Publikacije Elektronskog fakulteta u Nišu

Edicija: Pomoćni udžbenici

A. Mitrović, PRAKTIKUM ZA VEŽBE NA RAČUNARU IZ PREDMETA VEŠTAČKA INTELIGENCIJA, 1994

Č. Milosavljević, OSNOVI AUTOMATIKE. Priručnik za laboratorijske vežbe, 1995

Č. Milosavljević, OSNOVI AUTOMATIKE (vremenski kontinualni SAU), Metodička zbirka zadataka, 1995

N. Janković, PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBANJA ZA PREDMET SENZORI I PRETVARAČI, 1995

M. Radmanović i D. Mančić, ZBIRKA ZADATAKA IZ ENERGETSKE ELEKTRONIKE, 1995

S. Ristić, Z. Prijić i D. Pantić, ELEKTRONSKE KOMPONENTE, Zbirka zadataka, 1995

D. Antić i dr., SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA: ISPITNI ZADACI, 1995

B. Dimitrijević, D. Denić i G. Đorđević, ELEKTRIČNA MERENJA - ZBIRKA ZADATAKA, 1995

L. Stefanović i S. Popović, OBRADA TEKSTA U TEX-u, 1995

D. Maksimović i dr., PROJEKTOVANJE ELEKTRONSKIH KOLA, Laboratorijski praktikum, 1996

M. Stanković, D. Radulović i D. Ristić, MREŽNI SERVIS - WORLD, WIDE, WEB, 1996

B. Milovanović i dr., MIKROTALASNA TEHNIKA - Zbirka zadataka, 1996

M. Naumović, ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ DIGITALNIH SISTEMA UPRAVLJANJA, I deo: Diskretni signali, 1997

P. Rančić, PRILOZI SVETLOTEHNIČKIM KARAKTERIZACIJAMA - SVESKA 4: OSVETLJENJE ZATVORENIH PROSTORA, 1997

M. Gmitrović i R. Petković, TEORIJA ELEKTRIČNIH KOLA - Metodička zbirka zadataka, 1997

M. Stanković i dr., ZBIRKA ZADATAKA IZ OSNOVA RAČUNARSKE TEHNIKE, 1998

V. Litovski i dr., PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBANJA IZ ELEKTRONIKE I, 1998

M. Stojčev, S. Ristić i M. Krstić, ZBIRKA ZADATAKA IZ MIKROPPROCESORA I MIKRORAČUNARA, 1999

Z. Nikolić i dr., PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBI IZ OSNOVA TELEKOMUNIKACIJA I DIGITALNIH TELEKOMUNIKACIJA, 1999

D. Mitić i S. Aleksić, OSNOVI ELEKTROTEHNIKE - PRAKTIKUM ZA LABORATORIJSKE VEŽBE, 1999

D. Mitić, OSNOVI ELEKTROTEHNIKE - ELEKTROKINETIKA U OBLIKU METODIČKE ZBIRKE ZADATAKA, 1999

M. Damnjanović i dr., PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBANJA IZ PROJEKTOVANJA I TESTIRANJA ELEKTRONSKIH KOLA I SISTEMA, 2000

D. M. Veličković i dr., ZBIRKA REŠENIH ISPITNIH ZADATAKA IZ ELEKTROMAGNETIKE, Prvi deo, 2000

D. Antić i B. Danković, MODELIRANJE I SIMULACIJA DINAMIČKIH SISTEMA, 2001

B. Đorđević, M. Damjanović, G. Đorđević i A. Velimirović, DIGITALNA ELEKTRONIKA - Zbirka zadataka, 2001

I. Milovanović, E. Milovanović i B. Ranđelović, DISKRETNA MATEMATIKA - Zbirka zadataka, 2001

I. Milovanović i B. Ranđelović, MATEMATIKA - zbirka testova za prijemni ispit, 2002

Univerzitet u Nišu

Elektronski fakultet

Momčilo M. Pejović

Snežana M. Golubović

Goran S. Ristić

Aleksandar B. Jakšić

OPŠTI KURS FIZIKE

zbirka rešenih zadataka

I izdanje

Edicija: Pomoćni udžbenici

2003.

Prof. dr Momčilo M. Pejović
Prof. dr Snežana M. Golubović
Doc. dr Goran S. Ristić
Asist. mr Aleksandar B. Jakšić

OPŠTI KURS FIZIKE - zbirka rešenih zadataka

Izdavač: Elektronski fakultet u Nišu
Beogradska 14, P. fah 73, 18000 Niš, Srbija
http://www.elfak.ni.ac.yu

Recenzent: Prof. dr Tomislav Pavlović

Glavni i odgovorni urednik: Prof. dr Dragan Lj. Drača

Na osnovu odluke Naučno-nastavnog veća Elektronskog fakulteta u Nišu, br. 1-0-05-018/2001 od 03. 04. 2001. godine, rukopis je odobren za štampu kao pomoćni udžbenik.

ISBN 86-80135-74-7

CIP – katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

53(075.8)(076)

OPŠTI kurs fizike: zbirka rešenih zadataka / Momčilo M. Pejović ... [et al.] - 1. izd. - Niš: Elektronski fakultet, 2003. (Niš : X-copi). - II, 432 str. :, graf. prikazi 24 cm. - (Edicija Pomoćni udžbenici / [Elektronski fakultet, Niš])

Na vrhu nasl. str. : Univerzitet u Nišu. - Tiraž 300.

ISBN 86-80135-74-7
1. Pejović, Momčilo M.
a) Fizika - Zadaci
COBISS-ID 103721740

Tiraž: 300 primeraka

Štampa: SX print - copy

Predgovor

Ova zbirka zadataka namenjena je prvenstveno studentima Elektronskog fakulteta u Nišu kao pomoć u pripremi ispita iz Fizike. Zbirka može biti od pomoći i studentima drugih fakulteta.

Izbor zadataka je rezultat višegodišnjeg rada ljudi koji su držali vežbe iz Fizike na I godini Elektronskog fakulteta u Nišu. Deo zadataka je preuzet iz naših ranijih izdanja, a to su: M. Pejović, S. Golubović, *Zbirka rešenih zadataka iz fizike*, izdavač Univerzitet u Nišu, 1987; M. Pejović, S. Golubović, D. Župac, *Zbirka rešenih zadataka iz fizike*, izdavač Prosveta, Niš, 1989; M. Pejović, S. Golubović, D. Župac, T. Jovanović, G. Ristić, *OPŠTI KURS FIZIKE - zbirka rešenih zadataka*, izdavač Naučna knjiga, Beograd, 1992. Zbirka takodje sadrži i veći broj zadataka koji su se pojavljivali na kolokvijumima i ispitima iz fizike na Elektronskom fakultetu u Nišu.

Zadaci su poredjani po oblastima kao gradivo u udžbenicima za fiziku za I godinu Elektronskog fakulteta u Nišu, autora M. Pejovića (*OPŠTI KURS FIZIKE - mehanika, molekularna fizika, termodinamika; OPŠTI KURS FIZIKE - oscilacije, mehanički talasi i optika; OPŠTI KURS FIZIKE - kvantna mehanika, atomska i statistička fizika, fizika čvrstog stanja, nuklearna fizika i elementarne čestice*). Na početku svakog poglavlja dat je pregled osnovnih pojmova i obrazaca koje je neophodno poznavati prilikom rešavanja zadataka. Zadaci su potpuno rešeni sa komentarima neophodnim za njihovo što lakše razumevanje. Ovo, medjutim, može biti svojevrsna zamka za čitaoca, u kojoj on ostaje pasivan, uglavnom samo čitajući rešenja, umesto da pokuša samostalno da reši zadatak. Stoga je naš savet čitaocima da pokušaju samostalno da dodju do rešenja, a ponudjeno rešenje iskoriste za proveru svog rada. Ako i posle dobro shvaćenog problema čitalac nije u stanju sam da reši zadatak, onda bi trebalo da prouči rešenje i pokuša da razume zašto nije uspeo da nadje put do njega.

Veliku zahvalnost za korisne sugestije koje su doprinele da rukopis bude kvalitetniji dugujemo asistenitima-pripravnicima Emiliji Vukosavljević i Sanji Aleksić, kao i dipl. fiz. Srdjanu Mihajloviću. Takodje se zahvaljujemo i dipl. inž. Miliću Pejoviću na tehničkoj obradi slika na računaru.

Autori će biti zahvalni za dobronamerne primedbe, kao i pomoći pri uočavanju grešaka, a komunikacija sa autorima je moguća i preko e-mail adresa: pejovic@elfak.ni.ac.yu, sneska@elfak.ni.ac.yu

Niš, decembar 2002.

Autori

Sadržaj

1. Fizičke veličine i merne jedinice

1.1 Medjunarodni sistem mernih jedinica

Sve fizičke veličine dele se na osnovne i izvedene veličine. Osnovne veličine se ne definišu izrazima (jednačinama), već opisom postupka njihovog merenja i dogovorno se biraju i proglašavaju na medjunarodnim konferencijama, nakon odredjenog iskustva i saznanja o njima. Danas je u upotrebi sedam osnovnih veličina. To su *dužina, masa, vreme, jačina električne struje, termodinamička temperatura, svetlosna jačina* i *količina materijala*. Pomoću ovih veličina može se pokriti čitavo područje fizike i drugih nauka.

Izvedene veličine se dobijaju preko osnovnih veličina pomoću zakona i izraza. Treba istaći da njihov broj nije ograničen, već se stalno menja sa razvojem fizike i drugih nauka.

Da bi se izbegla proizvoljnost u izboru jedinica, za merenje fizičkih veličina utvrdjen je *sistem jedinica*. Pod sistemom jedinica podrazumeva se skup jedinica za merenje raznih fizičkih veličina utvrdjen po odredjenom pravilu.

Jedinice dogovorno usvojene za sedam osnovnih i nezavisnih fizičkih veličina nazivaju se *osnovne merne jedinice*. To su: za dužinu *metar*, za masu *kilogram*, za vreme *sekunda*, za jačinu električne struje *amper*, za termodinamičku temperaturu *kelvin*, za svetlosnu jačinu *kandela* i za količinu materijala *mol*. Jedinice za izvedene veličine dobijaju se iz osnovnih jedinica i nazivaju se *izvedene merne jedinice*.

Sistem jedinica sačinjen od sedam pomenutih osnovnih mernih jedinica i od njih izvedenih jedinica za izvedene fizičke veličine predstavlja *Medjunar-*

odni sistem mernih jedinica (Systeme International d'Unites), skraćeno SI. Pored osnovnih i izvedenih mernih jedinica definisane su i jedinice za *ugao u ravni (radijan)* i *prostorni ugao (steradijan)* kao dopunske merne jedinice SI.

1.1.1 Definicije osnovnih mernih jedinica

U tabeli 1.1 date su osnovne veličine i osnovne merene jedinice SI.

Tabela 1.1. Osnovne veličine i osnovne merne jedinice SI

Osnovne veličine	Osnovne jedinice
Dužina (l)	metar (m)
Masa (m)	kilogram (kg)
Vreme (t)	sekunda (s)
Jačina električne struje (I)	amper (A)
Termodinamička temperatura (T)	kelvin (K)
Svetlosna jačina (L)	kandela (cd)
Količina materijala	mol (mol)

- Metar je dužina putanje koju u vakuumu predje svetlost za vreme od 1/299792458 sekunde.

- Kilogram je masa medjunarodnog etalona kilograma. Medjunarodni etalon kilograma je potvrdila Prva generalna konferencija za mere i tegove 1889. godine, kada je proglašeno da se ovaj medjunarodni etalon ubuduće smatra jedinicom za masu. Medjunarodni etalon se čuva u Medjunarodnom birou za mere i tegove u Sevru kod Pariza.

- Sekunda je trajanje od 9192631770 perioda zračenja koje odgovara prelazu izmedju dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma 133.

- Amper je jačina stalne električne struje koja, kad se održava u dva prava paralelna provodnika, neograničene dužine i zanemarljivog kružnog poprečnog preseka, koji se nalaze u vakuumu na medjusobnom rastojanju od jednog metra, prouzrokuje medju tim provodnicima silu koja je jednaka $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po metru dužine.

- Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka 1/273.16 termodinamičke temperature trojne tačke vode.

- Kandela je svetlosna jačina u odredjenom pravcu izvora koji emituje

monohromatsko zračenje frekvencije $5.4 \cdot 10^{14}\ Hz$ i čija je energetska jačina u tom pravcu 1/683 vata po steradijanu.

- Mol je količina materijala sistema koja sadrži toliko elementarnih jedinki koliko atoma ima u 0.012 kilograma ugljenika 12 (elementarne jedinke mogu biti atomi, molekuli, joni i druge čestice ili odredjene skupine tih čestica).

1.1.2 Decimalne merne jedinice SI

Pored osnovnih mernih jedinica mogu se koristiti i decimalne merne jedinice. Decimalne merne jedinice su decimalni umnošci ili decimalni delovi mernih jedinica Medjunarodnog sistema, a obrazuju se stavljanjem medjunarodno usvojenih prefiksa ispred oznake merne jedinice kao što je to pokazano u tabeli 1.2.

tabela 1.2. Decimalne merne jedinice SI

Naziv prefiksa koji se stavlja ispred jedinice	Oznaka prefiksa koji se stavlja ispred oznake jedinice	Činilac kojim se množi jedinica (brojna vrednost prefiksa)
ato	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
piko	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
mikro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
deka	da	10^{1}
hekto	h	10^{2}
kilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
eksa	E	10^{18}

1	2	3	4
Sila	njutn	$N = kgms^{-2}$	Njutn je sila koja telu mase od $1\,kg$ daje ubrzanje od $1\,ms^{-2}$
Pritisak	paskal	$Pa = kgm^{-1}s^{-2}$	Paskal je pritisak koji proizvodi sila od $1\,N$ koja je ravnomerno rasporedjena i deluje upravno na ravnu površinu od $1\,m^2$
Dinamička viskoznost	paskal sekunda	$Pas = kgm^{-1}s^{-1}$	Paskalsekunda je dinamička viskoznost homogenog fluida koji laminarno struji i u kome izmedju dva ravna paralelna sloja sa razlikom u brzini od $1ms^{-1}$ nastaje napon smicanja od $1\,Pa$
Luminacija	kandela po kvadratnom metru	cdm^{-2}	Kandela po kvadratnom metru je luminacija homogenog izvora ravne površine od $1\,m^2$ koji emituje svetlost jačine $1\,cd$ u pravcu upravnom na tu površinu
Svetlosni fluks	lumen	$lm = cdsr$ $lm = 0.0015W$ (za $555\,nm$)	Lumen je svetlosni fluks koji u prostororni ugao od $1\,sr$ odašilje tačkasti svetlosni izvor čija je svetlosna jačina u svim pravcima prostora jednaka $1\,cd$
Osvetljenost	luks	$lx = lm.m^{-2}$	Luks je osvetljenost površine od $1\,m^2$ na koju dolazi ravnomerni svetlosni fluks od $1\,lm$
Aktivnost radioaktivnog izvora	bekerel	$Bq = s^{-1}$	Bekerel je aktivnost radioaktivnog izvora u kome se dešava jedan raspad radioaktivnog jezgra u $1\,s$

1	2	3	4
Apsorbovana doza jonizujućeg zračenje	grej	$Gy = Jkg^{-1} = m^2s^{-2}$	Grej je apsorbovana doza zračenja u telu čija je masa $1\,kg$, u koje je, jonizujućim zračenjem stalne gustine energetskog fluksa, unesena energija od $1\,J$
Ekspoziciona doza jonizujućeg zračenja	kulon po kilogamu	$Ckg^{-1} = sAkg^{-1}$	Kulon po kilogramu je ekspoziciona doza jonizujućeg zračenja koje u količini vazduha mase $1\,kg$ može stvoriti jone istog znaka ukupnog naelektrisanja $1\,C$, ako je gustina energetskog fluksa ista u celoj količini ozračenog vazduha
Molarna masa	kilogram po molu	$kgmol^{-1}$	Kilogram po molu jednak je molarnoj masi homogenog materijala čija masa od $1\,kg$ ima količinu materijala od $1\,mola$
Koncentracija materijala	mol po kubnom metru	$molm^{-3}$	Mol po kubnom metru jednak je koncentraciji materijala ili molaritetu jedne komponente u homogenoj smeši materijala, ako komponenta ima $1\,mol$, a smeša ima zapreminu $1\,m^3$
Kinematička viskoznost	kvadratni metar u sekundi	m^2s^{-1}	Kvadratni metar u sekundi je kinematička viskoznost homogenog fluida čija je dinamička viskoznost jedna paskalsekunda, a zapreminska masa $1kgm^{-3}$

1	2	3	4
Energija, rad, količina toplote	džul	$J = m^2kgs^{-2}$	Džul je jednak radu koji izvrši sila od $1\,N$ kada se njena napadna tačka pomeri u pravcu i smeru sile za $1\,m$
Snaga, energetski fluks	vat	$W = m^2kgs^{-3}$	Vat je snaga kojom se izvrši rad od $1\,J$ za vreme od $1\,s$
Entropija	džul po kelvinu	$JK^{-1} =$ $= kgm^2s^{-2}K^{-1}$	Džul po kelvinu je povećanje entropije sistema koji prima količinu toplote od $1\,J$ na stalnoj termodinamičkoj temperaturi od $1\,K$, pri čemu ne nastaju nepovratne promene stanja sistema
Masena količina toplote	džul po kilogram kelvinu	$Jkg^{-1}K^{-1} =$ $= m^2s^{-2}K^{-1}$	Džul po kilogramkelvinu je masena količina toplote homogenog tela čija je masa $1\,kg$ i u kome priliv količine toplote od $1\,J$ izaziva povećanje termodinamičke temperature za $1\,K$
Toplotna provodnost	vat po metarkelvinu	$Wm^{-1}K^{-1}=$ $= mkgs^{-3}K^{-1}$	Vat po metarkelvinu je termička provodnost homogenog tela u kome razlika termodinamičke temperature od $1\,K$ medju dve paralelene ravne površine od $1\,m^2$ na medjusobnom rastojanju od $1\,m$, stvara termički fluks od $1\,W$
Energetska jačina zračenja	vat po steradijanu	$Wsr^{-1} =$ $= m^2kgs^{-3}$	vat po steradijanu je jačina energetskog zračenja tačkastog izvora koji ravnomerno šalje energetski fluks od $1\,W$ u prostorni ugao od $1\,sr$

Oznake kako osnovnih, tako i izvedenih mernih jedinica pišu se slovima latinice. Proizvod dve jedinice obeležava se tačkom kao simbolom množenja. Tačka se može izostaviti u slučajevima kada je oznaka takva da ne može doći

ni do kakve zabune.

Kada se merna jedinica obrazuje medjusobnim deljenjem dveju mernih jedinica, kao simboli deljenja mogu se upotrebljavati kosa crta(/), horizontalna crta (-), ili se mogu upotrebljavati eksponenti sa negativnim znakom.

1.2 Jedinice van SI dozvoljene u SRJ

Zakon o mernim jedinicama, Jugoslovenski standard (JUS) i Medjunarodni standard (ISO) dozvoljavaju upotrebu i mernih jedinica koje nisu obuhvaćene Medjunarodnim sistemom mernih jedinica. Upotreba ovih jedinica dozvoljena je samo za pojedine oblasti tehnike. U tabeli 1.4 dat je prikaz naziva, oznaka i definicija pojedinih mernih jedinica koje su van Medjunarodnog sistema.

Tabela 1.4. Dozvoljene merne jedinice nekih fizičkih veličina van SI

Veličina		Dozvoljena merna jedinica			Primena
Naziv	oznaka	naziv	oznaka	Veza sa jed. SI	Dozv. upotreba
1	2	3	4	5	6
Dužina	l	morska milja	-	$1852\,m$	u pomorskom, rečnom i i vazdušnom saobraćaju
		astronomska jedinica	-	$1.496 \cdot 10^{11}\,m$	u astronomiji
Površina	S	ar hektar	a ha	$10^2\,m^2$ $10^4\,m^2$	za izražavanje površine zemljišta
Zapremina	V	litar	l	$10^{-3}\,m^3$	

1	2	3	4	5	6
Ugao u ravni	- - - -	stepen minut sekunda gon	^{o} $'$ $''$ g	$1^o = \frac{\pi}{180}\, rad$ $1' = \frac{\pi}{10800}\, rad$ $1'' = \frac{\pi}{648000}\, rad$ $1g = \frac{\pi}{200}\, rad$	
Masa	m	tona jedinica atomske mase	t u	$10^3\, kg$ $1.66 \cdot 10^{-27}\, kg$	u fizici i hemiji
Podužna masa	m_c	teks tona po metru	tex tm^{-1}	$10^{-6}\, kgm^{-1}$	za izražavanje podužne mase tekstilnog vlakna i konca
Vreme	t	minut sat dan	min h d	$60\, s$ $3600\, s$ $86400\, s$	
Brzina	v	čvor kilometar na sat	- kmh^{-1}	$0.514\, ms^{-1}$ $1/3.6\, ms^{-1}$	u saobraćaju
Pritisak	p	bar	bar	$10^5\, Pa$	
Energija Rad Količina toplote	E A Q	vat.čas elektronvolt	Wh eV	$3600\, J$ $1.6 \cdot 10^{-19}\, J$	u specijalizovanim oblastima
Snaga	P	volt-amper var	VA var	$1VA = 1\, W$ $1var = 1\, W$	za odredjivanje prividne snage naizmenične električne struje za odredjivanje električne reaktivne (jalove) snage

2. Mehanika čvrstog tela

2.1 Kinematika

2.1.1 Teorija

Kod translatornog kretanja trenutna brzina je

$$v = \frac{ds}{dt},$$

a trenutno ubrzanje

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

gde je s predjeni put, a t vreme za koje telo predje taj put.

Kod ravnomernog (uniformnog) translatornog kretanja važi

$$v = \frac{s}{t} = const., \quad a = 0.$$

Za ravnomerno promenljivo translatorno kretanje (ubrzanje $a = const.$) važe sledeći izrazi:

$$v = v_o \pm at,$$
$$s = v_o t \pm \frac{1}{2}at^2,$$
$$v^2 = v_o^2 \pm 2as,$$

gde je v_o početna brzina tela, v brzina tela, a s predjeni put posle vremena t. Znak "+" odnosi se na ravnomerno ubrzano, a znak "-" na ravnomerno usporeno kretanje.

Kod krivolinijskog kretanja trenutna ugaona brzina je

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

a trenutno ugaono ubrzanje

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

gde je θ ugaoni pomeraj.

Kod ravnomernog kružnog kretanja važi

$$\omega = \frac{\theta}{t} = const., \quad \alpha = 0.$$

Za ravnomerno promenljivo kružno kretanje (ugaono ubrzanje $\alpha = const.$) važe sledeći izrazi:

$$\omega = \omega_o \pm \alpha t,$$
$$\theta = \omega_o t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2,$$
$$\omega^2 = \omega_o^2 \pm 2\alpha\theta,$$

gde je ω_o početna ugaona brzina tela, ω ugaona brzina tela, a θ ugaoni pomeraj posle vremena t. Znak "+" odnosi se na ravnomerno ubrzano, a znak "–" na ravnomerno usporeno kružno kretanje.

Veza izmedju ugaone brzine ω i tangencijalne (periferijske) brzine v kod kružnog kretanja je

$$\omega = \frac{v}{r},$$

gde je r poluprečnik kružne putanje. Tangencijalno ubrzanje a_t i normalno ubrzanje a_n su

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha r, \quad a_n = v\omega = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

a totalno ubrzanje je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}.$$

Kod ravnomernog kružnog kretanja, veza izmedju frekvencije ν, perioda T i ugaone brzine ω je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Tabela 2.1: Analogija izmedju translatornog i rotacionog kretanja (kinematika).

Translacija	Rotacija
Put s	Ugaoni pomeraj θ
Brzina $v = ds/dt$	Ugaona brzina $\omega = d\theta/dt$
Ubrzanje $a = dv/dt = d^2s/dt^2$	Ugaono ubrzanje $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$

U tabeli 2.1 data je analogija izmedju kinematičkih veličina translatornog i rotacionog kretanja.

Kod kosog hica, komponente brzine tela v u pravcu x i y-ose su

$$v_x = v_o \cos\theta, \quad v_y = v_o \sin\theta - gt,$$

gde je v_o početna brzina tela, a θ ugao elevacije.

Rezultujuća brzina tela je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Parametarske jednačine putanje hica (parametar vreme t) su

$$x = v_o t \cos\theta, \quad y = v_o t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2,$$

a jednačina putanje u eksplicitnom obliku je

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2\theta}.$$

Domet hica se izračunava iz izraza

$$x_D = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g},$$

a maksimalna visina hica iz izraza

$$y_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g}.$$

2.1.2 Zadaci

Zadatak 1

Prvu trećinu puta automobil je prešao brzinom $v_1 = 15\,kmh^{-1}$, drugu trećinu puta brzinom $v_2 = 20\,kmh^{-1}$, a poslednju trećinu brzinom $v_3 = 50\,kmh^{-1}$. Odrediti srednju brzinu v_{sr} automobila duž celog puta.

Rešenje

Srednja brzina na delu puta Δs se definiše kao količnik tog dela puta i vremena Δt koje je potrebno da se on predje. U konkretnom slučaju traži se srednja brzina duž celog puta s ($\Delta s = s$) i važi $\Delta t = t_1 + t_2 + t_3$, gde su t_1, t_2 i t_3 vremena potrebna da se predju prva, druga i treća trećina puta, redom. Dakle:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3}. \tag{2.1}$$

Kako je kretanje automobila na pojedinim delovima puta uniformno, važi:

$$t_1 = \frac{s}{3v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{3v_2}, \quad t_3 = \frac{s}{3v_3},$$

što zamenom u (2.1) daje

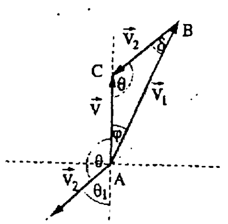
$$v_{sr} = \frac{s}{s/(3v_1) + s/(3v_2) + s/(3v_3)} = \frac{3}{1/v_1 + 1/v_2 + 1/v_3} = 21.95\,kmh^{-1}.$$

Zadatak 2

Brzina aviona u odnosu na vazduh je $v_1 = 400\,kmh^{-1}$. Vetar duva od severoistoka ka jugozapadu brzinom $v_2 = 50kmh^{-1}$. U kom pravcu treba podesiti kurs letenja da bi avion leteo od juga prema severu? Kolika je pri tom brzina v aviona u odnosu na Zemlju?

Rešenje

Avion treba da leti rezultujućom brzinom v čiji pravac treba da se poklapa sa pravcem sever-jug, a smer treba da je prema severu. Da bi se avion stalno kretao u tom pravcu, njegov kurs letenja sa tim pravcem treba da zaklapa ugao φ.



Sinusna teorema za ΔABC glasi:

$$\frac{\sin\theta}{v_1} = \frac{\sin\varphi}{v_2} = \frac{\sin\delta}{v}.$$

Kako je sa slike $\theta_1 = 45^o$, $\theta = 180^o - \theta_1 = 135^o$ i $\delta = 180^o - \theta - \varphi = 45^o - \varphi$, iz gornjeg izraza se za ugao φ i brzinu aviona u odnosu na Zemlju v dobija:

$$\sin\varphi = \frac{v_2}{v_1}\sin\theta = 0.0884 \Rightarrow \varphi = 5^o\,4',$$

$$v = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}v_2 = 363\,kmh^{-1}.$$

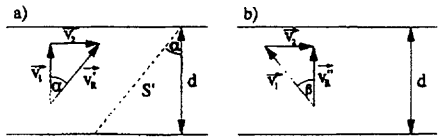
Zadatak 3

Motorni čamac prelazi reku širine $d = 1\,km$. Ako je prosečna brzina čamca u odnosu na vodu $v_1 = 4\,kmh^{-1}$, a prosečna brzina rečnog toka $v_2 = 2\,kmh^{-1}$, izračunati:
a) ugao α pod kojim će se kretati čamac po reci ako se usmeri u pravcu koji je normalan na rečni tok,
b) ugao β pod kojim bi trebalo da se usmeri čamac da bi se kretao po putanji koja je normalna na rečni tok,
c) odnos vremena prelaženja reke u slučajevima pod a) i b).
U kom slučaju će čamac brže preći reku?

Rešenje

Rezultujuća brzina čamca $\vec{v}_R$ jednaka je vektorskom zbiru brzina $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$



a) Usled toga što postoji brzina vodenog toka, čamac će skrenuti nizvodno za ugao α u odnosu na pravac u kome je usmeren. Ovaj ugao se može naći na sledeći način:

$$\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{v_2}{v_1} = 26^o\,34'.$$

Rezultujuća brzina čamca iznosi $v_R' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 4.47\,kmh^{-1}$.

b) U ovom slučaju rezultujuća brzina treba da bude normalna na rečni tok, pa čamac treba usmeriti pod uglom β uzvodno. Važi:

$$\sin\beta = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \beta = \arcsin\frac{v_2}{v_1} = 30^o,$$

a rezultujuća brzina čamca je $v_R'' = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 3.46\,kmh^{-1}$.

c) U prvom slučaju čamac predje rastojanje $s' = d/\cos\alpha$, krećući se brzinom v_R', a u drugom ratojanje $s'' = d$, krećući se brzinom v_R''. Odnos vremena prelaženja sa jedne na drugu obalu reke je

$$\frac{t'}{t''} = \frac{s'/v_R'}{s''/v_R''} = \frac{d/(v_R'\cos\alpha)}{d/v_R''} = \frac{v_R''}{v_R'\cos\alpha} = 0.86.$$

Dakle, čamac će reku preći brže u slučaju pod a). Tada je njegov put nešto duži, ali mu je rezultujuća brzina veća.

Zadatak 4

U bunar nepoznate dubine H baci se kamen brzinom $v_o = 20\,ms^{-1}$. Zvuk udara kamena o površinu vode čuje se posle vremena $t = 2\,s$ od momenta izbacivanja kamena. Kolika je dubina bunara? Brzina zvuka u vazduhu je $v = 340\,ms^{-1}$.

Rešenje

Vreme t se sastoji od vremena t_1 potrebnog kamenu da, prešavši put H, padne na površinu vode i vremena t_2 koje je potrebno zvuku udara kamena o površinu vode da predje isti put i dodje do posmatrača ($t = t_1 + t_2$). Kretanje kamena naniže je ravnomerno ubrzano sa početnom brzinom v_o i ubrzanjem g, a kretanje zvuka je uniformno, pa se može napisati:

$$H = v_o t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2,$$
$$H = v t_2 = v(t - t_1).$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih izraza dobija se kvadratna jednačina:

$$v_o t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = vt - vt_1 \Leftrightarrow t_1^2 + \frac{2(v + v_o)}{g} t_1 - \frac{2vt}{g} = 0,$$

čija su rešenja:

$$(t_1)_{1/2} = -\frac{v + v_o}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v + v_o}{g}\right)^2 + \frac{2vt}{g}}.$$

Uzimanjem u obzir samo rešenja sa znakom "+" (za rešenje sa znakom "-" se dobija negativno vreme, što nema fizičkog smisla) i zamenom brojnih vrednosti, dobija se da je

$$t_1 = 1.84\,s \Rightarrow t_2 = t - t_1 = 0.16\,s \Rightarrow H = vt_2 = 54.4\,m.$$

Zadatak 5

Rastojanje $s = 24\,km$ izmedju dve stanice voz prelazi srednjom brzinom $v_{sr} = 54\,kmh^{-1}$. Pošavši iz prve stanice, kreće se $t_1 = 40\,s$ sa stalnim ubrzanjem a_1, a zatim u toku vremena t_2 sa stalnom brzinom. Na kraju se kreće $t_3 = 60\,s$ usporeno do zaustavljanja, sa stalnim ubrzanjem a_2. Koliku najveću brzinu v_{max} voz dostiže tokom kretanja?

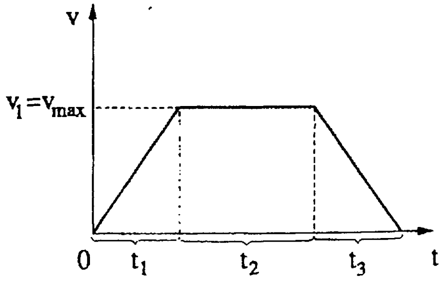
Rešenje

Dijagram zavisnosti brzine voza od vremena prikazan je na slici.

Maksimalnu brzinu $v_{max} = v_1$ voz dostiže na kraju prvog (ubrzanog) dela kretanja, a to je ujedno i početna brzina za treći (usporeni) deo kretanja. Važi:

$$v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow a_1 = \frac{v_1}{t_1}; \qquad (2.2)$$

$$0 = v_1 - a_2 t_3 \Rightarrow a_2 = \frac{v_1}{t_3}. \quad (2.3)$$



Kako je srednja brzina na celom putu $v_{sr} = s/t$, gde je $t = t_1 + t_2 + t_3$ ukupno vreme, za vreme trajanja drugog dela puta, kada je kretanje ravnomerno, dobija se

$$t_2 = t - (t_1 + t_3) = \frac{s}{v_{sr}} - (t_1 + t_3). \tag{2.4}$$

Ukupan put koji voz predje je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_1 t_2 + v_1 t_3 - \frac{1}{2}a_2 t_3^2,$$

a zamenom (2.3), (2.2) i (2.4) u gornji izraz posle sredjivanja dobija se

$$s = v_1\left(\frac{s}{v_{sr}} - \frac{t_1 + t_3}{2}\right) \Rightarrow v_{max} = v_1 = \frac{s}{s/v_{sr} - (t_1 + t_3)/2} = 15.5\, ms^{-1}.$$

Zadatak 6

Posmatrač koji u trenutku polaska voza stoji pored njegovog prednjeg kraja primetio je da je prvi vagon prošao pored njega za vreme $t_1 = 4\,s$. Koliko će se vremena kretati pored njega sedmi vagon? Kretanje voza smatrati ravnomerno ubrzanim.

Rešenje

Neka je dužina jednog vagona l, a rastojanje izmedju vagona zanemarljivo. Kako je kretanje voza sa konstantnim ubrzanjem a i bez početne brzine, važi:

$$l = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow a = \frac{2l}{t_1^2}. \tag{2.5}$$

Ako se sa t_n obeleži vreme potrebno da prvih n vagona prodje pored posmatrača, imajući u vidu (2.5) dobija se

$$nl = \frac{1}{2}at_n^2 \Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{2nl}{a}} = t_1\sqrt{n},$$

a za prvih $n-1$ vagona:

$$(n-1)l = \frac{1}{2}at_{n-1}^2 \Rightarrow t_{n-1} = \sqrt{\frac{2(n-1)l}{a}} = t_1\sqrt{n-1}.$$

Vreme potrebno da pored posmatrača prodje n-ti vagon je

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = t_1\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right),$$

a konkretno za sedmi ($n = 7$) se dobija:

$$\Delta t_7 = t_7 - t_6 = t_1\left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right) = 0.785\, s.$$

Zadatak 7

Telo je bačeno vertikalno uvis sa početnom brzinom v_o. Utvrdjeno je da se ono nalazi na izvesnoj visini h iznad mesta bacanja posle $t_1 = 2.5\,s$. Posle $t_2 = 3.5\,s$ ono je ponovo na istoj visini pošto je došlo do najviše tačke svoje putanje a nalazi se u fazi padanja. Izračunati početnu brzinu v_o, visinu h i maksimalnu visinu h_{max} koju dostigne telo.

Rešenje

Neka telo na visini h ima brzinu v (intenzitet brzine na ovoj visini pri kretanju tela naviše je isti kao pri njegovom padanju, samo je smer suprotan) i neka su t' i t'' vremena potrebna telu da sa visine h dostigne visinu h_{max}, odnosno da sa visine h_{max} ponovo padne na visinu h. Kako je $t' + t'' = t_2 - t_1$ i $t' = t''$, dobija se $t' = t'' = 0.5\,s$.

Brzina v se nalazi iz izraza

$$0 = v - gt' \Rightarrow v = gt' = 4.91\, ms^{-1},$$

a brzina v_o iz izraza

$$v = v_o - gt_1 \Rightarrow v_o = v + gt_1 = 29.44\, ms^{-1}.$$

Tražene visine h i h_{max} su

$$h = v_o t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 42.94\, m,$$

$$h_{max} = v_o(t_1 + t') - \frac{1}{2}g(t_1 + t')^2 = 44.18\, m.$$

Zadatak 8

Dva tela, A i B, puštena su da padaju sa visine h vertikalno naniže bez početne brzine. Telo B pušteno je $t_o = 2\,s$ posle tela A.

a) Odrediti vreme od početka kretanja tela A posle koga će rastojanje izmedju tela A i B biti $\Delta s = 50\,m$.

b) Odrediti visinu h ako se zna da je u trenutku kada telo A dodirne zemlju telo B prešlo polovinu puta tela A.

Rešenje

a) Putevi koje predju tela A i B posle vremena t od početka kretanja tela A su

$$s_A = \frac{1}{2}gt^2, \quad s_B = \frac{1}{2}g(t-t_o)^2.$$

Prema uslovu zadatka, posle ovog vremena tela su na rastojanju Δs, pa se t nalazi na sledeći način:

$$\Delta s = s_A - s_B = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 = gtt_o - \frac{1}{2}gt_o^2 \Rightarrow t = \frac{\Delta s}{gt_o} + \frac{t_o}{2} = 3.55\,s.$$

b) Ako se sa t označi vreme kretanja tela A do pada na zemlju, za telo A važi

$$s_A = \frac{1}{2}gt^2 = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{2.6}$$

a za telo B

$$s_B = \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 = \frac{h}{2}.$$

Zamenom t iz (2.6) u gornji izraz, posle sredjivanja se dobija kvadratna jednačina po h

$$h^2 - 6gt_o^2h + g^2t_o^4 = 0,$$

čije je rešenje (odbacuje se rešenje sa znakom "–", jer nema fizičkog smisla)

$$h = gt_o^2(3+2\sqrt{2}) = 228.71\,m.$$

Zadatak 9

Jednačina kretanja tela po x-osi ima oblik $x(t) = A + Bt^2 + Ct^3$, gde je $A = -1\,m$, $B = 3\,ms^{-2}$ i $C = -2\,ms^{-3}$. Koliki su:

a) brzina i ubrzanje tela,

b) vreme kretanja do zaustavljanja t_z,

c) maksimalna brzina tela v_{max} i vreme t_{max} za koje ono dostigne tu brzinu.

Rešenje

a) Brzina i ubrzanje tela su

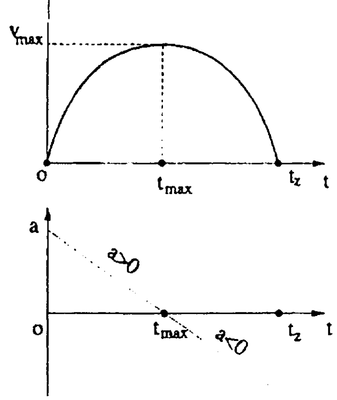
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A + Bt^2 + Ct^3\right)$$

$$v(t) = 2Bt + 3Ct^2,$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(2Bt + 3Ct^2\right)$$

$$a(t) = 2B + 6Ct.$$

Vrednosti za v i a prikazane su na slici. Kao što se vidi, brzina najpre raste i u trenutku t_{max} dostiže maksimalnu vrednost, da bi zatim počela da opada. Ubrzanje je pozitivno za $t < t_{max}$ i opada po linearnom zakonu, jednako je nuli u trenutku t_{max}, a za $t > t_{max}$ je negativno (telo usporava) i raste po apsolutnoj vrednosti. Telo se zaustavlja u trenutku $t_z = 2t_{max}$ (zavisnost $v(t)$ je parabolična i važi simetrija u odnosu na tačku t_{max}).



b) Vreme t_z se nalazi iz uslova

$$v(t_z) = 0 \Leftrightarrow 2Bt_z + 3Ct_z^2 = t_z(2B + 3Ct_z) = 0,$$

odakle je

$$t_z = -\frac{2B}{3C} = 1\,s.$$

c) Vreme t_{max} i brzina v_{max} se nalaze iz uslova ekstremuma funkcije $v(t)$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_{max}} = 0 \Leftrightarrow 2B + 6Ct_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = -\frac{B}{3C} = 0.5\,s,$$

$$v_{max} = v(t_{max}) = 2Bt_{max} + 3Ct_{max}^2 = -\frac{B^2}{3C} = 1.5\,ms^{-1}.$$

Zadatak 10

Tačka se kreće u ravni xy po zakonu $x = A\sin\omega t$, $y = A(1-\cos\omega t)$, gde su A i ω pozitivne konstante. Odrediti put s koji tačka predje za vreme τ, kao i ugao θ izmedju vektora brzine i vektora ubrzanja tačke.

Rešenje

Parametarske jednačine putanje tačke su (parametar je vreme t)

$$x = A\sin\omega t, \quad y = A(1-\cos\omega t).$$

Komponente brzine i ubrzanja su

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega\sin\omega t;$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = A\omega^2\cos\omega t.$$

Brzina i ubrzanje tela su

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\omega = const.,$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = A\omega^2 = const.$$

Pošto je kretanje sa konstantnom brzinom, predjeni put posle vremena τ je $s = v\tau = A\omega\tau$. Iako je brzina po intenzitetu konstantna, ubrzanje a postoji zato što se ona menja po pravcu i smeru.

Skalarni proizvod brzine i ubrzanja je

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = av\cos\theta = a_x v_x + a_y v_y = 0,$$

odakle se dobija

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Zadatak 11

Telo se kreće promenljivo, sa ubrzanjem čiji intenzitet zavisi od brzine po zakonu $a(v) = -k\sqrt{v}$, gde je k pozitivna konstanta. U početnom trenutku brzina tela je v_o.

a) Koliko vremena t_z se telo kreće do zaustavljanja?

b) Koliki put s_z telo predje za to vreme?

Rešenje

Kako je $a = dv/dt$, dobija se diferencijalna jednačina

$$a = -k\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\,dt \Leftrightarrow v^{-1/2}dv = -k\,dt.$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine dobija se

$$-k\int_0^t dt = \int_{v_o}^{v} v^{-1/2}dv \Leftrightarrow -kt\Big|_0^t = 2\sqrt{v}\Big|_{v_o}^{v} \Leftrightarrow kt = 2\left(\sqrt{v_o} - \sqrt{v}\right). \qquad (2.7)$$

Za $t = t_z$ je $v = 0$, pa se zamenom ovih vrednosti u izraz (2.7) dobija

$$kt_z = 2\sqrt{v_o} \Rightarrow t_z = \frac{2\sqrt{v_o}}{k}. \qquad (2.8)$$

Predjeni put do zaustavljanja može se naći iz izraza

$$s_z = \int_0^{t_z} v(t)dt.$$

Zavisnost $v(t)$ nalazi se iz izraza (2.7)

$$v(t) = \left(\sqrt{v_o} - \frac{1}{2}kt\right)^2 = v_o - \sqrt{v_o}\,kt + \frac{1}{4}k^2t^2.$$

Prema tome je

$$s_z = \int_0^{t_z}\left(v_o - \sqrt{v_o}\,kt + \frac{1}{4}k^2t^2\right)dt = v_o t_z - k\sqrt{v_o}\frac{t_z^2}{2} + \frac{1}{4}k^2\frac{t_z^3}{3}.$$

Zamenom t_z iz izraza (2.8) dobija se

$$s_z = \frac{2}{3k}v_o^{3/2}.$$

Zadatak 12

Materijalna tačka se kreće pravolinijski, pri čemu je zavisnost predjenog puta od brzine odredjena izrazom $s(v) = -k_1\sqrt{v} + k_2$, gde su k_1 i k_2 odgovarajuće pozitivne konstante. Odrediti vreme t_z za koje će se brzina materijalne tačke smanjiti 2 puta u odnosu na početnu brzinu.

Rešenje

Ako je $v = ds/dt$, diferenciranjem izraza $s(v)$ po vremenu t se dobija

$$s = -k_1\sqrt{v} + k_2 \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = -\frac{k_1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow v = -\frac{k_1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dt}.$$

Razdvajanjem promenljivih u ovoj diferencijalnoj jednačini dobija se

$$dt = -\frac{k_1}{2}v^{-3/2}dv,$$

odakle se, imajući u vidu da je $v(t_x) = v_o/2$, integraljenjem u odgovarajućim granicama nalazi t_x

$$\int_0^{t_x} dt = -\frac{k_1}{2}\int_{v_o}^{v_o/2} v^{-3/2}dv \Leftrightarrow t\Big|_0^{t_x} = k_1 v^{-1/2}\Big|_{v_o}^{v_o/2} \Leftrightarrow t_x = \frac{k_1}{\sqrt{v_o}}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Nepoznata veličina $\sqrt{v_o}$ može se izraziti preko datih konstanti k_1 i k_2 iz početnog izraza za s, imajući u vidu da je $s(t=0) = 0$ i $v(t=0) = v_o$

$$-k_1\sqrt{v_o} + k_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{v_o} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Zamenom $\sqrt{v_o}$ u izraz za t_x konačno se dobija

$$t_x = \frac{k_1^2}{k_2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

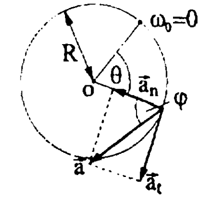
Zadatak 13

Telo počinje da rotira iz stanja mirovanja sa stalnim tangencijalnim ubrzanjem a_t. Koliki ugao θ opiše njegov radijus vektor od početka rotacije do trenutka kada ugao izmedju normalnog ubrzanja a_n i totalnog ubrzanja a dostigne vrednost $\varphi = \pi/6$?

Rešenje

Neka je R poluprečnik kruga po kome se telo kreće. Kako je $a_t = \alpha R = const.$, sledi da je ovo kretanje sa konstantnim ugaonim ubrzanjem α. Pošto je početna ugaona brzina $\omega_o = 0$, važi

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad \omega = \omega_o + \alpha t = \alpha t. \tag{2.9}$$



Sa druge strane, važi

$$\tan\varphi = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha R}{\omega^2 R} = \frac{\alpha}{\omega^2}.$$

Zamenom (2.9) u gornji izraz dobija se

$$\tan\varphi = \frac{\alpha}{\alpha^2 t^2} = \frac{1}{\alpha t^2} = \frac{1}{2\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2\tan\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,rad.$$

Zadatak 14

Telo se kreće po krugu poluprečnika R, tako da njegova brzina zavisi od predjenog puta s po zakonu $v(s) = k\sqrt{s}$, gde je k konstanta. Ustanoviti zavisnost veličine ugla φ izmedju vektora ukupnog ubrzanja i vektora brzine od predjenog puta.

Rešenje

Kako je

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{k^2 s}{R},$$
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}(k\sqrt{s})\,v = \frac{k}{2\sqrt{s}}k\sqrt{s} = \frac{k^2}{2},$$

za traženu zavisnost se dobija

$$\varphi = \arctan\frac{a_n}{a_t} = \arctan\frac{k^2 s/R}{k^2/2} = \arctan\frac{2s}{R}.$$

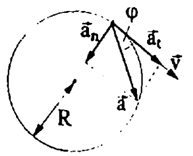
Zadatak 15

Telo se kreće po krugu poluprečnika R, tako da je u svakom trenutku njegovo tangencijalno ubrzanje a_t po intenzitetu jednako normalnom ubrzanju a_n. U početnom trenutku brzina tela je v_o. Ako je kretanje tela usporeno, odrediti brzinu tela u zavisnosti od vremena i predjenog puta.

Rešenje

Kako je $a_n = \omega^2 R$, $a_t = -R\alpha$ $(\alpha < 0)$, važi

$$a_n = a_t \Rightarrow \omega^2 R = -R\alpha \Leftrightarrow \omega^2 = -\alpha.$$



Kako je $\alpha = d\omega/dt$, dobija se diferencijalna jednačina

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega^2 \Leftrightarrow \frac{d\omega}{\omega^2} = -dt,$$

čijim rešavanjem se dobija zavisnost $\omega(t)$, tj.

$$\int_{\omega_o}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2} = -\int_0^t dt \Leftrightarrow -\frac{1}{\omega}\Big|_{\omega_o}^{\omega} = -t \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_o} = t \Leftrightarrow \omega(t) = \frac{\omega_o}{1+\omega_o t}.$$

Kako je $v = \omega R$ i $v_o = \omega_o R$, množenjem prethodnog izraza sa R za traženu zavisnost $v(t)$ se dobija

$$v(t) = \frac{v_o}{1 + v_o t/R}. \tag{2.10}$$

Zavisnost predjenog puta od vremena može se naći iz izraza

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \frac{v_o}{1+v_o t/R}dt.$$

Uvodjenjem smene $1 + v_o t/R = p$, $dt = Rdp/v_o$, $|_0^t \longrightarrow |_1^{1+v_o t/R}$, dobija se

$$s(t) = R\int_1^{1+v_o t/R} \frac{dp}{p} = R\ln\left(1 + \frac{v_o}{R}t\right).$$

Iz izraza (2.10) sledi

$$1 + \frac{v_o}{R}t = \frac{v_o}{v},$$

pa je

$$s(v) = R\ln\frac{v_o}{v}.$$

Rešavanjem prethodne jednačine po v dobija se

$$v(s) = v_o \exp(-s/R).$$

Zadatak 16

Artiljerijsko orudje ispaljuje hitac pod uglom $\theta_1 = 60^o$ prema horizontu početnom brzinom v_o. Nakon $\tau = 2\,s$, drugo orudje, koje se nalazi $h = 100\,m$ iznad u odnosu na prvo, ispaljuje hitac pod uglom $\theta_2 = 30^o$ istom početnom brzinom. Odrediti početnu brzinu v_o tako da dodje do sudara projektila, kao i vreme t_s i koordinate x_s i y_s mesta sudara.

Rešenje

Parametarske jednačine putanje prvog hica su

$$x_1 = v_{o1x}t = v_o t\cos\theta_1, \tag{2.11}$$

$$y_1 = v_{o1y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_o t\sin\theta_1 - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.12}$$

Pošto je drugi hitac lansiran sa zakašnjenjem τ i sa visine h, parametarske jednačine njegove putanje glase:

$$x_2 = v_{o2x}(t-\tau) = v_o(t-\tau)\cos\theta_2,$$

$$y_2 = v_{o2y}(t-\tau) - \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 + h = v_o(t-\tau)\sin\theta_2 - \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 + h.$$

U tački sudara projektila je $t = t_s$, $x_1 = x_2 = x_s$ i $y_1 = y_2 = y_s$. Iz uslova $x_1(t_s) = x_2(t_s)$ dobija se

$$x_1(t_s) = x_2(t_s) \Leftrightarrow v_o t_s\cos\theta_1 = v_o(t_s - \tau)\cos\theta_2,$$

odakle se za t_s dobija

$$t_s = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}\tau = 4.73\,s. \tag{2.13}$$

Iz uslova $y_1(t_s) = y_2(t_s)$ dobija se

$$y_1(t_s) = y_2(t_s) \Leftrightarrow v_o t_s\sin\theta_1 - \frac{1}{2}gt_s^2 = v_o(t_s - \tau)\sin\theta_2 - \frac{1}{2}g(t_s-\tau)^2 + h.$$

Iz gornjeg izraza se posle zamene izraza (2.13) za t_s i sredjivanja dobija v_o:

$$v_o = \frac{1}{2\tau\sin(\theta_1 - \theta_2)}\left[2h(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + g\tau^2(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)\right] = 63.4\,ms^{-1}.$$

Najzad, zamenom brojnih vrednosti za v_o i t_s u (2.11), odnosno (2.12), dobija se

$$x_s = x_1(t_s) = v_o t_s \cos\theta_1 = 150\,m,$$

$$y_s = y_1(t_s) = v_o t_s \sin\theta_1 - \frac{1}{2} g t_s^2 = 150\,m.$$

Zadatak 17

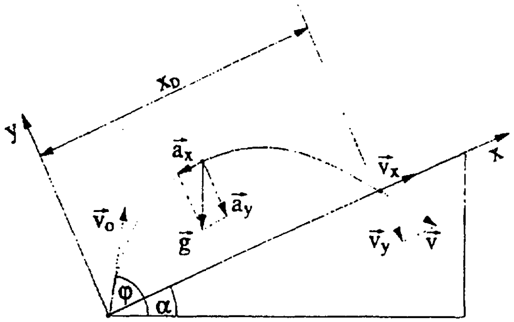
Naći ugao u odnosu na horizontalnu ravan pod kojim treba baciti kamen brzinom $v_o = 20\,ms^{-1}$ iz podnožja strme ravni nagibnog ugla $\alpha = 45^o$, tako da bi on pao:

a) pod pravim uglom u odnosu na strmu ravan,

b) što dalje.

Izračunati rastojanje od mesta bacanja kamena do mesta njegovog pada na strmu ravan u ova dva slučaja.

Rešenje



Kada se kretanje tela razloži na komponente u pravcu x-ose i u pravcu y-ose, dobija se

$$v_{ox} = v_o \cos(\varphi - \alpha), \quad v_{oy} = v_o \sin(\varphi - \alpha),$$

$$a_x = -g \sin\alpha, \quad a_y = -g\cos\alpha,$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t, \quad v_y = v_{oy} + a_y t,$$

$$x = v_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad y = v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

a) Neka je traženi ugao φ_a, traženo rastojanje x_a, a vreme koje protekne od momenta bacanja kamena do momenta njegovog pada na strmu ravan t_a. U trenutku pada kamena na strmu ravan je $y = 0$, a on će pasti pod pravim uglom u odnosu na strmu ravan ako je ispunjen uslov $v_x = 0$.

Izraz za vreme t_a se nalazi na sledeći način:

$$y(t_a) = t_a v_o \sin(\varphi_a - \alpha) - \frac{1}{2} g t_a^2 \cos\alpha = 0 \Rightarrow t_a = \frac{2v_o \sin(\varphi_a - \alpha)}{g\cos\alpha}. \quad (2.14)$$

Zamenom gornjeg izraza u uslov $v_x = 0$ dobija se

$$v_x(t_a) = v_o \cos(\varphi_a - \alpha) - g t_a \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow 1 = 2\tan\alpha\,\tan(\varphi_a - \alpha),$$

odakle je

$$\varphi_a = \arctan\left(\frac{1}{2\tan\alpha}\right) + \alpha = 71.56^o.$$

Zamenom brojnih vrednosti u izraz (2.14) dobija se $t_a = 2.58\,s$.

Rastojanje x_a iznosi

$$x_a = x(t_a) = v_o t_a \cos(\varphi_a - \alpha) - \frac{1}{2} g t_a^2 \sin\alpha = 23.07\,m.$$

b) Neka je u ovom slučaju traženi ugao φ_b, traženo rastojanje x_{max}, a vreme potrebno da kamen padne na strmu ravan t_b. Tražene veličine se dobijaju iz uslova $y = 0$ i uslova ekstremuma dometa hica x_D: $dx_D/d\varphi = 0$.

Zavisnost vremena t_b od ugla φ se nalazi prema (2.14)

$$y(t_b) = v_o t_b \sin(\varphi - \alpha) - \frac{1}{2} g t_b^2 \cos\alpha = 0 \Rightarrow t_b = \frac{2v_o \sin(\varphi - \alpha)}{g\cos\alpha}. \quad (2.15)$$

Domet kosog hica iznosi

$$x_D = x(t_b) = v_o t_b \cos(\varphi - \alpha) - \frac{1}{2} g t_b^2 \sin\alpha\,.$$

Zavisnost dometa od ugla φ se nalazi zamenom t_b iz (2.15) u gornji izraz. Posle sredjivanja se dobija

$$x_D(\varphi) = \frac{v_o^2}{g\cos\alpha}\left[\sin 2(\varphi - \alpha) - 2\tan\alpha\,\sin^2(\varphi - \alpha)\right].$$

Ugao φ_b se nalazi iz uslova ekstremuma funkcije $x_D(\varphi)$

$$\frac{dx_D}{d\varphi}|_{\varphi=\varphi_b} = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2(\varphi_b - \alpha) - 2\tan\alpha\, 2\sin(\varphi_b - \alpha)\,\cos(\varphi_b - \alpha) = 0.$$

Sredjivanjem ovog izraza dobija se

$$\tan 2(\varphi_b - \alpha) = cotan\alpha \Rightarrow \varphi_b = \frac{1}{2}\arctan(cotan\alpha) + \alpha = 67.5^o,$$

a zamenom ove brojne vrednosti u (2.15), pri čemu je $\varphi = \varphi_b$, nalazi se $t_b = 2.2\,s$.

Najzad, rastojanje x_{max} iznosi

$$x_{max} = x(t_b) = v_o t_b \cos(\varphi_b - \alpha) - \frac{1}{2}g t_b^2 \sin\alpha = 23.89\,m.$$

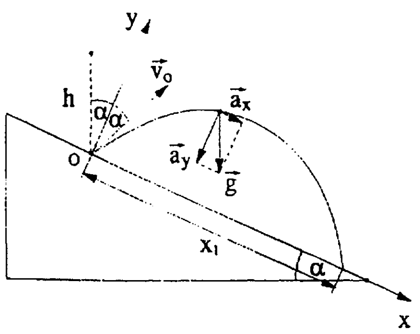
Zadatak 18
Telo pada bez početne brzine sa visine $h = 30\,cm$ na strmu ravan nagibnog ugla $\alpha = 30^o$ i elastično se odbija od nje. Odrediti rastojanje x_l izmedju tačaka prvog i drugog udara tela u ravan.

Rešenje

Brzina tela u trenutku prvog udara tela u strmu ravan je $v_o = \sqrt{2gh}$. Kako je sudar tela i ravni savršeno elastičan, početna brzina tela po odbijanju od ravni ima isti intenzitet, a pravci brzine pre i brzine posle odbijanja su simetrični u odnosu na y-osu.

Kada se kretanje tela razloži na komponente u pravcu x-ose i u pravcu y-ose, dobija se

$$v_{ox} = v_o \sin\alpha, \quad v_{oy} = v_o \cos\alpha,$$



$$a_x = g\sin\alpha, \quad a_y = -g\cos\alpha,$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t, \quad v_y = v_{oy} + a_y t,$$

$$x = v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

Ako je t_l vreme koje protekne izmedju prvog i drugog udara tela u ravan, onda važi

$$y(t_l) = 0 \Leftrightarrow v_{oy}t_l + \frac{1}{2}a_y t_l^2 = 0 \Rightarrow t_l = -\frac{2v_{oy}}{a_y} = \frac{2v_o}{g},$$

pa je traženo rastojanje x_l

$$x_l = x(t_l) = v_{ox}t_l + \frac{1}{2}a_x t_l^2 = v_o \sin\alpha \cdot \frac{2v_o}{g} + \frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot \left(\frac{2v_o}{g}\right)^2 = \frac{4v_o^2}{g}\sin\alpha.$$

Zamenom $v_o = \sqrt{2gh}$ i brojnih vrednosti u gornji izraz konačno se dobija

$$x_l = 8h\sin\alpha = 120\,cm.$$

2.2 Dinamika

2.2.1 Teorija

Prvi Njutnov zakon (zakon inercije) matematički se može formulisati na sledeći način:

$$F_R = \sum F_i = 0 \Leftrightarrow mv = const. \quad (a = 0),$$

gde je m masa tela, F_R rezultujuća sila koja deluje na telo, a mv impuls tela.

Drugi Njutnov zakon (zakon promene impulsa u vremenu) glasi:

$$Fdt = d(mv) \Rightarrow F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{mdv}{dt} = ma,$$

gde Fdt predstavlja impuls sile.

Treći Njutnov zakon (zakon akcije i reakcije) glasi:

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_r,$$

gde je $\vec{F}_a$ sila akcije, a $\vec{F}_r$ sila reakcije.

Specifična težina tela i njegova gustina date su, redom, izrazima

$$\sigma = \frac{Q}{V}; \qquad \rho = \frac{m}{V},$$

gde je $Q = mg$ težina tela, a V njegova zapremina.

Sila statičkog trenja i sila dinamičkog trenja date su, redom, izrazima

$$F_{trs} = \mu_s F_N; \qquad F_{trd} = \mu_d F_N,$$

gde je F_N sila koja deluje normalno na podlogu po kojoj se telo kreće, a μ_s i μ_d koeficijenti statičkog i dinamičkog trenja, redom.

Intenzitet centrifugalne sile koja deluje na telo koje se kreće brzinom v (ugaonom brzinom ω) po kružnoj putanji poluprečnika r iznosi:

$$F_c = ma_n = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Rad sile F na intervalu puta od s_1 do s_2 je

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F ds \cos(\vec{F}, d\vec{s}).$$

Kinetička energija, gravitaciona potencijalna energija i elastična potencijalna energija su, redom

$$E_k = \frac{mv^2}{2}; \qquad E_p = mgh; \qquad E_{pe} = \frac{kx^2}{2},$$

gde je h visina tela u odnosu na referentni nivo, k konstanta opruge i x izduženje opruge.

Snaga se definiše kao brzina vršenja rada, tj.

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Ako rad vrši konstantna sila po intenzitetu, izraz za snagu se može napisati u obliku:

$$P = \frac{d(Fs)}{dt} = F\frac{ds}{dt} = Fv.$$

Moment inercije materijalne tačke mase dm na rastojanju r od ose rotacije je

$$dI = r^2 dm,$$

a moment inercije tela dobija se sumiranjem, odnosno integraljenjem po celoj zapremini tela momenata inercije materijalnih tačaka

$$I = \int_V r^2 dm.$$

Moment impulsa se definiše kao

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow L = mvr \sin(\vec{r}, \vec{v}),$$

a moment sile

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow M = Fr \sin(\vec{r}, \vec{F}),$$

gde je $\vec{r}$ radijus vektor položaja tela u odnosu na osu rotacije.

Rad i snaga pri rotaciji tela izazvanoj konstantnim momentom sile M su, redom

$$A = M\theta, \quad P = \frac{dA}{dt} = \frac{d(M\theta)}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega,$$

dok je kinetička energija

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

U tabeli 2.2 data je analogija izmedju dinamičkih veličina translatornog i rotacionog kretanja.

Tabela 2.2: Analogija izmedju translatornog i rotacionog kretanja (dinamika).

Translacija	**Rotacija**
Masa m	Moment inercije I
Sila $F = d(mv)/dt = ma$	Moment sile $M = d(I\omega)/dt = I\alpha$
Impuls mv	Moment impulsa $I\omega$
Rad $A = Fs$	Rad $A = M\theta$
Snaga $P = Fv$	Snaga $P = M\omega$
Kinetička energija $E_k = mv^2/2$	Kinetička energija $E_k = I\omega^2/2$

2.2.2 Zadaci

Zadatak 1

Loptica mase $m = 20\,g$ udari brzinom $v = 10\,cms^{-1}$ u horizontalnu površinu stola pod uglom $\alpha = 60^o$ u odnosu na površinu. Posle sudara koji traje

$\Delta t = 0.1\,s$, loptica se odbija od površine stola pod istim uglom, krećući se istom brzinom. Izračunati impuls sile Δp koji je loptica primila za vreme sudara, kao i intenzitet srednje sile F_{sr} kojom loptica deluje na sto.

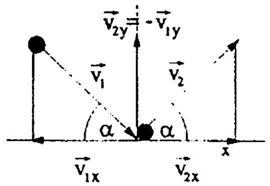
Rešenje

Promena brzine loptice pri udaru u sto je

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_x + \Delta\vec{v}_y = \Delta\vec{v}_y \Rightarrow \Delta v = v_{2y} - v_{1y} = 2v_{1y} = 2v\sin\alpha,$$

gde je $\vec{v}_1$ njena brzina pre, a $\vec{v}_2$ brzina posle udara o sto.

Impuls sile i intenzitet srednje sile kojom loptica deluje na sto su:

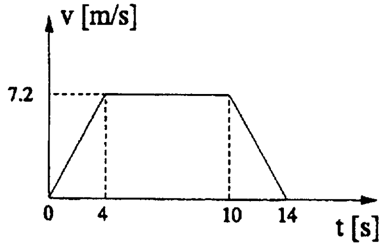


$$\Delta p = m\Delta v = 2mv\sin\alpha = 3.46 \cdot 10^{-3}\,kgms^{-1},$$

$$F_{sr} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 3.46 \cdot 10^{-2}\,N.$$

Zadatak 2

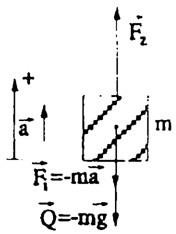
Brzina kretanja lifta prikazana je grafički na slici. Odrediti silu zatezanja F_z u užetu koje drži kabinu lifta na početku, sredini i kraju kretanja, ako se lift kreće naviše i ako je masa kabine $m = 500\,kg$.



Rešenje

Pri svakom ubrzanom kretanju tela mase m sa ubrzanjem $\vec{a}$ javlja se inercijalna sila $\vec{F}_i = -m\vec{a}$, tako da je u svakom trenutku uspostavljena dinamička ravnoteža sa rezultujućom silom koja deluje na telo: $\vec{F}_R + \vec{F}_i = 0$. Dakle, inercijalna sila ima intenzitet $F_i = |\vec{F}_i| = ma$, a smer joj je uvek suprotan od smera ubrzanja.

Neka se lift kreće sa ubrzanjem $\vec{a}$ kao na slici. Rezultujuća sila je u ovom slučaju $\vec{F}_R = \vec{Q} + \vec{F}_z$, gde je $\vec{Q} = m\vec{g}$ težina tela. Važi



$$\vec{F}_R + \vec{F}_i = 0 \Leftrightarrow \vec{Q} + \vec{F}_z + \vec{F}_i = 0.$$

Uzimajući u obzir smer pojedinih sila u odnosu na pozitivan smer (naviše), mogu se napisati skalarni izrazi

$$-Q + F_z - F_i = 0 \Leftrightarrow F_z = F_i + Q = ma + mg = m(a+g).$$

Na početku kretanja $[0 < t < 4\,s$, zavisnost $v_1(t)]$ je

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{7.2}{4} = 1.8\,ms^{-2} \Rightarrow F_z = m(a_1 + g) = 5805\,N.$$

Na sredini kretanja $[4\,s < t < 10\,s$, zavisnost $v_2(t)]$ je

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow F_z = mg = 4905\,N.$$

Pošto je $a_2 = 0$, u ovom slučaju je i $F_{i2} = 0$.

Na kraju kretanja $[10\,s < t < 14\,s$, zavisnost $v_3(t)]$ je

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = \frac{-7.2}{4} = -1.8\,ms^{-2} \Rightarrow F_z = m(a_3 + g) = 4005\,N.$$

U ovom slučaju je ubrzanje u stvari usmereno naniže, a inercijalna sila naviše.

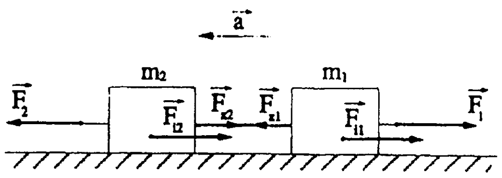
Zadatak 3

Dva tela, masa $m_1 = 2\,kg$ i $m_2 = 3kg$, povezana su neistegljivim užetom zanemarljive mase koje može da izdrži maksimalnu silu zatezanja $F_{max} = 350\,N$. Na tela deluju sile F_1 i F_2 kao na slici.

Intenziteti ovih sila se u funkciji vremena menjaju po zakonu $F_1(t) = kt$ i $F_2(t) = 2kt$, gde je $k = 10\,Ns^{-1}$. Posle kog vremena t_{max} od početka kretanja će doći do pucanja užeta? Trenje tela i podloge je zanemarljivo.

Rešenje

Treba najpre pretpostaviti smer ubrzanja sistema, a zatim prikazati sve sile koje deluju na pojedina tela, uključujući i inercijalne sile. Ovo je predstavljeno na slici.



Ukoliko je pretpostavljeni smer ubrzanja tačan, vrednost ubrzanja koja se dobija rešavanjem zadatka biće pozitivna. Ukoliko je smer ubrzanja suprotan od pretpostavljenog, dobijena brojna vrednost biće negativna, ali i dalje tačna po apsolutnoj vrednosti, a treba imati u vidu da su smerovi ubrzanja i inercijalnih sila u stvari suprotni od pretpostavljenih.

Jednačine dinamičke ravnoteže sila za prvo i drugo telo glase:

$$F_1 + F_{i1} = F_{z1}, \tag{2.16}$$

$$F_{z2} + F_{i2} = F_2. \tag{2.17}$$

Uže kojim su tela spojena je neistegljivo i zanemarljive mase, pa važi $F_{z1} = F_{z2} = F_z$. Kako je i $F_{i1} = m_1 a$, $F_{i2} = m_2 a$, izrazi (2.16) i (2.17) postaju:

$$m_1 a = F_z - F_1,$$

$$m_2 a = F_2 - F_z.$$

Sabiranjem gornjih izraza se dobija

$$(m_1 + m_2)a = F_2 - F_1 \Rightarrow a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2}.$$

Vrednost ubrzanja a je pozitivna, jer je $F_2 = 2kt > F_1 = kt$, pa se može zaključiti da je pretpostavljeni smer ubrzanja tačan.

Sila zatezanja F_z je

$$F_z = F_1 + m_1 a = F_1 + (F_2 - F_1)\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Kada se u ovaj izraz uvrste zavisnosti sila F_1 i F_2 od vremena dobija se

$$F_z(t) = kt + (2kt - kt)\frac{m_1}{m_1 + m_2} = kt\frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.$$

Maksimalna vrednost sile koju uže može da izdrži je

$$F_{max} = F_z(t_{max}) = kt_{max}\frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow t_{max} = \frac{F_{max}(m_1 + m_2)}{k(2m_1 + m_2)} = 25\,s.$$

Zadatak 4

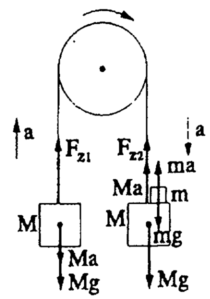
Preko kotura koji može da se obrće bez trenja oko horizontalne ose O prebačeno je savitljivo, neistegljivo uže. O krajeve užeta obešeni su jednaki tegovi čije su mase po $M = 50\,kg$. Kolika je masa m tega koji treba dodati na jednom kraju užeta da bi se sistem tegova kretao stalnim ubrzanjem $a = 1\,ms^{-2}$? Zanemariti trenje i inerciju kotura.

Rešenje

Pošto se inercija kotura zanemaruje, sile zatezanja užeta F_{z1} i F_{z2} su jednake, a slučaj je ekvivalentan slučaju kada uže bez trenja klizi preko kotura koji miruje. Sile zatezanja užeta su:

$$F_{z1} = Ma + Mg,$$

$$F_{z2} = (m + M)g - (m + M)a.$$



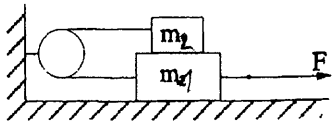
Kako je $F_{z1} = F_{z2}$, dobija se

$$Ma + Mg = (m + M)g - (m + M)a$$

odakle je

$$m = \frac{2Ma}{g - a} = 11.35\,kg.$$

Zadatak 5



Na glatkom horizontalnom stolu nalaze se dva tela, masa $m_1 = 2\,kg$ i $m_2 = 1\,kg$. Tela su povezana užetom prebačenim preko kotura. Zanemarujući inerciju kotura, odrediti silu F kojom je potrebno delovati na donje telo da bi se ono kretalo sa stalnim ubrzanjem $a = g/2$. Koeficijent trenja izmedju tela je $\mu = 0.5$, a trenje izmedju tela i stola je zanemarljivo.

Rešenje

Na slici je prikazano ubrzanje prvog (donjeg) tela, a treba imati u vidu da je ubrzanje drugog (gornjeg) tela isto po intenzitetu, ali ima suprotan smer. Jednačine dinamičke ravnoteže sila za tela 1 i 2 glase:

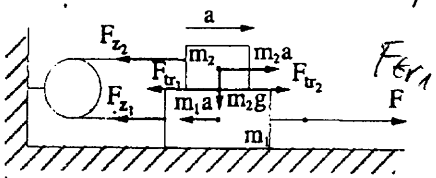
$$F = m_1 a + F_{tr1} + F_{z1}, \qquad (2.18)$$

$$m_2 a + F_{tr2} = F_{z2}. \qquad (2.19)$$

Prema trećem Njutnovom zakonu je $\vec{F}_{tr1} = -\vec{F}_{tr2}$. Intenzitet sile trenja izmedju tela je $F_{tr1} = F_{tr2} = F_{tr}$, a važi i $F_{z1} = F_{z2} = F_z$, pa izrazi (2.18) i (2.19) postaju:

$$m_1 a = F - F_{tr} - F_z,$$

$$m_2 a = F_z - F_{tr}.$$



$F = F_{c1} + F_{z1} + F_{tr1}$

$F_{tr1} + F_{c2} = F_{z2}$

Sabiranjem ovih izraza dobija se

$$(m_1+m_2)a = F - 2F_{tr} \Rightarrow F = (m_1+m_2)a + 2F_{tr}.$$

Posle zamene u gornji izraz $a = g/2$ i $F_{tr} = \mu m_2 g$ i sredjivanja, konačno se dobija

$$F = [m_1 + (1+4\mu)m_2]\frac{g}{2} = 24.5\,N.$$

Zadatak 6

Preko kotura koji se nalazi na vrhu dvostrane strme ravni prebačen je konac. O jedan kraj konca vezano je telo mase $m_1 = 200\,g$, a o drugi telo mase $m_2 = 300\,g$. Koeficijent trenja izmedju površine i tela iznosi $\mu = 0.2$. Uglovi strmih ravni su $\alpha = 45^o$ i $\beta = 60^o$. Izračunati:

a) koliko je ubrzanje a kojim se kreće sistem tela.

b) kolika je sila F_z istezanja konca.

Trenje kotura o osovinu i njegovu masu zanemariti.

Rešenje

Kao što se sa slike vidi svaka sila se razlaže na komponentu u pravcu strme ravni i komponentu normalnu na pravac strme ravni. Komponente težine prvog, odnosno drugog tela, su

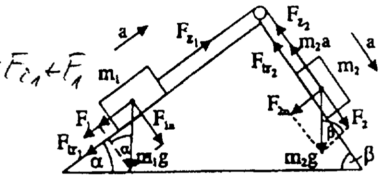
$$F_{P1} = F_1 = m_1 g \sin\alpha, \qquad F_2 = m_2 g \sin\beta,$$

$$F_{N1} = m_1 g \cos\alpha, \qquad F_{N2} = m_2 g \cos\beta.$$

Sile trenja koje deluju na tela su

$$F_{tr1} = \mu F_{N1} = \mu m_1 g \cos\alpha, \qquad F_{tr2} = \mu F_{N2} = \mu m_2 g \cos\beta.$$

a) Jednačina dinamičke ravnoteže sila za sistem dva tela glasi:



$= F_{tr2} + \cancel{F_{z2}} + F_{c2} - \cancel{F_{z1}} + F_{tr1} + F_{c1} + F_1$

$$F_{P2} = F_2 = m_2 a + F_{tr2} + m_1 a + F_{tr1} + F_1.$$

Odavde se, posle zamene izraza za pojedine sile i sredjivanja, dobija

$$a = \frac{m_2(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g = 1.1\,ms^{-2}.$$

b) Postoji i dinamička ravnoteža sila koje deluju na svako telo ponaosob, pa su sile zatezanja konca

$$F_{z1} = F_1 + F_{tr1} + m_1 a = m_1 g \sin\alpha + \mu m_1 g \cos\alpha + m_1 a = 1.9\,N,$$

$$F_{z2} = F_2 - F_{tr2} - m_2 a = m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta - m_2 a = 1.9\,N.$$

Kao što se i očekivalo, dobijeno je $F_z = F_{z1} = F_{z2}$.

Treba napomenuti da se rešavanje ovog zadatka u suštini svodi na rešavanje sistema jednačina

$$F_{z1} = F_1 + F_{tr1} + m_1 a,$$

$$F_{z2} = F_2 - F_{tr2} - m_2 a,$$

$$F_{z1} = F_{z2},$$

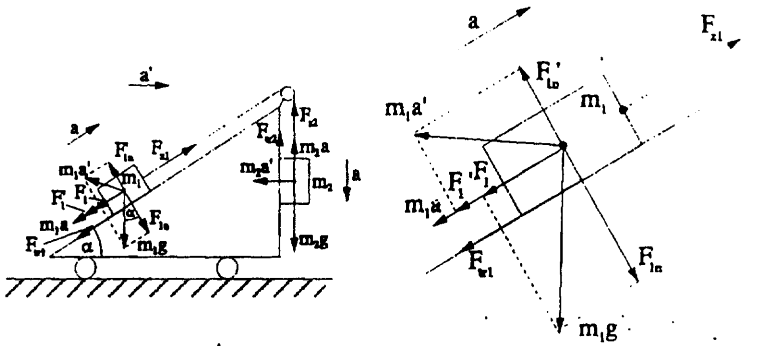
po promenljivim a, F_{z1} i F_{z2}.

Zadatak 7

Na strmoj ravni nagibnog ugla $\alpha = 30^o$, koja se kreće ravnomerno ubrzano sa ubrzanjem $a' = 4\,ms^{-2}$ u smeru prikazanom na slici, nalazi se telo mase $m_1 = 10\,g$. Telo je koncem vezano preko kotura za telo mase $m_2 = 50\,g$. Koeficijent trenja izmedju tela i podloge je $\mu = 0.2$. Koliko je vremena potrebno da telo mase m_2 predje put dužine $h = 42.9\,cm$, ako je u početnom trenutku imalo brzinu $v_o = 4\,ms^{-1}$ u odnosu na strmu ravan? Zanemariti trenje konca i kotura, kao i inerciju kotura.

Rešenje

Kolica i oba tela kreću se u horizontalnom pravcu sa ubrzanjem a', usled čega na tela deluju inercijalne sile $m_1 a'$ i $m_2 a'$. Postoji i kretanje prvog tela uz strmu ravan i drugog tela vertikalno naniže sa ubrzanjem a, pa stoga i inercijalne sile $m_1 a$ i $m_2 a$. Razlaganjem težine prvog tela i inercijalne sile $m_1 a'$ na komponente u pravcu i normalno na pravac strme ravni dobija se



$$F_1 = m_1 g \sin\alpha, \qquad F_{1N} = m_1 g \cos\alpha,$$
$$F_1' = m_1 a' \cos\alpha, \qquad F_{1N}' = m_1 a' \sin\alpha.$$

Sile trenja koje deluju na tela iznose

$$F_{tr1} = \mu(F_{1N} - F_{1N}') = \mu m_1 g \cos\alpha - \mu m_1 a' \sin\alpha, \quad F_{tr2} = \mu m_2 a'.$$

Jednačina dinamičke ravnoteže sila za sistem dva tela glasi:

$$m_2 g = m_1 a + F_1 + F_1' + F_{tr1} + m_2 a + F_{tr2}.$$

Odavde se, posle zamene izraza za pojedine sile i sredjivanja, dobija

$$a = \frac{m_2(g - \mu a') + [g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a'(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)]}{m_1 + m_2} = 5.89\, ms^{-2}.$$

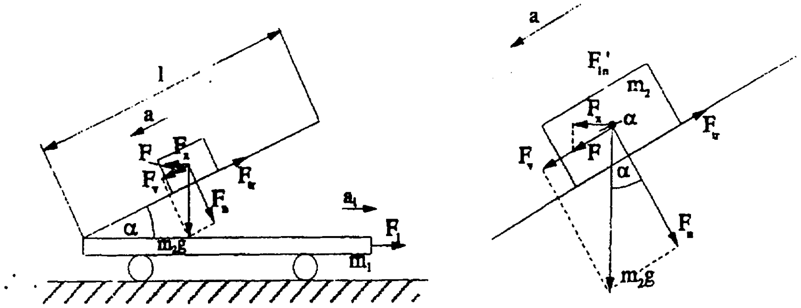
Kako je kretanje tela sa konstantnim ubrzanjem a i početnom brzinom v_o, važi

$$h = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}at^2 + v_o t - h = 0 \Rightarrow t = \frac{-v_o + \sqrt{v_o^2 + 2ah}}{a} = 0.1\, s.$$

Zadatak 8

Na vagonetu mase m_1 nalazi se strma ravan dužine l i nagibnog ugla α. Na strmoj ravni nalazi se telo mase m_2 koje se kreće niz nju pod dejstvom sile teže. Koeficijent trenja izmedju strme ravni i tela je μ, a izmedju vagoneta i podloge je zanemarljivo mali. Koliki put s će preći vagonet za vreme kretanja tela od vrha do podnožja strme ravni, pod uslovom da su u početnom trenutku vagonet i telo mirovali?

Rešenje



Telo se kreće niz strmu ravan sa ubrzanjem a, a usled tog kretanja vagonet dobija ubrzanje a_1 u horizontalnom pravcu. Po drugom Njutnovom zakonu, ubrzanje a telu mase m_2 saopštava dinamička sila F koja je jednaka razlici vučne sile $F_v = m_2 g \sin\alpha$ i sile trenja $F_{tr} = \mu m_2 g \cos\alpha$

$$F = m_2 a = F_v - F_{tr} = m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Iz gornjeg izraza se za ubrzanje a dobija

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \tag{2.20}$$

Ubrzanje a_1 vagonetu saopštava sila F_1, koja je po intenzitetu i pravcu jednaka, a po smeru suprotna horizontalnoj komponenti F_x sile F

$$F_1 = m_1 a_1 = F_x = F\cos\alpha = m_2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha.$$

Iz ovog izraza sledi da je ubrzanje a_1

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{m_2}{m_1} g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha. \tag{2.21}$$

Neka je t vreme za koje telo dodje do podnožja strme ravni, prešavši put l. Za to vreme vagonet predje put s. Važi

$$l = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \Rightarrow s = \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}a_1 \cdot \frac{2l}{a} = \frac{a_1}{a}l.$$

Zamenom (2.20) i (2.21) u gornji izraz konačno se dobija

$$s = \frac{m_2}{m_1} l \cos\alpha.$$

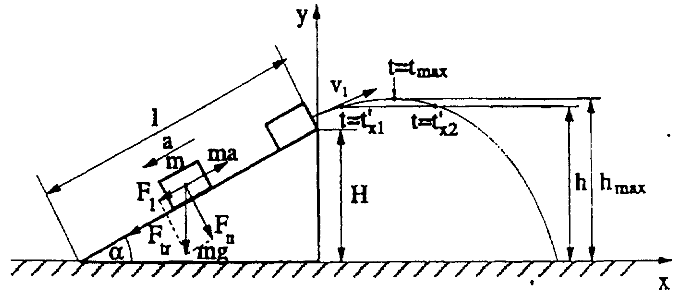
Zadatak 9

Strma ravan nagibnog ugla $\alpha = 30^o$ i dužine $l = 20\,m$ postavljena je na horizontalno tlo. Iz podnožja strme ravni kreće se telo zanemarljivih dimenzija sa početnom brzinom $v_o = 20\,ms^{-1}$. Pošto predje celokupnu dužinu strme ravni, telo nastavi da se kreće kroz vazduh dok ne padne na zemlju. Koeficijent trenja izmedju tela i strme ravni isnosi $\mu = 0.2$, dok se trenje sa vazduhom zanemaruje. Odrediti:

a) maksimalnu visinu u odnosu na tlo h_{max} koju dostigne telo u toku svog kretanja,

b) vreme, računajući ga od početka kretanja, posle koga se telo nadje na visini $h = 11\,m$.

Rešenje



a) Jednačina dinamičke ravnoteže sila koje deluju na telo kada se kreće uz strmu ravan glasi:

$$ma = F_l + F_{tr} = F_l + \mu F_N = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 0,$$

gde je F_l komponenta težine tela u pravcu strme ravni, F_{tr} sila trenja, a F_N komponenta sile teže upravna na strmu ravan. Iz ovog izraza se za apsolutnu vrednost ubrzanja tela dobija

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 6.60\,ms^{-2}.$$

Kretanje tela uz strmu ravan je usporeno, sa početnom brzinom v_o, pa brzina na vrhu strme ravni (na visini $H = l\sin\alpha = 10\,m$) i vreme potrebno da telo dospe do vrha strme ravni iznose

$$v_l = \sqrt{v_o^2 - 2al} = 11.66\,ms^{-1},$$

$$t_{str} = \frac{v_o - v_l}{a} = 1.26\,s.$$

Dalje kretanje tela je kosi hitac sa početnom brzinom v_l i uglom elevacije α. Komponente početne brzine u pravcu x i y-ose su $v_{ox} = v_l\cos\alpha$ i $v_{oy} = v_l\sin\alpha$. U najvišoj tački putanje tela je $h = h_{max}$, $t = t_{max}$ i $v_y = 0$. Vreme t_{max} se računa od trenutka kada telo napušta strmu ravan i može se odrediti na sledeći način:

$$v_y(t_{max}) = v_{oy} - gt_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_l\sin\alpha}{g}. \tag{2.22}$$

Visina tela se sa vremenom menja po zakonu

$$y = H + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.23}$$

Visina h_{max} se dobija zamenom u gornji izraz t_{max} iz (2.22)

$$h_{max} = y(t_{max}) = H + v_{oy}t_{max} - \frac{1}{2}gt_{max}^2 = H + \frac{v_l^2\sin^2\alpha}{2g} = 11.73\,m.$$

b) Neka je t'_x vreme, računato od trenutka odvajanja tela od strme ravni, posle koga se telo nadje na zadatoj visini h. Ovo vreme se može odrediti zamenom $y = h$ i $t = t'_x$ u (2.23)

$$h = y(t'_x) = H + v_{oy}t'_x - \frac{1}{2}gt'^2_x.$$

Odavde se dobija kvadratna jednačina po t'_x

$$t'^2_x - \frac{2v_{oy}}{g}t'_x + \frac{2(h-H)}{g} = 0,$$

čija su rešenja

$$(t'_x)_{1/2} = \frac{v_{oy}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{oy}^2}{g^2} - \frac{2(h-H)}{g}} = (0.59 \pm 0.39)\,s.$$

Dakle, telo će se naći na visini h najpre posle vremena t_{x1}, a zatim i posle vremena t_{x2} od početka kretanja iz podnožja strme ravni. Ova vremena iznose

$$t_{x1} = t_{str} + t'_{x1} = 1.26\,s + (0.59 - 0.39)\,s = 1.46\,s,$$

$$t_{x2} = t_{str} + t'_{x2} = 1.26\,s + (0.59 + 0.39)\,s = 2.24\,s.$$

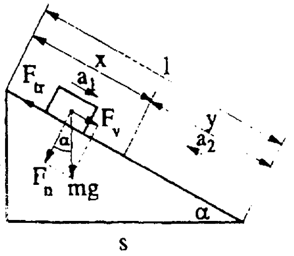
Zadatak 10

Strma ravan dužine l sastoji se iz dva dela: gornjeg-metalnog i donjeg-drvenog. Visina strme ravni je $h = 4\,m$, a dužina njene osnove $s = 9\,m$. Sa vrha strme ravni klizi telo bez početne brzine. Pri kom će se odnosu dužina metalnog i drvenog dela strme ravni telo zaustaviti u njenom podnožju? Koeficijent trenja izmedju tela i ravni na metalnom delu je $\mu_1 = 0.2$, a na drvenom $\mu_2 = 0.6$.

Rešenje

Neka je dužina metalnog dela strme ravni x, a drvenog dela y. Dužina strme ravni je $l = x + y = \sqrt{h^2 + s^2} = 9.85\,m$.

Intenzitet vučne sile $F_v = mg\sin\alpha$ je konstantan duž cele strme ravni, a intenzitet sile trenja $F_{tr} = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha$ se povećava pri prelasku sa metalnog na drveni deo ravni usled promene koeficijenta trenja. Stoga je kretanje na metalnom delu ubrzano ($F_v > F_{tr1} = \mu_1 mg\cos\alpha$) a na drvenom delu usporeno ($F_v < F_{tr2} = \mu_2 mg\cos\alpha$).



U ovom slučaju, usled postojanja disipativne sile trenja, ne važi zakon održanja mehaničke energije, jer se deo mehaničke energije posredstvom ove sile pretvara u druge oblike – toplotnu energiju (telo i ravan se zagrevaju). Prema uslovu zadatka, telo se zaustavlja u podnožju strme ravni, što znači da mu je kinetička energija na početku i kraju kretanja jednaka nuli. Dakle, celokupna potencijalna energija koju je telo imalo na vrhu

strme ravni utrošila se na rad protiv sila trenja A_{tr1} na metalnom i A_{tr2} na drvenom delu ravni, tj.

$$mgh = A_{tr1} + A_{tr2} = F_{tr1}x + F_{tr2}y = \mu_1 mg\cos\alpha \cdot x + \mu_2 mg\cos\alpha \cdot (l - x).$$

Iz ovog izraza se posle sredjivanja, imajući u vidu da je $\cos\alpha = s/l$, dobija

$$x = \frac{l\mu_2 - h/\cos\alpha}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{l\mu_2 - hl/s}{\mu_2 - \mu_1} = 3.83\,m.$$

Kako je $y = l - x = 6.02\,m$, konačno se za traženi odnos nalazi $x/y = 0.636$.

Zadatak 11

Matematičko klatno mase m i dužine l izvedeno je iz ravnotežnog položaja za ugao $\theta = 60^o$, pa je pušteno da slobodno osciluje. Pri prolasku klatna kroz ravnotežni položaj, konac klatna naidje na osovinu O, koja je na rastojanju $l/2$ od tačke vešanja klatna. Kolika je promena intenziteta sile zatezanja konca pri njegovom udaru o osovinu O?

Rešenje

Centrifugalna sila se može tumačiti kao inercijalna sila kod kružnog kretanja. Ona je uvek usmerena od centra, dakle suprotno od normalnog ubrzanja a_n, a njen intenzitet $F_c = ma_n = m\omega^2 r = mv^2/r$ (r - poluprečnik kružne putanje) je toliki da je uvek uspostavljena ravnoteža sa rezultujućom silom F_R koja deluje na telo koje rotira ($\vec{F}_c + \vec{F}_R = 0$).

