средње–квадратна апроксимација

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} J(a_0, a_1, \ldots, a_n) \\
&= -2\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\int_a^b p(x)Q_k(x)f(x)\,dx - \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b p(x)Q_k(x)Q_j(x)\,dx\right) \\
&= 2\int_a^b p(x)Q_k(x)Q_i(x)\,dx = 2(Q_i, Q_k),
\end{aligned}
$$

па је испуњен довољан услов да у стационарној тачки $(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*)$ функција $J(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ достиже минимум:

$$
d^2 J(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) = \sum_{i,k=0}^{n} \frac{\partial^2 J}{\partial a_i \partial a_k}\, da_i\, da_k = 2\sum_{k=0}^{n} \|Q_k\|^2\, da_k^2 > 0.
$$

Средње–квадратна апроксимација

За овако изабране параметре у апроксимационој функцији важи

$$
\begin{aligned}
\|\delta_n^*\|^2 &= (f - Q^*, f - Q^*) = (f, f) - 2(f, Q^*) + (Q^*, Q^*) \\
&= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=0}^{n} a_k^* Q_k\right) + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^* Q_j, \sum_{k=0}^{n} a_k^* Q_k\right) \\
&= (f, f) - 2\sum_{k=0}^{n} a_k^*(f, Q_k) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j^* a_k^* (Q_j, Q_k).
\end{aligned}
$$

Величина најбоље апроксимације:

$$
\begin{aligned}
\|\delta_n^*\|^2 &= (f, f) - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}(f, Q_k) + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}\right)^2 (Q_k, Q_k) \\
&= (f, f) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, Q_k)^2}{(Q_k, Q_k)}.
\end{aligned}
$$

Средње–квадратна апроксимација

Поступак одређивања најбоље средње–квадратне апроксимације у скупу полинома степена не већег од n:

- Формирати низ полинома $\{Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\}$, ортогоналних у односу на тежину $p(x)$ на интервалу (a, b), применом Грам–шмитовог поступка или на неки други начин.
- Одредити параметре у апроксимационој функцији

  $$Q^*(x) = a_0^* Q_0(x) + a_1^* Q_1(x) + \cdots + a_n^* Q_n(x)$$

  према формулама

  $$a_k^* = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Проценити величину најбоље апроксимације према формули

  $$\|\delta_n^*\| = \sqrt{(f, f) - \sum^{n} \frac{(f, Q_k)^2}{(Q_k, Q_k)}}.$$

Ортогонални полиноми

Назив класе	полиноми до трећег степена	интервал ортогоналности	тежинска функција
Лежандрови	$P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$	$(-1, 1)$	$p(x) = 1$
Чебишевљеви прве врсте	$T_1(x) = x$ $T_2(x) = 2x^2 - 1$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$(-1, 1)$	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Лагерови	$L_1(x) = -x + 1$ $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ $L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$	$(0, +\infty)$	$p(x) = e^{-x}$
Хермитови	$H_1(x) = 2x$ $H_2(x) = 4x^2 - 2$	$(-\infty, +\infty)$	$p(x) = e^{-x^2}$

Грам–шмитов поступак

Поспупак којим се од линеарно независног система полинома

$$\{1, x, x^2, \dots\}$$

формира систем ортогоналних полинома

$$\{Q_0(x),\ Q_1(x),\ Q_2(x), \dots\}.$$

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= 1, \\
Q_1(x) &= x - \frac{(x^2, Q_0)}{(Q_0, Q_0)} Q_0(x), \\
Q_2(x) &= x^2 - \frac{(x, Q_0)}{(Q_0, Q_0)} Q_0(x) - \frac{(x^2, Q_1)}{(Q_1, Q_1)} Q_1(x), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Скаларни производ: $\quad (\varphi, \psi) = \displaystyle\int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)\, dx.$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

- F векторски простор функција φ дефинисаних на $X = \{x_j \mid j = 0, 1, \ldots, m\} \subseteq [a, b] \quad (m > n)$
- норма $\quad \|\varphi\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \big(\varphi(x_j)\big)^2}$

Најбоља дискретна средње–квадратна апроксимација

Апроксимациона функција облика

$$Q^*(x) = a_0^* Q_0(x) + a_1^* Q_1(x) + \cdots + a_n^* Q_n(x)$$

таква да је $\quad \|\delta_n^*\| = \|f - Q^*\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \big(f(x_j) - Q^*(x_j)\big)^2}$ минимално

за све $Q \in \mathcal{P}_n$ зове се најбоља дискретна средње–квадратна апроксимација функције $f(x)$ у скупу полинома степена не већег од n.

