Ispitivanje toka i skiciranje grafika funkcija

Za skiciranje grafika funkcije potrebno je ispitati svako od sledećih svojstava:

1° Oblast definisanosti: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$.
2° Parnost, neparnost, periodičnost.
3° Nule i znak funkcije; presek sa osom Oy ako postoji.
4° Ekstremne vrednosti i intervali monotonosti (primenom $f'(x)$).
5° Prevojne tačke i intervali konveksnosti (primenom $f''(x)$).
6° Asimptote.

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}}$$

1° $D_f = (-\infty, +\infty)$.

2° $f(-x) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

Kako je $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$, funkcija nije ni parna, ni neparna. Funkcija nije periodična.

3° $f(x) = 0$ za $x = 0$.
$f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

4° $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$.
$f'(x) = 0$ za $x = -2$.

x		-2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(x)$ je opadajuća na $(-\infty, -2)$, a rastuća na $(-2, +\infty)$.

Lokalni minimum $f(-2) = -\sqrt{2}$ funkcija dostiže za $x = -2$, a odgovarajuća tačka na grafiku je $M(-2, -\sqrt{2})$.

5° $f''(x) = -\dfrac{2x^2+7x+4}{\sqrt{(x^2+2x+2)^5}}$.
$f''(x) = 0$ za $x = (-7-\sqrt{17})/4$ ili $x = (-7+\sqrt{17})/4$.

x		$\dfrac{-7-\sqrt{17}}{4}$		$\dfrac{-7+\sqrt{17}}{4}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$

$f(x)$ je konkavna na $\left(-\infty, \dfrac{-7-\sqrt{17}}{4}\right)$ i $\left(\dfrac{-7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, a konveksna na $\left(\dfrac{-7-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{-7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

$P_1\left(\dfrac{-7-\sqrt{17}}{4}, -\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{17}}{6}}\right)$ i $P_2\left(\dfrac{-7+\sqrt{17}}{4}, \dfrac{-7+\sqrt{17}}{\sqrt{42-6\sqrt{17}}}\right)$ su prevojne tačke.

6° Kako je

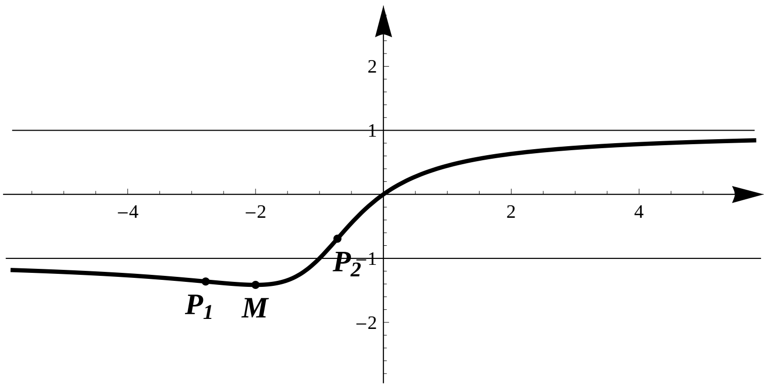
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}\,,$$

tj.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = -1\,,$$

prave $y=-1$ i $y=1$ su horizontalne asimptote kad $x\to-\infty$ i $x\to+\infty$ redom.



$$\boxed{f(x) = -4x\sqrt{1-x^2}}$$

1° $D_f = [-1, 1]$.

2° Kako za svako $x \in D_f$ važi

$$f(-x) = -4(-x)\sqrt{1-(-x)^2} = 4x\sqrt{1-x^2} = -f(x)\,,$$

funkcija je neparna, pa je njen grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak $O(0,0)$. Funkcija nije periodična.

3° $f(x) = 0$ za $x = 0$ ili $x = -1$ ili $x = 1$.
$f(x) > 0$ za $x \in (-1, 0)$, $f(x) < 0$ za $x \in (0, 1)$.

4° $f'(x) = \dfrac{4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \neq -1\,,\ x \neq 1.$

$f'(x) = 0$ za $x = -1/\sqrt{2}$ ili $x = 1/\sqrt{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$f(x)$ je rastuća na $\left(-1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, a opada na $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Za $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ funkcija dostiže lokalni maksimum $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$,
a za $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lokalni minimum $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$. Odgovarajuće tačke na grafiku su $M_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ i $M_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)$.