U konkretnom slučaju, pored centrifugalne sile, na klatno, koje u tački B ima brzinu v_B, deluju sila teže mg i sila zatezanja konca. Uslovi ravnoteže sila za trenutke neposredno pre i neposredno posle udara klatna o osovinu O su, redom

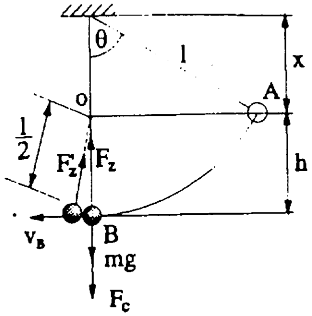
$$F_z = mg + F_c,$$

$$F'_z = mg + F'_c,$$

Promena sile zatezanja konca je

$$\Delta F_z = F'_z - F'_z = F_c - F_c = \frac{mv_B^2}{l/2} - \frac{mv_B^2}{l} = \frac{mv_B^2}{l}. \qquad (2.24)$$

Iz zakona održanja mehaničke energije za tačke A i B se dobija



$$E_{pA} = E_{kB} \Leftrightarrow mgh = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B^2 = 2gh.$$

Sa slike se vidi da je $h = l - x = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$, što posle zamene v_B^2 u (2.24) i uzimanja u obzir da je $\cos\theta = \cos 60^o = 1/2$, daje

$$\Delta F_z = \frac{2mgl(1-\cos\theta)}{l} = mg.$$

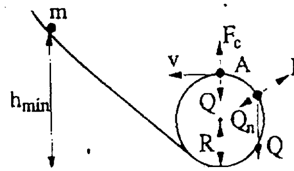
Zadatak 12
Telo mase $m = 10\,g$ i zanemarljivih dimenzija klizi bez trenja po šini oblika omče (šina ovakvog oblika naziva se "mrtva petlja"). Poluprečnik omče je $R = 50\,cm$.
a) Odrediti minimalnu visinu h_{min} sa koje se može pustiti telo tako da predje put po omči ne gubeći dodir sa njom.
b) Ako se telo pusti sa visine $2h_{min}$, odrediti silu kojom će šina delovati na telo u tački A.
c) Odrediti minimalnu visinu sa koje treba pustiti telo tako da se ne odvoji od omče u tački na datoj visini h_l.

Rešenje

a) Kada se telo kreće po omči, centrifugalna sila F_c ga "pribija" za šinu, a komponenta sile teže Q_N teži da ga odvoji od nje. Sila Q_N je najveća, a sila F_c najmanja na vrhu omče (tačka A), pa je najkritičniji trenutak za odvajanje tela upravo kada se ono nalazi na vrhu omče. Da se telo ne bi odvojilo od omče u tački A, ono u toj tački mora da ima brzinu v dovoljnu bar da bude $F_c = Q_N = Q$. Dakle, u tom graničnom slučaju važi

$$F_c = Q \Leftrightarrow \frac{mv^2}{R} = mg \Rightarrow R = \frac{v^2}{g}. \qquad (2.25)$$

Iz zakona održanja mehaničke energije za početni položaj tela i tačku A dobija se



$$E_{ph_{min}} = E_{pA} + E_{kA} \Leftrightarrow mgh_{min}$$

GREŠKA

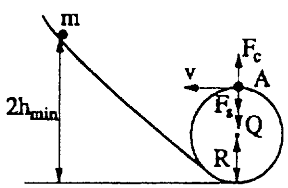
mgh

$$E_{ph_{min}} = 2mgR + \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow h_{min} = 2mR + \frac{v^2}{2g}.$$

Zamenom (2.25) u gornji izraz dobija se

$$h_{min} = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R = 1.25\,m.$$

b) Kada se telo pusti sa visine $2h_{min}$, ne postoji uslov da se ono odvoji od šine u tački A, pa stoga ni u bilo kojoj tački mrtve petlje kroz koju prethodno prodje. U ovom slučaju je u tački A uspostavljena ravnoteža sila



$$F_s + Q = F_c,$$

gde je F_s sila kojom šina deluje na telo (u graničnom slučaju pod a) je bilo $F_s = 0$). Dakle, važi

$$F_s = F_c - Q = \frac{mv^2}{R} - mg. \qquad (2.26)$$

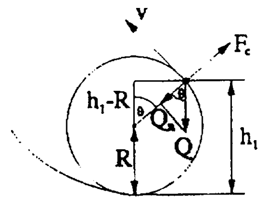
Zakon održanja mehaničke energije za početni položaj tela i tačku A uz zamenu vrednosti $h_{min} = 5R/2$ dobijene pod a) daje

$$2mgh_{min} = \frac{mv^2}{2} + 2mgR \Leftrightarrow 2mg\frac{5}{2}R = \frac{mv^2}{2} + 2mgR \Leftrightarrow \frac{mv^2}{R} = 6mg.$$

Zamenom ovog izraza u (2.26) dobija se

$$F_s = 6mg - mg = 5mg = 0.49\,N.$$

c) Logično je da bude $R < h_l < 2R$, jer su u tom slučaju sile F_c i Q_N suprotnog smera i može doći do odvajanja tela od šine. Uslov da telo ostane na šini u tački na visini h_l je da bude $F_s \geq 0$, tj.



$$F_c \geq Q_N \Leftrightarrow \frac{mv^2}{R} \geq mg\cos\theta. \qquad (2.27)$$

Iz zakona održanja mehaničke energije se dobija

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mgh_l \Rightarrow v^2 = 2g(h - h_l). \qquad (2.28)$$

Takodje, sa slike se vidi da je

$$\cos\theta = \frac{h_1 - R}{R}. \tag{2.29}$$

Zamenom (2.28) i (2.29) u (2.27) konačno se dobija

$$\frac{2mg(h-h_1)}{R} \geq mg\frac{h_1 - R}{R} \Leftrightarrow h \geq \frac{3h_1 - R}{2}.$$

Treba napomenuti da se, ako je $h_1 = 2R$, ovaj slučaj svodi na slučaj pod a) i za rešenje dobija $h \geq 5R/2$.

Zadatak 13

Horizontalna cev sastavljena od dva dela različitih površina poprečnog preseka, $S_1 = 5\,cm^2$ i $S_2 = 8\,cm^2$, zatvorena je sa oba kraja klipovima masa $m_1 = 30\,g$ i $m_2 = 60\,g$. U cevi se nalazi eksplozivan gas. Kada dodje do eksplozije gasa, klipovi izleću iz cevi, i to manji brzinom $v_1 = 15\,ms^{-1}$. Kolika je brzina v_2 većeg klipa:
a) ako je cev fiksirana?
b) ako cev nije fiksirana? U ovom slučaju izračunati i brzinu cevi posle eksplozije u, ako je masa cevi $M = 100\,g$.

Rešenje

a) Kada gas eksplodira, u cevi vlada pritisak p i sile pritiska koje deluju na klipove su $F_1 = pS_1$, odnosno $F_2 = pS_2$. Prema drugom Njutnovom zakonu, promene impulsa klipova su

$$\Delta p_1 = m_1 v_1 = F_1 \Delta t = pS_1 \Delta t, \quad \Delta p_2 = m_2 v_2 = F_2 \Delta t = pS_2 \Delta t.$$

Iz količnika $\Delta p_2/\Delta p_1$ moguće je izračunati brzinu većeg klipa

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{S_2}{S_1} v_1 = 12\,ms^{-1}.$$

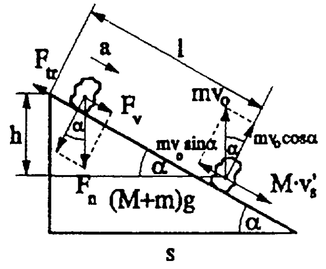
b) Brzine klipova su iste kao u slučaju pod a), jer gornje relacije važe bez obzira da li je cev fiksirana ili nije. U prethodnom slučaju cev je bila sprečena da se pomera, pa se, iako je ona "primala" promene impulsa klipova, nije mogao napisati zakon održanja impulsa za sistem koji čine cev i dva klipa. Medjutim, u slučaju kada cev nije fiksirana, može se napisati zakon održanja impulsa za ovaj sistem. Kako je $m_2 v_2 > m_1 v_1$, cev se kreće u smeru manjeg klipa, pa je

$$0 = m_1 v_1 + Mu - m_2 v_2 \Rightarrow u = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{M} = 2.7\,ms^{-1}.$$

Zadatak 14

Niz strmu ravan nagibnog ugla $\alpha = 30^o$ spušta se skijaš mase $M = 70\,kg$, bez početne brzine. Prešavši rastojanje $l = 30\,m$ od vrha strme ravni, on uvis ispali raketu. Odrediti brzinu skijaša po ispaljivanju rakete, ako je koeficijent trenja izmedju skija i snega $\mu = 0.1$. Masa rakete je $m = 200\,g$, a njena početna brzina $v_o = 150\,ms^{-1}$. Vreme ispaljivanja rakete smatrati zanemarljivo malim.

Rešenje



Neka je v_s brzina skijaša neposredno pre ispaljivanja rakete (do tog trenutka skijaš i raketa se kreću zajedno), a v_s' njegova brzina neposredno po ispaljivanju rakete. Brzina v_s se može izračunati na dva načina: (i) iz zakona održanja energije i (ii) izračunavajući najpre ubrzanje skijaša.

(i) Potencijalna energija koju je skijaš zajedno sa raketom imao na vrhu strme ravni troši se na povećanje njihove kinetičke energije i rad protiv sile trenja na putu dužine l

$$(m+M)gh = \frac{(m+M)v_s^2}{2} + A_{tr}.$$

Rad protiv sile trenja je $A_{tr} = F_{tr} l = \mu(m+M)gl\cos\alpha$, a važi i $h = l\sin\alpha$, pa se posle zamene ovih u gornji izraz dobija:

$$v_s = \sqrt{2gl(sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 15.60\,ms^{-1}.$$

(ii) Kretanje skijaša (zajedno sa raketom) je sa konstantnim ubrzanjem a koje im saopštava rezultujuća sila $F_v - F_{tr}$, gde je $F_v = (m+M)g\sin\alpha$ tzv. vučna sila. Prema drugom Njutnovom zakonu je

$$(m+M)a = F_v - F_{tr},$$

odakle se, posle zamene izraza za sile, dobija $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Posle predjenog puta l bez početne brzine, brzina skijaša je

$$v_s^2 = 2al \Rightarrow v_s = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}.$$

Brzina v_s' se nalazi iz zakona održanja impulsa. Prilikom ispaljivanja rakete, komponentu impulsa normalnu na strmu ravan "primi" sama strma ravan, ali to nije od značaja za rešenje zadatka zbog velike mase strme ravni (smatraće se da je strma ravan nepokretna). Iz zakona održanja komponente impulsa u pravcu strme ravni dobija se

$$(m+M)v_s = Mv_s' - mv_o\sin\alpha \Rightarrow v_s' = \frac{m+M}{M}v_s + \frac{m}{M}v_o\sin\alpha = 15.86\,ms^{-1}.$$

Zadatak 15

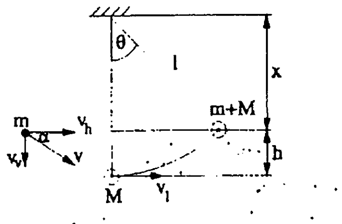
U loptu mase $M = 1.5\,kg$ koja je obešena o neistegljivu nit dužine $l = 55\,cm$ udari metak mase $m = 10\,g$ i zadrži se u njoj. Metak udara u loptu brzinom $v = 400\,ms^{-1}$ pod uglom $\alpha = 30^o$ u odnosu na horizont. Odrediti ugao θ za koji se otkloni lopta pri udaru metka.

Rešenje

Brzina metka se može razložiti na horizontalnu komponentu $v_h = v\cos\alpha$ i vertikalnu komponentu $v_v = v\sin\alpha$, od kojih je od interesa samo v_h (v_v utiče na zatezanje niti u vertikalnom pravcu, što, pošto je nit neistegljiva, nije od značaja za rešenje zadatka). Brzina v_1 koju imaju metak i lopta neposredno posle neelastičnog sudara, kada se kreću kao jedno telo, može se naći iz zakona održanja impulsa

$$mv_h = (m+M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m}{m+M}v_h$$

$$v_1 = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha. \qquad (2.30)$$



Za sistem lopta-metak posle udara metka važi zakon održanja mehaničke energije, pa je

$$\frac{(m+M)v_1^2}{2} = (m+M)gh \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = gh.$$

Za h se sa slike dobija $h = l - x = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$, što daje

$$\frac{v_1^2}{2} = gl(1-\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{v_1^2}{2gl}.$$

Posle zamene (2.30) u gornji izraz, konačno se dobija

$$\theta = \arccos\left[1 - \frac{m^2v^2\cos\alpha^2}{2gl(m+M)^2}\right] = 59.1^o.$$

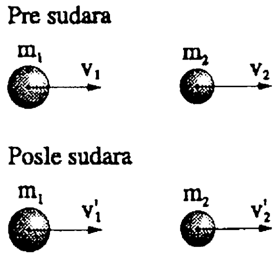
Zadatak 16

Tri loptice, masa m_1, m_2 i m_3, nalaze se na nekom rastojanju i u mirovanju. Prvoj loptici se saopšti brzina v_1 i ona zatim udari u drugu lopticu, a ova u treću. Ako su sudari loptica savršeno elastični i centralni, odrediti onu vrednost mase m_2 pri kojoj će treća loptica dobiti najveću brzinu.

Rešenje

Ako se posmatra opšti slučaj savršeno elastičnog centralnog sudara dve kuglice, zakon održanja mehaničke energije i zakon održanja impulsa, redom, glase:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2},$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2',$$



gde su v_1 i v_2 brzina prve, odnosno druge kuglice neposredno pre sudara, a v_1' i v_2' njihove brzine neposredno posle sudara. Sredjivanjem gornjih izraza dobija se

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2), \qquad (2.31)$$
$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2). \qquad (2.32)$$

Kada se izraz (2.31) podeli izrazom (2.32) dobija se

$$\frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1 - v_1'} = \frac{v_2'^2 - v_2^2}{v_2' - v_2} \Rightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2'. \qquad (2.33)$$

Konačno, rešavanjem sistema jednačina (2.32) i (2.33) dobijaju se brzine kuglica posle sudara

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

U konkretnom slučaju druga kuglica miruje pre sudara ($v_2 = 0$), pa je

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

Posle drugog sudara (brzina treće kuglice pre sudara je $v_3 = 0$) je

$$v_3' = \frac{2m_2}{m_2 + m_3}v_2' = \frac{2m_2}{m_2 + m_3}\frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

Masa m_{2x} za koju brzina v_3' ima maksimalnu vrednost se dobija iz uslova

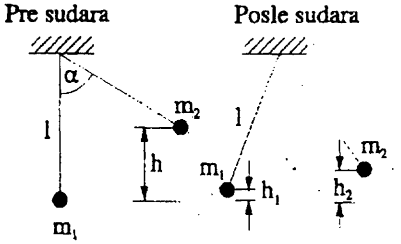
$$\frac{dv_3'}{dm_2}\Big|_{m_2=m_{2x}} = 4m_1v_1\frac{m_1m_3 - m_{2x}^2}{\left[m_{2x}^2 + (m_1 + m_3)m_{2x} + m_1m_3\right]^2} = 0.$$

Iz ovog uslova sledi da je $m_{2x} = \sqrt{m_1m_3}$.

Zadatak 17

Dve elastične kuglice, masa $m_1 = 10\,g$ i $m_2 = 20\,g$, obešene su o neistegljive niti iste dužine $l = 18\,cm$, tako da se medjusobno dodiruju. Kuglica mase m_2 se otkloni za ugao $\alpha = 60^o$ i zatim pusti. Kolike su maksimalne visine kuglica u odnosu na ravnotežni položaj posle njihovog elastičnog sudara?

Rešenje



Neka su brzine prve i druge kuglice neposredno posle sudara v_1 i v_2, redom. Maksimalne visine u odnosu na ravnotežni položaj posle sudara h_1 i h_2 kuglice postižu na račun kinetičkih energija koje imaju neposredno posle sudara. Dakle, važi

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \quad (2.34)$$

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = m_2gh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_2^2}{2g}. \quad (2.35)$$

Neposredno pre sudara prva kuglica miruje, a druga se kreće brzinom v, koju dobija na račun potencijalne energije u položaju na visini h. Imajući u vidu da je $\alpha = 60^o \Rightarrow \cos\alpha = 1/2$, brzina v se nalazi na sledeći način:

$$m_2gh = \frac{m_2v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{gl}.$$

Kako je sudar kuglica elastičan, važe zakoni održanja energije i impulsa za trenutke neposredno pre i neposredno posle sudara

$$\frac{m_2v^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2},$$

$$m_2v = m_1v_1 + m_2v_2. \quad (2.36)$$

Iz prethodna dva izraza se, prema postupku datom u zadatku 16, za brzinu v_2 dobija

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{gl}.$$

Zamenom gornjeg izraza u (2.36), za brzinu v_1 se dobija

$$v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{gl}.$$

Kako je $m_1 < m_2$, vrednost v_1 je negativna, što znači da se prva kuglica posle sudara odbija u suprotnom smeru, kako je to na slici predstavljeno.

Najzad, zamenom v_1 i v_2 u (2.36), odnosno (2.35), dobija se

$$h_1 = \frac{l}{2}\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = 16\,cm,$$

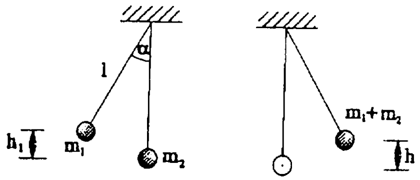
$$h_2 = \frac{l}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 1\,cm.$$

Zadatak 18

Dve kugle, masa $m_1 = 10\,kg$ i $m_2 = 15\,kg$, obešene su o neistegljive niti iste dužine $l = 2\,m$, tako da se medjusobno dodiruju. Manja kugla se otkloni za ugao $\alpha = 60^o$ i zatim pusti. Smatrajući sudar kugli savršeno neelastičnim, odrediti maksimalnu visinu u odnosu na ravnotežni položaj koju će kugle dostići posle sudara.

Rešenje

Neka je v_1 brzina prve (lakše) kugle neposredno pre sudara. Kako je sudar savršeno neelastičan, posle sudara će se dve kugle kretati kao jedno telo. Neka je v brzina kugli neposredno posle sudara. Maksimalnu visinu u odnosu na ravnotežni položaj h kugle će dostići na račun kinetičke energije koje dobiju neposredno posle sudara, pa važi



$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = (m_1+m_2)gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}. \quad (2.37)$$

Imajući u vidu da je $\alpha = 60^o \Rightarrow \cos\alpha = 1/2$, brzina v_1, koju prva kugla dobija na račun svoje potencijalne energije na visini h_1, može se naći na sledeći način:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = \sqrt{gl}.$$

Kako važi zakon održanja impulsa za trenutke neposredno pre i neposredno posle sudara, dobija se

$$m_1 v_1 = (m_1+m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{gl},$$

a zamenom gornjeg izraza u (2.37), konačno se dobija

$$h = \frac{l}{2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = 0.16\,m.$$

Zadatak 19

Telo mase $m = 10\,g$ slobodno pada kroz vazduh sa visine $h = 30\,cm$ bez početne brzine, a zatim propada kroz sneg do dubine l. Sila trenja u vazduhu može se smatrati konstantnom, intenziteta $F_{tr1} = 10^{-2}\,N$. Intenzitet sile trenja u snegu menja se po zakonu $F_{tr2} = f_o - kx$, gde je x trenutna dubina tela u snegu, a f_o konstanta čija vrednost iznosi $f_o = 0.5\,N$. Odrediti dubinu propadanja tela l.

Rešenje

Potencijalna energija koju telo ima u početnom trenutku se utroši na rad protiv sile trenja u vazduhu A_{tr1} i u snegu A_{tr2}

$$mg(h+l) = A_{tr1} + A_{tr2}, \quad (2.38)$$

pri čemu je za nulti nivo potencijalne energije uzet najniži nivo (kada je kuglica na dubini l u snegu).

Sila trenja pri kretanju kroz vazduh je konstantna, pa je $A_{tr1} = F_{tr1}h$. Sila trenja pri kretanju kroz sneg linearno opada i na dubini l, kada se telo zaustavi, ima nultu vrednost

$$F_{tr2}(x=l) = f_o - kl = 0 \Rightarrow k = \frac{f_o}{l} \Rightarrow F_{tr2}(x) = f_o\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Rad sile trenja pri kretanju kroz sneg iznosi

$$A_{tr2} = \int_0^l F_{tr2}(x)dx = f_o\int_0^l\left(1-\frac{x}{l}\right)dx = f_o\left(l - \frac{1}{l}\frac{l^2}{2}\right) = \frac{f_o l}{2}.$$

Izraz (2.38) postaje

$$mg(h+l) = F_{tr1}h + \frac{f_o l}{2},$$

i za l se dobija

$$l = 2h\frac{mg - F_{tr1}}{f_o - 2mg} = 17.4\,cm.$$

Zadatak 20

Prilikom probijanja grede debljine $D = 5\,cm$, brzina metka se smanji od $v_o = 350\,ms^{-1}$ na $v_1 = 250\,ms^{-1}$. Sila otpora pri kretanju metka kroz gredu po intenzitetu se menja po zakonu $F = kv^2$, gde je k pozitivna konstanta. Naći vreme t kretanja metka kroz gredu.

Rešenje

Metak mase m se kroz gredu kreće sa negativnim ubrzanjem $a = dv/dt$, koje je posledica dejstva sile otpora F, pa drugi Njutnov zakon glasi:

$$ma = -F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Leftrightarrow -\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}dt$$

Integraljenjem ovog izraza dobija se

$$-\int_{v_o}^{v_1}\frac{dv}{v^2}=\frac{k}{m}\int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{1}{v}\Big|_{v_o}^{v_1}=\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_o}=\frac{k}{m}t \Leftrightarrow t=\frac{m}{k}\frac{v_o-v_1}{v_o v_1}. \qquad (2.39)$$

Nepoznati količnik m/k se može naći transformacijom izraza za drugi Njutnov zakon, imajući u vidu da je $v = dx/dt$

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=m\frac{dv}{dx}v=-kv^2 \Leftrightarrow m\frac{dv}{dx}=-kv \Leftrightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dx.$$

Rešavanjem ove diferencijalne jedačine dobija se

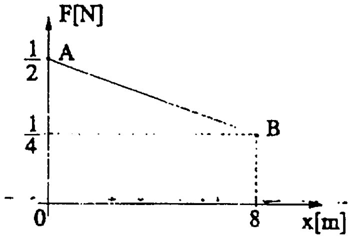
$$\int_{v_o}^{v_1}\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}\int_0^D dx \Leftrightarrow \ln v\Big|_{v_o}^{v_1}=\ln\frac{v_1}{v_o}=-\frac{k}{m}D \Leftrightarrow \frac{m}{k}=\frac{D}{\ln v_o/v_1},$$

a zamena ovog izraza u (2.39) daje:

$$t=D\frac{v_o-v_1}{v_o v_1}\frac{1}{\ln(v_o/v_1)}=0.17\,ms.$$

Zadatak 21

Telo mase $m = 1\,kg$ kreće se pravolinijski duž x-ose brzinom $v_o = 3\,ms^{-1}$.



Kada se telo nadje u koordinatnom početku, počne da deluje sila trenja, čiji se intenzitet smanjuje sa udaljavanjem tela od koordinatnog početka prema dijagramu prikazanom na slici. Kolika je brzina tela v u položaju $x = 8\,m$?

Rešenje

Na osnovu dijagrama najpre treba naći zavisnost intenziteta sile trenja od položaja tela $F(x)$. Jednačina prave $y = f(x)$ koja prolazi kroz dve tačke

sa poznatim koordinatama, $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, ima oblik

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

U konkretnom slučaju je $x_1 = 0$, $y_1 = 1/2$, $x_2 = 8$, $y_2 = 1/4$, pa se dobija

$$\frac{y-1/2}{1/4-1/2}=\frac{x-0}{8-0} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{32}x+\frac{1}{2}.$$

Dakle, tražena zavisnost je oblika

$$F(x)=-\frac{1}{32}x+\frac{1}{2}.$$

Sila F sapoštava telu negativno ubrzanje $a = dv/dt$ (usporava ga), pa se na osnovu drugog Njutnovog zakona može napisati

$$ma=-F \Leftrightarrow a=-\frac{F}{m} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt}=-\frac{F}{m} \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=-\frac{F}{m}.$$

Kako je $dx/dt = v$, dobija se diferencijalna jednačina

$$v\,dv=-\frac{F}{m}dx,$$

čijim se rešavanjem dobija

$$\int_{v_o}^{v} v\,dv=-\frac{1}{m}\int_0^x\left(-\frac{1}{32}x+\frac{1}{2}\right)dx \Leftrightarrow \frac{v^2}{2}\Big|_{v_o}^{v}=\frac{v^2}{2}-\frac{v_o^2}{2}=\frac{1}{m}\left(\frac{x^2}{64}-\frac{x}{2}\right),$$

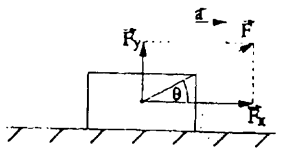
odnosno

$$v=\sqrt{v_o^2+\frac{x}{m}\left(\frac{x}{32}-1\right)}=\sqrt{3}\,ms^{-1}.$$

Zadatak 22

Na telo mase $m = 2\,kg$ koje miruje na horizontalnoj podlozi u početnom trenutku počne da deluje sila. Intenzitet sile se menja tokom vremena po zakonu $F = kt$, gde je $k = 2\,Ns^{-1}$, a pravac sile je stalan i zaklapa ugao $\theta = 30^o$ prema horizontalnoj ravni. Kolika je brzina tela u trenutku kada se ono odvaja od podloge? Koliki put predje telo do tog trenutka? Trenje zanemariti.

Rešenje



Komponente sile F u horizontalnom i vertikalnom pravcu iznose

$$F_x = F\cos\theta = kt\cos\theta, \quad F_y = F\sin\theta = kt\sin\theta.$$

Telo će se odvojiti od podloge u trenutku t_o, kada se vertikalna komponenta sile F_y izjednači sa njegovom težinom:

$$F_y = mg \Leftrightarrow mg = kt_o\sin\theta \Rightarrow t_o = \frac{mg}{k\sin\theta}. \qquad (2.40)$$

Neka je v_o brzina tela u trenutku t_o, a s_o put koji je telo prešlo do tog trenutka. Do trenutka odvajanja, ubrzanje $a = dv/dt$ telu saopštava samo horizontalna komponenta sile F_x, pa važi

$$ma = m\frac{dv}{dt} = F_x = kt\cos\theta \Leftrightarrow dv = \frac{k}{m}\cos\theta\, tdt.$$

Integraljenjem ovog izraza u odgovarajućim granicama dobija se zavisnost brzine tela od vremena

$$\int_0^v dv = \frac{k}{m}\cos\theta\int_0^t tdt \Rightarrow v(t) = \frac{k\cos\theta}{2m}t^2.$$

Brzina v_o iznosi

$$v_o = v(t_o) = \frac{k\cos\theta}{2m}t_o^2 = \frac{k\cos\theta}{2m}\left(\frac{mg}{k\sin\theta}\right)^2 = \frac{mg^2}{2k\sin\theta\tan\theta} = 167\,ms^{-1}.$$

Put s_o je

$$s_o = \int_0^{t_o} vdt = \frac{k\cos\theta}{2m}\int_0^{t_o} t^2dt = \frac{k\cos\theta}{6m}t_o^3,$$

što posle zamene t_o iz (2.40) daje

$$s_o = \frac{k\cos\theta}{6m}\left(\frac{mg}{k\sin\theta}\right)^3 = \frac{m^2g^3}{6k^2\sin^2\theta\tan\theta} = 1090\,m.$$

Zadatak 23

Na telo mase $m = 1\,kg$ koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi deluje sila intenziteta $F = mg/2$. U toku pravolinijskog kretanja, ugao θ izmedju

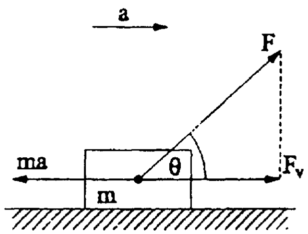
pravca dejstva sile i horizontalne podloge menja se po zakonu $\theta = \pi s/k$, gde je s predjeni put tela od početnog položaja, a $k = 8\,m$. Kolika je brzina tela u trenutku kada je $\theta = \pi/2\,rad$. Trenje zanemariti.

Rešenje

Ubrzanje $a = dv/dt$ telu saopštava horizontalna komponenta sile $F_v = F\cos\theta$

$$ma = F_v \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{2}\cos\left(\frac{\pi}{k}s\right).$$

Kako je $ds/dt = v$, transformacijom gornjeg izraza se dobija



$$\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{g}{2}\cos\left(\frac{\pi}{k}s\right) \Leftrightarrow 2v\,dv = g\cos\left(\frac{\pi}{k}s\right)ds.$$

Integraljenjem gornje diferencijalne jednačine

$$2\int_0^v v\,dv = g\int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{k}s\right)ds,$$

uz uvodjenje smene $\pi s/k = p$, $ds = kdp/\pi$, $\Big|_0^s \longrightarrow \Big|_0^{\pi s/k}$ dobija se

$$2\frac{v^2}{2}\Big|_0^v = \frac{gk}{\pi}\sin p\Big|_0^{\pi s/k} \Leftrightarrow v^2 = \frac{gk}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{k}s\right) \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{gk}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{k}s\right)}. \qquad (2.41)$$

Kako je

$$\theta = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{k}s \Rightarrow s = \frac{k}{2} = 4\,m,$$

zamenom brojnih vrednosti u izraz (2.41) dobija se

$$v = \sqrt{\frac{gk}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{gk}{\pi}} = 5\,ms^{-1}.$$

Zadatak 24

Automobil je prešao rastojanje $s = 120\,km$ krećući se ravnomerno pravolinijski, brzinom $v = 72\,kmh^{-1}$. Na tom putu utrošeno je $m = 19\,kg$ benzina. Koliku srednju snagu P_{sr} je razvio motor automobila za vreme svog kretanja ako je koeficijent korisnog dejstva $\eta = 0.25$? Toplota sagorevanja benzina je $q = 4.6 \cdot 10^7\, Jkg^{-1}$.

Rešenje

Ukupna količina toplote koja se oslobodi sagorevanjem benzina je $Q = qm$, a iskorišćena toplota $Q_1 = \eta Q = \eta qm$. Rad koji motor izvrši u toku puta je

$$A = Q_1 = \eta qm = P_{sr}t = P_{sr}\frac{s}{v},$$

pa je srednja snaga

$$P_{sr} = \frac{\eta qmv}{s} = 36.4 \cdot 10^3\, W.$$

Zadatak 25
U homogenom disku mase $M = 1\, kg$ i poluprečnika $R = 30\, cm$ izrezan je okrugli otvor poluprečnika $r = 10\, cm$ čiji se centar nalazi na rastojanju $l = 15\, cm$ od težišne ose diska. Koliki je moment inercije sistema u odnosu na osu koja prolazi kroz centar diska normalno na njega?

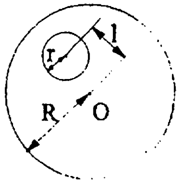
Rešenje

Moment inercije sistema I jednak je razlici momenata inercije velikog diska I_M i malog diska (diska koji je izrezan iz velikog) I_m u odnosu na težišnu osu velikog diska: $I = I_M - I_m$. Važi $I_M = MR^2/2$, a iz Štajnerove teoreme se za I_m dobija

$$I_m = I_{mo} + ml^2 = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2,$$

gde je I_{mo} moment inercije malog diska u odnosu na sopstvenu težišnu osu.

Ako se sa h obeleži debljina diskova, a sa ρ njihova gustina, može se napisati



$$M = \rho\pi R^2 h,\ m = \rho\pi r^2 h \Rightarrow m = \frac{r^2}{R^2}M.$$

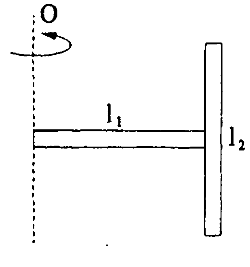
Za moment inercije sistema se dobija

$$I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 - ml^2 = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}M\frac{r^2}{R^2}r^2 - M\frac{r^2}{R^2}l^2,$$

što posle sređivanja i zamene brojnih vrednosti daje

$$I = \frac{M}{2R^2}\left(R^4 - r^4 - 2r^2l^2\right) = 0.042\, kgm^2.$$

Zadatak 26
Dva homogena tanka štapa, jedan dužine $l_1 = 40\, cm$ i mase $m_1 = 900\, g$ i drugi dužine l_2 i mase $m_2 = 400\, g$, spojena su pod pravim uglom, kao što je prikazano na slici. Odrediti moment inercije I sistema štapova u odnosu na osu koja prolazi kroz kraj horizontalnog štapa, paralelno vertikalnom štapu.



Rešenje

Moment inercije sistema štapova jednak je zbiru momenata inercije I_1 prvog štapa i I_2 drugog štapa: $I = I_1 + I_2$. Moment inercije I_1 je

$$I_1 = \frac{1}{3}m_1 l_1^2$$

(vidi naredni zadatak), a moment inercije I_2 se može naći iz Štajnerove teoreme

$$I_2 = I_{2o} + m_2 l_1^2 = m_2 l_1^2,$$

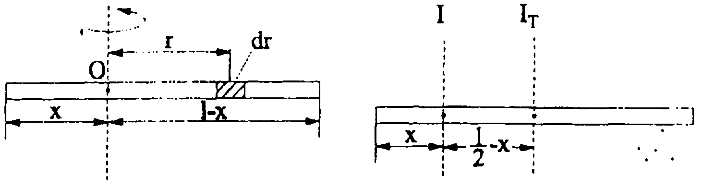
gde je I_{2o} moment inercije drugog štapa u odnosu na njegovu aksijalnu osu (kako je poluprečnik štapa zanemarljiv, $I_{2o} = 0$).

Za moment inercije sistema štapova se dobija

$$I = \frac{1}{3}m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 = \frac{l_1^2}{3}(m_1 + 3m_2) = 0.112\, kgm^2.$$

Zadatak 27
a) Korišćenjem integralnog računa odrediti moment inercije tankog homogenog štapa mase m i dužine l koji rotira oko ose koja stoji upravno na pravac štapa i prolazi kroz štap na proizvoljnoj udaljenosti x od jednog njegovog kraja.
b) Na osnovu rezultata pod a) naći moment inercije štapa u odnosu na ose koje prolaze kroz levi kraj štapa, težište štapa i desni kraj štapa.
c) Proveriti rezultat pod a) korišćenjem Štajnerove teoreme.

Rešenje



a) Neka je štap podeljen na beskonačno mnogo elementarnih delova i neka je dI elementarni moment inercije koji odgovara delu štapa mase dm i dužine dr, na rastojanju r od ose rotacije. Kako je štap homogen, važi

$$dm = \frac{dr}{l}m \Rightarrow dI = r^2dm = \frac{m}{l}r^2dr.$$

Sumiranjem elementarnih momenata inercije duž celog štapa (od levog kraja, kome odgovara koordinata $-x$, do desnog kraja, sa koordinatom $l-x$), dobija se

$$I = \frac{m}{l}\int\limits_{-x}^{l-x} r^2dr = \frac{m}{l}\frac{r^3}{3}\Big|_{-x}^{l-x} = \frac{m}{3l}\left[(l-x)^3 + x^3\right].$$

Sredjivanjem ovog izraza se za moment inercije štapa dobija

$$I = \frac{m}{3}\left(l^2 - 3lx + 3x^2\right). \qquad (2.42)$$

b) Zamenom odgovarajućih vrednosti x u (2.42) dobijaju se izrazi za momente inercije u odnosu na osu koja prolazi kroz
- levi kraj štapa: $I_{LK} = I(x=0) = ml^2/3$,
- težište štapa: $I_T = I(x=l/2) = ml^2/12$,
- desni kraj štapa: $I_{DK} = I(x=l) = ml^2/3 = I_{LK}$.

c) Primena Štajnerove teoreme daje

$$I = I_T + m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2.$$

Zamenom $I_T = ml^2/12$ iz rešenja zadatka pod b) i sredjivanjem ovog izraza dobija se

$$I = \frac{m}{3}\left(l^2 - 3lx + 3x^2\right),$$

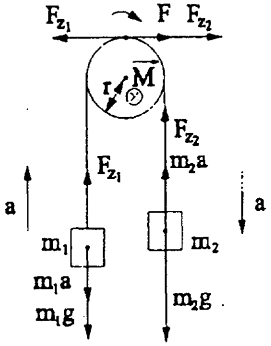
što je identično izrazu (2.42).

Zadatak 28
U žljeb diska mase $m = 54\,g$ postavljen je tanak konac o čije su krajeve obešeni tegovi masa $m_1 = 100\,g$ i $m_2 = 200\,g$. Koliko je vremena potrebno da telo mase m_2 predje put dužine $h = 1.5\,cm$ ako su u početnom trenutku tela bila u stanju mirovanja? Moment inercije diska je $I = mr^2/2$. Zanemariti trenje konca i kotura.

Rešenje

U ovom slučaju se inercija kotura (diska) ne zanemaruje, pa su sile zatezanja konca F_{z1} i F_{z2} različite i rezultujuća sila $F = F_{z2} - F_{z1}$ pokreće disk. Moment M rezultujuće sile F saopštava disku ugaono ubrzanje $\alpha = a/r$, gde je a ubrzanje sistema tegova. Može se napisati

$$M = Fr = I\alpha. \qquad (2.43)$$



Kako je

$$F_{z1} = m_1g + m_1a,$$

$$F_{z2} = m_2g - m_2a,$$

za rezultujuću silu se dobija:

$$F = F_{z2} - F_{z1},$$

odnosno

$$F = m_2(g-a) - m_1(g+a).$$

Zamenom ovog izraza i izraza za I i α u (2.43) dobija se

$$[m_2(g-a) - m_1(g+a)]r = \frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r},$$

odakle je

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}g = 3\,ms^{-2}.$$

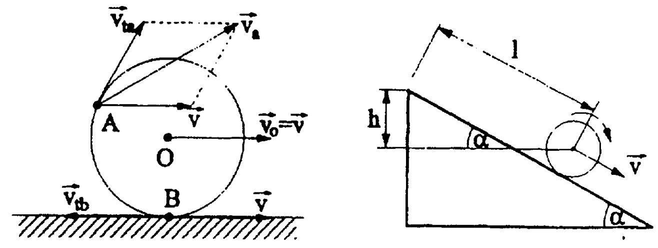
Kako je kretanje tegova sa konstantnim ubrzanjem a i bez početne brzine, važi

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 0.1\,s$$

Zadatak 29

Na vrhu strme ravni nagibnog ugla $\alpha = 60^o$ nalaze se lopta i pun cilindar. Ako se ova tela puste da se bez početne brzine kotrljaju niz strmu ravan, odrediti ubrzanja njihovih centara masa. Smatrati da pri kotrljanju nema klizanja ni trenja. Moment inercije lopte je $I_L = 2mR^2/5$, a moment inercije cilindra $I_C = mR^2/2$.

Rešenje



Na prvoj slici je prikazano telo koje se kotrlja bez klizanja po nekoj ravnoj površini. Neka je brzina centra mase tela v. Kotrljanje je složeno kretanje, sastavljeno od translacije i rotacije, i sve tačke tela imaju translatornu komponentu brzine v. Sve tačke tela (osim centra mase, koji ne rotira) takodje imaju i komponentu brzine usled rotacije, koja je tangencijalna na njihovu kružnu putanju. Za tačke koje se nalaze na istom rastojanju od ose rotacije (centra mase tela) ova tangencijalna brzina ima isti intenzitet. Ukupna brzina tačke se nalazi sabiranjem translatorne i tangencijalne brzine (primer tačke A na slici). Neka se posmatraju tačke po obodu tela koje se kotrlja i neka je intenzitet njihove tangencijalne brzine v_1 ($v_{tA} = v_{tB} = v_1$). Uslov da nema klizanja praktično znači da je ukupna brzina svake tačke kada dodje u dodir sa podlogom jednaka nuli (primer tačke B na slici). Da bi ovaj uslov bio ispunjen, mora da važi $v_{tB} = v_1 = v$. Dakle, kod kotrljanja bez klizanja tangencijalna brzina tačaka po obodu tela je brojno jednaka brzini centra mase.

Neka je telo mase m i poluprečnika R (u konkretnom slučaju lopta ili cilindar), kotrljajući se niz strmu ravan bez početne brzine, prešlo put l i neka je u tom trenutku brzina centra mase v. Prethodno razmatranje je imalo za cilj da objasni vezu izmedju v i ugaone brzine tela: $\omega = v/R$. Sa slike se vidi da je $h = l\sin\alpha$. Najzad, kako na telo deluje samo konstantna sila

Zemljine teže, kretanje centra mase je ravnomerno ubrzano sa ubrzanjem a i važi: $v^2 = 2al \Rightarrow l = v^2/2a$. Uvodjenjem ovih izraza u izraz za zakon održanja mehaničke energije za tačke A i B

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

dobija se

$$mg\left(\frac{v^2}{2a}\right)\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{I(v/R)^2}{2}.$$

Sredjivanjem ovog izraza dobija se

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + I/R^2}.$$

Zamenom vrednosti I_L i I_C u prethodni izraz, nalaze se ubrzanja centra mase za loptu i cilindar, redom

$$a_L = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_L/R^2} = \frac{mg\sin\alpha}{m + mR^2/(5R^2)} = \frac{5}{7}g\sin\alpha = 6.07\,ms^{-2},$$

$$a_C = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_C/R^2} = \frac{mg\sin\alpha}{m + mR^2/(2R^2)} = \frac{2}{3}g\sin\alpha = 5.67\,ms^{-2}.$$

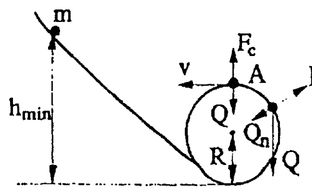
Zadatak 30

Homogena kugla poluprečnika $r = 0.4\,m$ počne da se kotrlja bez klizanja niz strmu ravan koja prelazi u mrtvu petlju poluprečnika $R = 1.6\,m$. Odrediti najmanju visinu h_{min} sa koje kugla treba da krene da bi savladala mrtvu petlju. Moment inercije sfere je $I = 2mr^2/5$. Trenje zanemariti.

Rešenje

Da bi kugla savladala mrtvu petlju, mora da prodje najvišu tačku petlje (tačka A). Biće posmatrano kretanje centra mase kugle i visina h_{min} biće definisana u odnosu na ovu tačku.

Zakon održanja mehaničke energije za početni položaj kugle (u ovom položaju kugla miruje) i za položaj u tački A, pored potencijalne energije i kinetičke energije usled translatornog kretanja, uključuje



i kinetičku energiju usled rotacionog kretanja

$$mgh_{min} = mg(2R - r) + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

gde su v i ω brzina i ugaona brzina kugle u tački A, redom. Zamenom $v = \omega r$ i $I = 2mr^2/5$ u gornji izraz dobija se

$$mgh_{min} = mg(2R - r) + \frac{7}{10}mv^2. \quad (2.44)$$

Da se kugla ne bi odvojila od petlje u tački A, brzina v mora da bude dovoljna da bi centrifugalna sila u toj tački bila bar jednaka težini kugle, tj.

$$F_c = Q \Leftrightarrow \frac{mv^2}{R - r} = mg \Rightarrow v^2 = g(R - r).$$

Posle zamene ovog izraza u (2.44) dobija se

$$gh_{min} = g(2R - r) + \frac{7}{10}g(R - r) \Rightarrow h_{min} = \frac{1}{10}(27R - 17r) = 3.64\,m.$$

Napomena: rešenje ovog zadatka treba uporediti sa rešenjem zadatka 12 pod a), kada nema kotrljanja tela, već ono klizi po petlji.

Zadatak 31

Kuglica mase m se kotrlja niz strmu ravan koja na kraju prelazi u petlju poluprečnika $R = 1\,m$. Na visini $h = 0.2\,m$ kuglica napušta petlju. Koliko rastojanje d predje kuglica u horizontalnom pravcu od tačke odvajanja do tačke gde kuglica padne na horizontalnu ravan koja se nalazi na visini h, ako je počela da se spušta sa visine $H = 3\,m$. Moment inercije sfere je $I = 2mr^2/5$.

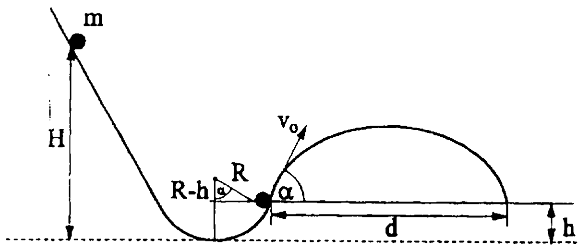
Rešenje

Zakon održanja mehaničke energije za početni položaj kuglice i položaj u trenutku odvajanja od petlje je

$$mgH = mgh + \frac{mv_o^2}{2} + \frac{I\omega_o^2}{2},$$

gde su v_o i ω_o brzina i ugaona brzina kuglice u trenutku odvajanja, redom. Iz gornjeg izraza se, zamenom $I = 2mr^2/5$ i $\omega_o = v_o/r$ (r - poluprečnik kuglice), dobija

$$mgH = mgh + \frac{mv_o^2}{2} + \frac{2}{5}mr^2\frac{v_o^2}{2r^2} = mgh + \frac{7}{10}mv_o^2 \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{10}{7}g(H - h)}.$$



Sa slike se može odrediti ugao α, tj.

$$\cos\alpha = \frac{R - h}{R} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{R - h}{R}\right) = 36.9^o.$$

Po napuštanju petlje, uz pretpostavku da kuglica više ne rotira, njeno kretanje predstavlja kosi hitac sa početnom brzinom v_o i uglom elevacije α. Tražena veličina d je domet kosog hica

$$d = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{10}{7}(H - h)\sin 2\alpha = 3.84\,m.$$

Zadatak 32

Homogena kuglica poluprečnika $r = 20\,cm$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj polusferi čiji je poluprečnik $R = 3\,m$. Ako kuglica krene sa najviše tačke polusfere bez početne brzine, izračunati:

a) kolika je ugaona brzina kuglice ω u trenutku njenog odvajanja od polusfere?

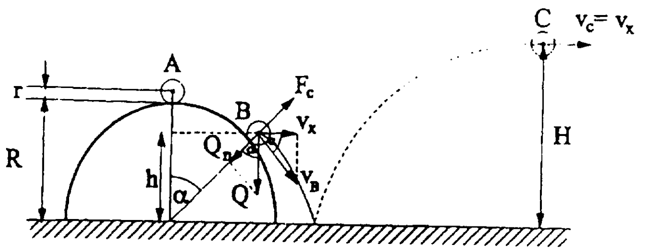
b) koliku će maksimalnu visinu H dostići centar mase kuglice posle odbijanja od horizontalne podloge na kojoj leži polusfera?

Moment inercije sfere je $I = 2mr^2/5$. Gubitke mehaničke energije i trenje zanemariti.

Rešenje

a) Neka kuglica u trenutku odvajanja od polusfere ima brzinu v i neka se nalazi na visini h. Zakon održanja mehaničke energije za položaje A i B glasi:

$$mg(r + R) = mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.45)$$



Sa slike se vidi da je $h = (r+R)\cos\alpha$, a važi i $\omega = v/r$. Uvodjenjem ovih izraza, kao i izraza za moment inercije kuglice u izraz (2.45) dobija se

$$g(r+R) = g(r+R)\cos\alpha + \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{5}. \qquad (2.46)$$

Uslov za odvajanje kuglice od polusfere je da centrifugalna sila koja deluje na kuglicu F_c postane jednaka komponenti težine kuglice Q_N

$$F_c = Q_N \Leftrightarrow \frac{mv^2}{r+R} = mg\cos\alpha \Leftrightarrow v^2 = g(r+R)\cos\alpha. \qquad (2.47)$$

Posle zamene (2.47) u (2.46) dobija se

$$g(r+R) = \frac{17}{10}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{17}g(r+R)}.$$

Ugaona brzina kuglice je

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{17}g(r+R)} = 21.49\,rad s^{-1}.$$

b) Posle odvajanja od polusfere, kuglica pada na podlogu, odbija se od nje i dostiže maksimalnu visinu u tački C, gde njena brzina ima horizontalan pravac. Kako u pravcu x-ose ne deluje nikakva sila, horizontalna komponenta brzine kuglice se ne menja, pa u tački C važi $v_C = v_x$, gde je v_x horizontalna komponenta brzine kuglice u tački B.

Zakon održanja mehaničke energije kuglice za položaje A i C glasi:

$$mg(r+R) = mgH + \frac{mv_x^2}{2} + \frac{I\omega_C^2}{2}. \qquad (2.48)$$

Kako je ugaona brzina kuglice u položaju C: $\omega_C = v_x/r$, zamenom ω_C i I u izraz (2.48) dobija se

$$g(r+R) = gH + \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_x^2}{5}. \qquad (2.49)$$

Iz $v_x = v\cos\alpha$ i izraza (2.47) dobija se

$$v_x^2 = v^2\cos^2\alpha = g(r+R)\cos^3\alpha.$$

Konačno, zamenom ovog izraza u (2.49) posle sredjivanja se dobija

$$H = (r+R)\left(1 - \frac{7}{10}\cos^3\alpha\right) = 2.55\,m.$$

Zadatak 33
Lopta mase $m = 10\,kg$ i poluprečnika $R = 20\,cm$ rotira oko ose koja prolazi kroz njen centar. Jednačina rotacije lopte ima oblik $\theta = A + Bt^2 + Ct^3$, gde je $A = 5\,rad$, $B = 4\,rad\,s^{-2}$ i $C = -1\,rad\,s^{-3}$. Kolika je vrednost momenta sile M koji deluje na loptu posle $t = 0.5\,s$ od početka rotacije? Moment inercije lopte je $I = 2mR^2/5$.

Rešenje

Ugaona brzina lopte i njeno ugaono ubrzanje su

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A + Bt^2 + Ct^3\right) = 2Bt + 3Ct^2,$$
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(2Bt + 3Ct^2\right) = 2B + 6Ct.$$

Primenom drugog Njutnovog zakona za rotaciono kretanje, posle zamene brojnih vrednosti dobija se

$$M = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2(2B + 6Ct) = \frac{4}{5}mR^2(B + 3Ct) = 0.8\,Nm.$$

2.3 Statika

2.3.1 Teorija

Ako na materijalnu tačku deluju sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$ ona će biti u ravnoteži ako je vektorski zbir svih sila jednak nuli, tj.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}_R = 0.$$

Prema uslovu geometrijskog sabiranja ovo je ispunjeno kada je poligon sila zatvoren.

Ako na telo deluje sila $\vec{F}$ i ako je $\vec{r}$ vektor položaja napadne tačke ove sile u odnosu na tačku (osu), onda je moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tu tačku

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

a njegov intenzitet

$$M = rF\sin(\vec{r}, \vec{F}).$$

Ukoliko na telo deluje spreg sila (dve sile jednakih intenziteta, istih pravaca, a različitih smerova i napadnih tačaka), onda je odgovarajući moment sprega sila

$$\vec{M}_s = \vec{d} \times \vec{F},$$

gde je $\vec{d}$ vektor položaja na napadnoj liniji sile $\vec{F}$ u odnosu na najbližu tačku druge sile ($-\vec{F}$) sprega sila. Intenzitet momenta sprega je

$$M_s = d \cdot F,$$

jer je $\vec{d} \perp \vec{F}$.

Rezultanta momenata $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$,..., $\vec{M}_n$ je

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i.$$

Kada na telo deluju sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,..., $\vec{F}_n$ čije se napadne linije sila seku u jednoj tački, telo je u ravnoteži ako je

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0.$$

Za telo se kaže da je u statičkoj ravnoteži ako se ne kreće ($v = 0$), a u dinamičkoj ravnoteži ako se kreće stalnom brzinom ($\vec{v} = const.$). Medjutim, ako se napadne linije sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,..., $\vec{F}_n$, koje deluju na telo ne seku u jednoj tački, onda će ovo telo biti u ravnoteži ako je vektorski zbir ovih sila jednak nuli (prethodni uslov) i zbir njegovih momenata $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$,..., $\vec{M}_n$ u odnosu na proizvoljnu tačku, jednak nuli. Prema tome, opšti uslov ravnoteže tela je

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0.$$

Dakle, telo je u statičkoj ravnoteži ako se ne kreće ($v = 0$ i $\omega = 0$) ili dinamičkoj ravnoteži ako se kreće stalnim brzinama ($\vec{v} = const.$ i $\vec{\omega} = const.$)

i to onim brzinama kojima se kretalo u trenutku uspostavljanja ravnoteže sila odnosno njihovih momenata.

Koordinate centra mase sistema materijalnih tačaka čije su mase m_1, m_2, m_3,..., m_n se mogu izraziti na sledeći način:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

gde su x_i, y_i i z_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$) koordinate materijalnih tačaka.

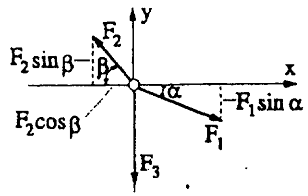
Koordinate centra mase tela, mase m mogu se izraziti na sledeći način:

$$x_c = \frac{\int x dm}{m}; \qquad y_c = \frac{\int y dm}{m}; \qquad z_c = \frac{\int z dm}{m}.$$

2.3.2 Zadaci

Zadatak 1

Kolika je rezultanta sila $F_1 = 15\,N$, $F_2 = 9\,N$ i $F_3 = 22\,N$ koje deluju na materijalnu tačku čije napadne linije leže u istoj ravni? Pravci i smerovi dejstva ovih sila su prikazani na slici, gde su označeni uglovi $\alpha = 30^o$ i $\beta = 60^o$.



Rešenje

Komponente rezultante sila duž x i y-osa su

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \qquad i \qquad F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}.$$

Na osnovu slike može se napisati da su ove rezultante

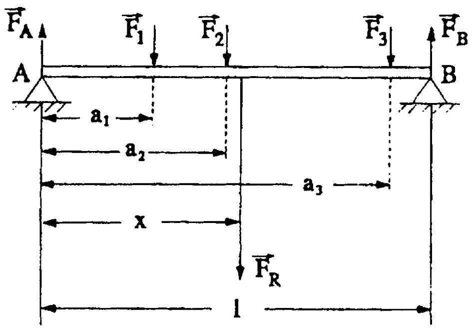
$$F_{Rx} = F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta$$
$$F_{Ry} = F_2 \sin\beta - F_1 \sin\alpha - F_3$$

Intenzitet rezultante F_R ovih sila je

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 23.3\,N$$

Zadatak 2

Horizontalna prosta greda dužine $l = 5\,m$ postavljena je na dva oslonca A i B koji se nalaze na njenim krajevima, kao što je to prikazano na slici. Greda je opterećena sa tri vertikalne sile $F_1 = 15\,N$, $F_2 = 30\,N$ i $F_3 = 20\,N$. Rastojanja sila od oslonca A su $a_1 = 1\,m$, $a_2 = 3\,m$ i $a_3 = 4\,m$. Odrediti intenzitet otpornih sila F_A i F_B u osloncima A i B kao i intenzitet i položaj rezultante sila F_1, F_2 i F_3.



Rešenje

Da bi greda pod dejstvom sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ bila u ravnoteži, mora biti ispunjen uslov da je algebarski zbir statičkih momenata tih sila u odnosu na izabranu tačku jednak nuli. Tako će statički moment svih sila računat u odnosu na tačku A biti

$$\sum M_A = F_B l - F_1 a_1 - F_2 a_2 - F_3 a_3 = 0,$$

gde je smer otporne sile uzet sa znakom plus, a sila F_1, F_2 i F_3 sa znakom minus. Iz gornjeg izraza se za otpornu silu F_B dobija

$$F_B = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3}{l} = 37\,N.$$

Statički moment svih sila u odnosu na tačku B je

$$\sum M_B = F_A l - F_1(l - a_1) - F_2(l - a_2) - F_3(l - a_3) = 0$$

odakle se za otpornu silu F_A dobija

$$F_A = \frac{F_1(l - a_1) + F_2(l - a_2) + F_3(l - a_3)}{l} = 28\,N.$$

Rezultanta F_R sila F_1, F_2 i F_3 se dobija kao algebarski zbir tih sila pošto su njihovi pravci paralelni. Dakle

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 65\,N.$$

Pravac i smer rezultante F_R je isti sa pravcem i smerom sile F_1, F_2 i F_3 i ona zamenjuje dejstvo ove tri sile. Uslov ravnoteže u odnosu na tačku A je

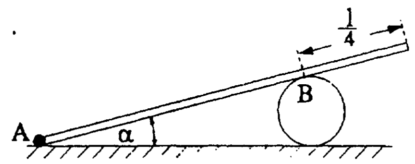
$$M_A = F_R x - F_B l = 0,$$

pa je položaj rezultante x prema kraju A grede

$$x = \frac{F_B l}{F_R} = 2.85\,m.$$

Zadatak 3

Greda mase $m = 200\,kg$ vezana je u tački A zglobom za horizontalno tle (vidi sliku). Greda je oslonjena u tački B na gladak cilindar, zaklapajući pri tome ugao $\alpha = 30^o$ prema tlu. Kolika sila deluje na oslonac B?

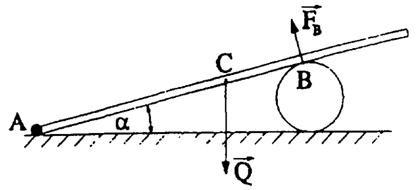


Rešenje

U ovom slučaju otpor oslonca $\vec{F}_B$ je normalna sila čiji su pravac i smer prikazani na slici.

Pošto je greda u ravnoteži, to je zbir momenata sila u tački A jednak nuli $\sum M_A = 0$, tj.

$$\overline{AC} \cdot Q - \overline{AB} \cdot F_B = 0,$$



odakle je

$$F_B = Q\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = mg\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \tag{2.50}$$

gde je

$$\overline{AC} = \frac{l}{2}\cos\alpha = \sqrt{3}\frac{l}{4} \tag{2.51}$$

i

$$\overline{AB} = \frac{3l}{4}. \tag{2.52}$$

Zamenom (2.51) i (2.52) u (2.50) dobija se

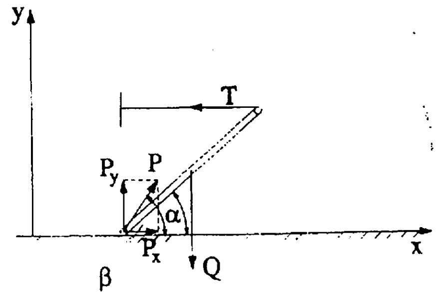
$$F_B = \frac{\sqrt{3}}{3}mg = 1.13\,kN$$

Zadatak 4
Štap dužine l i težine Q zglobom je učvršćen za jedan kraj, a za drugi kraj se drži horizontalnom niti. Štap sa horizontalom obrazuje ugao α. Naći reakciju zgloba P i silu zatezanja niti T.

Rešenje

Na slici je prikazan štap sa silama koje deluju na njega.

Reakcija zgloba može se predstaviti preko njenih komponenata u pravcu x i y-ose kao P_x i P_y, redom. Prema tome, uslov ravnoteže u odnosu na x-osu se može izraziti na sledeći način:



$$P_x - T = 0,$$

a u odnosu na y-osu

$$P_y - Q = 0.$$

Uslov ravnoteže momenata u odnosu na zglob je

$$\frac{Ql}{2}\cos\alpha - Tl\sin\alpha = 0.$$

Iz ovih jednačina dobija se da je

$$T = \frac{Q}{2}\cot\alpha = P_x; \qquad P_y = Q.$$

Reakcija P je

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = Q\sqrt{1 + \frac{\cot^2\alpha}{4}}$$

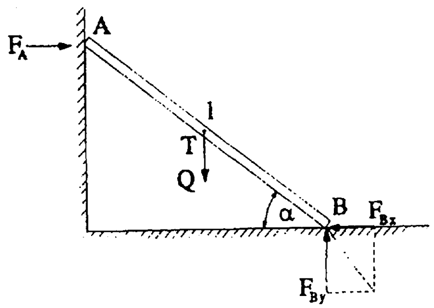
i

$$\tan\beta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{P\tan\alpha}{P/2} = 2\tan\alpha.$$

Zadatak 5
Lestvice težine Q postave se uz savršeno gladak vertikalni zid. Koeficijent trenja izmedju lestvica i horizontalne ravni je μ. Odrediti najmanji ugao izmedju lestvica i horizontalne ravni pri kome lestvice neće kliziti.

Rešenje

Pošto je zid savršeno gladak, to postoji samo normalna komponetna otpora oslonca A, dok reakcija oslonca B ima normalnu i tangencijalnu komponentu. Iz uslova ravnoteže $\sum F_{yi} = 0$ proizilazi da je



$$F_{By} - Q = 0 \Rightarrow F_{By} = Q, \tag{2.53}$$

dok je iz uslova ravnoteže $\sum F_{xi} =$
0

$$F_A - F_{Bx} = 0 \Rightarrow F_A = F_{Bx}. \tag{2.54}$$

Komponenta F_{Bx} je posledica sile trenja i iznosi

$$F_{Bx} = \mu N = \mu F_{By}. \tag{2.55}$$

Prema uslovu ravnoteže momenata sile za tačku B je $\sum M_B = 0$ odakle proizilazi da je

$$F_A l \sin\alpha - Q\frac{l}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_A = \frac{Q}{2}\cot\alpha.$$

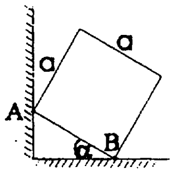
Iz (2.53), (2.54) i (2.55) dobija se da je

$$F_A = \mu Q$$

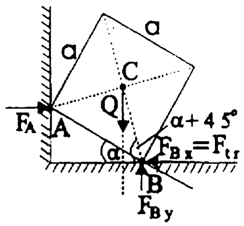
pa je

$$\mu Q = \frac{Q}{2}\cot\alpha \Rightarrow \cot\alpha = 2\mu \Rightarrow \alpha = arccot 2\mu$$

Zadatak 6
Kocka čije su stranice a naslonjena je na gladak zid na način prikazan na slici. Koeficijent trenja izmedju kocke i horizontalnog tla je μ. Pri kojim uglovima α će kocka da bude u ravnoteži?



Rešenje



Na osnovu uslova ravnoteže $\sum F_x = 0$ je

$$F_A - F_{tr} = 0,$$

a na osnovu uslova $\sum F_y = 0$

$$F_{By} - Q = 0,$$

dok je na osnovu uslova ravnoteže $\sum M_B = 0$

$$M_{FA} - M_Q = 0.$$

Kako je

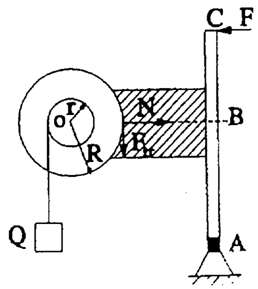
$$\begin{aligned} F_{tr} &= \mu F_{By}; \\ M_{FA} &= aF\sin\alpha_A; \\ M_Q &= \frac{\sqrt{2}}{2}a[\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})]Q \end{aligned}$$

na osnovu uslova ravnoteže se dobija

$$1 \leq \tan\alpha \leq 1/(1+2\mu)$$

Zadatak 7

Drveni valjak za dizanje tereta, prikazan na slici, ima dva cilindrična dela poluprečnika $r = 15\,cm$ i $R = 75\,cm$. Preko prvog valjka namotano je uže o čijem kraju visi teret težine $Q = 10^3\,N$. Pored većeg valjka postavljena je kočnica čija poluga ima dužinu $\overline{AC} = 10\,m$, dok je $\overline{AB} = 0.2\,m$. Koeficijent trenja izmedju kočnice i većeg cilindra je $\mu = 0.6$. Kolikom silom F se može zaustaviti kretanje valjka?



Rešenje

Iz uslova ravnoteže momenata sila za tačku A ($\sum M_A = 0$) može se napisati da je

$$F \cdot \overline{AC} - N \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow N = F\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Sila trenja je

$$F_{tr} = \mu N = \mu F\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Kočeći moment je $M_1 = F_{tr}R$, dok je kretni moment $M_2 = Qr$. Prema uslovu ravnoteže za tačku O je $\sum M_O = 0$, odnosno

$$F_{tr}R - Qr = 0$$

ili zamenom

$$\mu F\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}R - Qr = 0.$$

Prema tome najmanja sila kojom treba delovati na ručicu da bi se zaustavilo kretanje valjka je

$$F_{min} = \frac{Qr}{\mu R}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 6.7\,N$$

To znači da će se za $F < 6.7\,N$ teret kretati naniže, dok će se za $F > 6.7\,N$ sistem zaustaviti.

Zadatak 8
Na jednom tasu terazija nalazi se kugla od aluminijuma, a na drugom tasu kugla od bakra i pri tome su terazije u ravnoteži. Ako se kugle istovremeno potope u vodu, terazije i dalje ostaju u ravnoteži. Ustanoviti da li je jedna od ovih kugli šuplja. Ako jeste naći deo zapremine te kugle koji predstavlja šupljinu. Gustina aluminijuma je $\rho_{Al} = 3\,gcm^{-3}$, a bakra $\rho_{Cu} = 9\,gcm^{-3}$.

Rešenje

Pošto se ravnoteža terazija ne narušava kada se kugle potope u vodu, sile potiska koje deluju na kugle su iste iz čega proizilazi da su im spoljašnje

zapremine iste. To znači da su i mase kugli jednake iz čega proizilazi da je kugla od bakra šuplja. Zapremina šupljeg dela bakarne kugle V_o je

$$V_o = V - V_p,$$

gde je V zapremina kugle, a V_p zapremina koju zauzima ispunjeni deo kugle. Prema tome je

$$\frac{V_o}{V} = \frac{V - V_p}{V} = 1 - \frac{V_p}{V}.$$

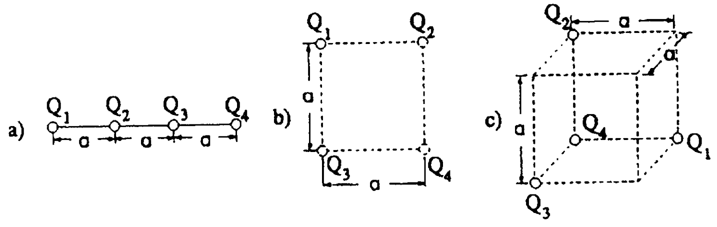
Zapremina homogenog tela jednaka je odnosu mase i gustine tog tela, a pošto su mase bakarne i aluminijumske kugle iste, gornji izraz se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{V_o}{V} = 1 - \frac{m/\rho_{Cu}}{m/\rho_{Al}} = 1 - \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}},$$

odakle se posle zamene brojnih vrednosti dobija

$$\frac{V_o}{V} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak 9
Izračunati koordinate težišta u sistemu od četiri tela čije su težine $Q_1 = 1\,N$, $Q_2 = 2\,N$, $Q_3 = 3\,N$ i $Q_4 = 4\,N$ koja se nalaze u položajima prikazanim na slici pod a), b) i c). Rastojanje a iznosi $3\,cm$.



Rešenje

Napadna tačka rezultante svih paralelnih sila koje u gravitacionom polju deluju na tela čije su težine Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4 predstavlja težište sistema ta četiri tela. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu xyz koordinate težišta se mogu izračunati na osnovu sledećih relacija:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}. \tag{2.56}$$

a) Pošto čestice leže na pravoj može se uzeti da je to x-osa koordinatnog sistema. Ako se uzme da je početak koordinatnog sistema u položaju tela čije je težište Q_1 onda se primenom relacija (2.56) dobija

$$x_c = \frac{Q_1x_1 + Q_2x_2 + Q_3x_3 + Q_4x_4}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4} = 6\,cm,$$

jer je $x_1 = 0$; $x_2 = a = 3\,cm$; $x_3 = 2a = 6\,cm$ i $x_4 = 3a = 9\,cm$.

b) Ose koordinatnog sistema mogu se postaviti tako da u pravcu Q_3Q_1 leži y-osa, a u pravcu Q_3Q_4 x-osa. Primenjujući relaciju (2.56) dobija se

$$x_c = \frac{Q_1x_1 + Q_2x_2 + Q_3x_1 + Q_4x_2}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4} = 1.8\,cm,$$

$$y_c = \frac{Q_1y_2 + Q_2y_2 + Q_3y_1 + Q_4y_1}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4} = 0.9\,cm,$$

jer je $x_1 = 0$, $x_2 = a = 3\,cm$, $y_1 = 0$ i $y_2 = a = 3\,cm$.

c) Ose koordinatnog sistema postave se tako da u pravcu Q_4Q_3 leži x-osa, u pravcu Q_4Q_1 y-osa i u pravcu Q_4Q_2 z-osa. Primenjujući relacije (2.56) za koordinate težišta se dobija

$$x_c = \frac{Q_1x_1 + Q_2x_1 + Q_3x_2 + Q_4x_1}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4} = 0.9\,cm,$$

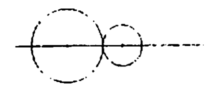
$$y_c = \frac{Q_1y_2 + Q_2y_1 + Q_3y_1 + Q_4y_1}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4} = 0.3\,cm,$$

$$z_c = \frac{Q_1z_1 + Q_2z_2 + Q_3z_1 + Q_4z_1}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4} = 0.6\,cm.$$

jer je $x_1 = 0$, $x_2 = a = 3\,cm$, $y_1 = 0$, $y_2 = a = 3\,cm$, $z_1 = 0$ i $z_2 = a = 3\,cm$.

Zadatak 10

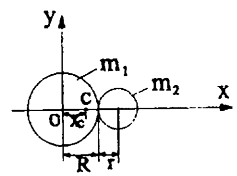
Dve homogene kuglice, načinjene od istog materijala, nanizane su na tanak zategnut konac. Gde se nalazi centar mase sistema kuglica ako se one dodiruju? Odnos poluprečnika kuglica iznosi $R/r = 2$.



Rešenje

Za usvojeni koordinatni sistem je $y_c = 0$, dok je

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_2(R + r)}{m_1 + m_2}. \tag{2.57}$$



Mase kuglica su

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi \rho r^3 \tag{2.58}$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{2.59}$$

Zamenom (2.58) i (2.59) u (2.57) za x-koordinatu centra mase dobija se

$$x_c = \frac{r}{3}.$$

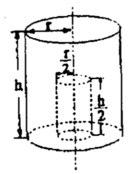
Zadatak 11

Iz punog homogenog valjka visine $h = 56\,cm$ i osnove poluprečnika r, izrezan je, s jedne strane, valjak visine $h/2$ i osnove poluprečnika $r/2$. Odrediti težište takvog tela.

Rešenje

Pošto je masa takvog tela rasporedjena simetrično u odnosu na njegovu uzdužnu osu, težište se mora naći na toj osi:

Rastojanje težišta T od donje osnovice valjka obeleženo je sa y_c. Pomoću ravni S, u kojoj leži gornja osnova izrezanog valjka, podeli se valjak na dva dela od kojih je gornji homogenog sastava i ima masu m_1, dok donji sadrži šuplji cilindrični izrez i ima masu m_2. Težište T_1 homogenog dela nalazi se na visini



$y_1 = 3h/4$, a težište T_2 donjeg dela na visini $y_2 = h/4$, računajući od donje osnove valjka. Tada je

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.60}$$

Ako se sa ρ označi gustina materijala tela, onda je

$$m_1 = \frac{1}{2} r^2 \pi h \rho, \tag{2.61}$$

a

$$m_2 = \frac{1}{2} r^2 \pi h \rho - (\frac{r}{2})^2 \pi \frac{h}{2} \rho = \frac{3}{8} r^2 \pi h \rho. \tag{2.62}$$

Zamenom (2.61) i (2.62) u (2.60) dobija se

$$y_c = \frac{3r^2\pi h^2 \rho/8 + 3r^2 \pi h^2 \rho/32}{r^2 \pi h \rho/2 + 3r^2 \pi h \rho/8} = 30\,cm.$$

2.4 Elastičnost

2.4.1 Teorija

Hukov zakon elastičnosti može se izraziti u sledećem obliku:

$$\frac{F}{S} = E_Y \frac{\Delta l}{l},$$

gde je F sila zatezanja cilindričnog tela (najčešće žice ili štapa), S površina poprečnog preseka tela, l dužina tela, Δl izduženje tela pod dejstvom sile F i E_Y Jungov modul elastičnosti. Veličina $\sigma = F/S$ predstavlja normalni napon, a $\Delta l/l$ relativnu deformaciju.

Količnik relativne transverzalne deformacije $\Delta a/a$ i relativne longitudinalne deformacije $\Delta l/l$

$$\mu = \frac{\Delta a/a}{\Delta l/l}$$

naziva se Poasonov odnos ili Poasonov koeficijent.

Veza izmedju tangencijalnog napona σ_τ i ugla smicanja θ data je sledećim izrazom

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S} = E_s \theta,$$

gde je F_τ tangencijalna sila, a E_s modul smicanja.

Torziona konstanta žice ili štapa dužine l, kružnog poprečnog preseka poluprečnika r i modula torzije E_s data je izrazom

$$c = \frac{\pi E_s}{2l} r^4.$$

Ako je ovakva žica ili štap opterećena na uvijanje momentom sprega M, ugao uvrtanja je

$$\theta = \frac{M}{c} = \frac{2lM}{\pi E_s r^4}.$$

Ukupan rad spoljašnje sile F potreban za povećanje dužine žice ili štapa za Δl jednak je unutrašnjoj elastičnoj potencijalnoj energiji E_{pe}

$$E_{pe} = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2,$$

gde je $k = E_Y S/l$ koeficijent koji opisuje elastične osobine žice ili štapa.

2.4.2 Zadaci

Zadatak 1

Na kraju metalne žice dužine $l = 4\,m$ i površine poprečnog preseka $S = 1\,mm^2$ obešeno je telo mase $m = 12\,kg$. Odrediti veličinu relativnog istezanja žice δ, kao i veličinu njenog smanjenog poprečnog preseka usled istezanja S'. Jungov modul elastičnosti materijala od kojeg je načinjena žica je $E_Y = 120\,GPa$, a Poasonov koeficijent $\mu = 0.35$.

Rešenje

Hukov zakon za dužinsku deformaciju se može napisati u nekoliko oblika

$$\delta = e\sigma \Leftrightarrow \sigma = E_Y \delta \Leftrightarrow \frac{F}{S} = \frac{1}{e}\frac{\Delta l}{l} = E_Y \frac{\Delta l}{l}. \tag{2.63}$$

U konkretnom slučaju, izduženje žice izaziva težina mg obešenog tela (težina žice se zanemaruje), pa iz izraza (2.63) sledi:

$$\delta = e\sigma = \frac{1}{E_Y}\frac{F}{S} = \frac{1}{E_Y}\frac{mg}{S} = 0.98 \cdot 10^{-3}.$$

Pri izduženju žice istovremeno dolazi do smanjenja površine njenog poprečnog preseka, tj. postoji neka deformacija i u pravcu upravnom na pravac dejstva sile. Neka se poluprečnik žice r smanjio za Δr. Ova deformacija se može okarakterisati Poasonovim koeficijentom

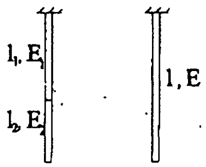
$$\mu = \frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = \mu\frac{\Delta l}{l} = \mu\delta.$$

Za smanjenu površinu poprečnog preseka žice se dobija

$$S' = \pi(r-\Delta r)^2 = \pi r^2\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)^2 = S(1-\mu\delta)^2 = 0.99\,mm^2.$$

Zadatak 2

Dva štapa, jednakih površina poprečnog preseka i različitih dužina, $l_1 = 20\,cm$ i $l_2 = 10\,cm$, napravljeni su od različitih materijala, modula elastičnosti $E_1 = 2.1\cdot 10^{11}\,Nm^{-2}$ i $E_2 = 1.1\cdot 10^{11}\,Nm^{-2}$. Štapovi su aksijalno spojeni i obešeni kao što je prikazano na slici. Koliki je ekvivalentni modul elastičnosti E ovakvog spoja štapova? Težine štapova zanemariti.



Rešenje

Praktično, treba naći modul elastičnosti E štapa od jednog materijala koji bi se pri dejstvu iste sile F izdužio za istu dužinu kao prikazani spoj štapova. Naravno, ovaj "ekvivalentni" štap treba da ima iste dimenzije (poprečni presek S i dužinu l) kao spoj štapova. Dakle, dužina ekvivalentnog štapa je $l = l_1 + l_2$.

Iz Hukovog zakona primenjenog na spojene štapove proizilazi da je

$$\frac{F}{S} = E_1\frac{\Delta l_1}{l_1} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Fl_1}{SE_1}, \tag{2.64}$$

$$\frac{F}{S} = E_2\frac{\Delta l_2}{l_2} \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{Fl_2}{SE_2}. \tag{2.65}$$

Hukov zakon za ekvivalentni štap glasi:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{\Delta l}{l_1+l_2}. \tag{2.66}$$

Sabiranjem izraza (2.64) i (2.65) se za izduženje ekvivalentnog štapa dobija

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F}{S}\left(\frac{l_1}{E_1}+\frac{l_2}{E_2}\right) = \frac{F}{S}\frac{l_1E_2+l_2E_1}{E_1E_2}. \tag{2.67}$$

Zamenom (2.67) u (2.66) konačno se dobija

$$E = \frac{E_1E_2(l_1+l_2)}{l_1E_2+l_2E_1} = 1.61\cdot 10^{11}\,Nm^{-2}.$$

Zadatak 3

Horizontalan krut štap dužine $l = 80\,cm$ obešen je svojim krajevima o dve paralelne žice iste površine poprečnog preseka S i iste dužine l_z. Jedna žica je od gvožđja, čiji je modul elastičnosti $E_1 = 2\cdot 10^{11}\,Nm^{-2}$, a druga od bakra, modula elastičnosti $E_2 = 1.2\cdot 10^{11}\,Nm^{-2}$. U kojoj tački O treba obesiti teg a da štap ostane u horizontalnom položaju? Težina tega je mala, tako da se pri istezanju žica ne prelazi granica proporcionalnosti. Masu štapa zanemariti.

Rešenje

Neka je uslov zadatka ispunjen kada se tačka O vešanja tega nalazi na rastojanju x od levog kraja štapa. Teg mase m vrši zatezanje žice A silom F_A, a žice B silom F_B. Kada se sistem nalazi u ravnoteži, postoji jednakost momenata svih sila u odnosu na tačku O, tj. važi:

$$F_Ax = F_B(l-x) \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{l-x}{x}. \tag{2.68}$$

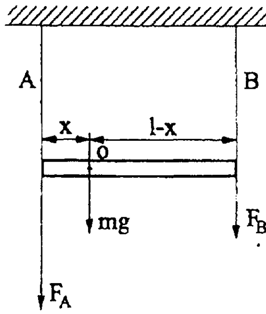
Sile F_A i F_B izazivaju izduženja $(\Delta l)_A$ i $(\Delta l)_B$ žica A i B, redom. Prema Hukovom zakonu je

$$\frac{F_A}{S} = E_1\frac{(\Delta l)_A}{l_z},$$

$$\frac{F_B}{S} = E_2\frac{(\Delta l)_B}{l_z}.$$

Deobom ovih izraza, uzimajući u obzir uslov $(\Delta l)_A = (\Delta l)_B$ (da bi štap ostao u horizontalnom položaju, apsolutna izduženja žica A i B moraju da budu jednaka), dobija se

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{E_1}{E_2}. \tag{2.69}$$



Iz izraza (2.68) i (2.69) sledi

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{l-x}{x} \Rightarrow x = \frac{E_2}{E_1+E_2}l = 30\,cm.$$

Kao što se iz poslednjeg izraza vidi, položaj tačke O ne zavisi od težine tega.

Zadatak 4
Tanak homogen štap dužine $l = 0.5\,m$, načinjen od materijala Jungovog modula elastičnosti $E_Y = 16\,GPa$ i gustine $\rho = 11300\,kgm^{-3}$, ravnomerno se obrće ugaonom brzinom $\omega = 12\,rad\,s^{-1}$ u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose koja prolazi kroz jedan njegov kraj.
a) Odrediti zavisnost sile istezanja u poprečnom preseku štapa od položaja poprečnog preseka.
b) Koliko je ukupno izduženje štapa?
Zadatak rešiti i za slučaj kada štap miruje obešen na jednom kraju tako da visi vertikalno.

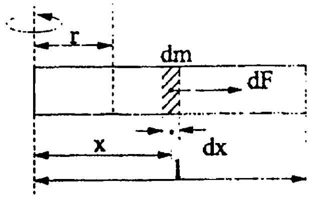
Rešenje

a) U slučaju štapa koji rotira, do njegovog istezanja dolazi usled postojanja centrifugalne sile. Elementarna centrifugalna sila koja deluje na element štapa dužine dx i mase dm na rastojanju x od ose rotacije iznosi

$$dF = x\omega^2\,dm = \frac{m\omega^2}{l}x\,dx. \tag{2.70}$$

Pri izvodjenju gornjeg izraza korišćen je i uslov homogenosti štapa, iz koga sledi da je

$$dm = \frac{dx}{l}m.$$



Sila istezanja u poprečnom preseku štapa koji se nalazi na rastojanju r od ose rotacije jednaka je sumi elementarnih centrifugalnih sila koje deluju od r do l

$$F(r) = \frac{m\omega^2}{l}\int_r^l x\,dx = \frac{m\omega^2}{2l}\left(l^2 - r^2\right) = \frac{m\omega^2 l}{2}\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right).$$

b) Elementarno izduženje štapa $d(\Delta l)$, nastalo kao posledica elementarne sile dF, može se naći iz Hukovog zakona

$$\frac{dF}{S} = E_Y\frac{d(\Delta l)}{x} \Rightarrow d(\Delta l) = \frac{x\,dF}{SE_Y}, \tag{2.71}$$

gde je

$$S = \frac{V}{l} = \frac{m}{\rho l} \tag{2.72}$$

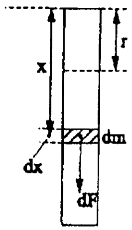
površina poprečnog preseka štapa (V je zapremina štapa).
Zamenom (2.70) i (2.72) u (2.71) dobija se

$$d(\Delta l) = \frac{\rho\omega^2}{E_Y}x^2dx.$$

Ukupno izduženje dobija se sumiranjem elementarnih izduženja duž cele dužine štapa

$$\Delta l = \frac{\rho\omega^2}{E_Y}\int_0^l x^2dx = \frac{\rho\omega^2 l^3}{3E_Y} = 4.24\,\mu m.$$

U slučaju štapa koji visi, do istezanja dolazi usled težine samog štapa. Zadatak se rešava analogno prethodnom slučaju:



$$dF = g\,dm = \frac{mg}{l}dx,$$

$$F(r) = \frac{mg}{l}\int_r^l dx = \frac{mg}{l}(l-r) = mg\left(1 - \frac{r}{l}\right),$$

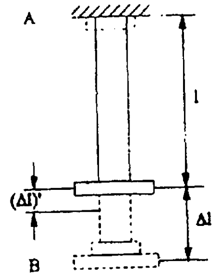
$$d(\Delta l) = \frac{x\,dF}{SE_Y} = \frac{\rho g}{E_Y}x\,dx,$$

$$\Delta l = \frac{\rho g}{E_Y}\int_0^l x\,dx = \frac{\rho g l^2}{2E_Y} = 0.87\,\mu m.$$

Zadatak 5
Gvozdeni štap dužine $l = 8\,m$ i površine poprečnog preseka $S = 4\,cm^2$ obešen je o tavanicu. Po štapu može da se kreće bez trenja teg mase $m = 4\,kg$ u obliku prstena. Teg se dovede u najviši položaj, pa se pusti da slobodno pada bez početne brzine. Na donjem kraju štapa se nalazi proširenje koje sprečava dalje kretanje tega. Koliko će se izdužiti štap pri padu tega? Smatrati da je udar elastičan i da se ne prelazi granica proporcionalnosti. Koeficijent elastičnosti gvoždja od kojeg je načinjen štap je $e = 5\,(TPa)^{-1}$.

Rešenje

Zakon održanja mehaničke energije u ovom slučaju uključuje, pored gravitacione potencijalne E_p, i elastičnu potencijalnu energiju deformisanog štapa E_{pe}. Naime, gravitaciona potencijalna energija koju teg ima u položaju A se pretvara u elastičnu potencijalnu energiju štapa u položaju B



$$E_{pA} = E_{peB} \Leftrightarrow mg(l+\Delta l) = \frac{1}{2}F_e\Delta l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{2.73}$$

U gornjem izrazu iskorišćena je veza $F_e = k\Delta l$ izmedju elastične sile F_e koja se javlja u štapu usled njegovog izduženja i izduženja Δl (k je konstanta proporcionalnosti). Ova veza u stvari predstavlja Hukov zakon

$$\frac{F_e}{S} = \frac{1}{e}\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow F_e = \frac{S}{el}\Delta l = k\Delta l; \quad k = \frac{S}{el}.$$

Sredjivanjem izraza (2.73) dobija se kvadratna jednačina po Δl

$$(\Delta l)^2 - \frac{2mg}{k}\Delta l - \frac{2mgl}{k} = 0,$$

čijim se rešavanjem (odbacuje se negativno rešenje koje nema fizičkog smisla) i zamenom $k = S/el$, dobija

$$\Delta l = \frac{mgel}{S}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2S}{mge}}\right) = 7.9\,mm.$$

Treba napomenuti da je Δl maksimalno izduženje štapa koje nastaje u trenutku udara tega o proširenje na njegovom kraju. Posle udara se dužina štapa smanjuje i ustaljuje na vrednosti $l + (\Delta l)'$, gde je $(\Delta l)'$ "trajno" izduženje štapa koje potiče od težine tega mg. Iz Hukovog zakona za ovaj slučaj se dobija

$$\frac{mg}{S} = \frac{1}{e}\frac{(\Delta l)'}{l} \Rightarrow (\Delta l)' = \frac{mgle}{S} = 3.9\,\mu m.$$

Može se zaključiti da je $\Delta l \gg (\Delta l)'$.

Zadatak 6
Kuglica obešena o laku gumenu traku dužine $l = 50\,cm$ (u neistegnutom

stanju) izvedena je iz ravnotežnog položaja za ugao $\alpha = 60^o$. U ovom položaju traka nije istegnuta. Kada se kuglica pusti da pada bez početne brzine, traka prolazeći kroz ravnotežni položaj dostigne dužinu $l_1 = 70\,cm$. Kolika je brzina kuglice u trenutku prolaska kroz ravnotežni položaj, ako se traka isteže srazmerno sili koja na nju deluje?

Rešenje

Usled dejstva centrifugalne sile F_c i težine kuglice Q, u ravnotežnom položaju se traka istegne za Δl. Potencijalna gravitaciona energija koju sistem (traka i kuglica) ima u položaju 1 (položaj kada je kuglica otklonjena za ugao α) utroši se do položaja 2 (ravnotežni položaj) na povećanje kinetičke energije i potencijalne elastične energije. Dakle, iz zakona održanja mehaničke energije za položaje 1 i 2 se dobija

$$E_{p1} = E_{k2} + E_{pe2} \Leftrightarrow mgx = \frac{mv^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2}. \tag{2.74}$$

U ovom izrazu je m masa kuglice, k konstanta koja opisuje elastične osobine trake, v brzina trake u položaju 2, a x visina kuglice u položaju 1.

U položaju 2 postoji ravnoteža elastične sile trake sa zbirom centrifugalne sile i težine kuglice

$$F_e = F_c + Q \Leftrightarrow k\Delta l = mg + \frac{mv^2}{l_1}. \tag{2.75}$$

Zamenom izraza (2.75) u (2.74) dobija se

$$mgx = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Delta l}{2}\left(mg + \frac{mv^2}{l_1}\right) \Rightarrow v^2 = \frac{gl_1(2x - \Delta l)}{l_1 + \Delta l}.$$

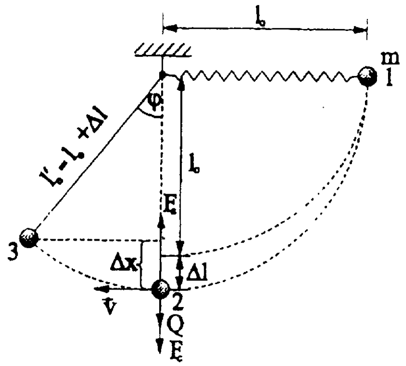
Kako je $\Delta l = l_1 - l$ i sa slike $x = l_1 - l\cos\alpha$, zamena Δl i x u gornji izraz daje

$$v = \sqrt{\frac{gl_1(l_1 + l - 2l\cos\alpha)}{2l_1 - l}} = 2.31\,ms^{-1}.$$

Zadatak 7
Opruga dužine $l_o = 1\,m$ i konstante elastičnosti $k = 27.5\,Nm^{-1}$, koja je jednim svojim krajem spojena sa osloncem, a na drugom kraju se nalazi kuglica mase $m = 0.1\,kg$, u neistegnutom stanju zauzima horizontalan položaj. Zatim se sistem pusti i u trenutku kada se opruga nalazi u vertikalnom položaju

kuglica se elastično sudara sa drugom identičnom kuglicom, koja je vezana neistegljivom niti za isti oslonac. Za koliki ugao će se otkloniti druga kuglica?