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Тражи се тачка минимума функције:

$$\begin{aligned} J(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \|\delta_n\|^2 = \|f - Q^*\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{m} \big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \dots - a_n Q_n(x_j)\big)^2. \end{aligned}$$

стационарна тачка:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_i} J(a_0, a_1, \dots, a_n) \\ &\quad = \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial}{\partial a_i} \big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \dots - a_n Q_n(x_j)\big)^2 \\ &\quad = -2 \sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j) \big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \dots - a_n Q_n(x_j)\big) \\ &\quad = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

$$\sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)\big(f_j - a_0Q_0(x_j) - a_1Q_1(x_j) - \cdots - a_nQ_n(x_j)\big) = 0,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)f_j - \sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)\big(a_0Q_0(x_j) - a_1Q_1(x_j) - \cdots - a_nQ_n(x_j)\big) = 0,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n.$$

у развијеном облику:

$$a_0\sum_{j=0}^{m} Q_0(x_j)Q_0(x_j) + \cdots + a_n\sum_{j=0}^{m} Q_0(x_j)Q_n(x_j) = \sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)f_j,$$

$$\vdots$$

$$a_0\sum_{j=0}^{m} Q_n(x_j)Q_0(x_j) + \cdots + a_n\sum_{j=0}^{m} Q_n(x_j)Q_n(x_j) = \sum_{j=0}^{m} Q_n(x_j)f_j.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

- Ако је $\{Q_k(x) \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$ систем полинома ортогоналних у односу на дискретни скаларни производ:

$$Q^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* Q_k(x), \qquad a_k^* = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}$$

- Ако је $\{Q_k(x) \mid k = 0, 1, 2, \ldots\} = \{x^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\sum_{j=0}^{m} x_j^i \big(f_j - a_0 - a_1 x_j - \cdots - a_n x_j\big) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=0}^{m} x_j^i f_j - \sum_{j=0}^{m} x_j^i \big(a_0 + a_1 x_j + \cdots + a_n x_j^n\big) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=0}^{m} \big(a_0 x_j^i + a_1 x_j^{1+i} + \cdots + a_n x_j^{n+i}\big) = \sum_{j=0}^{m} f_j x_j^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

$$a_0 \sum_{j=0}^{m} x_j^i + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j^{1+i} + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^{n+i} = \sum_{j=0}^{m} f_j x_j^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

у развијеном облику:

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{j=0}^{m} 1 + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^n &= \sum_{j=0}^{m} f_j, \\
a_0 \sum_{j=0}^{m} x_j + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j^2 + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^{n+1} &= \sum_{j=0}^{m} f_j x_j, \\
&\vdots \\
a_0 \sum_{j=0}^{m} x_j^n + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j^{1+n} + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^{n+n} &= \sum_{j=0}^{m} f_j x_j^n.
\end{aligned} \tag{2}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} = \left[x_i^j\right]_{(m+1)\times(n+1)}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \vdots & & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m+1 & \sum_{j=0}^m x_j & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^n \\ \sum_{j=0}^m x_j & \sum_{j=0}^m x_j^2 & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^{n+1} \\ \vdots & & & \\ \sum_{j=0}^m x_j^n & \sum_{j=0}^m x_j^{n+1} & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^{2n} \end{bmatrix} \text{ матрица система } (2)$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Ако се уведу ознаке

$$\mathbf{f} = [f_0 \;\; f_1 \;\; \cdots \;\; f_m]^T, \quad \mathbf{a} = [a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_n]^T,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} = \left[x_i^j\right]_{(m+1)\times(n+1)},$$

систем може да се представи у матричном облику

$$X^T X \mathbf{a} = X^T \mathbf{f},$$

а његово решење је

$$\mathbf{a}^* = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{f}.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Поступак одређивања најбоље дискретне средње–квадратне апроксимације у скупу полинома степена не већег од n:

- За задати скуп података $\quad f(x_j) = f_j,\ j = 0, 1, \ldots, m \quad (m > n)$ формирати преодређен правоугаони систем једначина
$$a_0 + a_1 x_j + \cdots + a_n x_j^n = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$
- Одредити параметре у апроксимационој функцији решавањем система једначина
$$\begin{aligned} X\mathbf{a} &= \mathbf{f}, \qquad / \cdot X^T \\ X^T X\mathbf{a} &= X^T\mathbf{f}, \qquad / \cdot (X^T X)^{-1} \\ \mathbf{a}^* &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{f}. \end{aligned}$$
- Одредити величину најбоље апроксимације, тј. укупну грешку
$$\|\delta_n^*\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (f(x_j) - Q^*(x_j))^2}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Напомена 1. У случају $m = n$ проблем се своди на интерполацију.