5° $f''(x) = \dfrac{-4x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,, \quad x \neq -1\,,\ x \neq 1.$

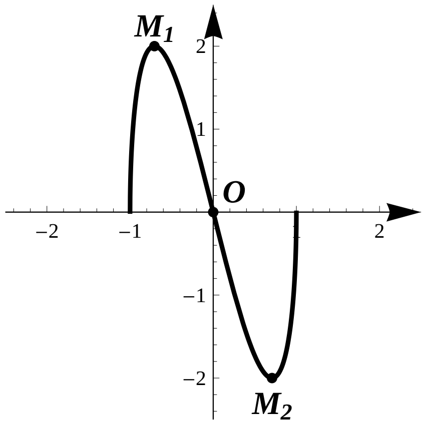
$f''(x) = 0$ za $x = 0$.
(Tačke $x = -\sqrt{3/2}$ i $x = \sqrt{3/2}$ ne pripadaju D_f.)

x	-1		0		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

$f(x)$ je konkavna na $(-1,0)$, a konveksna na $(0,1)$.

$O(0,0)$ je prevojna tačka.

6° Asimptota nema.



$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2+x-2}}$$

1° $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x^2+x-2\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$.

2° Oblast definisanosti nije simetrična u odnosu na koordinatni početak, pa funkcija ne može da bude ni parna, ni neparna. Funkcija nije periodična.

3° $f(x)=0$ za $x^2+x-2=0$, tj. $x=-2$ ili $x=1$.

$f(x)>0$ za svako $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

4° $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}\,,\quad x\neq-2\,,\ x\neq 1.$

$f'(x)\neq 0$ za svako $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$. (Tačka $x=-1/2$ ne pripada D_f.)

x		-2		1	
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$\searrow$				$\nearrow$

$f(x)$ je opadajuća na $(-\infty,-2)$, a rastuća na $(1,+\infty)$.

5° $\quad f''(x) = -\dfrac{9}{4\sqrt{(x^2+x-2)^3}}\,, \quad x \neq -2\,,\ x \neq 1.$

$f''(x) < 0$ za svako $x \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$, što znači da je funkcija konkavna na D_f.

6° Kako je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+x-2} = +\infty\,,$$

funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kose asimptote tražimo u obliku $y = k_{1,2}x + n_{1,2}$, pri čemu je

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x}\,,$$

tj.

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x} = 1\,, k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x} = -1\,,$$

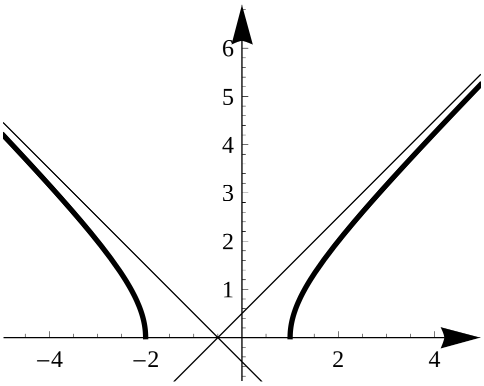
$$\begin{aligned} n_{1,2} &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - k_{1,2}x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(\sqrt{x^2+x-2} \mp x\big) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2} \pm x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\Big(1-\dfrac{2}{x}\Big)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}} \pm x}\,, \end{aligned}$$

tj.

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\Big(1-\dfrac{2}{x}\Big)}{x\Big(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}+1\Big)} = \frac{1}{2}\,,$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\Big(1-\dfrac{2}{x}\Big)}{-x\Big(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}+1\Big)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Funkcija ima dve kose asimptote, i to $y = -x - \dfrac{1}{2}$ kad $x \to -\infty$ i $y = x + \dfrac{1}{2}$ kad $x \to +\infty$.



$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}}$$

1° $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° S obzirom na oblast definisanosti, funkcija nije ni parna, ni neparna, ni periodična.

3° $f(x) \neq 0$ za svako $x \in D_f$.
$f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1)$, $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$.
$f(0) = -1$.

4° $f'(x) = -e^{-x}\dfrac{x}{(x-1)^2}$.
$f'(x) = 0$ za $x = 0$.
$f'(x) > 0$ za $x < 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ je rastuća na $(-\infty, 0)$,
$f'(x) < 0$ za $x > 0$, $x \neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ je opadajuća na $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$.
Za $x = 0$ funkcija dostiže lokalni maksimum $f(0) = -1$. Odgovarajuća tačka na grafiku je $M(0, -1)$.