Rešenje



Usled dejstva centrifugalne sile F_c i težine kuglice Q, u položaju 2 opruga se istegne za Δl i njena dužina (kao i dužina neistegljive niti za koju je obešena druga kuglica) iznosi $l_o' = l_o + \Delta l$. Sa slike se vidi da je

$$\cos\varphi = \frac{l_o' - \Delta x}{l_o'} = 1 - \frac{\Delta x}{l_o'} = 1 - \frac{\Delta x}{l_o + \Delta l}. \qquad (2.76)$$

Veličine Δx i Δl se nalaze iz zakona održanja mehaničke energije tokom kretanja sistema i uslova ravnoteže sila u položaju 2. Naime, potencijalna gravitaciona energija koju sistem ima u položaju 1 utroši se do položaja 2 na povećanje kinetičke energije i potencijalne elastične energije. Dakle, iz zakona održanja mehaničke energije za položaje 1 i 2 se dobija

$$E_{p1} = E_{k2} + E_{pe2} \Leftrightarrow mg(l_o + \Delta l) = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2, \qquad (2.77)$$

gde je v brzina kuglice u položaju 2. U ovom položaju postoji ravnoteža elastične sile opruge sa zbirom centrifugalne sile i težine kuglice

$$F_e = F_c + Q \Leftrightarrow k\Delta l = \frac{mv^2}{l_o + \Delta l} + mg. \qquad (2.78)$$

Sudar prve i druge kuglice je savršeno elastičan i centralni, pa pošto druga kuglica pre sudara miruje, prva kuglica joj predaje svoju celokupnu kinetičku

energiju i zaustavlja se. Kinetička energija druge kuglice se do položaja 3 u potpunosti utroši na povećanje njene potencijalne energije

$$E_{k2} = E_{p3} \Leftrightarrow \frac{mv^2}{2} = mg\Delta x. \qquad (2.79)$$

Dobijen je sistem jednačina (2.77) - (2.79), čijim rešavanjem se dolazi do vrednosti Δx i Δl.

Iz (2.78) se dobija

$$mv^2 = (k\Delta l - mg)(l_o + \Delta l).$$

Zamenom ovog izraza u (2.77), posle sredjivanja se dobija kvadratna jednačina

$$2k(\Delta l)^2 + (kl_o - 3mg)\Delta l - 3mgl_o = 0,$$

čijim rešavanjem se dobija $\Delta l = 0.1\,m$ (negativno rešenje kvadratne jednačine se odbacuje jer nema fizičkog smisla).

Zamenom (2.79) u (2.77) dobija se

$$mg(l_o + \Delta l) = mg\Delta x + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta x = l_o + \Delta l - \frac{k(\Delta l)^2}{2mg} = 0.96\,m.$$

Konačno, zamenom brojnih vrednosti u (2.76) dobija se $\cos\varphi = 0.128$, pa je $\varphi = 82^o\,38'$.

2.5 Gravitacija

2.5.1 Teorija

Njutnov zakon gravitacije za dve materijalne tačke masa m_1 i m_2 koje se nalaze na rastojanju r može se izraziti na sledeći način:

$$\vec{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_o \Rightarrow F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gde je $\vec{F}$ sila privlačenja izmedju tela, $\gamma = 6.67\cdot10^{-11}Nm^2kg^{-2}$ gravitiaciona konstanta, a $\vec{r}_o$ jedinični vektor. Ako su tela sfernog oblika, mogu se smatrati materijalnim tačkama, a rastojanje izmedju njih meri se u odnosu na centre masa tela.

Kvantitativna veličina za opisivanje gravitacionog polja je jačina polja

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m},$$

gde je $\vec{F}$ gravitaciona sila koja deluje na probnu masu m unetu u gravitaciono polje. Ako se radi o gravitacionom polju Zemlje, važi

$$G = \gamma \frac{M}{r^2},$$

gde je M masa Zemlje, a r rastojanje od centra Zemlje do tačke u kojoj se odredjuje jačina polja. Ubrzanje Zemljine teže brojno je jednako jačini gravitacionog polja i na površini Zemlje iznosi

$$g_o = G_o = \gamma \frac{M}{R^2},$$

gde je R poluprečnik Zemlje.

Rad pri premeštanju tela mase m u gravitacionom polju Zemlje iz tačke na rastojanju r_1 do tačke na rastojanju r_2 od centra Zemlje iznosi

$$A = \gamma m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Za $r_2 > r_1$ ovaj rad je negativan (vrši se rad protiv gravitacione sile), a za $r_2 < r_1$ rad je pozitivan (gravitaciona sila vrši rad).

Potencijalna energija se definiše kao rad pri premeštanju tela u beskonačnost (praktično van domašaja Zemljinog gravitacionog polja). Na rastojanju r od centra Zemlje, potencijalna energija iznosi

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Potencijal gravitacionog polja je

$$V = \frac{E_p}{m} = -\gamma \frac{M}{r},$$

a gravitacioni napon je razlika potencijala u tačkama A i B gravitacionog polja

$$U_{AB} = V_B - V_A.$$

2.5.2 Zadaci

Zadatak 1

Centar olovne kugle mase $m_1 = 3\,kg$ udaljen je $l = 10\,m$ od centra druge

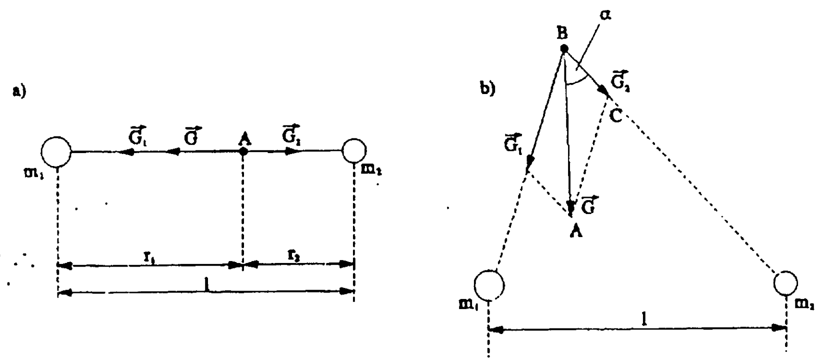
olovne kugle mase $m_2 = 1\,kg$. Kolika je jačina gravitacionog polja ovih kugli u tački koja je:

a) udaljena $r_1 = 6\,m$ od centra kugle mase m_1, a $r_2 = 4\,m$ od centra kugle mase m_2;

b) udaljena $r_1 = 7\,m$ od centra kugle mase m_1, a $r_2 = 8\,m$ od centra kugle mase m_2.

Gravitaciona konstanta iznosi $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$.

Rešenje



a) U ovom slučaju tačka u kojoj treba naći jačinu gravitacionog polja (tačka A na slici) leži na pravoj koja spaja centre masa dveju kugli. Jačine gravitacionog polja koje potiče od kugle mase m_1, odnosno kugle mase m_2, su

$$G_1 = \gamma \frac{m_1}{r_1^2}, \qquad G_2 = \gamma \frac{m_2}{r_2^2};$$

a jačina rezultujućeg gravitacionog polja iznosi

$$G = G_1 - G_2 = \gamma \left(\frac{m_1}{r_1^2} - \frac{m_2}{r_2^2} \right) = 1.39 \cdot 10^{-12}\,Nkg^{-1}.$$

b) Tačka B u kojoj treba naći jačinu gravitacionog polja prikazana je na slici. Jačine gravitacionog polja koje potiče od kugle mase m_1, odnosno kugle mase m_2, su·

$$G_1 = \gamma \frac{m_1}{r_1^2} = 4.1 \cdot 10^{-12}\,Nkg^{-1}, \qquad G_2 = \gamma \frac{m_2}{r_2^2} = 1.04 \cdot 10^{-12}\,Nkg^{-1},$$

a jačina rezultujućeg gravitacionog polja se može naći primenom kosinusne teoreme na ΔABC

$$G^2 = G_1^2 + G_2^2 - 2G_1G_2\cos(180^o - \alpha) = G_1^2 + G_2^2 + 2G_1G_2\cos\alpha.$$

Vrednost $\cos\alpha$ se nalazi primenom kosinusne teoreme na ΔDEB

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - l^2}{2r_1r_2},$$

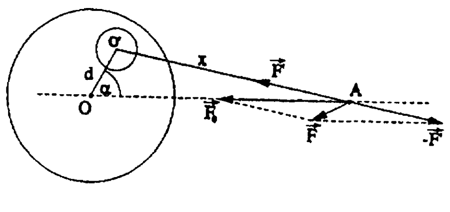
pa je

$$G^2 = G_1^2 + G_2^2 + \frac{G_1G_2(r_1^2 + r_2^2 - l^2)}{r_1r_2} \Rightarrow G = 4.34\cdot 10^{-12}\,Nkg^{-1}.$$

Zadatak 2

U homogenoj olovnoj kugli poluprečnika $R = 0.8\,m$ nalazi se sferna šupljina poluprečnika $r = 0.25\,m$, čiji je centar O' na rastojanju $d = 0.5\,m$ od centra olovne kugle. Odrediti intenzitet sile kojom ovo telo deluje na materijalnu tačku A mase $m = 1\,kg$ koja se nalazi na rastojanju $D = 1\,m$ od centra olovne kugle. Gustina olova je $\rho = 11.66\,gcm^{-3}$, $\alpha = 60^o$, a gravitaciona konstanta iznosi $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$.

Rešenje



Sila $\vec{F}$ kojom dato telo (velika kugla mase M iz koje je izvadjena mala kugla mase m') deluje na materijalnu tačku je $\vec{F} = \vec{F_o} - \vec{F'}$, gde je $\vec{F_o}$ sila koja potiče od velike, a $\vec{F'}$ sila koja potiče od male kugle. Mase ovih kugli su

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho = 25007\,kg, \quad m' = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = 763\,kg.$$

Rastojanje centra male kugle od tačke A može se naći primenom kosinusne teoreme na ΔAO'O

$$x^2 = d^2 + D^2 - 2dD\cos\alpha \Rightarrow x = \sqrt{d^2 + D^2 - 2dD\cos\alpha} = 0.867\,m.$$

Intenziteti sila F_o i F' su

$$F_o = \gamma\frac{Mm}{D^2} = 1.67\cdot 10^{-6}\,N, \quad F' = \gamma\frac{m'm}{x^2} = 6.77\cdot 10^{-8}\,N.$$

Ugao γ se nalazi iz sinusne teoreme za ΔAO'O

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{d}{x}\sin\alpha = 0.5 \Rightarrow \gamma = 30^o.$$

Najzad, intenzitet tražene sile se nalazi iz kosinusne teoreme za ΔABC

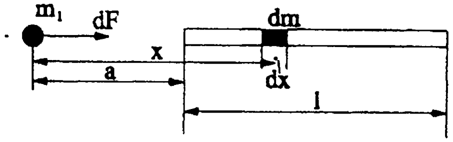
$$F^2 = F_o^2 + F'^2 - 2F_oF'\cos\gamma \Rightarrow F = \sqrt{F_o^2 + F'^2 - 2F_oF'\cos\gamma} = 1.61\cdot 10^{-6}\,N.$$

Napomena: Iz razloga što je $m' = (r/R)^3M \ll M$, dobija se $F' \ll F_o$, pa je $F \approx F_o$.

Zadatak 3

Tanak homogen prav štap dužine $l = 1\,m$ i mase $m = 2\,kg$ nalazi se na rastojanju $a = 10\,cm$ od kuglice mase $m_1 = 0.2\,kg$. Izračunati gravitacionu silu F uzajamnog dejstva ova dva tela. Gravitaciona konstanta iznosi $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$.

Rešenje



Neka štap deluje na kuglicu silom F. Silom istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera, deluje kuglica na štap.

Neka je štap podeljen na beskonačno mnogo elementarnih delova mase dm. Proizvoljni elementarni deo na rastojanju x od kuglice, kome odgovara dužina štapa dx, privlači kuglicu elementarnom silom

$$dF = \gamma\frac{m_1\,dm}{x^2}.$$

Kako je štap homogen, važi

$$dm = \frac{dx}{l}m \Rightarrow dF = \gamma\frac{m_1m}{l}\frac{dx}{x^2}.$$

Ukupna sila se može naći sumiranjem sila svih elementarnih delova štapa (od onog najbližeg kuglici, na rastojanju a, do onog najdaljeg, na rastojanju $a+l$)

$$F = \gamma\frac{m_1 m}{l}\int\limits_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \gamma\frac{m_1 m}{l}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{a+l} = \gamma\frac{m_1 m}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right).$$

Konačno se dobija

$$F = \gamma\frac{m_1 m}{a(a+l)} = 2.425\cdot 10^{-10}\,N.$$

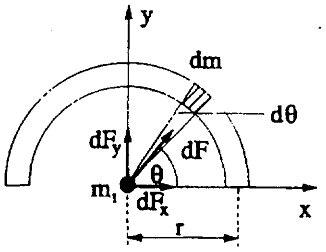
Zadatak 4

Tanka homogena žica, mase $m = 0.1\,kg$, savijena je u obliku polukruga, poluprečnika $r = 0.25\,m$, u čijem se centru nalazi kuglica mase $m_1 = 0.15\,kg$. Izračunati gravitacionu silu F uzajamnog dejstva ova dva tela. Gravitaciona konstanta iznosi $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$.

Rešenje

Neka je F sila kojom žičani polukrug deluje na kuglicu. Silom istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera, deluje kuglica na polukrug.

Neka je polukrug podeljen na beskonačno mnogo elementarnih delova mase dm. Proizvoljni elementarni deo čiji je položaj odredjen uglom θ i koji se sa mesta kuglice "vidi" pod uglom $d\theta$ privlači kuglicu elementarnom silom:



$$dF = \gamma\frac{m_1\,dm}{r^2}.$$

Kako je štap homogen, važi

$$dm = \frac{d\theta}{\pi}m \Rightarrow dF = \frac{\gamma}{\pi}\frac{m_1 m}{r^2}d\theta.$$

Ukupna sila se može naći sumiranjem sila svih elementarnih delova polukruga (od onog krajnje desnog, kome odgovara ugao $\theta = 0$, do onog krajnje levog, kome odgovara ugao $\theta = \pi$). Ako se elementarna sila dF razloži na komponente u pravcu x i y ose, može se ustanoviti da će se iz razloga

simetrije komponente dF_x poništiti (svaki elementarni deo ima simetričan deo koji kuglicu privlači identičnom silom dF_y, a suprotnom silom dF_x). Kako je slika simetrična i važi

$$dF_y = dF\sin\theta,$$

za intenzitet ukupne sile F, koja deluje u smeru y-ose, dobija se

$$F = \int\limits_0^{\pi} dF\sin\theta = 2\int\limits_0^{\pi/2} dF\sin\theta = \frac{2\gamma}{\pi}\frac{m_1 m}{r^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta.$$

Konačno se dobija

$$F = \frac{2\gamma}{\pi}\frac{m_1 m}{r^2}\cos\theta\Big|_{\pi/2}^{0} = \frac{2\gamma}{\pi}\frac{m_1 m}{r^2} = 10.2\cdot 10^{-12}\,N.$$

Zadatak 5

a) Na kolikoj će visini iznad Zemljine površine ubrzanje Zemljine teže imati četvrtinu one vrednosti koju ima na površini Zemlje?

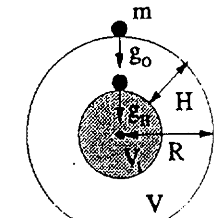
b) Odrediti zavisnost ubrzanja Zemljine teže od dubine H ispod površine Zemlje. Gustinu Zemlje smatrati konstantnom. Zanemariti privlačenje od strane sloja Zemlje iznad tela. Poluprečnik Zemlje je $R = 6370\,km$.

Rešenje

Neka je g_o ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje. Dakle, gravitaciona sila F_g na površini Zemlje telu mase m saopštava ubrzanje g_o, pa po drugom Njutnovom zakonu važi

$$mg_o = F_g \Leftrightarrow mg_o = \gamma\frac{mM}{R^2} \Rightarrow g_o = \gamma\frac{M}{R^2}. \qquad (2.80)$$

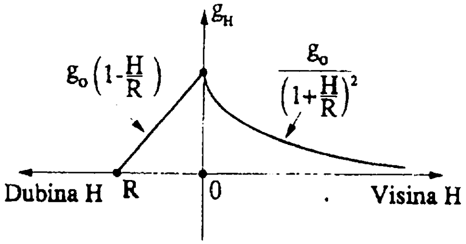
a) Ako se sa g_H obeleži ubrzanje Zemljine teže na visini H od površine Zemlje, može se napisati



$$mg_H = \gamma\frac{mM}{(R+H)^2} \Rightarrow g_H = \gamma\frac{M}{(R+H)^2}. \qquad (2.81)$$

Iz količnika izraza (2.81) i (2.80) dobija se zavisnost

$$g_H = \frac{R^2}{(R+H)^2}g_o = \frac{g_o}{\left(1+\frac{H}{R}\right)^2}. \qquad (2.82)$$



Dakle, ubrzanje Zemljine teže opada sa rastojanjem od Zemlje po zakonu (2.82) i teoretski postaje jednako nuli tek u beskonačnosti. Za male visine iznad površine Zemlje ($H \ll R$) dobija se $g_H \approx g_o$ i za te visine se može smatrati da je ubrzanje Zemljine teže konstantno.

Za konkretan slučaj, zamenom $g_o = 4g_H$ u (2.82) dobija se da će ubrzanje Zemljine teže opasti na četvrtinu g_o na visini $H = R = 6370\,km$.

b) Neka je u ovom slučaju g_H ubrzanje Zemljine teže na dubini H ispod površine Zemlje, a M_1 masa dela Zemljine lopte kome odgovara poluprečnik $R-H$ i zapremina V_1. Važi

$$mg_H = \gamma\frac{mM_1}{(R-H)^2} \Rightarrow g_H = \gamma\frac{M_1}{(R-H)^2}. \tag{2.83}$$

Neka je $\rho = M/V$ gustina Zemlje (V - zapremina Zemlje). Za M_1 se dobija

$$M_1 = \rho V_1 = \frac{M}{V}V_1 = \frac{(R-H)^3}{R^3}M = \frac{(R-H)^3}{R^3}M.$$

Zamenom ovog izraza u (2.83) i imajući u vidu (2.80) dobija se

$$g_H = \gamma\frac{R-H}{R^3}M = \gamma\frac{M}{R^2}\frac{R-H}{R} = g_o\left(1-\frac{H}{R}\right). \tag{2.84}$$

Ubrzanje Zemljine teže opada po linearnom zakonu (2.84) sa dubinom H i postaje jednako nuli u centru Zemlje. Ova zavisnost, kao i zavisnost (2.82), prikazana je na slici.

Zadatak 6

a) Izvesti izraz za prvu kosmičku brzinu i izračunati njenu vrednost.
b) Izvesti izraz za drugu kosmičku brzinu i izračunati njenu vrednost.
c) Koliki je poluprečnik putanje stacionarnog Zemljinog satelita koji se kreće po kružnoj putanji?

Ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje iznosi $g_o = 9.81\,ms^{-2}$, poluprečnik Zemlje $R = 6370\,km$, a gravitaciona konstanta $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$. U zadatku pod a) i b) smatrati da se telo lansira sa visine koja je mnogo manja od poluprečnika Zemlje.

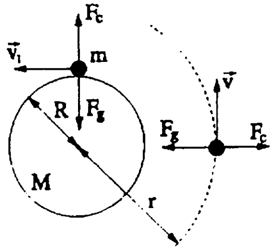
Rešenje

Za proizvoljno telo mase m koje se nalazi na površini Zemlje važi (videti rešenje prethodnog zadatka)

$$F_g = mg_o \Leftrightarrow \gamma\frac{mM}{R^2} = mg_o \Rightarrow g_o = \gamma\frac{M}{R^2}, \tag{2.85}$$

gde je F_g gravitaciona sila, a g_o ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje. Iz gornjeg izraza se dobija masa Zemlje M: $M = g_oR^2/\gamma = 5.97\cdot 10^{24}\,kg$.

a) Prva kosmička brzina v_1 se definiše kao najmanja brzina koju treba saopštiti telu sa neke visine iznad Zemlje u horizontalnom pravcu da bi se ono kretalo po kružnoj putanji, tj. postalo veštački satelit Zemlje. Da bi se telo kretalo po kružnoj putanji neposredno iznad Zemlje potrebno je da bude zadovoljen uslov jednakosti centrifugalne sile F_c i gravitacione sile F_g koje deluju na njega, tj.



$$F_c = F_g \Leftrightarrow \frac{mv_1^2}{R} = \gamma\frac{mM}{R^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}}.$$

Zamenom (2.85) u ovaj izraz, za prvu kosmičku brzinu se dobija

$$v_1 = \sqrt{g_oR} = 7.9\,kms^{-1}.$$

b) Druga kosmička brzina v_2 je najmanja brzina koju treba saopštiti telu da bi se ono udaljilo iz Zemljinog gravitacionog polja, tj. postalo veštački satelit Sunca. Uslov za ovo je da kinetička energija tela bude veća ili u graničnom slučaju jednaka radu za premeštanje tela sa površine Zemlje u beskonačnost (praktično na rastojanje na kojem se uticaj gravitacionog polja Zemlje može zanemariti)

$$\frac{mv^2}{2} = \int_R^\infty F_g dr = \int_R^\infty \gamma\frac{mM}{r^2}dr = \gamma mM\frac{1}{r}\Big|_\infty^R = \gamma\frac{mM}{R}.$$

Iz ovog izraza se posle sredjivanja i zamene (2.85) dobija:

$$v_2 = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R^2} R} = \sqrt{2 g_o R} = 11.2\, kms^{-1}.$$

c) Stacionarni satelit je satelit koji se kreće sinhrono sa Zemljom, tj. uvek se nalazi iznad odredjene tačke na površini Zemlje. Stoga je njegova ugaona brzina ω jednaka ugaonoj brzini Zemlje ω_z

$$\omega = \omega_z = \frac{2\pi}{T_z}, \tag{2.86}$$

gde je $T_z = 1$ dan $= 86400\, s$ period obrtanja Zemlje.

Neka je poluprečnik kružne putanje satelita r. Da bi se kretao po stabilnoj kružnoj putanji ovog poluprečnika, satelit mora imati brzinu v pri kojoj je ispunjen uslov

$$F_c = F_g \Leftrightarrow \frac{mv^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = \omega^2 r^2 = \gamma \frac{M}{r} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\gamma \frac{M}{\omega^2}}.$$

Zamenom (2.86) u ovaj izraz dobija se

$$r = \sqrt[3]{\gamma \frac{M}{\omega_z^2}} = \sqrt[3]{\gamma \frac{M T_z^2}{4\pi^2}} = 4241\, km.$$

Zadatak 7

Projektil poleće sa površine Zemlje vertikalno naviše, početnom brzinom $v_o = 1\, kms^{-1}$. Odrediti maksimalnu visinu H koju će dostići projektil. Dat je poluprečnik Zemlje $R = 6370\, km$ i ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje $g_o = 9.81\, ms^{-1}$.

Rešenje

Na maksimalnoj visini H brzina projektila je jednaka nuli i celokupna kinetička energija koja je projektilu saopštena na površini Zemlje utrošena je na rad protiv gravitacione sile

$$\frac{mv_o^2}{2} = \int_R^{R+H} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma m M \frac{1}{r} \Big|_{R+H}^{R} = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right). \tag{2.87}$$

Drugim rečima, kinetička energija je utrošena na promenu, tj. povećanje potencijalne energije ΔE_p u gravitacionom polju, što, naravno, daje isti rezultat

$$\frac{mv_o^2}{2} = \Delta E_p = E_p(R+H) - E_p(H) = -\gamma \frac{mM}{R+H} - \left(-\gamma \frac{mM}{R} \right)$$
$$= \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right).$$

Iz izraza (2.80) se dobija $\gamma M = g_o R^2$, što zamenom u (2.87) daje

$$\frac{v_o^2}{2} = g_o R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right).$$

Odavde se za maksimalnu visinu koju dostiže projektil dobija

$$H = \frac{1}{1/R - v_o^2/(2 g_o R^2)} - R = 50.96\, km.$$

Zadatak 8

Za lansiranje veštačkog Zemljinog satelita mase $m = 8 \cdot 10^5\, kg$ koristi se dvostepena raketa koja izbacuje satelit u stabilnu kružnu orbitu. Odrediti visinu satelita H i rad koji izvrše motori rakete, ako se zna da se rad ravnopravno troši na povećanje kinetičke i potencijalne energije satelita. Masu rakete u odnosu na masu satelita zanemariti. Dat je poluprečnik Zemlje $R = 6370\, km$ i ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje $g_o = 9.81\, ms^{-1}$.

Rešenje

Kinetička i potencijalna energija satelita na površini Zemlje iznose

$$E_{k1} = 0, \quad E_{p1} = -\gamma \frac{mM}{R}.$$

Iz uslova za stabilnu kružnu putanju na visini H (ravnoteža centrifugalne i gravitacione sile) dobija se

$$F_c = F_g \Leftrightarrow \frac{mv_2^2}{R+H} = \gamma \frac{mM}{(R+H)^2} \Rightarrow mv_2^2 = \gamma \frac{mM}{R+H},$$

pa su energije satelita na ovoj visini

$$E_{k2} = \frac{mv_2^2}{2} = \gamma \frac{mM}{2(R+H)}, \quad E_{p2} = -\gamma \frac{mM}{R+H} = -2E_{k2}.$$

Prvi stepen rakete služi za izbacivanje satelita na visinu H, pri čemu mu se povećava potencijalna energija za ΔE_p, dok drugi stepen rakete tada saopštava satelitu brzinu v_2 potrebnu za stabilnu kružnu putanju, povećavajući mu kinetičku energiju za ΔE_k. Iz uslova zadatka je

$$\Delta E_k = \Delta E_p \Leftrightarrow E_{k2} - E_{k1} = E_{p2} - E_{p1} \Leftrightarrow E_{k2} = -2E_{k2} - E_{p1} \Leftrightarrow 3E_{k2} = -E_{p1},$$

odakle se zamenom izraza za energije nalazi $H = R/2 = 3185\,km$.

Ukupan rad motora rakete iznosi

$$A = \Delta E_k + \Delta E_p = 2\Delta E_k = 2E_{k2} = \gamma\frac{mM}{(R+H)},$$

što posle zamene $H = R/2$ i $\gamma M = g_o R^2$ daje

$$A = \frac{2}{3} m g_o R = 3.33 \cdot 10^{13}\, J.$$

3. Teorija relativnosti

3.1 Teorija

U klasičnoj mehanici, veza izmedju koordinata u dva sistema referencije (sistem S sa koordinatama x,y,z koji uslovno miruje i sistem S' sa koordinatama x',y',z' koji se u odnosu na sistem S kreće uniformno pravolinijski duž apscisnih osa, konstantnom brzinom v) ostvarena je preko Galilejevih transformacija:

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'.$$

U klasičnoj mehanici se pretpostavlja da proticanje vremena ne zavisi od relativnog kretanja referentnog sistema, pa se gornjim transformacijama može pridodati i jednakost

$$t = t',$$

gde je t vreme mereno u nepokretnom sistemu S, a t' vreme mereno u pokretnom sistemu gde se dogadjaj odigrava.

Pravilo slaganja brzina u klasičnoj mehanici se može izraziti u obliku

$$u = v + v',$$

gde je v brzina tela merena u sistemu S, a v' brzina tela merena u sistemu S'.

Ubrzanja tela u sistemima S i S' su jednaka, tj.

$$a = a'.$$

Ova jednakost dokazuje princip relativnosti u mehanici koji se može iskazati na sledeći način: pri prelazu iz jednog sistema referencije u drugi, zakoni dinamike se ne menjaju, tj. invarijantni su u odnosu na transformacije koordinata. Prema tome, zakoni klasične mehanike invarijantni su prema Galilejevim transformacijma.

Prema Ajnštajnu, ne postoji referentni sistem u prostoru koji bi bio u apsolutnom miru, a nema ni apsolutnog vremena. Naime, ovi sistemi su medjusobno ekvivalentni i vreme u njima različito teče. Sa ovakvim shvatanjem vremena i prostora Ajnštajn je uveo dva postulata koji čine osnovu specijalne teorije relativnosti. Ti postulati glase:

1. Svi inercijalni sistemi su medjusobno ekvivalentni, ili svi prirodni zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima.

2. Brzina svetlosti u vakuumu je ista u svim inercijalnim sistemima referencije, bez obzira da li se izvor svetlosti kreće ili miruje.

Umesto Galilejevih transformacija Ajnštajn je primenio Lorencove transformacije. Primena ovih transformacija za slučaj koji je korišćen za Galilejeve transformacije daje:

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = \frac{t' + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

gde je c brzina svetlosti.

Kontrakcija tela u pravcu kretanja na osnovu Lorencovih transformacija može se izraziti na sledeći način:

$$l = l_o\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

gde je l_o sopstvena dužina tela u pravcu kretanja (dužina tela merena u sistemu S' u kojem se ono nalazi), a l dužina tela merenog iz sistema S.

Dilatacija vremena je data sledećom relacijom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

gde je Δt trajanje dogadjaja merenog iz sistema S, a $\Delta t'$ trajanje istog dogadjaja merenog iz sistema S' u kome se dogadjaj odigrava.

Pravilo slaganja brzina po relativističkoj mehanici može se izraziti na sledeći način:

$$u = \frac{v' + v}{1 + v'v/c^2},$$

gde je v' brzina materijalne tačke u sistemu S', a v brzina materijalne tačke u sistemu S.

Veza izmedju mase tela u kretanju m i mase tela u miru m_o data je sledećom relacijom:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Relativistički izrazi za silu F i impuls K dati su sledećim relacijama:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(\frac{m_o v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}) = \frac{dK}{dt},$$

$$K = mv = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Relativistički izraz za kinetičku energiju E_k je

$$E_k = m_o c^2(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1),$$

a za ukupnu energiju

$$E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

3.2 Zadaci

Zadatak 1

Raketa se kreće brzinom $v = 0.99\,c$ u odnosu na nepokretnog posmatrača na Zemlji (c je brzina svetlosti u vakuumu). Kako se menjaju linearne dimenzije rakete i njena gustina merene iz nepokretnog sistema? Koliko vremena protekne po časovniku u nepokretnom sistemu, ako je po časovniku koji se nalazi u raketi (u pokretnom sistemu) protekla $t' = 1\,godina$.

Rešenje

Ako se raketa kreće uniformnim kretanjem, njena dimenzija l duž linije kretanja, merena iz nepokretnog sistema koji je vezan za Zemlju je

$$l = l_o\sqrt{1 - v^2/c^2} = l_o\sqrt{1 - (0.99c/c)^2} = 0.14 l_o,$$

gde je l_o sopstvena dužina rakete (dužina rakete merena u sistemu koji je vezan za raketu).

Gustina materijala rakete merena iz sistema koji je vezan za Zemlju je

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_o}{lS\sqrt{1 - (0.99)^2}},$$

gde je V zapremina rakete, S površina poprečnog preseka rakete, normalna na liniju kretanja. Pošto se dimenzije rakete normalne na liniju kretanja ne menjaju, to je

$$V = l_o S\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Tako se za gustinu dobija sledeći izraz:

$$\rho = \frac{m_o}{S\sqrt{1 - v^2/c^2} l_o\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\rho_o}{1 - (0.99)^2} = 50.25\,\rho_o,$$

gde je ρ_o sopstvena gustina materijala.

Vreme leta rakete mereno iz sistema koji je vezan za Zemlju je

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} = 7.1\,godina.$$

Zadatak 2

Za koliko procenata se promeni dimenzija protona i elektrona u pravcu njihovog kretanja prilikom ubrzavanja potencijalnom razlikom $U = 1\,MV$? Masa protona u miru je $m_{po} = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$, masa elektrona u miru $m_{eo} = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$ i brzina svetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Kinetička energija obe čestice posle ubrzavanja potencijalnom razlikom od $1\,MV$ je $E_k = 1\,MeV$. Po relativističkoj formuli kinetička energija je

$$E_k = m_o c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) = ZeU, \tag{3.1}$$

gde je e elementarno naelektrisanje i Z atomski broj. Za slučaj protona i elektrona $Z = 1$. Na osnovu izraza (3.1) sledi

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{m_o c^2}{eU + m_o c^2}. \tag{3.2}$$

Pošto se tokom kretanja menja samo dimenzija u pravcu kretanja, treba koristiti izraz za kontrakciju dužine

$$l = l_o\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) za promenu dimenzije u pravcu kretanja dobija se sledeći izraz:

$$\delta l = \frac{l_o - l}{l_o} = \frac{\Delta l}{l_o} = 1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{eU}{eU + m_o c^2}.$$

Zamenom brojnih vrednosti u ovaj izraz, za promenu dimenzije protona se dobija

$$\delta_{lp} = \left(\frac{\Delta l}{l_o}\right)_p = 0.1\%,$$

a elektrona

$$\delta_{le} = \left(\frac{\Delta l}{l_o}\right)_e = 66.1\%$$

Zadatak 3

Dve rakete kreću se jedna drugoj u susret brzinama $v_1 = v_2 = 3c/4$ u odnosu na nepokretnog posmatrača, gde je c brzina svetlosti u vakuumu. Naći brzinu u približavanja raketa po klasičnoj i relativističkoj formuli slaganja brzina.

Rešenje

Po klasičnoj formuli je

$$u = v_1 + v_2 = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c = \frac{3}{2}c,$$

što je u suprotnosti sa postulatom teorije relativnosti, na osnovu koga brzina bilo kog tela ne može biti veća od brzine svetlostu u vakuumu.

Po relativističkoj formuli o slaganju brzina je

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} = 0.96\,c.$$

Zadatak 4

Koliki rad treba uložiti da bi se elektronu čija je masa u miru $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$ povećala brzina od $v_1 = 0.2\,c$ na $v_2 = 0.7\,c$ ($c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$ je brzina svetlosti u vakuumu). Uporediti dobijeni rezultat sa rezultatom koji bi se dobio prema klasičnoj fizici.

Rešenje

Rad A uložen na povećanje brzine elektrona jednak je povećanju (priraštaju) njegove kinetičke energije ΔE, pa je prema teoriji relativnosti

$$A = \Delta E_k = (m_2c^2 - m_oc^2) - (m_1c^2 - m_oc^2) = m_2c^2 - m_1c^2,$$

gde su m_1 i m_2 mase elektrona pri brzinama v_1 i v_2, redom. Korišćenjem izraza koji povezuje masu tela u kretanju i masu tela u miru, dobija se

$$A = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{m_oc^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = 3.11 \cdot 10^{-14}\,J.$$

Prema klasičnoj fizici uloženi rad je

$$A' = \Delta E_k' = \frac{m_ov_2^2}{2} - \frac{m_ov_1^2}{2} = 1.84 \cdot 10^{-14}\,J.$$

Zadatak 5

Izvesti relativistički izraz za kinetičku energiju tela koje se kreće brzinom v.

Rešenje

Poznato je da se elementarni rad koji izvrši sila F delujući na neko telo prikazuje skalarnim proizvodom vektora sile $\vec{F}$ i vektora pomeranja $d\vec{s}$, koji pri tom telo izvrši. Ako sila deluje po pravcu pomeranja tela, izvršeni rad je

$$dA = Fds.$$

Ako se vrši rad nad telom, onda je taj elementarni rad jednak povećanju (promeni) kinetičke energije tela dE_k

$$dE_k = Fds. \tag{3.4}$$

Po drugom Njutnovom zakonu je $F = d(mv)/dt$, pa se zamenom u (3.4) dobija

$$dE_k = \frac{d(mv)}{dt}ds = d(mv)v, \tag{3.5}$$

gde je $v = ds/dt$ brzina tela. Prema Ajnštajnu, masa tela m čija je brzina v, data je sledećim izrazom:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{3.6}$$

gde je m_o masa tela u miru. Zamenom (3.6) u (3.5) dobija se sledeći izraz za priraštaj kinetičke energije

$$dE_k = d(\frac{m_ov}{\sqrt{1 - v^2/c^2}})v.$$

Ukupna energija tela je

$$E_k = \int_o^v d(\frac{m_ov}{\sqrt{1 - v^2/c^2}})v. \tag{3.7}$$

Ovaj integral je oblika

$$\int xdy = xy - \int ydx,$$

gde je

$$x = v; \qquad dy = d(\frac{m_ov}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}).$$

Prema tome, izraz (3.7) se može napisati u sledećem obliku:

$$E_k = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_o v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dv. \qquad (3.8)$$

Potrebno je rešiti integral u izrazu (3.8):

$$I = \int_0^v \frac{m_o v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \int_0^v \frac{m_o v c dv}{\sqrt{c^2-v^2}} \qquad (3.9)$$

Uvodjenjem smene $c^2 - v^2 = t$; $vdv = -dt/2$, integral (3.9) dobija sledeći oblik:

$$I = -\frac{m_o c}{2} \int_{c^2}^{c^2-v^2} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

ili, posle smene granica i sredjivanja:

$$I = -m_o c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} + m_o c^2. \qquad (3.10)$$

Zamenom (3.10) u (3.8) i sredjivanjem za, kinetičku energiju se dobija sledeći izraz:

$$E_k = m_o c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1).$$

Zadatak 6

Elektron, čija se početna brzina može zanemariti, kreće se u homogenom električnom polju jačine $E = 1MVm^{-1}$. Koliku će energiju imati elektron posle vremena $t = 10ns$ od početka kretanja? Masa elektrona u miru je $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$, brzina svetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$ i naelektrisanje elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$.

Rešenje

Prema osnovnoj relaciji relativističke dinamike je $dK/dt = F$, tj.

$$\frac{d}{dt}(\frac{m_o v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}) = eE,$$

ili

$$d(\frac{m_o v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}) = eEdt,$$

odakle je

$$\frac{m_o v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = eEt + C. \qquad (3.11)$$

Konstanta C se može odrediti iz početnih uslova, tj. za $t = 0$ i $v = 0$, odakle je i $C = 0$.

Iz izraza (3.11) za brzinu v elektrona dobija se sledeći izraz:

$$v = \frac{eEt/m_o}{\sqrt{1+[eEt/(m_o c)]^2}}. \qquad (3.12)$$

S druge strane, izraz za relativističku kinetičku energiju je

$$E_k = m_o c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1). \qquad (3.13)$$

Zamenom v iz (3.12) u (3.13) dobija se

$$E_k = m_o c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{m_o c}\right)^2} - 1\right] = 2.5\,MeV.$$

Zadatak 7

Dokazati da pri malim brzinama tela izraz za relativističku kinetičku energiju prelazi u izraz za kinetičku energiju koji važi u klasičnoj mehanici.

Rešenje

Izraz za relativističku kinetičku energiju je

$$E_k = m_o c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1).$$

Razlaganjem izraza $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ po formuli Njutnovog binoma dobija se

$$(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + ...$$

Kada se odbace članovi većeg stepena od v^2/c^2 zbog toga što je $v \ll c$, za kinetičku energiju se dobija sledeći izraz:

$$E_k \approx m_o c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1) = \frac{m_o v^2}{2}.$$

Ovo je poznati izraz za kinetičku energiju u klasičnoj mehanici.

Zadatak 8
Uzimajući u obzir relativističke efekte odrediti brzinu protona i elektrona koji su ubrzani potencijalnom razlikom $U = 1\,MV$. Masa protona u miru je $m_{po} = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$, masa elektona $m_{eo} = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$, naelektrisanje protona i elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$ i brzina svetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Kinetička energija protona i elektrona ubrzanih potencijalnom razlikom U je $E_k = eU$. S druge strane, prema teoriji relativnosti, kinetička energija je data sledećom relacijom:

$$E_k = m_o c^2 (\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1) = eU,$$

odakle se za brzinu protona dobija

$$v_p = c\sqrt{1 - (\frac{m_{po}c^2}{eU + m_{po}c^2})^2} = 1.38 \cdot 10^7\,ms^{-1},$$

a elektrona

$$v_e = c\sqrt{1 - (\frac{m_{eo}c^2}{eU + m_{eo}c^2})^2} = 2.82 \cdot 10^8\,ms^{-1}.$$

Zadatak 9
Akcelerator ubrzava protone do kinetičke energije $E_k = 7\,GeV$. Odrediti brzinu protona i povećanje njegove mase. Masa protona u miru je $m_{po} = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$, a brzina svetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Iz izraza za kinetičku energiju

$$E_k = m_{po}c^2(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1)$$

odredjuje se brzina v, tj.

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_{op}^2 c^4}{(E_k + m_{op}c^2)^2}} = c\sqrt{1 - 0.014} \approx 2.98 \cdot 10^8\,ms^{-1}.$$

Iz relacije za ukupnu energiju

$$m_p c^2 = m_{op}c^2 + E_k$$

dobija se da je

$$\frac{m_p}{m_{op}} = 1 + \frac{E_k}{m_{op}c^2} \Rightarrow \frac{m_p}{m_{op}} = 8.45.$$

Zadatak 10
Čestice sa naelektrisanjima $Z_1 e$ i $Z_2 e$ i masama u miru m_{o1} i m_{o2} ubrzavaju se istom potencijalnom razlikom, posle čega masa čestice 1 dostiže $1/k$ mase čestice 2. Odrediti razliku potencijala.

Rešenje

Ukupne energije čestica 1 i 2 su:

$$E_1 = m_1 c^2 = m_{o1}c^2 + E_{k1} = m_{o1}c^2 + Z_1 eU$$
$$E_2 = m_2 c^2 = m_{o2}c^2 + E_{k2} = m_{o2}c^2 + Z_2 eU$$

$$E_1 = m_1 c^2; \qquad E_2 = m_2 c^2.$$

Pošto je $m_1 = m_2/k$, to je $E_1 = E_2/k$, ili

$$m_{o1}c^2 + Z_1 eU = \frac{1}{k}(m_{o2}c^2 + Z_2 eU),$$

odakle se za potencijalnu razliku dobija sledeći izraz:

$$U = \frac{(m_{o2} - k m_{o1})c^2}{e(kZ_1 - Z_2)},$$

(pri uslovu da je $k \neq Z_2/Z_1$).

4. Mehanika fluida

4.1 Statika fluida

4.1.1 Teorija

Pritisak izazvan spolja na ma kom mestu neke tečnosti zatvorene sa svih strana prenosi se u njoj podjednako u svim pravcima. Ovo je definicija Paskalovog zakona i matematički se može izraziti na sledeći način:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_n.$$

Hidrostatički pritisak p za slučaj zatvorenog i otvorenog suda je, redom

$$p = \rho g h; \qquad p = p_a + \rho g h,$$

gde je ρ gustina tečnosti, g ubrzanje Zemljine teže, h visina stuba tečnosti i p_a atmosferski pritisak.

Na svako telo potopljeno u tečnost deluje sila potiska F_p koja je jednaka težini tečnosti istisnute tim telom. Ovo je definicija Arhimedovog zakona i za slučaj tela oblika cilindra matematički se može izraziti na sledeći način:

$$F_p = \rho g h S,$$

gde je ρ gustina tečnosti, h visina cilindra i S površina osnove cilindra. Proizvod $\rho g V$ brojno je jednak težini tečnosti koja zauzima zapreminu jednaku zapremini cilindra $V = hS$. Prema tome, sila potiska koja deluje na cilindar je po intenzitetu jednaka težini tečnosti koja je istisnuta cilindrom.

Konstanta površinskog napona γ je

$$\gamma = \frac{dA}{dS},$$

gde je dA rad sile površinskog napona, a dS promena slobodne površine tečnosti.

Visina tečnosti h u kapilari može se iaraziti na sledeći način:

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r},$$

gde je θ ugao kvašenja i r poluprečnik kapilare.

Razlika atmosferskog pritiska p_a i pritiska ispod meniskusa tečnosti u kapilari je

$$p_a - p = \frac{2\gamma\cos\theta}{r}.$$

4.1.2 Zadaci

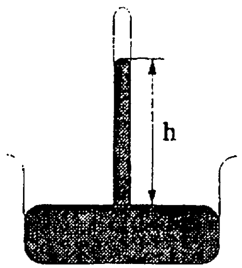
Zadatak 1

Barometarska cev ispunjena živom zaronjena je svojim otvorenim krajem u sud sa živom. Unutrašnji prečnik cevi je $R = 2\,mm$. Razlika nivoa žive u cevi i sudu je $h = 760\,mm$. Koliki je atmosferski pritisak p_a? Koeficijent površinskog napona žive je $\gamma = 0.5\,Nm^{-1}$, gustina žive je $\rho = 13.6\cdot10^3\,kgm^{-3}$, a ubrzanje Zemljine teže $g = 9.81\,ms^{-2}$.

Rešenje

Atmosferski pritisak uravnotežava se sumom hidrostatičkog pritiska p_1 žive nivoa h i pritiska usled površinskog napona p_2, tj. $p_a = p_1 + p_2$, gde je $p_1 = \rho g h$, a $p_2 = 4\gamma/R$, odakle sledi da je

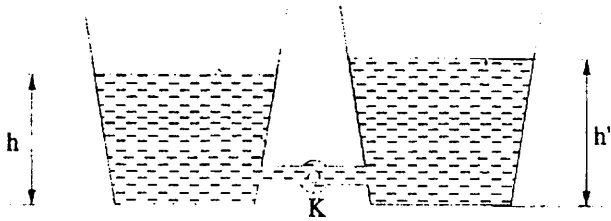
$$p_a = \rho g h + 2\gamma/R \Rightarrow p_a = 101.9\,kPa.$$



Zadatak 2

U spojenim sudovima, oblika zarubljene kupe i jednakim po dimenzijama, nalazi se voda jednakih nivoa h. Pri zatvorenoj slavini K voda u desnom sudu je zagrevana, tako da se njen nivo malo povisio. Uz pretpostavku da je promena zapremine suda pri zagrevanju zanemarljiva odrediti kako će se ponašati voda pri odvrtanju slavine? Početna gustina vode je ρ.

Rešenje



Kada su nivoi vode u oba suda bili jednaki, hidrostatički pritisci u njima su, takodje, bili jednaki i iznosili su $p = \rho g h$. Posle zagrevanja vode u desnom sudu, hidrostatički pritisak u njemu se promenio na vrednost $p' = \rho' g h'$. Odnos ovih pritisaka je: $p'/p = \rho' h'/\rho h$. S obzirom da je odnos gustina vode $\rho'/\rho = V/V'$, to je odnos pritisaka

$$\frac{p'}{p} = \frac{V h'}{V' h}.$$

Zapremine vode u levom i desnom sudu jednake su zapreminama odgovarajućih zarubljenih kupa, tj.

$$V = \frac{1}{3}h(S_o + S + \sqrt{S_o S}); \quad V' = \frac{1}{3}h'(S_o + S_1 + \sqrt{S_o S_1}),$$

(ovde je S_o površina dna suda, a S i S_1 slobodne površine tečnosti), tako da odnos pritisaka postaje

$$\frac{p'}{p} = \frac{S_o + S_1 + \sqrt{S_o S}}{S_o + S_1 + \sqrt{S_o S_1}}.$$

Kako je $S < S_1$, sledi da je $p' < p$, što znači da će voda, kada se slavina odvrti, poteći iz levog u desni sud.

Zadatak 3

U kom odnosu moraju biti zapremine vazduha V_1 i ugljendioksida V_2 u smeši, da bi u njoj plivao gumeni balon napunjen vazduhom? Zapremina balona je $V = 5\,l$, njegova težina bez vazduha $Q = 1.52\cdot10^{-2}\,N$, specifična težina vazduha pri normalnim uslovima $\sigma_1 = 12.9\,Nm^{-3}$, a specifična težina ugljendioksida $\sigma_2 = 19.8\,Nm^{-3}$.

Rešenje

Težina balona ispunjenog vazduhom Q_b jednaka je zbiru njegove sopstvene težine Q i težine vazduha koji ga ispunjava $Q_v = \sigma_1 V$, tj. $Q_b = Q + \sigma_1 V$. Kada se balon potpuno potopi u smešu vazduha i ugljendioksida, istisne je u zapremini jednakoj njegovoj zapremini (Arhimedov zakon), pri čemu se težina istisnute smeše Q_s (koja je jednaka sili potiska) uravnotežava sa težinom balona, tj. $Q_s = Q_b$. Ako je V_1 zapremina vazduha u smeši, a V_2 zapremina ugljendioksida, onda je

$$\sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 = \sigma_1 V + Q.$$

Kako je $V_2 = V - V_1$, to je

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{79.21}{100}.$$

Zadatak 4

Težina pozlaćenog lanca merenog u vazduhu je $G_1 = 0.24\,N$, a u čistoj vodi $G_2 = 0.22\,N$. Lanac je napravljen od legure zlata i srebra. Odrediti težinu zlata x i težinu srebra y koju sadrži lanac ako je specifična težina zlata $\sigma_1 = 0.19\,Ncm^{-3}$, a specifična težina srebra $\sigma_2 = 0.1\,Ncm^{-3}$. Specifična težina vode je $\sigma_o = 9800\,Nm^{-3}$.

Rešenje

Težina lanca G_1 merena u vazduhu je $G_1 = x + y$, dok je prividan gubitak težine lanca pri potapanju u vodu jednak sili potiska F_p, tj. $G_1 - G_2 = F_p = V\sigma_o$, odakle je zapremina lanca (zapremina istisnute vode) $V = (G_1 - G_2)/\sigma_o$. Zapreminu celog lanca V čine zapremina zlata $V_1 = x/\sigma_1$ i zapremina srebra $V_2 = y/\sigma_2$, tj. $V = V_1 + V_2$, pa je

$$\frac{G_1 - G_2}{\sigma_o} = \frac{x}{\sigma_1} + \frac{y}{\sigma_2} = \frac{x}{\sigma_1} + \frac{G_1 - x}{\sigma_2},$$

odakle se zamenom brojnih vrednosti dobija da je

$$x = 76 \cdot 10^{-3}\,N; \qquad y = 164 \cdot 10^{-3}\,N.$$

Zadatak 5

Drvena kocka stranice a i gustine $\rho = 800\,kgm^{-3}$ pliva po vodi u nekoj posudi. Iznad vode lagano se naliva ulje, sve do gornje strane kocke, tako da se ona nadje u nivou ulja. Ako je gustina ulja $\rho_1 = 600\,kgm^{-3}$, a gustina vode $\rho_o = 1000\,kgm^{-3}$, odrediti smer i pomeranje Δh kocke usled nalivanja ulja.

Rešenje

Kada kocka pliva po vodi, zaronjena do neke visine x, u stanju ravnoteže njena težina Q jednaka je sili potiska F_p tj.,

$$\rho g a S = \rho_o g x S \Rightarrow x = (\rho/\rho_o)a = 0.8a,$$

gde je S površina strane kocke. Kada se preko vode nalije ulje, kocka se pomeri, tako da je u vodi do neke visine y. U ovom slučaju, u stanju ravnoteže, njena težina jednaka je sumi sila potiska vode i ulja: $Q = F_{p1} + F_{p2}$, odnosno,

$$\rho g a S = \rho_o g y S + \rho_1 g(a - y)S \Rightarrow y = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_o - \rho_1}a = 0.5a.$$

Konačno se dobija da je pomeranje kocke usled nalivanja ulja

$$\Delta h = x - y = 0.3a,$$

što znači da se kocka pomera naviše (iz vode).

Zadatak 6

Cisterna sa pravougaonim stranicama napunjena je vodom do visine $h = 3\,m$. Na kojoj visini h_1 se nalazi napadna tačka rezultante sila koje deluju na bočni zid cisterne? Gustina vode je $\rho = 1000\,kgm^{-3}$.

Rešenje

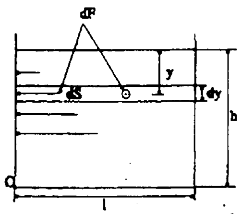
Neka je bočni zid cisterne dužine l, i neka se u njoj nalazi voda do visine h. Na elementarnu površinu dS zida, na dubini y deluje pritisak $p(y)$:

$$p(y) = \frac{dF}{dS} = \rho g y \Rightarrow dF = \rho g y dS.$$

S obzirom da je $dS = ldy$, elementarna sila dF je $dF = \rho gyldy$. Očigledno, sila F je

$$F = \int_0^h dF = \rho gl \int_0^h ydy = \frac{1}{2}\rho glh^2.$$

S druge strane, moment sile M u odnosu na tačku O može se naći sumiranjem momenata dM elementarnih sila dF, tj



$$dM = (h-y)dF = \rho gly(h-y)dy,$$

odnosno

$$M = \rho gl \int_0^h y(h-y)dy.$$

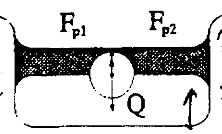
Rešavanjem ovog integrala dobija se $M = (1/6)\rho glh^3$. Medjutim, moment sile može da se piše i kao $M = Fh_1 = (1/2)\rho glh^2h_1$. Znači,

$$(1/6)\rho glh^3 = (1/2)\rho glh^2h_1 \Rightarrow h_1 = h/3 = 1\,m.$$

Zadatak 7
U sud je nasuta živa, a preko nje ulje. Kugla spuštena u ulje pliva tako što joj je jedna polovina zapremine u živi, a druga polovina u ulju. Kolika je gustina ρ materijala od koga je izradjena kugla? Gustina ulja je $\rho_1 = 0.9\,gcm^{-3}$, a gustina žive $\rho_2 = 13.6\,gcm^{-3}$.

Rešenje

Težina kugle $Q = \rho gV$ uravnotežena je sumom sila potiska ulja F_{p1} i žive F_{p2}:



$$Q = F_{p1} + F_{p2} = \rho gV,$$

gde je V zapremina lopte. Kako su sile potiska $F_{p1} = (\rho_1 gV)/2$ i $F_{p2} = (\rho_2 gV)/2$, to je

$$\rho gV = (\rho_1 gV)/2 + (\rho_2 gV)/2 \Rightarrow \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \Rightarrow \rho = 7.25\,gcm^{-3}.$$

Zadatak 8
Stakleni sud napunjen živom ima u vazduhu težinu $G = 647.46 \cdot 10^{-3}\,N$, a potopljen u vodu, težinu $G_o = 551.03 \cdot 10^{-3}\,N$. Kolika je težina žive G_1 u sudu? Specifična težina žive je $\sigma_1 = 133.41 \cdot 10^3\,Nm^{-3}$, specifična težina stakla $\sigma_2 = 25.5 \cdot 10^3\,Nm^{-3}$, a specifična težina vode $\sigma_o = 9.81 \cdot 10^3\,Nm^{-3}$.

Rešenje

Težina G suda ispunjenog živom, merena u vazduhu je

$$G = G_1 + G_2 = V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2.$$

gde je G_1 težina žive, a G_2 težina stakla, V_1 i V_2 su zapremina žive i zapremina stakla od koga je izradjen sud, redom. Potopljen u vodu, sud sa živom trpi potisak, čija je sila jednaka razlici njegovih težina u vazduhu i vodi:

$$F_p = G - G_o = \sigma_o V \Rightarrow V = \frac{F_p}{\sigma_o} = 9.83 \cdot 10^{-6}\,m^3.$$

Zapremina istisnute vode, tj. spoljašnja zapremina potopljenog suda, jednaka je $V = V_1 + V_2$. Težina suda sa živom u vazduhu može da se izrazi kao

$$G = V\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{G - V\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = 6.15 \cdot 10^{-6}\,m^3.$$

Konačno,

$$G_1 = V_1\sigma_1 = (V - V_2)\sigma_1 = 490.95 \cdot 10^{-3}\,N.$$

Zadatak 9
Silom $F = 5\,kN$ deluje se na klip kojim se sabija vertikalni vodeni stub visine $h = 2\,m$ i preseka $S = 16\,cm^2$. Koliki je pritisak p na dno suda? Za koliko

Δh se smanji visina vodenog stuba usled kompresije? Zapreminski modul stišljivosti vode iznosi $E_V = 2.1 \cdot 10^9\, Nm^{-2}$, a njena gustina $\rho = 1\, gcm^{-3}$.

Rešenje

Ukupan pritisak na dno suda p_u jednak je zbiru pritiska p usled dejstva sile F i hidrostatičkog pritiska p_h vodenog stuba visine h:

$$p_u = p + p_h = F/S + \rho g h = 3.14\, MPa.$$

Promena visine vodenog stuba Δh može se odrediti iz izraza za relativnu promenu njegove zapremine usled kompresije:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E_V}\frac{F}{S},$$

gde je $\Delta V = S\Delta h$, a $V = Sh$. Posle sredjivanja dobija se da je

$$\Delta h = \frac{hF}{E_V S} = 2.98 \cdot 10^{-3}\, m.$$

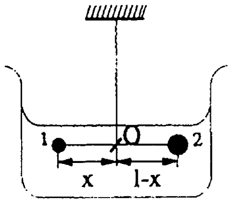
Zadatak 10

Dve kuglice poluprečnika $r_1 = 1.5\, cm$ i $r_2 = 2.5\, cm$, napravljene od materijala čije su gustine $\rho_1 = 11.2\, gcm^{-3}$ i $\rho_2 = 8.9\, gcm^{-3}$, povezane su štapom dužine $l = 40\, cm$, zanemarljive mase. Ceo sistem je potopljen u tečnost gustine $\rho = 1.2\, gcm^{-3}$. U kojoj tački treba obesiti štap da bi bio u ravnotežnom horizontalnom položaju?

Rešenje

Pod pretpostavkom da je štap obešen u tački O, ravnoteža će biti postignuta ako su momenti sila koje deluju na kuglice jednaki. Na kuglicu 1 deluju težina $m_1 g$ i sila potiska F_{p1}, a na kuglicu 2 težina $m_2 g$ i sila potiska F_{p2}, tako da su rezultujuće sile koje deluju na kuglice 1 i 2:

$$F_1 = m_1 g - F_{p1}; \qquad F_2 = m_2 g - F_{p2}.$$



Uslov ravnoteže (jednakost momenata rezultujućih sila) je

$$F_1 x = F_2 (l - x),$$

odnosno

$$g\frac{4}{3}\pi {r_1}^3(\rho_1 - \rho)x = g\frac{4}{3}\pi {r_2}^3(\rho_2 - \rho)(l - x).$$

Odavde se za rastojanje x tačke vešanja od kuglice 1 dobija:

$$x = l[(\frac{r_1}{r_2})^3\frac{\rho_1 - \rho}{\rho_2 - \rho} + 1]^{-1} = 0.78l = 31\, cm.$$

Zadatak 11

Kuglica od ebonita gustine $\rho = 1.2 \cdot 10^3\, kgm^{-3}$ pada sa visine $h = 20\, cm$ u glicerin gustine $\rho_1 = 1.26 \cdot 10^3\, kgm^{-3}$. Odrediti dubinu d do koje će kuglica zaroniti u glicerin. Zanemariti viskoznost glicerina i otpor vazduha.

Rešenje

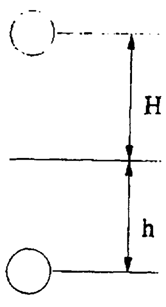
Ako je površina glicerina referentni nivo, na visini h potencijalna energija kuglice je $E_p = mgh$. Pošto dostigne površinu glicerina, kuglica raspolaže kinetičkom energijom E_k koja je, na osnovu zakona održanja energije, jednaka potencijalnoj, tj. $E_k = E_p = mgh$. Kada kuglica otpočne da se kreće kroz glicerin, njena energija se troši na rad protiv sile F_R koja deluje na kuglicu, tj. $F_R = F_p - mg$, gde je $F_p = \rho_1 V g$ sila potiska. Znači,

$$mgh = (\rho_1 V g - mg)d \Rightarrow d = \frac{\rho h}{\rho_1 - \rho} = 4\, m.$$

Zadatak 12

Izračunati maksimalnu dubinu h do koje će dospeti gumena loptica mase $m = 1.047\, g$ i poluprečnika $R = 1\, cm$ ako se pusti da slobodno pada sa visine $H = 120\, cm$ iznad površine vode, bez početne brzine. Gustina vode je $\rho = 1\, gcm^{-3}$. Zanemariti efekte površinskog napona, viskoznosti i otpora vazduha.

Rešenje



Ako se dubina h do koje dospeva kuglica smatra za referentni nivo, onda je njena potencijalna energija E_p na visini H nad površinom vode:

$$E_p = mg(h+H).$$

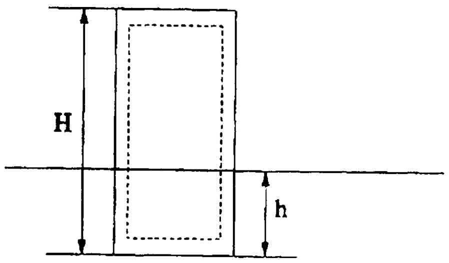
Ova energija kojom raspolaže kuglica troši se na rad A_p protiv sile potiska F_p pri njenom kretanju kroz vodu, tj. $mg(h+H) = A_p$, gde je $A_p = F_p h$, a sila potiska je $F_p = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3$. Znači, izraz za rad postaje $A_p = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 h$, pa je

$$mg(h+H) = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 h \Rightarrow h = H[\frac{\rho}{m}\frac{4}{3}\pi R^3 - 1]^{-1} = 40\,cm.$$

Zadatak 13

Izračunati rad A koji treba da se izvrši pri potpunom potapanju šupljeg metalnog cilindra koji pliva vertikalno na vodi. Smatrati da je unutrašnjost cilindra dobro vakuumirana. Visina cilindra je $H = 2.9\,cm$, debljina zidova cilindra $d = 2\,mm$, gustina metala $\rho = 2.6\,gcm^{-3}$, gustina vode $\rho_o = 1\,gcm^{-3}$, a težina cilindra $Q = \pi/8\,N$.

Rešenje



Prvo treba odrediti spoljašnji poluprečnik R osnove i visinu h cilindra do koje on spontano uranja u vodu. S obzirom da je težina cilindra $Q = \rho g V$, gde je V zapremina metala od koga je izradjen cilindar:

$$V = \pi R^2 H - \pi(R-d)^2(H-2d),$$

odakle se dobija da je $R = 2.5\,cm$, a površina osnove cilindra je

$$S = \pi R^2 = 19.62 \cdot 10^{-4}\,m^2.$$

Pri spontanom uranjanju, po uspostavljanju ravnoteže, težina cilindra jednaka je sili potiska koja deluje na uronjeni deo cilindra (Arhimedov zakon):

$$Q = F_p(h) = \rho_o g \pi R^2 h \Rightarrow h = 2.04\,cm.$$

Za potpuno potapanje cilindra potrebno je izvršiti rad protiv rezultujuće sile $F(x)$, koja se menja sa visinom x potopljenog dela cilindra, s obzirom da se menja i sila potiska:

$$F(x) = F_p(x) - Q = S\rho_o g x - Q.$$

Zato je

$$dA = F(x)dx \Rightarrow A = \int_h^H (S\rho_o g x - Q)dx,$$

ako se referentni nivo veže za dno cilindra. Rešavanjem ovog integrala dobija se

$$A = \frac{S\rho_o g}{2}(H^2 - h^2) - Q(H-h) = 7.1 \cdot 10^{-4}\,J.$$

Zadatak 14

Homogenim drvenim štapom, dužine $l = 5\,m$ i mase $m = 4\,kg$, izmeri se dubina jezera $H = 4.75\,m$. Koliki se rad A pri ovom izvršio ako se štap potapao vertikalno? Gustina drveta je $\rho = 750\,kgm^{-3}$, a gustina vode $\rho_o = 1000\,kgm^{-3}$.

Rešenje

Štap se bez dejstva spoljne sile sam potopi do dubine l_1, gde se uspostavi ravnoteža izmedju njegove težine Q i sile potiska F_p: $Q = F_p$, odnosno

$$\rho l S g = \rho_o l_1 S g \Rightarrow l_1 = (\rho/\rho_o)l = 3.75\,m,$$

gde je S površina poprečnog preseka štapa. Ukupan rad za potapanje štapa do dna jezera je rad protiv rezultujuće sile $F = F_p(x) - Q$ koja deluje na štap na putu od dubine l_1 do H, pri čemu je $F_p(x)$ sila potiska:

$$A = \int_{l_1}^H [F_p(x) - Q]dx = \int_{l_1}^H F_p(x)dx - \int_{l_1}^H Q dx,$$

gde je $F_p(x) = \rho_o g S x$, a $Q = mg$. Na taj način dobija se da je

$$A = \rho_o g S \int_{l_1}^{H} x dx - mg \int_{l_1}^{H} dx,$$

tj.,

$$A = \rho_o g S \frac{H^2 - l_1^2}{2} - mg(H - l_1).$$

Kako je iz $m = \rho S l$ površina poprečnog preseka štapa $S = m/(\rho l)$, to se dobija da je $A = 5.23\,J$.

Zadatak 15

Koliki treba da bude prečnik d kapilarne cevi pa da razlika nivoa vode u njoj i nivoa vode u sudu bude $\Delta h = 0.01\,m$? Konstanta površinskog napona vode je $\gamma = 72 \cdot 10^{-3}\,Nm^{-1}$, a gustina vode $\rho_o = 1\,gcm^{-3}$.

Rešenje

Pod dejstvom sile površinskog napona ($F = 2\pi r\gamma$, gde je r poluprečnik kapilare) u kapilari se obrazuje stub. Nasuprot sili F deluje težina Q stuba, tako da je po uspostavljenoj ravnoteži $Q = F$. Kako je

$$Q = mg = \rho_o V g = \rho_o \frac{\pi}{4} d^2 g \Delta h; \qquad F = 2\pi \frac{d}{2}\gamma,$$

dobija se da je

$$d = \frac{4\gamma}{\rho_o g \Delta h} = 2.94\,mm.$$

4.2 Dinamika fluida

4.2.1 Teorija

Teorema kontinuiteta strujanja (jednačina kontinuiteta) je

$$S_i v_i = const.,$$

gde je S_i površina poprečnog preseka strujne cevi na posmatranom mestu, a v_i brzina fluida kroz taj presek.

Bernulijeva jednačina za odgovarajući presek strujne cevi je

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const.,$$

gde je p spoljašnji pritisak, $\rho v^2/2$ hidrodinamički pritisak i $\rho g h$ visinski pritisak.

Brzina isticanja idealne tečnosti kroz bočni otvor na sudu (Toričelijeva teorema) je

$$v = \sqrt{2gh},$$

gde je h visina stuba tečnosti u sudu. Ovaj izraz važi kada je površina poprečnog preseka suda znatno veća od površine poprečnog preseka otvora.

Sila trenja izmedju dva sloja fluida data je Njutnovom jednačinom:

$$F = \eta S \frac{dv}{dx},$$

gde je η koeficijent dinamičke viskoznosti fluida, S površina dodirnih slojeva fluida i dv/dx gradijent brzine.

Srednja brzina kretanja realnog fluida kroz cev kružnog poprečnog preseka data je sledećim izrazom:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

gde je Δp razlika pritisaka na krajevima cevi, l dužina cevi, R poluprečnik cevi i r rastojanje od ose cevi.

Zapreminski protok fluida kroz cev kružnog poprečnog preseka dat je Poazejevim zakonom:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta p.$$

Štoksova sila trenja pri uniformnom kretanju kuglice poluprečnika r kroz tečnost dinamičkog koeficijenta viskoznosti η data je sledećim izrazom:

$$F = 6\pi\eta r v,$$

gde je v brzina kretanja kuglice.

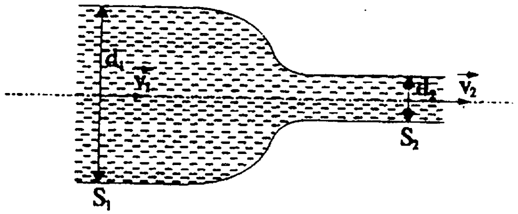
4.2.2 Zadaci

Zadatak 1

Kroz horizontalnu cev prečnika $d_1 = 4\,cm$, koja je na jednom kraju sužena tako da joj prečnik iznosi $d_2 = 2\,cm$, protiče voda. Odrediti brzinu proticanja i pritisak vode u proširenom delu cevi, ako je brzina proticanja vode kroz suženi deo cevi $v_2 = 11\,ms^{-1}$, a pritisak $p_2 = 10^5\,Pa$. Gustina vode je $\rho = 10^3\,kgm^{-3}$.

Rešenje

Iz jednačine kontinuiteta $S_1v_1 = S_2v_2$, odnosno $\pi d_1^2 v_1/4 = \pi d_2^2 v_2/4$ (v_1 brzina proticanja vode kroz prošireni deo cevi, a p_1 pritisak na tom preseku) dobija se da je



$$v_1 = (\frac{d_2}{d_1})^2 v_2 = 2.75\,ms^{-1}.$$

Pritisak se nalazi iz Bernulijeve jednačine. Pošto se radi o horizontalnoj cevi, Bernulijeva jednačina za ova dva preseka je

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

odakle je

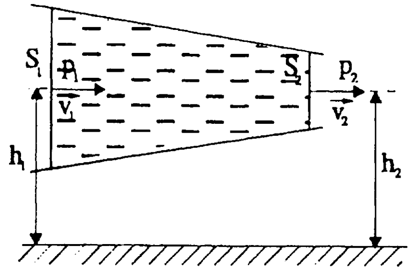
$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = 1.56 \cdot 10^5\,Pa.$$

Zadatak 2

Voda struji kroz horizontalnu cev konusnog oblika. Na jednom mestu presek cevi ima površinu $S_1 = 8\,cm^2$, a na drugom $S_2 = 4\,cm^2$. Razlika pritisaka na tim mestima Δp odgovara hidrostatičkom pritisku vodenog stuba visine $h = 40\,cm$. Koliko litara vode protiče u minutu kroz tu cev? Gustina vode je $\rho = 10^3\,kgm^{-3}$.

Rešenje

Bernulijeva jednačina u ovom slučaju je



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

odakle je

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \rho g h, \quad (4.1)$$

gde su v_1 i v_2 brzine isticanja vode na presecima S_1 i S_2, redom.

Teorema kontinuiteta strujanja za ova dva preseka je

$$S_1v_1 = S_2v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1}v_2 \quad (4.2)$$

Zamenom (4.2) u (4.1) dobija se da je

$$v_2 = \sqrt{\frac{2S_1^2gh}{S_1^2 - S_1^2}}.$$

Količina vode koja protekne u minutu (zapreminski protok) je

$$Q = v_2S_2 = S_2\sqrt{\frac{2S_1^2gh}{S_2^1 - S_2^2}} = 77.64 \cdot 10^{-3}\,m^{-3}min^{-1}$$

Zadatak 3

Površina poprečnog preseka šprica je $S_1 = 1.2\,cm^2$, a površina poprečnog preseka njegovog otvora $S_2 = 1\,mm^2$. Za koje vreme će voda iz šprica isteći, ako na klip deluje sila $F = 5\,N$ i pri tome ga pomeri za $h = 4\,cm$? Špric je u horizontalnom položaju. Stišljivost vode zanemariti. Uzeti da je gustina vode $\rho = 10^3\,kgm^{-3}$.

Rešenje

Iz jednakosti zapremine tečnosti koja ističe iz šprica i zapremine šprica dobija se vreme isticanja vode, tj.

$$S_1 l = S_2 v_2 t \Rightarrow t = \frac{S_1 l}{S_2 v_2}, \tag{4.3}$$

gde je v_2 brzina isticanja vode iz otvora. Brzina v_2 odredjuje se iz Bernulijeve jednačine koja za ovaj slučaj ima oblik

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

gde je $p_1 = F/S_1 + p_a$ pritisak na površini S_1, a $p_2 = p_a$ pritisak na površini S_2 (p_a je atmosferski pritisak). Prema tome, gornja jedančina dobija sledeći oblik:

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{4.4}$$

Iz jednačine kontinuiteta $S_1 v_1 = S_2 v_2$ je $v_1 = S_2 v_2 / S_1$, pa se zamenom u (4.4) dobija

$$\frac{F}{S} + \frac{\rho S_2^2 v_2^2}{2 S_1^2} = \frac{\rho v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 F S_1}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Pošto je $S_1 \gg S_2$, to je

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}}. \tag{4.5}$$

Zamenom (4.5) u (4.3) dobija se da je

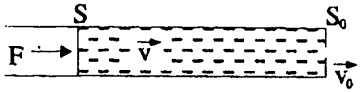
$$t = \frac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}} = 0.53\, s.$$

Zadatak 4

Tečnost gustine ρ i početne zapremine V nalazi se u horizontalnom cilindru. Površina poprečnog preseka cilindra je S, a otvora cilindra S_o. Na klip deluje sila stalnog intenziteta usled čega iz cilindra istekne sva tečnost za vreme t. Koliki rad izvrši ova sila?

Rešenje

Rad sile jednak je promeni kinetičke energije, tj.



$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}. \tag{4.6}$$

Teorema kontinuiteta strujanja pokazuje jednakost zapreminskih protoka, tj. $S_o v_o = S v$, a masa tečnosti koja istekne za vreme t (maseni protok) je

$$m = \rho S_o v_o t. \tag{4.7}$$

Zamenom (4.7) u (4.6) dobija se

$$A = \frac{1}{2}\rho S_o v_o t v^2 - \frac{1}{2}\rho S_o v_o^3 t. \tag{4.8}$$

Pošto je $v = S_o v_o / S$, to se zamenom u (4.8) dobija

$$A = \frac{1}{2}\rho S_o^3 t v_o^3 \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{S_o^2}\right).$$

Zapreminski protok jednak je zapremini protekle tečnosti u vremenu ($Q = V/t$) pa se gornji izraz može napisati u sledećem obliku:

$$A = \frac{\rho V^3}{2t^2}\left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{S_o^2}\right).$$

Zadatak 5

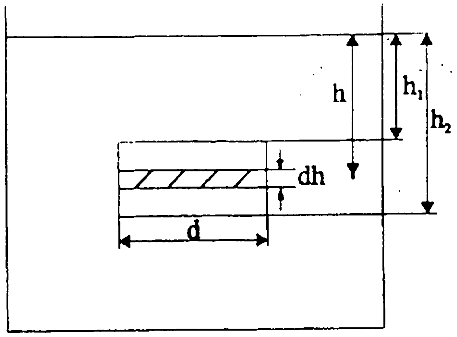
Izračunati zapreminski protok vode iz velikog rezervoara oblika kvadra kroz bočni otvor oblika pravougaonika čija je širina $d = 0.1\, m$. Donja osnova otvora udaljena je od nivoa vode u rezervoaru $h = 2.2\, m$, a gornja $h_1 = 2\, m$. Koeficijent kontrakcije mlaza je $k = 0.64$, a ubrzanje Zemljine teže $g = 9.81\, ms^{-2}$.

Rešenje

Zapreminski protok kroz šrafiranu površinu na slici je $dQ = kvdS$, gde je $dS = ddh$.

Iz Bernulijeve jednačine za ovaj slučaj $p_a + \rho g h = p_a + \rho v^2/2$ je

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow v(h) = \sqrt{2gh}.$$



Ukupan protok je

$$Q = \int dQ = \int_{h_1}^{h_2} kd\sqrt{2gh}dh = \frac{2}{3}kd\sqrt{2g}\left[h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right] = 0.082\,m^3s^{-1}.$$

Zadatak 6

Na dnu otvorenog cilindričnog suda, čija je površina poprečnog preseka S_1, prečnika $D = 0.5\,m$, nalazi se kružni otvor površine poprečnog preseka S_2, prečnika $d = 1\,cm$. Odrediti

a) brzinu opadanja nivoa tečnosti u sudu u momentu kada visina tečnosti nad otvorom iznosi $h = 0.2\,m$,

b) brzinu isticanja tečnosti iz suda, ako se zanemari promena njenog nivoa u sudu. Kontrakciju mlaza ne uzimati u obzir.

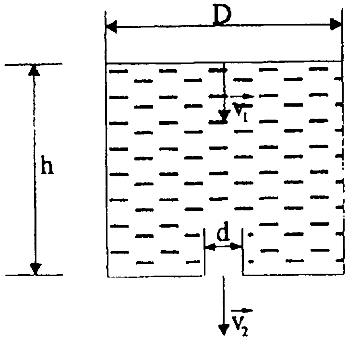
Rešenje

a) Iz Bernulijeve jednačine $p_a + \rho g h + \rho v_1^2/2 = p_a + \rho v_2^2/2$ dobija se

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2. \tag{4.9}$$

Na osnovu teoreme kontinuiteta strujanja je $S_1 v_1 = S_2 v_2$, odnosno

$$\frac{D^2\pi}{4}v_1 = \frac{d^2\pi}{4}v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{D}{d}\right)^2 v_1. \tag{4.10}$$



Zamenom (4.10) u (4.9) za brzinu v_1 se dobija sledeći izraz:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(D/d)^4 - 1}} = 7.92 \cdot 10^{-4}\,ms^{-1}.$$

b) U ovom sučaju je $v_1 = 0$ pa se iz (4.9) dobija da je $v_2 = \sqrt{2gh} = 1.98\,ms^{-1}$.

Zadatak 7

Na dnu otvorenog cilindričnog rezervoara poluprečnika $D = 0.9\,m$ nalazi se otvor kružnog poprečnog preseka poluprečnika $d = 0.2\,m$. Na početku je nivo vode u rezervoaru bio $h_o = 5\,m$ iznad njegovog dna. Naći zavisnost visine nivoa vode od vremena isticanja, merenog od trenutka kada je isticanje počelo i odrediti vreme potrebno da ova voda istekne. Ubrzanje Zemljine teže je $g = 9.81\,ms^{-2}$.

Rešenje

Za neki proizvoljan trenutak t Bernulijeva jednačina i teorema kontinuiteta strujanja fluida imaju sledeće oblike:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}; \quad \frac{D^2\pi}{4}v_1 = \frac{d^2\pi}{4}v_2.$$

Iz ove dve jednačine se dobija da je

$$v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}. \tag{4.11}$$

Vreme t za koje se nivo tečnosti spusti sa visine h_o na h može se naći iz izraza (4.11)

$$v_1 = -\frac{dh}{dt} = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

Integracijom gornjeg izraza dobija se

$$-\int_{h_o}^{h} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{d^2}{\sqrt{D^4 - d^4}}\int_o^t dt,$$

odnosno

$$t = \frac{\sqrt{D^4 - d^4}}{d^2}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h_o} - \sqrt{h}). \qquad (4.12)$$

Vreme potrebno da sva voda istekne može se naći iz graničnih uslova jednačine (4.12), tj. za $h = 0$, $t = \tau$, pa je

$$\tau = \frac{\sqrt{D^4 - d^4}}{d^2}\sqrt{\frac{2h_o}{g}} = 20.42\,s.$$

Zadatak 8

Na brani visine $H = 80\,m$ nalazi se otvor za ispuštanje vode. Otvor je kružnog oblika, poluprečnika $r = 20\,cm$ i nalazi se na visini $h = 40\,m$ od podnožja brane. Pod pretpostavkom da je nivo vode u jezeru za $\Delta h = 1\,m$ niži od gornje ivice brane i da je konstantan, odrediti:

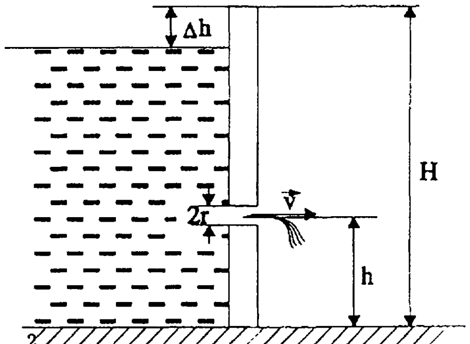
a) Gubitak vode kroz otvor u toku $24\,h$ imajući u vidu da je koeficijent kontrakcije $k = (\pi/4)^2$.

b) Kolikom normalnom silom bi trebalo delovati na zatvarač otvora da bi se sprečilo isticanje vode? Gustina vode je $\rho = 10^3\,kgm^{-3}$.

Rešenje

Maseni protok je $dm/dt = \rho S v$, dok je efektivni maseni protok $m/t = k\rho S v$, odnosno

$$m = k\rho S t v. \qquad (4.13)$$



U ovom izrazu S je površina otvora i v brzina isticanja vode.

Brzina v se odredjuje iz Bernulijeve jednačine

$$p_a + \rho g(H - \Delta h) = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

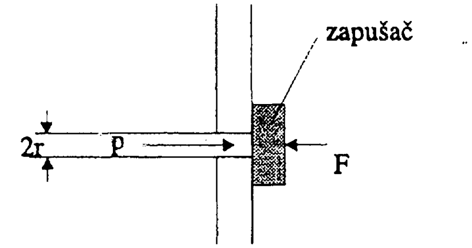
odnosno

$$g(H - \Delta h - h) = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - \Delta h - h)}. \qquad (4.14)$$

Zamenom (4.14) u (4.13) i znajući da je $S = r^2\pi$, dobija se da je masa istekle vode

$$m = k\rho r^2\pi t\sqrt{2g(H - \Delta h - h)} = 1.8 \cdot 10^6\,kg.$$

b) Na zatvarač otvora treba delovati normalnom silom da bi se savladala sila pritiska na mestu otvora, tj. $F \geq pS$, gde je $S = r^2\pi$ i $p = \rho g(H - \Delta h - h)r^2\pi$. Prema tome je

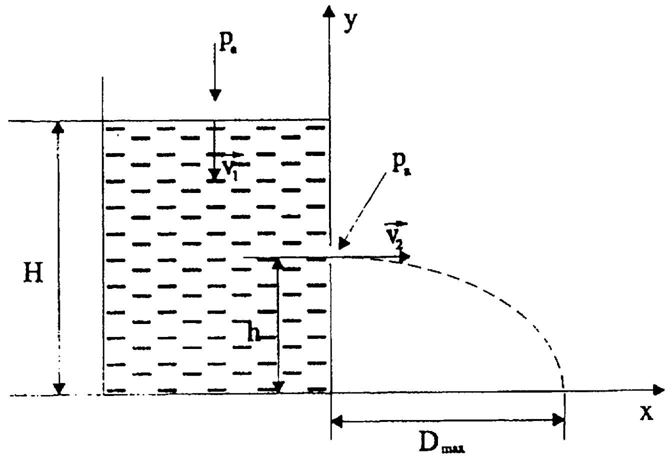


$$F \geq \rho g(H - \Delta h - h)r^2\pi \geq 48\,kN.$$

Zadatak 9

Na kojoj visini od podnožja horizontalne ravni treba napraviti otvor da bi domet mlaza, u trenutku kada je nivo tečnosti u sudu jednak H, bio najveći. Prečnik suda je dva puta veći od prečnika otvora.

Rešenje



Iz Bernulijeve jednačine $p_a + \rho gH + \rho v_1^2/2 = p_a + \rho gh + \rho v_2^2/2$ dobija se

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(H-h). \tag{4.15}$$

Na osnovu teoreme o kontinuitetu strujanja $S_1 v_1 = S_2 v_2$ dobija se

$$\frac{D^2\pi}{4}v_1 = \frac{d^2\pi}{4}v_2 \Rightarrow v_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_2. \tag{4.16}$$

Zamenom (4.16) u (4.15) dobija se

$$v_2^2\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = 2g(H-h) \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1-(d/D)^4}}.$$

Koričenjem zamene $1/[1-(d/D)^4] = k$ za v_2 se dobija sledeći izraz:

$$v_2 = \sqrt{2kg(H-h)}.$$

Ovde se radi o hicu naniže, sa visine h, čija je početna brzina $v_x = v_2$ i $v_y = -gt$, pri čemu je

$$x = v_2 t = t\sqrt{2kg(H-h)} \Rightarrow t = \frac{x}{\sqrt{2kg(H-h)}},$$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{gx^2}{4kg(H-h)} = h - \frac{x^2}{4k(H-h)}. \tag{4.17}$$

Domet hica se dobija za $y=0$, pri čemu je $x = D$. Zamenom u (4.17) dobija se

$$h = \frac{d^2}{4k(H-h)} \Rightarrow D = \sqrt{4k(H-h)h}.$$

Diferenciranjem ovoga izraza po h i izjednačavanjem sa nulom nalazi se visina h

$$\frac{\partial D}{\partial h} = \frac{4k(H-2h)}{2\sqrt{4k(H-h)h}} = 0 \Rightarrow H - 2h = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{2}.$$

Kao što se vidi, rešenje ne zavisi od k. To znači da odnos površina poprečnih preseka suda i otvora nema uticaja.

Zadatak 10

Na cilindričnom sudu prečnika D nalazi se bočni otvor kružnog oblika

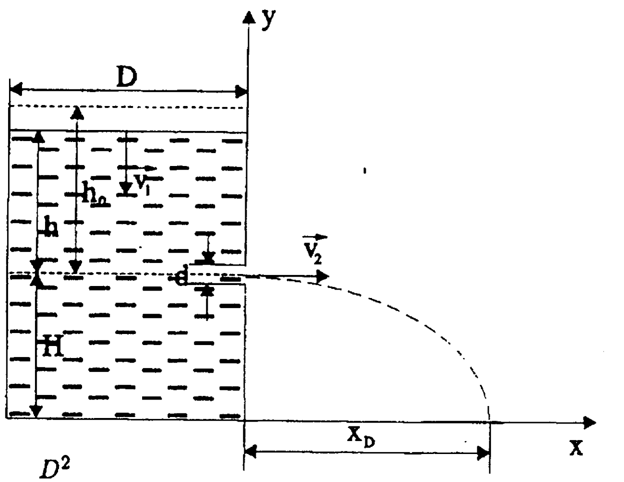
prečnika d, na visini H od dna suda.

a) Odrediti i skicirati zavisnost brzine isticanja vode iz bočnog otvora od vremena isticanja t, ako je visina vode u sudu, merena od nivoa bočnog otvora, u početnom trenutku bila h_o.

b) Izvesti izraz za promenu dometa mlaza vode koja ističe sa vremenom. Zanemariti kontrakciju mlaza.

Rešenje

a) Iz Bernulijeve jednačine $p_a + \rho gh + \rho v_1^2/2 = p_a + \rho v_2^2/2$ dobija se



$$v_1^2 + 2gh = v_2^2, \tag{4.18}$$

dok se iz teoreme kontinuiteta strujanja $S_1 v_1 = S_2 v_2$ dobija

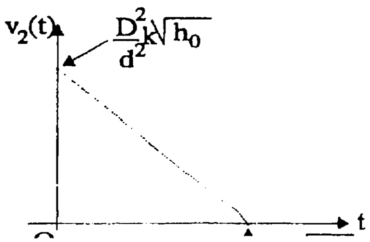
$$\frac{\pi D^2}{4}v_1 = \frac{\pi d^2}{4}v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{D^2}{d^2}v_1. \tag{4.19}$$

Zamenom (4.19) u (4.18) dobija se

$$v_1^2 + 2gh = \left(\frac{D^2}{d^2}\right)^2 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{(D/d)^4 - 1}} = k\sqrt{h},$$

gde je $k = \sqrt{2g}/\sqrt{(D/d)^4 - 1}$.

Brzina v_1 može se izraziti kao $v_1 = -dh/dt$ (znak minus pokazuje da nivo vode opada sa vremenom). Prema tome, gornji izraz dobija sledeći oblik:



$$k\sqrt{h} = -\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -kdt.$$

Integracijom gornjeg izraza se dobija

$$\int_{h_o}^{h}\frac{dh}{\sqrt{h}} = -k\int_{o}^{t}dt \Rightarrow 2(\sqrt{h}-\sqrt{h_o}) = -kt \Rightarrow \sqrt{h} = \sqrt{h_o} - \frac{k}{2}t.$$

Prema tome, za brzinu v_2 se dobija

$$v_2 = \frac{D^2}{d^2}v_1 = \frac{D^2}{d^2}k\left[\sqrt{h_o} - \frac{k}{2}t\right].$$

b) Komponente brzine su $v_x = v_2 = const$; $v_y = -gt$, dok su koordinate $x = v_x t$ i $y = H - gt^2/2$.

Za $x = x_D$; $t = t_D$; $y = 0$, pa se za t_D i x_D dobija

$$t_D = \sqrt{\frac{2H}{g}}; \qquad x_D = v_2 t_D = v_2\sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow x_D(t) = \frac{D^2}{d^2}k\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[\sqrt{h_o} - \frac{k}{2}t\right].$$

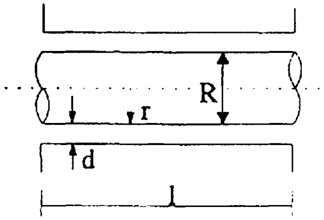
Zadatak 11

Osovina prečnika $R = 0.04\,m$ rotira u ležištu dužine $l = 10\,cm$. Rastojanje izmedju osovine i zida ležišta $d = 0.2\cdot 10^{-3}\,m$ ispunjeno je mazivom koeficijenta viskoznosti $\eta = 0.1\,Nsm^{-2}$. Koliki je moment sile koji treba da deluje tangencijalno da bi se osovina obrtala konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 10\,ob.s^{-1}$?

Rešenje

Moment sile je

$$M = Fr, \tag{4.20}$$



gde je F sila viskoznosti i može se izraziti na sledeći način:

$$F = \eta S\frac{v}{d} = \eta S\frac{\omega r}{d}. \tag{4.21}$$

Zamenom (4.21) u (4.20) dobija se

$$M = \eta S\frac{\omega r}{d} = \eta 2r\pi lr\frac{\omega r}{d}r = 2\eta\pi lr^3\frac{\omega}{d} = 0.158\,Nm.$$

Zadatak 12

Na cisterni u kojoj se čuva ulje koeficijenta viskoznosti $\eta = 0.66\,Pa.s$, načinjen je bočni otvor na koji je postavljena horizontalna metalna cev dužine $l = 2m$ i poluprečnika $R = 4\,cm$. Razlika nivoa ulja u cisterni i cevi je konstantna i iznosi $h = 10\,cm$. Koliki je maseni protok ulja?