Напомена 2. Ако је потребно нагласити већи утицај неких од података (нпр. због веће тачности мерења или већег броја мерења), могу се увести тежински коефицијенти p_j, $j = 0, 1, \ldots, m$. Тада је

$$\|\delta_n\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} p_j \left(f(x_j) - Q(x_j)\right)^2}.$$

Различити називи поступка добијања најбоље дискретне средње–квадратне апроксимације:

- метод најмањих квадрата (леаст–счуарес метход)
- фитовање података
- линеарна регресија

Примена на нелинеарне проблеме

Ако је апроксимациона функција
$f(x) \leftrightarrow \Phi = \Phi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ нелинеарна по параметрима, у неким случајевима се може извршити линеаризација.

1. $f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x}$

$$\Psi(x) = \ln(\Phi(x)) = \ln a_0 + a_1 x = b_0 + b_1 x,$$
$$b_0 = \ln a_0, \; b_1 = a_1,$$

Линеарна регресија:

$$g(x) = \ln f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad \Psi(x) = b_0 + b_1 x,$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x} \quad a_0 = e^{b_0}, \; a_1 = b_1.$$

Примена на нелинеарне проблеме

2. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 x^{a_1}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \ln\left(\Phi(x)\right) = \ln\left(a_0 x^{a_1}\right) = \ln a_0 + \ln x^{a_1} = \ln a_0 + a_1 \ln x \\ &= b_0 + b_1 X, \qquad b_0 = \ln a_0,\ b_1 = a_1,\ X = \ln x\end{aligned}$$

Линеарна регресија:

$$g(X) = \ln f(\ln x) \quad \leftrightarrow \quad \Psi(X) = b_0 + b_1 X,$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x},\ a_0 = e^{b_0},\ a_1 = b_1.$$

Примена на нелинеарне проблеме

3. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} = a_0 + a_1 x,$$

Линеарна регресија:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \leftrightarrow \quad \Psi(x) = b_0 + b_1 x,$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}, \quad a_0 = b_0, \; a_1 = b_1.$$

Примена на нелинеарне проблеме

4. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{x} = a_1 + a_0 \frac{1}{x} = b_0 + b_1 X,$$

$$b_0 = a_1, \ b_1 = a_0, \ X = \frac{1}{x}$$

Линеарна регресија:

$$g(X) = \frac{1}{f(1/x)} \quad \leftrightarrow \quad \Psi(X) = b_0 + b_1 X,$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}, \quad a_0 = b_1, \ a_1 = b_0.$$

Најбоље апроксимације

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на дискретном или континуалном скупу тачака $X \in \mathbb{R}$.

$\Phi(x)$ – апроксимациона функција

- $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ – задати систем функција
- $\Phi(x)$ – линеарна по параметрима:

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x),$$

Проблем најбоље апроксимације

Одредити параметре a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, у функцији облика

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x)$$

тако да је величина $\|\delta_n\| = \|f - \Phi\|$, где је $\|\cdot\|$ изабрана норма у простору функција, минимална.

Најбоље апроксимације

- најбоља апроксимација функције $f(x)$ по норми $\|\cdot\|$ у скупу $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$:

$$\Phi^*(x) = a_0^*\Phi_0(x) + a_1^*\Phi_1(x) + \cdots + a_n^*\Phi_n(x)$$

- величина најбоље апроксимације:

$$\|\delta_n^*\| = \|f - \Phi^*\| = \min_{a_0, a_1, \ldots, a_n} \|f - \Phi\|$$

Норме у простору функција

- F – векторски простор функција φ дефинисаних на (a,b);
- $\varphi^p(x)$ апсолутно интеграбилне на (a,b) $(p \geq 1)$, тј.