5° $f''(x) = e^{-x}\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}$.

$f''(x) \neq 0$ za svako $x \in D_f$.

$f''(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je konkavna na $(-\infty, 1)$,
$f''(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je konveksna na $(1, +\infty)$.
Nema prevojnih tačaka.

6° Kako je

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{e^{-x}}{x-1} = \pm\infty\,,$$

prava $x = 1$ je vertikalna asimptota.

S obzirom na granične vrednosti

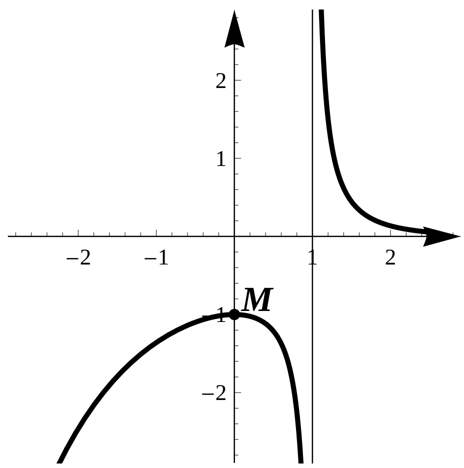
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x-1} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty\,,$$

prava $y = 0$ je horizontalna asimptota kad $x \to +\infty$.

Kosu asimptotu kad $x \to -\infty$ tražimo u obliku $y = kx + n$, pri čemu je

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{x(x-1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty\,.$$

Prema tome, funkcija nema kosu asimptotu kad $x \to -\infty$.



$$\boxed{f(x) = \frac{e^{x-2}}{x-1}}$$

1° $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Funkcija nije ni parna, ni neparna, ni periodična.

3° $f(x) \neq 0$ za svako $x \in D_f$.
$f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1)$, $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$.
$f(0) = -\dfrac{1}{e^2}$.

4° $f'(x) = e^{x-2}\, \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$.
$f'(x) = 0$ za $x = 2$.
$f'(x) < 0$ za $x < 2,\ x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je opadajuća na $(-\infty, 1)$ i $(1, 2)$,
$f'(x) > 0$ za $x > 2 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je rastuća na $(2, +\infty)$.

Za $x = 2$ funkcija dostiže lokalni minimum $f(2) = 1$. Odgovarajuća tačka na grafiku je $M(2, 1)$.

5° $f''(x) = e^{x-2}\, \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)^3}$.
$f''(x) \neq 0$ za svako $x \in D_f$.
$f''(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je konkavna na $(-\infty, 1)$,
$f''(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je konveksna na $(1, +\infty)$.
Nema prevojnih tačaka.

6° Kako je

$$\lim_{x \to 1\pm} f(x) = \lim_{x \to 1\pm} \frac{e^{x-2}}{x-1} = \pm\infty\,,$$

prava $x = 1$ je vertikalna asimptota.

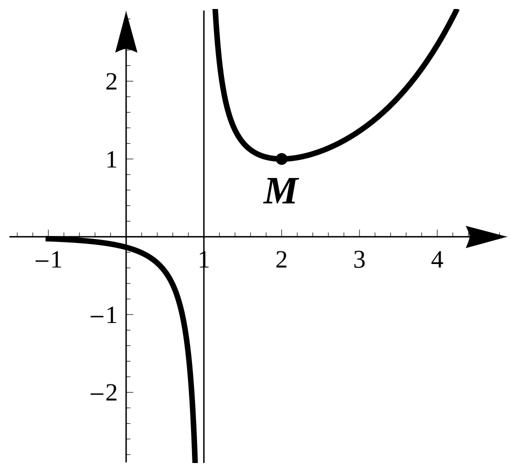
Prava $y = 0$ je horizontalna asimptota kad $x \to -\infty$ jer je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x-2}}{x-1} = 0\,,$$

a funkcija nema ni horizontalnu ni kosu asimptotu kad $x \to +\infty$ jer je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-2}}{x-1} = +\infty\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-2}}{x(x-1)} = +\infty\,.$$



$$\boxed{f(x) = (x+5)e^{\frac{1}{x-1}}}$$

1° $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Funkcija nije ni parna, ni neparna, ni periodična.