Rešenje

Zapreminski protok prema Poasejevom zakonu je

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l}(p_1 - p_2), \tag{4.22}$$

gde je p_1 pritisak ulja na ulazu u cev koji je jednak zbiru atmosferskog pritiska i hidrostatičkog pritiska: $p_1 = p_a + \rho gh$, a $p_2 = p_a$ pritisak na izlazu iz cisterne. Prema tome je $p_1 - p_2 = \rho gh$. Množenjem izraza (4.22) sa ρ dobija se

$$\rho\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\rho(p_1 - p_2).$$

Proizvod $\rho dV/dt = dm/dt$ predstavlja maseni protok, pa je

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\pi R^4\rho}{8\eta l}(p_1 - p_2) = \frac{\pi R^4\rho^2 gh}{8\eta l} = 47.82\,kgs^{-1}.$$

5. Toplota i temperatura

5.1 Teorija

Linearno širenje čvrstih tela dato je sledećom relacijom:

$$l_2 = l_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)],$$

gde je l_1 dužina štapa na temperaturi t_1, l_2 dužina štapa na temperaturi t_2 i α termički koeficijent linearnog širenja materijala.

Za površinsko širenje važi sledeća relacija:

$$S_2 = S_1[1 + \beta(t_2 - t_1)],$$

a za zapreminsko širenje

$$V_2 = V_1[1 + \gamma(t_2 - t_1)],$$

gde su S_1 i S_2 površine tela, V_1 i V_2 njihove zapremine na temperaturama t_1 i t_2, redom, β termički koeficijent površinskog širenja i γ termički koeficijent zapreminskog širenja, pri čemu je $\beta = 2\alpha$, odnosno $\gamma = 3\alpha$.

Gustina tela ρ_2 na temperaturi t_2 može se izraziti na sledeći način:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \gamma(t_2 - t_1)},$$

gde je ρ_1 gustina tela na temperaturi t_1 ($t_1 < t_2$). Za termičko naprezanje materijala važi relacija

$$\frac{F}{S} = E_y\alpha(t_2 - t_1),$$

gde je F sila naprezanja materijala, a F/S normalni napon koji odgovara termičkom naprezanju.

Toplotni kapacitet tela se može izraziti na sledeći način:

$$C_t = Q/\Delta t,$$

gde je Q količina toplote i Δt povećanje temperature.

Specifični toplotni kapacitet predstavlja odnos toplotnog kapaciteta i mase tela, tj.

$$c = \frac{C_t}{m}.$$

Prenošenje toplote provodjenjem opisuje se Furijeovim zakonom

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\lambda S \frac{dt}{dx},$$

gde je $dQ/d\tau$ trenutna brzina protoka toplote, λ koeficijent toplotne provodljivosti, S površina normalna na pravac prostiranja toplote i dt/dx temperaturni gradijent. Znak (-) označava da se toplota prenosi u smeru opadanja temperature.

Količina toplote koja se strujanjem prenese sa nekog čvrstog tela na okolni fluid data je Njutnovom jednačinom

$$\frac{dQ}{d\tau} = hS(t_t - t_f),$$

gde je $dQ/d\tau$ brzina prenošenja toplote, h koeficijent prelaza toplote sa površine tela na fluid, S površina tela, t_t temperatura površine tela i t_f temperatura mase fluida na koji je preneta toplota.

Zavisnost izračene toplotne energije od temperature tela data je Štefan - Bolcmanovim zakonom

$$E = e\sigma T^4,$$

gde je E emisiona moć, $\sigma = 5.7 \cdot 10^8\, Wm^{-2}K^{-4}$ Štefan - Bolcmanova konstanta i e emitivnost tela.

5.2 Zadaci

Zadatak 1

Metalni štap dužine $l_1 = 20\,cm$ izduži se za $\Delta l = 0.138\,mm$ pri zagrevanju

za $\Delta t = 30\,^oC$. Koliki je termički koeficijent α linearnog širenja materijala štapa?

Rešenje

Na osnovu zakona lineranog širenja:

$$l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta t), \qquad (5.1)$$

gde je l_1 dužina štapa na temperaturi t_1, l_2 dužina štapa na temperaturi t_2, a $\Delta t = t_2 - t_1$ temperaturni interval, dobija se da je

$$\alpha = \frac{l_2 - l_1}{l_1}\frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{l_1 \Delta t} = 2.3 \cdot 10^{-5}\, K^{-1}.$$

Zadatak 2

Točak voza ima poluprečnik $r_o = 1\,m$, pri temperaturi $t_o = 0\,^oC$. Termički koeficijent linearnog širenja materijala od koga je načinjen točak je $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}\, K^{-1}$. Kolika je razlika brojeva obrtaja točka leti, pri temperaturi $t_1 = 25\,^oC$, i zimi, pri temperaturi $t_2 = -15\,^oC$ na putu $s = 100\,km$.

Rešenje

Za prečnike točka na temperaturama t_1 i t_2, na osnovu izraza (5.1), dobija se

$$d_1 = 2r_1 = 2r_o[1 + \alpha(t_1 - t_o)], \qquad d_2 = 2r_2 = 2r_o[1 + \alpha(t_2 - t_o)].$$

Broj obrataja točka na temperaturi t_1 je

$$N_1 = \frac{s}{2\pi r_1} = \frac{s}{2\pi r_o[1 + \alpha(t_1 - t_o)]} = \frac{s}{2\pi r_o(1 + \alpha t_1)},$$

a na temperaturi t_2

$$N_2 = \frac{s}{2\pi r_2} = \frac{s}{2\pi r_o[1 + \alpha(t_2 - t_o)]} = \frac{s}{2\pi r_o(1 + \alpha t_2)},$$

tako da se za promenu broja obrtaja dobija:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{s}{2\pi r_o}\left(\frac{1}{1 + \alpha t_2} - \frac{1}{1 + \alpha t_1}\right) = 7.64\, obr.$$

Zadatak 3

Pri kontrolisanju tačnosti časovnika sa metalnim klatnom ustanovljeno je da na temperaturi $t_1 = 0\,^oC$ žuri $\tau_1 = 8\,s$ na dan, a na temperaturi $t_2 = 20\,^oC$ zaostaje $\tau_2 = 10\,s$ na dan. Koliki je termički koeficijent α linearnog širenja materijala od koga je izradjeno klatno časovnika?

Rešenje

Neka na temperaturi t_o časovnik pokazuje tačno vreme, a klatno časovnika, koje se može smatrati matematičkim klatnom, izvrši N_o oscilacija za jedan dan, tj.

$$N_o = \frac{\tau_o}{T_o} = \frac{\tau_o}{2\pi\sqrt{l_o/g}},$$

gde je $\tau_o = 24\,h = 86400\,s$ ukupno vreme, T_o period oscilovanja klatna, a l_o dužina klatna na temperaturi t_o.

Iz uslova zadatka sledi da je $t_1 < t_o < t_2$ i $l_1 < l_o < l_2$, gde je l_1 dužina klatna na temperaturi t_1, a l_2 dužina na t_2. Promena dužine klatna sa temperaturom može se opisati izrazom

$$l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta t),$$

gde je $\Delta t = t_2 - t_1$.

Za vreme od jednog dana, broj oscilacija klatna časovnika na temperaturi t_1 je N_1, a na t_2 je N_2, pa je

$$N_1 = \frac{\tau_o - \tau_1}{T_1} = \frac{\tau_o - \tau_1}{2\pi\sqrt{l_1/g}}, \tag{5.2}$$

$$N_2 = \frac{\tau_o + \tau_2}{T_2} = \frac{\tau_o + \tau_2}{2\pi\sqrt{l_2/g}}, \tag{5.3}$$

gde je T_1 period oscilovanja klatna na temperaturi t_1, a T_2 period oscilovanja klatna na temperaturi t_2.

Da bi časovnik radio tačno potrebno je da broj oscilacija na temperaturama t_1 i t_2 bude isti: $N_1 = N_2$. Izjednačavanjem desnih strana izraza (5.2) i (5.3), dobija se

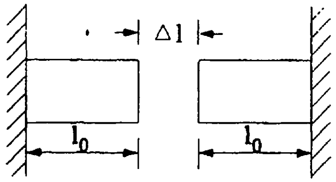
$$\frac{\tau_o - \tau_1}{\tau_o + \tau_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\Delta t}},$$

odnosno

$$\alpha = \left[\left(\frac{\tau_o + \tau_2}{\tau_o - \tau_1}\right)^2 - 1\right]\frac{1}{\Delta t} = 2.08 \cdot 10^{-5} K^{-1}.$$

Zadatak 4

Za dva vertikalna, nepokretna zida učvršćena su dva identična, horizontalna, gvozdena štapa površine poprečnih preseka $S = 7\,cm^2$, kao na slici. Dužine štapova na temperaturi $t_o = 0\,^oC$ su $l_o = 40\,cm$, a razmak izmedju njih je $\Delta l = 0.6\,mm$. Skicirati zavisnost sile usled termičkog naprezanja štapova za opseg temperatura od $t_1 = 20\,^oC$ do $t_2 = 100\,^oC$. Kolika je ova sila na temperaturi t_2? Modul elastičnosti gvoždja je $E_Y = 20\,MNcm^{-2}$, a termički koeficijent linearnog širenja $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}\,^oC^{-1}$.



Rešenje

S obzirom da se štapovi nalaze na rastojanju Δl, oni se do temperature na kojoj se dodiruju t' izdužuju bez naprezanja. Na toj temperaturi je njihova dužina jednaka $l' = l_o[1 + \alpha(t' - t_o)]$, gde $l' - l_o = \Delta l/2$ (svaki štap se izduži za polovinu razmaka izmedju njih). Na taj način se nalazi vrednost t':

$$\frac{\Delta l}{2} = l' - l_o = l_o\alpha(t' - t_o) \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{\Delta l +}{2\alpha l_o} + t_o = 62.5\,^oC.$$

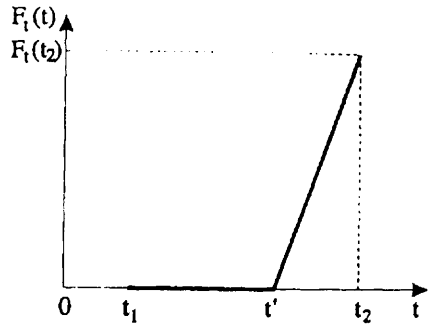
Sa daljim povećanjem temperature u štapovima se javlja naprezanje, a sila usled ovog naprezanja F_t može se naći iz Hukovog zakona elastične deformacije

$$\frac{F_t}{S} = E_Y\frac{l - l'}{l'},$$

i izraza za relativnu promenu dužine štapa usled zagrevanja

$$\frac{l - l'}{l'} = \frac{\Delta l}{l'} = \alpha(t - t').$$

Zavisnost sile usled termičkog naprezanja štapova od temperature je: $F_t = \begin{cases} 0, & t < t' \\ E_Y S\alpha(t-t') & , t \geq t' \end{cases}$ i data je na slici, a vrednost sile na temperaturi t_2 iznosi $F_t(t_2) = E_Y S\alpha(t_2 - t') = 63\,kN$.



Zadatak 5
Gvozdena ploča ima dužinu $a_1 = 0.5\,m$ i širinu $b_1 = 0.6\,m$ na temperaturi $t_1 = 20\,^oC$. Za koliko se promeni površina ploče ako se ona zagreje do temperature $t_2 = 600\,^oC$? Termički koeficijent linearnog širenja gvoždja je $\alpha = 1.7 \cdot 10^{-5}\,^oC^{-1}$.

Rešenje

S obzirom da se dimenzije ploče menjaju po linearnom zakonu (5.1): $a_2 = a_1(1+\alpha\Delta t)$, $b_2 = b_1(1+\alpha\Delta t)$, gde je $\Delta t = t_2 - t_1$, površina ploče na temperaturi t_2 je

$$S_2 = a_2 b_2 = a_1 b_1 (1+\alpha\Delta t)^2 = S_1(1 + 2\alpha\Delta t + \alpha^2(\Delta t)^2),$$

gde je $S_1 = a_1 b_1$ površina ploče na temperaturi t_1. Član koji sadrži α^2 može se zanemariti, pošto je mnogo je manji od ostala dva (α je reda veličine 10^{-5}). Na taj način se dolazi do zakona površinskog širenja čvrstih tela

$$S_2 = S_1(1 + \beta\Delta t), \tag{5.4}$$

gde je $\beta = 2\alpha$ termički koeficijent površinskog širenja.

Promena površine ploče usled zagrevanja je

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S_1\beta\Delta t = 2\alpha a_1 b_1 \Delta t = 59.16\,cm^2.$$

Zadatak 6
Stakleni sud tankih zidova, zapremine $V_1 = 10\,l$ i temperature $t_1 = 0\,^oC$, napunjen je do vrha sumpornom kiselinom. Koliko će kiseline isteći iz suda ako se sistem zagreje do temperature $t_2 = 40\,^oC$? Termički koeficijent linearnog širenja stakla je $\alpha_s = 8.1 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, a termički koeficijent zapreminskog širenja kiseline $\gamma_k = 5.6 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$.

Rešenje

Posmatraće se jedan puni (ili šuplji) paralelopiped čije su dimenzije na temperaturi t_1 jednake a_1, b_1 i c_1. Sa promenom temperature dimenzije paralelopipeda se menjaju po zakonu linearnog širenja (5.1), tako da je njegova zapremina na temperaturi t_2

$$V_2 = a_2 b_2 c_2 = a_1 b_1 c_1 (1+\alpha\Delta t)^3 = V_1(1 + 3\alpha\Delta t + 3\alpha^2\Delta t^2 + \alpha^3\Delta t^3),$$

gde je $V_1 = a_1 b_1 c_1$ zapremina paralelopipeda na temperaturi t_1, a $\Delta t = t_2 - t_1$. Članovi koji sadrže α^2 i α^3 mogu se zanemariti u odnosu na jedinicu i linearni član, tako da se dobija

$$V_2 = V_1(1 + \gamma\Delta t), \tag{5.5}$$

gde je $\gamma = 3\alpha$ termički koeficijent zapreminskog širenja. Dakle, zapremina kiseline na temperaturi t_2 je

$$V_{k2} = V_{k1}(1 + \gamma_k\Delta t),$$

a zapremina staklenog suda

$$V_{s2} = V_{s1}(1 + 3\alpha_s\Delta t),$$

gde su V_{k1} i V_{s1} zapremina kiseline, odnosno suda na temperaturi t_1 i $\Delta t = 40\,^oC$. Pošto je $\gamma_k > 3\alpha_s$ i $V_{k1} = V_{s1} = V_1$, sledi da je $V_{k2} > V_{s2}$, tj. da će deo kiseline isteći iz suda.

S obzirom da u sudu na temperaturi t_2 ostane zapremina kiseline $V'_{k2} = V_{s2}$, zapremina kiseline koja istekne iz suda je

$$\Delta V = V_{k2} - V_{s2} = V_1\Delta t(\gamma_k - 3\alpha_s) = 126.8\,cm^3.$$

Zadatak 7
Stakleni sud u obliku šuplje lopte na temperaturi $t_1 = 10\,^oC$ ima unutrašnji poluprečnik $R_1 = 20\,cm$, a spoljašnji poluprečnik $R_2 = 20.5\,cm$. Na ovoj

temperaturi, sud je do vrha napunjen sumpornom kiselinom. Koliko će kiseline iscuriti iz suda kroz mali otvor u najvišoj tački suda, ako se sistem zagreje do temperature $t_2 = 50\,°C$? Pri ovoj temperaturi zapremina stakla od koga je sud načinjen iznosi $V_{s2} = 2.58\,dm^3$. Termički koeficijent zapreminskog širenja kiseline je $\gamma_k = 5.6 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$.

Rešenje

Zapremina kiseline koja pri zagrevanju iscuri iz suda je $\Delta V = V_{k2} - V_2$, gde je V_{k2} zapremina kiseline na temperaturi t_2, a $V_2 = 4\pi R_2^3/3$ unutrašnja zapremina staklenog suda na temperaturi t_2. Takodje se mogu napisati i sledeće relacije: $V_{k2} = V_{k1}(1 + \gamma_k \Delta t)$ i $V_2 = V_1(1 + \gamma_s \Delta t)$, gde je γ_s termički koeficijent zapreminskog širenja stakla, $V_{k1} = 4\pi R_1^3/3$ zapremina kiseline i V_1 unutrašnja zapremina suda na temperaturi t_1, a $\Delta t = t_2 - t_1 = 40\,°C$.

Korišćenjem uslova da je sud do vrha napunjen kiselinom na temperaturi t_1, tj. da je $V_1 = V_{k1}$, dobija se

$$\Delta V = V_{k2} - V_2 = V_{k1}(1 + \gamma_k \Delta t) - V_1(1 + \gamma_s \Delta t) = V_1(\gamma_k - \gamma_s)\Delta t. \quad (5.6)$$

Iz izraza za zapreminu stakla od koga je sud načinjen na temperaturi t_2, dobija se koeficijent γ_s:

$$V_{s2} = V_{s1}(1 + \gamma_s \Delta t) \quad \Rightarrow \quad \gamma_s = \frac{V_{s2} - V_{s1}}{V_{s1}\Delta t},$$

gde je $V_{s1} = 4\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)/3$ zapremina stakla na temperaturi t_1, dobijen je koeficijent γ_s, tako da se konačno prema izrazu (5.6) dobija

$$\Delta V = \frac{4\pi R_1^3}{3}\left(\gamma_k - \frac{V_{s2} - V_{s1}}{V_{s1}\Delta t}\right)\Delta t = \frac{4\pi R_1^3}{3}\left(1 + \gamma_k \Delta t - \frac{V_{s2}}{V_{s1}}\right),$$

ili

$$\Delta V = \frac{4\pi R_1^3}{3}\left(1 + \gamma_k \Delta t - \frac{3V_{s2}}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}\right) = 0.69\,dm^3.$$

Zadatak 8

Stakleni sud[1], čiji je termički koeficijent zapreminskog širenja $\gamma_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, napunjen je do vrha nekom tečnošću na temperaturi $t_1 = 20\,°C$. Tečnost koja se nalazi u sudu na toj temperaturi ima masu $m_1 = 50\,g$. Kada je stakleni sud napunjen istom tečnošću na temperaturi $t_2 = 50\,°C$, onda je masa tečnosti u sudu $m_2 = 49\,g$. Naći vrednost toplotnog koeficijenta zapreminskog širenja γ_2 te tečnosti.

[1]Podrazumeva se da je sud tankih zidova, ukoliko nije drugačije naglašeno.

Rešenje

Neka na temperaturi t_1 neko telo ima zapreminu V_1 i gustinu ρ_1, a na temperaturi t_2 zapreminu V_2 i gustinu ρ_2. Ako je telo mase m, onda za temperature t_1 i t_2 važi

$$m = \rho_1 V_1, \qquad m = \rho_2 V_2.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednačina, i korišćenjem zakona zapreminskog širenja (5.5), dobija se

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \gamma(t_2 - t_1)}. \quad (5.7)$$

Na osnovu uslova zadatka, gustine tečnosti na temperaturama t_1 i t_2 su:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}, \qquad \rho_2 = \frac{m_2}{V_2}, \quad (5.8)$$

gde su V_1 i V_2 zapremine suda (a takodje i tečnosti) na temperaturama t_1 i t_2, redom.

Zamenom najpre izraza (5.5) u (5.8), a zatim ovako dobijenog izraza u (5.7) dobija se

$$\frac{m_2}{V_1(1 + \gamma_1 \Delta t)} = \frac{m_1}{V_1(1 + \gamma_2 \Delta t)}$$

$$\gamma_2 = \frac{m_1(1 + \gamma_1 \Delta t) - m_2}{m_2 \Delta t} = 7.05 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}.$$

Zadatak 9

Čvrsto telo pliva u tečnosti temperature $t_o = 0\,°C$, pri čemu je potopljeno $98\,\%$ njegove zapremine. Pri zagrevanju tečnosti do $t_1 = 25\,°C$ primećeno je da se telo potpuno potopi u tečnost i lebdi u njoj. Ako je termički koeficijent zapreminskog širenja materijala tela $\gamma_1 = 2.6 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$, odrediti termički koeficijent zapreminskog širenja tečnosti γ_2.

Rešenje

Neka su na temperaturi $t_o = 0\,^oC$ zapremina tela V_o i gustina tečnosti ρ_o. Na osnovu uslova zadatka, sila potiska na t_o je $F_{po} = 0.98 V_o \rho_o g$, a uslov ravnoteže $Q = F_{po}$, gde je Q težina tela.

Na temperaturi t_1 zapremina tela je $V_1 = V_o(1+\gamma_1 \Delta t)$, gustina tečnosti $\rho_1 = \rho_o/(1+\gamma_2\Delta t)$, a sila potiska $F_{p1} = V_1 \rho_1 g$. Iz uslova ravnoteže $Q = F_{p1}$ dobija se da je $F_{po} = F_{p1}$, odnosno

$$0.98 V_o \rho_o g = V_1 \rho_1 g \quad \Rightarrow \quad 0.98 V_o \rho_o = V_o(1+\gamma_1\Delta t)\frac{\rho_o}{1+\gamma_2\Delta t},$$

odakle se dobija da je

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_1 \Delta t + 0.02}{0.98\Delta t} = 8.19 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}.$$

Zadatak 10

Bakarna šipka, površine poprečnog preseka $S = 5\,cm^2$ i temperature $t_o = 0\,^oC$, izduži se za $\Delta l = 0.1\,cm$ pri zagrevanju. Kolika se količina toplote Q pri tome utroši? Gustina bakra je $\rho = 8890\,kgm^{-3}$, specifični toplotni kapacitet bakra $c = 390\,Jkg^{-1}$, a termički koeficijent linearnog širenja bakra $\alpha = 1.7 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$.

Rešenje

Količina toplote Q koju treba dovesti telu mase m da bi se zagrejalo za temperaturni interval Δt može se izraziti na sledeći način:

$$Q = cm\Delta t, \tag{5.9}$$

gde je c specifični toplotni kapacitet materijala od koga je telo načinjeno. Količina toplote Q u ovom slučaju iznosi:

$$Q = c\rho V_o \Delta t = c\rho l_o S \Delta t,$$

gde su V_o i l_o zapremina i dužina šipke na temperaturi t_o, redom. Promene površine poprečnog preseka S i gustine bakra ρ sa temperaturom su zanemarene.

Iz izraza (5.1) sledi da je $\Delta t = (l - l_o)/(\alpha l_o) = \Delta l/(\alpha l_o)$, gde je l dužina štapa nakon zagrevanja, tako da se dobija da je

$$Q = c\rho S\frac{\Delta l}{\alpha} = 1.02 \cdot 10^5\,J.$$

Zadatak 11

Kolika je količina vodene pare na atmosferskom pritisku potrebna za topljenje $m = 50\,kg$ leda čija je temperatura $t = -4\,^oC$. Specifični toplotni kapacitet vode je $c_v = 4.18\,J(gK)^{-1}$, a leda $c_l = 2.51\,J(gK)^{-1}$, toplota topljenja leda je $q_t = 334.88\,Jg^{-1}$, a toplota kondenzovanja vodene pare $q_k = 2262.4\,Jg^{-1}$. Pretpostaviti da se toplota predaje samo ledu.

Rešenje

Najpre treba dovesti količinu toplote Q_1 potrebnu za zagrevanja leda do temperature topljenja $t_t = 0\,^oC$ koja se može izraziti na sledeći način

$$Q_1 = mc_l(t_t - t),$$

a zatim količinu toplote Q_2 potrebnu za topljenja leda koji se nalazi na temperaturi topljenja t_t, tj.

$$Q_2 = mq_t.$$

Ovu količinu toplote vodena para mase m_1 treba da preda ledu mase m, pri čemu je količina toplote koja se oslobodi pri kondenzovanju vodene pare na temperaturi kondenzovanja $t_k = 100\,^oC$ data sledećim izrazom:

$$Q_3 = m_1 q_k,$$

a količina toplote koja se oslobodi pri hladjenju nastale vode do temperature t_t

$$Q_4 = m_1 c_v(t_k - t_t).$$

Pošto u izolovanom sistemu važi zakon održanja energije, odnosno oslobodjene i primljene količine toplote su jednake, može se napisati

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4,$$

odakle se dobija

$$m_1 = \frac{mc_l(t_t - t) + mq_t}{q_k + c_v(t_k - t_t)} = 6.4\,kg.$$

Zadatak 12
U kalorimetrijskom sudu od bakra mase $m_1 = 100\,g$ nalazi se voda mase $m_2 = 200\,g$. Temperature kalorimetrijskog suda i vode su jednake i iznose $t_1 = 90\,^oC$. U kalorimetar se unese komad bakra mase $m_3 = 100\,g$ i temperature $t_2 = 20\,^oC$. Odrediti temperaturu sistema t_s nakon uspostavljanja toplotne ravnoteže, ako je specifični toplotni kapacitet bakra $c_b = 0.39\,J(gK)^{-1}$.

Rešenje

Kalorimetrijska jednačina koja se može napisati za ovaj slučaj je

$$Q_1 + Q_2 = Q_3,$$

gde je $Q_1 = m_1 c_b(t_1 - t_s)$ količina toplote koju kalorimetrijski sud preda komadu bakra, i pri tome se ohladi do temperature t_s, $Q_2 = m_2 c_v(t_1 - t_s)$ količina toplote koju voda preda komadu bakra, i pri tome se ohladi do temperature t_s, a $Q_3 = m_3 c_b(t_s - t_2)$ količina toplote koju komad bakra primi od kalorimetrijskog suda i vode, i pri tome se zagreje do temperature t_s.

Temperatura sistema nakon uspostavljanja toplotne ravnoteže je

$$t_s = \frac{(m_1 c_b + m_2 c_v)t_1 + m_3 c_b t_2}{m_1 c_b + m_2 c_v + m_3 c_b} = 87.02\,^oC.$$

Zadatak 13
Kalorimetrijski sud čiji je toplotni kapacitet $M = 125.7\,JK^{-1}$ sadrži $m_1 = 50\,g$ leda. U početku je temperatura sistema $t_1 = 0\,^oC$. Zatim se u kalorimetar uvede $m_2 = 12\,g$ vodene pare temperature $t_2 = 100\,^oC$ pri normalnom atmosferskom pritisku. Odrediti temperaturu sistema t_s nakon uspostavljanja ravnotežnog stanja.

Rešenje

Količina toplote koja se oslobodi pri kondenzovanju vodene pare je

$$Q_1 = m_2 q_k,$$

a pri hladjenju nastale vode do temperature sistema t_s

$$Q_2 = m_2 c_v(t_2 - t_s).$$

Količina toplote koju primi led da bi se istopio (već se nalazi na temperaturi topljenja $t_1 = 0^oC$) je

$$Q_3 = m_1 q_t,$$

a količina toplote koju primi voda nastala topljenjem leda, da bi se zagrejala do t_s je

$$Q_4 = m_1 c_v(t_s - t_1).$$

Količina toplote koju primi kalorimetrijski sud, i pri tome se zagreje do t_s je

$$Q_5 = M(t_s - t_1).$$

Kalorimetrijska jednačina za ovajslučaj je

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5,$$

a za temperaturu sistema nakon uspostavljanja ravnotežnog stanja se posle, zamene Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 i Q_5 i sredjivanja, dobija se

$$t_s = \frac{(q_k + c_v t_2)m_2 - (q_t - c_v t_1)m_1 + M t_1}{(m_1 + m_2)c_v + M} = 40\,^oC.$$

Zadatak 14
Odrediti količinu toplote koju treba dovesti ledu mase $m = 5\,g$ na temperaturi $t_1 = -5\,^oC$ da bi se pretvorio u paru temperature $t_2 = 120\,^oC$ pri normalnom atmosferskom pritisku. Specifični toplotni kapacitet vodene pare je $c_p = 2.09\,J(gK)^{-1}$, vode $c_v = 4.18\,J(gK)^{-1}$, a leda $c_l = 2.51\,J(gK)^{-1}$.

Rešenje

Najpre je potrebno zagrejati led do temperature topljenja $t_t = 0\,^oC$:

$$Q_1 = mc_l(t_t - t_1),$$

zatim istopiti led na toj temperaturi:

$$Q_2 = mq_t,$$

zagrejati nastalu vodu do temperature isparavanja $t_i = 100^oC$:

$$Q_3 = mc_v(t_i - t_t),$$

izvršiti isparavanje vode:

$$Q_4 = mq_k,$$

i zagrejati paru do temperature t_2:

$$Q_5 = mc_p(t_2 - t_i).$$

Ukupna količina toplote koju treba utrošiti je

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 15348.15\,J.$$

Zadatak 15

U staklenoj bočici mase $m_1 = 80\,g$ zagreva se $m_2 = 100\,g$ alkohola do temperature $t = 75\,^oC$. Kada se ovaj sistem stavi u kalorimetar čiji je toplotni kapacitet $M = 5000\,JK^{-1}$, temperatura u kalorimetru se povisi od $t_1 = 10\,^oC$ do $t_2 = 13.85\,^oC$. Ako se zatim bočica izvuče, pa joj se doda još $m_3 = 50\,g$ alkohola i ponovo zagreje do $t = 75\,^oC$, a zatim stavi u isti kalorimetar, onda temperatura u njemu poraste od $t_1' = 12\,^oC$ do $t_2' = 17.13\,^oC$. Naći specifične toplotne kapacitete stakla c_s i alkohola c_a.

Rešenje

Količina toplote koju kalorimetar primi usled hladjenja stakla i alkohola je

$$Q = M(t_2 - t_1),$$

a količina toplota koju staklo i alkohol predaju kalorimetru

$$Q' = m_1c_s(t - t_2) + m_2c_a(t - t_2).$$

Kalorimetrijska jednačina za ovaj slučaj je

$$M\Delta t_1 = m_1c_s\Delta t_2 + m_2c_a\Delta t_2, \tag{5.10}$$

gde je $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ i $\Delta t_2 = t - t_2$.

Analogno prvom slučaju, kalorimetrijska jednačina za drugi slučaj je

$$M\Delta t_1' = m_1c_s\Delta t_2' + (m_2 + m_3)c_a\Delta t_2', \tag{5.11}$$

gde je: $\Delta t_1' = t_2' - t_1'$ i $\Delta t_2' = t - t_2'$.

Iz izraza (5.11) dobija se

$$c_a = \frac{M\Delta t_1' - m_1c_s\Delta t_2'}{(m_2 + m_3)\Delta t_2'},$$

a smenom c_a u izraz (5.10) dobija se

$$c_s = \frac{M\Delta t_1 - Mm_2\Delta t_2\Delta t_1'/[(m_2 + m_3)\Delta t_2']}{m_1\Delta t_2 - m_1m_2\Delta t_2/(m_2 + m_3)}.$$

Konačno se dobija $c_s = 724.5J(kgK)^{-1}$ i $c_a = 2569J(kgK)^{-1}$.

Zadatak 16

Staklena bočica mase $m_1 = 50\,g$, do vrha napunjena glicerinom mase $m_2 = 60\,g$, zagreje se od temperature $t_1 = 20\,^oC$ do temperature $t_2 = 50\,^oC$, a zatim stavi u toplotno izolovani stakleni sud mase $m_3 = 100\,g$, temperature $t_3 = 30\,^oC$. Kolika je temperatura sistema posle uspostavljanja ravnotežnog stanja? Termički koeficijent zapreminskog širenja stakla je $\gamma_s = 2.4 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, a glicerina $\gamma_g = 4.8 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$. Specifični toplotni kapacitet stakla je tri puta manji od specifičnog toplotnog kapaciteta glicerina.

Rešenje

Na temperaturi t_1 glicerin mase m_2 zauzima zapreminu V_g, koja je jednaka zapremini staklene bočice V_s. Na temperaturi t_2 zapremina staklene bočice je $V_s' = V_s(1 + \gamma_s\Delta t)$, gde je $\Delta t = t_2 - t_1$. S obzirom da je $\gamma_g > \gamma_s$, deo glicerina će isteći iz suda pri zagrevanju od t_1 do t_2, tako da će na t_2 bočica biti do vrha napunjena glicerinom mase m_2'.

Ako su ρ_1 i ρ_2 gustine glicerina na temperaturama t_1 i t_2, redom, onda važi: $m_2 = \rho_1 V_s$, $m_2' = \rho_2 V_s'$ i $\rho_2 = \rho_1/(1+\gamma_g \Delta t)$, odnosno:

$$m_2' = \rho_2 V_s' = \frac{\rho_1}{1+\gamma_g\Delta t} V_s(1+\gamma_s\Delta t) = m_2 \frac{1+\gamma_s\Delta t}{1+\gamma_g\Delta t} = 59.16\,g. \quad (5.12)$$

Na osnovu kalorimetrijske jednačine:

$$m_3 c_s(t_s - t_3) = m_1 c_s(t_2 - t_s) + m_2' c_g(t_2 - t_s),$$

gde je $c_g = 3c_s$, može se odrediti temperatura sistema nakon uspostavljanja ravnotežnog stanja:

$$t_s = \frac{m_1 t_2 + 3m_2' t_2 + m_3 t_3}{m_1 + 3m_2' + m_3} = 43.89\,^\circ C.$$

Zadatak 17

Staklena bočica mase $m_1 = 100\,g$, čiji je termički koeficijent zapreminskog širenja $\gamma_s = 2.4\cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, napunjena je do vrha nekom tečnošću mase $m_2 = 200\,g$ na temperaturi $t = 30\,^\circ C$. Kada se ovaj sistem stavi u kalorimetar čiji je toplotni kapacitet $M = 5000\,JK^{-1}$, temperatura u kalorimetru se povisi od $t_1 = 10\,^\circ C$ do $t_2 = 13.85\,^\circ C$. Ako se zatim bočica izvuče i zagreje do $t' = 60\,^\circ C$, a zatim stavi u isti kalorimetar, temperatura se u njemu povisi od $t_1' = 11\,^\circ C$ na $t_2' = 15.8\,^\circ C$. Naći toplotni koeficijent zapreminskog širenja tečnosti γ_t, ako je specifični toplotni kapacitet stakla $c_s = 724.5\,J(kgK)^{-1}$, a $\gamma_t > \gamma_s$.

Rešenje

S obzirom da je $\gamma_t > \gamma_s$, pri zagrevanju od t do t' deo tečnosti će izaći iz suda, tako da je na temperaturi t' masa tečnosti m'. Korišćenjem izraza (5.9) može se odrediti γ_t, tj.

$$\gamma_t = \frac{m_2[1+\gamma_s\Delta t] - m_2'}{m_2'\Delta t},$$

gde je $\Delta t = t' - t = 30\,^\circ C$, a m_2' masa tečnosti koja se nalazi u bočici na temperaturi t'.

Da bi se našla vrednost γ_t treba naći masu m_2'. To se može uraditi na osnovu kalorimetrijskih jednačina (videti izraze (5.10) i (5.11)):

$$M\Delta t_1 = m_1 c_s \Delta t_2 + m_2 c_t \Delta t_2,$$
$$M\Delta t_1' = m_1 c_s \Delta t_2' + m_2' c_t \Delta t_2',$$

gde je $\Delta t_1 = t_2 - t_1$, $\Delta t_2 = t - t_2$, $\Delta t_1' = t_2' - t_1'$ i $\Delta t_2' = t' - t_2'$. Eliminacijom specifičnog toplotnog kapaciteta tečnosti c_t, dobija se masa m_2':

$$m_2' = \frac{M\Delta t_1' - m_1 c_s \Delta t_2'}{[(M\Delta t_1 - m_1 c_s \Delta t_2)\Delta t_2']/(m_2\Delta t_2)} = 84\,g,$$

a zatim i termički koeficijent zapreminskog širenja tečnosti $\gamma_t = 8.8\cdot 10^{-4}\,K^{-1}$.

Zadatak 18

Zid čine sloj drveta debljine $x_1 = 3\,cm$ i sloj stakla debljine $x_2 = 2\,cm$. Temperature sa obe strane zida su konstantne i iznose $t_1 = 10\,^\circ C$ i $t_2 = 30\,^\circ C$. Kolika je temperatura na granici drvenog i staklenog sloja? Koeficijent toplotne provodnosti za drvo je $\lambda_1 = 1.26\,kJ(mhK)^{-1}$, a za staklo $\lambda_2 = 2.51\,kJ(mhK)^{-1}$.

Rešenje

Za ovako kombinovani zid, za slučaj stacionarnog stanja, kroz uočenu površinu S na drvenom i staklenom zidu, kao i na granici izmedju njih, za vreme τ prolazi ista količina toplote $Q_1 = Q_2 = Q$, odnosno gustina toplotnog fluksa je konstantna: $q_1 = q_2 = q$.

Gustina toplotnog fluksa kroz drveni sloj je

$$q_1 = \frac{Q_1}{\tau S} = \lambda_1 \frac{t - t_1}{x_1},$$

a kroz stakleni

$$q_2 = \frac{Q_2}{\tau S} = \lambda_2 \frac{t_2 - t}{x_2},$$

gde je t tražena temperatura. Izjednačavanjem desnih strana ovih izraza dobija se

$$\lambda_1 \frac{t - t_1}{x_1} = \lambda_2 \frac{t_2 - t}{x_2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_1\lambda_2 t_2 + x_2\lambda_1 t_1}{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1} = 25\,^\circ C.$$

Zadatak 19

Zid debljine $d = 0.75\,m$ izradjen je od vatrostalnih šamotnih cigli koeficijenta toplotne provodnosti $\lambda_1 = 1\,W(mK)^{-1}$. Kolika bi trebalo da bude debljina dvoslojnog zida, čiji je prvi sloj debljine $d_1 = 0.25\,m$ takodje izradjen od šamotnih cigli, a drugi sloj od nevatrostalnog materijala čiji je koeficijent toplotne provodnosti $\lambda_2 = 0.1\,W(mK)^{-1}$, koji bi mogao da zameni jednoslojni zid?

Rešenje

Jednačina protoka toplote kroz zid sa jednim slojem debljine d za jediničnu površinu u jedinici vremena je

$$q = \frac{\lambda_1}{d}(t_1 - t_3), \tag{5.13}$$

gde je q gustina toplotnog fluksa, a t_1 i $t_3 < t_1$ temperature spoljašnjih strana sloja.

Jednačine protoka toplote kroz svaki od slojeva dvoslojnog zida za jediničnu površinu u jedinici vremena su

$$q_1 = \frac{\lambda_1}{d_1}(t_1 - t_2), \qquad q_2 = \frac{\lambda_2}{d}(t_2 - t_3),$$

gde je t_1 temperatura spoljašnje strane prvog sloja, t_2 dodirne površine prvog i drugog sloja, i t_3 temperatura spoljašnje strane drugog sloja. Kako nema "nagomilavanja" toplote unutar zida, već ista količina toplote prodje kroz neku površinu S za neko vreme τ, važi $q = q_1 = q_2$.

Iz ovih jednačina se mogu izraziti temperaturni intervali:

$$t_1 - t_3 = q\frac{d}{\lambda_1}, \quad t_1 - t_2 = q\frac{d_1}{\lambda_1}, \quad t_2 - t_3 = q\frac{d_2}{\lambda_2}. \tag{5.14}$$

Sabiranjem izraza (5.14) dobija se

$$2(t_1 - t_3) = q\left(\frac{d}{\lambda_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right),$$

a zamena ovog izraza u izraz (5.13) daje

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(d - d_1) = 0.05\,m \quad \Rightarrow \quad d_3 = d_1 + d_2 = 0.3\,m.$$

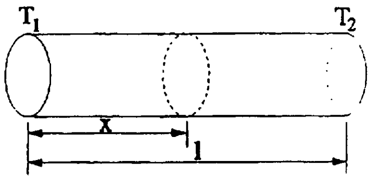
Zadatak 20

Cilindar dužine l, sa toplotno izolovanim bočnim površinama, načinjen je od materijala čiji se koeficijent toplotne provodnosti menja sa temperaturom po zakonu $\lambda = k/T$, gde je k konstanta. Osnove cilindra održavaju se na stalnim temperaturama T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$).

a) Kolika je gustina toplotnog fluksa kroz ovaj cilindar?

b) Odrediti zavisnost $T(x)$, gde je x rastojanje posmatrane tačke (poprečnog preseka) od osnove cilindra više temperature.

Rešenje



a) Gustina toplotnog fluksa kroz cilindar je

$$q = \frac{Q}{\tau S} = \frac{\Phi}{S} = -\lambda\frac{dT}{dx},$$

gde je Φ toplotni fluks. Iz ove diferencijalne jednačine se dobija

$$q\int_0^l dx = ql = -\int_{T_1}^{T_2} \lambda dT = -k\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}, \quad \Rightarrow \quad q = \frac{k}{l}\ln\frac{T_1}{T_2},$$

jer je $q = const.$, pošto nema "nagomilavanja" toplote unutar cilindra, već ista količina toplote prodje kroz svaki poprečni presek cilindra za isto vreme.

b) Za poprečni presek cilindra, koji se nalazi na proizvoljnom rastojanju x od osnove cilindra sa višom temperaturom T_1, izraz za temperaturu $T(x)$ tog preseka se nalazi na sledeći način:

$$q\int_0^x dx = -k\int_{T_1}^{T(x)} \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad qx = k\ln\frac{T_1}{T(x)} \quad \Rightarrow \quad x\frac{k}{l}\ln\frac{T_1}{T_2} = k\ln\frac{T_1}{T(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{x/l} = \ln\frac{T_1}{T(x)} \quad \Rightarrow \quad T(x) = T_1\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{x/l}.$$

6. Molekularna fizika i termodinamika

6.1 Teorija

Matematičke interpretacije Bojl-Mariotovog, Gej-Lisakovog, Šarlovog i Daltonovog zakona idealnog gasa su, redom:

$$pV = const; \quad T = const.$$

$$\frac{V}{T} = const; \quad p = const.$$

$$\frac{p}{T} = const; \quad V = const.$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n,$$

gde su p, V i T, pritisak, zapremina i temperatura gasa, redom, a p_1, $p_2, ..., p_n$ su pritisci komponenata gasne smeše.

Jednačina stanja idealnog gasa mase m je

$$pV = \frac{m}{M}RT = nRT,$$

gde je M molarna masa gasa, n broj molova i R univerzalna gasna konstanta. Umesto univerzalne gasne konstante često se primenjuje Bolcmanova konstanta $k = R/N_a$, gde je N_a Avogadrov broj. U tom slučaju, za jedan mol gasa gornja jednačina dobija sledeći oblik:

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_aT}{V_m} = kn_oT,$$

gde je V_m zapremina jednog mola idealnog gasa i $n_o = N_a/V_m$ broj molekula u jedinici zapremine.

Osnovna jednačina molekularno kinetičke teorije idealnog gasa je

$$pV = \frac{2}{3}E,$$

gde je E ukupna kinetička energija translatornog kretanja svih molekula gasa.

Srednja kvadratna brzina molekula gasa, srednja aritmetička brzina molekula gasa i najverovatnija brzina molekula gasa date su izrazima, redom

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_o}},$$

$$< v >= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_o}},$$

$$v_v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_o}},$$

gde je m_o masa jednog molekula.

Barometarska formula je

$$p_2 = p_1 = \exp\left[-\frac{Mg(h_2 - h_1)}{RT}\right],$$

gde je p_1 pritisak na visini h_1, p_2 pritisak na visini h_2, dok je g ubrzanje Zemljine teže.

Srednja dužina slobodnog puta molekula gasa je

$$< l >= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_o} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

gde je d efektivni prečnik molekula gasa.

Srednja kinetička energija molekula gasa je

$$< E >= \frac{i}{2}kT,$$

gde je i broj stepeni slobode.

Unutrašnja energija molekula gasa je

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = n\frac{i}{2}RT.$$

Prema prvom principu termodinamike je

$$dQ = dU + dA,$$

gde je dQ dovedena količina toplote, dU promena unutrašnje energije i dA izvršeni rad.

Molarni specifični toplotni kapaciteti gasa pri stalnoj zapremini C_V i stalnom pritisku C_p su

$$C_V = \frac{i}{2}R; \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Rad pri izobarnom procesu je

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1),$$

a pri izotermnom procesu

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Za adijabatski proces važe sledeće relacije:

$$pV^{\kappa} = const; \quad TV^{\kappa-1} = const; \quad T^{\kappa}P^{1-\kappa} = const,$$

gde je $\kappa = C_p/C_v = (i+2)/i$ Poasonov koeficijent.

Rad kod adijabatskog procesa je

$$A_{12} = -\frac{nR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1),$$

gde su T_1 i T_2 temperature koje odgovaraju početnoj i krajnjoj zapremini gasa V_1 i V_2, redom.

Koeficijent korisnog dejstva idealne toplotne mašine je

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

gde je Q_1 dovedena količina toplote, Q_2 odvedena količina toplote, T_1 temperatura grejača i T_2 temperatura hladnjaka.

Kada termodinamički sistem vrši ravnotežni prelaz iz stanja 1 u stanje 2, promena entropije je

$$\Delta S_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

Van der Valsova jednačina stanja realnog gasa je

$$(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = nRT,$$

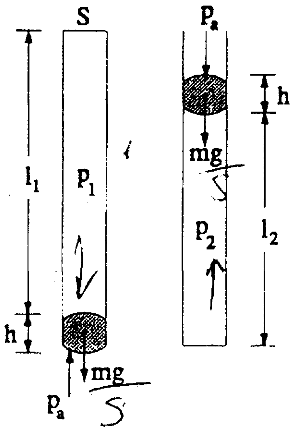
gde je n broj molova, $a = hN_a^2$ (h je konstanta koja zavisi od jačine privlačnih sila i različita je za različite gasove, a N_a Avogadrov broj) i b zapremina molekula gasa.

6.2 Zadaci

Zadatak 1
Cilindrična cev, čiji je jedan kraj zatvoren, sadrži vazduh koji je od okolnog vazduha odvojen živinim stubom. Ako je cev zatvorenim krajem okrenuta na gore, vazduh u njoj zauzima dužinu $l_1 = 50\,cm$, a kada je cev otvorenim krajem okrenuta na gore, vazduh u njoj zauzima dužinu $l_2 = 40\,cm$. Dužina živinog stuba je $h = 8.5\,cm$. Odrediti atmosferski pritisak p_a, ako je temperatura konstantna, a gustina žive $\rho_z = 13.6\,gcm^{-3}$.

Rešenje

Uslov ravnoteže za slučaj kada je cev zatvorenim krajem okrenuta na gore glasi



$$p_1 S + mg = p_a S \quad \Rightarrow \quad p_1 S = p_a S - \rho_z g h S$$

$$p_1 = p_a - \rho_z g h, \tag{6.1}$$

gde je p_1 pritisak u cevi iznad živinog stuba, $m = \rho_z g h$ masa živinog stuba i S površina poprečnog preseka cevi. Za slučaj kada je cev otvorenim krajem okrenuta na gore važi:

$$p_2 S = p_a S + mg \quad \Rightarrow \quad p_2 S = p_a S + \rho_z g h S$$

$$p_2 = p_a + \rho_z g h, \tag{6.2}$$

gde je p_2 pritisak u cevi ispod živinog stuba.

Na osnovu Bojl-Mariotovog zakona ($T = const.$) sledi:

$$p_1 V_1 = p_1 V_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 l_1 S = p_2 l_2 S \quad \Rightarrow \quad p_1 l_1 = p_2 l_2. \tag{6.3}$$

Zamenom pritiska p_1 iz izraza (6.1) i pritiska p_2 iz izraza (6.2) u izraz (6.3), dobija se

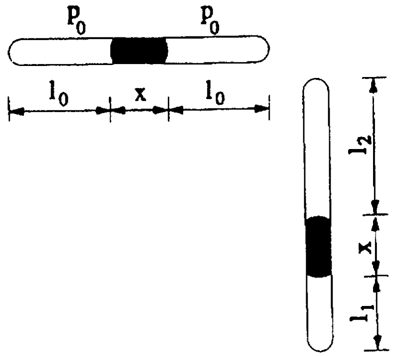
$$(p_a - \rho_z g h) l_1 = (p_a + \rho_z g h) l_2,$$

odnosno

$$p_a = \frac{\rho_z g h (l_1 + l_2)}{l_1 - l_2} = 1.02 \cdot 10^5\,Pa.$$

Zadatak 2
U staklenoj cevi dužine $l = 1\,m$ zatvorenoj na oba kraja nalazi se stub žive dužine $x = 20\,cm$. Kada je cev horizontalna, živa se nalazi na sredini cevi. Ako se cev postavi u vertikalni položaj, stub žive se spusti za $\Delta l = 10\,cm$. Naći početni pritisak u cevi p_o, ako je temperatura konstantna, a gustina žive $\rho_z = 13.6\,gcm^{-3}$.

Rešenje



Kada je cev horizontalna, početni pritisak p_o vlada u delovima cevi dužine $l_o = 40\,cm$, levo i desno od živinog stuba. Kada se cev postavi vertikalno, pritisak u delu cevi dužine $l_1 = l_o - \Delta l = 30\,cm$, koji se nalazi ispod živinog stuba, je p_1. S obzirom da je $T = const.$, na osnovu Bojl-Mariotovog zakona se dobija:

$$p_o S l_o = p_1 S l_1 \Rightarrow p_1 = \frac{l_o}{l_1} p_o = \frac{4}{3} p_o \tag{6.4}$$

gde je S površina poprečnog preseka cevi.

Pritisak u delu cevi dužine $l_2 = l_o + \Delta l = 50\,cm$, koji se nalazi iznad živinog stuba, je p_2, pri čemu je

$$p_o S l_o = p_2 S l_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{l_o}{l_2} p_o = \frac{4}{5} p_o. \tag{6.5}$$

Iz uslova ravnoteže pritisaka dobija se

$$p_1 = p_2 + \rho_z g x,$$

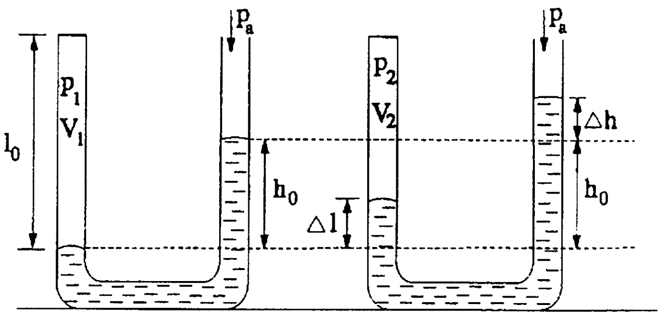
što zamenom pritisaka p_1 i p_2 iz izraza (6.4) i (6.5) daje

$$\frac{4}{3}p_o = \frac{4}{5}p_o + \rho_z g x \quad \Rightarrow \quad p_o = \frac{15}{8}\rho_z g x = 50\,kPa.$$

Zadatak 3

U staklenoj cevi oblika slova "U" nalazi se živa. Visina vazdušnog stuba u zatvorenom kraku cevi je $l_o = 300\,mm$, a visina živinog stuba u otvorenom kraku, u odnosu na nivo žive u zatvorenom kraku, iznosi $h_o = 110\,mm$. U otvoreni krak cevi dolije se toliko žive da se u njemu nivo žive poveća za $\Delta h = 40\,mm$. Koliko se poveća nivo žive u zatvorenom kraku cevi, ako je temperatura konstantna, atmosferski pritisak $p_a = 1.01 \cdot 10^5\,Pa$, a gustina žive $\rho_z = 13.6\,gcm^{-3}$?

Rešenje



Za slučaj pre dolivanja žive, na osnovu ravnoteže pritisaka u zatvorenom i otvorenom kraku cevi, može se napisati sledeća jednačina:

$$p_1 = p_a + \rho_z g h_o, \tag{6.6}$$

gde je p_1 pritisak u zatvorenom kraku cevi. Za slučaj nakon dolivanja žive jednačina ravnoteže pritisaka, napisana u odnosu na nivo žive iz prethodnog

slučaja je

$$p_2 + \rho_z g \Delta l = p_a + \rho_z g (h_o + \Delta h), \tag{6.7}$$

gde je p_2 nova vrednost pritiska u zatvorenom kraku cevi, a Δl povećanje nivoa žive u tom kraku.

S obzirom da je temperatura konstantna, može se primeniti Bojl-Mariotov zakon:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_1 l_o S = p_2 (l_o - \Delta l) \Rightarrow p_1 l_o = p_2 (l_o - \Delta l), \tag{6.8}$$

gde je $V_1 = l_o S$ zapremina zatvorenog dela cevi u kome se nalazi vazduh pre, a $V_2 = (l_o - \Delta l)S$ nakon dolivanja žive (S je površina poprečnog preseka cevi).

Zamenom izraza (6.6) i (6.7) u izraz (6.8) dobija se kvadratna jednačina po Δl, tj.

$$\rho_z g \Delta l^2 - [p_a + \rho_z g (h_o + l_o + \Delta h)]\Delta l + \rho_z g \Delta h l_o = 0,$$

čije je fizički prihvatljivo rešenje $\Delta l = 16\,mm$.

Zadatak 4

U zatvorenom cilindru, sa jedne strane klipa koji može da klizi bez trenja, nalazi se $m_1 = 3\,g$ vodonika, a sa druge $m_2 = 17\,g$ azota. Koji deo zapremine cilindra zauzima vodonik, kada je sistem u toplotnoj ravnoteži? Molarna masa vodonika je $M_1 = 2\,gmol^{-1}$, a azota $M_2 = 14\,gmol^{-1}$.

Rešenje

Sistem je u ravnoteži kada je $p_1 = p_2 = p$ i $T_1 = T_2 = T$, gde su p_1 i p_2 pritisci vodonika i azota, a T_1 i T_2 njihove temperature. Jednačine stanja za vodonik i azot su

$$pV_1 = \frac{m_1}{M_1}RT; \quad pV_2 = \frac{m_2}{M_2}RT,$$

gde su V_1 i V_2 zapremine vodonika i azota, m_1 i m_2 njihove mase, a M_1 i M_2 njihove molarne mase. Deobom ovih jednačina dobija se

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1 M_2}{m_2 M_1}. \tag{6.9}$$

Kako je $V = V_1 + V_2$, tj. $V_2 = V - V_1$, jednačina (6.9) se može napisati u obliku:

$$\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{m_2 M_1}{m_1 M_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{m_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1} = 0.55.$$

Zadatak 5

U veliki sud sa vodom potopljena je čaša cilindričnog oblika sa dnom okrenutim naviše. Nivo vode u čaši i van nje je jednak. Rastojanje od dna čaše do nivoa vode je $l = 15\,cm$. Temperatura vazduha u čaši je $t_1 = 20\,°C$, a atmosferski pritisak $p_1 = 1.05 \cdot 10^5\,Pa$. Naći promenu nivoa vode u čaši pri sniženju temperature vazduha do $t_2 = 10\,°C$, i povećanju atmosferskog pritiska do $p_2 = 2 \cdot 10^5\,Pa$. Promenu nivoa vode u sudu zanemariti. Gustina vode je $\rho_v = 1\,gcm^{-3}$.

Rešenje

U slučaju kada je temperatura t_1, za vazduh u čaši se može napisati sledeća jednačina stanja idealnog gasa:

$$p_1' V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \tag{6.10}$$

gde je p_1' pritisak vazduha "zarobljenog" u čaši, V_1 njegova zapremina na toj temperaturi, a m i M masa i molarna masa vazduha, redom. S obzirom da su nivoi vode u čaši i van nje jednaki, važi uslov jednakosti pritisaka: $p_1 = p_1'$.

Za temperaturu t_2 važi izraz:

$$p_2' V_2 = \frac{m}{M} R T_2, \tag{6.11}$$

gde su p_2' i V_2 pritisak i zapremina vazduha u čaši na toj temperaturi, redom.

Deoba izraza (6.10) i (6.11), uz korišćenje uslova ravnoteže pritisaka $p_2' + \rho_v g h = p_2$, gde je h promena nivoa vode u čaši (razlika izmedju nivoa vode u čaši i sudu na temperaturi t_2), daje

$$\frac{p_1' V_1}{p_2' V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1 V_1}{(p_2 - \rho_v g h) V_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{6.12}$$

Korišćenjem izraza za zapreminu vazduha u čaši na t_1, $V_1 = Sl$, i na t_2, $V_2 = S(l - h)$, gde je S površina poprečnog preseka čaše, izraz (6.12) dobija oblik:

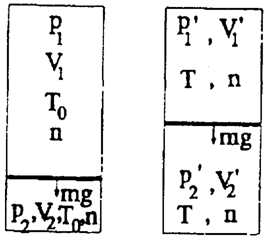
$$\frac{p_1' S l}{(p_2 - \rho_v g h) S (l - h)} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \rho_v g T_1 h^2 - T_1 (p_2 + \rho_v g l) h + l (T_1 p_2 - p_1 T_2) = 0,$$

a fizički prihvatljivo rešenje ove kvadratne jednačine je $h = 7.37\,cm$.

Zadatak 6

U zatvorenom vertikalnom cilindru nalazi se klip mase m koji može da se kreće bez trenja. Iznad i ispod klipa nalaze se jednake količine nekog gasa. Na temperaturi $t_o = 27\,°C$, zapremina gornjeg dela cilindra tri puta je veća od zapremine donjeg dela cilindra. Koliki će biti odnos zapremina gasa u gornjem i donjem delu cilindra kada se temperatura povisi na $t = 127\,°C$.

Rešenje



Na temperaturi t_o može se napisati sledeći izraz ravnoteže pritisaka: $p_2 - p_1 = mg/S$, gde je p_1 pritisak gasa u gornjem, a p_2 pritisak gasa u donjem delu cilindra i S površina klipa. Identični izraz važi i za temperaturu t: $p_2' - p_1' = mg/S$, gde je p_1' pritisak gasa u gornjem, a p_2' pritisak gasa u donjem delu cilindra. Izjednačavanjem levih strana ovih izraza dobija se:

$$p_2 - p_1 = p_2' - p_1'. \tag{6.13}$$

Za temperaturu t_o važe jednačine stanja: $p_1 V_1 = nRT_o$ i $p_2 V_2 = nRT_o$, gde je V_1 zapremina gornjeg, a V_2 zapremina donjeg dela cilindra. Za temperaturu t jednačine stanja su: $p_1' V_1' = nRT$ i $p_2' V_2' = nRT$, gde je V_1' zapremina gornjeg, a V_2' zapremina donjeg dela cilindra. Zamenom ovih izraza u izraz (6.13), uz korišćenje uslova zadatka $V_1 = 3V_2$ i $T_o/T = 3/4$, dobija se:

$$\frac{nRT_o}{V_2} - \frac{nRT_o}{V_1} = \frac{nRT}{V_2'} - \frac{nRT}{V_1'} \Rightarrow \frac{V_1'}{2V_2} = x - 1, \tag{6.14}$$

a $x = V_1'/V_2'$ je veličina koja se traži u zadatku.

Veza izmedju zapremina delova cilindra

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} + \frac{V_2}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2} + \frac{V_2'}{V_2},$$

odnosno

$$3 + 1 = \frac{V_1'}{V_2} + \frac{V_1'/x}{V_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1'} = \frac{x+1}{4x}. \qquad (6.15)$$

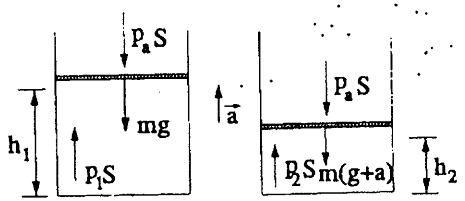
Zamenom izraza (6.15) u (6.14) dobija se kvadratna jednačina, čije rešenje sa pozitivnim znakom treba prihvatiti kao rešenje zadatka:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 + \sqrt{2} = 2.41.$$

Zadatak 7

U vertikalnom cilindričnom sudu glatkih zidova, ispod klipa mase $m = 10\,kg$ i površine poprečnog preseka $S = 50\,cm^2$, nalazi se gas. Pri kretanju suda u vertikalnom pravcu naviše sa ubrzanjem $a = 1\,ms^{-2}$, visina stuba gasa ispod klipa smanji se za 5 % u poredjenju sa visinom kada sud miruje. Smatrajući da je temperatura gasa nepromenjena, i da je sud otvoren sa gornje strane, odrediti spoljašnji pritisak.

Rešenje



U slučaju kada cilindar miruje uslov ravnoteže je

$$p_1 = p_a + \frac{Q}{S} = p_a + \frac{mg}{S}, \qquad (6.16)$$

gde je p_1 pritisak gasa ispod klipa, a p_a spoljašnji (atmosferski) pritisak. Kada se cilindar kreće naviše sa ubrzanjem a važi:

$$p_2 = p_a + \frac{Q+F}{S} = p_a + \frac{m(g+a)}{S}, \qquad (6.17)$$

gde je p_2 pritisak gasa ispod cilindra.

Uslov zadatka da je temperatura konstantna daje

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \;\Rightarrow\; p_1 S h_1 = p_2 S h_2 \;\Rightarrow\; p_1 h_1 = p_2 h_2, \qquad (6.18)$$

gde je h_1 visina stuba gasa ispod klipa u slučaju kada cilindar miruje, a h_2 u slučaju kada se kreće naviše. Veza izmedju visina h_1 i h_2 daje

$$\frac{\Delta h}{h_1} = \frac{h_1 - h_2}{h_1} = 0.05 \;\Rightarrow\; h_2 = 0.95 h_1. \qquad (6.19)$$

Zamenom (6.16) i (6.17) u (6.18), uz korišćenje uslova (6.19), dobija se da je

$$\left(p_a + \frac{mg}{S}\right) h_1 = \left(p_a + \frac{m(g+a)}{S}\right) 0.95 h_1,$$

$$p_a = \frac{m}{S}\left(\frac{0.95}{0.05}a - g\right) = 18.38\,kPa.$$

Zadatak 8

U horizontalno postavljenom, zatvorenom cilindričnom sudu nalazi se pokretna pregrada koja može bez trenja da klizi duž suda. Dužina suda je $l = 40\,cm$, a površina poprečnog preseka $S = 20\,cm^2$. Pregrada mase $m = 2\,kg$ nalazi se na sredini suda. U sudu, sa obe strane pregrade, nalazi se vazduh pod pritiskom $p_o = 5 \cdot 10^3\,Pa$.

a) Koliko će se pomeriti pregrada, ako sud počne da se kreće u pravcu ose cilindra, sa ubrzanjem $a = 5\,ms^{-2}$? Zanemariti promenu temperature.

b) Ako se sud postavi vertikalno, koliko će se pomeriti pregrada naniže pri konstantnoj temperaturi? Kolika treba da bude relativna promena temperature u donjem delu suda, da bi pregrada delila sud na dva jednaka dela?

U oba slučaja zanemariti debljinu pregrade. Univerzalna gasna konstanta je $R = 8.31\,J(molK)^{-1}$.

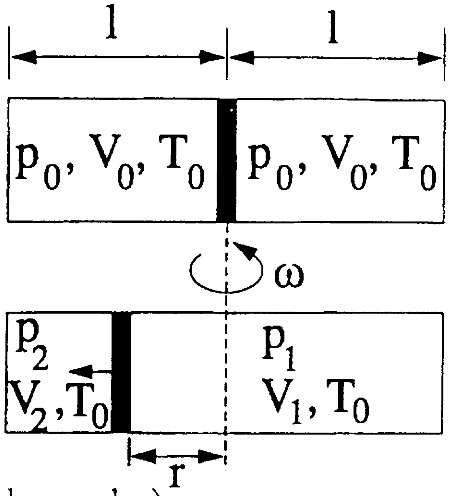
Rešenje

a) Kada se sud kreće ulevo[1] sa ubrzanjem a, uslov ravnoteže pritisaka je

$$p_2 = p_1 + \frac{ma}{S}, \qquad (6.20)$$

[1] Identično slučaju kada se sud kreće udesno.

gde je p_1 pritisak u levom, a p_2 pritisak u desnom delu suda, dok se iz uslova nepromenljivosti temperature dobija da je



$$p_1V_1 = p_oV_o; p_2V_2 = p_oV_o, \quad (6.21)$$

gde je $V_o = lS/2$ zapremina delova suda u miru, $V_1 = V_o + Sx$ zapremina levog dela, a $V_2 = V_o - Sx$ zapremina desnog dela tokom kretanja sa ubrzanjem a, i x rastojanje za koje se pomeri klip usled kretanja. Zamenom izraza (6.21) u izraz (6.20) dobija se

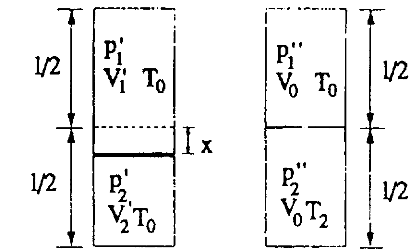
$$ma = S\left(\frac{p_oV_o}{V_2} - \frac{p_oV_o}{V_1}\right) = p_olS\left(\frac{1}{l-2x} - \frac{1}{l+2x}\right)$$

ili

$$x^2 + \frac{p_olS}{ma}x - \frac{l^2}{4} = 0, \qquad (6.22)$$

čije pozitivno rešenje je $x = 8.28\,cm$.

b) U slučaju kada se cilindar postavi vertikalno, uslov ravnoteže pritisaka je



$$p_2' = p_1' + \frac{mg}{S},$$

a uslov konstantnosti temperature:

$$p_1'V_1' = p_oV_o, \qquad p_2'V_2' = p_oV_o,$$

gde je p_1' pritisak u gornjem, a p_2' pritisak u donjem delu suda, $V_1' = V_o + Sx'$ zapremina gornjeg, a $V_2' = V_o - Sx'$ zapremina donjeg dela cilindra i x' rastojanje za koje se pomeri klip naniže. Na osnovu ovih uslova dobija se kvadratna jednačina,

$$mg = S\left(\frac{p_oV_o}{V_2} - \frac{p_oV_o}{V_1}\right) = p_oSl\left(\frac{1}{l-2x} - \frac{1}{l+2x}\right),$$

odnosno

$$x'^2 + \frac{p_olS}{mg}x' - \frac{l^2}{4} = 0, \qquad (6.23)$$

čije je pozitivno rešenje $x' = 12.25\,cm$. Vidi se da je izraz (6.23) identičan sa izrazom (6.22), samo što je ubrzanje a zamenjeno ubrzanjem g.

U slučaju kada su zapremine gornjeg i donjeg dela vertikalno postavljenog suda iste, važe sledeće jednačine stanja:

$$p_1''V_o = nRT_o, \qquad p_2''V_o = nRT_1,$$

gde je p_1'' pritisak u gornjem, a p_2'' pritisak u donjem delu suda, T_o temperatura u gornjem, a T_1 u donjem delu suda. S obzirom da se iz uslova zadatka temperatura u gornjem delu suda ne menja (T_o je u stvari početna temperatura gasa), sledi da je $p_1'' = p_o$.

Korišćenjem uslova ravnoteže pritisaka $p_2'' = p_1'' + mg/S = p_o + mg/S$, dobija se:

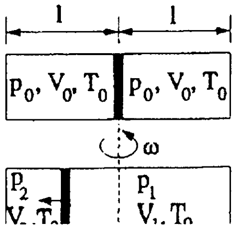
$$\frac{T_1 - T_o}{T_o} = \frac{[p_2''V_o/(nR) - p_oV_o/(nR)]}{p_oV_o/(nR)} = \frac{p_2'' - p_o}{p_o} = \frac{mg/S}{p_o} = \frac{mg}{Sp_o} = 1.96.$$

Zadatak 9

U cilindru zapremine $V = 1.2\,dm^3$, zatvorenom na oba kraja, nalazi se vazduh pod pritiskom $p_o = 0.4\,MPa$. Cilindar je tankom pregradom mase $m = 0.1\,kg$ podeljen na dva jednaka dela. Pod dejstvom momenta spoljašnje sile cilindar rotira stalnom ugaonom brzinom $\omega = 400\,rads^{-1}$ oko vertikalne ose koja prolazi kroz sredinu cilindra, i pri tome se pregrada cilindra pomeri za $r = 0.1\,m$ od ose rotacije. Kolika je površina poprečnog preseka cilindra S ako je temperatura stalna?

Rešenje

Tokom rotacije, pregrada se udaljava od ose rotacije za rastojanje r, tako da se može napisati jednačina ravnoteže pritisaka na sledeći način:



$$p_2 = p_1 + \frac{F_{cf}}{S}, \qquad (6.24)$$

gde je p_1 pritisak u delu cilindra sa većom zapreminom, p_2 pritisak u delu cilindra sa manjom zapreminom, a $F_{cf} = m\omega^2 r$ centrifugalna sila koja deluje na pregradu mase m.

S obzirom da je $T = const.$ sledi:

$$p_o V_o = p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_1 = \frac{V_o}{V_1} p_o, \quad p_2 = \frac{V_o}{V_2} p_o, \tag{6.25}$$

gde su $V_o = lS$, $V_1 = (l+r)S$ i $V_2 = (l-r)S$ odgovarajuće zapremine, a l je dužina polovine cilindra.

Korišćenjem izraza (6.25) i izraza za V_o, V_1 i V_2, dobija se

$$p_2 - p_1 = \frac{V_o}{V_2} p_o - \frac{V_o}{V_1} p_o = \frac{l}{l-r} p_o - \frac{l}{l+r} p_o = \frac{2lr}{l^2 - r^2} p_o,$$

što zamenom u izraz (6.24), s obzirom da je $S = V/2l$ daje

$$p_2 - p_1 = \frac{F_{cf}}{S} \Rightarrow \frac{2lrp_o}{l^2 - r^2} = \frac{m\omega^2 r}{S}, \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + \frac{p_o V}{m\omega^2}} = 0.2\,m.$$

Konačno je $S = V/2l = 0.3\,dm^3$.

Zadatak 10

U balonu zapremine $V = 17\,l$ nalazi se $m_1 = 1.5\,kg$ mase azota na temperaturi $t_1 = 327\,°C$. Koliki će biti pritisak azota p_2 u balonu pri temperaturi $t_2 = 50\,°C$, ako se 35 % azota ispusti? Koliki je bio pritisak pre ispuštanja azota p_1? Molarna masa molekula azota je $M = 28\,gmol^{-1}$, a $R = 8.31\,J(molK)^{-1}$.

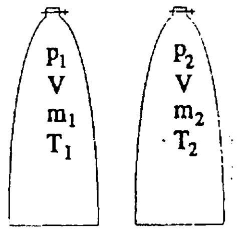
Rešenje

Jednačina stanja za azot na temperaturi t_1 je

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1 \Rightarrow p_1 = \frac{m_1 R T_1}{VM} = 1.57 \cdot 10^7\,Pa \tag{6.26}$$

a na temperaturi t_2

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \tag{6.27}$$



gde je $m_2 = m_1 - 0.35 m_1 = 0.65 m_1$ masa azota nakon ispuštanja. Deobom izraza (6.26) i (6.27) dobija se da je

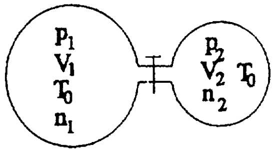
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{m_2 T_2} = \frac{m_1 T_1}{0.65 m_1 T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{0.65 p_1 T_2}{T_1} = 5.5 \cdot 10^6\,Pa.$$

Zadatak 11

Dva balona povezana su jednom cevi na kojoj je slavina. U prvom balonu je neki gas pod pritiskom $p_1 = 1.2 \cdot 10^5\,Pa$, a u drugom isti gas pod pritiskom $p_2 = 2 \cdot 10^5\,Pa$. Zapremina prvog balona je $V_1 = 6\,l$, a drugog $V_2 = 2\,l$. Koliki će pritisak gasa p vladati u balonima nakon otvaranja slavine, ako je temperatura gasa konstantna?

Rešenje

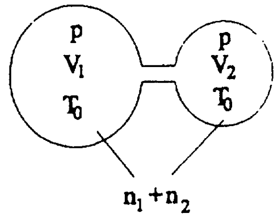
Kada je slavina zatvorena, za svaki balon važi jednačina stanja:



$$p_1 V_1 = n_1 RT, \quad p_2 V_2 = n_2 RT, \tag{6.28}$$

gde su n_1 i n_2 brojevi molova gasa u prvom i drugom balonu, redom, a T temperatura.

Kada je slavina otvorena, važi sledeća jednačina stanja:



$$p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) RT. \tag{6.29}$$

Zamenom veličina $n_1 RT$ i $n_2 RT$ iz (6.28) u (6.29), dobija se da je

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1.4 \cdot 10^5\,Pa.$$

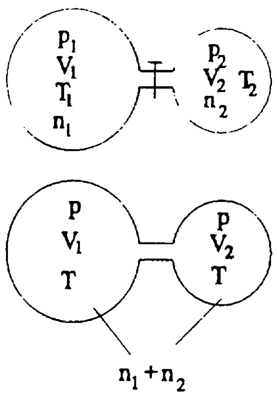
Zadatak 12

Dva toplotno izolovana balona povezana su jednom cevi na kojoj je slavina. U prvom balonu je neki gas pod pritiskom $p_1 = 0.4\,MPa$, a u drugom isti gas pod pritiskom $p_2 = 0.6\,MPa$. Zapremina prvog balona je $V_1 = 6\,l$, a drugog $V_2 = 2\,l$. Temperature gasa su $t_1 = 27\,°C$ i $t_2 = 127\,°C$. Koliki je pritisak p i temperatura T gasa u balonima nakon otvaranja slavine? $(R = 8.31\,J(molK)^{-1})$

Rešenje

Jednačine stanja za svaki balon kada je slavina zatvorena imaju oblik:

$$p_1 V_1 = n_1 R T_1, \quad p_2 V_2 = n_2 R T_2, \qquad (6.30)$$



gde su n_1 i n_2 brojevi molova gasa u prvom i drugom balonu, redom.

Jednačina stanja za slučaj kada je slavina otvorena je

$$p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) R T, \qquad (6.31)$$

gde je T temperatura gasa nakon otvaranja slavine. Zamenom veličina $n_1 R$ i $n_2 R$ iz (6.30) u (6.31), dobija se da je

$$p = \frac{[p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2]\, T}{V_1 + V_2}. \qquad (6.32)$$

Nepoznata temperatura T se može naći korišćenjem uslova da su baloni toplotno izolovani, tj. da nema razmene toplote sa okolinom, tako da važi zakon održanja unutrašnje energije gasa

$$U_1 + U_2 = U \Rightarrow i n_1 T_1 + i n_2 T_2 = i(n_1 + n_2) T \Rightarrow T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}, \qquad (6.33)$$

gde je i broj stepeni slobode molekula gasa.

Zamenom broja molova n_1 i n_2 iz (6.30) i (6.31) u (6.33), izračuna se najpre temperatura $T = 327.27\, K$, a zatim, korišćenjem izraza (6.32), i pritisak $p = 0.45\, MPa$.

Zadatak 13

Vazduh se sastoji od azota (78.08 % zapremine), kiseonika (20.95 %), argona (0.93 %) i ugljenmonoksida (0.03 %). Zanemarivanjem malih primesa drugih gasova (helijuma, neona, kriptona, ksenona), odrediti (u procentima) maseni sastav vazduha. Molarna masa azota je $M_1 = 28\, gmol^{-1}$, kiseonika $M_2 = 32\, gmol^{-1}$, argona $M_3 = 36\, gmol^{-1}$, i ugljenmonoksida $M_4 = 28\, gmol^{-1}$.

Rešenje

Maseni udeo i-tog gasa je

$$n_i' = \frac{m_i}{m} = \frac{n_i M_i}{\sum_{j=1}^{4} n_j M_j} = \frac{N_i / N_A M_i}{\sum_{j=1}^{4} N_j M_j / N_A} = \frac{N_i M_i}{\sum_{j=1}^{4} N_j M_j}, \qquad (6.34)$$

gde je m_i masa i-tog gasa, M_i njegova molarna masa, N_i broj molekula toga gasa, m ukupna masa gasa, a n_j, M_j i N_j predstavljaju broj molova, molarnu masu i broj molekula svakog pojedinog gasa.

S obzirom da se u jednakim zapreminama različitih gasova pri jednakim spoljašnjim uslovima nalazi jednak broj molekula (Avogadrov zakon), može se napisati da je

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \frac{N_3}{V_3} = \frac{N_4}{V_4} = \frac{N}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_i}{V_i} = \frac{N}{V} \quad \Rightarrow \quad N_i = N \frac{V_i}{V} = N n_i'',$$

gde su $V_1,...,V_4$ zapremine koje zauzima $N_1,...,N_4$ molekula svakog pojedinog gasa, N i V ukupan broj molekula i ukupna zapremina koju zauzimaju ovi molekuli, V_i zapremina koju zauzima N_i molekula i-tog gasa, a $n_i'' = V_i/V$ zapreminski udeo i-tog gasa. Uslov zadatka daje: $n_1'' = 0.7808$, $n_2'' = 0.2095$, $n_3'' = 0.093$ i $n_4'' = 0.0003$, odnosno $n = n_1'' + n_2'' + n_3'' + n_4'' = 1$.

Zamenom $N_i = N n_i''$ i $N_j = N n_j''$, izraz (6.34) dobija sledeći oblik:

$$n_i' = \frac{N n_i'' M_i}{\sum_{j=1}^{4} N n_j'' M_j} = \frac{n_i'' M_i}{n_1'' M_1 + n_2'' M_2 + n_3'' M_3 + n_4'' M_4},$$

iz čega sledi: $n_1' = 68.48\,\%$, $n_2' = 21\,\%$, $n_3' = 10.48\,\%$ i $n_4' = 0.03\,\%$.

Zadatak 14

Naći srednju (efektivnu) molarnu masu suvog atmosferskog vazduha, pod pretpostavkom da su poznati sastav vazduha i molarne mase kao u prethodnom zadatku.

Rešenje

Za svaki gas se može napisati jednačina stanja u sledeći način:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \quad p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT, \quad p_4 V = \frac{m_4}{M_4} RT, \qquad (6.35)$$

gde su p_i $(i = 1, 4)$ pritisci pojedinih gasova, V zapremina, a T temperatura vazduha. Nakon sabiranja ovih jednačina dobija se

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} + \frac{m_4}{M_4}\right) RT.$$

Sa druge strane, za smešu gasova važi izraz $pV = mRT/M$, gde je $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ ukupna masa, M efektivna molarna masa, a $p = p_1+p_2+p_3+p_4$ pritisak gasne smeše (Daltonov zakon), iz koga se, korišćenjem izraza (6.35), dobija

$$M = \frac{mRT}{pV} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)RT}{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)V} = $$
$$= \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1/M_1 + m_2/M_2 + m_3/M_3 + m_4/M_4},$$

$$M = \frac{m_1/m + m_2/m + m_3/m + m_4/m}{m_1/(mM_1) + m_2/(mM_2) + m_3/(mM_3) + m_4/(mM_4)},$$

$$M = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4}{n'_1/M_1 + n'_2/M_2 + n'_3/M_3 + n'_4/M_4} = 29.45\, gmol^{-1}.$$

gde je $n'_i = m_i/m$ maseni udeo i-tog gasa, izračunat u prethodnom zadatku.

Zadatak 15

Suvi atmosferski vazduh sadrži 22.1 % kiseonika (od ukupne mase), 75.6 % azota i 1.3 % argona. Procenat ostalih gasova je zanemarljivo mali. Odrediti srednju molarnu masu suvog atmosferskog vazduha, ako su poznate molarne mase ovih elemenata.

Rešenje

Uoči se element vazduha mase m_v koji zauzima zapreminu V, na temperaturi T. Njegov pritisak se može naći iz jednačine stanja i iz Daltonovog zakona, redom

$$p = \frac{m_v RT}{M_v V}; \qquad p = p_1 + p_2 + p_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i RT}{M_i V},$$

gde su p_i parcijalni pritisci kiseonika, azota i argona, m_i njihove mase, a M_i njihove molarne mase. Izjednačavanjem desnih strana ovih izraza dobija se

$$\frac{m_v RT}{M_v V} = \frac{RT}{MV} \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i}{M_i}$$

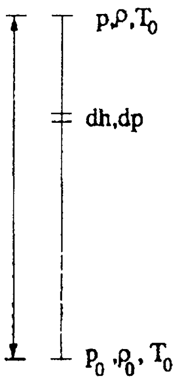
$$\frac{m_v}{M_v} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} = \frac{0.221 m_v}{M_1} + \frac{0.756 m_v}{M_2} + \frac{0.013 m_v}{M_3},$$

odnosno $M_v = 29\, gmol^{-1}$.

Zadatak 16

Izračunati masu stuba vazduha visine $h = 100\, m$ i površine poprečnog preseka $S = 1\, dm^2$ ako je gustina vazduha na površini Zemlje $\rho_o = 1.2\, kgm^{-3}$, a pritisak $p_o = 1.013 \cdot 10^5\, Pa$. Temperaturu vazduha smatrati konstantnom.

Rešenje



Na nekom mestu iznad površine Zemlje, pri povećanju visine za dh pritisak se smanji za dp, što opisuje izraz: $dp = -\rho g dh$, koji važi samo pod uslovom da je promena visine dh dovoljno mala da se unutar nje može zanemariti promena gustine (znak "-" označava da se sa povećanjem jedne veličine (visine) smanjuje druga (pritisak).

Neka je element mase m vazduha, koji se na površini Zemlje može izraziti kao $m = \rho_o V_o$, a na visini h kao $m = \rho V$, gde su V_o i V njegove zapremine na površini Zemlje i na visini h, redom, a ρ gustina vazduha na visini h, tako da se sada dobija da je $\rho_o V_o = \rho V$. Treba napomenuti da je uočeni element zapremine dovoljno mali da se može smatrati da je unutar njega gustina konstantna, što je korišćeno u izrazima za masu.

S obzirom da je temperatura vazduha konstantna, može se iskoristiti Bojl-Mariotov zakon: $p_o V_o = pV$, gde je p pritisak gasa na visini h. Iz ovog zakona se dobija veza:

$$\frac{p}{p_o} = \frac{V_o}{V} = \frac{m/\rho_o}{m/\rho} = \frac{\rho}{\rho_o} \Rightarrow p = \frac{p_o}{\rho_o}\rho \Rightarrow dp = \frac{p_o}{\rho_o} d\rho,$$

tako da važi da je

$$dp = -\rho g dh \;\Rightarrow\; \frac{p_o}{\rho_o}d\rho = -\rho g dh \;\Rightarrow\; \int\limits_{\rho_o}^{\rho(h)} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g\rho_o}{p_o}\int\limits_o^h dh,$$

odnosno

$$\rho(h) = \rho_o \exp\left(-\rho_o g h/p_o\right),$$

čime je dobijena promena gustine sa visinom. Na osnovu elementarne mase dm elementarne zapremine dV unutar koje je gustina $\rho = dm/dV$ konstantna, može se dobiti ukupna masa vazdušnog stuba visine h i površine poprečnog preseka S, tj.

$$dm = \rho dV = \rho S dh \;\Rightarrow\; m = S\int\limits_o^h \rho dh \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; m = S\rho_o \int\limits_o^h \exp-(\rho_o g h/p_o)dh = \frac{Sp_o}{g}[1 - exp(-\rho_o g h/p_o)] = 1.19\,kg.$$

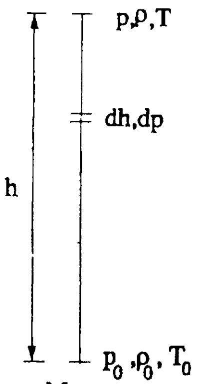
Zadatak 17

Temperatura vazduha menja se sa visinom po zakonu: $T(h) = T_o(1-\beta h)$, gde je T_o temperatura vazduha na površini Zemlje, β konstanta, a h visina od površine Zemlje. Naći zakon promene atmosferskog pritiska sa visinom $p(h)$, ako je na površini Zemlje atmosferski pritisak p_o, a molarna masa vazduha je M. (Poznate su i konstante R i g).

Rešenje

Da bi se našao zakon promene atmosferskog pritiska sa visinom polazi, se od izraza za promenu pritiska dp sa visinom dh: $dp = -\rho g dh$ (videti prethodni zadatak).

Najpre se uoči element mase vazduha $m = nM$, unutar koga se može smatrati da je gustina konstantna, gde je n broj molova, a M molarna masa. Masa ovog elementa vazduha na površini Zemlje ($h = 0$) je $m = \rho_o V_o$, a na visini h je $m = \rho V$, gde su V_o i V zapremine elementa vazduha na površini Zemlje i na visini h, redom, a ρ_o i ρ gustine vazduha na površini Zemlje i na visini h, redom, tako da se dobija izraz $\rho_o V_o = \rho V$.



Jednačina stanja koja se odnosi na uočeni element mase m na površini Zemlje je: $p_o V_o = nRT_o$, a na visini h: $pV = nRT$, gde je $n = m/M = \rho_o V_o/M$ broj molova vazduha. Deobom ovih jednačina dobija se

$$\frac{p_o V_o}{pV} = \frac{T_o}{T} \Rightarrow \frac{V_o}{V} = \frac{pT_o}{p_o T}$$

$$\frac{m/\rho_o}{m/\rho} = \frac{pT_o}{p_o T} \Rightarrow \rho = \rho_o\frac{pT_o}{p_o T},$$

tako da se može napisati da je

$$dp = -\rho g dh = -\frac{\rho_o p T_o}{p_o T}g dh = -\frac{\rho_o p T_o}{T}\frac{V_o}{(\rho_o V_o R T_o)/M}g dh = -\frac{pMg}{RT}dh$$

odnosno

$$\int\limits_{p_o}^{p(h)}\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{T_o R}\int\limits_o^h \frac{dh}{1-\beta h} \;\Rightarrow\; p(h) = p_o(1-\beta h)^{Mg/(RT_o\beta)}.$$

Zadatak 18

U zatvorenom sudu zapremine $V = 1\,m^3$ nalazi se $m_1 = 0.9\,kg$ vode i $m_2 = 1.6\,kg$ kiseonika. Odrediti pritisak u sudu pri temperaturi $t = 500\,^oC$, znajući da na toj temperaturi sva voda prelazi u paru. Molarna masa vodene pare je $M_{H_2O} = 18\,gmol^{-1}$, a kiseonika je $M_{O_2} = 32\,gmol^{-1}$ i univerzalna gasna konstanta $R = 8.31\,J(molK)^{-1}$.

Rešenje

Posle isparavanja vode, u sudu se uspostavlja pritisak $p = p_1 + p_2$, gde p_1 pritisak kiseonika, p_2 pritisak vodene pare (Daltonov zakon).

Na osnovu jednačine stanja idealnog gasa za vodenu paru i kiseonik dobija se

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{VM_{H_2O}} = 321.2\,kPa; \qquad p_2 = \frac{m_2 RT}{VM_{O_2}} = 321.2\,kPa,$$

tako da je ukupan pritisak $p = p_1 + p_2 = 642.4\,kPa$.

Zadatak 19
Smeša kiseonika i azota pri temperaturi $T = 290\,K$ i pritisku $p = 5.8\,kPa$ ima gustinu $\rho = 0.4\,kgm^{-3}$. Odrediti koncentraciju molekula kiseonika u smeši. Molarna masa kiseonika je $M_1 = 32\,gmol^{-1}$, a azota $M_2 = 28\,gmol^{-1}$.

Rešenje

Koncentracija molekula kiseonika u smeši je

$$n_1' = \frac{N_1}{V} = \frac{m_1 N_a}{M_1}\frac{1}{V} = \rho_1 V \frac{N_a}{M_1}\frac{1}{V} = \frac{\rho_1 N_a}{M_1}, \qquad (6.36)$$

gde je N_1 broj molekula kiseonika u smeši, V ukupna zapremina smeše, $m_1 = \rho_1 V$ masa molekula kiseonika u smeši, i ρ_1 gustina kiseonika u smeši. U izrazu je korišćena činjenica da se broj molova kiseonika može naći iz $n_1 = N_1/N_a$ i $n_1 = m_1/M_1$, odnosno da je $N_1 = m_1 N_a/M_1$. Kako je ukupna masa $m = m_1 + m_2 \;\Rightarrow\; \rho V = \rho_1 V + \rho_2 V$, gde je ρ_2 gustina azota u smeši, a $m_2 = \rho_2 V$ masa molekula azota u smeši, sledi da je gustina smeše $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

Prema Daltonovom zakonu je $p = p_1 + p_2$, gde je $p_1 = \rho_1 RT/M_1$ parcijalni pritisak kiseonika, a $p_2 = \rho_2 RT/M_2$ azota, tako da se sada može napisati izraz za pritisak gasne smeše

$$p = p_1 + p_2 = \frac{\rho_1 RT}{M_1} + \frac{\rho_2 RT}{M_2} = \frac{\rho_1 RT}{M_1} + \frac{(\rho - \rho_1)RT}{M_2},$$

odakle se može izraziti gustina kiseonika

$$\rho_1 = \frac{p - \rho RT/M_2}{RT(1/M_1 - 1/M_2)} = \frac{pM_1M_2/(RT) - \rho M_1}{M_2 - M_1},$$

što zamenom u izraz (6.36) daje

$$n_1 = \frac{(pM_2N_a)/(RT) - \rho N_a}{M_2 - M_1} = 5 \cdot 10^{25}\,m^{-3}.$$

Zadatak 20
U sudu zapremine $V = 1\,l$ nalazi se $m = 0.28\,g$ azota. Azot se zagreje do temperature $t = 1500\,^{o}C$. Na toj temperaturi $\alpha = 30\,\%$ molekula azota je disocirano na atome. Odrediti pritisak p u sudu. Molarna masa molekula azota je $M = 28\,gmol^{-1}$, a $R = 8.31\,J(molK)^{-1}$.

Rešenje

Pritisak gasa u sudu se može naći na osnovu Daltonovog zakona i jednačine stanja idealnog gasa, uz pretpostavku da je p_1 pritisak atoma azota, p_2 pritisak molekula azota, $n_1 = \alpha m/M_N$ broj molova azota u atomskom, $n_2 = (1-\alpha)m/M$ broj molova azota u molekularnom obliku, $\alpha = 0.3$ stepen njihove disocijacije, a $M_N = M/2$ molarna masa atoma azota. Dakle,

$$p = p_1 + p_2 = \frac{n_1 RT}{V} + \frac{n_2 RT}{V} = \frac{\alpha m}{M/2}\frac{RT}{V} + \frac{(1-\alpha)m}{M}\frac{RT}{V}$$

$$p = (\alpha + 1)\frac{mRT}{MV} = 1.9 \cdot 10^5\,Pa.$$

Zadatak 21
U sudu se nalazi smeša azota i vodonika. Pri temperaturi T, kada je azot u atomskom stanju (disocijaciju vodonika zanemariti), pritisak u sudu je p. Pri temperaturi $4T$, kada su oba gasa u atomskom stanju, pritisak u sudu je $7.5\,p$. Odrediti odnos masa vodonika i azota u smeši. Molarne mase vodonika i azota su $M_{H_2} = 2\,gmol^{-1}$ i $M_{N_2} = 28\,gmol^{-1}$, redom.