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p \, dx < \infty$$

$$\boxed{\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p}} \quad - \quad \text{норма у } F$$

Најчешће коришћене норме и одговарајуће апроксимације:

$p = 2:$ $\quad \|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_a^b (\varphi(x))^2 \, dx}$ – средње–квадратна

$p \to \infty:$ $\quad \|\varphi\|_\infty = \max\limits_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|$ – Чебишевљева мини–макс

Норме у простору функција

- F векторски простор функција φ дефинисаних на $X = \{x_j \mid j = 0, 1, \ldots, m\} \subseteq [a, b]$ $(m > n)$;

$$\boxed{\|\varphi\|_p = \left(\sum_{j=0}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}} \quad - \quad \text{норма у } F$$

Најчешће коришћене норме и одговарајуће апроксимације:

$$p = 2: \qquad \|\varphi\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \big(\varphi(x_j)\big)^2} \quad - \quad \text{дискретна средње–квадратна}$$

$$p \to \infty: \qquad \|\varphi\|_\infty = \max_{0 \le j \le m} |\varphi(x_j)| \quad - \quad \text{дискретна мини–макс}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

- F векторски простор функција φ дефинисаних на $X = \{x_j \mid j = 0, 1, \dots, m\} \subseteq [a, b] \quad (m > n)$
- норма $\quad \|\varphi\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \big(\varphi(x_j)\big)^2}$

Најбоља дискретна средње–квадратна апроксимација

Апроксимациона функција облика

$$Q^*(x) = a_0^* Q_0(x) + a_1^* Q_1(x) + \cdots + a_n^* Q_n(x)$$

таква да је $\quad \|\delta_n^*\| = \|f - Q^*\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \big(f(x_j) - Q^*(x_j)\big)^2}$ минимално

за све $Q \in \mathcal{P}_n$ зове се најбоља дискретна средње–квадратна апроксимација функције $f(x)$ у скупу полинома степена не већег од n.

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Тражи се тачка минимума функције:

$$\begin{aligned} J(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \|\delta_n\|^2 = \|f - Q\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{m} \big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \cdots - a_n Q_n(x_j)\big)^2. \end{aligned}$$

стационарна тачка:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_i} J(a_0, a_1, \dots, a_n) \\ &\quad = \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial}{\partial a_i} \big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \cdots - a_n Q_n(x_j)\big)^2 \\ &\quad = \sum_{j=0}^{m} 2\big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \cdots - a_n Q_n(x_j)\big)\big(-Q_i(x_j)\big) \\ &\quad = -2 \sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)\big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \cdots - a_n Q_n(x_j)\big) \\ &\quad = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

$$\sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)\big(f_j - a_0 Q_0(x_j) - a_1 Q_1(x_j) - \cdots - a_n Q_n(x_j)\big) = 0,$$
$$i = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j) f_j - \sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j)\big(a_0 Q_0(x_j) + a_1 Q_1(x_j) + \cdots + a_n Q_n(x_j)\big) = 0,$$
$$i = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=0}^{m} a_0 Q_i(x_j) Q_0(x_j) + \sum_{j=0}^{m} a_1 Q_i(x_j) Q_1(x_j) + \cdots + \sum_{j=0}^{m} a_n Q_i(x_j) Q_n(x_j)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} Q_i(x_j) f_j, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

У развијеном облику:

$$a_0 \sum_{j=0}^{m} Q_0(x_j)Q_0(x_j) + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} Q_0(x_j)Q_n(x_j) = \sum_{j=0}^{m} Q_0(x_j)f_j,$$

$$a_0 \sum_{j=0}^{m} Q_1(x_j)Q_0(x_j) + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} Q_1(x_j)Q_n(x_j) = \sum_{j=0}^{m} Q_1(x_j)f_j,$$

$$\vdots$$

$$a_0 \sum_{j=0}^{m} Q_n(x_j)Q_0(x_j) + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} Q_n(x_j)Q_n(x_j) = \sum_{j=0}^{m} Q_n(x_j)f_j.$$

- Ако je $\{Q_k(x) \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$ систем полинома ортогоналних у односу на дискретни скаларни производ:

$$Q^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* Q_k(x), \qquad a_k^* = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

- Ако је $\{Q_k(x) \mid k = 0, 1, 2, \ldots\} = \{x^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\sum_{j=0}^{m} x_j^i \big(f_j - a_0 - a_1 x_j - \cdots - a_n x_j\big) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=0}^{m} x_j^i f_j - \sum_{j=0}^{m} x_j^i \big(a_0 + a_1 x_j + \cdots + a_n x_j^n\big) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=0}^{m} \big(a_0 x_j^i + a_1 x_j^{1+i} + \cdots + a_n x_j^{n+i}\big) = \sum_{j=0}^{m} f_j x_j^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n;$$

$$a_0 \sum_{j=0}^{m} x_j^i + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j^{1+i} + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^{n+i} = \sum_{j=0}^{m} f_j x_j^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