3° $f(x) = 0$ za $x = -5$.
$f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -5)$, $f(x) > 0$ za $x \in (-5, 1) \cup (1, +\infty)$.
$f(0) = \dfrac{5}{e}$.

4° $f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{(x-1)^2}$.
$f'(x) = 0$ za $x = -1$ ili $x = 4$.

x		-1		1		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(x)$ je rastuća na $(-\infty, -1)$ i $(4, +\infty)$, a opadajuća na $(-1, 1)$ i $(1, 4)$.

Za $x=-1$ i $x=4$ funkcija dostiže lokalni maksimum $f(-1)=\dfrac{4}{\sqrt{e}}$ i lokalni minimum $f(4)=9\sqrt[3]{e}$ redom. Odgovarajuće tačke na grafiku su $M_1\Big(-1,\dfrac{4}{\sqrt{e}}\Big)$ i $M_2\big(4,9\sqrt[3]{e}\big)$.

5° $f''(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\,\dfrac{13x-7}{(x-1)^4}$.

$f''(x)=0$ za $x=\dfrac{7}{13}$.

x		$\frac{7}{13}$		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\smile$

$f(x)$ je konkavna na $\left(-\infty,\dfrac{7}{13}\right)$, a konveksna na $\left(\dfrac{7}{13},1\right)$ i $(1,+\infty)$.

$P\left(\dfrac{7}{13},\dfrac{72}{13e^2\sqrt[6]{e}}\right)$ je prevojna tačka.

6° Prava $x=1$ je vertikalna asimptota jer je

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+5)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty\,.$$

S druge strane, važi sledeće:

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+5)e^{\frac{1}{x-1}}=0\,.$$

Funkcija nema horizontalnu asimptotu jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x+5)e^{\frac{1}{x-1}}=\pm\infty\,.$$

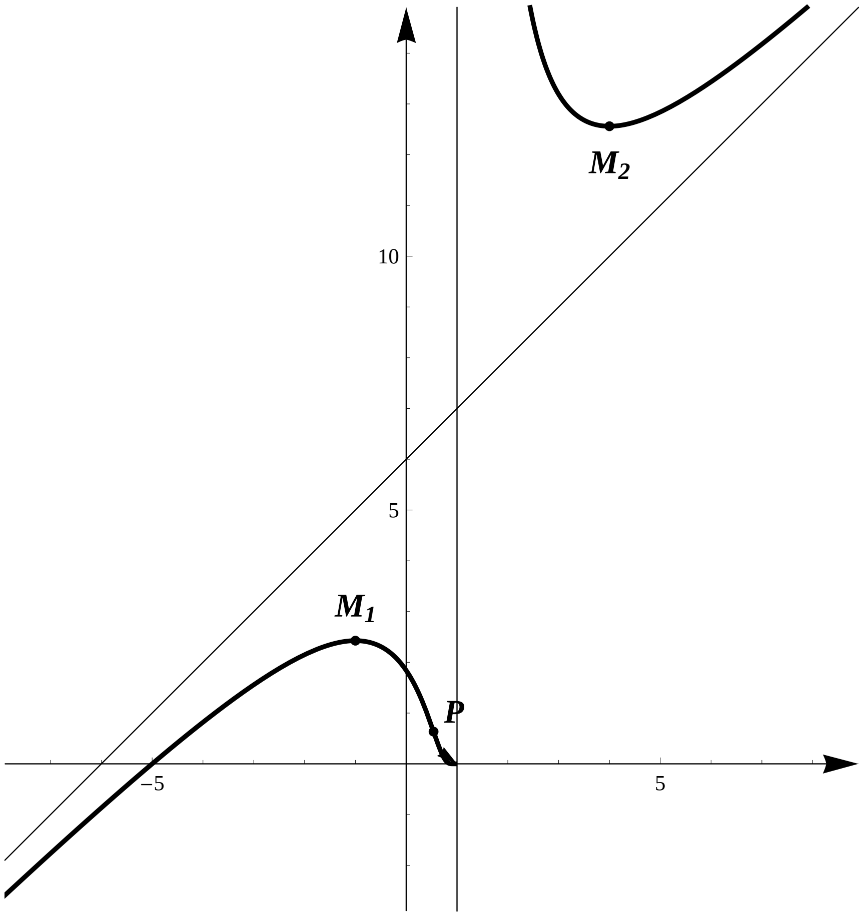
Kosu asimptotu u obliku $y=kx+n$ tražimo na sledeći način:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x}e^{\frac{1}{x-1}}=1\,,$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\big((x+5)e^{\frac{1}{x-1}}-x\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\Big(x\big(e^{\frac{1}{x-1}}-1\big)+5e^{\frac{1}{x-1}}\Big)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\pm\infty}5e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}\,e^{\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{x^2}}+5=6\,.$$

Prava $y=x+6$ je kosa asimptota.