Rešenje

Na temperaturi T jednačine stanja za vodonik u molekularnom stanju i azot u atomskom stanju imaju sledeći oblik:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1}RT, \qquad p_2 V = \frac{m_2}{M_2/2}RT, \qquad (6.37)$$

gde su m_1 i m_2 mase vodonika i azota, $M_1 = M_{H_2}$ i $M_2 = M_{N_2}$ molarne mase njihovih dvoatomnih molekula, a p_1 i p_2 parcijalni pritisci vodonika i azota. Na temperaturi $4T$ je

$$p_1' V = \frac{m_1}{M_2/2}R4T, \qquad p_2' V = \frac{m_2}{M_2/2}R4T, \qquad (6.38)$$

gde su p_1' i p_2' odgovarajući parcijalni pritisci vodonika i azota.

Deobom odgovarajućih jednačina iz sistema (6.37) i (6.38) dobijaju se sledeće veze: $p_1' = 8p_1$ i $p_2' = 4p_2$. Korišćenjem Daltonovog zakona može se predstaviti pritisak gasne smeše u prvom $p = p_1 + p_2$ i u drugom slučaju $p' = p_1' + p_2'$, odnosno

$$7.5p = p_1' + p_2' = 8p_1 + 4p_2 = 8p_1 + 4(p - p_1) = 4p_1 + 4p \;\Rightarrow\; p_1 = \frac{3.5}{4}p,$$

odakle sledi $p_2 = p - p_1 = p - 3.5p/4 = 0.5p/4$. Posle sredjivanja se dobija

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{3.5p/4}{0.5p/4} = \frac{3.5}{0.5};\ \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1RT/(M_1V)}{2m_2RT/(M_2V)} = \frac{m_1M_2}{2m_2M_1} \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{7M_1}{0.5M_2} = 1.$$

Zadatak 22

U sudu se nalazi vazduh na temperaturi $t_1 = 0\,^oC$. Kolika je temperatura vazduha posle adijabatskog širenja pri kome se pritisak gasa snizi na 1/3 njegove prvobitne vrednosti. Adijabatska konstanta za vazduh je $\kappa = 1.4$.

Rešenje

Pošto se radi o adijabatskom procesu važe izrazi:

$$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa, \quad T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1},$$

gde su p_1 i $p_2 = p_1/3$ pritisci gasa pre i nakon adijabatskog širenja, redom, V_1 i V_2 odgovarajuće zapremine, a T_1 i T_2 odgovarajuće temperature.

Iz prve jednačine se dobija da je

$$\frac{V_1^\kappa}{V_2^\kappa} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{3}, \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/\kappa}, \tag{6.39}$$

a iz druge

$$\frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}} = \frac{T_2}{T_1}, \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\kappa-1)}. \tag{6.40}$$

Izjednačavanje desnih strana jednačina (6.39) i (6.40) daje

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\kappa-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/\kappa} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} \Rightarrow T_2 = 0.73T_1 = 199.4\,K.$$

Zadatak 23

Kiseonik mase $m = 10\,g$ nalazi se na temperaturi $t_1 = 10\,^oC$ i pod pritiskom $p_1 = 0.3\,MPa$. Posle zagrevanja pri stalnom pritisku, gas je zauzeo

zapreminu $V_2 = 10\,l$. Kolika je količina toplote pri tome utrošena? Kolika je energija toplotnog kretanja molekula gasa pre i posle zagrevanja? Kolika je promena unutrašnje energije gasa? Specifični toplotni kapacitet kiseonika pri stalnom pritisku je $c_p = 0.9\,J(gK)^{-1}$, a molarna masa kiseonika $M = 32\,gmol^{-1}$.

Rešenje

Količina toplote koja se preda gasu je

$$Q = mc_p(T_2 - T_1),$$

gde je T_2 temperatura gasa posle dovodjenja toplote. Iz jednačine stanja gasa za slučaj posle zagrevanja je

$$p_1V_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

dobija se temperatura $T_2 = 1.156 \cdot 10^3\,K$. Količina toplote je $Q = 7857\,K$.

Energije toplotnog kretanja molekula gasa pre i posle zagrevanja su

$$W_1 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_1 = 1837\,J, \qquad W_2 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_2 = 7504\,J,$$

gde je $i = 5$ broj stepeni slobode za kiseonik koji se nalazi u dvoatomnom stanju.

Promena unutrašnje energije gasa je jednaka razlici energija toplotnog kretanja molekula gasa posle i pre zagrevanja, tj.

$$\Delta U = W_2 - W_1 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_2 - \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_1 = mc_v(T_2 - T_1) = 5667\,J,$$

gde je $c_V = iR/(2M)$ specifični toplotni kapacitet gasa pri konstantnoj zapremini.

Zadatak 24

U zatvorenom sudu zapremine $V = 10\,l$ nalazi se vazduh pod pritiskom $p_1 = 0.1\,MPa$. Koliku količinu toplote treba predati vazduhu da bi se pritisak u sudu povećao pet puta? Smatrati da su molekuli vazduha dvoatomni.

Rešenje

Potrebna količina toplote Q, koja je u ovom slučaju jednaka unutrašnjoj energiji gasa ΔU, je:

$$Q = nC_V(T_2 - T_1) \equiv \Delta U,$$

gde je $C_V = Mc_V = iR/2$ molarni specifični toplotni kapacitet gasa pri konstantnoj zapremini, $i = 5$ broj stepeni slobode za dvoatomni gas.

Oduzimanjem jednačina stanja gasa za slučaj posle i pre njegovog zagrevanja, dobija se

$$p_1V = nRT_1; \; p_2V = nRT_2 \;\Rightarrow\; (p_2 - p_1)V = nR(T_2 - T_1),$$

odnosno

$$Q = C_v\frac{V(p_2 - p_1)}{R} = \frac{iR}{2}\frac{V(5p_1 - p_1)}{R} = \frac{4ip_1V}{2} = 10\,kJ.$$

Zadatak 25
Srednja kvadratna brzina molekula nekog gasa pri temperaturi $T = 296\,K$ je $<v> = 480\,ms^{-1}$. Koliko se molekula nalazi u $m = 10\,g$ toga gasa? Univerzalna gasna konstamta je $R = 8.31\,J(molK)^{-1}$, a Avogadrov broj $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$

Rešenje

Broj molekula koji se nalazi u nekoj masi m gasa je: $N = mN_a/M$. Molarna masa se može naći iz izraza za srednju kvadratnu brzinu molekula gasa

$$<v> = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \;\Rightarrow\; M = \frac{3RT}{<v>^2},$$

$$N = \frac{mN_a}{M} = \frac{mN_a <v>^2}{3RT} = \frac{m<v>^2}{3kT} = 1.88 \cdot 10^{23}\,molekula,$$

gde je $k = R/N_a$ Bolcmanova konstanta.

Zadatak 26
Pri kojoj temperaturi atomi helijuma ^2_4He mogu da napuste gravitaciono polje Zemlje? Poluprečnik Zemlje je $R_z = 6.4 \cdot 10^3\,km$, univerzalna gasna konstanta $R = 8.31\,J(molK)^{-1}$, a ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje $g_o = 9.8\,ms^{-2}$.

Rešenje

Da bi molekul napustio Zemljino gravitaciono polje, njegova srednja kinetička energija mora biti jednaka radu koji je potrebno izvršiti da bi se on prebacio u beskonačnost

$$\overline{E}_k = A \;\Rightarrow\; \frac{m\overline{v^2}}{2} = \int_{R_z}^{\infty}\gamma\frac{mM_z}{r^2}dr = \gamma mM_z\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{R_z}^{\infty} \;\Rightarrow\; \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{\gamma mM_z}{R_z},$$

gde je m masa atoma helijuma ($m = M/N_a$, $M = 4\,gmol^{-1}$ molarna masa helijuma, N_a Avogadrov broj) i M_z masa Zemlje.

Na osnovu molekularno-kinetičke teorije gasova srednja kinetička energija molekula je:

$$E_k = \frac{m<v>^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

gde je k Bolcmanova konstanta, tako da se dobija

$$\frac{\gamma mM_z}{R_z} = \frac{3}{2}kT \;\Rightarrow\; T = \frac{2\gamma mM_z}{3R_zk}.$$

Pošto je masa atoma helijuma $m = M/N_a$, i $k = R/N_a$, temperatura je jednaka

$$T = \frac{2\gamma MM_z}{3RR_z}.$$

Uz uslov da je jačina gravitacionog polja na površini Zemlje (ubrzanje Zemljine teže) $g_o = \gamma M_z/R_z^2$, odakle se može izraziti $\gamma M_z = g_oR_z^2$, konačno se dobija

$$T = \frac{2Mg_oR_z}{3R} = 2 \cdot 10^4\,K.$$

Zadatak 27
Specifični toplotni kapacitet idealnog gasa pri konstantnom pritisku menja

se u zavisnosti od temperature po zakonu $c_p = bT^2 + d$, gde su b i d konstante. Naći vezu izmedju zapremine gasa i njegove temperature.

Rešenje

Po prvom principu termodinamike promena količine toplote je $dQ = dU + dA = dU + pdV$, a kada je u pitanju izobarski proces, onda važi i izraz $dQ = mc_p dT$, odakle se dobija da je

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + p\frac{dV}{dT}, \qquad \frac{dQ}{dT} = mc_p = m(bT^2 + d),$$

odnosno

$$m(bT^2 + d) = \frac{dU}{dT} + p\frac{dV}{dT} = mc_V + \frac{mRT}{MV}\frac{dV}{dT}, \tag{6.41}$$

gde su iskorišćene veze: $dU = mc_V dT$ i $pV = mRT/M$. Razdvajanjem promenljivih u izrazu (6.41) i integracijom dobija se

$$\int \frac{M\,(bT^2 + d - c_v)\,dT}{RT} = \int \frac{dV}{V},$$

odnosno

$$M\frac{b}{R}\frac{T^2}{2} + M\frac{d}{R}\ln T - M\frac{c_v}{R}\ln T = \ln V + C_o,$$

gde je C_o integraciona konstanta.

Posle sredjivanja se dobija

$$\ln V - M\frac{b}{R}\frac{T^2}{2} - \frac{M}{R}(d - c_V)\ln T = const \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad V \exp[-bMT^2/(2R)]T^{c_v M/R - dM/R} = const,$$

a kako je $c_V = iR/2$, sledi

$$V \exp[-bMT^2/(2R)]T^{M(i/2M - d/R)} = const. \tag{6.42}$$

Zadatak 28

Na temperaturi $t_1 = 27\,^\circ C$ odredjena količina vazduha učestvuje u nekom procesu, pri čemu se njegov specifični toplotni kapacitet pri konstantnom

pritisku menja po zakonu $c_p = bT^2 + d$. Koliko puta se promeni zapremina vazduha ako je na kraju procesa njegova temperatura $t_2 = 227\,^\circ C$? Odnos specifičnih toplotnih kapaciteta za vazduh je $\kappa = 1.4$, $b = 1000\,Jkg^{-1}K^{-3}$, $d = 0.000012\,J(kgK)^{-1}$, a molarna masa vazduha $M = 29\,gmol^{-1}$.

Rešenje

Koristećenjem izraza (6.42) dobija se

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\exp[-bMT_2^2/(2R)]T_2^{iM/2 - dM/R}}{\exp[-bMT_1^2/(2R)]T_1^{iM/2 - dM/R}} = 2.02,$$

pri čemu je broj stepeni slobode i nadjen iz veze $\kappa = c_p/c_V = (i+2)/i \Rightarrow i = 2/(\kappa - 1) = 5$. U opštem slučaju, vazduh se može približno posmatrati kao gas sa dvoatomnim molekulima, jer gasovi koji dominiraju u njegovom sastavu (azot i kiseonik) imaju dvoatomne molekule.

Zadatak 29

Koliki je odnos specifičnih toplotnih kapaciteta c_p i c_V za smešu gasova koju čine $m_1 = 20\,g$ helijuma i $m_2 = 8\,g$ vodonika? Molarna masa atoma helijuma je $M_{He} = 2\,gmol^{-1}$, a molekula vodonika $M_{H_2} = 2\,gmol^{-1}$.

Rešenje

Količina toplote neophodna za zagrevanje mase m_1 helijuma za temperaturni interval Δt pri konstantnoj zapremini je

$$Q_1 = c_{v1} m_1 \Delta t,$$

a količina toplote neophodna za zagrevanje mase m_2 vodonika pri istim uslovima je

$$Q_2 = c_{V2} m_2 \Delta t,$$

gde su c_{V1} i c_{V2} specifični topolotni kapaciteti helijuma, odnosno vodonika, pri konstantnoj zapremini. Analogno, za smešu gasova se može napisati da je

$$Q_v = c_v(m_1 + m_2)\Delta t,$$

gde je c_V specifični toplotni kapacitet smeše gasova pri konstantnoj zapremini.

Korišćenjem zakona održanja energije:

$$Q_V = Q_1 + Q_2,$$

dobija se

$$c_V(m_1 + m_2)\Delta t = c_{V1}m_1\Delta t + c_{v2}m_2\Delta t \;\Rightarrow\; c_V = \frac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.43)$$

Identičnim postupkom može se naći specifični toplotni kapacitet smeše gasova pri konstantnom pritisku:

$$c_p(m_1 + m_2)\Delta t = c_{p1}m_1\Delta t + c_{p2}m_2\Delta t, \;\Rightarrow\; c_p = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2},$$

a takodje odnos specifičnih toplotnih kapaciteta

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}.$$

Korišćenjem izraza

$$c_{p1} = \frac{i_1+2}{2M_{He}}R, \quad c_{V1} = \frac{i_1}{2M_{He}}R, \quad c_{p2} = \frac{i_2+2}{2M_{H_2}}R, \quad c_{V2} = \frac{i_2}{2M_{H_2}}R,$$

gde je $i_1 = 3$ broj stepena slobode helijuma, koji je u jednoatomnom stanju (kao i svi plemeniti gasovi), i $i_2 = 5$ broj stepeni slobode vodonika, koji je u dvoatomnom stanju, dobija se odnos $c_p/c_V = 1.56$.

Zadatak 30

Dva suda su povezana jednom cevi na kojoj je slavina. U prvom sudu nalazi se vodonik na temperaturi $t_A = 107\,°C$ i pritisku $p_A = 6\cdot 10^5\,Pa$, a u drugom azot na temperaturi $t_B = 37\,°C$ i pritisku $p_B = 10^6\,Pa$. Zapremina prvog suda je $V_A = 0.5\,m^3$, a drugog B je $V_B = 0.8\,m^3$. Odrediti temperaturu T_{SM} smeše gasova nastale nakon otvaranja slavine, pretpostavljajući da nema razmene toplote sa okolinom.

Rešenje

S obzirom da nema razmene toplote sa okolinom, unutrašnja energija smeše gasova jednaka je zbiru unutrašnjih energija gasova u prvom i drugom sudu, tj.

$$U = U_A + U_B \;\Rightarrow\; m_{SM}c_{VSM}T_{SM} = m_A c_{VA}T_A + m_B c_{VB}T_B, \quad (6.44)$$

gde su U, U_A i U_B unutrašnje energije, $m_{SM} = m_A + m_B$, m_A i m_B mase, a c_{VSM}, c_{VA} i c_{VB} specifični toplotni kapaciteti pri konstantnoj zapremini smeše gasova, gasa u prvom i i drugom sudu, redom.

Korišćenjem jednačina stanja za sudove pre otvaranja slavine, i gasnu smešu nakon otvaranja slavine:

$$p_A V_A = \frac{m_A}{M_A}RT_A, \quad p_B V_B = \frac{m_B}{M_B}RT_B, \quad p_{SM}V_{SM} = \frac{m_{SM}}{M_{SM}}RT_{SM}, \quad (6.45)$$

izraz za temperaturu T_{SM}, dobijen iz izraza (6.44), ima sledeći oblik:

$$T_{SM} = \frac{m_A c_{VA}T_A + m_B c_{VB}T_B}{m_{SM}c_{VSM}},$$

ili

$$T_{SM} = \frac{p_A V_A/M_A c_{VA}T_A/(RT_A + p_B V_B/M_B c_{VB}T_B/RT_B}{(m_A + m_B)c_{VSM}}. \quad (6.46)$$

Iz zakona održanja energije

$$Q_{SM} = Q_A + Q_B \;\Rightarrow\; m_{SM}c_{VSM}\Delta T = m_A c_{VA}\Delta T + m_B c_{VB}\Delta T,$$

gde je Q_{SM} količina toplote potrebna za zagrevanje gasne smeše za temperaturni interval ΔT, a Q_A i Q_B količine toplote potrebne za zagrevanje gasa, redom, za ΔT, može se dobiti specifični toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini smeše gasova:

$$c_{VSM} = \frac{m_A c_{VA} + m_B c_{VB}}{m_A + m_B}, \quad (6.47)$$

gde su $c_{VA} = \dfrac{i_A R}{2M_A}$ i $c_{VB} = \dfrac{i_B R}{2M_B}$ specifični toplotni kapaciteti vodonika i azota, pri čemu su brojevi stepena slobode isti ($i_A = i_B = i = 5$), jer se i vodonik i azot u prirodi nalaze u molekularnom stanju i to kao dvoatomni molekuli.

Zamena veličina c_{VSM} iz (6.47) i m_A i m_B iz (6.45) u (6.46) daje

$$T_{SM} = \frac{\frac{p_AV_A}{R}M_Ac_{VA}+\frac{p_BV_B}{R}M_Bc_{VB}}{m_Ac_{VA}+m_Bc_{VB}} = \frac{\frac{p_AV_A}{R}M_Ac_{VA}+\frac{p_BV_B}{R}M_Bc_{VB}}{\frac{p_AV_A}{RT_A}M_Ac_{VA}+\frac{p_BV_B}{RT_B}M_Bc_{VB}} =$$

$$= \frac{\frac{p_AV_A}{R}M_A\frac{iR}{2M_A}+\frac{p_BV_B}{R}M_B\frac{iR}{2M_B}}{\frac{p_AV_A}{RT_A}M_A\frac{iR}{2M_A}+\frac{p_BV_B}{RT_B}M_B\frac{iR}{2M_B}} = \frac{p_AV_A+p_BV_B}{\frac{p_AV_A}{T_A}+\frac{p_BV_B}{T_B}} = 326\,K. \quad (6.48)$$

Zadatak 31

Pri izobarnom zagrevanju argona izvrši se rad $A = 8\,J$. Kolika je količina toplote predata gasu?

Rešenje

Pri izobarnom procesu, količina toplote koja se preda gasu troši se na povećanje njegove kinetičke energije i vršenje spoljašnjeg rada:

$$Q = \Delta U + A,$$

gde je promena unutrašnje energije $\Delta U = inR(T_2 - T_1)/2$. Izvršeni rad pri izobarnom procesu je $A = p(V_2 - V_1)$, pri čemu je p pritisak gasa, V_1 zapremina gasa pre, a V_2 posle zagrevanja gasa.

Korišćenjem jednačine stanja idealnog gasa za slučajeve pre i posle dovodjenja toplote

$$pV_1 = nRT_1,\ \ pV_2 = nRT_2 \ \ \Rightarrow \ \ A = nR(T_2 - T_1),$$

i znajući da je argon jednoatomni gas ($i = 3$), dobija se da je

$$Q = \Delta U + A = \frac{inR(T_2 - T_1)}{2} + nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1),$$

$$\frac{i+2}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}A = 20J.$$

Do rešenja se moglo doći i preko izraza za količinu toplote kod izobarnog procesa. tj.

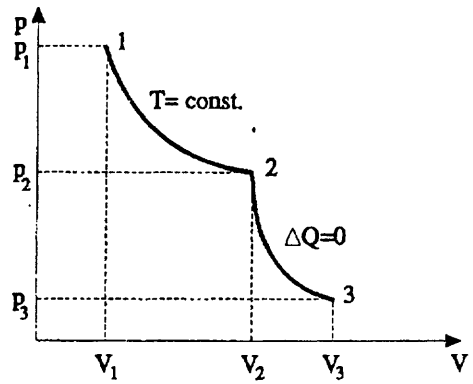
$$Q = nC_p(T_2 - T_1) = \frac{i+2}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}A = 20J.$$

Zadatak 32

Jedan mol idealnog dvoatomnog gasa izotermno se širi od zapremine V_1 do zapremine $V_2 = 10V_1$. Zatim ta količina gasa adijabatski poveća zapreminu na $V_3 = 2V_2$. Ako je konačna temperatura gasa $T_3 = 300\,K$, naći količinu toplote koja je dovedena gasu pri izotermnom širenju.

Rešenje

Količina toplote dovedena gasu pri izotermnom širenju iz stanja 1 u stanje 2 je



$$Q_{12} = A_{12} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1},$$

ili

$$nRT_1 \ln 10,$$

jer je tokom ovog procesa promena unutrašnje energije jednaka nuli ($\Delta U_{12} = 0$). Temperatura T_1, koja je jednaka temperaturi T_2, može se naći iz izraza za adijabatski proces, tj.

$$T_2V_2^{\kappa-1} = T_3V_3^{\kappa-1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T_3\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa-1} = T_3 2^{\kappa-1} = 396\,K,$$

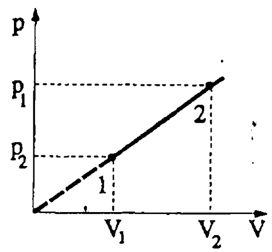
pri čemu $c_p/c_V = (i+2)/i$ za dvoatomne gasove iznosi $\kappa = 1.4$, jer na nižim temperaturama oni imaju pet stepeni slobode ($i = 5$). Za količinu toplote se dobija $Q_{12} = 7577\,J$.

Zadatak 33

U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se idealni dvoatomni gas. U početnom položaju klipa zapremina gasa je $V_1 = 15\,l$, a pritisak $p_1 = 3\cdot 10^6\,Pa$. Gas se pri zagrevanju širi tako da se promene stanja na $p - V$ dijagramu mogu predstaviti pravom linijom koja prolazi kroz koordinatni početak. Kolika se količina toplote utroši pri povećanju zapremine za $\Delta V = 4\,l$ i kolika je promena unutrašnje energije gasa pri tome?

Rešenje

Ako su parametri stanja gasa u stanju 1 (početno stanje) p_1, V_1 i T_1, a u stanju 2 (krajnje stanje) p_2, $V_2 = V_1 + \Delta V$ i T_2, promena unutrašnje energije gasa pri prelazu klipa iz položaja 1 u položaj 2 je



$$\Delta U_{12} = nC_v(T_2 - T_1),$$

$$\Delta U_{12} n \frac{i}{2} R \left(\frac{p_2V_2}{nR} - \frac{p_1V_1}{nR}\right), \qquad (6.49)$$

pri čemu su temperature T_1 i T_2 izražene iz jednačina stanja idealnog gasa.

Iz uslova da se promene stanja na $p - V$ dijagramu mogu predstaviti pravom linijom koja prolazi kroz koordinatni početak, može se napisati veza izmedju pritiska i zapremine $p = kV$, gde je k koeficijent pravca te prave. S obzirom da su poznati pritisak p_1 i zapremina V_1 u početnom stanju, može se naći koeficijent pravca $k = p_1/V_1 = 2 \cdot 10^8\, Nm^{-5}$. Takodje, može se naći i pritisak $p_2 = kV_2 = k(V_1 + \Delta V) = 3.8 \cdot 10^6\, Pa$. Sada se iz izraza (6.49) dobija

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 68\, kJ.$$

Količina toplote utrošena pri prelazu gasa iz stanja 1 u stanje 2 je

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}, \qquad (6.50)$$

pri čemu je izvršeni rad:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} kVdV = \frac{k}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 13.6\, kJ,$$

tako da se dobija $Q = 81.6kJ$.

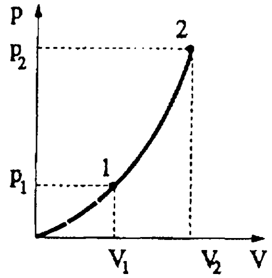
Zadatak 34

U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se idealni jednoatomni gas. Gas se pri zagrevanju širi i prelazi iz stanja 1 u stanje 2, tako da se promene stanja na $p - V$ dijagramu mogu predstaviti krivom $p = kV^2$, gde je k pozitivna

konstanta. Koliki je odnos izvršenog rada i promene unutrašnje energije pri tome?

Rešenje

Izvršeni rad pri prelazu gasa iz stanja 1 u stanje 2 je



$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} kV^2dV = \frac{k}{3}\left(V_2^3 - V_1^3\right),$$

dok je promena unutrašnje energije gasa:

$$\Delta U_{12} = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) =$$

$$= \frac{i}{2}\left(kV_2^2V_2 - kV_1^2V_1\right) = \frac{3}{2}k\left(V_2^3 - V_1^3\right),$$

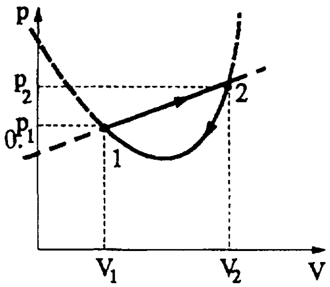
tako da se dobija da je $A_{12}/\Delta U_{12} = 2/9$.

Zadatak 35

Idealni dvoatomni gas prelazi iz stanja 1 u stanje 2, pri čemu se promene njegovog stanja u $p - V$ dijagramu mogu opisati izrazom $p = V/2 + 2$. Zatim se gas vraća u početno stanje 1 po krivoj $p = (3/4)V^2 - 4V + 8$. Koliki je izvršeni rad u toku ciklusa?

Rešenje

Prava i kriva opisane izrazima $p = V/2 + 2$ i $p = (3/4)V^2 - 4V + 8$ seku se u dve tačke, koje se mogu odrediti rešavanjem kvadratne jednačine:



$$\frac{V}{2} + 2 = \frac{3}{4}V^2 - 4V + 8 \Rightarrow 3V^2 - 18V + 24 = 0.$$

Njena rešenja su: $V_1 = 2m^3$ i $p_1 = 3\,Pa$ (stanje 1) i $V_2 = 4\,m^3$ i $p_1 = 4\,Pa$ (stanje 2).

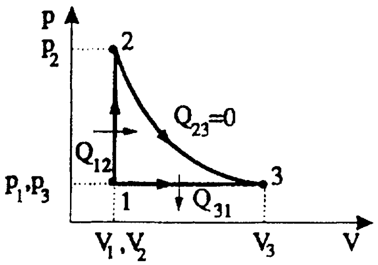
Ukupni izvršeni rad je

$$A = A_{12} + A_{21} = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{V}{2} + 2\right) dV + \int_{V_2}^{V_1} \left(\frac{3}{4}V^2 - 4V + 8\right) dV = \qquad (6.51)$$

$$A = -\frac{1}{4}\left(V_2^3 - V_1^3\right) + \frac{9}{4}\left(V_2^2 - V_1^2\right) - 6(V_2 - V_1) = 1\,J.$$

Zadatak 36

Kružni ciklus prikazan na slici sastoji se od izobare, adijabate i izohore, pri čemu je odnos maksimalne i minimalne temperature u toku ciklusa $T_{max}/T_{min} = 2$. Radno telo je idealni dvoatomni gas. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom ciklusu?



Rešenje

Neka gas u početnom stanju (stanje 1) ima parametre p_1, V_1 i T_1, i neka sadrži n molova. Gas se najpre izohorno širi do stanja 2, u kome ima parametre p_2, $V_2 = V_1$ i T_2, pri čemu je $T_2 > T_1$. Naime, tokom izohornog procesa, s obzirom da se zapremina ne menja, gas ne vrši rad ($A_{12} = 0$), već se celokupna energija koju on primi tokom ovog procesa troši na povećanje unutrašnje energije: $Q_{12} \equiv \Delta U_{12} = nC_V(T_2 - T_1)$.

Da bi se odvijao kružni ciklus, neophodno je da gas sada izvrši adijabatsko širenje do stanja 3, a zatim izobarno sabijanje do početnog stanja 1. U stanju 3 gas ima parametre: $p_3 = p_1$, V_3 i $T_3 < T_2$. Pošto tokom adijabatskog procesa nema razmene toplote izmedju gasa i okoline ($Q_{23} = 0$), rad se vrši na račun smanjenja unutrašnje energije i iznosi: $A_{23} = nR(T_3 - T_2)/(1 - \kappa)$.

Tokom izobarnog procesa od stanja 3 do stanja 1, gas pri stalnom pritisku smanjuje svoju zapreminu, i to je jedino moguće ako se on hladi ($T_3 > T_1$), tj. predaje toplotu okolini (hladnjaku). Očigledno je $T_2 = T_{max}$ i $T_1 = T_{min}$, odnosno $T_2/T_1 = 2$. Rad pri izobarnom procesu je: $A_{31} = p_3(V_1 - V_3) = nR(T_1 - T_3)$, a količina toplote koju gas preda $Q_{31} = nC_p(T_1 - T_3)$, gde je C_p molarni specifični toplotni kapacitet pri konstantnom pritisku.

Iz jednačine stanja idealnog gasa za stanje 1 dobija se temperatura T_1:

$$p_1V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{p_1V_1}{nR}.$$

Analogno za stanje 2 se dobija temperatura T_2

$$p_2V_2 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{p_2V_2}{nR}.$$

Pošto je $T_2 = 2T_1$ i $V_1 = V_2$, dobija se da je $p_2 = 2p_1$.

Sada se stepen korisnog dejstva može naći iz izraza:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}, \tag{6.52}$$

gde je Q_1 količina toplote koju gas primi u toku jednog ciklusa od toplijeg tela (grejača), Q_2 količina toplote koju gas preda u toku jednog ciklusa hladnijem telu (hladnjaku), i A izvršeni rad u toku ciklusa. U ovom slučaju je $Q_1 = Q_{12}$, $Q_2 = Q_{31}$ i $A = A_{12} + A_{23} + A_{31}$, odnosno

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} + A_{31}}{Q_1} = \frac{\frac{nR}{1-\kappa}(T_3 - T_2) + nR(T_1 - T_3)}{nC_V(T_2 - T_1)},$$

a korišćenjem veze $T_{max}/T_{min} = T_2/T_1 = 2$, dobija se

$$\eta = \frac{1/(\kappa - 1)\,[(T_2/T_1 - -T_3/T_1] + 1 - T_3/T_1)}{i/2\,(T_2/T_1 - 1)} =$$

$$\frac{1/(\kappa - 1)\,(2 - T_3/T_1 + 1 - T_3/T_1)}{5/2} = \frac{2}{5(\kappa - 1)}\,(3 - 2T_3/T_1).$$

Treba naći odnos T_3/T_1, a to se može uraditi korišćenjem uslova za adijabatski proces 2–3:

$$p_2V_2^\kappa = p_3V_3^\kappa \quad \Rightarrow \quad p_2V_1^\kappa = p_1V_3^\kappa \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_2}{p_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{V_1} = 2^{1/\kappa}.$$

Pošto se za stanje 1 može napisati jednačina stanja $p_1V_1 = nRT_1$, a za stanje 3, $p_3V_3 = nRT_3$, konačno se dobija

$$V_3 = V_1 2^{1/\kappa} \quad \Rightarrow \quad \frac{nRT_3}{p_3} = \frac{nRT_1}{p_1}2^{1/\kappa} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{p_1} = \frac{T_1}{p_1}2^{1/\kappa} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{T_1} = 2^{1/\kappa},$$

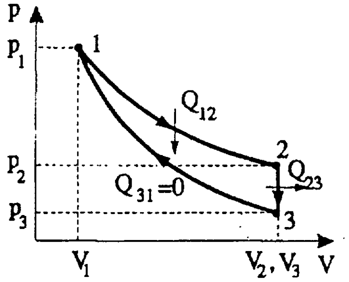
odnosno $\eta = 10.3\,\%$.

Zadatak 37

Kružni ciklus sastoji se od izohore, adijabate i izoterme, pri čemu se izotermni proces vrši pri maksimalnoj temperaturi ciklusa. Radno telo je idealni gas, dok je odnos maksimalne i minimalne temperature u toku ciklusa $T_{max}/T_{min} = \tau$. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom ciklusu?

Rešenje

Da bi se našao stepen korisnog dejstva potrebno je iskoristiti izraz (6.52). S obzirom da se izotermni proces vrši pri maksimalnoj temperaturi ciklusa, ciklus mora da ima oblik prikazan na slici, tj. nakon izotermnog vrši se izohorni, i na kraju adijabatski proces.



Neka u početnom stanju 1 gas ima sledeće parametre: p_1, V_1 i T_1. Od stanja 1 gas se izotermno širi do stanja 2 sa parametrima p_2, V_2 i $T_2 = T_1$. Tokom ovog ciklusa gas primi količinu toplote $Q_{12} \equiv A_{12} = nRT_1 \ln(V_2/V_1)$, pošto je $\Delta U_{12} = 0$.

Od stanja 2 do stanja 3 odvija se izohoni proces, i gas smanjuje pritisak pri konstantnoj zapremini. U stanju 3 on ima parametre p_3, $V_3 = V_2$ i T_3. Ovaj proces je moguć jedino ako tokom njega gas predaje okolini (hladnjaku) količinu toplote $Q_{23} \equiv \Delta U_{23} = nC_V(T_2 - T_3)$ (gas se hladi, pa je $T_2 > T_3$). Tokom ovog procesa rad je $A_{23} = 0$.

Od stanja 3 do stanja 1 gas se adijabatski sabija, i tokom ovog procesa nema razmene toplote izmedju gasa i okoline ($Q_{31} = 0$). Sada se može zaključiti da je ukupna količina toplote koju gas primi u toku jednog ciklusa $Q_1 = Q_{12}$, a ukupna količina toplote koju gas preda hladnjaku u toku jednog ciklusa $Q_2 = Q_{23}$. Takodje, maksimalna temperatura u toku ciklusa je $T_{max} = T_1$, a minimalna $T_{min} = T_3$, odnosno $T_1/T_3 = \tau$.

Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{nC_v(T_1 - T_3)}{nRT_1 \ln V_2/V_1} = 1 - \frac{R/(\kappa - 1)\,(1 - T_3/T_1)}{R \ln V_2/V_1},$$

gde su iskorišćene veze $C_p - C_V = R$ i $C_p/C_V = \kappa$, iz kojih se dobija da je $C_V = R/(\kappa - 1)$.

Odnos zapremina V_2/V_1 može se naći iz izraza za adijabatske procese:

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1} \Rightarrow \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\kappa-1} \equiv \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \frac{T_1}{T_3} = \tau \Rightarrow \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{\ln\tau}{\kappa - 1},$$

što konačno daje

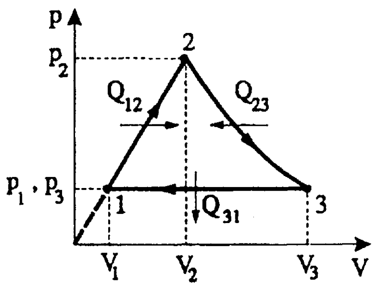
$$\eta = 1 - \frac{1/(\kappa - 1)\,(1 - 1/\tau)}{\ln\tau/(\kappa - 1)} = 1 - \frac{\tau - 1}{\tau \ln\tau}.$$

Zadatak 38

Idealni dvoatomni gas koristi se kao radno telo u toplotnoj mašini. U početnom stanju zapremina gasa je $V_1 = 10\,dm^3$, a pritisak $p_1 = 5 \cdot 10^5\,Pa$. Gas se širi i prelazi iz stanja 1 (početno stanje) u stanje 2, sa zapreminom $V_2 = 14\,dm^3$, tako da se promena stanja na $p-V$ dijagramu može predstaviti funkcijom $p = kV$, gde je k pozitivna konstanta. Nakon toga, izotermnim procesom gas prelazi iz stanja 2 u stanje 3. Na kraju, gas iz stanja 3 izobarnim procesom prelazi u početno stanje 1. Koliki rad izvrši gas u toku ovog ciklusa? Koliki je stepen korisnog dejstva toplotne mašine?

Rešenje

Ukupan izvršeni rad je



$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31}.$$

A_{12} rad od tačke 1 do tačke 2 (videti sliku)

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} kVdV = \frac{k}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 2.4\,kJ,$$

a A_{23} rad pri izotermnom širenju gasa

$$A_{23} = nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} = p_2V_2 \ln\frac{p_2V_2/p_3}{V_2},$$

gde je $k = p_1/V_1$, a $p_2 = kV_2$Na osnovu Bojl-Mariotov zakon $p_2V_2 = p_3V_3$, pri čemu je $p_3 = p_1$ dobija se

$$A_{23} = kV_2^2 \ln\frac{kV_2}{p_1} = 3.3\,kJ,$$

Najzad, rad pri izobarnom sabijanju gasa je

$$A_{31} = p_3(V_1 - V_3) = p_1\left(V_1 - \frac{p_2V_2}{p_3}\right) =$$
$$= p_1(V_1 - \frac{kV_2^2}{p_1}) = p_1V_1 - kV_2^2 = -4.8\,kJ,$$

što daje $A = 0.9\,kJ$.

Stepen korisnog dejstva η može se naći iz izraza (6.52), pri čemu je ukupna količina toplote koju primi gas u toku jednog ciklusa

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + \Delta U_{12} + A_{23},$$

gde $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$ količina toplote dovedena gasu pri prelazu iz stanja 1 u stanje 2, a $Q_{23} = A_{23}$ iz stanja 2 u 3 (izotermni proces).

Promena unutrašnje energije pri prelazu gasa iz stanja 1 u stanje 2 je:

$$\Delta U_{12} = nC_V(T_2 - T_1) = n\frac{iR}{2}\left(\frac{p_2V_2}{nR} - \frac{p_1V_1}{nR}\right) = \frac{i}{2}\left(kV_2^2 - p_1V_1\right) = 12\,kJ,$$

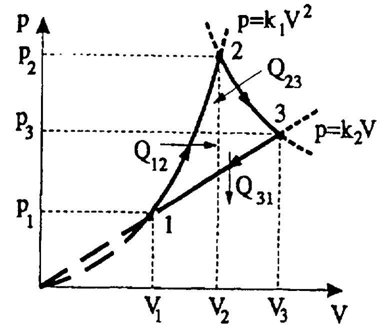
tako da se za stepen korisnog dejstva dobija $\eta = 5.07\,\%$.

Zadatak 39

Idealni dvoatomni gas koristi se kao radno telo u toplotnoj mašini. U početnom stanju zapremina gasa je $V_1 = 2\,dm^3$, a pritisak $p_1 = 10^5\,Pa$. Gas se širi i prelazi iz stanja 1 u stanje 2, sa zapreminom $V_2 = 4\,dm^3$, tako da se promene stanje na $p-V$ dijagramu mogu opisati krivom $p = k_1V^2$, gde je k_1 pozitivna konstanta. Nakon toga, gas se širi i izotermnim procesom prelazi iz stanja 2 u stanje 3. Na kraju, gas iz stanja 3 prelazi u početno stanje 1, tako da se promene stanja na $p - V$ dijagramu mogu predstaviti pravom $p = k_2V$, gde je k_2 pozitivna konstanta. Koliki rad izvrši gas u toku ovog ciklusa? Koliki je stepen korisnog dejstva toplotne mašine?

Rešenje

S obzirom da su poznati parametri stanja gasa p_1 i V_1 (videti sliku), može se naći konstanta $k_1 = p_1/V_1^2 = 2.5\cdot10^{10}\,Pam^{-6}$, a zatim i pritisak $p_2 = k_1V_2^2 = 4\cdot10^5\,Pa$. Takodje, može se odrediti i konstanta $k_2 = p_1/V_1 = 5\cdot10^7\,Pam^{-3}$, kao i uspostaviti veza $k_2 = p_3/V_3 = p_1/V_1$.



Iz izraza za izotermni proces se dobija

$$p_2V_2 = p_3V_3 = p_1\frac{V_3}{V_1}V_3$$

i

$$p_2V_2 = \frac{p_1}{V_1}V_3^2V_3 = \sqrt{\frac{p_2V_1V_2}{p_1}}.$$

Ukupan izvršeni rad je

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = \frac{k_1}{3}\left(V_2^3 - V_1^3\right) +$$
$$+p_2V_2\ln\frac{V_3}{V_2} + \frac{k_2}{2}\left(V_1^2 - V_3^2\right) = 322.62\,J.$$

Ukupna količina toplote koju primi gas u toku jednog ciklusa je

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + \Delta U_{12} + A_{23},$$

gde je $\Delta U_{12} = nC_V(T_2 - T_1) = (i/2)(p_2V_2 - p_1V_1)$, tako da je stepen korisnog dejstva $\eta = A/Q_1 = 6.3\%$.

Zadatak 40

Kružni ciklus se sastoji od dve izobare i dve izoterme. Odnos maksimalnog i minimalnog pritiska gasa u toku ciklusa je $p_{max}/p_{min} = a$, dok je odnos apsolutnih temperatura $T_{max}/T_{min} = \tau$, a adijabatska konstanta κ. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom ciklusu?

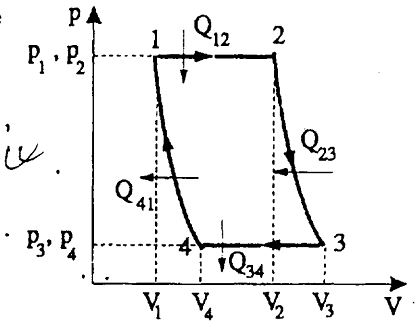
Rešenje

Neka se gas najpre izobarno širi od stanja 1, sa parametrima p_1, V_1 i T_1, do stanja 2, sa parametrima $p_2 = p_1$, V_2 i T_2, i pri tome primi količinu toplote Q_{12}. Nakon toga, gas se izotermno širi do stanja 3, sa parametrima p_3, V_3 i $T_3 = T_2$, i primi količinu toplote Q_{23}. Zatim se gas izobarno sabija do stanja 4, sa parametrima $p_4 = p_3$, V_4 i T_4, pri čemu preda količinu toplote

Q_{34}, tj. gas se hladi ($T_3 > T_4$). Najzad, gas se izotermno sabija do početnog stanja 1, pri čemu predaje količinu toplote Q_{41} ($T_4 = T_1$).

Može se zakjučiti da je ukupna količina toplote koju gas primi od grejača u toku jednog ciklusa $Q_1 = Q_{12} + Q_{23}$, a ukupna količina toplote koju gas preda hladnjaku u toku jednog ciklusa $Q_2 = Q_{34} + Q_{41}$. Takodje, maksimalna temperatura je $T_{max} = T_2 = T_3$, a minimalna $T_{min} = T_1 = T_4$, dok je maksimalni pritisak $p_{max} = p_1 = p_2$, a minimalni $p_{min} = p_3 = p_4$.

Količine toplote za izobarne procese mogu se naći iz izraza:



$$Q_{12} = nC_p(T_2 - T_1) = nC_pT_2\left(1 - \frac{1}{\tau}\right),$$

$$Q_{34} = nC_p(T_3 - T_4) = nC_pT_3\left(1 - \frac{1}{\tau}\right).$$

odakle se vidi da je $Q_{12} = Q_{34}$, jer je $T_2 = T_3$.

Količine toplote za izotermne procese su:

$$Q_{23} = A_{23} = nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} = nRT_2 \ln\frac{p_2}{p_3} = nRT_2 \ln a,$$

$$Q_{41} = A_{41} = nRT_4 \ln\frac{V_4}{V_1} = nRT_4 \ln\frac{p_1}{p_4} = nRT_4 \ln a,$$

gde su iskorišćene veze $p_1V_1 = p_4V_4$ (jer je $T_1 = T_4$) i $p_2V_2 = p_3V_3$ (jer je $T_2 = T_3$).

Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{12} + Q_{23} - Q_{34} - Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{nR(T_2 - T_4)\ln a}{nC_pT_2(1 - 1/\tau) + nRT_4 \ln a} =$$

$$= \frac{RT_2(1 - T_4/T_2)\ln a}{RT_2\left[C_p/R(1 - 1/\tau) + T_4/T_2 \ln a\right]} = \frac{(\tau - 1)/\tau \ln a}{C_p/R((\tau - 1)/\tau) + 1/\tau \ln a};$$

odnosno

$$\eta = \frac{(\tau - 1)\ln a}{\kappa/(\kappa - 1)(\tau - 1) + \ln a},$$

pri čemu je iskorišćeno da je $C_p/R = C_p/(C_p - C_V) = \kappa/(\kappa - 1)$.

Zadatak 41

Idealni dvoatomni gas koristi se kao radno telo u toplotnom motoru, čiji se radni ciklus sastoji od:

a) izohornog zagrevanja od pritiska $p_1 = 5 \cdot 10^5\,Pa$ do pritiska $p_2 = 2.5p_1$, pri zapremini $V_1 = 1.5\,l$;

b) izobarnog širenja do zapremine $V_3 = 3.5V_2$;

c) izotermnog širenja do pritiska $p_4 = p_1$ i zapremine $V_4 = 1.5V_3$;

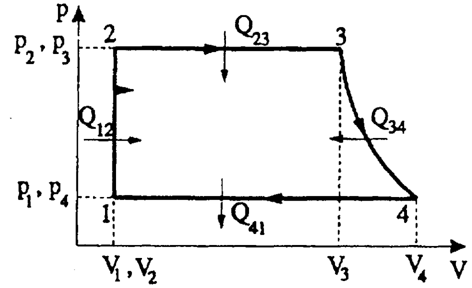
d) izobarnog sabijanja do početnog stanja.

Koliki rad izvrši motor u toku ovog ciklusa? Koliki je njegov stepen korisnog dejstva?

Rešenje

Ukupni izvršeni rad je

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} + A_{41},$$



gde je

$$A_{12} = 0,$$

$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2),$$

$$A_{23} = 2.5p_1(3.5V_1 - V_1) = 6.25p_1V_1$$

$$A_{34} = nRT_3 \ln\frac{V_4}{V_3} = p_3V_3 \ln 1.5 = p_2 3.5V_2 \ln 1.5 = 2.5p_1 3.5V_1 \ln 1.5 =$$
$$= 8.75\,ln(1.5)p_1V_1,$$

$$A_{41} = p_4(V_1 - V_4) = p_1(V_1 - 1.5V_3) = p_1(V_1 - 1.5 \cdot 3.5V_2) = -4.25p_1V_1,$$

tako da se dobija $A = 4160.86\,J$.

Ukupna količina toplote dovedena gasu u toku jednog ciklusa je $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34}$, gde je

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = nC_v(T_2 - T_1) = n\frac{i}{2}R\left(\frac{p_2V_2}{nR} - \frac{p_1V_1}{nR}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{5}{2}1.5p_1V_1 = 3.75p_1V_1,\\
Q_{23} &= nC_p(T_3-T_1) = n\frac{i+2}{2}R\left(\frac{p_3V_3}{nR}-\frac{p_1V_1}{nR}\right) =\\
&= \frac{7}{2}7.75p_1V_1 = 27.12p_1V_1,\\
Q_{34} &= A_{34} = 8.75p_1V_1\ln 1.5,
\end{aligned}
$$

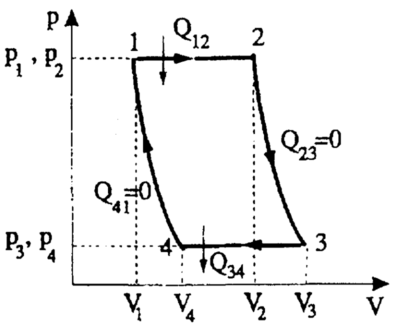
tako da je stepen korisnog dejstva $\eta = A/Q_1 = 0.488$.

Zadatak 42

Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na kružnom ciklusu koji se sastoji od dve izobare i dve adijabate. Odnos maksimalnog i minimalnog pritiska gasa u toku ciklusa je $p_{max}/p_{min} = a$, a adijabatska konstanta iznosi κ.

Rešenje

Neka se ciklus vrši tako da najpre dolazi do izobarnog širenja, zatim do adijabatskog širenja, nakon toga do izobarnog sabijanja i na kraju adijabatskog sabijanja gasa do početnog stanja, mada na rezultat neće uticati ako se za početnu tačku izabere neka druga.



Količina toplote koja se dovode gasu tokom izobarnog širenja je

$$Q_{12} = nC_p(T_2-T_1),$$

pri čemu je $p_1 = p_2 = p_{max}$ maksimalna vrednost pritiska u toku ciklusa, a Q_{12} je ujedno i ukupna količina toplote koju gas primi u toku ciklusa, tj. $Q_1 = Q_{12}$.

Količina toplote koju gas preda tokom izobarnog sabijanja je

$$Q_{34} = nC_p(T_3-T_4),$$

pri čemu je $p_3 = p_4 = p_{min}$ minimalna vrednost pritiska u toku ciklusa, a Q_{34} je ujedno i ukupna količina toplote koju gas preda u toku ciklusa, tj. $Q_2 = Q_{34}$.

Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1-\frac{Q_{34}}{Q_{12}} = 1-\frac{nC_p(T_3-T_4)}{nC_p(T_2-T_1)} = 1-\frac{T_3-T_4}{T_2-T_1}.$$

S obzirom da je prelazak iz stanja 2 u 3 adijabatski proces, dobija se:

$$p_2V_2^\kappa = p_3V_3^\kappa,\ T_2V_2^{\kappa-1} = T_3V_3^{\kappa-1} \ \Rightarrow\ \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} = a^{(\kappa-1)/\kappa},$$

odnosno za adijabatski prelazak iz stanja 4 u 1:

$$p_1V_1^\kappa = p_4V_4^\kappa,\ T_1V_1^{\kappa-1} = T_4V_4^{\kappa-1} \ \Rightarrow\ \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} = a^{(\kappa-1)/\kappa}.$$

Konačno se za stepen korisnog dejstva dobija

$$
\begin{aligned}
\eta &= 1-\frac{T_3-T_4}{T_2-T_1} = 1-\frac{T_3-T_4}{a^{(\kappa-1)/\kappa}T_3 - a^{(\kappa-1)/\kappa}T_4} =\\
&= 1-\frac{T_3-T_4}{a^{(\kappa-1)/\kappa}(T_3-T_4)} = 1-a^{(1-\kappa)/\kappa}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 43

Specifični toplotni kapacitet čvrstih tela pri temperaturi $T > 273\,K$ može se izračunati po empirijskoj formuli $c = a + bT$. Za aluminijum je $a = 766\,J(kgK)^{-1}$ i $b = 0.459\,J/kg^{-1}K^{-2}$. Naći promenu entropije pri zagrevanju aluminijumskog valjka mase $m = 8\,kg$ od temperature $T_1 = 300\,K$ do $T_2 = 900\,K$.

Rešenje

Promena entropije je

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2}\frac{dQ}{T},$$

gde je $dQ = mcdT$, tako da se dobija da je

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= m\int_{T_1}^{T_2}\frac{cdT}{T} = m\left(a\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + b\int_{T_1}^{T_2}dT\right) =\\
&= ma\ln\frac{T_2}{T_1} + mb(T_2-T_1) = 8935.5\,JK^{-1}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 44
Čemu je jednaka promena entropije pri sledećim procesima:
a) izobarnom zagrevanju $m = 0.1\,kg$ azota od temperature $t_1 = 0\,^oC$ do $t_2 = 125\,^oC$,
b) izohornom hladjenju $n = 2\,kmol$ kiseonika od temperature $t_1' = 220\,^oC$ do $t_2' = 75\,^oC$,
c) izotermnom širenju $m = 0.1\,kg$ ugljenmonoksida od zapremine $V_1 = 12\,m^3$ do $V_2 = 33\,m^3$.
Molarna mase azota i ugljenmonoksida su $M_{N_2} = 28\,gmol^{-1}$ i $M_{CO} = 28\,gmol^{-1}$, redom.

Rešenje

a) Promena entropije za izobarni proces je:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_p dT}{T} = mc_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = m\frac{C_p}{M_{N_2}} \ln\frac{T_2}{T_1} =$$
$$= \frac{m}{M_{N_2}}\frac{i+2}{2} \ln\frac{T_2}{T_1} = 47.12\,JK^{-1}.$$

b) za izohorni proces

$$\Delta S = \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{mc_v dT}{T} = mc_v \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{dT}{T} = nC_v \ln\frac{T_2'}{T_1'} =$$
$$= n\frac{i}{2} \ln\frac{T_2'}{T_1'} = -1741.5\,JK^{-1},$$

c) i za izotermni proces

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} dQ = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{1}{T}nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$
$$= \frac{m}{M_{CO}} R \ln\frac{V_2}{V_1} = 30.02\,JK^{-1}.$$

Zadatak 45
Naći promenu entropije pri pretvaranju $m = 10\,g$ leda temperature $t_1 = -10\,^oC$ u paru temperature $t_2 = 100\,^oC$. Specifični toplotni kapacitet leda je $c_l = 2.1\,J(gK)^{-1}$, vode $c_v = 4.18\,J(gK)^{-1}$, toplota topljenja leda $q_t = 334\,Jg^{-1}$ i toplota isparanja vode $q_i = 2260\,Jg^{-1}$.

Rešenje

Ukupnu promenu entropije čini zbir njenih promena za svaki proces posebno.
a) Zagrevanje leda mase m od temperature $T_1 = 263\,K$ do temperature $T_o = 273\,K$:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_o} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_o} \frac{mc_l dT}{T} = mc_l \ln\frac{T_o}{T_1}.$$

b) Topljenje leda mase m na temperaturi T_o:

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_o}\int dQ = \frac{Q}{T_o} = \frac{mq_t}{T_o}.$$

c) Zagrevanje vode mase m od temperature T_o do temperature $T_2 = 373\,K$:

$$\Delta S_3 = \int_{T_o}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_o}^{T_2} \frac{mc_v dT}{T} = mc_v \ln\frac{T_2}{T_o}.$$

d) Isparavanje vode mase m na temperaturi T_2:

$$\Delta S_4 = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_2}\int dQ = \frac{Q}{T_2} = \frac{mq_i}{T_2}.$$

Ukupna promena entropije je $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = 86.6\,JK^{-1}$.

7. Oscilacije

7.1 Teorija

Pod oscilatornim kretanjem podrazumeva se kretanje tela po putanji koja nije zatvorena, pri čemu se to kretanje vrši naizmenično na jednu i drugu stranu od ravnotežnog položaja. Sistem koji vrši oscilatorno kretanje naziva se oscilator. Ako oscilator vrši oscilacije bez uticaja spoljašnjih sila, takve oscilacije se nazivaju slobodne (sopstvene). Ako na oscilator deluje sila trenja, oscilacije su prigušene (amortizovane). Kada na oscilator deluju spoljašnje sile tako da mu nadoknadjuju izgubljenu energiju usled delovanja sile trenja, oscilacije su prinudne.

Oscilatorno kretanje se karakteriše veličinama kao što su period oscilovanja T, elongacija (pomeraj) x i amplituda A. Period oscilovanja je vreme za koje telo izvrši jednu punu oscilaciju. Recipročna vrednost perioda oscilovanja naziva se frekvencija (učestanost) ν i predstavlja broj oscilacija u jedinici vremena. Elongacija predstavlja trenutno udaljenje od ravnotežnog položaja, a amplituda predstavlja maksimalno udaljenje oscilatora od ravnotežnog položaja.

Specijalan slučaj oscilatornog kretanja predstavlja harmonijsko oscilatorno kretanje. To je kretanje kod koga se elongacija u toku vremena menja po sinusnom ili kosinusnom zakonu, tj.

$$x = A\sin(\omega t + \phi); \qquad x = A\cos(\omega t + \phi),$$

gde je $\omega = 2\pi/T$ kružna frekvencija, $(\omega t + \phi)$ faza oscilovanja u momentu t, a ϕ početna faza.

Brzina tela koje osciluje je

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t = v_o\cos\omega t,$$

a ubrzanje

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin\omega t = -a_o \sin\omega t = -\omega^2 x,$$

gde je $v_o = A\omega$ i $a_o = A\omega^2$.

Sila kod harmonijskog oscilatornog kretanja je

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx,$$

gde je $k = m\omega^2$ koeficijent, brojno jednak sili pri jediničnoj elongaciji (direkciona sila). Sila F je upravljena ka ravnotežnom položaju i naziva se restituciona sila.

Period oscilovanja tela mase m koje harmonijski osciluje je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Restitucioni moment kod torzionog klatna je

$$M = -c\theta,$$

gde je c torziona konstanta, a θ ugao otklona klatna.

Period oscilovanja torzionog klatna je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}},$$

gde je I moment inercije tela koje vrši oscilovanje.

Period oscilovanja fizičkog klatna je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_o}},$$

gde je l_o rastojanje od tačke oslonca do težišta tela, m masa klatna i g ubrzanje Zemljine teže.

Period oscilovanja matematičkog klatna je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gde je l dužina matematičkog klatna.

Kinetička energija E_k, potencijalna energija E_p i ukupna energija E oscilatora su date sledećim izrazima:

$$E_k = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t,$$

$$E_p = \frac{kA^2}{2}\sin^2\omega t,$$

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Rezultujuća amplituda pri slaganju dve oscilacije istog pravca, čije su frekvencije jednake, može se izraziti na sledeći način:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}.$$

Pri slaganju dve oscilacije sa medjusobno upravnim pravcima jednačina rezultujućeg oscilovanja ima sledeći oblik:

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\phi + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2\phi,$$

gde su A_1 i A_2 amplitude oscilacija i ϕ početna faza jedne od oscilacija.

Jednačina kretanja osilatora koji vrši prigušene oscilacije je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0,$$

gde je β koeficijent prigušenja.

Ako je $\omega^2 - \beta^2 = \omega_1^2 > 0$, gde je ω_1 kružna frekvencija prigušenih oscilacija, elongacija se može izraziti u sledećem obliku:

$$x = A_0\exp(-\beta t)\cos(\omega_1 t + \phi),$$

gde je $A(t) = A_0\exp(-\beta t)$, amplituda prigušenih oscilacija (u trenutku t), a A_o amplituda u početku posmatranja ($t = 0$).

Period oscilovanja prigušenih oscilacija odredjen je izrazom:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

Logaritamski dekrement prigušenja može se izraziti na sledeći način:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

gde su $A(t)$ i $A(t+T)$ amplitude dve oscilacije koje se razlikuju za vreme T, τ vreme relaksacije i N broj oscilacija koji se izvrši dok amplituda ne opadne e (2.72) puta od početne vrednosti.

Faktor dobrote ili Q faktor je dat izrazom

$$Q = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{\omega}{4\pi\beta}.$$

Jednačina kretanja oscilatora za slučaj prinudnih oscilacija je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_o \cos\omega' t,$$

gde je ω' kružna frekvencija prinudnih oscilacija.

Amplituda oscilatora u slučaju pojave rezonancije može se izraziti u sledećem obliku:

$$A_r = \frac{f_o}{2\beta\sqrt{\omega^2-\beta^2}}.$$

7.2 Zadaci

Zadatak 1

Materijalna tačka vrši harmonijske oscilacije sa frekvencijom $\nu = 0.5\,Hz$. U početnom trenutku ona prolazi kroz ravnotežni položaj, a njena brzina je $v_o = 31.4\,cms^{-1}$. Napisati jednačinu koja daje zavisnost trenutnog položaja materijalne tačke od vremena.

Rešenje

Elongacija i brzina materijalne tačke u slučaju harmonijskih oscilacija su

$$x(t) = A\sin(\omega t+\phi), v(t) = A\omega\cos(\omega t+\phi).$$

U početnom trenutku ($t = 0$), kada se materijalna tačka nalazi u ravnotežnom položaju, njena brzina je maksimalna. Ovaj uslov je ispunjen samo ako je $\cos(\omega t+\phi) = 1$, odakle sledi da je $v_o = v(0) = A\omega$. Odavde se može naći amplituda $A = v_o/\omega = v_o/2\pi\nu = 10\,cm$.

Iz gornjeg uslova za maksimalnu brzinu, $\cos(\omega t+\phi) = \cos(\omega\cdot 0+\phi) = \cos\phi = 1 \Rightarrow \phi = 2k\pi$, gde je $k = 0, 1, ...$, konačno se može napisati da je

$$x(t) = 0.1\sin(2\pi\nu t + 2k\pi) = 0.1[\sin(2\pi\nu t)\cos(2k\pi) + \cos(2\pi\nu t)\sin(2k\pi)],$$

ili

$$x(t) = 0.1\sin\pi t\,(m).$$

Zadatak 2

Brzina materijalne tačke menja se po zakonu $v = 0.2\pi\cos 2\pi t\,(ms^{-1})$. Odrediti:

a) maksimalno ubrzanje,

b) elongaciju posle vremena $t = (5/12)\,s$ od početka oscilovanja,

c) put koji predje materijalna tačka za to vreme.

Rešenje

a) Ubrzanje materijalne tačke je

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.2\pi\cos 2\pi t) = -0.4\pi^2\sin 2\pi t,$$

dok se maksimalno ubrzanje dobija kada je $\sin 2\pi t = -1$, odnosno

$$a_{max} = 0.4\pi^2 = 3.94\,ms^{-2}.$$

b)

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow x = \int_o^{5/12} 0.2\pi\cos 2\pi t dt.$$

Uvodjenjem smene $2\pi t = y$, sledi da je $t = y/2\pi$; $dt = dy/2\pi$. Kako je $t = 0$ i $t = 5/12$, dobija se $y = 0$ i $y = 150^o$. Konačno je

$$x = \int_o^{5/12} vdt \Rightarrow x = \int_o^{150} 0.1\cos y dy = 0.05\,m.$$

c) Period oscilovanja je $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2\pi = 1\,s$. Za vreme $t = (5/12)\,s$ materijalna tačka izvrši $n = t/T = (5/12)$ oscilacija. U toku jedne oscilacije ono predje put jednak 4 amplitude, $A = 0.1\,m$, što znači da je ukupan predjeni put jednak $s = n\cdot 4\cdot A = 0.17\,m$.

Zadatak 3

Telo mase $m = 3\,g$ vrši harmonijske oscilacije sa frekvencijom $\nu = 0.5\,Hz$.

Odrediti brzinu, ubrzanje i silu koja deluje na telo u trenutku kada je elongacija $x = 3\,cm$. Amplituda oscilovanja je $A = 4\,cm$.

Rešenje

Elongacija tela koje vrši harmonijske oscilacije je

$$x = A\sin(\omega t + \phi), \tag{7.1}$$

njegova brzina

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi), \tag{7.2}$$

a ubrzanje

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x. \tag{7.3}$$

Kvadriranjem (7.1) i (7.2) dobija se

$$x^2 = A^2\sin^2(\omega t + \phi), \tag{7.4}$$

$$v^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2} = A^2\cos^2(\omega t + \phi) \tag{7.5}$$

Sabiranjem jednačina (7.4) i (7.5) dobija se

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = A^2 \Rightarrow \omega^2 x^2 + v^2 = A^2\omega^2.$$

Prema tome, brzina materijalne tačke je

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2); \quad v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2} = 0.08\,ms^{-1}.$$

Iz izraza (7.3) sledi da je ubrzanje

$$a = -\omega^2 x = -4\pi^2\nu^2 x = -0.30\,ms^{-2},$$

dok je sila koja deluje na telo

$$F = ma = -9\cdot 10^{-4}\,N.$$

Zadatak 4

Materijalna tačka mase $m = 0.01\,kg$ vrši harmonijsko oscilovanje po kosinusnom zakonu, sa periodom $T = 2\,s$ i početnom fazom jednakom nuli.

Ukupna energija oscilovanja tačke je $E = 10^{-4}\,J$. Naći amplitudu oscilovanja A, napisati rešenje jednačine datog oscilovanja i naći najveću vrednost sile koja deluje na tu tačku.

Rešenje

Elongacija harmonijskog oscilovanja, bez početne faze, koja predstavlja rešenje jednačine oscilovanja materijalne tačke je

$$x = A\cos\omega t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Potencijalna energija je

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t.$$

Kada se materijalna tačka nalazi na najvećem rastojanju od ravnotežnog položaja ($x = A$), ona ima maksimalnu potencijalnu energiju, a kinetička energija je jednaka nuli. Znači da je u tom položaju ukupna energija sistema jednaka njegovoj potencijalnoj energiji

$$E = E_{pmax} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2,$$

odakle se za amplitudu dobija

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}} = 0.045\,m.$$

Rešenje jedančine datog oscilatora je $x = 0,045\cos\omega t$.

Maksimalno ubrzanje materijalne tačke je

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t; \qquad a_{max} = -A\omega^2,$$

dok je maksimalna vrednost sile

$$F_{max} = ma_{max} = -mA\omega^2 = -4.44\cdot 10^{-3}\,N,$$

Zadatak 5

Telo težine $Q = 0.5\,N$ osciluje po horizontalnoj pravoj. Njegovo rastojanje od centra oscilovanja odredjeno je jednačinom $x = 12\sin(\pi t/2)$, pri čemu je

x izraženo u metrima, a t u sekundama. Odrediti zavisnost sile od rastojanja tela od centra oscilovanja, kao i maksimalnu vrednost sile. Ubrzanje Zemljine teže je $g = 9.81\,ms^{-2}$.

Rešenje

U ovom slučaju elongacija je odredjena jednačinom

$$x = 12\sin\frac{\pi}{2}t,$$

dok je sila koja deluje na telo

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{7.6}$$

Brzina tela je

$$v = \frac{dx}{dt} = 6\pi\cos\frac{\pi}{2}t,$$

a ubrzanje

$$a = \frac{dv}{dt} = -3\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t = -\frac{\pi^2}{4}x. \tag{7.7}$$

Zamenom (7.7) u (7.6) dobija se da je

$$F = -\frac{Q}{g}\frac{\pi^2}{4}x = 0.13x\,(N) \Rightarrow F = -3\pi^2 m\sin\frac{\pi}{2}t.$$

Za $F = F_{max}$; $\sin\pi t/2 = -1$, pa je $F_{max} = 3\pi^2 m = 1.51\,N$.

Zadatak 6

Čestica mase $m = 1\,g$ vrši harmonijske oscilacije čija je amplituda $A = 0.1\,m$. U trenutku t_1 kada je elongacija čestice $x(t_1) = 0.04\,m$, brzina je $v(t_1) = 0.5\,ms^{-1}$. Kolika sila $F(t_2)$ deluje na česticu u trenutku t_2 kada je njena potencijalna energija dva puta veća od kinetičke energije?

Rešenje

Elongacija čestice koja harmonijski osciluje u trenutku t_1 je $x(t_1) = A\sin\omega t_1$, dok je njena brzina $v(t_1) = A\omega\cos\omega t_1$. Kružna frekvencija oscilovanja je

$$\omega = \frac{v(t_1)}{A\cos\omega t_1} = \frac{v(t_1)}{A\sqrt{1-\sin^2\omega t_1}} = \frac{v(t_1)}{A\sqrt{1-[x(t_1)/A]^2}} = 5.46\,rads^{-1}.$$

Restituciona sila u trenutku t_2 je

$$F(t_2) = kx(t_2) = m\omega^2 A\sin\omega t_2. \tag{7.8}$$

Potencijalna energija čestice u trenutku t_2 je

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2\sin^2\omega t_2}{2},$$

dok je njena kinetička energija u tom trenutku

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2\cos^2\omega t_2}{2}.$$

Iz uslova zadatka da je $2E_k = E_p$, sledi:

$$2\cos^2\omega t_2 = \sin^2\omega t_2 \Rightarrow \sin\omega t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{7.9}$$

Zamenom (7.9) u (7.8) i uvrštavanjem brojnih vrednosti dobija se da je

$$F(t_2) = 2.43\,mN.$$

Zadatak 7

Na horizontalnoj membrani nalazi se sitan pesak. Membrana osciluje sa frekvencijom $\nu = 500\,Hz$ u vertikalnoj ravni. Kolika je amplituda oscilovanja membrane, ako zrna peska poskakuju do visine $h = 3\,mm$ od ravnotežnog položaja membrane?

Rešenje

Neka je x-osa koordinatnog sistema usmerena naviše. Zavisnost koordinate x membrane od vremena t je $x = A\sin\omega t$, gde je A amplituda oscilovanja membrane, a ω kružna frekvencija .

Na zrno peska mase m deluje njegova težina mg i sila reakcije membrane N. Jednačina njegovog kretanja je

$$N - mg = ma.$$

U trenutku odvajanja zrna od membrane je $N = 0$, pa je $a = -g$. To znači da se zrno peska odvaja od membrane u trenutku t_o u kome je ubrzanje

$$a = -A\omega^2\sin\omega t_o = -g \Rightarrow \sin\omega t_o = \frac{g}{A\omega^2}. \tag{7.10}$$

Brzina zrna peska u trenutku t_o je

$$v(t_o) = v_o = A\omega\cos\omega t_o,$$

a elongacija

$$x(t_o) = x_o = A\sin\omega t_o = \frac{g}{\omega^2}.$$

Zrna peska se kreću u polju teže, dospevajući do visine Δx. Iz zakona održanja energije

$$E_p = E_k \Rightarrow mg\Delta x = \frac{mv_o^2}{2} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_o^2}{2g}.$$

Visina na kojoj se nadje zrno peska je

$$h = x_o + \Delta x = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 A^2\cos^2\omega t_o}{2g}.$$

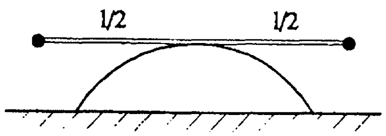
Iz izraza (7.10) je

$$\cos^2\omega t_o = 1 - \sin^2\omega t_o = 1 - \frac{g^2}{A^2\omega^4},$$

odnosno

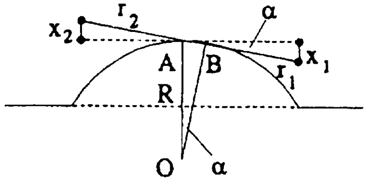
$$h = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 A^2[1 - g^2/(A^2\omega^4)]}{2g} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2gh\omega^2 - 2g^2}{\omega^4}} = 0.08\,mm.$$

Zadatak 8



Na polucilindru čiji je poluprečnik osnove $R = 50\,cm$ nalazi se kruti štap dužine $l = 90\,cm$, zanemarljive težine, na čijim krajevima se nalaze kuglice jednakih masa m. Odrediti period oscilovanja ovog štapa kada se otkloni za mali ugao od svog ravnotežnog položaja. Pretpostaviti da nema klizanja štapa po omotaču polucilindra.

Rešenje



Neka je štap otklonjen za mali ugao α u odnosu na ravnotežni položaj. Tačke A i B su krajnje tačke u kojima štap dodiruje polucilindar. Momenti sila koji nastaju pri oscilovanju nastoje da vrate štap u ravnotežni položaj. Pošto je α mali ugao, može se smatrati da se kuglice kreću po tetivama kružnica čiju su poluprečnici:

$$r_1 \approx \frac{l}{2} - AB = \frac{l}{2} - R\alpha; \qquad r_2 \approx \frac{l}{2} + R\alpha.$$

Brzine kuglica su:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = x_1' = (r_1\alpha)' = r_1'\alpha + r_1\alpha',$$

$$v_1 = -R\alpha\alpha' + (l/2 - R\alpha)\alpha' = \alpha'(\frac{l}{2} - 2R\alpha),$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = x_2' = r_2'\alpha + r_2\alpha'$$

$$v_2 = (l/2 + R\alpha)\alpha' + R\alpha\alpha' = (l/2 + 2R\alpha)\alpha'$$

Pri otklonu štapa za ugao α, njegova ukupna energija je jednaka zbiru potencijalne energije E_p i kinetičke energije E_k, tj.

$$E_p + E_k = mg(R + x_2) + mg(R - x_1) + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} =$$

$$mgR + mgx_2 + mgR - mgx_1 + \frac{m(\alpha')^2}{2}(l/2 - 2R\alpha)^2 + \frac{m}{2}(\alpha')^2(l/2 + 2R\alpha)^2 =$$

$$2mgR + mg(x_2 - x_1) + \frac{m}{2}(\alpha')^2[l^2/4 - 2R\alpha l + 4R^2\alpha^2 + l^2/4 + 2R\alpha l + 4R^2\alpha^2],$$

$$E_p + E_k = 2mgR + mg(l/2 + R\alpha - l/2 + R\alpha)\alpha + \frac{m}{2}(\alpha')^2[l^2/2 + 8R^2\alpha^2].$$

$$E_p + E_k = \frac{m}{4}l^2(\alpha')^2 + 2mgR(1-\alpha^2) = E_{po}$$

gde je E_{po} potencijalna energija u trenutku maksimalnog otklona od ravnotežnog položaja.

Kada se gornja jednačina diferencira, dobija se

$$\frac{ml^2\alpha'\alpha''}{2} + 4mgR\alpha\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha'' = -\frac{8gR}{l^2}\alpha.$$

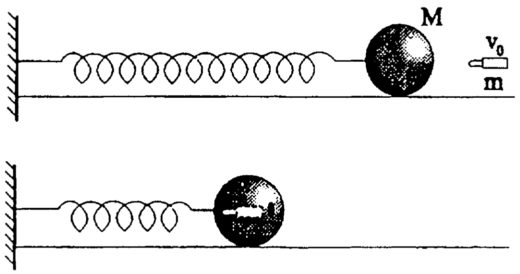
Ovo je jednačina harmonijskog oscilovanja čija se kružna frekvencija i period mogu izraziti na sledeći način:

$$\omega = \sqrt{\frac{8gR}{l^2}}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi l\sqrt{\frac{1}{gR}} = 0.9\,s.$$

Zadatak 9

Na glatkom horizontalnom stolu leži kugla mase M pričvršćena na oprugu krutosti k. U trenutku udara u kuglu metak mase m ima brzinu v_o u pravcu opruge. Odrediti amplitudu i period oscilovanja sistema, pod pretpostavkom da je sudar neelastičan i da se masa opruge, otpor vazduha i trenje mogu zanemariti.

Rešenje



Na slici je dat položaj sistema pre i posle udara metka u kuglu. U trenutku sudara metak saopštava kugli kinetičku energiju E_k, usled čega kugla sabije oprugu. Sabijanje opruge će se nastaviti sve dok celokupna kinetička energija kugle ne predje u potencijalnu energiju E_o deformacije opruge. Vrednost E_o će dostići maksimum kada je kinetička energija kugle $E_k = 0$. U tom slučaju pomeraj kugle od ravnotežnog položaja biće maksimalan ($x_{max} = A$, gde je A amplituda).

Iz zakona održanja energije sledi da je ukupna enregija sistema pre sudara E_1 jednaka energiji sistema E_2 posle sudara.

Energija sistema pre sudara se može izraziti na sledeći način:

$$E_1 = E_k + E_o + E_m,$$

gde je E_m kinetička energija metka.

U slučaju da se kugla nalazi u ravnotežnom položaju, $E_o = 0$, pa se za E_1 dobija

$$E_1 = \frac{(m+M)v_1^2}{2},$$

gde je v_1 brzina kugle i metka posle sudara.

U trenutku kada je postignuto maksimalno pomeranje $E_k = 0$, $E_m = 0$ i $E_o = kA^2/2$. Tada je energija sistema $E_2 = kA^2/2$. Prema tome, zakon održanja energije glasi:

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{(m+M)v_1^2}{2} = 0. \qquad (7.11)$$

Brzina kugle posle udara metka može se odrediti iz zakona održanja impulsa:

$$mv_o = (m+M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{mv_o}{m+M},$$

a zamena brzine v_1 u (7.11) daje

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{(m+M)m^2v_o^2}{2(m+M)^2} = 0 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m^2v_o^2}{k(m+M)}} = mv_o\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}}.$$

Kako je za ovaj sistem

$$k = (m+M)\omega^2 = \frac{4\pi^2(m+M)}{T^2},$$

to je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

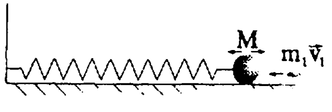
Zadatak 10

Kugla vezana za elastičnu oprugu osciluje harmonijski na glatkoj horizontalnoj podlozi. Amplituda oscilovanja je $A = 0.1\,m$, a kružna frekvencija $\omega = 120\,rad.s^{-1}$. Metak, krećući se u pravcu oscilovanja brzinom

$v_1 = 8\,ms^{-1}$ udari u kuglu i zaustavi se u njoj kada ova prolazi kroz ravnotežni položaj krećući se u istom smeru kao metak. Kolika je nova amplituda oscilovanja ako je masa metka tri puta manja od mase kugle? Masu opruge, otpor vazduha i trenje zanemariti.

Rešenje

Na slici je prikazana kugla koja osciluje i metak koji se kreće brzinom v_1. Neposredno posle sudara sistem (kugla i metak) se nalazi u ravnotežnom položaju i ima kinetičku energiju



$$E_k = \frac{(m+M)v^2}{2},$$

koja je jednaka potencijalnoj energiji elastične opruge u najudaljenijem položaju

$$E_p = \frac{kA_1^2}{2},$$

gde je m masa metka, a M masa kugle. Pošto je $E_k = E_p$, to je

$$\frac{kA_1^2}{2} = \frac{(m+M)}{2}v^2 \Rightarrow A_1 = v\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Iz zakona održanja impulsa se može dobiti brzina v sistema nakon sudara:

$$mv_1 + Mv_2 = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{mv_1 + Mv_2}{m+M}.$$

U slučaju oscilovanja kugle (pre sudara sa metkom) njena kinetička energija u ravnotežnom položaju je jednaka potencijalnoj energiji elastične opruge u najudaljenijem položaju, tj.

$$\frac{Mv_2^2}{2} = \frac{M\omega^2A^2}{2},$$

odakle je $v_2 = \omega A$. Pošto je $k = M\omega^2$ i $M = 3m$, to je

$$A_1 = \frac{v_1 + 3A\omega}{4\omega}\sqrt{\frac{4}{3}} = 0.11\,m.$$

Zadatak 11

Tas sa tegom obešen o oprugu, osciluje vertikalno sa periodom oscilovanja $T_1 = 0.5\,s$. Kada se na tas postavi još jedan teg, period vertikalnih oscilacija iznosi $T_2 = 0.6\,s$. Za koliko se istegne opruga usled delovanja drugog tega na tas? Masu opruge i tasa zanemariti.

Rešenje

Period oscilovanja prvog tega mase m je

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_1^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}. \tag{7.12}$$

Nakon dodavanja drugog tega mase Δm period oscilovanja je

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}} \Rightarrow T_2^2 = 4\pi^2\frac{m+\Delta m}{k}. \tag{7.13}$$

Iz (7.12) i (7.13) proizilazi da je

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}.$$

Kako je $k = F/\Delta l$, gde je F sila koja dovodi do izduženja opruge za Δl jednaka $F = \Delta mg = k\Delta l$, to je

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta l}{g},$$

odakle se za traženo izduženje Δl dobija

$$\Delta l = \frac{T_2^2 - T_1^2}{4\pi^2}g = 27\,mm.$$

Zadatak 12

Kolika treba da bude relativna promena dužine matematičkog klatna da bi periodi njegovih oscilacija na površini Zemlje i visini $H = 1500\,km$ bili jednaki? Poluprečnik Zemlje je $R = 6378\,km$.

Rešenje

Neka matematičko klatno dužine l_o na površini Zemlje osciluje sa periodom

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g_o}}.$$

Ubrzanje Zemljine teže g_o na površini Zemlje može se izraziti na sledeći način:

$$Q = F_g = mg_o = \gamma\frac{Mm}{R^2} \Rightarrow g_o = \gamma\frac{M}{R^2},$$

gde je γ gravitaciona konstanta i M masa Zemlje.

Na visini H ubrzanje Zemljine teže je

$$g = \gamma\frac{M}{(R+H)^2},$$

a period oscilovanja klatna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pošto je $T = T_o$, to je $l_o/g_o = l/g$, odnosno

$$\frac{l_o R^2}{\gamma M} = \frac{l(R+H)^2}{\gamma M} \Rightarrow \frac{l}{l_o} = \frac{R^2}{(R+H)^2},$$

relativna promena dužine matematičkog klatna je

$$\frac{\Delta l}{l_o} = \frac{l_o - l}{l_o} = \frac{H(2R+H)}{(R+H)^2} = 34.45\%.$$

Zadatak 13

Klatno se sastoji od tankog konca dužine l, na čijem je donjem kraju obešena lopta poluprečnika R. Koliki je period oscilovanja klatna ukoliko se ono smatra za: a) fizičko, b) matematičko? Pretpostaviti da je $R \ll l$, c) Kolika se greška čini pri ovoj aproksimaciji, ako je $R = l/20$? Moment inercije lopte je $I_o = 2mR^2/5$.

Rešenje

a) Period oscilovanja fizičkog klatna je

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}. \tag{7.14}$$

gde je m masa lopte, a $s = l + R$

Na osnovu Štajnerove teoreme moment inercije I je

$$I = I_o + m(l+R)^2 = \frac{2}{5}mR^2 + m(l+R)^2. \tag{7.15}$$

Zamenom (7.15) u (7.14) dobija se

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2R^2 + 5(l+R)^2}{5g(l+R)}}. \tag{7.16}$$

b) Period oscilovanja matematičkog klatna za slučaj kada je $R \ll l$ je

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

c) Za slučaj da je $R = l/20$, s obzirom na izraz (7.16), dobija se da je period oscilovanja

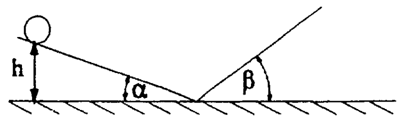
$$T_2' = 2\pi\sqrt{\frac{2(l/20)^2 + 5(l + l/20)^2}{5g(l + l/20)}}.$$

Relativna greška koja se čini pri ovoj aproksimaciji je

$$\delta T = \frac{T_2' - T_1}{T_2'} = 0.024 = 2.4\%.$$

Zadatak 14

Odrediti period oscilovanja tela koje bez trenja klizi duž dve ravni prikazane na slici. Gubitak energije pri udaru zanemariti. Telo otpočne klizanje sa visine $h = 30\,cm$. Nagibni uglovi ravni su $\alpha = 30^o$ i $\beta = 45^o$.



Rešenje

Ako telo otpočne klizanje sa visine h, u podnožju će imati brzinu $v_o = \sqrt{2gh}$. Dalje kretanje po desnoj nagnutoj ravni nastaviće sa brzinom $v = v_o - at$. Sa slike se vidi da se ubrzanje a može predstaviti izrazom $a = g\sin\beta$, gde je g ubrzanje Zemljine teže.

Telo će se kretati po desnoj nagnutnoj ravni usporenim kretanjem brzinom $v = v_o - at_1$, sve dok njegova brzina ne postane jednaka nuli, tj.

$$v = 0 \Rightarrow v_o = gt_1 \sin\beta,$$

odakle je vreme kretanja tela do zaustavljanja

$$t_1 = \frac{v_o}{g\sin\beta}.$$

Ukupno vreme kretanja po desnoj nagnutoj ravni je

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_o}{g\sin\beta}.$$

Analogno tome, ukupno vreme kretanja po levoj nagnutoj ravni je

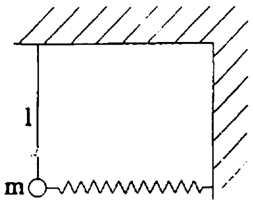
$$T_2 = 2t_2 = \frac{2v_o}{g\sin\alpha},$$

pa je ukupno vreme kretanja

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2}{g}\sqrt{2gh}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 1.67\,s.$$

Zadatak 15

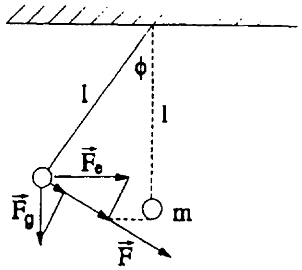
Matematičko klatno dužine $l = 10\,cm$ i mase $m = 5\,g$ vezano je za elastičnu oprugu zanemarljive težine, kao na slici. Konstanta opruge je $k = 0.2\,Nm^{-1}$. U ravnoteži je klatno u vertikalnom položaju i opruga nije deformisana. Odrediti ugaonu frekvenciju malih oscilacija ovog klatna ako se otkloni u vertikalnoj ravni za mali ugao ϕ.



Rešenje

Sa slike se vidi da je sila F jednaka

$$\vec{F} = \vec{F}_{ep} + \vec{F}_{gp},$$



gde su $\vec{F}_{ep}$ i $\vec{F}_{gp}$ komponente sila elastičnosti i težine tela na tangentu kružne putanje u posmatranom trenutku, dok je

$$F_e = kl\sin\phi.$$

S druge strane je

$$F_{ep} = kl\sin\phi\cos\phi,$$
$$F_{gp} = mg\sin\phi,$$
$$F_g = mg.$$

Prema tome,

$$F = kl\sin\phi\cos\phi + mg\sin\phi.$$

Za mali ugao otklona $\cos\phi \approx 1$, pa je

$$F = kl\sin\phi + mg\sin\phi = m\left(\frac{kl}{m} + g\right)\sin\phi = mg'\sin\phi,$$

gde je $g' = kl/m + g$. Znači, kružna frekvencija ovoga klatna je

$$\omega = \sqrt{\frac{g'}{l}} = \sqrt{\frac{kl/m + g}{l}} = 11.75\,rads^{-1}.$$

Zadatak 16

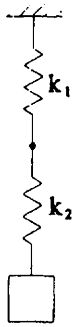
a) Izvesti izraz za ekvivalentnu konstantu k_r redne veze dve opruge, konstanti k_1 i k_2.

b) Izvesti izraz za ekvivalentnu konstantu k_p paralelne veze dve opruge, konstanti k_1 i k_2.

c) Odrediti period vertiklanih oscilacija tega mase $m = 0.3\,kg$, koji je obešen o sistem prikazan na slici. Krutost opruga je $k = 3\,Nm^{-1}$. Mase opruga zanemariti.

Rešenje

a) U slučaju redne veze dve opruge aksijalna sila istezanja (težina tega mase m, obešenog o slobodni kraj opruge) koja deluje na obe opruge je ista, tj.



$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2,$$

gde x_1 i x_2 njihova istezanja. Ukupno istezanje ekvivalentne opruge jednako je zbiru istezanja prve i druge opruge

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}.$$

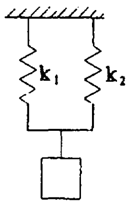
Prema tome je

$$F = k_r x = k_r F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right),$$

odnosno

$$k_r = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2} \Rightarrow k_r = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

b) U slučaju paralelne veze dve opruge, sila (težina tega mase m, kojom je opterećen siatem) se raspodeljuje na obe opruge, pa je



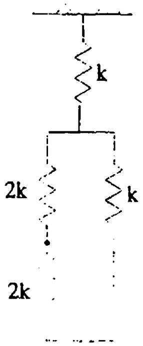
$$F = F_1 + F_2,$$

gde je $F_1 = k_1 x$ sila koja deluje na prvu oprugu i $F_2 = k_2 x$ sila koja deluje na drugu oprugu. Pošto se izdužuju za istu vrednost,

$$F = k_p x = (k_1 + k_2)x \Rightarrow k_p = k_1 + k_2.$$

c) Na osnovu a) i b) proizilazi da je

$$k_{e1} = \frac{2k2k}{2k + 2k} = k,$$
$$k_{e2} = k_{e1} + k = 2k,$$
$$k_e = \frac{k_{e2}k}{k_{e2} + k} = \frac{2kk}{2k + k} = \frac{2}{3}k.$$



Period vertikalnih oscilacija je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} = 2.43\,s.$$

Zadatak 17

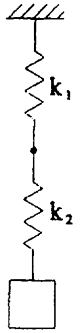
Telo mase $m = 20\,g$ obešeno je o dve opruge krutosti $k_1 = 0.2\,Nm^{-1}$ i $k_2 = 0.3\,Nm^{-1}$, koje su u jednom slučaju spojene redno, a u drugom paralelno (kao na slici). Odrediti:

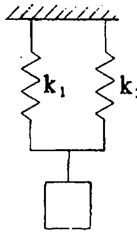
a) odnos perioda vertikalnih oscilacija ovog tela u navedenim slučajevima;

b) odnos kinetičkih energija, po isteku $t = 0.9\,s$ od početnog trenutka, kada se telo nalazilo u ravnotežnom položaju. Smatrati da su amplitude oscilovanja iste u oba slučaja.

Rešenje

Na slici su date redna i paralelna veza dve opruge. Za slučaj redne veze, period oscilovanja je





$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{e1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

Za slučaj paralelne veze, period oscilovanja je

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{e2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Odnos perioda oscilovanja je

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}} = 2.04.$$

Kinetička energija redno vezanih opruga je

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mA^2\omega_1^2\cos^2\omega_1 t, \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}},$$

a kada su paralelno vezane

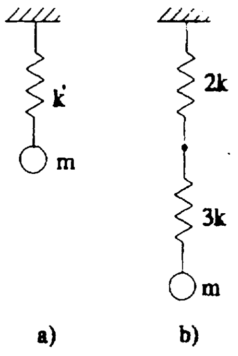
$$E_{k2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_2^2\cos^2\omega_2 t, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

Odnos kinetičkih energija je

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}}=\frac{\omega_1^2\cos^2\omega_1 t}{\omega_2^2\cos^2\omega_2 t}=2.4.$$

Zadatak 18

Period oscilovanja tela mase $m=10\,g$ prikazanog na slici a) iznosi $T=1\,s$. Odrediti potencijalnu energiju E_p tela iste mase prikazanog na slici b) u trenutku $t=9.13\cdot10^{-2}\,s$, ako je u trenutku $t=0$ u ravnotežnom položaju. Amplituda oscilovanja je $A=5\,cm$.