У развијеном облику:

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{j=0}^{m} 1 + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^n &= \sum_{j=0}^{m} f_j, \\
a_0 \sum_{j=0}^{m} x_j + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j^2 + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^{n+1} &= \sum_{j=0}^{m} f_j x_j, \\
&\vdots \\
a_0 \sum_{j=0}^{m} x_j^n + a_1 \sum_{j=0}^{m} x_j^{1+n} + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{m} x_j^{n+n} &= \sum_{j=0}^{m} f_j x_j^n.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} m+1 & \sum_{j=0}^m x_j & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^n \\ \sum_{j=0}^m x_j & \sum_{j=0}^m x_j^2 & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^{n+1} \\ \vdots & & & \\ \sum_{j=0}^m x_j^n & \sum_{j=0}^m x_j^{n+1} & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^m f_j \\ \sum_{j=0}^m f_j x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^m f_j x_j^n \end{bmatrix}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Означимо: $$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} = \left[x_i^j\right]_{(m+1)\times(n+1)}$$

$$\mathbf{f} = [f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_m]^T, \quad \mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n]^T,$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^m f_j \\ \sum_{j=0}^m f_j x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^m f_j x_j^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \vdots & & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = X^T \mathbf{f},$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

$$X^TX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \vdots & & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m+1 & \sum_{j=0}^m x_j & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^n \\ \sum_{j=0}^m x_j & \sum_{j=0}^m x_j^2 & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^{n+1} \\ \vdots & & & \\ \sum_{j=0}^m x_j^n & \sum_{j=0}^m x_j^{n+1} & \cdots & \sum_{j=0}^m x_j^{2n} \end{bmatrix}.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Систем може да се представи у матричном облику

$$X^T X\mathbf{a} = X^T\mathbf{f}.$$

Како je

$$\det(X^T X) = \det X^T \ \det X = (\det X)^2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{vmatrix}\right)^2 \neq 0,$$

матрица система je регуларна, а решење je

$$\mathbf{a}^* = (X^T X)^{-1} X^T\mathbf{f}.$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Поступак одређивања најбоље дискретне средње–квадратне апроксимације у скупу полинома степена не већег од n:

- За задати скуп података $\quad f(x_j) = f_j,\ j = 0, 1, \ldots, m \quad (m > n)$ формирати преодређен правоугаони систем једначина

$$a_0 + a_1 x_j + \cdots + a_n x_j^n = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

- Одредити параметре у апроксимационој функцији решавањем система једначина

$$\begin{aligned} X\mathbf{a} &= \mathbf{f}, \qquad / \cdot X^T \\ X^T X\mathbf{a} &= X^T\mathbf{f}, \qquad / \cdot (X^T X)^{-1} \\ \mathbf{a}^* &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{f}. \end{aligned}$$

- Одредити величину најбоље апроксимације, тј. укупну грешку

$$\|\delta_n^*\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \left(f(x_j) - Q^*(x_j)\right)^2}$$

Дискретна средње–квадратна апроксимација

Напомена 1. У случају $m = n$ проблем се своди на интерполацију.

Напомена 2. Ако је потребно нагласити већи утицај неких од података (нпр. због веће тачности мерења или већег броја мерења), могу се увести тежински коефицијенти p_j, $j = 0, 1, \ldots, m$. Тада је

$$\|\delta_n\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{m} p_j \left(f(x_j) - Q(x_j)\right)^2}.$$

Различити називи поступка добијања најбоље дискретне средње–квадратне апроксимације:

- метод најмањих квадрата (леаст–счуарес метход)
- фитовање података
- линеарна регресија

Примена на нелинеарне проблеме

Ако је апроксимациона функција
$f(x) \leftrightarrow \Phi = \Phi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ нелинеарна по параметрима, у неким случајевима се може извршити линеаризација.