Napomena. Ugao φ pod kojim se grafik funkcije približava tački $(1,0)$ određujemo na osnovu geometrijske interpretacije prvog izvoda.

$$\tan\varphi = \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x-1}}\ \frac{x^2-3x-4}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1-}(x^2-3x-4)\ \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1-}(x^2-3x-4)\ \lim_{x\to 1-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} = -6\lim_{x\to 1-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\,.$$

Ako označimo $\dfrac{1}{x-1} = t$, poslednja granična vrednost postaje

$$\tan\varphi = -6\lim_{t\to-\infty} t^2 e^t = -6\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{e^{-t}} = -6\lim_{t\to-\infty}\frac{2t}{-e^{-t}} = -6\lim_{t\to-\infty}\frac{2}{e^{-t}} = 0\,,$$

pa je $\varphi = 0$.

$$\boxed{f(x) = \log(x^2 - 5x + 7)} \qquad (\log = \log_e)$$

1° $D_f = (-\infty, +\infty)$ jer je $x^2 - 5x + 7 > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

2° $f(-x) = \log(x^2 + 5x + 7)$.

Kako je $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$, funkcija nije ni parna, ni neparna. Funkcija nije periodična.

3° $f(x) = 0$ za $x^2 - 5x + 7 = 1$, tj. $x = 2$ ili $x = 3$.
$f(x) < 0$ za $x^2 - 5x + 7 < 1$, tj. $x \in (2, 3)$,
$f(x) > 0$ za $x^2 - 5x + 7 > 1$, tj. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

4° $f'(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7}$.

$f'(x) = 0$ za $x = \dfrac{5}{2}$.

$f'(x) < 0$ za $x < \dfrac{5}{2} \Rightarrow f(x)$ je opadajuća na $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$,

$f'(x) > 0$ za $x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow f(x)$ je rastuća na $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

Za $x = \dfrac{5}{2}$ funkcija dostiže lokalni minimum $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \log\dfrac{3}{4}$. Odgovarajuća tačka na grafiku je $M\left(\dfrac{5}{2}, \log\dfrac{3}{4}\right)$.

5° $f''(x) = -\dfrac{2x^2 - 10x + 11}{(x^2 - 5x + 7)^2}$.

$f''(x) = 0$ za $x = (5 - \sqrt{3})/2$ ili $x = (5 + \sqrt{3})/2$.

x		$\frac{5-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{3}}{2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$

$f(x)$ je konkavna na $\left(-\infty, \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$ i $\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$, a konveksna na $\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) = \log\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P_1\Big(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \log\frac{3}{2}\Big) \text{ i } P_2\Big(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \log\frac{3}{2}\Big) \text{ su prevojne tačke.}$$

6° Kako je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2-5x+7) = +\infty\,,$$

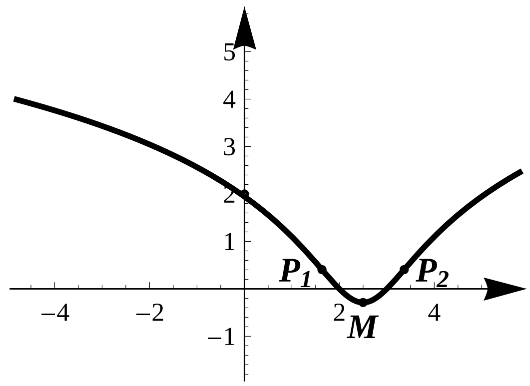
funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kosu asimptotu tražimo u obliku $y = kx + n$, gde je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(x^2-5x+7)}{x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{2x-5}{x^2-5x+7}}{1} = 0\,,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2-5x+7) = +\infty\,.$$

Prema tome, funkcija nema ni kosu asimptotu.



$$\boxed{f(x) = (x-1)\log(x-1)} \qquad (\log = \log_e)$$

1° $D_f = (1, +\infty)$.