Rešenje

Period oscilovanja sistema prikazanog na slici a) je

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow k=(\frac{2\pi}{T})^2m,$$

a sistema prikazanog na slici b)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}},\tag{7.17}$$

gde je

$$k_e=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\frac{2k3k}{5k}=1.2k.\tag{7.18}$$

Zamenom (7.18) u (7.17) dobija se

$$k=(\frac{2\pi}{T})^2\frac{m}{1.2}.$$

Potencijalna energija sistema je

$$E_p=\frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t.\tag{7.19}$$

Pošto je

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k_e}{m}},$$

to se zamenom u (7.19) za E_p dobija sledeći izraz:

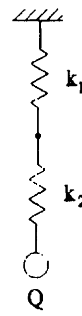
$$E_p=\frac{mA^2k}{2m}\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Zamenom izraza za k i uvrštavanjem brojnih vrednosti dobija se

$$E_p=\frac{mA^2}{2}\frac{k_e}{m}\sin^2\sqrt{\frac{k_e}{m}}=7\cdot10^{-8}\,J.$$

Zadatak 19

Odrediti kinetičku energiju tela težine $Q=0.484\,N$ prikazanog na slici, po isteku vremena $t=0.9\,s$ od trenutka kada se telo nalazilo u ravnotežnom položaju. Oscilacije smatrati prosto harmonijskim, pri čemu je maksimalno udaljenje od ravnotežnog položaja (amplituda) $A=4.3\,cm$, a krutost opruga $k_1=0.1\,Nm^{-1}$ i $k_2=0.2\,Nm^{-1}$.



Rešenje

Kinetička energija sistema je

$$E_k=\frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\omega t,\tag{7.20}$$

gde je

$$m=\frac{Q}{g};\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k_e}{m}}.\tag{7.21}$$

Pošto su opruge redno vezane,

$$k_e=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=0.07\,Nm^{-1}.\tag{7.22}$$

Zamenom (7.21) i (7.22) u (7.20) i uvrštavanjem brojnih vrednosti dobija se da je

$$E_k=64\cdot10^{-6}\,J.$$

Zadatak 20

Napisati jednačinu rezultujućeg oscilovanja koje je dobijeno slaganjem dve medjusobno normalne oscilacije sa jednakim frekvencijama $\nu_1=\nu_2=5\,Hz$

i jednakim početnim fazama $\phi_1 = \phi_2 = 60^o$. Amplituda jedne oscilacije je $A_1 = 0.1\,m$, a druge $A_2 = 0.05\,m$.

Rešenje

Pri slaganju dveju medjusobno upravnih oscilacija jednakih frekvencija, jednačina putanje rezultujuće oscilacije ima oblik:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = 0. \qquad (7.23)$$

Pošto je $(\phi_2 - \phi_1) = 0$, jednačina (7.23) postaje:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0 \Rightarrow (\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2})^2 = 0.$$

Rešenje jednačine je oblika $y = (A_2/A_1)x$, a to je jednačina prave linije. Prema tome, rezultujuće oscilovanje se vrši po pravoj liniji. Ugao nagiba prave odredjuje se iz jednačine $\tan\alpha = A_2/A_1 = 0.5$, odakle je $\alpha = 26^o34'$. Period rezultujućeg oscilovanja jednak je periodu pojedinačnih oscilacija, a amplituda rezultujućeg oscilovanja je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0.11\,m.$$

Prema tome, jednačina rezultujućeg oscilovanja ima oblik:

$$s = 0.11\sin(10\pi t + \frac{\pi}{3})\,[m].$$

Zadatak 21

Materijalna tačka harmonijski osciluje istovremeno u dva upravna pravca. Period oscilovanja u jednom pravcu je T_1, a u drugom $T_2 = 2T_1$. Amplitude oscilovanja su jednake, a početne faze su jednake nuli. Naći rezultujuću oscilaciju materijalne tačke.

Rešenje

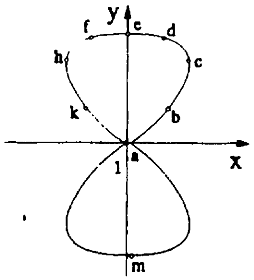
Pod pretpostavkom da se pravci oscilovanja poklapaju sa x i y osom, jednačine oscilovanja su:

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T_1}t, \qquad (7.24)$$

$$y = A\sin\frac{2\pi}{T_2}t. \qquad (7.25)$$

Kako je uslov zadataka $T_2 = 2T_1$, jednačina (7.25) se može napisati u obliku

$$y = A\sin\frac{2\pi}{2T_1}t = A\sin\frac{\pi}{T_1}t. \qquad (7.26)$$



Na osnovu jedančina (7.24) i (7.26) mogu se dobiti vrednosti za x i y za različita vremena t. Vrednosti za t, x i y date su u tabeli, a grafik funkcije na slici. Kao što se vidi simetrično se dobija trajektorija aml (provera ovog prepušta se čitaocu).

Broj	t	x	y	Tačka na grafiku
1	0	0	0 a	
2	$t_{1/8}$	0.7 A	0.4A	b
3	$t_{1/4}$	A	0.7A	c
4	$3t_{1/8}$	0.7A	0.9 A	d
5	$t_{1/2}$	0	A	e
6	$5T_{1/8}$	-0.7A	0.9A	f
7	$3T_{1/4}$	-A	0.7A	h
8	$7T_{1/8}$	-0.7A	0.4A	k
9	T_1	0	0	l

Zadatak 22

Oscilator istovremeno vrši dve medjusobno upravne oscilacije $x = \cos(\pi t)$ i $y = \cos(\pi t/2)$. Naći trajektoriju rezultujućeg oscilovanja materijalne tačke.

Rešenje

Jednačine oscilovanja su:

$$x = \cos\pi t,$$

$$y = \cos\frac{\pi t}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi t}{2}}, \qquad (7.27)$$

odakle se dobija

$$2y^2 - 1 = \cos\pi t. \qquad (7.28)$$

Iz (7.27) i (7.28) dobija se sledeća jednačina:

$$\frac{2y^2-1}{x}=1,$$

što predstavlja jednačinu parabole .

Zadatak 23
Oscilovanje materijalne tačke se može prikazati jednačinom: $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$, gde se A menja sa vremenom po zakonu $A = A_o(1+\cos 2\pi\nu_2 t)$, $A_o = const.$ Naći od kojih se harmonijskih oscilacija sastoji oscilovanje. Nacrtati grafike pojedinačnih i rezultujućih oscilacija za slučaj $A_o = 4\,cm$, $\nu_1 = 2\,s^{-1}$, $\nu_2 = 1\,s^{-1}$. Nacrtati spektar složenih oscilacija.

Rešenje

Prema uslovu zadatka elongacija oscilacija je

$$x = A\sin 2\pi\nu_1 t, \tag{7.29}$$

a amplituda

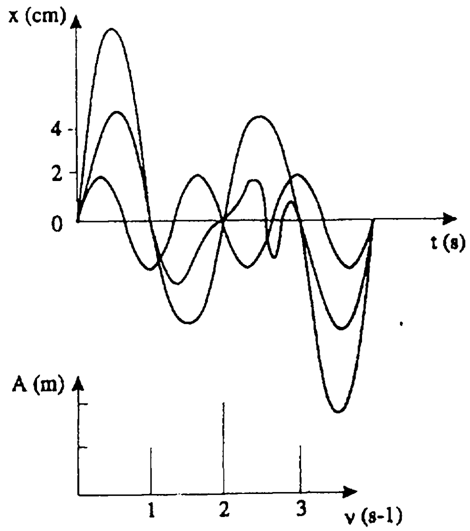
$$A = A_o(1+\cos 2\pi\nu_2 t). \tag{7.30}$$

Zamenom (7.30) u (7.29) dobija se

$$\begin{aligned} x &= A_o(1+\cos 2\pi\nu_2 t)\sin 2\pi\nu_1 t,\\ &= A_o\sin 2\pi\nu_1 t + A_o\cos 2\pi\nu_2 t\sin 2\pi\nu_1 t,\\ &= A_o\sin 2\pi\nu_1 t + \frac{A_o}{2}\sin[2\pi(\nu_1-\nu_2)t] + \frac{A_o}{2}\sin[2\pi(\nu_1+\nu_2)t]. \end{aligned}$$

Kao što se vidi, razmatrano oscilovanje nije prosto harmonijsko već je složeno i predstavlja zbir tri harmonijska oscilatorna kretanja sa frekvencijama ν_1, $(\nu_1-\nu_2)$ i $(\nu_1+\nu_2)$ i sa amplitudama A_o, $A_o/2$ i $A_o/2$, redom. Ovakvo oscilovanje naziva se modulisano. Njegova amplituda se menja sa vremenom. Grafici pojedinačnih i rezultujućeg oscilovanja kao i spektar prikazani su na slici a i b.

Zadatak 24
Logaritamski dekrement prigušenih oscilacija matematičkog klatna jedanak



je $\lambda = 0.2$. Koliko puta se smanji amplituda oscilovanja u toku jednog perioda oscilovanja?

Rešenje

Ako su $A(t) = A_1$ i $A(t+T) = A_2$ dve uzastopne oscilacije izmedju kojih je vremenski interval jednak periodu T, tada je logaritamski dekrement prigušenja dat sledećim izrazom:

$$\lambda = \ln\frac{A_1}{A_2}.$$

Amplitude A_1 i A_2 se mogu izraziti na sledeći način:

$$A_1 = A_o\exp(-\beta t); \qquad A_2 = A_o\exp[-\beta(t+T)],$$

gde je A_o amplituda oscilovanja u momentu posmatranja ($t=0$), tako da se dobija

$$\lambda = \ln\frac{A_1}{A_2} = \beta T, \tag{7.31}$$

gde je β koeficijent prigušenja. Odnos ovih amplituda je

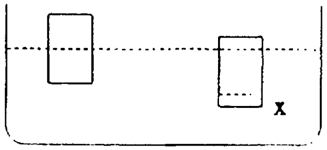
$$\frac{A_1}{A_2} = \exp(\lambda) = 1.22. \tag{7.32}$$

Zadatak 25

Cilindar, čiji je poluprečnik $r = 2\,cm$, a masa $= 200\,g$, pliva u vertikalnom položaju u tečnosti čija je gustina $\rho = 2\,gcm^{-3}$. Kada se telo više potopi, a zatim pusti, ono počne da osciluje. Kolika je frekvencija oscilovanja cilindra, ako su oscilacije neprigušene. U slučaju prigušenih oscilacija cilindra, odrediti logaritamski dekrement ovih oscilacija λ, ako posmatrani oscilator izgubi 90% svoje energije za $t = 20\,s$.

Rešenje

Na slici su dati položaji ravnoteže pre i nakon potapanja cilindra u tečnost. U prvom slučaju uravnotežene su sile potiska F_p i težina cilindra Q, pri čemu je rezultujuća sila



$$F_r = F_p - Q = 0.$$

Posle narušavanja ravnoteže, rezultujuća sila je

$$F_r = F_p' - Q = F_p + \Delta F_p - Q = \Delta F_p,$$

gde je

$$\Delta F_p = \rho S x g = kx; \qquad k = \rho S g$$

dodatna sila potiska zbog uranjanja cilindra u tečnost.

Period oscilovanja cilindra je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho r^2 \pi g}{m}} = 1.77\,s^{-1}. \tag{7.33}$$

Logaritamski dekrement prigušenja je

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{\beta}{\nu}. \tag{7.34}$$

Izgubljena energija oscilatora je

$$0.9 = \frac{\Delta E}{E_o} = \frac{E_o - E}{E_o} = 1 - \exp(-2\beta t),$$

gde je E_o energija oscilatora u trenutku posmatranja ($t = 0$), a E energija posle vremena t. Logaritmovanjem ovoga izraza dobija se

$$\ln(1-0.9) = -2\beta t \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2t}\ln(1-0.9). \tag{7.35}$$

Na osnovu izraza (7.33), (7.34) i (7.35) dobija se da je

$$\lambda = \left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho r^2 \pi g}{m}}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2t}\right)\ln(1-0.9) = 0.03.$$

Zadatak 26

Koliki je logaritamski dekrement prigušenih oscilacija harmonijskog oscilatora čija je sopstvena kružna frekvencija $\omega_o = 1.5\,rad.s^{-1}$. Oscilator izgubi 99% energije za $t = 3\,s$.

Rešenje

Logaritamski dekrement prigušenja je

$$\lambda = \beta T, \tag{7.36}$$

gde je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}. \tag{7.37}$$

Izgubljena energija za $t = 3\,s$ može se izraziti na sledeći način:

$$\frac{E_o - E}{E_o} = 0.99 = \frac{E_o - E_o\exp(-2\beta t)}{E_o},$$

odnosno

$$1 - \exp(-2\beta t) = 0.99 \Rightarrow \beta = -\frac{\ln 0.01}{2t}. \tag{7.38}$$

Zamenom (7.37) i (7.38) u (7.36) dobija se

$$\lambda = -\frac{\ln 0.01}{2t}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}} = 3.74.$$

Zadatak 27

Posle koliko vremena će se energija oscilovanja zvučne viljuške frekvencije $\nu = 600\,Hz$ smanjiti za $n = 10^6$ puta, ako je logaritamski dekrement prigušenja $\lambda = 8\cdot 10^{-4}$?

Rešenje

Logaritamski dekrement prigušenja je

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_o\exp(-\beta t)}{A_o\exp[-\beta(t+T)]} = \ln[\exp(\beta T)] = \beta T.$$

Energija zvučne viljuške posle vremena t je

$$E = E_o \exp(-2\beta t),$$

gde je E_o početna energija oscilovanja zvučne viljuške (u trenutku $t = 0$).

Pošto je $T = 1/\nu$, a $\beta = \lambda/T$, gornji izraz se može napisati u sledećem obliku:

$$t = \frac{\ln n}{2\lambda\nu} = 14.4\, s.$$

Zadatak 28

Dužina matematičkog klatna je $l = 1\, m$, a logaritamski dekrement prigušenja $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$. Posle koliko vremena, od početka oscilovanja, će energija klatna da opadne za 40%. Za koliko se promeni to vreme ako se klatno nalazi na visini $h = 50\, km$? Ubrzanje Zemljine teže je $g = 9.81\, ms^{-2}$, a poluprečnik Zemlje $R = 6.37 \cdot 10^6\, m$.

Rešenje

Relativno smanjenje energije klatna posle vremena t je

$$\frac{E_o - E}{E_o} = 0.4 = \frac{E_o - E_o \exp(-2\beta t)}{E_o} = 1 - \exp(-2\beta t), \qquad (7.39)$$

gde je E_o početna energija klatna, a E njegova energija posle vremena t.

Iz (7.39) proizilazi da je

$$t = -\frac{1}{2\beta} \ln(1 - 0.4). \qquad (7.40)$$

Pošto je

$$\lambda = \beta T; \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}},$$

gde je

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}; \qquad T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

to se zamenom u (7.40) dobija

$$\beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{l/g[1 + \lambda^2/(4\pi^2)]}} = 2.49 \cdot 10^{-2}\, s^{-1}, \qquad (7.41)$$

odnosno zamenom ove vrednosti u (7.40) dobija se da je $t = 10.26\, s$.

Koeficijent prigušenja β' klatna kada se ono nalazi na visini h može se izraziti na sledeći način:

$$\beta' = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{l/g'[1 + \lambda^2/(4\pi^2)]}}, \qquad (7.42)$$

gde je g' ubrzanje Zemljine teže na visini h i može se izraziti preko Njutnovog zakona gravitacije

$$g' = \gamma\frac{M}{(R + h)^2}.$$

Iz izraza (7.41) i (7.42) sledi da je

$$\frac{\beta}{\beta'} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = (1 + \frac{h}{R}) = 1.008,$$

gde je $g = \gamma m/R^2$ ubrzanje na površini Zemlje.

Ako se sa t' označi vreme za koje energija klatna opadne za 40% na visini h, onda je na osnovu (7.39)

$$t' = -\frac{1}{2\beta'} \ln(1 - 0.4).$$

Prema tome je

$$\frac{t'}{t} = \frac{\beta}{\beta'} \Rightarrow t' = 1.008\, t = 10.34\, s.$$

Relativna promena vremena je

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{t' - t}{t} \approx 0.008 = 0.8\%.$$

8. Talasno kretanje

8.1 Teorija

Pod talasnim kretanjem se podrazumeva stacionarno prostiranje impulsa kroz elastičnu sredinu. Čestice sredine od kojih talas polazi predstavljaju izvor talasa.

Brzina prostiranja transverzalnih talasa je data sledećim izrazom:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gde je F sila zatezanja žice kroz koju se prostire talas, a μ linearna gustina (masa po jedinici dužine).

Izraz za brzinu prostiranja longitudinalnih talasa u čvrstim telima je

$$c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}},$$

gde je E_y Jungov modul elastičnosti, a ρ gustina materijala. Brzina prostiranja talasa u gasovima data je sledećim izrazom:

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho_t}},$$

gde je p pritisak gasa, κ odnos specifičnih toplotnih kapaciteta pri konstantnom pritisku (c_p) i konstantnoj zapremini (c_V), a ρ_t gustina gasa na temperaturi t^oC. Gornji izraz se može prikazati i u sledećem obliku:

$$c = c_o\sqrt{1 + \frac{t}{273}},$$

gde je $c_o = p\kappa/\rho_o$ brzina prostiranja talasa na temperaturi 0^oC, a ρ_o gustina gasa na 0^oC.

Jednačina ravnog progresivnog talasa ima sledeći oblik:

$$y = A\sin(\omega t - kx + \phi),$$

gde je $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ talasni broj, $\omega = 2\pi/T$ kružna frekvencija i ϕ početna faza.

Jednačina sfernog talasa je

$$y = \frac{A_o}{r}\sin(\omega t - kx),$$

gde je A_o konstantna veličina, a r rastojanje od centra talasa do razmatrane tačke sredine.

Apsorpcija talasa vrši se po sledećem zakonu:

$$I = I_o \exp(-\mu x),$$

gde je I_o intenzitet talasa pre prolaska kroz elastičnu sredinu, I intezitet talasa posle prolaska kroz elastičnu sredinu, μ je koeficijent apsorpcije energije talasa u datoj sredini, a x rastojanje koje predje talas u sredini.

Pri interferenciji talasa rezultujuća elongacija čestice u nekoj sredini data je sledećim izrazom:

$$y = 2A\cos 2\pi(\frac{x_1 - x_2}{2\lambda})\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}),$$

gde je $B = 2A\cos 2\pi[(x_1 - x_2)/2\lambda]$ amplituda talasa.

Jednačina stojećeg talasa je

$$y = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\sin\omega t,$$

gde je $B = 2A\cos(2\pi x)/\lambda$ amplituda stojećeg talasa.

Zakon odbijanja talasa kaže da je upadni ugao jednak odbojnom uglu, a zakon prelamanja talasa, da je odnos sinusa upadnog i prelomnog ugla jednak odnosu brzina prostiranja talasa u tim sredinama.

Mehanički talasi koji se prostiru u elastičnoj sredini, a zapažaju se čulom sluha, nazivaju se zvučni talasi.

Uslov za pojavu stojećeg talasa kod zategnutih žica je

$$l = n\frac{\lambda}{2},$$

gde je $n = 1, 2, 3, ...$, a λ talasna dužina talasa.

Uslov za pojavu transverzalnog stojećeg talasa kod štapa učvršćenog na jednom kraju se može izraziti na sledeći način:

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4},$$

a kod štapa učvršćenog u dve tačke

$$l = n\frac{\lambda}{2}.$$

Uslov za pojavu longitudinalnog stojećeg talasa u štapu je

$$l = n\frac{\lambda}{2}.$$

Uslov za pojavu stojećeg talasa kod vazdušnog stuba zatvorenog na jednom kraju je

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4},$$

a vazdušnog stuba otvorenog na oba kraja

$$l = n\frac{\lambda}{2}.$$

Intenzitet mehaničkih talasa I predstavlja energiju E talasa koja se u jedinici vremena prenese kroz površinu S koja je normalna na pravac prostiranja talasa

$$I = \frac{E}{tS} = \frac{\Phi}{S},$$

gde je Φ snaga (fluks) talasa.

Nivo zvuka ili glasnost l data je sledećim izrazom:

$$L = k\log\frac{I}{I_o},$$

gde je $I_o = 10^{-12}\,Wm^{-2}$ intenzitet zvuka na granici čujnosti, a I izmerena vrednost intenziteta. Za $k = 1$, nivo zvuka se meri u belima (B), a za $k = 10$, u decibelima (dB).

Frekvencija zvuka ν koju registruje prijemnik u slučaju kada se on i izvor zvuka kreću jedan u odnosu na drugi može se izraziti na sledeći način:

$$\nu = \frac{c \pm v_p}{c \mp v_i}\nu_o,$$

gde je ν_o frekvencija zvuka koji emituje izvor, c brzina prostiranja zvuka kroz sredinu, v_p brzina prijemnika i v_i brzina izvora.

8.2 Zadaci

Zadatak 1
Kolikom silom F treba zategnuti žicu dužine $l = 1\,m$ da bi emitovala osnovni ton frekvencije $\nu = 200\,Hz$? Masa žice je $m = 6\,g$.

Rešenje

Frekvencija oscilovanja zategnute žice je

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gde je $\mu = m/l$ podužna masa (masa po jedinici dužine), a $n = 1, 2, 3,...$ Za osnovni ton je $n = 1$ pa je

$$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = 4\nu^2 l^2 m = 960\,N.$$

Zadatak 2
Kada se čelični štap dužine $l = 1.5\,m$ i površine poprečnog preseka $S = 1.83\,cm^2$ optereti tegom težine $F = 4905\,N$, izduži se za $\Delta l = 0.2\,mm$ (pri tome se težina samog štapa zanemaruje). Odrediti brzinu prostiranja longitudinalnih talasa kroz čelik. Gustina čelika je $\rho = 7850\,kgm^{-3}$.

Rešenje

Longitudinalni talasi se prostiru kroz elastičnu sredinu brzinom

$$c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}. \tag{8.1}$$

Modul elastičnosti E_y se odredjuje iz Hukovog zakona

$$\frac{F}{S} = E_y\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow E_y = \frac{Fl}{\Delta l S}. \tag{8.2}$$

Smenom (8.2) u (8.1) dobija se

$$c = \sqrt{\frac{Fl}{\rho S \Delta l}} = 5.06 \cdot 10^3\,ms^{-1}.$$

Zadatak 3
Čelična žica dužine $l = 0.5\,m$ i prečnika $d = 0.1\,mm$ učvršćena je jednim krajem za oslonac, a na drugom kraju je opterećena tegom mase $m = 15\,kg$. Koliko iznosi frekvencija osnovnog tona zategnute žice? Gustina čelika je $\rho = 7800\,kgm^{-3}$, a ubrzanje Zemljine teže $g = 9.81\,ms^{-2}$.

Rešenje

Kroz žicu se mogu prostirati samo transverzalni talasi, čija je brzina

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \tag{8.3}$$

gde je $F = mg$, a $\mu = m_1/l = rhoV/l = \rho\pi d^2/4$. Zamenom F i μ u (8.3) dobija se sledeći izraz:

$$c = \sqrt{\frac{4mg}{\rho\pi d^2}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{mg}{\rho\pi}} \approx 1550\,ms^{-1}.$$

Uslov za pojavu stojećeg talasa kod žice je

$$l = n\frac{\lambda}{2}; \qquad n = 1, 2, 3...$$

Pošto je $\lambda = c/\nu$, to je

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2l}.$$

Za osnovni ton $n = 1$, pa je

$$\nu = \frac{c}{2l} = \frac{1}{ld}\sqrt{\frac{mg}{\rho\pi}} = 1550\,Hz.$$

Zadatak 4
Metalni štap, dužine l i toplotnog koeficijenta linearnog širenja $\alpha = 2\,\cdot$

$10^{-5}\,K^{-1}$, zagreje se od temperature $t_1 = 20^oC$ do $t_2 = 80^oC$. Koliki je odnos osnovnih frekvencija longitudinalnih oscilacija štapa na ovim dvema temperaturama, ako je on učvršćen po sredini?

Rešenje

Frekvencija osnovnih oscilacija učvršćenog štapa po sredini je

$$\nu_o = \frac{c}{2l},$$

gde je $c = \sqrt{E_y/\rho}$ brzina prostiranja talasa.

Veza izmedju dužine l na nekoj temperaturi t i dužine l_o na temperaturi 0^oC je

$$l = l_o(1 + \alpha t),$$

dok je gustina

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sl_o(1+\gamma t)}.$$

Prema tome, frekvencija štapa na nekoj temperaturi t je

$$\nu_o = \frac{1}{2l_o(1+\alpha t)}\sqrt{\frac{E_y S l_o(1+\gamma t)}{m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_y S(1+3\alpha t)}{m l_o (1+\alpha t)^2}}.$$

Znajući da je $\gamma = 3\alpha$, traženi odnos frekvencija za dve zadate temperature je

$$\frac{\nu_{o1}}{\nu_{o2}} = \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}\cdot\sqrt{\frac{1+3\alpha t_1}{1+3\alpha t_2}} = 0.9994.$$

Zadatak 5

Transverzalni talasi prostiru se duž elastičnog užeta brzinom $v = 15\,ms^{-1}$. Period oscilovanja tačaka užeta je $T = 1.2\,s$, a amplituda oscilovanja $A = 2\,cm$. Odrediti talasnu dužinu, fazu i elongaciju tačke koja se nalazi na odstojanju $r = 45\,m$ od izvora oscilovanja, posle $t = 4\,s$.

Rešenje

Talasna dužina talasa je $\lambda = vT = 18\,m$ pošto je period oscilovanja tačke jednak periodu oscilovanja talasa. Faza ϕ i elongacija y tačke mogu se naći iz jednačine talasnog kretanja

$$y = A\sin\omega(t - \frac{r}{v}),$$

gde je

$$\phi = \omega(t - \frac{r}{v}) = \frac{2\pi}{T}(t - \frac{r}{v}) = 5.24\,rad.$$

Prema tome, elongacija je

$$y = A\sin\phi = 1.73\cdot 10^{-2}\,m.$$

Zadatak 6

Čestica elastične sredine nalazi se na rastojanju $r = 4\,cm$ od talasnog izvora. Ona biva pogodjena talasom i posle vremena $t = T/6$ pomeri se na rastojanje jednako polovini amplitude. Odrediti talasnu dužinu talasa koji se prostire u ovakvoj sredini, ako je period oscilovanja T.

Rešenje

Jednačina talasnog kretanja je

$$y = A\sin\omega(t - \frac{r}{c}) = A\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r}{\lambda}),$$

gde je c brzina prostiranja talasa. Iz uslova zadatka je $y = A/2$, pa se gornja jednačina može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{A}{2} = A\sin(\frac{2\pi T}{6T} - \frac{2\pi\cdot 0.04}{\lambda}) \Rightarrow \lambda = 0.48\,m.$$

Zadatak 7

Za koliko se procenata promeni osnovna frekvencija longitudinalnih oscilacija štapa, učvršćenog po sredini, ako se on zagreje od temperature

$t_1 = 10^oC$ do $t_2 = 100^oC$? Toplotni koeficijent linearnog širenja štapa je $\alpha = 2.3 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$.

Rešenje

Pošto se radi o osnovnom tonu $n = 1$, a uslov za pojavu stojećeg talasa u štapu dužine l učvršćenom po sredini je

$$l = \frac{\lambda_o}{2} = \frac{c}{2\nu_o}, \qquad (8.4)$$

gde je c brzina ovih talasa. S druge strane, radi se o longitudinalnim talasima čija je brzina c je

$$c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} = \sqrt{\frac{E_y(1+\gamma t)}{\rho_o}}, \qquad (8.5)$$

dok je

$$l = l_o(1+\alpha t). \qquad (8.6)$$

Zamenom (8.5) i (8.6) u (8.4), c obzirom da je $\gamma = 3\alpha$, dobija se da je

$$\nu_o = \frac{1}{2l_o}\sqrt{\frac{E_y}{\rho_o}}\frac{\sqrt{1+3\alpha t}}{1+\alpha t}.$$

Ako se sa ν_{o1} označi frekvencija štapa na temperaturi t_1, a sa ν_{o2} frekvencija istog štapa na temperaturi t_2, njihov odnos ima vrednost

$$\frac{\nu_{o2}}{\nu_{o1}} = \frac{(1+\alpha t)\sqrt{1+3\alpha t_2}}{(1+\alpha t_2)\sqrt{1+3\alpha t_1}} = 1.001, \qquad (8.7)$$

dok je relativna promena frekvencije

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{o1}} = \frac{\nu_{o2}-\nu_{o1}}{\nu_{o1}} = 0.001 = 0.1\%. \qquad (8.8)$$

Zadatak 8

Otvorena staklena cev delimično je potopljena u tečnost normalno na njenu slobodnu površinu. Najmanja frekvencija na kojoj rezonira vazdušni stub u cevi je $\nu_1 = 340\,Hz$. Za koliko treba skratiti vazdušni stub u cevi da bi rezonirao na najmanjoj frekvenciji od $\nu_2 = 5000\,Hz$? Brzina prostiranja zvuka u vazduhu je $c = 340\,ms^{-1}$.

Rešenje

Uslov za rezonanciju ovakvog stuba dužine l je

$$l_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4},$$

gde je $n = 0, 1, 2, ...$

Za frekvenciju ν_1 je

$$l = \frac{c}{4\nu_1}, \qquad (8.9)$$

a za frekvenciju ν_2

$$l - \Delta l = \frac{c}{4\nu_2}, \qquad (8.10)$$

gde je Δl skraćenje vazdušnog stuba.

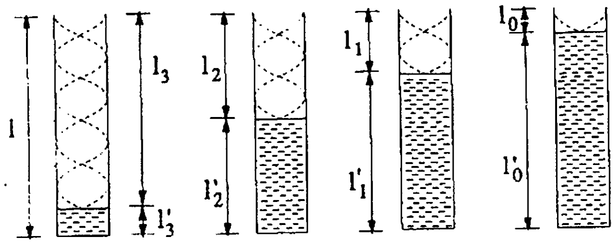
Oduzimanjem (8.10) od (8.9) dobija se

$$\Delta l = \frac{c}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right) = 8\,m.$$

Zadatak 9

Iznad cilindričnog suda dužine $l = 1.2\,m$ nalazi se zvučna viljuška koja osciluje sopstvenom frekvencijom $\nu_o = 527\,Hz$. Ako se ovaj sud polako puni vodom, odrediti pri kojim će nivoima vode u sudu, u odnosu na dno, zvuk viljuške biti maksimalno pojačan. Temperatura prostorije je $t = 20^oC$, brzina zvuka na 0^oC je $c_o = 331\,ms^{-1}$, a koeficijent zapreminskog širenja vazduha $\gamma = 0.0037\,K^{-1}$.

Rešenje



Brzina zvuka u vazduhu na temperaturi t je

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} = c_o\sqrt{1+\gamma t} = 343\,ms^{-1}.$$

Rezonancija kod stuba vazduha u cevi zatvorenoj na jednom kraju nastupa ako je

$$l_n = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}, \qquad n = 0,1,2,...$$

Talasna dužina stojećeg talasa jednaka je talasnoj dužini zvuka koga proizvodi zvučna viljuška, tj.

$$\lambda_n = \lambda_o = \frac{c}{\nu_o} = 0.63\,m. \tag{8.11}$$

Da bi rešenje imalo fizički smisao, mora biti ispunjen uslov

$$l_n = \frac{2n+1}{4}\lambda_o < l \Rightarrow n < \frac{1}{2}(\frac{4l}{\lambda_o} - 1) = 3.19 \Rightarrow n = 0,1,2,3$$

Prema tome je

$$l_n = \frac{2n+1}{4}\lambda_o, \quad l'_n = l - l_n$$

$$n = 3 \Rightarrow \qquad l_3 = \frac{7}{4}\lambda_o = 1.10\,m \Rightarrow l'_3 = 0.1\,m$$

$$n = 2 \Rightarrow \qquad l_2 = \frac{5}{4}\lambda_o = 0.78\,m \Rightarrow l'_2 = 0.41\,m$$

$$n = 1 \Rightarrow \qquad l_1 = \frac{3}{4}\lambda_o = 0.47\,m \Rightarrow l'_1 = 0.73\,m$$

$$n = 0 \Rightarrow \qquad l_o = \frac{1}{4}\lambda_o = 0.16\,m \Rightarrow l'_o = 1.04\,m$$

Zadatak 10

Kuntova cev je napunjena vodonikom (H_2) i u njoj se obrazuju četiri figure.

Dužina štapa je $l_s = 0.8\,m$, brzina zvuka u njemu $c_s = 5170\,ms^{-1}$, toplotni koeficijent linearnog širenja štapa je $\alpha_s = 1.5 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, a temperatura sistema $t = 20^oC$. Za koliko treba povećati dužinu vazdužnog stuba da bi broj figura ostao isti, ako se temperatura povisi za $\Delta t = 40^oC$? Univerzalna gasna konstanta je $R = 8.31\,Jmol^{-1}K^{-1}$, molarna masa vodonika $M = 2\,gmol^{-1}$ i odnos specifičnih toplotnih kapaciteta vodonika $\kappa = 1.4$.

Rešenje

Pošto štap pobudjuje vodonični stub na oscilovanje, frekvencija oscilovanja štapa je jednaka frekvenciji oscilovanja stuba vodonika, tj.

$$\nu_v = \nu_s \Rightarrow \frac{c_v}{\lambda_v} = \frac{c_s}{\lambda_s}, \tag{8.12}$$

gde su ν_v i λ_v frekvencija i talasna dužina talasa u vodoniku, a λ_s talasna dužina stojećeg talasa u štapu.

U štapu i vodoničnom stubu obrazuju se talasi na rastojanjima

$$l_s = \frac{\lambda_s}{2}; \qquad l_v = n\frac{\lambda_v}{2}. \tag{8.13}$$

Na osnovu (8.12) i (8.13) dobija se

$$l_v = n\frac{c_v l_s}{c_s}. \tag{8.14}$$

Pošto je brzina prostiranja talasa u vodoniku

$$c_v = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{mRT\kappa}{MV\rho}} = \sqrt{\frac{RT\kappa}{M}},$$

zamenom u (8.14) dobija se

$$l_v = \frac{nl_s}{c_s}\sqrt{\frac{RT\kappa}{M}}.$$

Za $T' = T + \Delta T = 333\,K$ je

$$l'_v = n\frac{l'_s}{c'_s}\sqrt{\frac{R\kappa}{M}(T + \Delta T)}.$$

S druge strane je

$$l'_s = l_s(1 + \alpha_s \Delta t),$$

$$c'_s = \sqrt{\frac{E_y}{\rho'_s}} = \sqrt{\frac{E_y}{\rho_s}}.\sqrt{(1 + 3\alpha_s \Delta t)} = c_s\sqrt{1 + 3\alpha_s \Delta t},$$

$$l'_v = n\frac{l_s}{c_s}\frac{1 + \alpha_s \Delta t}{\sqrt{1 + 3\alpha_s \Delta t}}\sqrt{\frac{R\kappa T'}{M}}.$$

Promena dužine vodoničnog stuba je

$$\Delta l_v = l'_v - l_v = \frac{nl_s}{c_s}\sqrt{\frac{R\kappa}{M}}\left(\frac{1 + \alpha_s \Delta t}{\sqrt{1 + 3\alpha_s \Delta t}}\sqrt{T'} - \sqrt{T}\right),$$

$$\Delta l_v = l_v(\frac{1 + \alpha_s \Delta t}{\sqrt{1 + 3\alpha_s \Delta t}}\sqrt{\frac{T'}{T}} - 1) = 0.05\,m.$$

Zadatak 11

Kod prozora jedne zgrade nivo buke uličnog saobraćaja iznosi $L = 10\,dB$. Površina otvora prozora je $S = 2\,m^2$. Kolika zvučna snaga ulazi kroz prozor? Prag čujnosti je $I_o = 10^{-12}\,Wm^{-2}$.

Rešenje

Intenzitet zvuka brojno je jednak snazi zvučnog talasa koja prolazi kroz jedinicu normalne površine, tj.

$$I = \frac{P}{S}.$$

Uslov zadatka je

$$L = 10\log\frac{I}{I_o},$$

ili

$$\frac{L}{10} = \log(10^{12}I) \to I = 10^{-11}\,Wm^{-2}$$

Zvučna snaga koja prolazi kroz prozor će biti

$$P = IS = 2\cdot 10^{-11}\,W. \tag{8.15}$$

Zadatak 12

Slepi miš leteći prema zidu emituje talase frekvencije ν_o. Odrediti brzinu slepog miša ako je frekvencija talasa koju slepi miš prima promenjena za 5%. Temperatura sredine je $t = 17^oC$, a brzina zvuka na temperaturi $t_o = 0^oC$, $c_o = 331.5\,ms^{-1}$.

Rešenje

Ako je ν_o frekvencija zvuka koju emituje slepi miš, ν' frekvencija zvuka koja se registruje na zidu, a ν'' frekvencija koju registruje slepi miš, tada je

$$\nu'' = \nu'\frac{c+v}{c}; \qquad \nu' = \nu_o\frac{c}{c-v},$$

odakle je

$$\nu'' = \nu_o\frac{c+v}{c-v}.$$

Relativna promena frekvencije je

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_o} = \frac{\nu'' - \nu_o}{\nu_o} = \frac{c+v}{c-v} - 1 = 0.05,$$

odakle se za brzinu slepog miša dobija $v = 0.024\,c$.

Brzina zvuka c na temperaturi t odredjuje se iz izraza $c = c_o\sqrt{1 - t/273}$, pa se za brzinu slepog miša dobija $v = 7.99\,ms^{-1}$.

Zadatak 13

Izvor zvuka frekvencije $\nu = 18\,kHz$ približava se jednom rezonatoru čija je sopstvena frekvencija $\nu_o = 20\,kHz$. Kolika treba da bude brzina izvora da bi stupio u rezonanciju sa rezonatorom? Smatrati da je vazduh dvoatomni gas čiji je odnos specifičnih toplotnih kapaciteta $\kappa = 1.4$, molarna masa $M = 0.029\,kgmol^{-1}$ i temperatura $t = 17^oC$. Univerzalna gasna konstanta je $R = 8.3\,Jmol^{-1}K^{-1}$.

Rešenje

Frekvencija ν' koja se registruje kada se izvor približava prijemniku (rezonatoru) može se izraziti na sledeći način:

$$\nu' = \frac{c}{c - v_i}\nu,$$

gde je v_i brzina kojom se kreće izvor, a c brzina prostiranja zvuka kroz vazduh.

Uslov za rezonanciju je da je $\nu' = \nu_o$, odakle se dobija

$$\frac{c}{c - v_i} = \frac{\nu_o}{\nu},$$

odnosno

$$v_i = c(1 - \frac{\nu}{\nu_o}). \tag{8.16}$$

Brzina zvuka kroz vazduh može se izraziti na sledeći način:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = 340.9\,ms^{-1}.$$

Zamenom brojnih vrednosti u (8.16) za brzinu izvora se dobija $v_i = 34.09\,ms^{-1}$.

9. Optika

9.1 Geometrijska optika

9.1.1 Teorija

Apsolutni indeks prelamanja neke sredine je

$$n_o = \frac{c}{v},$$

gde je c brzina prostiranja svetlosti u vakuumu, a v brzina prostiranja svetlosti u toj sredini.

Relativni indeks prelamanja dveju optički različitih sredina je

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2},$$

gde je v_1 brzina prostiranja svetlosti kroz prvu sredinu (iz koje svetlost izlazi), a v_2 brzina prostiranja svetlosti kroz drugu sredinu(u koju svetlost prelazi).

Zakon odbijanja svetlosti se izražava na sledeći način:

$$\alpha = \alpha',$$

gde je α upadni ugao zraka svetlosti, a α' odbojni ugao zraka svetlosti.

Jednačina izdubljenog ogledala je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R},$$

a ispupčenog ogledala

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R},$$

gde je p udaljenost predmeta od temena ogledala, l udaljenost lika od temena ogledala, f žižna daljina ogledala, a R poluprečnik krivine ogledala.

Transverzalno uvećanje sfernih ogledala je

$$U = \frac{L}{P},$$

gde su P i L linearne dimenzije predmeta i lika, redom.

Zakon prelamanja svetlosti može se izraziti na sledeći način:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta,$$

gde je n_1 apsolutni indeks prelamanja sredine iz koje svetlosni zrak izlazi, a n_2 apsolutni indeks prelamanja sredine u koju on prelazi, α i β su upadni i prelomni ugao zraka svetlosti, redom.

Paralelno pomeranje zraka svetlosti pri prolasku kroz planparalelnu ploču je

$$x = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right),$$

gde je d debljina ploče, n njen indeks prelamanja, a α upadni ugao zraka svetlosti.

Indeks prelamanja materijala prizme je

$$n = \frac{\sin(\theta + \delta_{min}/2)}{\sin\theta/2},$$

gde je δ_{min} minimalni ugao skretanja (devijacije) zraka svetlosti, a θ ugao prizme (ugao pri vrhu).

Ugao skretanja prizme je

$$\delta = (n-1)\theta.$$

Mera disperzije za dve boje (talasne dužine u spektru) je

$$\delta_2 - \delta_1 = (n_2 - n_1)\theta,$$

gde su δ_1 i δ_2 uglovi skretanja za te boje u spektru.

Totalna refleksija nastaje pri prelazu svetlosti iz optički gušće sredine indeksa prelamanja n_2 u optički redju sredinu indeksa prelamanja n_1, ako je ispunjen uslov

$$\sin\alpha_g = \frac{n_1}{n_2},$$

gde je α_g granični ugao totalne refleksije.

Jednačina sferne granične površine je

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{l} = \frac{n' - n}{R},$$

gde su n i n' apsolutni indeksi prelamanja jedne i druge sredine, p i l rastojanje predmeta i lika od temena sferne granične površine, redom i R poluprečnik krivine sferne granične površine.

Jednačina tankog sočiva je

$$\omega = \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

gde su n_1 i n_2 apsolutni indeksi prelamanja materijala sočiva i sredine koja ga okružuje, p i l rastojanja predmeta i lika od centra cočiva, R_1 i R_2 poluprečnici sfernih površina, f žižna daljina sočiva i ω optička jačina (moć) sočiva.

Transverzalno uvećanje sočiva je

$$U = \frac{L}{P},$$

gde su P i L linearne dimenzije predmeta i lika, redom.

Ekvivalentna žižna daljina za sistem od dva tanka sočiva je

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2},$$

gde su f_1 i f_2 žižne daljine sočiva, a d rastojanje izmedju njih.

Uvećanje lupe je

$$U = \frac{s}{f},$$

gde je $s \approx 25\,cm$ daljina jasnog vida, a f žižna daljina sabirnog sočiva koje se koristi kao lupa.

Uvećanje optičkog mikroskopa je

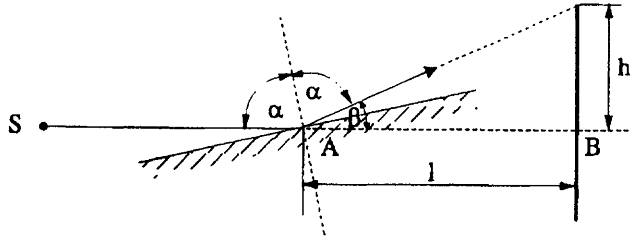
$$U = \frac{ls}{f_{ob} f_{ok}},$$

gde je l rastojanje izmedju objektiva i okulara (dužina tubusa), s daljina jasnog vida, a f_{ob} i f_{ok} žižne daljine objektiva i okulara, redom.

9.1.2 Zadaci

Zadatak 1
Horizontalni zrak svetlosti pada na vertikalni zaklon. Kada se na put zraka postavi ravno ogledalo, svetla mrlja se na zaklonu pomeri za $h = 2.5\,cm$ naviše. Odrediti ugao α pod kojim svetlost pada na ogledalo ako je rastojanje izmedju ogledala i zaklona $l = 60\,cm$.

Rešenje



Sa slike se vidi da je $\beta = 180^o - 2\alpha$. S druge strane, iz pravouglog $\triangle ABC$ sledi da je $tg\beta = h/l = 0.042 \Rightarrow \beta = 2.3^o$. Konačno, ugao pod kojim svetlost pada na ogledalo iznosi $\alpha = 88.8^o$.

Zadatak 2
Poluprečnik krivine izdubljenog ogledala je $R = 90\,cm$. Naći položaj p predmeta pri kome će njegov lik biti realan i tri puta uvećan. Gde se mora nalaziti predmet da bi njegov lik bio imaginaran i uvećan tri puta?

Rešenje

Za slučaj realnog lika na rastojanju l od ogledala, jednačina ogledala je

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l},$$

gde je f žižna daljina ogledala. Pri tome se, iz definicije uvećanja $U = L/P = l/p$, gde su L i P veličine lika i predmeta, redom, kao i iz uslova zadatka da je $L = 3P$, dobija da je $p = 60\,cm$.

Slično, za slučaj imaginarnog lika, iz uslova zadatka i jednačine ogledala

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{l} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{3p_1},$$

dobija se da je $R = 3p_1$, odnosno, $p_1 = 30\,cm$.

Zadatak 3
Ispred konveksnog sfernog ogledala poluprečnika krivine R nalazi se predmet na rastojanju $p = R$ od njegovog temena. Ako se umesto sfernog postavi ravno ogledalo, odrediti:
a) pomeraj lika u odnosu na lik dobijen sfernim ogledalom i
b) odnos uvećanja ova dva ogledala.

Rešenje

a) Kada je postavljeno sferno konveksno ogledalo, važi:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{l_1} = -\frac{2}{R} \Rightarrow l_1 = \frac{pR}{R+2p}.$$

Ovde je p udaljenost predmeta, a l_1 udaljenost lika od ogledala. S obzirom da je $p = R$, to je $l_1 = R/3$. Kada je postavljeno ravno ogledalo, onda važi da je $l_2 = R$, gde je l_2 udaljenje lika od ravnog ogledala. Dakle, $l_2 = 3l_1$, odnosno, traženo pomeranje lika je $x = l_2 - l_1 = 2l_1$.

b) Uvećanje sfernog ogledala je $U_1 = L_1/P = l_1/p = 1/3$ dok je uvećanje ravnog ogledala $U_2 = 1$, pa je $U_2 = 3U_1$.

Zadatak 4
Poluprečnik krivine izdubljenog ogledala je $R = 15\ cm$. Predmet visine $P = 2\,cm$ postavi se najpre na rastojanje $p_1 = 5\,cm$, a zatim na rastojanje $p_2 = 20\,cm$ od ogledala. Kakvi su likovi predmeta, gde se nalaze i kolika je njihova veličina u oba slučaja?

Rešenje

Za prvu poziciju predmeta rastojanje lika l_1 odredjuje se iz jednačine ogledala, tj.

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} = \frac{2}{R} \Rightarrow l_1 = \frac{p_1 R}{2p_1 - R} = -15\,cm.$$

Odgovarajuća veličina lika odredjuje se iz uvećanja $l_1/L_1 = p_1/P \Rightarrow L_1 = Pl_1/p_1 = 6\,cm$. Lik je imaginaran i uvećan.

I za drugu poziciju predmeta rastojanje lika l_2 odredjuje se iz jednačine ogledala, tj.

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R} \Rightarrow l_2 = \frac{p_2 R}{2p_2 - R} = 12\,cm.$$

Odgovarajuća veličina lika odredjuje se, takodje, iz uvećanja $l_2 = Pl_2/p_2 = 1.2\,cm$. Lik je realan i umanjen.

Zadatak 5

Izdubljeno ogledalo ispunjeno je terpentinom. Ako je poluprečnik krivine ogledala $R = 60\,cm$, a indeks prelamanja terpentina $n = 1.48$, odrediti optičku moć ω i žižnu daljinu f ovog sistema.

Rešenje

Terpentin koji ispunjava ogledalo deluje kao plankonveksno sočivo. Ako se sa ω_1 označi optička moć plankonveksnog sočiva, a sa ω_2 optička moć ogledala, onda se, praćenjem toka zraka svetlosti kroz ovaj sistem, može ustanoviti da je njegova optička moć ω:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_1 = 2\omega_1 + \omega_2.$$

Kako je iz optičarske jednačine sočiva $\omega_1 = 1/f_1 = (n-1)(1/R + 1/\infty)$, a $\omega_2 = 1/f_2 = 2/R = 4.93$ *dioptrije*, a njegova žižna daljina $f = 1/\omega = 0.2\,m$.

Zadatak 6

Dva ogledala, ispupčeno i izdubljeno, jednakih radijusa $R = 20\,cm$, postavljena su jedno prema drugom na medjusobnom rastojanju $h = 2R$ na zajedničkoj optičkoj osi. Na kom se mestu na osi treba nalaziti tačkasti izvor svetlosti, da zraci odbijeni najpre od ispupčenog, a zatim od izdubljenog ogledala, ponovo padnu na to mesto?

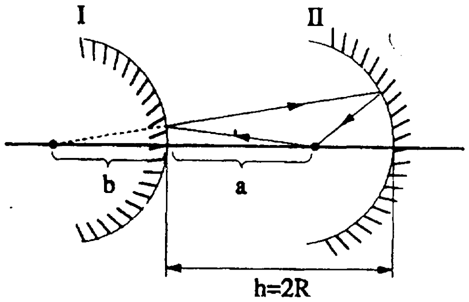
Rešenje

Neka je a rastojanje svetlosnog izvora od ogledala I, a b rasojanje njegovog lika. Tada su jednačine:
za ogledalo I

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R} \tag{9.1}$$

za ogledalo II

$$\frac{1}{2R+b} + \frac{1}{2R-a} = \frac{2}{R} \tag{9.2}$$



Iz jednačine (9.1) dobija se da je

$$b = \frac{aR}{R+2a} \tag{9.3}$$

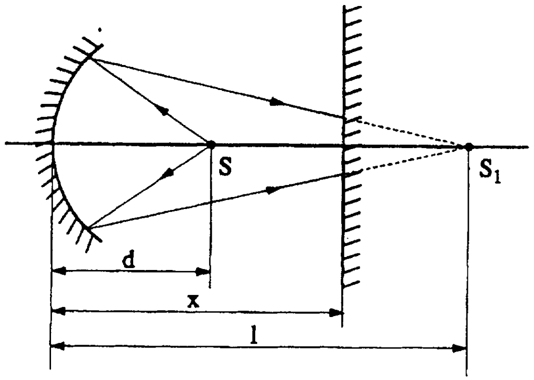
Zamenom izraza (9.3) u jednačinu (9.2) dobija se kvadratna jednačina

$$a^2 - 20a - 200 = 0,$$

čije je rešenje $a = 27.32\,cm$.

Zadatak 7

Poluprečnik izdubljenog sfernog ogledala je $R = 15\,cm$. Na glavnoj optičkoj osi sfernog ogledala postavljen je tačkasti svetlosni izvor S na rastojanju $d = 10\,cm$ od ogledala. Na kom rastojanju x od tog ogledala treba da se nalazi ravno ogledalo, da svetlosni zraci odbijeni prvo od sfernog, a zatim od ravnog ogledala ponovo padnu u tačku u kojoj se nalazi svetlosni izvor S?



Rešenje

Kod ravnog ogledala rastojanje lika od ogledala jednako je rastojanju predmeta od ogledala, tj. $x - d = l - x$, odakle je rastojanje x medju ogledalima $x = (l + d)/2$. Ovde je l rastojanje lika svetlosnog izvora od sfernog ogledala i može se odrediti iz jednačine ogledala

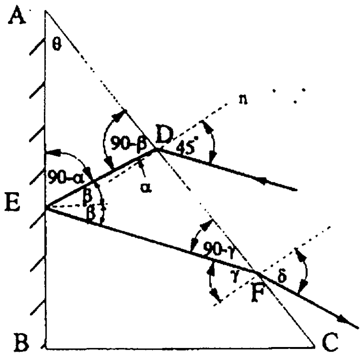
$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{dR}{2d - R}.$$

Na taj način dobija se da rastojanje medju ogledalima iznosi $x = d^2/(2d - R) \Rightarrow = 20\,cm$.

Zadatak 8

Staklena pravougaona prizma, čiji je ugao $\theta = 30^o$, ima posrebrenu površinu AB (vidi sliku) koja deluje kao ravno ogledalo. Dolazeći iz vazduha svetlosni zrak pada na stranu AC prizme pod uglom od 45^o. Prelomljeni zrak se odbija od posrebrene površine AB, vraća se ponovo na površinu AC na kojoj se prelama i napušta prizmu. Izračunati prelomni ugao δ pod kojim zrak napušta prizmu. Indeks prelamanja stakla prizme je n =1.6.

Rešenje



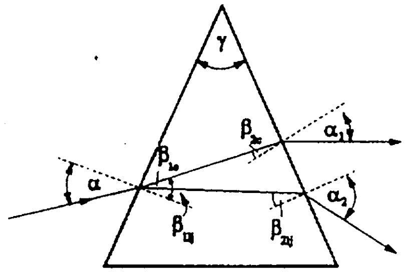
Neka je α prelomni ugao svetlosti koja se prelama u tački D na graničnoj površini AC, na koju pada pod uglom od 45^o. Iz zakona prelamanja: $\sin 45^o / \sin\alpha = 1.6$ dobija se da je $\alpha = 26.22^o$.

Ako je β upadni ugao zraka u tački E na ravni AB ogledala, iz $\triangle$AED sledi da je $\theta + 90^o - \alpha + 90^o - \beta = 180^o$, tj., $\beta = \theta - \alpha = 3.78^o$. Upadni ugao γ zraka pri ponovnom prelamanju na strani AC prizme, u tački F može da se odredi iz $\triangle$DEF, pri čemu je $2\beta + 90^o + \alpha + 90^o - \gamma = 180^o$, odnosno, $\gamma = 2\beta + \alpha = 33.78^o$. Traženi ugao δ, pod kojim zrak napušta prizmu, nalazi se iz zakona prelamanja zraka u tački F, tj. $\sin\delta/\sin\gamma = n$, odakle je traženi prelomni ugao pod kojim zrak napušta prizmu $\delta = 62.82^o$.

Zadatak 9

Bela sunčeva svetlost pada na jednu stranu prizme pod uglom $\alpha = 30^o$. Ugao prizme je $\gamma = 45^o$. Indeks prelamanja stakla za crvenu boju je n_c = 1.62, a za ljubičastu $n_{lj} = 1.67$. Koliki je ugao θ medju krajnjim zracima spektra po izlasku iz prizme?

Rešenje



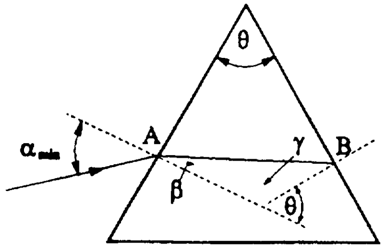
Ugao medju krajnjim zracima spektra po izlasku iz prizme je: $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, gde su α_1 i α_2 prelomni uglovi crvenog i ljubičastog zraka pri izlasku iz prizme, respektivno. Da bi se odredili, potrebno je najpre odrediti prelomne uglove ovih zraka pri ulasku u prizmu (β_{1c} i β_{1lj}), kao i njihove upadne uglove na drugoj strani prizme (β_{2c} i β_{2lj}). Naime, iz zakona prelamanja primenjenog na crveni zrak $\sin\alpha/\sin\beta_{1c} = n_c$, dobija se da je $\beta_{1c} = 18^o$, a iz zakona prelamanja primenjenog na ljubičasti zrak $\sin\alpha/\sin\beta_{1lj} = n_{1lj}$, dobija se da je $\beta_{1lj} = 17.4^o$. Sa slike se vidi da je $\gamma = \beta_1 + \beta_2$, na osnovu čega je $\beta_{2c} = \gamma - \beta_{1c} = 27^o$, a $\beta_{2lj} = \gamma - \beta_{1lj} = 27.6^o$. Sada se, na osnovu zakona prelamanja na drugoj strani prizme za crvenu svetlost $\sin\beta_{2c}/\sin\alpha_1 = 1/n_c$, dobija da je $\alpha_1 = 47.3^o$, odnosno, za ljubičastu svetlost $\sin\beta_{2lj} sin\alpha_2 = 1/n_{lj}$, dobija da je $\alpha_2 = 50.7^o$. Konačno, ugao θ medju krajnjim zracima spektra po izlasku iz prizme iznosi $\theta = 3.4^o$.

Zadatak 10

Staklena prizma čiji je ugao $\theta = 45^o$ ima za neku monohromatsku svetlost indeks prelamanja n =1.6. Koliki može da bude najmanji upadni ugao α_{min} te svetlosti na jednoj strani prizme, da pri izlasku iz prizme, na njenoj drugoj strani ne bi nastupila totalna refleksija?

Rešenje

Iz graničnog uslova za totalnu refleksiju u tački B $n \sin\gamma = \sin 90^o$ dobija se da je $\gamma = 38.68^o$. Kako je ugao pri vrhu prizme $\theta = \beta + \gamma$, to je $\beta = \theta - \gamma = 6.32^o$. Iz zakona prelamanja u tački A $\sin\alpha_{min} = n \sin\beta$, dobija se da je $\alpha_{min} = 10.14^o$.



Zadatak 11
Rastojanje izmedju svetlosnog izvora i zaklona na optičkoj klupi iznosi $d = 75\,cm$. Izmedju njih se nalazi tanko sabirno sočivo žižne daljine $f = 6.75\,cm$. Naći položaje sočiva pri kojima se na zaklonu dobijaju najoštriji likovi. Izračunati uvećanje U u svakom pojedinačnom slučaju.

Rešenje

Kako je $d = p + l$, to je $l = d - p$. Zamenom l u jednačini sočiva $1/f = 1/p + 1/l$ dobija se kvadratna jednačina:

$$p^2 - dp + fd = 0,$$

čija su rešenja:

$$p_1 = 67.5\,cm; \qquad p_2 = 7.5\,cm.$$

Odgovarajuća rastojanja likova su,

$$l_1 = 7.5\,cm; \qquad l_2 = 67.5\,cm,$$

a uvećanja

$$U_1 = l_1/p_1 = 0.111 \qquad i \qquad U_2 = l_2/p_2 = 9.$$

Zadatak 12
Kolika je žižna daljina f_e kombinovanog sočiva sastavljenog od tankog plankonveksnog sočiva poluprečnika krivine $R_1 = 15\,cm$ i indeksa prelamanja $n_1 = 1.53$ i tankog plankonveksnog sočiva poluprečnika $R_2 = 32.8\,cm$ i indeksa prelamanja $n_2 = 1.75$? Sočiva su prislonjena jedno uz drugo.

Rešenje

Ekvivalentna žižna daljina f_e kombinovanog sočiva odredjuje se iz relacije:

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

gde su žižne daljine f_1 i f_2 sočiva koja čine sistem odredjene optičarskim jednačinama:

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{1}{R_1}; \quad \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\frac{1}{R_2}.$$

Dakle,

$$f_e = \frac{1}{1/f_1 + 1/f_2} = 17.2\,cm$$

Zadatak 13
Na medjusobnom rastojanju $d = 5\,cm$, na zajedničkoj optičkoj osi nalaze se dva sočiva: rasipno, žižne daljine $f_1 = 20\,cm$ i sabirno, žižne daljine $f_2 = 10\,cm$. Na rastojanju $p_1 = 25\,cm$ od rasipnog sočiva nalazi se svetao predmet. Odrediti položaj l_2 konačnog lika.

Rešenje

Iz jednačine za rasipno sočivo $-1/f_1 = 1/p_1 - 1/l_1$, rastojanje lika je

$$\frac{p_1 f_1}{p_1 + f_1} = 11.11\,cm.$$

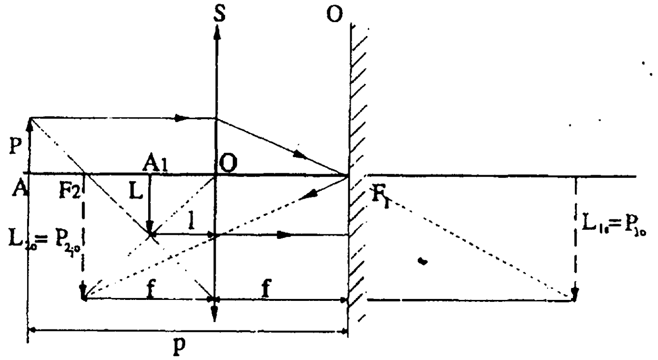
Dobijeni lik je imaginaran (nalazi se sa iste strane rasipnog sočiva na kojoj je predmet) i predstavlja predmet za sabirno sočivo, čije je rastojanje od sabirnog sočiva $p_2 = l_1 + d$. Tako je rastojanje konačnog lika l_2 iz jednačine za sabirno sočivo jednako

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{f_2(l_1 + d)}{l_1 + d - f_2} = 26.37\,cm.$$

Zadatak 14

Na rastojanju $d = 30\,cm$ od optičkog centra bikonveksnog sočiva, normalno na optičku osu, nalazi se ravno ogledalo. S druge strane sočiva, na rastojanju $p = 45\,cm$ nalazi se predmet. Na kom će rastojanju l od sočiva biti lik predmeta? Žižna daljina sočiva je $f = 30\,cm$.

Rešenje



Sa slike se vidi da je

$$l = \overline{A_1O} = \overline{F_2O} - \overline{F_2A_1} = \overline{AO} - (\overline{AF_2} + \overline{F_2A_1}) = \overline{AO} - 2\overline{AF_2}.$$

Kako je $\overline{AF_2} = \overline{AO} - \overline{OF_2}$ to je

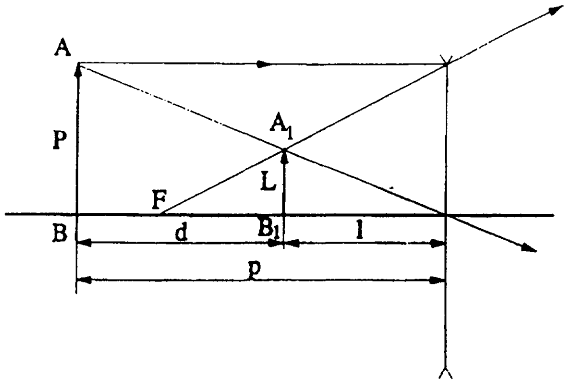
$$l = \overline{AO} - 2(\overline{AO} - \overline{OF_2}) = 2\overline{OF_2} - \overline{AO} = 2f - p = 15\,cm \qquad (9.4)$$

Zadatak 15

Odrediti crtanjem položaj rasipnog sočiva i njegovih glavnih žiža ako je visina predmeta $P = 0.1\,m$, visina njegovog lika $L = 0.05\,m$ i ako rastojanje izmedju predmeta i lika na optičkoj osi iznosi $d = 0.04\,m$. Dobijene tačke proveriti računom.

Rešenje

Položaj sočiva biće odredjen presekom zraka koji prolazi kroz vrhove predmeta i lika i glavne optičke ose. Ako su p i l rastojanja predmeta i lika



od sočiva, onda je $d = p - l$. Iz izraza za uvećanje $P/L = p/l$ i jednačine rasipnog sočiva $-1/f = 1/p - 1/l$ dobija se da je $l = 4cm$ i $p = 8\,cm$.

Zadatak 16

Odrediti poluprečnik R krivine tankog simetričnog bikonveksnog sočiva koje daje trostruko uvećan realan lik kada se svetao predmet nalazi udaljen $p = 10\,cm$ od njegovog optičkog centra. Indeks prelamanja sočiva je $n = 1.75$.

Rešenje

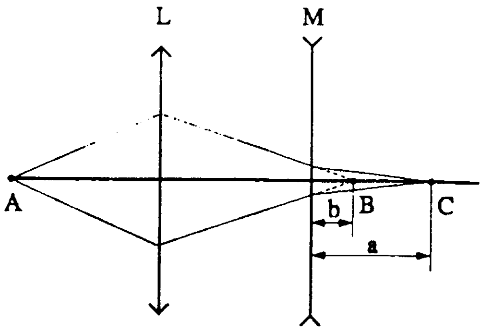
Iz optičarske formule $1/p + 1/l = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$, uz uslov da je $R_1 = R_2 = R$ i $l = 3p$, dobija se da je

$$R = \frac{3}{2}p(n-1) = 11.25\,cm. \qquad (9.5)$$

Zadatak 17

Sabirno sočivo daje na zaklonu lik B svetle tačke A, koja leži na glavnoj optičkoj osi (vidi sliku). Izmedju sočiva i zaklona, na rastojanju $b = 20\,cm$ od zaklona postavi se rasipno sočivo M. Udaljavanjem zaklona od rasipnog sočiva dobije se novi lik C svetle tačke. Pri tome, rastojanje novog položaja zaklona od rasipnog sočiva iznosi $a = 60\,cm$. Odrediti žižnu daljinu f rasipnog sočiva.

Rešenje



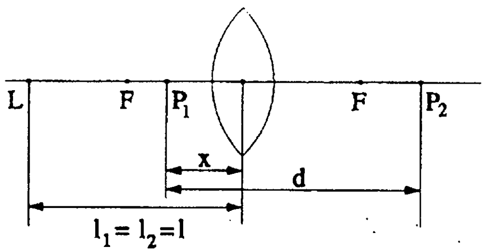
Kod sočiva važi sledeće: predmet i lik su realni ako se nalaze u preseku upadnih, odnosno, prelomljenih zraka, a imaginarni su ako se nalaze u preseku njihovih produžetaka. Tako, kada je u pitanju rasipno sočivo M, tačka B predstavlja njegov imaginarni predmet, a tačka C realni lik. Znači, jednačina sočiva se može pisati kao:

$$-\frac{1}{f} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow f = \frac{ab}{b-a} = 30\,cm.$$

Zadatak 18

Dva tačkasta izvora svetlosti P_1 i P_2 (vidi sliku) nalaze se na medjusobnom rastojanju $d = 1\,m$. Na kojim rastojanjima x od svetlosnih izvora treba postaviti sabirno sočivo žižne daljine $f = 18\,cm$ da bi se njihovi likovi poklopili?

Rešenje



Činjenica da je lik zajednički za oba izvora svetlosti znači da je za jedan od njih realan, a za drugi imaginaran. Ako se pretpostavi da je sočivo postavljeno tako da je dobijeni lik imaginaran za izvor P_1, a realan za P_2, onda je

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{l_1}; \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2},$$

na osnovu čega se, s obzirom da je $p_1 = x$, a $p_2 = d - x$, dobija kvadratna

jednačina:

$$2x^2 - 2dx + df = 0, \tag{9.6}$$

čija su rešenja:

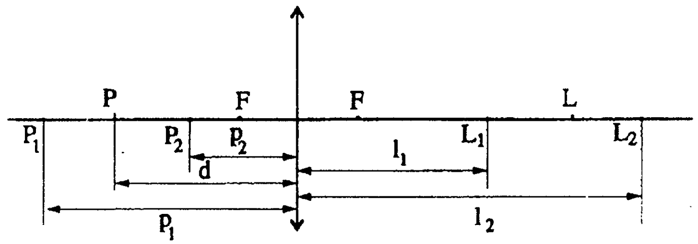
$$x_1 = 0.9\,m; \quad x_2 = 0.1\,m. \tag{9.7}$$

Sočivo se može naći izmedju svetlosnih izvora, na rastojanju $0.1\,m$ od jednog od njih.

Zadatak 19

Predmet dužine $P = 10\,cm$ postavljen je duž optičke ose tankog sabirnog sočiva čija je žižna daljina $f = 15\,cm$ (vidi sliku). Sredina predmeta nalazi se na rastojanju $d = 25\,cm$ od sočiva. Sočivo daje realne likove svih tačaka predmeta. Odrediti linearno uvećanje U_l.

Rešenje



Linearno uvećanje odredjuje se po definiciji, kao odnos dužine lika i dužine predmeta, tj. $U_l = \frac{L}{P}$. Dužinu lika moguće je odrediti pošto se odredi pozicija njegovih krajnjih tačaka L_1 i L_2 u odnosu na sočivo. Pozicije tačaka L_1 i L_2 odrediće se kao likovi krajnjih tačaka P_1 i P_2 predmeta P. Ako se sa p_1 i p_2 označe rastojanja tačaka P_1 i P_2 od sočiva, a sa l_1 i l_2 rastojanja njihovih likova, onda je:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{d + P/2} + \frac{1}{l_1} \tag{9.8}$$

i

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{d - P/2} + \frac{1}{l_2}. \tag{9.9}$$

Iz jednačina (9.8) i (9.9) dobija se da je

$$l_1 = \frac{f(d+P/2)}{d+P/2-f} = 30\,cm; \quad l_2 = \frac{f(d-P/2)}{d-P/2-f} = 60\,cm$$

Konačno,

$$L = l_2 - l_1 = 30\,cm; \quad U_l = 3\,. \tag{9.10}$$

Zadatak 20

Visina plamena sveće je $P = 5$ *cm*. Bikonveksno sočivo pokazuje na zaklonu lik tog plamena visine $L_1 = 15$ *cm*. Ne dirajući sočivo, sveća se pomeri za $a = 1.5$ *cm* od sočiva i postavi se zaklon, na kome se ponovo dobije oštar lik plamena sveće, ovog puta visine $L_2 = 10$ *cm*. Odrediti žižnu daljinu f sočiva.

Rešenje

Iz jednačine sočiva i izraza za uvećanje

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1}; \quad l_1/p_1 = 3,$$

dobija se da je

$$f = \frac{3}{4}p_1. \tag{9.11}$$

Za drugi položaj sveće jednačina sočiva i uvećanje su:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2}; \quad l_2/p_2 = 2,$$

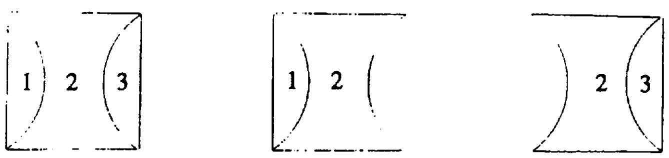
odakle se za žižnu daljinu dobija

$$f = \frac{2}{3}p_2. \tag{9.12}$$

Deobom izraza (12.50) i (12.51) dobija se da je $p_1 = 8p_2/9$. S obzirom da je $p_2 = p_1 + a$, žižna daljina sočiva je $f = 9\,cm$.

Zadatak 21

Od planparalelne staklene pločice izrradjena su tri tanka sočiva. Pokazalo



se da je žižna daljina sistema sočiva 1 i 2 (postavljenih jedno uz drugo kao na slici) jednaka $-F$, a žižna daljina sistema sočiva 2 i 3 (takodje postavljenih jedno uz drugo) jednaka $-f$. Odrediti žižne daljine ovih sočiva.

Rešenje

Ako su f_1, f_2 i f_3 žižne daljine sočiva 1, 2 i 3, respektivno, tada je za sistem sočiva 1 i 2:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F}, \tag{9.13}$$

a za sistem sočiva 2 i 3:

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{f}. \tag{9.14}$$

S duge strane, kako sistem sva tri sočiva obrazuje planparalelnu pločicu, važi:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 0. \tag{9.15}$$

Iz relacija (9.13), (9.14) i (9.15) dobija se:

$$f_1 = f; \quad f_2 = -Ff/(F+f); \quad f_3 = F. \tag{9.16}$$

Zadatak 22

Bikonveksno sočivo, napravljeno od stakla indeksa prelamanja $n = 1.6$, ima žižnu daljinu $f = 10\,cm$. Kolika je žižna daljina f_1 tog sočiva ako se stavi u providnu sredinu indeksa prelamanja $n_1 = 1.5$?

Rešenje

Optička moć sočiva indeksa prelamanja n okruženog sredinom indeksa prelamanja n_1 je:

$$\frac{1}{f_1} = (\frac{n}{n_1} - 1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}). \tag{9.17}$$

Kada se sočivo nalazi u vazduhu, njegova optička moć je:

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}). \tag{9.18}$$

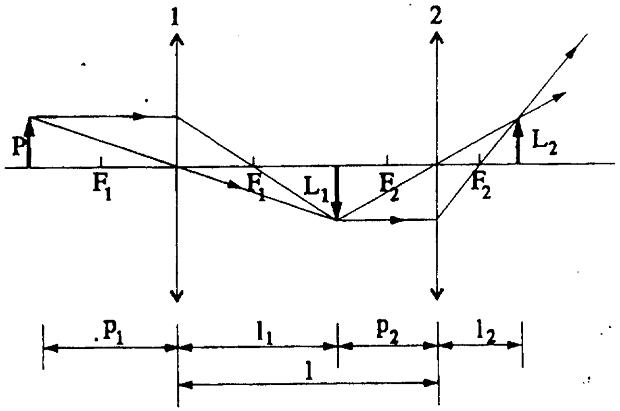
Iz izraza (9.17) i (9.18) dobija se da je

$$f_1 = \frac{fn_1(n-1)}{n-n_1} = 90\,cm.$$

Zadatak 23

Optički sistem sastoji se od dva sabirna sočiva (vidi sliku) čije su žižne daljine $f_1 = 10\,cm$ i $f_2 = 5\,cm$, a koja se nalaze na medjusobnom rastojanju $l = 35\,cm$. Predmet P se nalazi na rastojanju $p_1 = 25\,cm$ od prvog sočiva. Odrediti položaj l_2 konačnog lika i uvećanje U ovog sistema.

Rešenje



Za prvo sočivo je

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1}; \quad l_1 = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1},$$

tako da je uvećanje sočiva 1 $U_1 = 2/3$, dok je njegova veličina $L_1 = 2/3P$. Sa slike se vidi da je rastojanje lika L_1 (koji je, zapravo, predmet za sočivo 2) od sočiva 2, $p_2 = l - l_1$. Kako je iz jednačine drugog sočiva

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{f_2 p_2}{p_2 - f_2},$$

to je uvećanje drugog sočiva $U_2 = l_2/p_2$. Na osnovu toga je $L_2 = 0.375L_1 = 0.25\,P$, što znači da je uvećanje sistema $U = 0.25$.

Zadatak 24

Na optičkoj osi simetričnog bikonveksnog sočiva, indeksa prelamanja $n = 1.5$ i poluprečnika krivine $R = 10\ cm$, na rastojanju $p_1 = 15\ cm$, nalazi se tačkasti svetlosni izvor. Sa druge strane sočiva, na rastojanju $d = 20\ cm$, nalazi se identično sočivo. Gde se nalazi lik svetlosnog izvora posle prolaska svetlosti kroz sistem, ako se sistem nalazi u vazduhu ($n_o = 1$)? Za koliko Δl se pomeri lik ako se ceo sistem potopi u tečnost indeksa prelamanja $n_t = 1.2$? Zadatak rešiti računski i konstrukcijom.

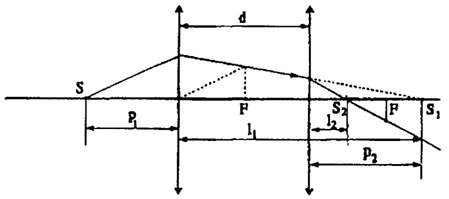
Rešenje

a) I za računsko rešavanje i za konstrukciju neophodno je, najpre, odrediti žižnu daljinu f ovih sočiva:

$$\frac{1}{f} = (n_r - 1)\frac{2}{R} \Rightarrow f = 10\,cm$$

gde je n_r relativni indeks prelamanja stakla sočiva u odnosu na sredinu koja ga okružuje.

K o n s t r u k c i j a



Sa tačkastog izvora S na sočivo 1 pada proizvoljan zrak svetlosti. Pošto se prelomi po prolazu kroz sočivo 1, padne na sočivo 2. Pravac prelomljenog zraka odredjen je sledećim dvema tačkama: tačkom u koju pada zrak na sočivo 1 i tačkom koja predstavlja presek linije koja prolazi kroz centar sočiva 1 i paralelna je izabranom proizvoljnom zraku, i linije koja normalno na optičku osu pada u desnu žižu sočiva 1. Presek zraka prelomljenog kroz sočivo 1 sa glavnom optičkom osom odredju je S_1, lik S za sočivo 1. Medjutim, kako se na putu ovog zraka nalazi i sočivo 2, to se on još jednom prelama, i konačan lik sistema ovih sočiva S_2 naći će se u preseku ponovo prelomljenog zraka i optičke ose. Pravac ovog prelomljenog zraka odredjuje se na prethodno opisan način.

R a č u n

Iz jednačine za sočivo 1

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}\Rightarrow l_1=30\,cm,$$

gde je l_1 rastojanje prvog lika svetlosnog izvora od sočiva 1. Ovaj lik je imaginarni predmet za sočivo 2, i nalazi se na rastojanju $p_2=l_1-d$ od njega. Znači,

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{l_2}\Rightarrow l_2=5\,cm.$$

b) Slično kao u prethodnom delu zadatka dobija se, najpre, da je $f=20\,cm$. Dalje,

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}\Rightarrow l_1=-60\,cm.$$

To znači da je prvi lik (lik sočiva 1) imaginaran. On predstavlja predmet (realan) za sočivo 2 na rastojanju $p_2=|l_1|+d$ od njega: Iz jednačine za sočivo 2

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{l_2}\Rightarrow l_2=26.67\,cm,$$

Tako da je traženo pomeranje lika

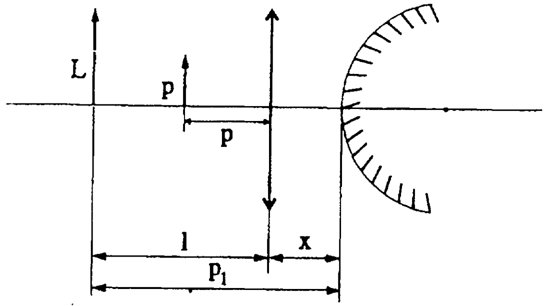
$$\Delta l=l_{2a}-l_{2b}=21.67\,cm \tag{9.19}$$

Zadatak 25

Na rastojanju $p=10\,cm$ od sabirnog sočiva žižne daljine $f=12\,cm$, na

optičkoj osi, postavljen je izvor svetlosti. Posle prelamanja kroz sočivo zraci padaju na ispupčeno ogledalo koje se nalazi $x=3\,cm$ iza sočiva. Zraci odbijeni od ogledala posle ponovnog prolaska kroz sočivo paralelni su optičkoj osi. Odrediti poluprečnik R krivine ogledala.

Rešenje



Rešavanjem jednačine sočiva $1/f=1/p+1/l$, dobija se da se lik nakon prelamanja svetlosti nalazi na rastojanju l = -60 cm. Kako je ovaj lik, zapravo, predmet za ogledalo, to će se on nalaziti na rastojanju

$$p_1=|l|+x=63\,cm. \tag{9.20}$$

Rastojanje lika u ogledalu dobija se iz uslova ponovnog prelamanja svetlosti kroz sočivo: s obzirom da su zraci posle prelamanja paralelni optičkoj osi, pre prelamanja polaze iz žiže sočiva. Znači, u odnosu na ogledalo, lik se nalazi na rastojanju

$$l_1=x-f=-9\,cm.$$

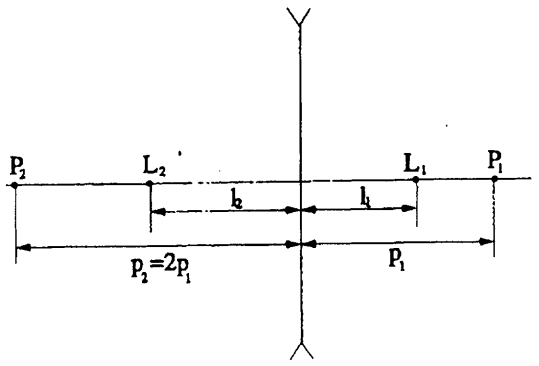
Konačno, rešavanjem jednačine ogledala dobija se

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}\Rightarrow R=-21\,cm.$$

Zadatak 26

Rasipno sočivo žižne daljine $f=12\,cm$ postavljeno je izmedju dva tačkasta izvora svetlosti P_1 i P_2 (vidi sliku) tako da je njegovo rastojanje od jednog izvora dva puta veće nego od drugog. Odrediti rastojanje x izmedju izvora svetlosti ako je rastojanje izmedju njihovih likova $d = 7.8\,cm$.

Rešenje



Likovi oba svetlosna izvora (l_1 i l_2 su imaginarni, pa su jednačine sočiva $-1/f = 1/p_1 - 1/l_1$ i $-1/f = 1/(2p_1) - 1/l_2$. Ako se uzme u obzir da je $l_1 + l_2 = d$, onda je

$$\frac{p_1 f}{p_1 + f} + \frac{2p_1 f}{2p_1 + f} = d.$$

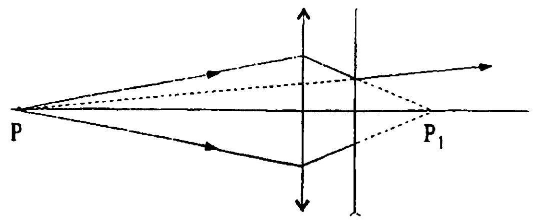
Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobija se da su rastojanja izvora svetlosti P_1 i P_2 od sočiva: $p_1 = 4\,cm$ i $p_2 = 8\,cm$, a njihovo medjusobno rastojanje $x = 12\,cm$.

Zadatak 27

Tačkasti izvor svetlosti P (vidi sliku) nalazi se na optičkoj osi sabirnog sočiva žižne daljine $f_1 = 30\,cm$, na rastojanju $p_1 = 120\,cm$ od njega. S druge strane sočiva, u njegovoj žižnoj ravni, nalazi se rasipno sočivo. Kolika je žižna daljina f_2 rasipnog sočiva ako zraci posle prolaska kroz njega imaju pravac kao da polaze iz izvora?

Rešenje

Iz jednačine sabirnog sočiva $1/f_1 = 1/p_1 + 1/l_1$ dobija se da je rastojanje l_1 lika L od njega $l_1 = 40\,cm$. Lik L predstavlja predmet P_1 za rasipno



sočivo, i to imaginarni, s obzirom da se nalazi na rastojanju $p_2 = -10\,cm$ od njega, dok je uslovom zadatka odredjen položaj njegovog lika L_1 - to je predmet P na rastojanju $l_2 = -150\,cm$ od rasipnog sočiva.

Tako se iz jednačine za rasipno sočivo $-1/f_2 = -1/p_2 - 1/l_2$, dobija da je žižna daljina f_2 rasipnog sočiva $f_2 = -9.38\,cm$.

Zadatak 28

Ispred simetričnog sabirnog sočiva, indeksa prelamanja $n = 1.5$ i radijusa krivine sferne površine $R = 6\,cm$, na rastojanju $p = 4\,cm$ od njega, normalno na optičku osu, postavljena je svetla strelica P (vidi sliku). S druge strane sočiva je izdubljeno sferno ogledalo, čija je žiža u optičkom centru sočiva, a teme u njegovoj žiži. Odrediti konstrukcijom i računski gde se nalazi realni lik (l) koji daje ovaj sistem.

Rešenje

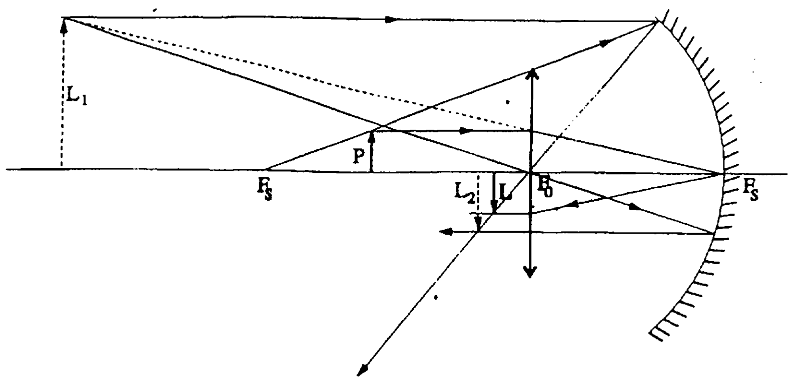
Treba odrediti žižne daljine sočiva f_s i ogledala f_o. Za sočivo

$$\frac{1}{f_s} = (n-1)\frac{2}{R} \Rightarrow f_s = 6\,cm$$

Iz uslova zadatka sledi da je $f_o = f_s = 6\,cm$.

K o n s t r u k c i j a

Najpre se pozicioniraju sočivo i ogledalo, po uslovu zadatka, a zatim i svetla strelica P. Konačan lik L dobija se praćenjem toka karakterističnih zraka svetlosti, koji se najpre prelamaju kroz sočivo, a zatim, pošto se odbiju od ogledala, ponovo padaju na sočivo, gde se još jednom prelamaju. Zbog toga se stiče utisak da ovaj sistem čine 3 elementa: 2 identična sočiva i jedno ogledalo.



R a č u n

Iz jednačine sočiva $1/f_s = 1/p + 1/l_1$ položaj lika l_1 je odredjen kao $l_1 = -12\,cm$. Prvi lik L_1 strelice P je imaginaran i predstavlja predmet za ogledalo, na rastojanju p_1 od njega. Kako je $p_1 = |l_1| + f_s = 18\,cm$, to se iz jednačine ogledala $1/f_o = 1/p_1 + 1/l_2$ dobija rastojanje l_2 lika L_2 u ogledalu, tj. $l_2 = 9\,cm$.

Dobijeni lik L_2 u ogledalu predstavlja imaginarni predmet za sočivo pri ponovnom prelamanju, i nalazi se na rastojanju p_2 od njega, pri čemu je $p_2 = l_2 - f_o = 3\,cm$.

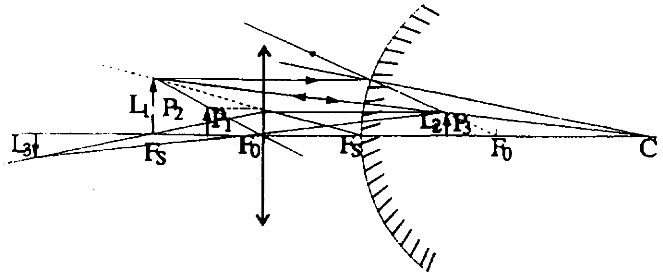
Konačan lik L sistema dobiće se na rastojanju l od sočiva, koje se odredjuje iz jednačine sočiva

$$\frac{1}{f_s} = -\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} \Rightarrow l = 2\,cm$$

Zadatak 29

Ispred tankog simetričnog bikonveksnog sočiva, indeksa prelamanja $n = 1.5$ i poluprečnika krivine sferne površine $R = 6\,cm$, na rastojanju $p_1 = 3\,cm$ od njega, nalazi se svetla strelica veličine $P = 2\,cm$. Sa druge strane sočiva, na rastojanju $d = 6\,cm$ od njega, nalazi se (konveksno) ispupčeno ogledalo poluprečnika krivine $R_o = 12\,cm$. Odrediti konstrukcijom i računski gde se nalazi realni lik koji daje ovaj sistem.

Rešenje



I u ovom primeru najpre treba odrediti žižne daljine sočiva f_s i ogledala f_o. Za sočivo je

$$\frac{1}{f_s} = (n-1)\frac{2}{R} \Rightarrow f_s = 6\,cm,$$

a za ogledalo,

$$f_o = -R_o/2 = -6\,cm \Rightarrow |f_o| = f_s \tag{9.21}$$

K o n s t r u k c i j a

Najpre se pozicioniraju sočivo i ogledalo, po uslovu zadatka, a zatim i svetla strelica P. Konačan lik L dobija se praćenjem toka karakterističnih zraka svetlosti, koji se najpre prelamaju kroz sočivo, a zatim, pošto se odbiju od ogledala, ponovo padaju na sočivo, gde se još jednom prelamaju. Zbog toga se, kao i u prethodnom problemu, stiče utisak da ovaj sistem čine 3 elementa: 2 identična sočiva i jedno ogledalo.

R a č u n

Iz jednačine sočiva $1/f_s = 1/p_1 + 1/l_1$ položaj lika l_1 je $l_1 = -6\,cm$.

Prvi lik L_1 strelice P je imaginaran i predstavlja predmet za ogledalo, na rastojanju p_2 od njega. Kako je $p_2 = |l_1| + d = 12\,cm$, to se iz jednačine ogledala $-1/f_o = 1/p_2 + 1/l_2$ dobija rastojanje l_2 lika L_2 u ogledalu $l_2 = -4\,cm$.

Dobijeni lik L_2 u ogledalu predstavlja predmet za sočivo pri ponovnom prelamanju, i nalazi se na rastojanju p_3 od njega, pri čemu je $p_3 = |l_2| + d = 10\,cm$.

Konačan lik L sistema dobiće se na rastojanju l od sočiva, koje se odredjuje iz jednačine sočiva

$$\frac{1}{f_s} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = 15\,cm.$$

9.2 Fotometrija

9.2.1 Teorija

Svetlosni fluks $d\Phi$ u odredjenom pravcu se može izraziti na sledeći način:

$$d\Phi = \frac{dQ}{dt},$$

gde je dQ količina svetlosti u prostornom uglu $d\Omega$. Svetlosni fluks se može definisati i kao snaga zračenja kroz datu površinu . Ukupan svetlosni fluks Φ koji se emituje od tačkastog izvora u svim pravcima je

$$\Phi = \int d\Phi.$$

Intenzitet ili jačina svetlosti I predstavlja odnos izmedju svetlosnog fluksa koji izvor u datom pravcu emituje u element prostornog ugla i elementa prostornog ugla

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}.$$

Za slučaj izotropnog svetlosnog izvora je

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi},$$

gde je Φ ravnomerni svetlosni fluks koji svetlosni izvor emituje u prostorni ugao Ω.

Osvetljaj predstavlja odnos emitovanog svetlosnog fluksa sa površine i same površine

$$L = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Ako je fluks ravnomeran i stalan, onda je

$$L = \frac{\Phi}{S},$$

gde je Φ ukupan svetlosni fluks koji emituje površina S.