1. $$\begin{aligned} f(x) \quad &\leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x} \\ \ln f(x) \quad &\leftrightarrow \quad \ln \Phi(x) = \ln(a_0 e^{a_1 x}) = \ln a_0 + \ln e^{a_1 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \ln(\Phi(x)) &= \ln a_0 + a_1 x = b_0 + b_1 x, \\ b_0 = \ln a_0, &\quad b_1 = a_1. \end{aligned}$$

Линеарна регресија:

$$g(x) = \ln f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad \Psi(x) = b_0 + b_1 x;$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 e^{a_1 x}, \qquad a_0 = e^{b_0}, \quad a_1 = b_1.$$

Примена на нелинеарне проблеме

2.
$$
\begin{aligned}
f(x) \quad &\leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 x^{a_1} \\
\ln f(x) \quad &\leftrightarrow \quad \ln \Phi(x) = \ln(a_0 x^{a_1}) = \ln a_0 + \ln x^{a_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(x) &= \ln\left(\Phi(x)\right) = \ln\left(a_0 x^{a_1}\right) = \ln a_0 + \ln x^{a_1} = \ln a_0 + a_1 \ln x \\
&= b_0 + b_1 X, \qquad b_0 = \ln a_0, \quad b_1 = a_1, \quad X = \ln x.
\end{aligned}
$$

Линеарна регресија:

$$
g(X) = \ln\big(f(\ln x)\big) \quad \leftrightarrow \quad \Psi(X) = b_0 + b_1 X;
$$

Решење полазног проблема:

$$
f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = a_0 x^{a_1}, \ a_0 = e^{b_0}, \ a_1 = b_1.
$$

Примена на нелинеарне проблеме

3. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} = a_0 + a_1 x,$$

Линеарна регресија:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \leftrightarrow \quad \Psi(x) = b_0 + b_1 x;$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}, \qquad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1.$$

Примена на нелинеарне проблеме

4. $$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{x} = a_1 + a_0 \frac{1}{x} = b_0 + b_1 X,$$

$$b_0 = a_1, \quad b_1 = a_0, \quad X = \frac{1}{x}$$

Линеарна регресија:

$$g(X) = \frac{1}{f(1/x)} \quad \leftrightarrow \quad \Psi(X) = b_0 + b_1 X;$$

Решење полазног проблема:

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}, \qquad a_0 = b_1, \quad a_1 = b_0.$$

Чебишевљева $\mathrm{mini} - \max$ апроксимација

- F − векторски простор функција φ непрекидних на сегменту $[a, b]$
- норма $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} |\varphi(x)|$

Најбоља униформна $(\mathrm{mini} - \max)$ апроксимација

Апроксимациона функција облика

$$Q^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n$$

таква да је $\|\delta_n^*\|_\infty = \|f - Q^*\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x_j) - Q^*(x_j)|$

минимално за све $Q \in \mathcal{P}_n$ зове се најбоља униформна $(\mathrm{mini} - \max)$ апроксимација функције $f(x)$ у скупу полинома степена не већег од n.

$E_n(f) = \min\limits_{Q \in \mathcal{P}_n} \max\limits_{a \le x \le b} |f(x_j) - Q(x_j)|$ − величина најбоље апроксимације

Чебишевљева $\min - \max$ апроксимација

Теорема о Чебишевљевој алтернанси:

Теорема

Полином $Q_n^* \in \mathcal{P}_n$ *је најбоља* $\min - \max$ *апроксимација за функцију* $f \in C[a,b]$ *ако и само ако на* $[a,b]$ *постоје* $n+2$ *тачке* $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$, *такве да је*

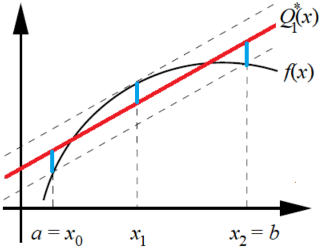
$$\delta_n^*(x_k) = -\delta_n^*(x_{k+1}) = \pm\|\delta_n\|_\infty = \pm E_n(f),$$

при чему је $\delta_n^*(x) = f(x) - Q_n^*(x)$.

$x_0,\ x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a,b]$ — тачке Чебишевљеве алтернансе

Чебишевљева mini — max апроксимација

Пример



$$Q_1^*(x) = a_0^* + a_1^* x$$

Тачке Чебишевљеве алтернансе:

- крајеви интервала,
- тачка у којој $\delta_n^*(x)$ достиже максимум.

$Q_1^*(x)$ — права паралелна са сечицом кроз тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, а пролази кроз средину растојања између ове сечице и њој паралелне тангенте на криву $f(x)$.