2° Funkcija nije ni parna, ni neparna, ni periodična.

3° $f(x) = 0$ za $\log(x-1) = 0$, tj. $x - 1 = 1$, $x = 2$.
$f(x) > 0$ za $x \in (2, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (1, 2)$.

4° $f'(x) = \log(x-1) + 1$.
$f'(x) = 0$ za $x = 1 + \dfrac{1}{e}$.

x	1		$1+\frac{1}{e}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(x)$ je opadajuća na $\left(1, 1+\frac{1}{e}\right)$, a rastuća na $\left(1+\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Za $x = 1 + \frac{1}{e}$ funkcija dostiže lokalni minimum $f\left(1+\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Odgovarajuća tačka na grafiku je $M\left(1+\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

5° $f''(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

$f''(x) > 0$ za svako $x \in D_f$, što znači da je funkcija konveksna na D_f. Nema prevojnih tačaka.

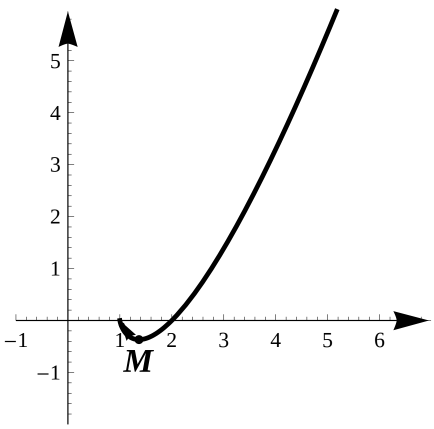
6° Kako je

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x-1)\log(x-1) = \lim_{x\to 1+} \frac{\log(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0\,,$$

funkcija nema vertikalnu asimptotu. Takođe,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\log(x-1) = +\infty\,,$$

pa funkcija nema ni horizontalnu asimptotu.



$$\boxed{f(x) = \log \frac{x-4}{1-x}} \qquad (\log = \log_e)$$

1° $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-4}{1-x} > 0 \right\}.$

x		1		4	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{x-4}{1-x}$	$-$		$+$	0	$-$

$D_f = (1,4).$

2° Oblast definisanosti nije simetrična u odnosu na koordinatni početak, pa funkcija ne može da bude ni parna, ni neparna. Funkcija nije periodična.

3° $\quad f(x) = 0$ za $\frac{x-4}{1-x} = 1$, tj. $\frac{2x-5}{1-x} = 0$

x	1		$\frac{5}{2}$		4
$2x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{2x-5}{1-x}$		$+$	0	$-$	

$f(x) = 0$ za $x = \frac{5}{2}$.

$f(x) > 0$ za $x \in \left(1, \frac{5}{2}\right)$, $\; f(x) < 0$ za $x \in \left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

4° $\quad f'(x) = \frac{-3}{(x-4)(1-x)}.$

$f'(x) < 0$ za svako $x \in D_f$, pa je funkcija opadajuća na D_f. Nema ekstremnih vrednosti.

5° $f''(x) = \dfrac{-3(2x-5)}{(x-4)^2(1-x)^2}$.

$f''(x) > 0$ za $x < \dfrac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ je konveksna na $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$,

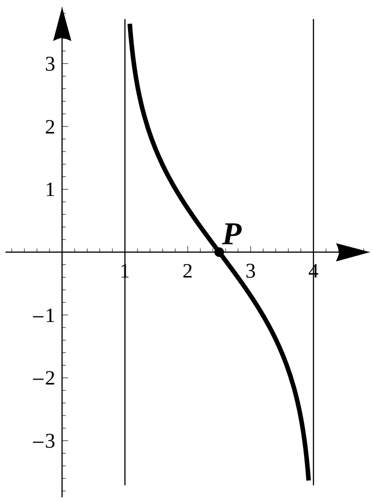
$f''(x) < 0$ za $x > \dfrac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ je konkavna na $\left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$.

$P\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ je prevojna tačka.

6° Kako je

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \log\frac{x-4}{1-x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4-} \log\frac{x-4}{1-x} = -\infty\,,$$

prave $x = 1$ i $x = 4$ su vertikalne asimptote.



$$\boxed{f(x) = \arctan\frac{1}{x}}$$

1° $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Za svako $x \in D_f$ važi

$$f(-x) = \arctan\frac{1}{-x} = -\arctan\frac{1}{x} = -f(x)\,,$$

što znači da je funkcija neparna. Funkcija nije periodična.