Sjaj svetlosnog izvora u nekom pravcu predstavlja odnos intenziteta svetlosti u tom pravcu i normalne projekcije površine izvora dS_n koja emituje

$$B = \frac{I}{dS_n} = \frac{I}{dS\cos\theta},$$

gde je θ ugao izmedju pravca emisije svetlosti i normale na površinu koja emituje svetlost. Kada je sjaj svetlosnog izvora u svim pravcima isti, onda je

$$B = \frac{I}{S}.$$

Osvetljenost se definiše kao odnos svetlosnog fluksa koji pada na datu površinu i same te površine

$$E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Osvetljenost se može izraziti preko intenziteta svetlosti na sledeći način:

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\theta,$$

gde je θ ugao izmedju normale na površinu koja se osvetljava i pravca svetlosti na tu površinu.

Svetlosna ekspozicija predstavlja proizvod osvetljenosti površine i vremena trajanja osvetljavanja, tj.

$$H = Et.$$

Refleksiona moć predstavlja odnos izmedju osvetljaja i osvetljenosti

$$k = \frac{L}{E}.$$

Svetlosno iskorišćenje može se izraziti kao

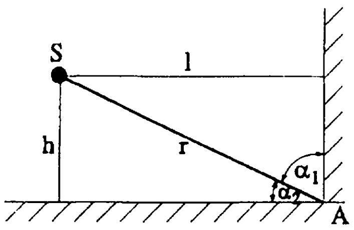
$$\eta = \frac{\Phi}{P},$$

gde je P snaga svetlosnog izvora.

9.2.2 Zadaci

Zadatak 1

Na visini $h = 5\,m$, na rastojanju $l = 10\,m$ od vertikalnog zida, obešena je lampa jačine $I = 100\,cd$ (vidi sliku). Odrediti osvetljenost E_1 horizontalne površine ispod lampe i osvetljenost E_2 zida u tački A i uporediti ih. Zanemariti medjusobno osvetljavanje ovih dveju površina.



Rešenje

Lampa se može smatrati tačkastim izvorom svetlosti. Tada je osvetljenost horizontalne površine u tački A.

$$E_1 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha_1; \quad \cos\alpha_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2+l^2}},$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se da je $E_1 = 0.36$.

Osvetljenost vertikalnog zida je

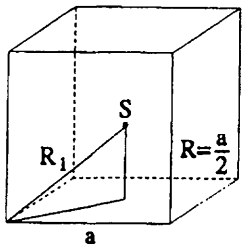
$$E_2 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha_2; \quad \cos\alpha_2 = \frac{l}{\sqrt{h^2+l^2}}.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se da je $E_2 = 0.72$. Znači, osvetljenost vertikalnog zida dvostruko je veća od osvetljenosti horizontalne površine.

Zadatak 2

Električna sijalica jačine $I = 100\ cd$ postavljena je u geometrijskom centru prostorije u obliku kocke ivice $a = 4\ m$. Izračunati:
a) Svetlosni fluks Φ svetlosti koja pada na pod prostorije;
b) Srednju vrednost osvetljenosti E poda;
c) Najveću E_{max} i najmanju E_{min} osvetljenost poda.
Sijalicu smatrati izotropnim svetlosnim izvorom.

Rešenje



a) Ukupni svetlosni fluks svetlosnog izvora je $\Phi_u = 4\pi I$ (vidi sliku). S obzirom da podu odgovara šestina punog prostornog ugla, to će na njega otpadati fluks:

$$\phi = \frac{\phi_u}{6} = 209.3\,lm.$$

b) Srednja vrednost osvetljenosti E poda predstavlja odnos svetlosnog fluksa Φ svetlosti koja pada na pod i površine poda, tj.

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{a^2} = 13.1\,lx.$$

c) Najveću osvetljenost E_{max} ima tačka koja se nalazi u geometrijskom centru poda, tj.

$$E_{max} = \frac{I}{R^2} = \frac{I}{a/2} = 25\,lx.$$

Najmanju osvetljenost E_{min} imaju tačke poda koje su najudaljenije od svetlosnog izvora. Ako je njihovo rastojanje od svetlosnog izvora R_1, a ugao pod kojim, u odnosu na normalu, svetlosni zraci padaju u te tačke θ, onda je

$$E_{min} = \frac{I}{R_1^2}\cos\theta.$$

Kako je

$$R_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}; \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

to je $E_{min} = 4.8$.

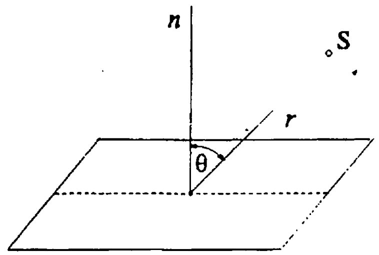
Zadatak 3

Električna sijalica snage $P = 100\,W$, priključena na napon od $U = 220\,V$ ima svetlosnu jačinu $I = 100\,cd$. Odrediti intenzitet električne struje I_s koja prolazi kroz sijalicu, korisnu snagu P_k koju zrači sijalica u vidu svetlosti i stepen njenog korisnog dejstva η. Izračunati osvetljenost središta belog pravougaonog papira (vidi sliku) ako je ugao θ izmedju normale na središte papira i duži $r = 2\,m$, koja ga spaja sa sijalicom, jednak 60^o. Talasna dužina svetlosti koju emituje sijalica je $\lambda = 555\ nm$. (Za datu talasnu dužinu $1\,lm = 0.00155\,W$).

Rešenje

Intenzitet električne struje koja prolazi kroz sijalicu je $I_s = P/U = 0.455\,A$. Fluks Φ, koji zapravo predstavlja korisnu snagu P_k iznosi: $\phi = 4\pi I = 1256\,lm$, tj, $P_k = 2\,W$.

Stepen korisnog dejstva odredjen je kao $\eta = P_k/P = 0.02$, dok je osvetljenost $E = \frac{I}{r^2}\cos\theta = 12.5\,lx$.

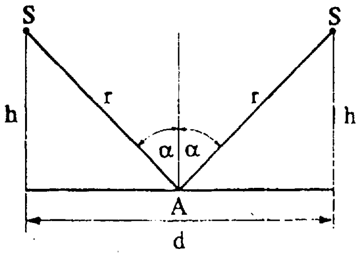


Zadatak 4
Na kojoj visini h se moraju postaviti ulične svetiljke koje su udaljene jedna od druge $d = 20\ m$ da bi osvetljenost E_u ulice bila najveća u tački A (vidi sliku), koja se nalazi na sredini izmedju stubova na kojima su postavljene svetiljke?

Rešenje

Ako je E osvetljenost koja potiče od jedne svetiljke, s obzirom na njihov simetričan raspored, osvetljenost ulice u tački A će biti $E_u = 2\,E$, odnosno

$$E_u = 2\frac{I}{r^2}\cos\alpha; \quad r = \frac{d}{2\sin\alpha},$$



pa je

$$E_u = 8\frac{I}{d^2}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Da bi osvetljenost E_u bila maksimalna, potrebno je da bude zadovoljen uslov da je $dE_u/d\alpha = 0$, tj.

$$\frac{dE_u}{d\alpha} = (2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 0.$$

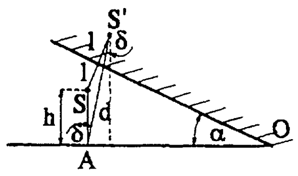
Rešenje ove jednačine odredjuje ugao α kao $tg\alpha = \sqrt{2}$, što omogućava odredjivanje rastojanja r. Konačno, za h se dobija da je

$$h = \sqrt{r^2 - (d/2)^2} = 7.07\,m$$

Zadatak 5
Iznad horizontalne ravni postavljeno je ravno ogledalo O pod uglom $\alpha = 30^o$ (vidi sliku). Izmedju ogledala i horizontalne ravni nalazi se tačkasti svetlosni izvor S jačine $I = 100\,cd$. Normalno rastojanje svetlosnog izvora od horizontalne ravni je $h = 30\,cm$, a od ogledala $l = 20\,cm$. Kolika je osvetljenost E horizontalne ravni u tački A, koja je od svetlosnog izvora udaljena za h, ako je koeficijent refleksije ogledala jednak $R = 1$?

Rešenje

Osvetljenost E u tački A horizontalne površine jednaka je zbiru osvetljenosti E_1, koja potiče od svetlosnog izvora S, i osvetljenosti E_2, koja potiče od lika izvora S u ravnom ogledalu: $E = E_1 + E_2$, gde je $E_1 = \frac{I}{h^2}$, a $E_2 = \frac{I}{d^2}\cos\delta$.



Na osnovu kosinusne teoreme primenjene na trougao ASS' može se pisati:

$$d^2 = h^2 + (2l)^2 - 2h(2l)\cos(\pi - \alpha)$$

i

$$(2l)^2 = h^2 + d^2 - 2hd\cos\delta,$$

odakle je

$$\cos\delta = \frac{h + 2l\cos\alpha}{\sqrt{h^2 + (2l)^2 + 2h(2l)\cos\alpha}}.$$

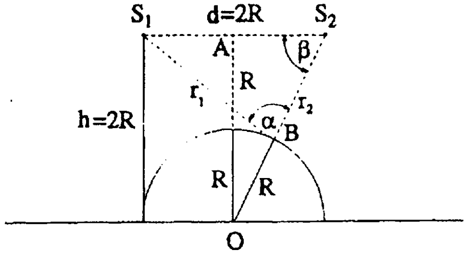
Dakle,

$$E = I[\frac{1}{h^2} + \frac{h + 2l\cos\alpha}{(\sqrt{h^2 + 4l^2 + 4hl\cos\alpha})^3}] = 1319.8\,lx.$$

Zadatak 6

Polusfera poluprečnika $R = 1\ m$ osvetljena je pomoću dva svetlosna izvora S_1 i S_2 (vidi sliku), intenziteta $I_1 = 100\,cd$ i $I_2 = 50\,cd$, postavljena na visini $h = 2R$ iznad površine oslonca, simetrično u odnosu na polusferu, i na medjusobnom rastojanju $d = 2R$. Odrediti osvetljenost E polusfere u tački koja se nalazi na minimalnom rastojanju od svetlosnog izvora S_2.

Rešenje



Na minimalnom (najkraćem normalnom) rastojanju r_2 od svetlosnog izvora S_2 nalazi se tačka B na kružnici. Osvetljenost E u tački B je

$$E_B = \frac{I_2}{{r_2}^2} + \frac{I_1}{{r_1}^2}\cos\alpha.$$

Rastojanje r_2 tačke B od svetlosnog izvora S_2 je

$$r_2 = (\overline{S_2O}) - R,$$

gde je iz trougla AOS_2

$$(\overline{S_2O})^2 = (2R)^2 + R^2.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se da je $r_2 = 1.24\,m$. Rastojanje tačke B od svetlosnog izvora S_1 obeleženo kao r_1 odredjeno je primenom kosinusne teoreme na trougao S_1S_2B:

$${r_1}^2 = {r_2}^2 + 4R^2 - 4r_2R\cos\beta,$$

gde je iz trougla AOS_2

$$\cos\beta = \frac{R}{R\sqrt{5}} = 0.45.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se da je $r_1 = 1.82\,m$. Primenom kosinusne teoreme na trougao S_1BS_2

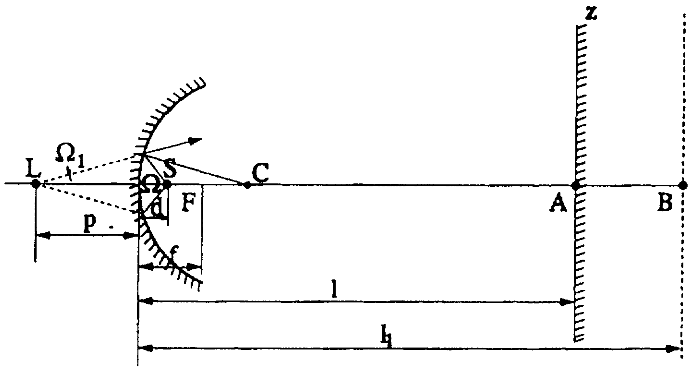
$$4R^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos\alpha,$$

odredjeno je $\cos\alpha = 0.19$, tako da se zamenom brojnih vrednosti dobije da je $E_B = 38.25\,\text{lx}$.

Zadatak 7

Tačkasti svetlosni izvor S nalazi se na rastojanju d od izdubljenog sfernog ogledala poluprečnika R i žižne daljine f (vidi sliku). Odrediti osvetljenost E_A u centru zaklona Z koji se nalazi na rastojanju l od ogledala ako je osvetljenost u tački B, na rastojanju l_1 od ogledala jednaka E_B.

Rešenje



Osvetljenost zaklona u tački A je $E_A = E_1 + E_2$, gde je E_1 osvetljenost neposredno od izvora, a E_2 od lika svetlosnog izvora u ogledalu, tj.,

$$E_A = \frac{I}{(l-d)^2} + \frac{I_1}{(l+p)^2}.$$

Svetlosni snop se od svetlosnog izvora intenziteta I prostire najpre u prostornom uglu Ω. Posle odbijanja od ogledala prostire se u prostornom uglu Ω_1 kao da polazi iz tačke L, koja predstavlja lik svetlosnog izvora u ogledalu, intenziteta I_1. Primećuje se da konusi sa vrhovima u S i L izrezuju na ogledalu istu malu površinu, što se može pisati kao $d^2\Omega = p^2\Omega_1$. Ovo znači da su fluksevi svetlosnog izvora i njegovog lika u ogledalu medjusobno jednaki, tj. $\phi = \phi_1$. Drugim rečima:

$$I\Omega = I_1\Omega_1,$$

odakle sledi da je $I_1 = I\Omega/\Omega_1$. Kako se iz jednačine ogledala:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} - \frac{1}{p},$$

u kojoj p predstavlja rastojanje lika L svetlosnog izvora od ogledala, dobija da je

$$p = \frac{dR}{R-2d},$$

to je

$$I_1 = I\frac{R^2}{(R-2d)^2},$$

tako da izraz za osvetljenost u tački A postaje:

$$E_A = I[\frac{1}{(l-d)^2} + \frac{R^2}{(R-2d)^2(l+p)^2}]. \tag{9.22}$$

Osvetljenost u tački B je:

$$E_B = \frac{I}{(l_1-d)^2} + \frac{I_1}{(l_1+p)^2}.$$

Zamenom izraza za I_1 u poslednji izraz, posle sredjivanja, za intenzitet I svetlosnog izvora se dobija

$$I = E_B/[\frac{1}{(l_1-d)^2} + \frac{R^2}{(R-2d)^2(l_1+p)^2}]. \tag{9.23}$$

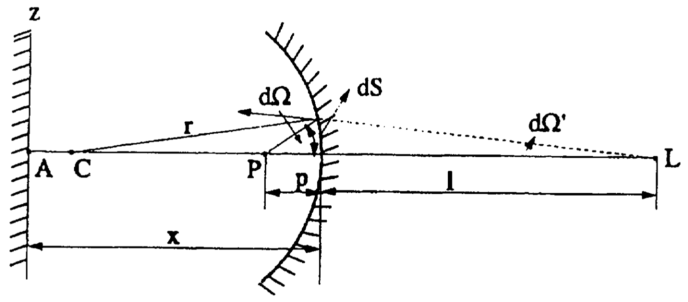
Ako se uzme u obzir izraz za p, na osnovu (9.22) i (9.23), za osvetljenost E_A konačno se dobija:

$$E_A = E_B(\frac{1}{(l-d)^2} + \frac{R^2}{[R(l+d)-2ld]^2})/(\frac{1}{(l_1-d)^2} + \frac{R^2}{[R(l_1+d)-2l_1d]^2}).$$

Zadatak 8

Tačkasti izotropni izvor P svetlosti jačine $I = 20\,cd$ nalazi se na osi izdubljenog sfernog ogledala, na rastojanju $p = 20\,cm$ od njegovog temena (vidi sliku). Naći osvetljenost E_A u centru zaklona postavljenog normalno na glavnu optičku osu ogledala, na rastojanju $x = 60\,cm$. Poluprečnik krivine ogledala je $r = 50\,cm$. Zadatak rešiti za slučaj a) kada je koeficijent refleksije ogledala $R = 1$ i b) kada je koeficijent refleksije ogledala $R = 0.9$.

Rešenje



Osvetljenost zaklona E_A jednaka je sumi osvetljenosti E_1 od izvora svetlosti i osvetljenosti E_2 od lika izvora svetlosti:

$$E_A = E_1 + E_2,$$

gde su

$$E_1 = \frac{I}{(x-p)^2}; \quad E_2 = \frac{I_1}{(x+l)^2}.$$

U gornjem izrazu I_1 je intenzitet lika svetlosnog izvora, a l njegovo udaljenje od temena ogledala. Znači, ukupna osvetljenost u tački A na zaklonu iznosi je

$$E_A = \frac{I}{(x-p)^2} + \frac{I_1}{(x+l)^2}.$$

Kao što se vidi, potrebno je odrediti intenzitet I_1. Na osnovu definicije:

$$d\Phi = Id\Omega, \tag{9.24}$$

$$d\Phi_1 = Rd\phi = I_1 d\Omega_1, \tag{9.25}$$

gde su $d\Phi$ i $d\Phi_l$ elementarni fluksevi koji potiču od izvora i njegovog lika. Kako su $d\Omega = dS/p^2$ i $d\Omega_l = dS/l^2$, to je

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_l} = (\frac{l}{p})^2. \tag{9.26}$$

Na osnovu iazraza (9.24), (9.25) i (9.26) dobija se da je

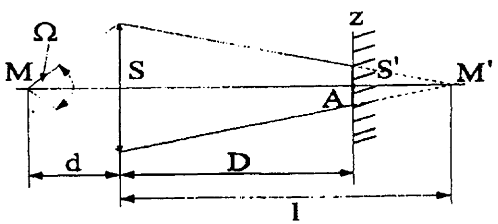
$$I_l = RI(l/p)^2. \tag{9.27}$$

Iz jednačine sfernog ogledala $2/R = 1/p - 1/l$ je $l = 100\,cm$.
a) $R = 1$; $I_l = 500\,cd$; $E_A = 320\,lx$.
b) $R = 0.9$; $I_l = 450\,cd$; $E_A = 301\,lx$.

Zadatak 9

Pomoću tačkastog svetlosnog izvora M jačine svetlosti I osvetljava se zaklon Z (vidi sliku). Izmedju svetlosnog izvora i zaklona nalazi se sabirno sočivo S žižne daljine f. Rastojanje sočiva od svetlosnog izvora je d, dok je rastojanje izmedju sočiva i zaklona D. Kolika je osvetljenost E u tački A zaklona, kroz koju prolazi glavna optička osa sočiva, ako je $f < d$?

Rešenje



Osvetljenost E u tački A je

$$E = \frac{\Phi}{S'} = \frac{I}{S'}\Omega.$$

U gornjoj jednačini, Φ je svetlosni fluks, a' S' je površina zaklona na koju padaju svetlosni zraci koji su rasprostranjeni u oblasti prostornog ugla Ω. S obzirom da je $\Omega = S/d^2$ i $S/S' = l^2/(l-D)^2$, gde je S površina sočiva, izraz za osvetljenost postaje

$$E = \frac{I}{d^2}(\frac{l}{l-D})^2.$$

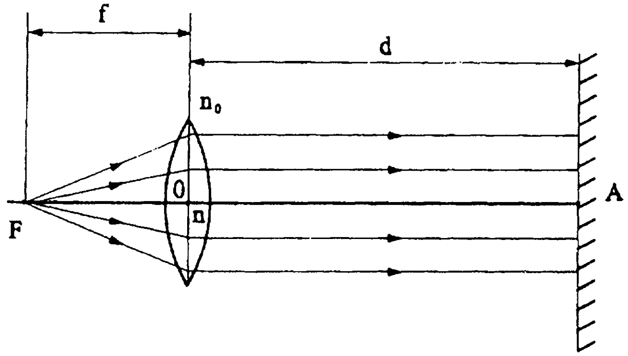
Kako se iz jednačine sočiva $1/f = 1/d + 1/l$ dobija da je $l = df/(d-f)$, konačan izraz za osvetljenost je

$$E = I(\frac{f}{df + lf - dD})^2.$$

Zadatak 10

U žiži tankog simetričnog sabirnog sočiva, indeksa prelamanja $n = 1.5$ i poluprečnika krivine sferne površine $R = 20\ cm$ nalazi se tačkasti izotropni svetlosni izvor jačine $I = 50\ cd$. Na rastojanju $d = 30\ cm$ od sočiva postavljen je zaklon, kao na slici. Kolika je osvetljenost E zaklona u tački A? Kolika će biti osvetljenost E_l zaklona u tački A ako se sočivo ukloni?

Rešenje



S obzirom da se svetlosni izvor nalazi u žiži sočiva, potrebno je odrediti njegovu žižnu daljinu f. Iz optičarske jednačine $1/f = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$ za $R_1 = R_2 = R$, dobija se da je

$$f = \frac{R}{2(n-1)} = 20\,cm.$$

Kako se izvor svetlosti nalazi u žiži sočiva, svi zraci koji padnu na sočivo nakon prelamanja nastavljaju da se kreću paralelno optičkoj osi. To znači da je osvetljenost E zaklona u tački A jednaka osvetljenosti centra sočiva:

$$E = \frac{I}{f^2} = 1250\,lx.$$

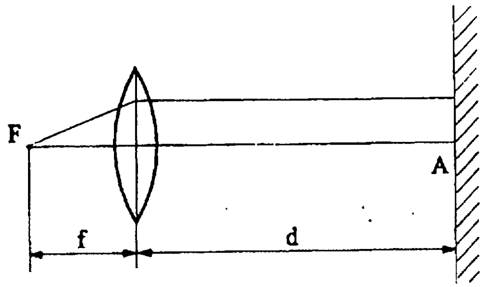
Kada nema sočiva, osvetljenost je

$$E_l = \frac{I}{(f+d)^2} = 200\,lx.$$

Zadatak 11

U žiži tankog simetričnog bikonveksnog sočiva nalazi se tačkasti svetlosni izvor. Na rastojanju $d = 90\ cm$ od sočiva postavljen je zaklon normalno na optičku osu sočiva. Osvetljenost u centru A svetlog polja na zaklonu je $E_1 = 100\ lx$. Odrediti osvetljenost E_2 u toj tački ekrana kada se sočivo ukloni. Poluprečnik krivine sočiva je $R = 10\ cm$, a indeks prelamanja $n = 1.5$.

Rešenje



Kako je osvetljenost u tački A jednaka osvetljenosti centra sočiva, to je

$$E_1 = I/f^2.$$

Iz optičarske jednačine $1/f = 2/R(n-1)$, gde je f žižna daljina sočiva, zamenom vrednosti za n dobija se da je $f = R$. Dakle, za osvetljenost u tački A dobija se da je

$$E_1 = I/R^2 \Rightarrow I = E_1 R^2.$$

Kada se ukloni sočivo, osvetljenost u tački A postaje:

$$E_2 = \frac{I}{(f+d)^2} = 1\ lx.$$

9.3 Talasna (fizička) optika

9.3.1 Teorija

Putna razlika dva koherentna svetlosna talasa pri kojoj nastaje interferencioni maksimum je

$$\Delta x = \pm n\lambda; \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

a interferencioni minimum

$$\Delta x = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

gde je λ talasna dužina svetlosnih talasa.

Uslov za pojavu interferencionog maksimuma u odbijenoj svetlosti kod tankog providnog lista je

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

a interferencionog minimuma

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = n\lambda; \qquad (n = 1, 2, 3, ...),$$

gde je d debljina lista, n indeks prelamanja materijala lista i α ugao koji zaklapa front talasa sa normalom na površini lista.

Uslov za pojavu difrakcionog maksimuma pri prolazu svetlosti kroz uzani prorez širine a je

$$a\sin\theta = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (n = 1, 2, 3...),$$

a za pojavu minimuma

$$a\sin\theta = \pm n\lambda; \qquad (n = 1, 2, 3, ...),$$

gde je θ ugao u odnosu na normalu za koji je svetlost skrenula od prvobitnog pravca.

Uslov za pojavu difrakcionog maksimuma svetlosti pri prolazu kroz optičku rešetku koraka d je

$$d\sin\theta = \pm n\lambda; \qquad (n = 1, 2, 3...),$$

a za pojavu minimuma

$$d\sin\theta = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (n = 1, 2, 3...).$$

Korak rešetke se može izraziti kao

$$d = \frac{1}{N},$$

gde je N broj proreza po jedinici dužine rešetke.

Prema Brusterovom zakonu potpuna polarizacija odbijene svetlosti, a delimična polarizacija prelomljene svetlosti se vrši kada upadni ugao α_B zraka svetlosti na graničnu površinu zadovoljava uslov

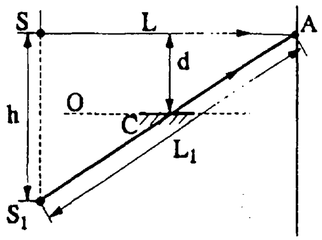
$$\alpha_B = \arctan n,$$

gde je n indeks prelamanja sredine u koju zrak prelazi.

9.3.2 Zadaci

Zadatak 1

U tačku A na zaklonu (vidi sliku) koji se od svetlosnog izvora S monohromatske svetlosti talasne dužine $\lambda = 0.5\,\mu m$ nalazi na rastojanju $L = 1\,m$, padaju dva zraka. Zrak SA neposredno od izvora S, i zrak SCA, odbijen u tački C od ravnog ogledala O. Rastojanje izmedju pravca zraka SA i ravni ogledala je $d = 5\,mm$. Odrediti rezultat interferencije u tački A.



Rešenje

Rezultat interferencije u tački A može biti interferencioni maksimum, ili interferencioni minimum, zavisno od optičke putne razlike interferujućih zraka. Uslov za interferencioni maksimum je da optička putna razlika δ zraka bude jednaka celom broju z talasnih dužina, tj. $\delta = z\lambda$, dok je uslov za interferencioni minimum da optička putna razlika zraka bude jednaka neparnom broju polovina talasnih dužina, $\delta = (2z+1)\lambda/2$. Sa slike se vidi da je optička putna razlika zraka SA i SCA $\delta = \Delta L + \lambda/2$, gde je $\Delta L = L_1 - L$ geometrijska putna razlika (optička putna razlika je jednaka proizvodu geometrijske putne razlike i indeksa prelamanja sredine kroz koju se zraci prostiru, a s obzirom da je u ovom slučaju to vazduh, čiji je indeks prelamanja jednak 1, to je optička putna razlika isto što i geometrijska putna razlika), dok se dopunska putna razlika $\lambda/2$ javlja kao posledica promene faze za π, usled odbijanja zraka SCA od ogledala, kao optički gušće sredine. Sa slike se vidi da je

$$L_1 = \sqrt{L^2 + h^2} = L\sqrt{(\frac{h}{L})^2 + 1}; \quad \Delta L = L[\sqrt{(\frac{h}{L})^2 + 1} - 1].$$

Ako je $h/L \ll 1$, onda je

$$\sqrt{(\frac{h}{L})^2 + 1} \approx 1 + \frac{1}{2}(\frac{h}{L})^2,$$

odnosno,

$$\delta = (L/2)(h/L)^2 + \lambda/2 = h^2/2L + \lambda/2.$$

Dakle, $h^2/2L + \lambda/2 = z\lambda$, tj., pošto je $h = 2d$, to je

$$4d^2/2L + \lambda/2 = z\lambda \Rightarrow z = 100.5.$$

Pošto z nije ceo broj, u tački A se javlja interferencioni minimum.

Zadatak 2

U Jungovom eksperimentu kao koherentni izvori svetlosti služe dva pravougaona prorcza S_1 i S_2, na rastojanju l jedan od drugog (vidi sliku). Na rastojanju $D >> l$ od izvora nalazi se zaklon. Talasna dužina svetlosti koju emituju svetlosni izvori je λ. Odrediti rastojanje h medju susednim interferencionim trakama blizu sredine zaklona.

Rešenje

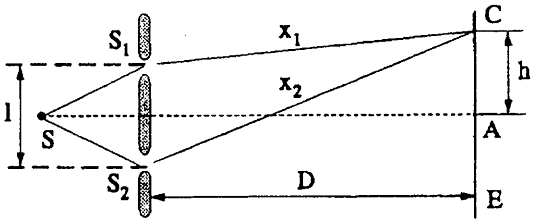
Uz pretpostavku da se uredjaj nalazi u vazduhu, optička putna razlika emitovanih zraka, koji zbog interferencije u tački C zaklona formiraju maksimum je $\delta = r_2 - r_1$. Otuda je uslov interferencionog maksimuma $r_2 - r_1 = z\lambda$. Sa slike se vidi da su

$$r_2{}^2 = D^2 + (h + l/2)^2; \quad r_1{}^2 = D^2 + (h - l/2)^2.$$

Tada je

$$r_2{}^2 - r_1{}^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2hl.$$

Iz uslova zadatka ($D >> d$) i činjenice da se interferenciona slika formira blizu sredine zaklona sledi da je $r_1 + r_2 \approx 2D$, tako da se može pisati da je $r_2 - r_1 = z\lambda = hl/D$. Tako je rastojanje n-tog maksimuma $h_n = nD\lambda/l$,



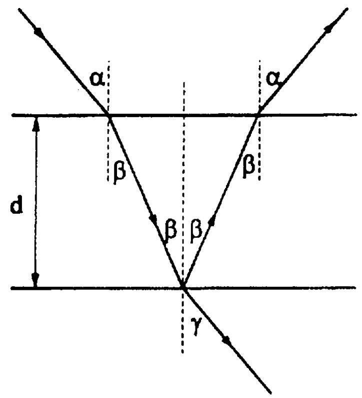
a rastojanje izmedju dva susedna interferenciona maksimuma $\Delta h = h_{n+1} - h_n = D\lambda/l$.

Zadatak 3

Po vodi pliva sloj ulja debljine $d = 0.5 \cdot 10^{-6}\,m$, osvetljen monohromatskom svetlošću talasne dužine $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}\,m$. Pod kojim će se najvećim uglom α_{max} videti maksimalno pojačanje reflektovane svetlosti iznad ovog sloja ulja? Indeks prelamanja ulja veći je od indeksa prelamanja vode i iznosi $n = 1.414$.

Rešenje

U ovom slučaju, s obzirom na definisane uslove refleksije zraka koji stupaju u interferenciju, nastaće maksimalno pojačanje reflektovane svetlosti ako je optička putna razlika δ reflektovanih zraka jednaka neparnom broju polovina talasnih dužina:



$$\delta = 2dn\cos\beta = (2z+1)\lambda/2,$$

gde je β prelomni ugao. Ako se uzme u obzir da se $\cos\beta$ može odrediti iz zakona prelamanja $\sin\alpha \sin\beta = n$, tj., da je

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2\alpha}{n^2}},$$

zamenom, uslov maksimuma interferencije postaje

$$4d^2\sin^2\alpha = -(\lambda^2/4)(2z+1)^2 + 4d^2n^2 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{16d^2n^2 - \lambda^2(2z+1)^2}}{4d}.$$

Kako je $\sin\alpha < 1$, to je $z > 4.5$. Za $z = 5$, $\sin\alpha_5 = 0.889 \Rightarrow \alpha_5 = 62.7^o$.

Zadatak 4
Staklena pločica debljine $d = 12\,\mu m$ postavi se normalno na put jednom od interferentnih zraka. Odrediti za koliko se linija Δz pomeri interferenciona slika, ako je indeks prelamanja stakla $n = 1.5$, a talasna dužina svetlosti koja pada na pločicu $\lambda = 750\,nm$.

Rešenje

Dopunska putna razlika interferentnih zraka zbog prolaska jednog od njih kroz staklenu pločicu je

$$\delta_2 - \delta_1 = nd - d = (n-1)d,$$

gde je nd optička dužina puta zraka pri prolazu kroz staklenu pločicu. Sa druge strane je

$$\delta_2 - \delta_1 = z_2\lambda - z_1\lambda = (z_2 - z_1)\lambda = \Delta z\lambda.$$

Interferenciona slika se pomeri za ukupno linija:

$$\Delta z = \frac{(n-1)d}{\lambda} = 8.$$

Zadatak 5
Staklena pločica, indeksa prelamanja $n_1 = 1.5$, prekrivena je vrlo tankim slojem materijala čiji je indeks prelamanja $n = 1.4$. Na nju pada monohromatska svetlost talasne dužine $\lambda = 600\,nm$. Svetlost odbijena od pločice maksimalno je oslabljena zbog interferencije. Odrediti debljinu sloja d materijala kojim je prekrivena staklena pločica.

Rešenje

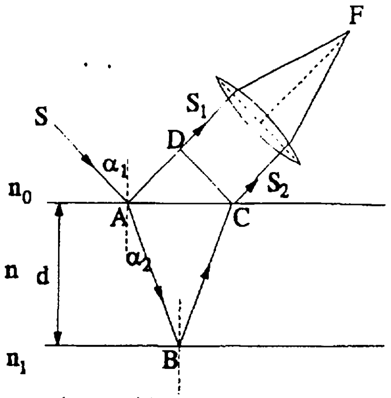
Iz snopa paralelnih zraka izdvojen je jedan, SA. Njegov tok prikazan je na slici. Upadni ugao α_1 različit je od nule. U tačkama A i B upadni zrak se delimično odbija, a delimično prelama. Odbijeni zraci AS_1 i BCS_2 stupaju u interferenciju. Pošto je indeks prelamanja vazduha n_o manji od indeksa prelamanja n materijala tankog sloja, koji je pak manji od indeksa prelamanja n_1 stakla, u oba slučaja odbijanje nastaje od sredine koja je optički gušća od one iz koje zrak nailazi. Zato se faza zraka AS_1 pri odbijanju u tački A menja za $\pi\,rad$, kao i faza zraka BCS_2 pri odbijanju u tački B.

Uslov maksimalnog slabljenja svetlosti u ovom slučaju interferencije je da optička putna razlika zraka δ bude jednaka neparnom broju polovina talasnih dužina,tj. $\delta = (2z+1)\lambda/2$. Sa slike se vidi da je optička putna razlika uočenih zraka

$$\delta = (\overline{AB} + \overline{BC})n - \overline{AD}n_o.$$

Znači,

$$(\overline{AB} + \overline{BC})n - \overline{AD}n_o = (2z+1)\lambda/2.$$



Ako je upadni ugao mali ($\alpha_1 \to 0$), onda $\overline{AD} \to 0$, a $\overline{AB} + \overline{BC} \to 2$. To znači da u graničnom slučaju, kada je $\alpha_1 = 0$,

$$\delta = 2dn = (2z+1)\lambda/2 \Rightarrow d = \frac{(2z+1)\lambda}{4n}.$$

Postavljanjem mogućih vrednosti za $z = 0, 1, 2, \ldots$ dobija se niz mogućih vrednosti debljine sloja: $d_o = \lambda/4n = 107\ nm$, $d_1 = 3\lambda/4n = 321\ nm$, redom.

Zadatak 6

Na opnu sapunice, indeksa prelamanja $n = 1.33$, pada bela svetlost pod uglom od $\alpha = 45^o$. Pri kojoj će se najmanjoj debljini d opne u odbijenoj svetlosti dobiti žuta boja talasne dužine $\lambda = 600\,nm$?

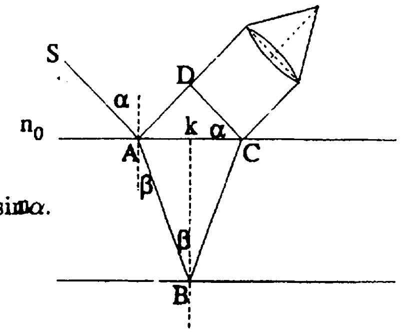
Rešenje

Opna sapunice može se razmatrati kao planparalelna ploča. Iz snopa paralelnih zraka koji padaju na nju posmatraće se zrak koji pada pod uglom α na graničnu površinu vazduh-voda. U tačkama A, B i C nastaje delimično prelamanje i delimično odbijanje svetlosti. Odbijeni zraci SABC i SAD se kreću paralelno. Po prolasku kroz sabirno sočivo seku se u njegovoj žiži, gde stupaju u interferenciju. Kako se odbijanje u tački A vrši od optički gušće sredine, faza oscilovanja zraka SA menja se za $\pi\ rad$. Kao što se sa slike vidi, optička putna razlika interferentnih zraka je

$$\delta = (\overline{AB} + \overline{BC})n - \overline{AD}n_o + \lambda/2, \qquad (9.28)$$

gde je $n_o = 1$ indeks prelamanja vazduha. Sa slike se vidi da je

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos\beta} \qquad (9.29)$$



i

$$\overline{AD} = \overline{AC}\sin\alpha = 2\overline{AK}\sin\alpha = 2d\tan\beta\sin\alpha. \qquad (9.30)$$

U ovim relacijama β je prelomni ugao. Zamenom (9.29) i (9.30) u (9.28) dobija se

$$\delta = \frac{2dn}{\cos\beta} - 2dn_o\tan\beta\sin\alpha + \lambda/2 = \frac{2dn}{\cos\beta}(1 - \frac{n_o}{n}\sin\beta\sin\alpha) + \lambda/2. \quad (9.31)$$

Znajući da je iz zakona prelamanja $\sin\alpha = (n/n_o)\sin\beta$, dobija se da je

$$\delta = \frac{2dn}{\cos\beta}(1 - \sin^2\beta) + \lambda/2.$$

S obzirom da optička putna razlika mora da bude $\delta = z\lambda$, gde je z ceo broj, to je

$$2dn\cos\beta + \lambda/2 = z\lambda \Rightarrow d = \frac{(2z-1)\lambda}{4n\cos\beta}.$$

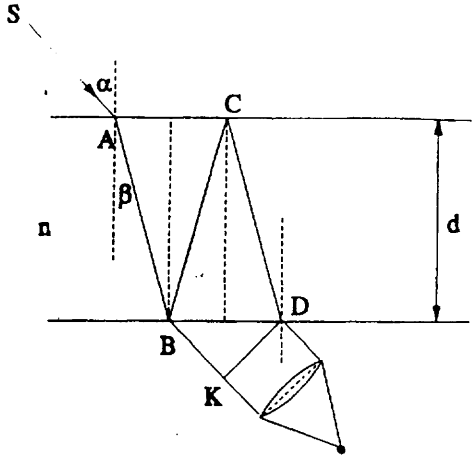
Konačno, pošto je za najmanju debljinu $z = 1$, zamenom $\cos\beta$ izračunatog iz zakona prelamanja, dobija se da je $d = 1.3 \cdot 10^{-7}\,m$.

Zadatak 7

Na providan list indeksa, prelamanja $n = 1.4$, pod uglom $\alpha = 52\ ^o$ pada bela svetlost. Kolika treba da bude debljina d lista da bi propuštena svetlost bila crvena? Talasna dužina crvene svetlosti je $\lambda = 670\,nm$.

Rešenje

Od izvora S, pri prolazu kroz list, zrak se delimično prelama i delimično odbija u tačkama A, B, C i D. U tački C zrak se odbija od optički redje sredine, tako da nema promene faze talasa. Prema tome, optička putna razlika zraka SABK i SABCD (videti prethodni zadatak) je



$$\delta = 2\overline{BC}n - \overline{BK}n_o,$$

gde je n_o indeks prelamanja vazduha. Za δ se dobija

$$\delta = 2dn\cos\beta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}.$$

U gornjoj relaciji β je prelomni ugao. Uslov maksimima, tj. uslov da list bude obojen crveno je:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = z\lambda.$$

Minimalna debljina lista se dobija za $z = 1$, tj.:

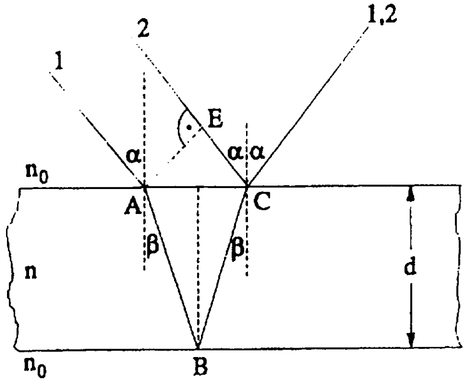
$$d = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}, \Rightarrow d = 2.89 \cdot 10^{-5}\,cm.$$

Zadatak 8

Odrediti minimalnu debljinu d_{min} plan-paralelne pločice indeksa prelamanja $n = 1.5$, koja se nalazi u vazduhu indeksa prelamanja $n_o = 1$, da bi pri osvetljavanju belom svetlošću pod uglom $\alpha_1 = 45^o$ i $\alpha_2 = 60^o$, svetlost izgledala crvena. Talasna dužina crvene svetlosti je $\lambda = 740\,nm$. Izračunati red z_1 interferencionog maksimuma za ugao α_1.

Rešenje

Ako se pretpostavi da na pločicu pada snop bele svetlosti pod nekim uglom α, čiji zraci 1 i 2 stupaju u interferenciju, onda za zrake 1 i 2 važi sledeće: zrak 1 se u tački B odbija od optički redje sredine, pa zato ne menja fazu, dok se zrak 2 odbija od optički gušće sredine, te dolazi do promene faze za π. Optička putna razlika zraka 1 i 2 je



$$\delta = (\overline{AB} + \overline{BC})n - (\overline{EC}n_o + \lambda/2),$$

za šta se posle sredjivanja dobija da je

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \lambda/2.$$

Ako se uzme u obzir i to da je za interferencioni maksimum $\delta = z\lambda$, onda za slučaj kada na pločicu pada svetlost pod dva različita ugla α_1 i α_2 mora da važi:

$$z_1\lambda = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \lambda/2; \quad z_2\lambda = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_2} - \lambda/2. \quad (9.32)$$

Dobija se da je

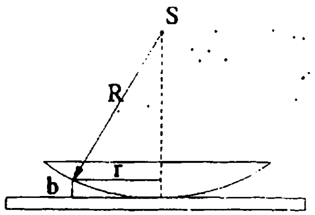
$$d = (z_1 - z_2)\frac{\lambda}{2(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_2})}.$$

Očigledno, za $z_1 - z_2 = 1$, $d = d_{min}$, tj. $d_{min} = 3.8 \cdot 10^{-6}\,m$, a red interferencionog maksimuma koji odgovara uglu α_1 je

$$z_1 = \frac{2d_{min}}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - 1/2 = 13.$$

Zadatak 9

Njutnovi prstenovi se posmatraju pri odbijanju svetlosti od plan-paralelne ploče i plankonveksnog sočiva velikog poluprečnika krivine R, koje naleže na nju (vidi sliku). Sočivo je postavljeno na plan-paralelnu ploču svojom konveksnom površinom. Ulogu klina od koga se odbija koherentna svetlost igra vazdušni zazor izmedju ploče i sočiva. Rastojanje medju svetlim Njutnovim prstenovima sa brojevima m i n jednako je l. Odrediti talasnu dužinu monohromatske svetlosti koja pada normalno na ovaj sistem.



Rešenje

Kako se razmatraju Njutnovi prstenovi dobijeni pri padu svetlosti normalno na ploču, optička putna razlika δ jednaka je dvostrukoj debljini b zazora (indeks prelamanja vazduha je $n = 1$) uvećanoj za $\lambda/2$, zbog toga što se odbijanje vrši od optički gušće sredine (od ploče). S druge strane, sa slike se vidi da je

$$R^2 = (R-b)^2 + r^2 \simeq R^2 - 2Rb + r^2,$$

gde je r poluprečnik Njutnovog prstena. Pretpostavljajući da je vrednost vazdušnog zazora b mala, b^2 se može zanemariti u odnosu na $2Rb$, tako da se iz gornje relacije nalazi da je $b = r^2/2R$. Na taj način se dobija da je

$$\delta = 2b + \lambda/2 = r^2/R + \lambda/2.$$

U tačkama za koje je $\delta = z\lambda$ (z je ceo broj) javlja se maksimum, a u tačkama za koje je $\delta = (2z+1)\lambda/2$ javlja se minimum intenziteta. Prema tome, poluprečnici svetlih Njutnovih prstenova odredjuju se iz formule:

$$r_{zs} = \sqrt{(2z-1)R\lambda/2}, \qquad z = 1, 2, 3, \ldots$$

a poluprečnici tamnih Njutnovih prstenova iz formule:

$$r_{zt} = \sqrt{zR\lambda}, \qquad z = 1, 2, 3, \ldots \tag{9.33}$$

Konačno, rastojanje izmedju svetlih prstenova sa brojevima m i n je

$$l = r_{ms} - r_{ns} = \sqrt{(2m-1)R\lambda/2} - \sqrt{(2n-1)R\lambda/2}, \tag{9.34}$$

odakle se dobija da je talasna dužina svetlosti:

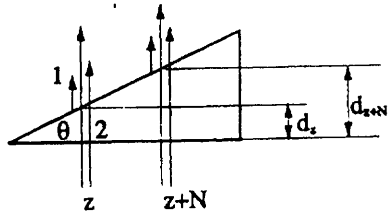
$$\lambda = \frac{l^2}{R[m+n-1-\sqrt{(2m-1)(2n-1)}]}.$$

Zadatak 10

Na stakleni klin indeksa prelamanja $n = 1.5$ normalno na njegovu horizontalnu stranu pada monohromatska svetlost talasne dužine $\lambda = 660\,nm$. Broj interferencionih traka na dužini $l = 1\,cm$ je $N = 10$. Odrediti ugao klina θ.

Rešenje

Paralelan snop zraka odbijajući se od gornje i donje površine klina stupa u interferenciju. Pošto se interferencija na klinu javlja pri malim prelomnim uglovima, zraci koji se odbijaju od gornje i donje površine (zrak 1 i 2) mogu se smatrati paralelnim. Uslov za interferencioni minimum odredjuje optičku putnu razliku kao



$$\delta = 2d_z n\cos\beta + \lambda/2 = (2z+1)\lambda/2, \tag{9.35}$$

gde je d_z debljina klina na mestu gde se javlja tamna linija koja odgovara broju z, a β prelomni ugao. Uzimajući da je upadni ugao $\alpha = 0$, a $\cos\beta = 1$, dobija se da je $2d_z n = z\lambda$. Neka tamnoj traci reda $z+N$ odgovara debljina d_{z+N}. Iz uslova zadatka proizilazi da će na dužini l broj interferencionih traka biti N. Sa slike se vidi da je

$$\sin\theta = (d_{z+N} - d_z)/l. \tag{9.36}$$

Kako je ugao θ mali, to je $\sin\theta \approx \theta$, pa je

$$\theta = \frac{d_{z+N} - d_z}{l} = \frac{(z+N)\lambda/(2n) - z\lambda/(2n)}{l} = \frac{N\lambda}{2nl} = 2.2 \cdot 10^{-4}\,rad.$$

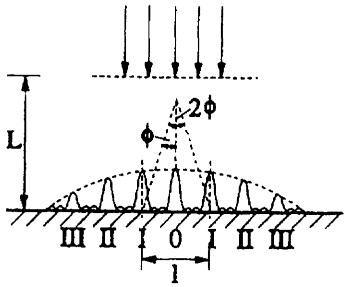
Zadatak 11

Paralelan snop svetlosti talasne dužine $\lambda = 0.5\,\mu m$ pada normalno na difrakcionu rešetku. Blizu rešetke postavljeno je sabirno sočivo koje projektuje

snop svetlosti na ravan zaklon koji se nalazi na rastojanju $L = 1\,m$ od sočiva. Rastojanje izmedju dva difrakciona maksimuma prvog reda na zaklonu je $l = 20.2\,cm$. Odrediti:
a) konstantu difrakcione rešetke d,
b) broj zareza n na dužini od $1\,cm$,
c) broj maksimuma k koji daje difrakciona rešetka,
d) maksimalni ugao skretanja zraka ϕ_{max} koji odgovara poslednjem difrakcionom maksimumu.

Rešenje

a) Uslov za maksimum na difrakcionoj slici je $d\sin\phi = z\lambda$ gde je z red maksimuma (za slučaj složene svetlosti to je red spektra). U datom slučaju $z = 1$, a $\sin\phi = \tan\phi$ (pošto je $l/2 << L$), tako da se uslov za difrakcioni maksimum može napisati kao



$$dl/2L = \lambda \Rightarrow d = 2L\lambda/l = 4.95\mu m.$$

b) Broj zareza na jednom centimetru je

$$n = 1/d = 2.02 \cdot 10^3 cm^{-1}.$$

c) Potrebno je najpre odrediti maksimalni red z_{max} difrakcionih maksimuma. Iz uslova za difrakcioni maksimum

$$z_{max} = d\sin\phi/\lambda = 9.9.$$

Vrednost z mora biti ceo broj. Medjutim, ona ne može biti jednaka 10, jer bi u tom slučaju $\sin\phi$ bilo veće od jedinice, što je nemoguće. Prema tome, $z_{max} = 9$. Kako se levo i desno od centralnog maksimuma javlja jednak broj maksimuma, ukupan broj maksimuma , uzimajući u obzir i centralni, je

$$k = 2z_{max} + 1 = 19.$$

d) Na osnovu do sada razmotrenog, maksimalni ugao skretanja zraka je

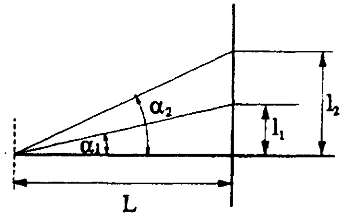
$$\sin\phi_{max} = z_{max}\lambda/d \Rightarrow \phi_{max} = 65.4^o.$$

Zadatak 12
Na difrakcionu rešetku, koja ima $N = 500$ zareza na $1\,mm$ dužine, normalno pada bela svetlost. Odrediti dužinu Δl spektra prvog reda na zaklonu ako je rastojanje izmedju rešetke i zaklona $L = 4\,m$. Granice vidljive svetlosti su: $\lambda_c = 780\,nm$ (talasna dužina crvene svetlosti) i $\lambda_{lj} = 400\,nm$ (talasna dužina ljubičaste svetlosti).

Rešenje

Uslov za formiranje difrakcionog maksimuma je

$$d\sin\alpha_1 = z\lambda_{lj}; \qquad d\sin\alpha_2 = z\lambda_c,$$



gde je d konstanta rešetke, α_1 i α_2 su uglovi skretanja ljubičaste i crvene svetlosti, a z je red lika (spektra) na difrakcionoj slici. Kako su α_1 i α_2 mali uglovi, to je

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = l_1/L; \qquad \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = l_2/L.$$

Na osnovu gornjih relacija sledi da je

$$\Delta l = l_2 - l_1 = zL(\lambda_c - \lambda_{lj})/d = 76\,cm.$$

Zadatak 13
Na difrakcionu rešetku konstante $d = 4 \cdot 10^{-4}\,cm$ normalno pada monohromatski snop svetlosti. Odrediti njenu talasnu dužinu λ ako je ugao izmedju pravaca likova drugog i trećeg reda $\alpha = 2.5^o$.

Rešenje

Uglovi θ_2 i θ_3 koji odredjuju pravce maksimuma drugog i trećeg reda su

$$\sin\theta_2 = 2\lambda/d; \quad \sin\theta_3 = 3\alpha/d. \tag{9.37}$$

Oduzimanjem jedne relacije od druge dobija se

$$\lambda = d(\sin\theta_3 - \sin\theta_2).$$

Uglovi θ_2 i θ_3 su mali, pa gornji izraz postaje $\lambda = d(\theta_3 - \theta_2)$, a kako je $\theta_3 - \theta_2 = \alpha$, konačno je

$$\lambda = d\alpha \Rightarrow \lambda = 170\,nm.$$

Zadatak 14

Rezultat propuštanja žute natrijumove svetlosti kroz difrakcionu rešetku sa $N = 1000$ zareza na $l = 1\,cm$ dužine je difrakciona slika na zaklonu, na kojoj su likovi prvog, drugog i trećeg reda ugaono pomereni za $\alpha_1 = 3.38^o$, $\alpha_2 = 6.77^o$ i $\alpha_3 = 10.18^o$. Kolika je srednja talasna dužina λ i frekvencija ν natrijumove svetlosti?

Rešenje

Uslov za formiranje difrakcionog maksimuma je $\sin\alpha = z\lambda/d$, gde je z red difrakcionog lika na difrakcionoj slici, d konstanta rešetke ($d = 1/N$), a α ugao skretanja. Ako je $z = 1$, $\sin\alpha_1 = \lambda_1/d \Rightarrow \lambda_1 = 589.6\,nm$. Ako je $z = 2$, $\sin\alpha_2 = 2\lambda_2/d \Rightarrow \lambda_2 = 589.42\,nm$, a ako je $z = 3$, $\sin\alpha_3 = 3\lambda_3/d \Rightarrow \lambda_3 = 589.14\,nm$. Znači, srednja talasna dužina natrijumove svetlosti je

$$\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3 \Rightarrow \lambda = 589.38\,nm,$$

a frekvencija $\nu = 509 \cdot 10^{12}\,Hz$.

Zadatak 15

Na difrakcionu rešetku u pravcu normale na njenu površinu pada monohromatska svetlost. Konstanta rešetke je $d = 2 \cdot 10^{-6}\,m$. Kog se najvećeg reda z_{max} dobija difrakcioni maksimum za slučaj crvene ($\lambda_1 = 700\,nm$) i ljubičaste ($\lambda_2 = 450\,nm$) svetlosti?

Rešenje

Iz uslova maksimalnog pojačanja svetlosti, za red difrakcionog maksimuma se dobija se da je $z = d\sin\alpha/\lambda$, gde je α ugao otklona zraka. Kako je $\sin\alpha \leq 1$, to je $z \leq d/\lambda_1$. Za difrakcioni maksimum z_{1max}, za slučaj crvene svetlosti, dobija se $z_{1max} = 2$, a za difrakcioni maksimum z_{2max} ljubičaste svetlosti $z_{2max} = 4$.

Zadatak 16

Normalno na difrakcionu rešetku pada paralelan snop složene svetlosti. Pri ovome se dobija spektar drugog reda u kome se linija talasne dužine $\lambda_1 = 460\,nm$ vidi pod uglom $\theta_1 = 4.97^o$ prema normali. Kolika je talasna dužina linije spektra istog reda za koju je ovaj ugao $\theta_2 = 7.33^o$? Kolika je konstanta ove optičke rešetke?

Rešenje

Iz uslova za difrakcioni maksimum $\sin\theta = z\lambda/d$ proizilazi da je konstanta optičke rešetke $d = 2\lambda_1/\sin\theta_1$, a takodje i $d = 2\lambda_2/\sin\theta_2$. Prema tome,

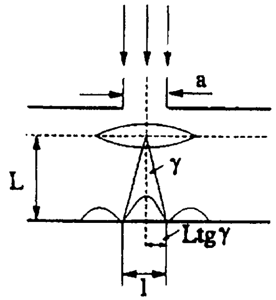
$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}.$$

Dobija se

$$\lambda_2 = 677.4\,nm; \qquad d = 10.62 \cdot 10^{-3}\,mm.$$

Zadatak 17

Na zarez širine $a = 0.1\,mm$ pada paralelan snop monohromatske svetlosti talasne dužine $\lambda = 600\,nm$. Odrediti širinu l centralnog maksimuma na difrakcionoj slici dobijenoj pomoću sabirnog sočiva koje se nalazi neposredno iza zareza, na zaklonu koji se od sočiva nalazi na rastojanju $L = 1\,m$.



Rešenje

Centralni maksimum zauzima oblast izmedju najbližeg desnog i levog minimuma. Zato se širina centralnog maksimima odredjuje kao rastojanje izmedju tih minimuma. Uslov za difrakcioni minimum pri difrakciji na jednom zarezu je $a\sin\gamma = \pm z\lambda$, gde je z ceo broj koji označava red minimuma (u ovom slučaju $z = 1$), a γ ugao skretanja svetlosti. Širina centralnog maksimuma je $l = 2L\tan\gamma$. Za mali ugao γ, $\tan\gamma \approx \sin\gamma$, pa je

$$l = 2L\sin\gamma = 2Lz\lambda/a \Rightarrow l = 1.2\,cm.$$

9.4 Kvantna optika

9.4.1 Teorija

Energija kvantna svetlosti (fotona) je

$$E = h\nu,$$

gde je h Plankova konstanta, a ν frekvencija oscilovanja svetlosti.

Masa m i impuls K fotona su

$$m = \frac{h\nu}{c^2}; \qquad K = \frac{h\nu}{c}.$$

Ajnštajnova relacija za spoljašnji fotoelektrični efekat je

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

gde je A izlazni rad metala iz koga se emituju elektroni pod uticajem svetlosti, a $mv^2/2$ kinetička energija elektrona posle napuštanja metala.

Pritisak svetlosti na neku površinu je

$$p = \frac{I}{c}(1 + R),$$

gde je I intenzitet svetlosti koja pada na površinu, c brzina svetlosti i R koeficijent refleksije.

Povećanje talasne dužine zračenja pri Komptonovom rasejanju je

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

gde je θ ugao rasejanja, h Plankova konstanta, m masa elektrona, a c brzina svetlosti.

9.4.2 Zadaci

Zadatak 1

Izvor monohromatske svetlosti talasne dužine $\lambda = 480\,nm$ ima snagu $P = 90\,W$, od čega se $\eta = 5$ % izrači u vidu svetlosti. Kolika je ekvivalentna masa m_n svih fotona oslobodjenih iz svetlosnog izvora u jedinici vremena? Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, a brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Energija jednog fotona data je izrazom $E_1 = h\nu = hc/\lambda$, u kome je ν frekvencija monohromatske svetlosti. Ako je n broj fotona u jedinici vremena, onda je $E_n = nh\nu = nhc/\lambda$ ukupna energija n fotona u jedinici vremena, gde nhc/λ predstavlja snagu koju izvor izrači u vidu svetlosti pa je $nhc/\lambda = \eta P$ odakle je $n = \eta P\lambda/hc$. Kako je, s druge strane, energija fotona odredjena kao $E = mc^2 = hc/\lambda$, to je $m = h/c\lambda$, odnosno,

$$m_n = nm = \eta P/c^2 \Rightarrow m_n = 5 \cdot 10^{-17}\,kg.$$

Zadatak 2

Tačkasti izvor monohromatske svetlosti talasne dužine $\lambda = 550\,nm$ emituje svetlosni fluks snage $P = 10\,W$. Na kom se rastojanju r može opaziti taj izvor ako pragu osetljivosti oka za ovu talasnu dužinu odgovara fluks od $n = 60$ fotona u sekundi? Prečnik zenice je $d = 0.5\,cm$. Apsorpciju svetlosti u vazduhu zanemariti. Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, a brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Broj fotona koji u jedinici vremena pada u oko je $n = NS_1/S$, gde je N broj fotona koji emituje izvor u jedinici vremena, S površina sfere čiji je poluprečnik jednak rastojanju r od izvora do mesta posmatranja ($S = 4\pi r^2$), a S_1 površina zenice ($S_1 = \pi d^2/4$). Kako je broj fotona koje izvor emituje u jedinici vremena $N = P/h\nu = P\lambda/hc$, to je $n = P\lambda d^2/(16hcr^2)$, a

$$r = \sqrt{\frac{P\lambda d^2}{16hcn}} \Rightarrow r = 8.5 \cdot 10^5 m.$$

Zadatak 3

Monohromatski izvor svetlosti snage $P = 10\,W$ zrači zelenu svetlost talasne dužine $\lambda = 530\,nm$. Odrediti broj emitovanih kvanata n u sekundi, ako je koeficijent korisnog dejstva svetlosnog izvora $\eta = 0.2\%$.

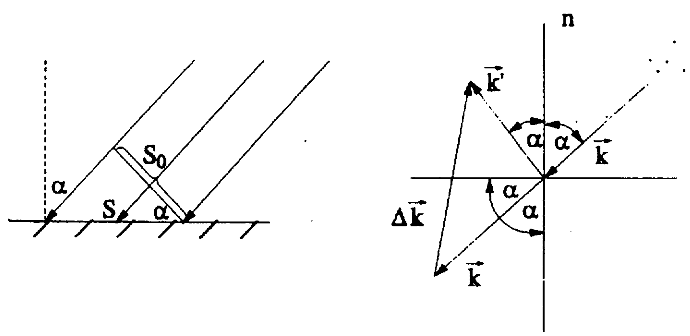
Rešenje

Korisna snaga izvora (snaga zračenja) je $P_k = \eta P$. Ako je energija jednog kvanta $E_1 = hc/\lambda$, a n broj izračenih kvanata u sekundi, onda je $P_k = nE_1$, odakle je

$$n = P_k/E_1 = \eta P\lambda/hc \Rightarrow n = 5.3 \cdot 10^{16}.$$

Zadatak 4
Svetlosni snop intenziteta $I = 2 \cdot 10^3\, Wm^{-2}$ pada na ravno ogledalo koeficijenta refleksije $\rho = 0.8$, pod uglom $\alpha = 45^o$. Odrediti pritisak P svetlosti na ogledalo.

Rešenje



a) b)

Iz izraza za pritisak se dobija

$$p = \frac{F}{S} = \frac{Ft}{St} = \frac{\Delta K_n}{St},$$

gde je ΔK_n projekcija impulsa ΔK koji fotoni, padajući normalno, saopšte ogledalu tokom vremena t, a S površina koja se osvetljava. Vrednosti S i ΔK_n zavise od upadnog ugla α svetlosti, kao što se vidi sa sl.4. Na sl.4a prikazan je snop svetlosti koji pod navedenim uslovima pada na ravno ogledalo. Ako je površina poprečnog preseka snopa svetlosti S_o, površina ogledala S na koju svetlost pada je $S = S_o/\cos\alpha$. Na slici je prikazan

sumarni impuls fotona koji padaju na ogledalo ($\vec{K}$) i odbijenih fotona ($\vec{K}'$). Saglasno zakonu održanja impulsa dobija se da je

$$\Delta\vec{K} = \vec{K}' - \vec{K}.$$

Kako su za pritisak odgovorne komponente impulsa u pravcu normale, prelazom na projekcije vektora impulsa na pravac normale n dobija se:

$$\Delta K_n = K'_n - K_n = K'\cos\alpha + K\cos\alpha = (K' + K)\cos\alpha.$$

Prema tome, pritisak je

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta K_n}{St} = \frac{(K' + K)cos^2\alpha}{S_o t}.$$

Za $\alpha = 0$, $p = p_o$, ili $p_o = (K' + K)/(S_o t)$. Medjutim, kako važi da je $p_o = I(1 + R)/c$, dobija se da je

$$p = \frac{I}{c}(1 + R)\cos^2\alpha = 6 \cdot 10^{-6}\, Pa.$$

Zadatak 5
Na ravan površine $S = 3\ cm^2$ za vreme $t = 5\,min$ padne svetlost čija je energija $E = 20\,J$. Odrediti pritisak P svetlosti na tu površinu ako ona: a) apsolutno apsorbuje svetlost; b) apsolutno reflektuje svetlost.

Rešenje

Iz izraza koji odredjuje pritisak svetlosti

$$p = \frac{E_o}{c}(1 + R),$$

gde je $E_o = E/St$ energija zračenja koja pada na jedinicu površine u jedinici vremena, c brzina svetlosti, a ρ koeficijent refleksije, sledi
a) u slučaju apsolutnog apsorbovanja svetlosti $R = 0$, pa je

$$p = \frac{E_o}{c} = \frac{E}{Sct} = p = 7.4 \cdot 10^{-7}\, Pa.$$

b) U slučaju apsolutnog reflektovanja svetlosti $\rho = 1$, pa je

$$p = \frac{2E_o}{c} = \frac{2E}{Sct} \Rightarrow p = 14.8 \cdot 10^{-7}\, Pa.$$

Zadatak 6
Monohromatski snop svetlosti talasne dužine $\lambda = 490\,nm$ padajući normalno na površinu izaziva pritisak od $P = 9.81 \cdot 10^{-7}\,Pa$. Koliko kvanata svetlosti u sekundi N padne na jedinicu površine? Koeficijent refleksije svetlosti je ρ = 0.5.

Rešenje

Iz izraza za pritisak svetlosti $p = E_o(1+R)/c$, energija zračenja koja pada na jedinicu površine u jedinici vremena je $E_o = pc/(1+\rho)$. Kako je energija jednog kvanta $E = h\nu = hc/\lambda$, broj kvanata svetlosti koji svake sekunde padnu na jedinicu površine je

$$N = \frac{E_o}{E} = \frac{pc\lambda}{hc(1+R)} = \frac{p\lambda}{h(1+R)} \Rightarrow N = 4.84 \cdot 10^{20}. \qquad (9.38)$$

Zadatak 7
Odrediti crvenu granicu fotoelektričnog efekta (maksimalnu talasnu dužinu λ_{max} primenjene svetlosti) ako je izlazni rad elektrona $A_i = 4.54\,eV$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, a $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$.

Rešenje

Iz relacije kojom je odredjena energija fotona koji mogu da izazovu fotoelektrični efekat $h\nu = A_i + mv^2/2$, gde je $mv^2/2$ kinetička energija emitovanih elektrona, kada je brzina fotoelektrona $v = 0$, sledi da je

$$A_i = h\nu_{min} = hc/\lambda_{max} \Rightarrow \lambda_{max} = hc/A_i = 273.4\,nm. \qquad (9.39)$$

Zadatak 8
Površina srebra osvetljava se svetlošću talasne dužine $\lambda = 150\,nm$. Kolika je brzina v emitovanih elektrona ako je granica fotoefekta $\lambda_{max} = 260\,nm$? ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, a $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Iz relacije za fotoelektrični efekat dobija se izlazni rad A_i, tj.

$$h\nu = A_i + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow A_i = h\nu_{min} = hc/\lambda_{max},$$

gde je uzeto da je brzina fotoelektrona $v = 0$. Brzina emitovanih fotoelektrona pri $\lambda = 150\,nm$ je

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{max}}\right)} \Rightarrow v = 1.11 \cdot 10^6\,ms^{-1}.$$

Zadatak 9
Laser snage $P = 30\,W$ emituje $N = 10^{20}$ fotona u sekundi i izaziva fotoelektrični efekat na fotokatodi načinjenoj od materijala čiji je izlazni rad $A_i = 1.2\,eV$. Odrediti brzinu v fotoelektrona.($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, i $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Iz relacije za fotoelektrični efekat nalazi se brzina fotoelektona

$$h\nu = A_i + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(h\nu - A_i)}.$$

Kako je snaga lasera $P = Nh\nu$, brzina fotoelektrona postaje

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{P}{N} - A_i\right)} \Rightarrow v = 4.87 \cdot 10^5\,ms^{-1}.$$

Zadatak 10
Zakočni potencijal fotoelektrona izazvanih fotonima talasne dužine $\lambda = 200\,nm$ iznosi $U_z = 1.71\,V$. Odrediti maksimalnu brzinu fotoelektrona ako se fotokatoda obasja fotonima čija je energija E_f 10^5 puta manja od energije mirovanja elektrona E_o. Odrediti izlazni rad A_i materijala fotokatode i maksimalnu talasnu dužinu λ_{max} svetlosti koja može izazvati fotoefekat. Naelektrisanje elektrona je $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$.

Rešenje

Iz relacije za fotoelektrični efekat dobija se vrednost za izlazni rad

$$\frac{hc}{\lambda} = A_i + eU_z \Rightarrow A_i = 7,2.10^{-19}\,J = 4.5eV.$$

Medjutim, kako je izlazni rad odredjen kao $A_i = hc/\lambda_{max}$, to je $\lambda_{max} = hc/A_i = 276\,nm$. Ako se uzmu u obzir zadati uslovi, s obzirom da je $E_o = m_oc^2$ onda je

$$10^{-5}mc^2 = A_i + \frac{m(v_{max})^2}{2} \Rightarrow v_{max} = 4.66 \cdot 10^5\,ms^{-1}.$$

Zadatak 11
Kada se površina metalne ploče osvetli UV-zračenjem talasne dužine $\lambda_1 = 180\,nm$, javlja se fotoelektrična struja, koja nestaje kada je potencijal ploče $\varphi_1 = +1\,V$. Za koliko $\Delta\varphi$ treba da se poveća potencijal te metalne ploče da bi se sprečila fotoelektrična struja pri dejstvu X-zračenja talasne dužine $\lambda_2 = 10\,nm$? ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$ i $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$).

Rešenje

Iz relacije za fotoelektrični efekat odredjuje se izlazni rad

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A_i + e\varphi_1 \Rightarrow A_i = 5.9\,eV.$$

Ako se dejstvuje X-zračenjem talasne dužine λ_2, onda se iz relacije $hc/\lambda_2 = A_i + e\varphi_2$, za zakočni potencijal φ_2 dobija

$$\varphi_2 = \frac{1}{e}(\frac{hc}{\lambda_2} - A_i); \qquad \varphi_2 = 118.22\,V$$

tako da je tražena promena potencijala $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = 117.22\,V$.

Zadatak 12
Najveća talasna dužina svetlosti koja još izaziva fotoefekat kod natrijuma je $\lambda_{max} = 530\,nm$. Odrediti izlazni rad A_i elektrona u natrijumu, kao i njihovu

maksimalnu brzinu v_{max} kada se fotokatoda osvetli zračenjem talasne dužine $\lambda = 260\,\text{nm}$.($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Iz relacije za fotoefekat $hc/\lambda = Ai + mv^2/2$ za $\lambda = \lambda_{max}$, kinetička energija elektrona je $E_k = 0$, a izlazni rad A_i je

$$A_i = hc/\lambda_{max} = 3.75 \cdot 10^{-19}\,J = 2.34eV.$$

Za datu talasnu dužinu λ, iz relacije za fotoefekat $hc/\lambda = A_i + m(v_{max})^2/2$, dobija se da je

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}(\frac{hc}{\lambda} - A_i)} = 0.92 \cdot 10^6\,ms^{-1}.$$

Zadatak 13
Foton rendgenskog zračenja talasne dužine $\lambda_1 = 0.02\,nm$ pri rasejanju na slobodnom elektronu promeni svoj pravac od prvobitnog za ugao $\theta = 90^o$. Odrediti energiju E_e elektrona posle interakcije. Komptonova talasna dužina je $\lambda_k = 2.43 \cdot 10^{-3}\,nm$. ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$, a $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Pri Komptonovom efektu foton u interakciji sa elektronom gubi deo energije povećavajući svoju talasnu dužinu na vrednost $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, gde je $\Delta\lambda = 2h/(m_oc)\sin^2\theta/2 = 2\lambda_k \sin^2\theta/2$. Energije fotona pre i posle interakcije sa elektronom su E_1 i E_2, respektivno:

$$E_1 = hc/\lambda_1; \qquad E_2 = hc/\lambda_2,$$

a energija eletrona posle interakcije odgovara njihovoj razlici:

$$E_e = \Delta E = E_1 - E_2 = E_e = 1.08 \cdot 10^{-15}\,J = 0.67 \cdot 10^4\,eV.$$

Zadatak 14
Pri sudaru sa elektronom foton se raseje za ugao $\theta = 90^o$. Energija rasejanog

fotona je $E_2 = 0.4\,MeV$. Odrediti energiju fotona E_1 pre rasejanja. ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, a $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Na osnovu Komptonove relacije za promenu talasne dužine fotona pri interakciji sa slabovezanim elektronom $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2h/(m_o c)\sin^2\theta/2$, dobija se

$$\frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = \frac{hc}{m_o c^2} 2\sin^2\theta/2,$$

odakle je

$$E_1 = \frac{E_2 m_o c^2}{m_o c^2 - E_2 \sin^2\theta/2} = 2.92 \cdot 10^{-13}\,J = 1.73\,MeV.$$

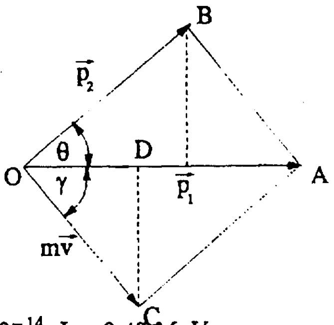
Zadatak 15

Foton energije $E_1 = 0.75\,MeV$, pri sudaru sa slobodnim elektronom, raseje se za ugao $\theta = 60^o$. Pretpostavljajući da su kinetička energija i impuls elektrona do sudara sa fotonom bili zanemarljivo mali, odrediti:
a) energiju E_2 rasejanog fotona,
b) kinetičku energiju E_k elektrona posle interakcije i
c) pravac kretanja elektrona (ugao uzmaka elektrona γ).
($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, a $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

a) Na osnovu Komptonove relacije za promenu talasne dužine fotona pri interakciji sa slabovezanim elektronom: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = h(1-\cos\theta)/m_o c$, u kojoj je m_o masa mirovanja elektrona, može se pisati

$$\frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = \frac{h}{m_o c}(1-\cos\theta).$$



Odavde se dobija da je

$$E_2 = \frac{1}{(1-cos\theta)/m_o c^2 + 1/E_1} \Rightarrow E_2 = 6.9 \cdot 10^{-14}\,J = 0.43\,MeV.$$

b) Kinetička energija elektrona jednaka je razlici energija fotona pre i posle interakcije:

$$E_k = E_1 - E_2 = 0.32\,MeV.$$

c) Pravac kretanja elektrona može se odrediti primenom zakona održanja impulsa. Impuls upadnog fotona $\vec{K}_1$ jednak je sumi impulsa rasejanog fotona $\vec{K}_2$ i elektrona $m\vec{v}$: $\vec{K}_1 = \vec{K}_2 + m\vec{v}$. Vektori impulsa prikazani su na slici, gde se iz trougla ΔOCD vidi se da je

$$\tan\gamma = \frac{CD}{OD} = \frac{CA\sin\theta}{OA - CA\cos\theta},$$

ili

$$\tan\gamma = \frac{K_2\sin\theta}{K_1 - K_2\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{K_1/K_2 - \cos\theta}.$$

Kakoje $K_1 = E_1/c$, a $K_2 = E_2/c$, to je

$$\tan\gamma = \frac{\sin\theta}{E_1/E_2 - \cos\theta} \Rightarrow, \gamma = 35^o.$$

Zadatak 16

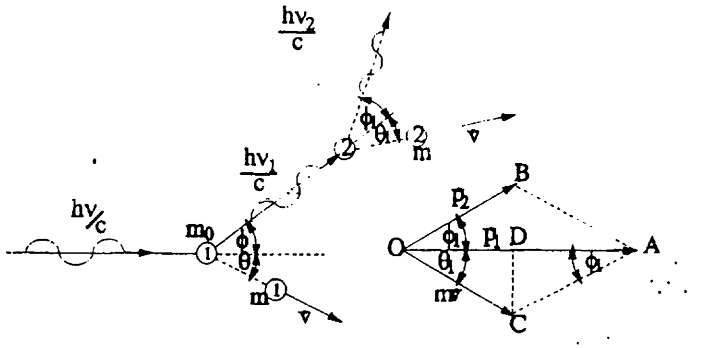
Foton talasne dužine $\lambda = 0.2\ nm$ stupa u interakciju sa slabovezanim elektronom i rasejava se pod uglom $\phi = 45^o$. Posle rasejanja foton stupa u interakciju sa drugim slabovezanim elektronom, tako da je ugao njegovog rasejanja na drugom elektronu $\phi_1 = 60^o$. Odrediti ugao uzmaka θ_1 drugog elektrona u odnosu na pravac kretanja fotona pre drugog sudara. ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, a $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Ako su $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$ impulsi fotona pre i posle rasejanja na drugom elektronu, redom ($p_1 = h\nu_1/c$, $p_2 = h\nu_2/c$, gde su ν_1 i ν_2 odgovarajuće frekvencije), onda je

$$\tan\theta_1 = \frac{p_2\sin\phi_1}{p_1 - p_2\cos\phi_1}. \qquad (9.40)$$

Na osnovu Komptonove relacije za promenu talasne dužine fotona $\Delta\lambda$ pri rasejanju na prvom elektronu:



Sl.a Sl.b

$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda = h(1 - cos\phi)/m_o c$, dobija se da je impuls p_1

$$p_1 = \frac{h}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{h}{(h/m_o c)(1 - \cos\phi) + \lambda}.$$

Na osnovu Komptonove relacije za promenu talasne dužine fotona $\Delta\lambda_1$ pri rasejanju na drugom elektronu: $\Delta\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = h(1 - \cos\phi_1)/m_o c$, gde su λ_1 i λ_2 talasne dužine fotona pre i posle rasejanja na drugom elektronu, i pri čemu je $\lambda_2 = \lambda + (h/m_o c)(2 - \cos\phi - \cos\phi_1)$, dobija se da je impuls p_2

$$p_2 = \frac{h}{\lambda + (h/m_o c)(2 - \cos\phi - \cos\phi_1)}.$$

Konačno, zamenom p_2 u (9.40) dobija se da je $\theta_1 = 60^o$.

Zadatak 17
Kolika je maksimalna promena energije ΔE_{max} fotona X-zraka talasne dužine $\lambda = 0.1\,nm$ pri njegovom rasejanju u interakciji sa slabovezanim elektronom? Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, brzina svetlost $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$ i masa elektrona $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Ako se u Komptonovoj relaciji za promenu talasne dužine fotona: $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda = h(1 - \cos\theta)/m_o c$ talasna dužina izrazi preko energije, onda za

promenu talasne dužine može da se piše:

$$\frac{hc}{E_1} - \frac{hc}{E} = \frac{h}{m_o c}(1 - \cos\theta),$$

gde je E energija fotona pre interakcije, a E_1 njegova energija posle interakcije sa elektronom. Posle sredjivanja dobija se

$$\frac{E - E_1}{EE_1} = \frac{1}{m_o c^2}(1 - \cos\theta),$$

ili, ako se uzme u obzir da je $E - E_1 = \Delta E$, a $E = hc/\lambda$ i $E_1 = hc/\lambda_1$,

$$\Delta E = \frac{E}{1 + (m_o c^2)/[E(1 - \cos\theta)]}.$$

Očigledno, $\Delta E = \Delta E_{max}$ za $\theta = \pi$, tako da je

$$\Delta E_{max} = \frac{2(hc/\lambda)^2}{2(hc/\lambda) + m_o c^2} = 9.2 \cdot 10^{-17}\,J.$$

Zadatak 18
Pri interakciji rendgenskih zraka i slabovezanog elektrona kinetička energija koju stekne elektron je $E_k = 1\,keV$. Kolika talasna dužina λ_1 X-zraka odgovara ovoj interakciji ako je promena talasne dužine pritom maksimalna? ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, a $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Rešenje

Energija uzmaknutog elektrona jednaka je razlici energija $E_1 = hc/\lambda_1$ i $E_2 = hc/\lambda_2$ rendgenskih zraka, pre i posle interakcije, redom. Dakle,

$$E_k = \Delta E = E_1 - E_2 = hc/\lambda_1 - hc/\lambda_2,$$

gde je $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, a $\Delta\lambda = h(1 - \cos\theta)/m_o c$. Da bi promena talasne dužine bila maksimalna, tj. $\Delta\lambda = \Delta\lambda_{max}$, ugao rasejanja rendgenskih zraka mora da bude $\theta = \pi$. Znači, $\Delta\lambda = \Delta\lambda_{max} = 2h/(m_o c)$, tako da izraz za kinetičku energiju uzmaknutog elektrona postaje

$$E_k = \frac{hc}{\lambda_1[1 + (m_o c\lambda_1)/2h]}.$$

Sredjivanjem ovog izraza dobija se kvadratna jednačina po λ_1, čije je rešenje koje ima fizički smisao:

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_o c}[\sqrt{1 + \frac{2m_o c^2}{E_k}} - 1] = 0.075\, nm.$$

10. Borova teorija. Rendgensko zračenje

10.1 Teorija

Na osnovu eksperimenata sa rasejavanjem α-čestica na metalnim folijama Raderford je došao do sledećeg izraza za broj rasejanih α-čestica ΔN na atomima folije

$$\Delta N = \frac{nNx}{R^2}(\frac{Ze^2}{m_\alpha v_\alpha})^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2},$$

gde je n broj atoma folije u jedinici zapremine, x debljina folije, m_α masa α-čestice, v_α njena brzina, Z atomski broj metala od koga je folija načinjena, e elementarno naelektrisanje, R rastojanje izmedju fluorescentnog zaklona i folije i θ ugao rasejanja.

Raderford je predložio model atoma koji je poznat pod nazivom planetarni model atoma. Prema ovom modelu, oko pozitivno naelektrisanog jezgra, čije je naelektrisanje Ze, kruže elektroni. Kada je atom neutralan, naelektrisanje jezgra jednako je zbiru naelektrisanja elektrona koji ulaze u sastav atoma. Raderford je pretpostavio da se elektroni kreću oko jezgra po kružnim orbitama poluprečnika r. U tom slučaju Kulonova sila jednaka je centrifugalnoj sili

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

gde je v brzina elektrona na orbiti poluprečnika r, ϵ_o konstanta električne propustljivosti vakuuma ili dielektrična konstanta vakuuma ($\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12}\, Fm^{-1}$). Prema Raderfordovom modelu, poluprečnik orbite i brzina kojom se elektron kreće po orbiti mogu imati proizvoljne vrednosti, tj. njegove vrednosti se mogu kontinualno menjati. Pri prelazu elektrona sa jedne na drugu orbitu može se emitovati ili apsorbovati bilo koja vrednost energije, tj. energetski spektar atoma je kontinualan.

Eksperimentalna istraživanja spektra atoma pokazala su da svaki element ima svoj karakterističan linijski spektar. Istraživanja koja je vršio Balmer odnosila su se na spektar atoma vodonika. On je na osnovu eksperimentalnih istraživanja ustanovio da se talasne dužine λ linija spektra atoma vodonika mogu izraziti pomoću empirijske formule

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

gde je R_H Ridbergova konstanta i $n = 3, 4, 5, ...$ Kao što se zapaža iz ovog izraza, različitim spektralnim linijama odgovaraju različite vrednosti n. Te linije obrazuju grupu ili seriju koja se naziva Balmerova serija. Kraj serije se dobija za $n \to \infty$.

Izraz za $1/\lambda$ se može prikazati preko frekvencije ν

$$\nu = R'_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad n = 3, 4, 5, ...$$

gde je $R'_H = R_H c$ (c brzina svetlosti u vakuumu). Balmerova serija je u vidljivom delu spektra.

Pored Balmerove serije postoje i druge serije atoma vodonika. Tako je pokazano da postoji serija u ultraljubičastoj oblasti spektra koja se naziva Lajmanova serija. Ona se može izraziti u obliku:

$$\nu = R'_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad n = 2, 3, 4, ...$$

U infracrvenoj oblasti spektra nadjene su četiri serije:

Pašenova

$$\nu = R'_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad n = 4, 5, 6, ...$$

Breketova

$$\nu = R'_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad n = 5, 6, 7, ...$$

Pfundova

$$\nu = R'_H\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad n = 6, 7, 8, ...$$

Hemfrijeva

$$\nu = R'_H\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad n = 7, 8, 9, ...$$

Raderfordovim modelom nije mogao da se objasni linijski spektar atoma vodonika. Zbog toga je Bor ovaj model usavršio uvodeći svoja tri postulata. Prvi postulat glasi: elektron u atomu se ne može kretati po bilo kojoj orbiti, već po orbitama tačno odredjenog poluprečnika, za koje moment impulsa L zadovoljava sledeći uslov:

$$L = mv_n r_n = n\hbar,$$

gde je m masa elektrona, v_n njegova brzina na n-toj orbiti poluprečnika r_n, $n = 1, 2, 3, ...$ i $\hbar = h/2\pi$, gde je h Plankova konstanta. Kretanje elektrona po kružnoj putanji je uslovljeno jednakošću Kulonove i centrifugalne sile.

Drugi postulat glasi: pri kretanju elektrona po stacionarnim orbitama niti se emituje niti apsorbuje energija.

Treći postulat glasi: prelaz elektrona sa jedne na drugu orbitu uslovljen je emisijom ili apsorpcijom kvanta energije. Ovaj postulat se može izraziti na sledeći način:

$$h\nu = E_2 - E_1 = \Delta E, \tag{10.1}$$

gde su E_2 i E_1 energije stacionarnih stanja atoma pre i posle emisije kvanta $h\nu$.

Na osnovu izraza za jednakost centrfugalne i Kulonove sile i izraza za moment impulsa proizilazi da je brzina elektrona na n-toj orbiti

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o n\hbar},$$

a poluprečnik

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_o n^2\hbar^2}{mZe^2}.$$

Izraz za kinetičku energiju E_k elektrona na rastojanju r od jezgra se može dobiti ako se za brzinu elektrona v koristi gornji izraz, tj.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_o r}.$$

Potencijalna energija E_p elektrona na rastojanju r od jezgra jednaka je proizvodu potencijala ϕ i naelektrisanja e, tj.

$$E_p = -\phi e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Ze^2}{r}.$$

Ukupna energija E jednaka je zbiru kinetičke i potencijalne energije:

$$E = E_k + E_p.$$

Kada se u izrazima za kinetičku i potencijalnu energiju zameni izraz za r, izraz za E dobija konačan izraz:

$$E = -\frac{Z^2 me^4}{32\pi^2\epsilon_o^2\hbar^2 n^2}.$$

Energija kvanta $h\nu$ emitovanog zračenja pri prelasku elektrona sa višeg na niže energetsko stanje data je sledećim izrazom:

$$h\nu = E_2 - E_1 = -\frac{Z^2 me^4}{32\pi^2\epsilon_o^2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right).$$

Eksperimentalno je pokazano da postoje dva tipa spektara rendgenskog zračenja. Pri energijama elektrona koje ne prelaze neku kritičnu vrednost, koja zavisi od vrste materijala anode (antikatode) rendgenske cevi, pojavljuje se zračenje čiji je spektar kontinualan. Takvo zračenje naziva se zakočno ili belo rendgensko zračenje i posledica je naglog kočenja elektrona na anodi rendgenske cevi. Ovaj spektar je sa strane kraćih talasnih dužina ograničen. To se objašnjava činjenicom da maksimalna energija emitovanog kvanta rendgenskog zračenja ne može da bude veća od kinetičke energije $E_k = eU$ elektrona koji izaziva taj kvant, tj.

$$eU = h\nu_{max},$$

gde je U napon na cevi. Pošto je $\nu_{max} = c/\lambda_{min}$, gornja jednačina se može izraziti na sledeći način:

$$\lambda_{min} = \frac{ch}{eU} = \frac{1241}{U}\,nm.$$

Za difrakciju rendgenskog zračenja važi Vulf-Bragova formula

$$2d\sin\alpha = n\lambda,$$

gde je d rastojanje izmedju atoma u kristalnoj rešetki, α ugao pod kojim padaju rendgenski zraci u odnosu na ravan kristala, λ talasna dužina rendgenskog zračenja i $n = 1, 2, 3, ...$

Apsorpcija rendgenskog zračenja vrši se po sledećem zakonu:

$$I = I_o\exp(-\mu d),$$

gde je I_o intenzitet rendgenskog zračenja pre prolaska, a I intenzitet ovog zračenja posle prolaska kroz sloj debljine d, dok je μ linearni koeficijent apsorpcije (slabljenja).

Pored linearnog koeficijenta slabljenja koristi se maseni koeficijent apsorpcije $\mu_m = \mu/\rho$, gde je ρ gustina materijala. Takodje se koristi i atomski koeficijent slabljenja $\mu_a = \mu_m A/N_a$, gde je A maseni broj, a N_a Avogadrov broj.

Drugi tip spektra rendgenskog zračenja ima linijski karakter i naziva se karakteristično rendgensko zračenje, a pojavljuje se pri većim energijama elektrona koji se emituju sa katode rendgenske cevi. Za ovu vrstu zračenja važi Mozlijev zakon koji se može izraziti na sledeći način:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right),$$

gde je b konstanta ekraniranja, čija vrednost zavisi od serije rendgenskog zračenja i za K_α - linije $b = 1$. R je Ridbergova konstanta, a i i j brojevi orbita.

10.2 Zadaci

Zadatak 1

Naći poluprečnik prve i druge Borove orbite elektrona u atomu vodonika i brzine elektrona na njima. Uzeti da je dielektrična propustljivost vakuuma $\epsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12} C^2\,N^{-1}m^{-2}$, Plankova konstanta $h = 6.62\cdot 10^{-34}\,Js$, masa elektrona $m = 9.1\cdot 10^{-31}\,kg$ i naelektrisanje elektrona $e = 1.6\cdot 10^{-19}\,C$.

Rešenje

Po Borovom modelu, elektron se kreće oko jezgra po kružnoj putanji, pri čemu mora biti ispunjen uslov da je centrifugalna sila F_r jednaka Kulonovoj sili F_c. Pošto je $F_r = mv^2/r$ i $F_c = Ze^2/(4\pi\epsilon_o r^2)$, to je

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Ze^2}{r^2}, \tag{10.2}$$

gde je v brzina elektrona, r poluprečnik orbite i Z atomski broj.

Po istom modelu, orbita elektrona je kvantovana veličina koja mora da zadovolji uslov da je moment impulsa elektrona jednak celom broju umnoška $\hbar$, tj.

$$mvr = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{10.3}$$

Iz (10.2) i (10.3) za poluprečnik i brzinu elektrona na n-toj orbiti dobijaju se sledeći izrazi:

$$r_n = \frac{\epsilon_o n^2 h^2}{\pi m e^2 Z}, \tag{10.4}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{2h\epsilon_o n}. \tag{10.5}$$

Poluprečnik prve Borove orbite r_1 se dobija kada se u (10.4) zameni $n = 1$

$$r_1 = \frac{\epsilon_o h^2}{\pi m e^2} = 5.3 \cdot 10^{-11}\, m,$$

a radijus druge Borove orbite r_2 kada se zameni $n = 2$

$$r_2 = \frac{4\epsilon_o h^2}{\pi m e^2} = 21.2 \cdot 10^{-11}\, m.$$

Brzine elektrona za $n = 1$ i $n = 2$ prema (10.5) su:

$$v_1 = \frac{h}{2\pi m r_1} = 2.18 \cdot 10^6\, ms^{-1},$$

i

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = 1.09 \cdot 10^6\, ms^{-1}.$$

Zadatak 2

Odrediti frekvenciju kruženja elektrona po prvoj i drugoj Borovoj orbiti atoma vodonika kao i frekvenciju emitovanog fotona pri elektronskom prelazu medju tim orbitama. Masa elektrona je $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\, kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\, Js$, naelektrisanje elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\, C$ i dielektrična propustljivost vakuuma $\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12}\, C^2 N^{-1} m^{-2}$.