3° $f(x) \neq 0$ za svako $x \in D_f$.

$f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

4° $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

$f'(x) < 0$ za svako $x \in D_f$, pa je funkcija opadajuća na D_f. Nema ekstremnih vrednosti.

5° $f''(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$f''(x) \neq 0$ za svako $x \in D_f$.
$f''(x) < 0$ za $x < 0 \Rightarrow f(x)$ je konkavna na $(-\infty, 0)$,
$f''(x) > 0$ za $x > 0 \Rightarrow f(x)$ je konveksna na $(0, +\infty)$.

Nema prevojnih tačaka.

6° Kako je

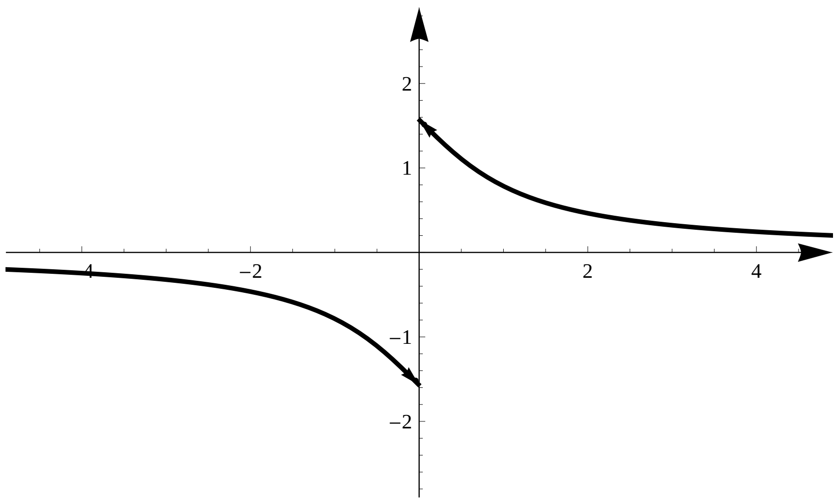
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,,$$

funkcija nema vertikalnu asimptotu.

Kako je

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \arctan\frac{1}{x} = 0\,,$$

prava $y = 0$ je horizontalna asimptota.



<u>Napomena.</u> Imajući u vidu geometrijsku interpretaciju prvog izvoda funkcije, moguće je odrediti ugao φ pod kojim se kriva grafika približava tačkama $(0,-\pi/2)$ sa leve i $(0,\pi/2)$ sa desne strane. To je ugao koji tangente krive u tačkama bliskim $(0,-\pi/2)$ i $(0,\pi/2)$ zaklapaju sa pozitivnim delom x–ose.

$$\tan\varphi = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2+1} = -1\,,$$

tj. $\varphi = -\pi/4$.

$$\boxed{f(x) = \arctan\frac{x-1}{x+1}}$$

1° $D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

2° Oblast definisanosti nije simetrična u odnosu na koordinatni početak, pa funkcija ne može da bude ni parna, ni neparna. Funkcija nije periodična.

3° $f(x) = 0$ za $x-1=0$, tj. $x=1$.

$f(x) > 0$ za $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$, $f(x) < 0$ za $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$.

x		-1		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x-1}{x+1}$	$+$		$-$	0	$+$

$f(x) > 0$ za $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $f(x) < 0$ za $x\in(-1,1)$.

$f(0) = \arctan(-1) = -\pi/4$.

4° $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

$f'(x) > 0$ za svako $x\in D_f$, pa je funkcija rastuća na D_f. Nema ekstremnih vrednosti.

5° $f''(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$.

$f''(x) > 0$ za $x < 0,\ x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je konveksna na $(-\infty, -1)$ i $(-1, 0)$,

$f''(x) < 0$ za $x > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je konkavna na $(0, +\infty)$.

$P\Big(0, -\dfrac{\pi}{4}\Big)$ je prevojna tačka.

6° Kako je

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} \arctan\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \arctan\frac{x-1}{x+1} = -\frac{\pi}{2}\,,$$

funkcija nema vertikalnu asimptotu.

Kako je

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \arctan\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}\,,$$

prava $y = \dfrac{\pi}{4}$ je horizontalna asimptota.