Rešenje

Iz izraza za jednakost centrifugalne i Kulonove sile

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Ze^2}{r^2} \tag{10.6}$$

i izraza za kvantovanje momenta impulsa elektrona u atomu

$$mvr = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}, \tag{10.7}$$

za poluprečnik orbite i brzinu elektrona u atomu dobijaju se sledeći izrazi:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_o \hbar^2}{me^2 Z} n^2 \tag{10.8}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o \hbar n}, \tag{10.9}$$

gde je $n = 1, 2, 3, ...$ i $Z = 1$.

Frekvencija kruženja elektrona oko jezgra je

$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n}. \tag{10.10}$$

Zamenom izraza (10.8), (10.9) u (10.10) za frekvenciju kruženja elektrona dobija se sledeći izraz:

$$\omega_n = \frac{e^4 \pi m}{2\epsilon_o^2 h^3 n^3}. \tag{10.11}$$

Frekvencija kruženja elektrona po prvoj Borovoj orbiti dobija se kada se u (10.11) uzme da je $n = 1$, pa je

$$\omega_1 = 4.1 \cdot 10^{16}\, rads^{-1},$$

a na drugoj Borovoj orbiti kada se u (10.11) uzme da je $n = 2$

$$\omega_2 = 0.51 \cdot 10^{16}\, rads^{-1}.$$

Frekvencija emitovanog fotona pri kvantnom prelazu iz energetskog stanja $n = 2$ na stanje sa $n = 1$ je

$$\nu_{2-1} = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{me^4}{8\pi^2\epsilon_o^2 h^3}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \tag{10.12}$$

gde je E_1 energija elektrona na prvoj orbiti, a E_2 njegova energija na drugoj orbiti. Zamenom brojnih vrednosti u (10.12) dobija se da je

$$\nu_{2-1} = 2.49 \cdot 10^{16}\, s^{-1}.$$

Zadatak 3
U Borovom modelu atoma vodonika elektron kruži oko jezgra po kružnoj orbiti pri čemu se nalazi u najnižem energetskom stanju. Odrediti:

a) poluprečnik elektrona prve Borove orbite r_1

b) koliko puta elektron obidje jezgro u jednoj sekundi (ν_1) kada se on nalazi na prvoj Borovoj orbiti. Masa elektrona je $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, naelektrisanje elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$ i dielektrična propustljivost vakuuma $\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12}\,C^2N^{-1}m^{-2}$.

Rešenje

a) Na osnovu izraza (10.4) i (10.5) za prvu Borovu orbitu se dobija

$$r_1 = 5.30 \cdot 10^{-11} m.$$

b) Frekvencija rotacije elektrona oko jezgra je $\omega_n = v_n/r_n$, a sa druge strane je $\omega_n = 2\pi\nu_n$, pa je

$$\frac{v_n}{r_n} = 2\pi\nu_n.$$

Za $n = 1$,

$$\nu_1 = \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{h}{4\pi^2 m r_1^2} = 6.56 \cdot 10^{15}\,s^{-1}.$$

Zadatak 4
Kako se menja orbitalni moment impulsa elektrona u atomu vodonika pri prelazu elektrona iz pobudjenog stanja u osnovno stanje ako se u tom slučaju emituje kvant čija je talasna dužina $\lambda = 97.25\,nm$? Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$ i Ridbergova konstanta $R_H = 1.1 \cdot 10^7\,m^{-1}$.

Rešenje
Odnos momenta impulsa za osnovno L_1 i n-to L_n stanje je

$$\frac{L_1}{L_n} = \frac{mv_1r_1}{mv_nr_n} = \frac{v_1r_1}{v_nr_n}. \tag{10.13}$$

Da bi se odredio odnos momenta impulsa neophodno je poznavati glavni kvantni broj n pobudjenog stanja. On se može odrediti iz izraza za ukupnu energiju u n-tom stanju

$$E = E_k + E_p, \tag{10.14}$$

gde je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_o r}, \tag{10.15}$$

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{r}. \tag{10.16}$$

Zamenom (10.15) i (10.16) u (10.14) za ukupnu energiju se dobija

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_o r}. \tag{10.17}$$

Poluprečnik orbite i brzina elektrona su

$$r = \frac{n^2h^2\epsilon_o}{\pi m e^2}, \qquad v = \frac{nh}{2\pi m r}. \tag{10.18}$$

Iz izraza (10.17) i (10.18) za ukupnu energiju se dobija

$$E = -\frac{me^4}{8\epsilon_o^2 n^2 h^2}. \tag{10.19}$$

Pošto je Ridbergova konstanta R_H jednaka

$$R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_o^2 h^3 c},$$

izraz (10.19) dobija sledeći oblik:

$$E = -\frac{R_H hc}{n^2}.$$

Prema drugom Borovom postulatu je

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_1 = R_H hc\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

odakle se za n dobija

$$n = \sqrt{\frac{R_H\lambda}{R_H\lambda - 1}} \approx 4.$$

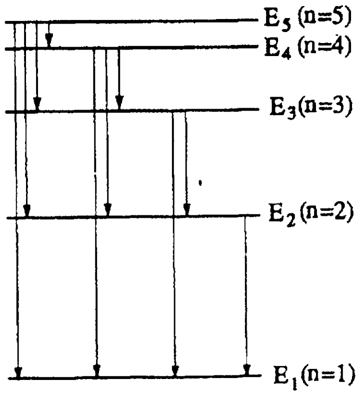
Zamenom ovog izraza kao i izraza (10.18) u (10.13) za odnos momenata impulsa dobija se sledeća vrednost:

$$L_1/L_n = 0.25.$$

Zadatak 5
Monohromatska svetlost pada na atome vodonika koji se nalaze u osnovnom kvantnom stanju. U emisionom spektru vodonika koji se dobija posle interakcije fotona sa atomima vodonika javlja se ukupno šest spektralnih linija. Odrediti odnos talasnih dužina upadnog fotona i fotona vidljive svetlosti koje emituje atom vodonika (vidljiva svetlost se nalazi u opsegu talasnih dužina od 380 do 780 nm). Da li infracrveno zračenje, koje se takodje emituje, može da izazove fotoefekat kod materijala sa izlaznim radom $A_i = 2.3\,eV$? Ridbergova konstanta je $R = 1.1 \cdot 10^7\,m^{-1}$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$ i naelektrisanje elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$.

Rešenje

Iz uslova zadatka da se javlja šest spektralnih linija, jasno je da su posle apsorpcije upadnog fotona atomi vodonika prešli u treće pobudjeno stanje ($n = 4$), kao što je prikazano na slici. Dakle, energija fotona upadne svetlosti je



$$E_u = |\Delta E| = |E_1 - E_4| = E_4 - E_1 =$$

$$= -\frac{1}{4^2}Rch - (-\frac{1}{1^2}Rch) = \frac{15}{16}Rch.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se

$$E_u = 2.04 \cdot 10^{-18}\,J = 12.79\,eV.$$

S druge strane,

$$E_u = \frac{hc}{\lambda_u} \Rightarrow \lambda_u = \frac{hc}{E_u} = 97,35\,nm.$$

11. Kvantna mehanika

11.1 Teorija

Eksperimentalna istraživanja su pokazala da svetlost poseduje i talasna i korpuskularna (čestična) svojstva. De Brolj je uveo hipotezu o univerzalnosti korpuskularno-talasnog dualizma. On je pretpostavio da tela ispoljavaju i talasna svojstva. Ovo je naročito karakteristično za mikročestice. Relacije koje povezuju korpuskularna i talasna svojstva čestica su iste kao i za fotone, tj.

$$E = \hbar\omega; \qquad \vec{K} = \hbar\vec{k},$$

gde je E energija čestice, ω kružna frekvencija, $\vec{K}$ impuls, $\vec{k}$ talasni vektor i $\hbar = h/2\pi$ (h je Plankova konstanta).

Prema de Broljevoj hipotezi, svakom telu čiji je impuls K odgovara talas talasne dužine λ, tj.

$$\lambda = \frac{h}{K} = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar}{mv}.$$

De Broljeva hipoteza važi i za makrotela, ali se njihova talasna svojstva ne mogu eksperimentalno zapaziti zbog male vrednosti talasne dužine.

Ispravnost de Broljeve hipoteze potvrdili su eksperimenti Devisona i Džermera sa difrakcijom elektrona na monokristalu nikla. De Broljevu hipotezu su takodje eksperimentalno potvrdili Tartakovski, Tomson i Rup analizom difrakcione slike koja se pojavljuje prilikom prolaza brzih elektrona (oko 50 keV) kroz metalne folije debljine 1 μm.

Fazna brzina de Broljevih talasa je

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{K} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}.$$

Pošto je $c > v$, može se zaključiti da je fazna brzina uvek veća od brzine svetlosti u vakuumu. Ovo pokazuje da fazna brzina nije povezana sa brzinom kretanja mikročestice, jer prema teoriji relativnosti, brzina tela veća od brzine svetlosti nije moguća.

Prema klasičnoj talasnoj teoriji, grupna brzina se može izraziti na sledeći način:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dK}.$$

Iz teorije relativnosti proizilazi da je ukupna energija slobodne mikročestice

$$E = \sqrt{m_o^2c^4 + K^4c^2},$$

gde je m_o masa čestice u miru i c brzina svetlosti u vakuumu. Iz gornjeg izraza proizilazi da je grupna brzina v_g jednaka brzini mikročestice v.

Uzimajući u obzir dualističku prirodu mikročestice, Hajzenberg je došao do zaključka da se mikročestici ne mogu istovremeno tačno odrediti koordinate položaja (x, y, z) i komponente impulsa (K_x, K_y, K_z) koje odgovaraju tim koordinatama. Prema Hajzenbergu, proizvodi apsolutnih grešaka tih veličina moraju da zadovolje sledeće uslove:

$$\Delta x \Delta K_x \geq \hbar,$$
$$\Delta y \Delta K_y \geq \hbar,$$
$$\Delta z \Delta K_z \geq \hbar.$$

Ove relacije poznate su pod nazivom Hajzenbergove relacije neodredjenosti za koordinate i komponente impulsa, gde Δx, Δy, Δz predstavljaju apsolutne greške merenja koordinata, a ΔK_x, ΔK_y, ΔK_z apsolutne greške merenja komponenata impulsa. Pored ovih relacija koristi se i Hajzenbergova relacija neodredjenosti za energiju i vreme, a neodredjenost tih veličina mora zadovoljiti uslov:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

gde je Δt vremenski interval u kojem čestica ima energiju $E \pm \Delta E$.

Verovatnoća nalaženja čestice u elementu zapremine dV data je relacijom:

$$dW = \mid \Psi \mid^2 dV,$$

gde je $\Psi(x, y, z, t)$ talasna funkcija, a $\mid \Psi \mid^2$ kvadrat modula talasne funkcije (kvadrat amplitude de Broljevih talasa). Veličina

$$\mid \Psi \mid^2 = \frac{dW}{dV}$$

predstavlja gustinu verovatnoće nalaženja čestice u posmatranom elementu zapremine.

Verovatnoća nalaženja mikročestice u zapremini V u trenutku t data je relacijom:

$$W = \int_V dW = \int_V \mid \Psi \mid^2 dV.$$

Uslov normiranja talasne funkcije može se izraziti u obliku

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid \Psi \mid^2 dV = 1.$$

Jednačinu za opisivanje kretanja mikročestice koja ispoljava i talasna i korpuskularna svojstva za slučaj kada je njena brzina daleko manja od brzine svetlosti dao je Šredinger. Ova jednačina se, slično Njutnovoj jednačini u mehanici i Maksvelovoj jednačini za elektromagnetna polja ne izvodi već se postulira. Opšti oblik Šredingerove jednačine je

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

gde je

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2},$$

m masa mikročestice, i imaginarna jedinica, a $U(x, y, z, t)$ potencijalna energija čestice u polju sila u kome se ona kreće.

Šredingerova jednačina za stacionarno stanje (vremenski nezavisno polje sila) može se izraziti na sledeći način:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

gde je $E - U$ kinetička energija mikročestice. Za slučaj slobodne čestice na koju polje sila ne utiče i koja se kreće duž x-ose, Šredingerova jednačina ima sledeći oblik:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0.$$

Svojstvene vrednosti energije mikročestice u potencijalnoj jami sa beskonačno visokim zidovima mogu se odrediti iz izraza:

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2},$$

dok se svojstvene vrednosti funkcije odredjuju iz izraza:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

gde je $n = 1, 2, 3, ...$ i l širina potencijalne jame.

Razlika izmedju dva energetska nivoa u potencijalnoj jami je

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1).$$

Koeficijent transmisije (transparencije) za slučaj pravougaone potencijalne barijere kada je $E < U$, dat je sledećim izrazom:

$$D \approx \exp[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}l].$$

Za potencijalnu barijeru proizvoljnog oblika koeficijent transmisije se može izraziti na sledeći način:

$$D \approx [-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U-E)}dx].$$

Šredingerova jednačina za kvantni oscilator, kada se radi o stacionarnom stanju i jednodimenzionom slučaju je

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \frac{m\omega^2x^2}{2})\psi = 0,$$

gde je ω kružna frekvencija, m masa mikročestice i x njena elongacija.

Izraz za svojstvene vrednosti energije harmonijskog oscilatora je

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar,$$

gde je $n = 0, 1, 2, ...$ Za $n = 0$, $E = \hbar/2$ i naziva se nulta energija harmonijskog oscilatora.

11.2 Zadaci

Zadatak 1

Koristeći de Broljevu hipotezu izračunati talasnu dužinu λ vodonikovog atoma na temperaturi $t = 0^oC$. Masa vodonikovog atoma je $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, univerzalna gasna konstanta $R = 8.3\,Jmol^{-1}K^{-1}$ i molarna masa vodonika $M = 1.0079\,gmol^{-1}$.

Rešenje

Prema de Broljevoj hipotezi je

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{11.1}$$

gde je v brzina atoma vodonika.

Prema kinetičkoj teoriji gasova, srednja kvadratna brzina molekula gasa je data sledećim izrazom:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{11.2}$$

Zamenom (11.2) u (11.1) dobija se

$$\lambda = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{M}{3RT}} = 0.16\,nm.$$

Zadatak 2

Kolika je de Broljeva talasna dužina λ molekula žive ako je njegova kinetička energija $E_k = 1\,MeV$? Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, molarna masa žive $M = 200.59\,gmol^{-1}$ i Avogadrov broj $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$.

Rešenje

Talasna dužina po de Brolju data je relacijom (11.1). Kako je $E_k = mv^2/2$, odnosno $v = \sqrt{2E_k/m}$, to se zamenom u (11.1) dobija

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}. \tag{11.3}$$

Masa atoma žive je $m = M/N_a = 3.33 \cdot 10^{-25}\,kg$ pa se zamenom u (11.3) dobija $\lambda = 2.03 \cdot 10^{-15}\,m$.

Zadatak 3

Snop elektrona pada na jednu stranu monokristala pod uglom $\theta = 30^o$. Odbijeni elektroni se posmatraju pod uglom koji je jednak upadnom uglu. Konstanta kristalne rešetke je $d = 0.2\,nm$. Odrediti vrednost ubrzavajućeg potencijala U pri kojoj nastaje prvi difrakcioni maksimum elektrona. Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, masa elektrona $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$ i naelektrisanje elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$.

Rešenje

Vulf-Bragova formula za difrakciju elektrona ima oblik:

$$2d\sin\theta = n\lambda, \tag{11.4}$$

gde je $n = 1, 2, 3, ...$, a λ talasna dužina elektrona. Talasna dužina, prema de Brolju, je

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \tag{11.5}$$

Pošto je kinetička energija elektrona

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = eU \Rightarrow mv = \sqrt{2meU}, \tag{11.6}$$

to se na osnovu (11.5) i (11.6) za talasnu dužinu dobija sledeći izraz:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \tag{11.7}$$

Iz (11.4) i (11.7), uzimajući da je $n = 1$, dobija se

$$U = \frac{h^2}{8d^2 me \sin^2\theta} = 37.6\,V.$$

Zadatak 4

Odrediti zavisnost izmedju de Broljeve talasne dužine λ relativističke čestice i ubrzavajućeg potencijala U. Masa čestice u miru je m_o, a naelektrisanje e.

Rešenje

Po de Brolju talasna dužina čestice je data sledećom relacijom:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{11.8}$$

gde je m masa čestice pri koja se kreće brzinom v. Prema Ajnštajnovoj relaciji masa relativističke čestice je

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{11.9}$$

gde je m_o masa čestice u miru, a c brzina svetlosti.

Zamenom (11.9) u (11.8) dobija se

$$\lambda = \frac{h}{m_o v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{11.10}$$

Po teoriji relativnosti kinetička energija čestica je

$$E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_o c^2 = eU. \tag{11.11}$$

Iz ove jednačine nalazi se brzina v čestice

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{eU}{m_o c^2} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \left[\frac{1}{1 + eU/(m_o c^2)}\right]^2}.$$

Zamenom ovog izraza za brzinu u izraz (11.10) dobija se

$$\lambda = \frac{h}{m_o c\sqrt{1 - \left[\frac{1}{1+eU/(m_o c^2)}\right]^2}} \cdot \frac{1}{(1 + eU/(m_o c^2)} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{m_o^2 c^2 \left[1 + eU/(m_o c^2)\right]^2 \left[1 - (\frac{1}{1+eU/(m_o c^2)})^2\right]}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{m_o^2 c^2 \left[(1 + eU/(m_o c^2)^2 - 1\right]}} = \frac{h}{\sqrt{m_o^2 c^2 \left[1 + 2eU/(m_o c^2) + (eU/(m_o c^2))^2 - 1\right]}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{m_o^2c^2\,[2eU/(m_oc^2) + (eU/(m_oc^2))^2]}} = \frac{h}{\sqrt{m_o 2eU + e^2U^2/c^2}},$$

ili

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_oeU\,[1 + eU/(2m_oc^2)]}}.$$

Zadatak 5
Kojom minimalnom vrednošću potencijala treba ubrzati elektrone da bi se dobilo zakočno rendgensko zračenje talasne dužine $\lambda_{min} = 0.03\,nm$? Kolika će biti brzina tih elektrona prilikom udara u antikatodu? Kolika će biti de Broljeva talasna dužina tih elektrona? Plankova konstanta je $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$, brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$, naelektrisanje elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$ i masa elektrona u miru $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$.

Rešenje

Spektralna raspodela zakočnog rendgenskog zračenja se karakteriše minimalnom talasnom dužinom λ_{min}, odnosno maksimalnom frekvencijom ν_{max} fotona koji nastaje kada elektron izrači svoju kinetičku energiju E_k. Dakle, foton rendgenskog zračenja ne može imati energiju veću od energije elektrona koji ga izaziva, tj.

$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}. \tag{11.12}$$

S druge strane, kinetička energija koju dobije elektron prilikom ubrzavanja potencijalnom razlikom U je

$$E_k = eU. \tag{11.13}$$

Iz (11.12) i (11.13), za potencijalnu razliku se dobija

$$U = \frac{hc}{e\lambda_{min}} = 41,4\,kV.$$

Po relativističkoj teoriji, masa elektrona je

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

dok je kinetička energija

$$E_k = E - E_o, \tag{11.14}$$

gde je E ukupna energija elektrona, a E_o njegova energija mirovanja. S druge strane je

$$E_k = m_oc^2(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1) = eU,$$

odakle je

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{[1 + eU/(m_oc^2)]^2 - 1}{[1 + eU/(m_oc^2)]^2}} \Rightarrow v = 1,14.10^8\,ms^{-1}.$$

De Broljeva talasna dužina je

$$\lambda = \frac{h}{K}. \tag{11.15}$$

Nepoznata vrednost impulsa p može se izračunati iz izraza za ukupnu energiju na sledeći način:

$$E^2 = E_o^2 + K^2c^2, \tag{11.16}$$

gde je $E_o = m_oc^2$ energija elektrona u stanju mirovanja.
Na osnovu (11.14) i (11.16) dobija se

$$K^2c^2 = E_k^2 + 2E_oE_k = (eU)^2 + 2E_oeU = (eU)^2 + 2m_oc^2eU,$$

ili

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{(eU)^2 + 2m_oc^2eU}. \tag{11.17}$$

Zamenom (11.17) u (11.15), za talasnu dužinu se dobija

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(eU)^2 + 2m_oc^2eU}} = 5.9 \cdot 10^{-3}\,nm.$$

Zadatak 6
Kolika je talasna dužina λ_e brzih elektrona koji u rendgenskoj cevi izazivaju zračenje minimalne talasne dužine $\lambda = 0.03\,nm$? Masa elektrona u miru je $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$ i brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Prema Ajnštajnovoj teoriji ukupna energija elektrona koji se ubrzavaju izmedju elektroda rendgenske cevi je

$$mc^2 = m_o c^2 + E_k,$$

gde je

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v_2/c^2}}$$

masa elektrona u kretanju, dok je

$$E_k = mc^2 - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_o c^2 \qquad (11.18)$$

kinetička energija elektrona.

Energija rendgenskog zračenja $h\nu$ mora biti manja ili jednaka kinetičkoj energiji elektrona koji dovode do rendgenskog zračenja, tj.

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = E_k. \qquad (11.19)$$

Iz izraza (11.18) za brzinu elektrona se dobija sledeći izraz:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{[1 + E_k/(m_o c^2)]^2}}. \qquad (11.20)$$

Zamenom izraza (11.19) u (11.20) dobija se

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{[1 + h/(\lambda m_o c)]^2}}. \qquad (11.21)$$

Talasna dužina elektrona se dobija iz de Broljeve relacije

$$\lambda_e = \frac{h}{mv} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o v}. \qquad (11.22)$$

Zamenom izraza (11.21) u (11.22) dobija se

$$\lambda_e = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o c\sqrt{1 - \frac{1}{[1 + h/(\lambda m_o c)]^2}}} = 0.59 \cdot 10^{-2}\, nm.$$

Zadatak 7

Izračunati de Broljevu talasnu dužinu λ_{db}:

a) elektrona, neposredno po emisiji sa katode fotoćelije načinjene od materijala čija je granična talasna dužina fotoefekta $\lambda_1 = 550\, nm$, kada se ona osvetli zračenjem talasne dužine $\lambda = 300\, nm$;

b) elektrona, neposredno pre udara u anodu rendgenske cevi iz koje se dobijaju rendgenski zraci kratkotalasne granice kontinualnog spektra $\lambda_2 = 0,02\, nm$.

Masa elektrona u miru je $m_o = 9.1 \cdot 10^{-31}\, kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\, Js$ i brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\, ms^{-1}$.

Rešenje

a) Za slučaj granične frekvencije izraz za fotoelektrični efekat je

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A, \qquad (11.23)$$

gde je A izlazni rad materijala katode.

Kada se katoda ozrači zračenjem talasne dužine λ izraz, za fotoefekat je

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{m_o v^2}{2}. \qquad (11.24)$$

Iz (11.23) i (11.24) dobija se da je

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_o}(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1})} = 8.13 \cdot 10^5\, ms^{-1}.$$

Pošto je $v \ll c$, $m = m_o$ to je

$$\lambda_{db} = \frac{h}{m_o v} = 0,9\, nm.$$

b) Pošto energija rendgenskog zračenja mora biti manja ili jednaka kinetičkoj energiji E_k ubrzanog elektrona, to je

$$\frac{hc}{\lambda_2} = eU = E_k = 62.06\, keV.$$

S obzirom da se radi o veoma brzom elektronu, moraju se primeniti relativistički izrazi za kinetičku energiju i masu. Kako je

$$E_k = mc^2 - m_o c^2 \qquad (11.25)$$

i

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{11.26}$$

to se iz (11.25) i (11.26) za brzinu dobija:

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{[1+E_k/(m_oc^2)]^2}}=1.36\cdot 10^8\,ms^{-1}, \tag{11.27}$$

a de Broljeva talasna dužina je

$$\lambda_{db}=\frac{h}{mv}=\frac{h}{m_ov}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{11.28}$$

Iz (11.27) i (11.28) dobija se da je

$$\lambda_{db}=\frac{h}{\sqrt{2m_oE_k\left[1+E_k/(2m_oc^2)\right]}}. \tag{11.29}$$

Pošto je $E_k=hc/\lambda_2$, to se zamenom u (11.29) dobija

$$\lambda_{db}=\frac{h}{\sqrt{2m_ohc/\lambda_2\left[1+hc/(2m_oc^2\lambda_2)\right]}}=4.78\cdot 10^{-12}\,m. \tag{11.30}$$

Zadatak 8

Odrediti talasnu dužinu relativističkog protona, čija masa u miru iznosi $m_{po}=1.67\cdot 10^{-27}\,kg$ ako je njegova kinetička energija $E_k=5\,MeV$. Plankova konstanta je $h=6.62\cdot 10^{-34}\,Js$, a brzina svetlosti $c=3\cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Da bi se odredila talasna dužina relativističkog protona, polazi se od izraza

$$\lambda=\frac{h}{m_p}, \tag{11.31}$$

gde je m_p masa protona čija je brzina v. Pošto je prema Ajnštajnovoj relaciji

$$m_p=\frac{m_{po}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{11.32}$$

zamenom u (11.31) dobija se

$$\lambda=\frac{h\sqrt{1-v^2/c^2}}{m_{po}v}. \tag{11.33}$$

Da bi se odredila brzina v, treba poći od izraza za ukupnu energiju protona

$$m_pc^2=m_{po}c^2+E_k. \tag{11.34}$$

Zamenom izraza (11.32) za m_p u izraz (11.34) dobija se

$$\frac{m_{po}c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=m_{po}c^2+E_k,$$

ili

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{[1+E_k/m_{po}c^2)]^2}}=3.08\cdot 10^7\,ms^{-1}. \tag{11.35}$$

Zamenom (11.35) u (11.33), za talasnu dužinu se dobija

$$\lambda=1.28\cdot 10^{-14}\,m.$$

Zadatak 9

Odrediti talasnu dužinu λ protona čija kinetička energija E_k čini 20% njegove ukupne energije E. Masa mirovanja protona je $m_{po}=1.67\cdot 10^{-27}\,kg$, Plankova konstanta $h=6.62\cdot 10^{-34}\,Js$ i brzina svetlosti $c=3\cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Veza izmedju talsne dužine λ i impulsa protona p data je de Broljevom relacijom

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m_Kv}, \tag{11.36}$$

gde je m_p masa protona koji se kreće brzinom v. Veza izmedju mase protona u kretanju i mase protona u miru je

$$m_p=\frac{m_{po}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{11.37}$$

Zamenom (11.37) u (11.36) dobija se

$$\lambda=\frac{h\sqrt{1-v^2/c^2}}{m_{po}v}. \tag{11.38}$$

Ukupna energija je

$$E = E_k + E_o, \qquad (11.39)$$

gde je $E_o = m_{po}c^2$ energija mirovanja protona. Iz uslova zadatka

$$E_k = 0,2E \qquad (11.40)$$

i izraza (11.39) i (11.40), proizilazi da je

$$E_k = \frac{E_o}{4} = \frac{m_{po}c^2}{4}.$$

Pošto je $E = m_p c^2$, to se izraz (11.39) može napisati u sledećem obliku:

$$E = E_k + E_o \Rightarrow m_p c^2 = E_k + E_o = \frac{E_o}{4} + E_o = \frac{5E_o}{4}. \qquad (11.41)$$

Zamenom m_p iz izraza (11.37) u (11.41) dobija se

$$\frac{m_{po}c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{5E_o}{4}. \qquad (11.42)$$

Pošto je $m_{po}c^2 = E_o$, iz izraza (11.42) se dobija

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{4}{5}, \qquad (11.43)$$

odakle se za brzinu v dobija

$$v = 1.8 \cdot 10^8 \, ms^{-1}. \qquad (11.44)$$

Zamenom (11.44) u (11.38) i uvrštavanjem brojnih vrednosti za veličine, dobija se da je talasna dužina

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_{po}v} = 1.76 \cdot 10^{-15} \, m.$$

Ovaj zadatak se može rešiti na jednostavniji način. Ako je poznata veza izmedju impulsa i energije po relativističkoj teoriji, tj.

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_o^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(E - E_o)(E + E_o)} = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k + 2E_o)}, \qquad (11.45)$$

pošto je

$$E = E_o + E_k \Rightarrow \frac{E_k}{0.2} = E_o + E_k \Rightarrow E_k = \frac{E_o}{4}, \qquad (11.46)$$

to se zamenom (11.46) u (11.45) dobija

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E_o}{4}\left(\frac{E_o}{4} + 2E_o\right)} = \frac{1}{4c}\sqrt{9E_o^2} = \frac{3E_o}{4c}. \qquad (11.47)$$

Zamenom (11.47) u de Brpljevu relaciju za talasnu dužinu protona dobija se

$$\lambda = \frac{4ch}{3E_o} = \frac{4h}{3m_{po}c} = 1.76 \cdot 10^{-15} \, m.$$

Zadatak 10

Odrediti masu, impuls, talasnu dužinu i kinetičku energiju neutrona čija kinetička energija čini 1% ukupne energije. Masa mirovanja neutrona je $m_{no} = 1.67 \cdot 10^{-27} \, kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \, Js$ i brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8 \, ms^{-1}$.

Rešenje

Ukupna energija neutrona E jednaka je zbiru njegove energije u miru E_o i kinetičke energije E_k, tj.

$$E = E_o + E_k. \qquad (11.48)$$

Iz uslova zadatka je $E_k = 0.01E$, pa se izraz (11.48) može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{E_k}{0.01} - E_k = E_o,$$

odnosno

$$E_k = \frac{0.01E_o}{0.99}. \qquad (11.49)$$

Pošto je $E_o = m_{no}c^2$, to se zamenom u (11.49) dobija

$$E_k = \frac{0.01 m_{no}c^2}{0.99} = 1.52 \cdot 10^{-12} \, J.$$

Impuls neutrona se dobija iz izraza

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_o^2} = 7.14 \cdot 10^{-20} \, kgms^{-1}.$$

Talasna dužina se dobija iz de Broljeve relacije

$$\lambda = \frac{h}{K} = 9.27 \cdot 10^{-15}\, m.$$

Brzina neutrona se može odrediti iz izraza

$$m_n = \frac{m_{no}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

odnosno

$$v = \frac{cp/m_{no}}{\sqrt{c^2 + (K/m_{no})^2}} = 0.42 \cdot 10^8\, ms^{-1}.$$

Pošto je poznata brzina v, masa neutrona u kretanju je

$$m_n = \frac{m_{no}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1.69 \cdot 10^{-27}\, kg.$$

Zadatak 11

Talasni paket obrazuju dva ravna monohromatska talasa:

$$y_1(x,t) = \cos(1002t - 3x),$$
$$y_2(x,t) = \cos(1003t - 3.01x).$$

Odrediti faznu brzinu svakog talasa i grupnu brzinu talasnog paketa.

Rešenje

Jednačina talasa se može napisati u sledećem obliku:

$$y(x,t) = \cos(\omega t - kx),$$

gde je ω kružna frekvencija, a k talasni broj. Prema tome, za prvi talas je $\omega_1 = 1002\, s^{-1}$, a $k_1 = 3\, m^{-1}$, pa je fazna brzina

$$v_{f1} = \frac{\omega_1}{k_1} = 334\, ms^{-1}.$$

Za drugi talas $\omega_2 = 1003\, s^{-1}$, a $k_2 = 3.01\, m^{-1}$, pa je fazna brzina

$$v_{f2} = \frac{\omega_2}{k_2} = 333.2\, ms^{-1}.$$

Jednačina talasnog paketa je

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$
$$= 2\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}x).$$

Kod talasnog paketa se pretpostavlja da se oba talasa prostiru duž x-ose i da se njihove kružne frekvencije ω_1 i ω_2, a isto tako i apsolutne vrednosti talasnih brojeva k_1 i k_2 medjusobno veoma malo razlikuju: $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \to 0$ i $k_2 - k_1 = \Delta k \to 0$. Tada se može napisati

$$y(x,t) = 2\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)\cos(\omega_1 t - k_1 x).$$

Razlika $\omega_1 t - k_1 x$ u ovom izrazu predstavlja fazu talasa, čija je kružna frekvencija ω_1, a talasni broj k_1, dok prvi činilac

$$2\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)$$

predstavlja sporo ($\Delta\omega \to 0$, $\Delta k \to 0$) i periodično promenljivu amplitudu. Drugim rečima, talas $y(x,t)$ prikazan gornjom jednačinom posmatra se kao talas učestanosti ω_1 i talasnog broja k_1, ali sa modulisanom amplitudom.

Da bi se našla brzina pomeranja grupe, odnosno brzina pomeranja odredjene amplitude, postupa se na sledeći način: izabere se konstantna vrednost amplitude, tako da je

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = const.$$

i traži se izvod x po vremenu t, tj.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

U graničnom slučaju kada $\Delta k \to 0$, grupna brzina je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

U našem slučaju je

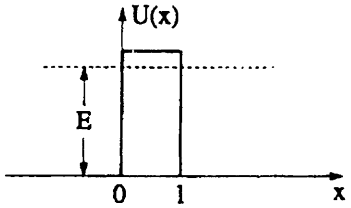
$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = 100\, ms^{-1}.$$

Zadatak 12

Elektron sa energijom $E = 4.9\,eV$ kreće se u pozitivnom smeru x-ose. Visina pravougaone potencijalne barijere je $U = 5\,eV$. Za koju je vrednost širine potencijalne barijere l verovatnoća W prolaženja elektrona kroz nju jednaka $W = 0.2$? Masa elektrona je $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$, Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$.

Rešenje

Barijera pravougaonog oblika prikazana je na slici. Verovatnoća da elektron prodje kroz ovu potencijalnu barijeru širine l data je izrazom



$$W \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}l\right].$$

Iz gornjeg izraza se nalazi

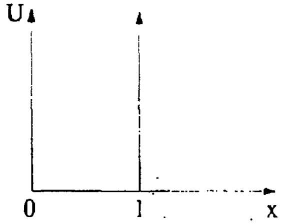
$$l = \frac{\hbar \ln(1/W)}{2\sqrt{2m(U-E)}} \approx 0.3\,nm.$$

Zadatak 13

Elektron se nalazi u beskonačno dubokoj jednodimenzionalnoj potencijalnoj jami širine $l = 0.5\,nm$. Odrediti moguće vrednosti energije ovog elektrona kao i razliku energije izmedju dva uzastopna moguća energetska stanja. Masa elektrona je $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$, a Plankova konstanta $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,Js$.

Rešenje

Na slici je prikazana jednodimenzionalna potencijalna jama sa beskonačno visokim zidovima širine l. U ovoj jami elektron se kreće slobodno bez mogućnosti da je napusti (potencijalna energija u jami je jednaka nuli). Šredingerova jednačina za ovaj slučaj je



$$\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0,$$

čije je rešenje

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx, \tag{11.50}$$

gde je

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

E predstavlja moguće vrednosti energije, A i B su konstante. Na granicama jame, za talasnu funkciju važi:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Da bi $\psi(0)$ bilo jednako nuli, u izrazu (11.50) B mora da bude jednako nuli. Tada je

$$\psi(x) = A\sin kx.$$

Uslov $\psi(l) = A\sin kl = 0$ je ispunjen samo kada je $kl = n\pi$, gde je $n = 1, 2.3, ...$ ceo broj, pa je

$$k = \frac{n\pi}{l} = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar}},$$

odnosno energija n-tog stanja

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2} = n^2.2,41 \cdot 10^{-19}\,J.$$

Razlika izmedju dva uzastopna moguća energetska stanja je

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (2n+1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} = 2,41 \cdot 10^{-19}\,J.$$

Zadatak 14

Pri kojoj širini l potencijalne jame razlika dva diskretna energetska nivoa postaje jednaka energiji toplotnog kretanja čestice temperature T?

Rešenje

Energija mikročestice u jami za n-ti nivo je

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ml^2} = \frac{h^2 n^2}{8ml^2},$$

a za $n+1$ nivo energija mikročestice je

$$E_{n+1} = \frac{h^2(n+1)^2}{8ml^2}.$$

Razlika energetskih nivoa je

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8ml^2}\left[(n+1)^2 - n^2\right] = \frac{h^2}{8ml^2}(2n+1). \qquad (11.51)$$

Iz uslova zadatka je

$$\Delta E = \frac{3}{2}kT, \qquad (11.52)$$

gde je k Bolcmanova konstanta.

Iz (11.51) i (11.52) za širinu potencijalne jame se dobija sledeći izraz:

$$l = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{3kTm}}.$$

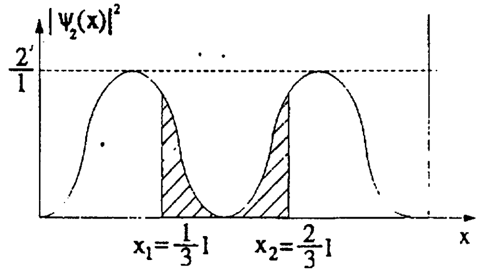
Zadatak 15

Elektron se nalazi u jednodimenzionalnoj beskonačno dubokoj potencijalnoj jami, pravougaonog oblika širine l. Odrediti verovatnoću W da elektron koji se nalazi u pobudjenom stanju (n=2) bude u drugoj trećini jame.

Rešenje

Verovatnoća da se čestica nadje u oblasti $x_1 < x < x_2$ odredjuje se izrazom

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\,\psi_n(x)\,|^2\, dx, \qquad (11.53)$$



gde je $|\,\psi_n(x)\,|^2 = \psi_n(x)\psi_n^*(x)$.

Talasna funkcija koja opisuje stanje elektrona u potencijalnoj jami je sledećeg oblika:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Pobudjenom $n=2$ stanju odgovara talasna funkcija

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x.$$

U tom slučaju izraz (11.53) dobija sledeći oblik:

$$W = \frac{2}{l}\int_{x_1}^{x_2}\sin^2\frac{2\pi}{l}x\,dx. \qquad (11.54)$$

Iz uslova zadatka je $x_1 = l/3$ i $x_2 = 2l/3$. Uvodjenjem smene

$$\sin^2\frac{2\pi}{l} = \frac{1}{2}(1-\cos\frac{4\pi}{l}x)$$

izraz (11.54) postaje:

$$W = \frac{1}{l}\left(\int_{l/3}^{2l/3}dx - \int_{l/3}^{2l/3}\cos\frac{4\pi}{l}x\,dx\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - sin\frac{4\pi}{3}\right). \qquad (11.55)$$

Pošto je

$$\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}; \quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3},$$

zamenom u (11.55) za verovatnoću se dobija

$$W = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}2\sin\frac{\pi}{3} = 0,195.$$

Zadatak 16

Čestica se nalazi u trodimenzionalnoj potencijalnoj jami sa apsolutno nepropustljivim zidovima, čije su dimenzije a_1, a_2 i a_3. Odrediti moguće vrednosti energije date čestice.

Rešenje

Šredingerova jednačina u ovom slučaju je

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi = 0,$$

gde je

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

pa se Šredingerova jednačina može napisati u obliku:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi = 0. \tag{11.56}$$

Prvi granični uslov je

$$\psi = 0 \quad za \quad x = 0, \quad y = 0 \quad i \quad z = 0.$$

Prema tome, rešenje Šredingerove jednačine (11.56) može se napisati u obliku

$$\psi = A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z. \tag{11.57}$$

Drugi izvod izraza (11.57) po x, y, z daje

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -Ak_1^2 \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -Ak_2^2 \sin k_2 y \sin k_1 x \sin k_3 z,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -Ak_3^2 \sin k_3 z \sin k_1 x \sin k_2 y.$$

Zamenom ovih izvoda u (11.56) dobija se sledeća jednačina:

$$-(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)(A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E(A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z) = 0,$$

odakle je

$$E = \frac{h^2}{8\pi^2 m}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2).$$

Drugi granični uslov

$$x = a_1, \quad \psi = 0, \quad \sin k_1 x_1 \sin k_2 y \sin k_3 z = 0; \quad k_1 a_1 = n_1\pi \Rightarrow k_1 = \frac{n_1\pi}{a_1}; \quad n_1 = 1, 2, 3, ...$$

$$y = a_2, \quad \psi = 0, \quad k_2 a_2 = n_2\pi \Rightarrow k_2 = \frac{n_2\pi}{a_2} \quad n_2 = 1, 2, 3, ...$$

$$z = a_3, \quad \psi = 0, \quad k_3 = \frac{n_3\pi}{a_3}, \quad n_3 = 1, 2, 3, ...$$

$$E = \frac{h^2}{8\pi m}\left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}\right)$$

12. Nuklearna fizika

12.1 Teorija

Jezgro atoma se sastoji od protona i neutrona koji se nazivaju nukleoni. Broj protona u jezgru Z predstavlja broj naelektrisanih čestica ili, kad se govori o atomu, atomski broj. Naelektrisanje jezgra se može izraziti na sledeći način:

$$q_j = Ze^+,$$

gde je e^+ količina pozitivnog naelektrisanja, brojno jednaka količini naelektrisanja elektrona.

Broj nukleona u jezgru A naziva se maseni ili nuklearni broj. Ako se sa N označi broj neutrona u jezgru, tada se maseni broj može izraziti na sledeći način:

$$A = Z + N.$$

Masa jezgra je približno jednaka masi atoma i obično se izražava u atomskim jedinicama mase u ($u = 1.66 \cdot 10^{-27}\, kg$).

Za poluprečnik jezgra r_o uzima se ono rastojanje od njegovog centra na kome se gustina smanji za polovinu njene vrednosti u centru jezgra. Poluprečnik bilo kog jezgra može se izračunati po sledećoj empirijskoj formuli:

$$r_o = (1.45 - 1.50) \cdot 10^{-15} A^{1/3}\, m,$$

dok je njegova zapremina

$$V = \frac{4}{3} r_o^3 \pi \approx A.$$

Energija E koja se oslobadja pri obrazovanju jezgra, odnosno energija koja povezuje nukleone u jezgro, naziva se energija veze. Za jezgro koje se sastoji od Z protona i $A - Z$ neutrona energija veze je

$$E = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_j]c^2 = \Delta mc^2,$$

gde su m_p, m_n i m_j odgovarajuće mase protona, neutrona i jezgra, dok je

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_j$$

defekt mase jezgra. Za vrednost ove veličine se smanjuje masa svih nukleona kada se od njih obrazuje jezgro.

Srednja energija veze po nukleonu predstavlja odnos energije veze E i masenog broja A, tj.

$$E_V = \frac{E}{A}.$$

Broj radioaktivnih jezgara dN koji se raspadne za vremenski interval dt je

$$dN = -\lambda N dt,$$

gde je N broj radioaktivnih jezgara a λ konstanta radioaktivnog raspada. Znak minus označava da se broj radioaktivnih jezgara u toku vremena smanjuje.

Broj neraspadnutih jezgara N posle vremena t je dat sledećim izrazom:

$$N = N_o \exp(-\lambda t),$$

gde je N_o početni broj radioaktivnih jezgara (broj jezgara u trenutku $t = 0$). Ovaj izraz je poznat pod nazivom zakon radioaktivnog raspada.

Broj jezgara koji se raspadne za vreme t je

$$\Delta N = N_o - N = N_o[1 - \exp(-\lambda t)].$$

Vreme T za koje se raspadne polovina početnog broja jezgara naziva se vreme ili period poluraspada:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}.$$

Aktivnost A radioaktivnog izvora predstavlja verovatnoću raspada N atoma i izražava se na sledeći način:

$$A = \lambda N = -\frac{dN}{dt}.$$

Aktivnost se definiše i kao brzina raspada nekog radioaktivnog izvora.

Aktivnost A_t nekog radioaktivnog izvora posle vremena t može se izraziti na sledeći način:

$$A_t = A_o \exp(-\lambda t),$$

gde je A_o početna aktivnost radioaktivnog izvora.

Kada su jezgra potomka radioaktivna i pri tome se raspadaju istom brzinom sa kojom se raspadaju jezgra polaznog elementa (pretka), dolazi do pojave radioaktivne ravnoteže. Radioaktivna ravnoteža se može izraziti na sledeći način:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2,$$

gde su λ_1 i N_1 konstanta radioaktivnog raspada i broj jezgara pretka, redom, a λ_2 i N_2 konstanta radioaktivnog raspada i broj jezgara potomka, redom.

α-raspad se odvija po sledećoj šemi:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He,$$

gde je ${}^{A}_{Z}X$ jezgro predak, ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ jezgro potomak i ${}^{4}_{2}He$, α-čestica.

β^--raspad se odvija po sledećoj šemi:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + \beta^- + {}^{o}_{o}\bar{\nu},$$

gde je ${}^{o}_{o}\bar{\nu}$ antineutrino.

β^+-raspad se odvija po sledećoj šemi:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \beta^+ + {}^{o}_{o}\nu,$$

gde je ${}^{o}_{o}\nu$ neutrino.

Elektronski zahvat se može predstaviti na sledeći način:

$${}^{A}_{Z}X + e^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{o}_{o}\nu.$$

Apsorpcija γ-zračenja u sredini kroz koju to zračenje prolazi vrši se po sledećem zakonu:

$$I = I_o \exp(-\mu d),$$

gde je I_o intenzitet γ-zračenja iz datog izvora pre prolaska kroz materijal, I njegov intenzitet posle prolaska kroz materijal debljine d i μ linearni koeficijent apsorpcije.

Nuklearne reakcije se skraćeno označavaju na sledeći način:

$$X(\alpha, p)Y,$$

gde je X jezgro - meta, a Y novonastalo jezgro, α je čestica - projektil, p čestica koja napušta složeno jezgro. Proces nuklearne fisije odigrava se po sledećoj šemi:

$$^{A}_{Z}X + ^{1}_{o}n \rightarrow ^{A_1}_{Z_1}Y_1 + ^{A_2}_{Z_2}Y_2 + k^{1}_{o}n + Q,$$

gde su Y_1 i Y_2 fragmenti fisije (novonastala jezgra), Z_1 i Z_2 atomski brojevi novonastalih jezgara, A_1 i A_2 maseni brojevi fragmenata dok je maseni broj A jednak $A = A_1 + A_2 + Q/c^2$, gde je Q količina oslobodjene energije u reakciji, a c brzina prostiranja svetlosti u vakuumu.

12.2 Zadaci

Zadatak 1

Odrediti konstantu radioaktivnog raspada λ i vreme poluraspada T jezgara nekog radioaktivnog elementa koja tokom raspada emituju β-čestice, pri čemu se njihov broj smanji za 10% od početnog broja za vreme $t = 1\,h$. Produkt raspada (novonastala jezgra) smatrati neradioaktivnim.

Rešenje

Broj raspadnutih jezgara ΔN posle vremena t dat je sledećim izrazom:

$$\Delta N = N_o - N = N_o[1 - \exp(-\lambda t)],$$

gde je $\Delta N/N_o = 0.1$. To znači da je

$$\exp(-\lambda t) = 0,9 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0.9}{t} = 2.91 \cdot 10^{-5}\,s^{-1},$$

pa je vreme poluraspada

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 2.4 \cdot 10^4\,s.$$

Zadatak 2

Verovatnoća raspada radioaktivnog izotopa broma $^{78}_{35}Br$ u vremenskom intervalu $\Delta t = 1\,min$ je $P = 0.1042$. Koliko je vreme poluraspada ovog izotopa?

Rešenje

Neka je N_o početni broj radioaktivnih jezgara izotopa $^{78}_{35}Br$, N njihov broj posle vremena Δt. Tada je

$$N = N_o \exp(-\lambda \Delta t),$$

gde je λ konstanta radioaktivnog raspada.

Broj raspadnutih jezgara može se izraziti na sledeći način:

$$\Delta N = N_o - N = N_o - N_o \exp(-\lambda \Delta t). \tag{12.1}$$

Verovatnoća raspada jednaka je odnosu broja raspadnutih jezgara posle vremena Δt i početnog broja jezgara

$$P = \frac{\Delta N}{N_o}. \tag{12.2}$$

Zamenom (12.1) u (12.2) dobija se

$$P = 1 - \exp(-\lambda \Delta t), \tag{12.3}$$

odakle je

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - P)}{\Delta t}. \tag{12.4}$$

Pošto je

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{12.5}$$

Zamenom (12.5) u (12.4) dobija se:

$$T = \frac{(\ln 2)\Delta t}{-\ln(1 - P)} = 6.3\,min.$$

Zadatak 3

Za jednu godinu početni broj jezgara nekog radioaktivnog elementa smanji se tri puta. Koliko puta će se smanjiti za dve godine?

Rešenje

Ako se sa N_1 označi broj neraspadnutih jezgara posle $t_1 = 1\,godina$, sa N_2 broj neraspadnutih jezgara posle $t_2 = 2\,godine$, a sa N_o početni broj jezgara, onda se na osnovu zakona radioaktivnog raspada za ova dva vremena može napisati

$$N_1 = N_o \exp(-\lambda t_1), \quad N_2 = N_o \exp(-\lambda t_2) = N_o \exp(-2\lambda t_1). \tag{12.6}$$

Iz uslova zadatka proizilazi da je $t_2 = 2t_1$ i $N_1 = N_o/3$, pa se zamenom u (12.6) dobija

$$\frac{N_o}{3} = N_o \exp(-\lambda t_1) \Rightarrow 3 = \exp(\lambda t_1),$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp(\lambda t_1) = 3 \Rightarrow \frac{N_o}{3N_2} = 3 \Rightarrow N_2 = \frac{N_o}{9}.$$

Dakle, za dve godine broj radioaktivnih jezgara smanji se 9 puta u odnosu na početni broj.

Zadatak 4

Period poluraspada radioaktivnog izotopa argona $^{41}_{18}\mathrm{Ar}$ je $T = 110\,min$. Odrediti vreme t za koje se raspadne 75% početnog broja ovih jezgara.

Rešenje

Vreme t za koje se raspadne 75% početnog broja jezgara $^{41}_{18}\mathrm{Ar}$ može se odrediti ako se podje od zakona radioaktivnog raspada

$$N = N_o \exp(-\lambda t), \tag{12.7}$$

gde je N_o početni broj radioaktivnih jezgara, N broj neraspadnutih jezgara posle vremena t i λ konstanta radioaktivnog raspada.

Broj raspadnutih jezgara posle vremena t je $\Delta N = N_o - N$, pa se zamenom N iz (12.7) dobija

$$\Delta N = N_o - N = N_o - N_o \exp(-\lambda t) = N_o[1 - \exp(-\lambda t)]. \tag{12.8}$$

Iz uslova zadatka proizilazi da je $\Delta N = 0.75 N_o$, što zamena u (12.8) daje

$$0.75 N_o = N_o[1 - \exp(-\lambda t)] \Rightarrow \exp(-\lambda t) = 0.25. \tag{12.9}$$

Znajući da je $\lambda = \ln 2/T$, to se zamenom u (12.9) i sredjivanjem izraza za vreme t dobija:

$$t = 2T = 220\,min.$$

Zadatak 5

Analizom je ustanovljeno da u nekom uranovom mineralu na svakih $m_1 = 3.8\,g$ urana ima $m_2 = 8\,mg$ radiogenog olova (olovo koje je nastalo radioaktivnim raspadom elementa uranovog niza). Izračunati kolika bi mogla da bude starost ovog minerala pod pretpostavkom da od momenta stvaranja pa do trenutka analize radioaktivni elementi, potomci urana, nisu migrirali iz minerala. Molarna masa urana je $M_1 = 238\,gmol^{-1}$, a olova $M_2 = 206\,gmol^{-1}$. Vreme poluraspada urana je $T = 4.5 \cdot 10^9\,godina$.

Rešenje

Broj raspadnutih atoma urana N_r (broj atoma radiogenog olova) može se izraziti na sledeći način:

$$N_r = N_o - N = N_o - N_o \exp(-\lambda t) = N_o[1 - \exp(-\lambda t)], \tag{12.10}$$

gde je N_o početni broj atoma urana, N broj neraspadnutih atoma urana posle vremena t i λ_1 konstanta radioaktivnog raspada. Pošto je

$$N_r = \frac{m_2}{M_2} N_a, \qquad N_o = \frac{m_1}{M_1} N_a, \tag{12.11}$$

gde je N_a Avogadrov broj, zamenom (12.11) u (12.10) dobija se

$$\frac{m_2 M_1}{m_1 M_2} = 1 - \exp(-\lambda t). \tag{12.12}$$

Znajući da je $\lambda = \ln 2/T$, gde je T vreme poluraspada, iz izraza (12.12) se dobija

$$t = -\frac{T \ln[1 - m_2 M_1/(m_1 M_2)]}{\ln 2} = 1.58 \cdot 10^7\,godina.$$

Zadatak 6

Na vrh metalne igle elektrolitički je nataloženo $m = 100\,g$ hroma čiji je maseni broj 51. Izračunati:

a) Kolika je aktivnost nataloženog hroma?

b) Posle kog vremena će aktivnost nataloženog hroma da se smanji na vrednost $A_t = 18.5 \cdot 10^7\, Bq$?

Vreme poluraspada ovog izotopa je $T = 27.8\, dana$, molarna masa $M = 51\, gmol^{-1}$ i Avogadrov broj $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$.

Rešenje

a) Aktivnost A_o radioaktivnog izotopa hroma u momentu posmatranja je

$$A_o = \lambda N_o, \tag{12.13}$$

gde je λ konstanta radioaktivnog raspada, a N_o početni broj jezgara.

N_o se može izraziti na sledeći način:

$$N_o = \frac{m}{M} N_a, \tag{12.14}$$

dok je

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \tag{12.15}$$

Zamenom (12.14) i (12.15) u (12.13) dobija se da je

$$A_o = \frac{\ln 2}{T}\frac{m}{M} N_a = 3.4 \cdot 10^{17}\, Bq.$$

b) Aktivnost radioaktivnog izotopa smanjuje se po istom zakonu po kome se odvija radioaktivni raspad, tj.

$$A_t = A_o \exp(-\lambda t) = A_o \exp(-\frac{\ln 2}{T} t),$$

odakle je

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{A_o}{A_t} = 855.55\, dana.$$

Zadatak 7

Kolika je masa joda ^{131}J čija je aktivnost $A = 3.7 \cdot 10^9\, Bq$? Vreme poluraspada joda je $T = 8\, dana$. Kolika je aktivnost i specifična aktivnost joda posle $t = 100\, dana$? Avogadrov broj $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$.

Rešenje

Aktivnost A je data izrazom:

$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N_a \frac{m}{M},$$

odakle je

$$m = \frac{ATM}{N_a \ln 2} = 8.03 \cdot 10^{-10}\, kg.$$

Aktivnost A' posle vremena t je

$$A' = A 2^{-t/T} = 6.4 \cdot 10^5\, Bq,$$

a specifična aktivnost:

$$A'_s = \frac{A}{m} = 4.6 \cdot 10^{18}\, Bqkg^{-1}.$$

Zadatak 8

Prilikom analize β-raspada $^{23}_{12}$Mg u trenutku $t = 0$ uključen je Gajger-Milerov brojač. U toku narednog vremenskog intervala $\Delta t = 2\, s$ broj registrovanih β-čestica je n_1, a u toku sledećeg vremenskog intervala, koji je dva puta duži od prvog, broj registrovanih β-čestica je 1.26 puta veći. Kolika je konstanta radioaktivnog raspada $^{23}_{12}$Mg?

Rešenje

Broj neraspadnutih jezgara u uzorku $^{23}_{12}$Mg koji se analizira posle vremenskog intervala Δt je

$$N_1 = N_o \exp(-\lambda \Delta t), \tag{12.16}$$

a posle narednog vremenskog intervala za $\Delta t_1 = 2\Delta t$ je

$$N_2 = N_1 \exp(-\lambda \Delta t_1) = N_1 \exp(-2\lambda \Delta t). \tag{12.17}$$

Zamenom (12.16) u (12.17) dobija se

$$N_2 = N_o \exp(-3\lambda \Delta t).$$

Broj raspadnutih jezgara n_1 usled emisije β-čestica za vreme Δt je

$$n_1 = N_o - N_1 = N_o[1 - \exp(-\lambda\Delta t)],$$

a posle vremena $\Delta t_1 = 2\Delta t$ je

$$n_2 = N_1 - N_2 = N_o[\exp(-\lambda\Delta t) - \exp(-3\lambda\Delta t)].$$

Iz uslova zadatka proizilazi da je $n_2 = 1.26 n_1$ pa je

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1.26} = \frac{1 - \exp(-\lambda\Delta t)}{\exp(-\lambda\Delta t) - \exp(-3\lambda\Delta t)} = \frac{1 - \exp(-\lambda\Delta t)}{\exp(-\lambda\Delta t)[1 - \exp(-2\lambda\Delta t)]} =$$
$$= \frac{1 - \exp(-\lambda\Delta t)}{\exp(-\lambda\Delta t)[1 - \exp(-\lambda\Delta t)][1 + \exp(-\lambda\Delta t)]},$$

Posle sredjivanja dobija se:

$$x^2 + x - 1.26 = 0, \tag{12.18}$$

gde je $x = \exp(-\lambda\Delta t)$. Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobija se da je $x_1 = -1.73$ i $x_2 = 0.73$ ili

$$\lambda = -\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{1}{1.26} = 0.12\, s^{-1}.$$

Zadatak 9

Pri α-raspadu radona ${}^{222}_{86}$Rn dobija se polonijum ${}^{218}_{84}$Po koji je takodje radioaktivan. Vreme poluraspada radona je $T_{Rn} = 3.825\, dana$, a polonijuma $T_{Po} = 3.05\, min$. Ako je izvor u početnom trenutku sadržao $N = 10^{25}$ jezgara radona, izračunati masu polonijuma posle $t = 1000\, min$. Avogadrov broj je $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$.

Rešenje

Jednačina koja opisuje aktivnost polonijuma je

$$\frac{dN_{Po}}{dt} = -(\frac{dN_{Rn}}{dt} + \lambda_{Po}N_{Po}) = -\frac{dN_{Rn}}{dt} - \lambda_{Po}N_{Po}. \tag{12.19}$$

Ako je početni broj jezgara radona $N = N^o_{Rn} = 10^{25}$, broj neraspadnutih jezgara radona $N_{Rn} = N^o_{Rn}\exp(-\lambda_{Rn}t)$, a $dN_{Rn}/dt = -\lambda_{Rn}N_{Rn}$, jednačina (12.19) dobija oblik:

$$\frac{dN_{Po}}{dt} = \lambda_{Rn}N_{Rn} - \lambda_{Po}N_{Po} = \lambda_{Rn}N^o_{Rn}\exp(-\lambda_{Rn}t) - \lambda_{Po}N_{Po}.$$

Množenjem poslednjeg izraza sa $\exp(\lambda_{Po}t)$ dobija se

$$\frac{dN_{Po}}{dt}\exp(\lambda_{Po}t) = \lambda_{Rn}N^o_{Rn}\exp[-(\lambda_{Rn} - \lambda_{Po})t] - \lambda_{Po}N_{Po}\exp(\lambda_{Po}t).$$

$$\frac{d}{dt}[N_{Po}\exp(\lambda_{Po}t)] = \lambda_{Rn}N^o_{Rn}\exp(\lambda_{Po} - \lambda_{Rn})t$$

$$N_{Po}\exp(\lambda_{Po}t) = \int_o^t \lambda_{Rn}N^o_{Rn}[\exp(\lambda_{Po} - \lambda_{Rn})t]dt,$$

$$N_{Po}\exp(\lambda_{Po}t) = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}}N^o_{Rn}\exp(\lambda_{Po} - \lambda_{Rn})t - \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}}N^o_{Rn},$$

$$N_{Po} = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}}N^o_{Rn}[\exp(-\lambda_{Rn}t) - \exp(-\lambda_{Po}t)].$$

Zamenom $\lambda_{Rn} = \ln 2/T_{Rn}$ i $\lambda_{Po} = \ln 2/T_{Po}$ zamenom u gornji izraz i posle uvrštavanja brojnih vrednosti dobija se:

$$N_{Po} = 4.88 \cdot 10^{21}\, jezgara.$$

Masa polonijuma se dobija iz izraza:

$$m = M\frac{N_{Po}}{N_a} = 1.8\, g.$$

Zadatak 10

Izotop urana ${}^{234}_{92}$U javlja se kao produkt u toku radioaktivnog raspada izotopa urana ${}^{238}_{92}$U i to u iznosu 0.006%. Odrediti vreme poluraspada izotopa urana ${}^{234}_{92}$U ako je pri ovome ustanovljena radioaktivna ravnoteža. Vreme poluraspada izotopa urana ${}^{238}_{92}$U je $T_{238} = 4.5 \cdot 10^9\, godina$.

Rešenje

Uslov za radioaktivnu ravnotežu je

$$A_{234} = A_{238}, \tag{12.20}$$

gde je A_{234} aktivnost izotopa urana $^{234}_{92}U$, a A_{238} aktivnost izotopa urana $^{238}_{92}U$.

Znajući da je $A = \lambda N$, gde je λ konstanta radioaktivnog raspada, a N broj jezgara, jednakost (12.20) se može napisati u sledećem obliku:

$$\lambda_{234} N_{234} = \lambda_{238} N_{238}. \tag{12.21}$$

Pošto je $\lambda_{234} = \ln 2/T_{234}$ i $\lambda_{238} = \ln 2/T_{238}$, jednakost (12.21) postaje

$$\frac{T_{234}}{T_{238}} = \frac{\lambda_{238}}{\lambda_{234}} = \frac{N_{234}}{N_{238}}, \tag{12.22}$$

odakle je

$$\frac{N_{234}}{N_{238}} = 6 \cdot 10^{-5}.$$

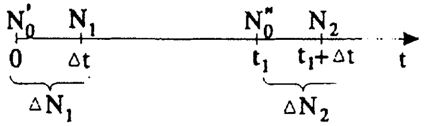
Zamenom ovog izraza u jednakost (12.22) dobija se

$$\frac{T_{234}}{T_{238}} = 6 \cdot 10^{-5} \Rightarrow T_{234} = 2.7 \cdot 10^5 \, godina.$$

Zadatak 11

Za odredjivanje vremena poluraspada kratkoživućeg radioaktivnog izotopa korišćen je brojač impulsa. Za vreme Δt u početku merenja ($t = 0$) registrovano je $\Delta N_1 = 250\, impulsa$, a posle vremena $t_1 = 2\,h$ u istom intervalu Δt registrovano je $\Delta N_2 = 92\, impulsa$. Odrediti konstantu radioaktivnog raspada i vreme poluraspada.

Rešenje



Na slici je prikazan početni broj radioaktivnih jezagara N_o' u momentu posmatranja ($t = 0$), njihov broj N_1 posle vremena Δt, zatim početni broj N_o'' u trenutku t_1 i broj N_2 posle vremena $t_1 + \Delta t$.

Broj raspadnutih jezgara posle vremena Δt je

$$\Delta N_1 = N_o' - N_1 = N_o' - N_o' \exp(-\lambda \Delta t) = N_o'[1 - \exp(-\lambda \Delta t)], \tag{12.23}$$

a broj raspadnutih jezgara posle vremena $t_1 + \Delta t$

$$\Delta N_2 = N_o'' - N_2 = N_o'' - N_o'' \exp(-\lambda \Delta t) = N_o''[1 - \exp(-\lambda \Delta t)]. \tag{12.24}$$

Deobom (12.24) sa (12.23) dobija se

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = \frac{N_o''}{N_o'} = \frac{N_o'}{N_o'} \exp(-\lambda t_1),$$

odakle se za konstantu radioakttivnog raspada dobija

$$\lambda = \frac{\ln(\Delta N_1/\Delta N_2)}{t_1} = 0.5\, h.$$

Vreme poluraspada je

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 1.39\, h.$$

Zadatak 12

Ispred radioaktivnog izvora postavljena je olovna pločica debljine d. Ako se doda još jedna pločica iste debljine, ukupno apsorbovano zračenje se poveća za 20%. Kolika je debljina pločica? Linearni koeficijent apsorpcije olova je $\mu = 52.5\, cm^{-1}$.

Rešenje

Intenzitet radioaktivnog zračenja I koje prodje kroz pločicu debljine d je

$$I = I_o \exp(-\mu d),$$

gde je I_o intenzitet radioaktivnog zračenja pre prolaska kroz pločicu. Smanjenje intenziteta zračenja posle prolaska kroz pločicu je

$$I_A = I_o - I = I_o - I_o \exp(-\mu d).$$

Kada se doda još jedna pločica iste debljine, smanjenje intenziteta je

$$I_A' = 1.2 I_A,$$

tj.

$$I_o - I_o \exp(-2\mu d) = 1.2 I_o - 1.2 I_o \exp(-\mu d).$$

Posle sredjivanja gornje jednačine dobija se

$$\exp(-2\mu d) - 1.2 \exp(-\mu d) + 0.2 = 0.$$

Uvodjenjem smene $\exp(-\mu d) = x$ gornja jednačina dobija sledeći oblik:

$$x^2 - 1.2x + 0.2 = 0.$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobija se da je $x_1 = 1$ i $x_2 = 0.2$ ili

$$\exp(-\mu d_1) = 1 \Rightarrow d_1 = 0,$$

što nema fizičkog smisla i

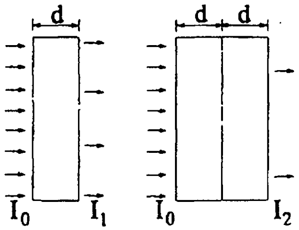
$$\exp(-\mu d_2) = 0.2 \Rightarrow d_2 = 0.31\, mm.$$

Zadatak 13

Ispred radioaktivnog izvora postavi se olovna pločica. Dodavanjem još jedne pločice iste debljine ukupno apsorbovano zračenje se poveća za 20%. Kolika je debljina pločice ako je poludebljina apsorpcije olova $D = 0.132\, mm$? Koliko ovakvih pločica treba postaviti da bi se intenzitet zračenja smanjio 130 puta.

Rešenje

Na slici su prikazani intenziteti zračenja posle prolaska kroz jednu i dve pločice iste debljine. Pošto poludebljina D apsorbera predstavlja onu debljinu koja apsorbuje polovinu intenziteta zračenja, to je za $x = D$, $I = I_o/2$. Kako je $I = I_o \exp(-\mu D)$, to je



$$\frac{I_o}{2} = I_o \exp(-\mu D) \Rightarrow \mu = \frac{\ln 2}{D} = 5.25\, mm^{-1}.$$

Kada se doda još jedna pločica debljine d, može se napisati:

$$\frac{I_o - I_2}{I_o} = \frac{I_o - I_1}{I_o} + 0.2\frac{I_o - I_1}{I_o} \Rightarrow I_o - I_2 = 1.2(I - I_1). \qquad (12.25)$$

Kako je

$$I_1 = I_o \exp(-\mu d), \qquad I_2 = I_o \exp(-2\mu d), \qquad (12.26)$$

to se zamenom (12.26) u (12.25) i sredjivanjem dobija sledeća kvadratna jednačina:

$$\exp(-2\mu d) - 1.2 \exp(\mu d) + 0.2 = 0.$$

Smenom $\exp(-\mu d) = x$ dobija se

$$x^2 - 1.2x + 0.2 = 0.$$

Rešenja ove jednačine su $x_1 = 1$ i $x_2 = 0.2$. Iz smene proizilazi da je za $x_1 = 1$, $d = 0$, a za $x_2 = 0.2$, $d = 0.31\, mm$.

Intenzitet zračenja I_n koji se smanji 130 puta od početnog intenziteta I_o je $I_n = I_o/130$. S druge strane je

$$I_n = I_o \exp(-n\mu d),$$

pa je

$$\frac{I_o}{130} = I_o \exp(-n\mu d) \Rightarrow n = \frac{\ln 130}{\mu d} \approx 3.$$

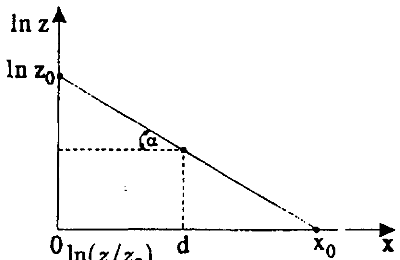
Zadatak 14

Bez prisustva izvora Gajger-Milerov brojač je registrovao $z_f = 18\, imp/min$. Posle postavljanja radioaktivnog izvora iznad brojača koji emituje γ-zrake iste talasne dužine, registruje se $z_o' = 253\, imp/min$. Kada se izmedju izvora zračenja i brojača postavi olovna ploča debljine $d = 11.24\, mm$, broj impulsa je $z' = 115\, imp/min$. Kolika treba da bude debljina olovne ploče kojom bi se potpuno apsorbovalo zračenje radioaktivnog izvora?

Rešenje

Izraz za apsorpciju γ-zračenja je

$$I = I_o \exp(-\mu d). \qquad (12.27)$$



I i I_o se može izraziti preko broja impulsa, tako da je $I = kz$ i $I_o = kz_o$. Tada izraz (12.27) dobija sledeći oblik:

$$z = z_o \exp(-\mu d) \Rightarrow \mu = \frac{\ln(z/z_o)}{d}. \qquad (12.28)$$

Kada se uzme u obzir prisustvo fona

$$z_o = z_o' - z_f = 235\, imp/min$$
$$z = z' - z_f = 97\, imp/min.$$

Zamenom (12.28) u (12.27) i uvrštavanjem brojnih vrednosti, za linearni koeficijent apsorpcije dobija se sledeća vrednost:

$$\mu = 0.079\, mm^{-1}.$$

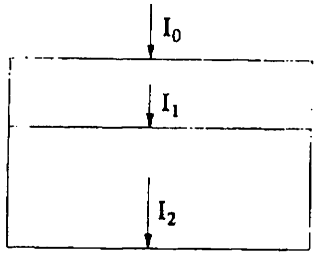
Debljina olovne ploče kojom bi se potpuno apsorbovalo zračenje može se odrediti sa grafika prikazanog na slici. Sa slike se vidi da je

$$\mu = \tan\alpha = \frac{\ln z_o}{x_o} \Rightarrow x_o = \frac{\ln z_o}{\mu} = 69.1\, mm.$$

Zadatak 15

Dvostruki sloj voda-gvoždje služi kao zaštita od γ-zračenja. Debljine slojeva vode i gvoždja su $d_v = 3D_v$ i $d_{Fe} = 2D_{Fe}$, gde su D_v i D_{Fe} poludebljine vode i gvoždja za dato γ-zračenje, redom. Koliko će puta dvostruki sloj voda-gvoždje smanjiti intenzitet γ-zračenja?

Rešenje



Intenzitet γ-zračenja I_1 posle prolaska kroz sloj vode debljine $d_v = 3D_v$ je

$$I_1 = I_o \exp(-\mu_v \cdot 3D_v), \qquad (12.29)$$

gde je I_o intenzitet γ-zračenja pre prolaska kroz sloj vode, a μ_v linearni koeficijent apsorpcije γ-zračenja u vodi.

Posle prolaska kroz gvoždje debljine $d_{Fe} = 2D_{Fe}$, intenzitet gama zračenja je

$$I_2 = I_1 \exp(-\mu_{Fe} \cdot 2D_{Fe}). \qquad (12.30)$$

Iz (12.29) i (12.30), znajući da je $\mu = \ln 2/D$, dobija se

$$I_2 = (\frac{1}{2})^5 I_o \Rightarrow \frac{I_o}{I_2} = 32.$$

Zadatak 16

Kolika se energija oslobadja ako se sva jezgra koja se nalaze u $m = 1\,g$ berilijuma podvrgnu reakciji ${}^9_4\mathrm{Be}+{}^2_1\mathrm{H}\rightarrow{}^{10}_5\mathrm{B}+{}^1_0\mathrm{n}$. Masa jezgra berilijuma je $m_{Be} = 9.01505\,u$, izotopa vodonika $m_H = 2.01474\,u$, jezgra bora $m_B = 10.01612\,u$ i neutrona $m_n = 1.00899\,u$, gde je $u = 1.66 \cdot 10^{-27}\,kg$ atomska jedinica mase. Avogadrov broj je $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$ i brzina svetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Defekt mase jezgra koji odgovara transformaciji ${}^9_4\mathrm{Be}$ u ${}^{10}_5\mathrm{B}$ je

$$\Delta m = (m_{Be} + m_H) - (m_B + m_n) = 0.00468\, u.$$

Broj atoma u $m = 1\,g$ Be je

$$N = \frac{m}{A} N_a = 6.69 \cdot 10^{22}\, atoma,$$

pa je ukupan defekt mase je

$$\Delta M = N \Delta m = 3.13 \cdot 10^{20}\, u,$$

dok je oslobodjena energija

$$\Delta E = \Delta M c^2 = 4.68 \cdot 10^{10}\, J = 2.92 \cdot 10^{29}\, eV.$$

Zadatak 17

Kolika se energija mora utrošiti da bi se jezgro litijuma ${}^7_3$Li podelilo na svoje sastavne delove, protone i neutrone? Masa protona je $m_p = 1.00760\, u$, neutrona $m_n = 1.00898\, u$, elektrona $m_e = 0.00055\, u$ i litijuma $m_{Li} = 7.01822\, u$ ($u = 1.66 \cdot 10^{-27}\, kg$). Brzina svetlosti u vakuumu je $c = 3 \cdot 10^8\, ms^{-1}$.

Rešenje

Defekt mase jezgra za ${}^7_3$Li je

$$\Delta m = (3m_p + 4m_n) - m_j,$$

gde je $m_j = m_{Li} - 3m_e$.

Energija koju treba utrošiti da bi se jezgro ${}^7_3$Li podelilo na sastavne delove je

$$E = \Delta mc^2 = [(3m_p + 4m_n) - (m_{Li} - 3m_e)]c^2 = 6.3 \cdot 10^{-12}\, J = 3.94 \cdot 10^7\, eV.$$

Zadatak 18

Odrediti količinu toplote koja se oslobodi u sledećoj nuklearnoj reakciji:

$${}^3_1H + {}^1_1H \rightarrow {}^4_2He + Q.$$

Masa tricijuma ${}^3_1$H je $m_1 = 3.016997\, u$, vodonika ${}^1_1$H $m_2 = 1.008142\, u$ i helijuma ${}^4_2$He $m_3 = 4.003873\, u$.

Rešenje

Bilans masa ove nuklearne reakcije je

$$m_1 + m_2 = m_3 + \frac{Q}{c^2},$$

gde je Q količina oslobodjene toplote pri nuklearnoj reakciji. Q/c^2 je smanjenje mase čestica usled oslobodjene energije.

Iz gornje jednačine se dobija

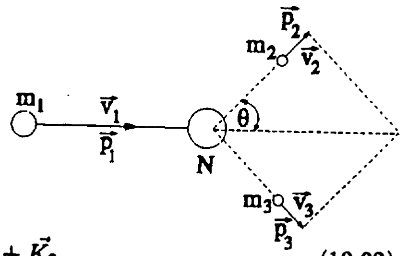
$$Q = [m_1 + m_2 - m_3]c^2 = 3.2 \cdot 10^{-12}\, J = 19.86\, MeV.$$

Zadatak 19

Kinetička energija α-čestice koja učestvuje u reakciji ${}^{14}_7\mathrm{N}(\alpha, p){}^{17}_8\mathrm{O}$ je $E_1 = 7.7\, MeV$. Pod kojim uglom θ u odnosu na prvobitni pravac α-čestice izleće proton, ako je njegova kinetička energija $E_2 = 5.7\, MeV$? Energija reakcije je $Q = -1.18\, MeV$, masa α-čestice $m_1 = 6.68 \cdot 10^{-27}\, kg$, protona $m_2 = 1.67 \cdot 10^{-27}\, kg$ i izotopa kiseonika (${}^{17}_8$O) $m_3 = 28.39 \cdot 10^{-27}\, kg$.

Rešenje

Na slici su šematski prikazane čestice koje učestvuju u reakcijama. Da bi se odredio ugao θ potrebno je poći od zakona održanja energije i impulsa:



$$E_1 + Q = E_2 + E_3 \qquad (12.31)$$

$$\vec{K_1} = \vec{K_2} + \vec{K_3}, \qquad (12.32)$$

gde je E_3 kinetička energija izotopa kiseonika ${}^{17}_8$O.

Intenzitet impulsa $\vec{p_3}$ na osnovu kosinusne teoreme je

$$K_3^2 = K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2\cos\theta. \qquad (12.33)$$

Veza izmedju kinetičke energije i impulsa je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{K^2}{2m}. \qquad (12.34)$$

Zamenom (12.34) u (12.33) dobija sledeći izraz:

$$2m_3E_3 = 2m_1E_1 + 2m_2E_2 - 2\sqrt{4m_1E_1m_2E_2}\cos\theta. \qquad (12.35)$$

Nepoznata E_3 može se eliminisati korišćenjem izraza (12.31) i (12.35)

$$E_1\left(\frac{m_3 - m_1}{m_3}\right) + Q = E_2\left(\frac{m_2 + m_3}{m_3}\right) - \frac{2\cos\theta}{m_3}\sqrt{m_1 m_2 E_1 E_2},$$

odakle se za $\cos\theta$ dobija sledeći izraz:

$$\cos\theta = \frac{m_2+m_3}{2}\sqrt{\frac{E_2}{m_1 m_2 E_1}} - \frac{m_3-m_1}{2}\sqrt{\frac{E_1}{m_1 m_2 E_2}} - \frac{m_3 Q}{2\sqrt{m_1 m_2 E_1 E_2}} = 0.857,$$

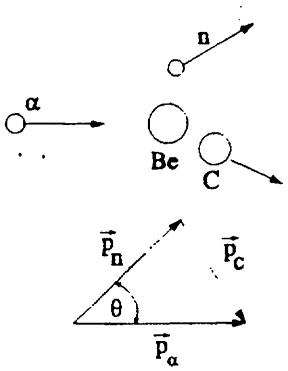
odnosno

$$\theta = \arccos(0.302) = 31.02^o$$

Zadatak 20

Kinetička energija α-čestice u nuklearnoj reakciji ${}^9_4\mathrm{Be}(\alpha,n){}^{12}_6\mathrm{C}$ je $E_{k\alpha} = 4\,MeV$. Kolika je minimalna, a kolika maksimalna kinetička energija neutrona? Pretpostaviti da jezgro atoma berilijuma pre interakcije sa α-česticom miruje. Masa berilijuma je $m_{Be} = 9.015\,u$, masa α-čestice $m_\alpha = 4.004\,u$, masa ugljenika $m_C = 12.011\,u$, masa neutrona $m_n = 1.009\,u$ i brzina svetlosti u vakuumu $c = 3\cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje



Da bi se odredila minimalna kinetička energija neutrona E_{knmin} kao i njegova maksimalna kinetička energija E_{knmax}, treba poći od zakona održanja energije i impulsa. Pošto jezgro Be miruje, zakon održanja energije glasi:

$$E_{k\alpha} + Q = E_{kC} + E_{kn}, \qquad (12.36)$$

gde je Q energija reakcije, E_{kC} kinetička energija ugljenika i E_{kn} kinetička energija neutrona.

Zakon održanja impulsa je

$$K_C^2 = K_\alpha^2 + K_n^2 - 2K_n K_\alpha \cos\theta, \qquad (12.37)$$

gde je K_C impuls ugljenikovog jezgra, K_α impuls α-čestice i K_n impuls neutrona (vidi sliku).

Energija reakcije se može izraziti na sledeći način:

$$Q = (m_{Be} + m_\alpha - m_C - m_n)c^2. \qquad (12.38)$$

Veza izmedju kinetičke energije čestica i njihovog impulsa je

$$K_n = \sqrt{2m_n E_{kn}}; \quad K_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_{k\alpha}}; \quad K_C = \sqrt{2m_C E_{kC}}. \qquad (12.39)$$

Zamenom (12.39) u (12.37) dobija se

$$2m_C E_{kC} = 2m_\alpha E_{k\alpha} + 2m_n E_{kn} - 4\sqrt{m_\alpha m_n E_{k\alpha} E_{kn}}\cos\theta. \qquad (12.40)$$

Kada se iz (12.36) nadje E_{kC} i zameni u (12.40) dobija se

$$m_C Q = m_\alpha E_{k\alpha} - m_C E_{k\alpha} + m_n E_{kn} + m_C E_{kn} - 2\sqrt{m_\alpha m_n E_{k\alpha} E_{kn}}\cos\theta.$$

Iz prethodne jednačine za Q se dobija sledeći izraz:

$$Q = (1 + \frac{m_n}{m_C})E_{kn} - (1 - \frac{m_\alpha}{m_C})E_{k\alpha} - \frac{2\sqrt{m_\alpha m_n E_{k\alpha} E_{kn}}}{m_C}\cos\theta. \qquad (12.41)$$

Posle sredjivanja izraza (12.41) dobija se

$$E_{kn} - \frac{4}{13}\sqrt{E_{k\alpha} E_{kn}}\cos\theta - \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha}) = 0. \qquad (12.42)$$

Jednačina (12.42) je oblika

$$x^2 - 2ax - b = 0,$$

gde je

$$x = \sqrt{E_{kn}}; a = \frac{2\sqrt{E_{k\alpha}}}{13}\cos\theta; \quad b = \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha}).$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobija se

$$x_{1,2} = a + \sqrt{a^2 + b},$$

odnosno

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{E_{k\alpha}}}{13}\cos^2\theta + \sqrt{\frac{4E_{k\alpha}}{169},\cos\theta + \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha})},$$

$$x_1 = x_{max}/(za \quad \theta = 0^o) = \frac{2\sqrt{E_{k\alpha}}}{13} + \sqrt{\frac{4E_{k\alpha}}{169} + \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha})},$$

$$x_2 = x_{min}/(za \quad \theta = 180^o) = -\frac{2\sqrt{E_{k\alpha}}}{13} + \sqrt{\frac{4E_{k\alpha}}{169} + \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha})}.$$

Pošto je $x = \sqrt{E_{kn}}$, to je

$$E_{knmax} = \left[\frac{2\sqrt{E_{k\alpha}}}{13} + \sqrt{\frac{4E_{k\alpha}}{169} + \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha})}\right]^2 = 4.62\,MeV,$$

i

$$E_{knmin} = \left[-\frac{2\sqrt{E_{k\alpha}}}{13} + \sqrt{\frac{4E_{k\alpha}}{169} + \frac{4}{13}(3Q + 2E_{k\alpha})}\right]^2 = 2.34\,MeV.$$

Zadatak 21

Naći energiju nuklearne reakcije ${}^9_4\text{Be}+{}^1_1p \to {}^4_2\text{He}+{}^6_3\text{Li}$ ako je kinetička energija protona $E_p = 5.45\,MeV$, α-čestice $E_\alpha = 4\,MeV$ i ako su pravci kretanja protona i α-čestice uzajamno normalni. Jezgro-meta ${}^9_4\text{Be}$ je nepokretno. Smatrati da su kinetičke energije protona i α-čestice mnogo manje od njihovih energija mirovanja. Masa protona je $m_p = 1.0076\,u$, α-čestice $m_\alpha = 4.004\,u$ i jezgra litijuma $m_{Li} = 6.941\,u$.

Rešenje

Energija reakcije je

$$Q = E_{Li} + E_\alpha - E_p. \tag{12.43}$$

Da bi se odredila energija litijuma E_{Li} treba primeniti zakon održanja impulsa

$$\vec{K}_p = \vec{K}_\alpha + \vec{K}_{Li},$$

gde su K_p, K_α i K_{Li} impulsi protona, α-čestice i litijuma, redom.

Vektori $\vec{K}_p$ i $\vec{K}_\alpha$ prema uslovu zadatka medjusobno su normalni i sa vektorom $\vec{K}_{Li}$ obrazuju prav ugao. U tom slučaju, na osnovu kosinusne teoreme, važi:

$$K_{Li}^2 = K_\alpha^2 + K_p^2.$$

Pošto su $K_{Li}^2 = 2m_{Li}E_{Li}$, $K_\alpha = 2m_\alpha E_\alpha$ i $K_p = 2m_pE_p$, poslednji izraz dobija sledeći oblik:

$$m_{Li}E_{Li} = m_\alpha E_\alpha + m_pE_p \Rightarrow E_{Li} = \frac{m_\alpha E_\alpha + m_pE_p}{m_{Li}} = 3.1\,MeV.$$

Zamenom poznatih vrednosti u (12.43) za energiju nuklearne reakcije se dobija sledeća vrednost:

$$Q = 1.65\,MeV.$$

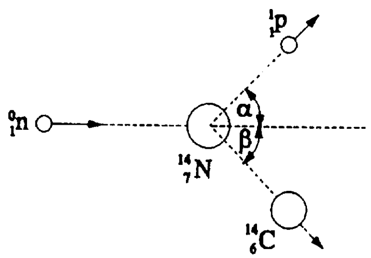
Zadatak 22

Neutron kinetičke energije $E_n = 0.5\,MeV$ sudara se sa atomom azota ${}^{14}_7\text{N}$, koji miruje i posle sudara nastaje ugljenik ${}^{14}_6\text{C}$, kinetičke energije $E_C = 20\,keV$ i proton. Ako proton skreće pod uglom $\alpha = 38^o$, a ugljenik pod uglom $\beta = 30^o$ u odnosu na pravac kretanja upadnog neutrona, naći enegiju nuklearne reakcije. Masa ugljenika je $m_C = 14.0077\,u$ i protona $m_p = 1.0076\,u$.

Rešenje

Nukleарna reakcija čiji je šematski prikaz dat na slici može se predstaviti na sledeći način:

${}^1_0\text{n}+{}^{14}_7N \to {}^{14}_6\text{C}+{}^1_1\text{p}$.



Zakoni održanja enegije i impulsa za ovaj slučaj glase:

$$E_n + Q = E_C + E_p, \tag{12.44}$$

$$K_p \sin\alpha - K_C \sin\beta = 0, \tag{12.45}$$

gde je Q energija nuklearne reakcije, a E_p kinetička energija protona.

Iz (12.45) je

$$K_p = K_C\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{12.46}$$

Pošto je

$$E_C = \frac{K_C^2}{2m_C} \Rightarrow K_C = \sqrt{2m_CE_C} \tag{12.47}$$

i

$$E_p = \frac{K_p^2}{2m_p} \Rightarrow K_p = \sqrt{2m_pE_p}. \tag{12.48}$$

Zamenom (12.47) i (12.48) u (12.46) dobija se izraz za kinetičku energiju protona:

$$E_p = E_C\frac{m_C}{m_p}(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha})^2. \tag{12.49}$$

Zamenom (12.49) u (12.44) i uvrštavanjem brojnih vrednosti, za energiju nuklearne reakcije se dobija

$$Q = E_C + E_p - E_n = -0.29\,MeV.$$

Zadatak 23
Nepokretno jezgro kadmijuma apsorbuje neutron energije $E = 10^{-15}\,J$. Odrediti brzinu, v_1 novoobrazovanog jezgra. Masa kadmijuma je $m_{Cd} = 112\,m_n$, gde je $m_n = 1.009\,u$ masa neutrona.

Rešenje

Ako se sa v označi brzina neutrona, a sa v_1 brzina jezgra kadmijuma posle apsorpcije neutrona, zakon održanja impulsa i zakon održanja energije za posmatrane čestice mogu se napisati u sledećem obliku:

$$m_nv = (m_n + m_{Cd})v_1, \tag{12.50}$$

$$\frac{m_nv^2}{2} = E. \tag{12.51}$$

Iz (12.50) i (12.51) za v_1 se dobija

$$v_1 = \frac{\sqrt{2m_nE}}{m_n + m_{Cd}} = 9.67\cdot 10^3\,ms^{-1}.$$

Zadatak 24
Pri β-raspadu jezgro atoma radioaktivnog elementa RaB, čiji je maseni broj $A = 214$, izleće elektron sa energijom $E_1 = 5\cdot 10^{-15}\,J$. Usled toga jezgro RaB prelazi u jezgro RaC sa istim masenim brojem. Odrediti kinetičku energiju RaC. Uzeti da je masa protona ili neutrona $m_o = 1.67\cdot 10^{-24}\,g$, a elektrona $m_e = 9.1\cdot 10^{-31}\,kg$.

Rešenje

Kinetička energija RaC je

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2}, \tag{12.52}$$

gde je v_2 brzina jezgra RaC, $m = Am_o = 214\,m_o$.

Brzina v_2 se nalazi iz zakona održanja impulsa

$$mv_2 = m_ev_1 \Rightarrow v_2 = \frac{m_ev_1}{m}, \tag{12.53}$$

gde je v_1 brzina elektrona. Na levoj strani poslednje jednačine zanemarena je masa elektrona u odnosu na masu RaB.

Brzina v_1 nalazi se iz relacije

$$E_1 = \frac{m_ev_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m_e}}. \tag{12.54}$$

Iz (12.52), (12.53) i (12.54) za kinetičku energiju jezgra RaC se dobija

$$E_2 = \frac{m_eE_1}{Am_o} = 1.27\cdot 10^{-20}\,J.$$

Zadatak 25
Pri raspadu plutonijuma ${}^{239}_{94}$Pu izleće α-čestica i obrazuje se jezgro urana ${}^{235}_{92}$U. Zatim ta čestica biva zahvaćena litijumom ${}^{7}_{3}$Li pri čemu se obrazuje jezgro bora ${}^{10}_{5}$B i neutron koji se kreće po istoj pravoj. Odrediti kinetičku energiju neutrona. Masa α-čestice je $m_\alpha = 4.004\,u$, neutrona $m_n = 1.009\,u$, jezgra bora $m_B = 10.016\,u$, jezgra plutonijuma $m_{Pu} = 239.127\,u$, jezgra litijuma $m_{Li} = 7.018\,u$, jezgra urana $m_U = 235.117\,u$ i brzina svetlosti u vakuumu $c = 3\cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Energetski bilans reakcija je

$$Q_1 = [m_{Pu} - (m_U + m_\alpha)]c^2,$$

$$Q_2 = [m_{Li} + m_\alpha - (m_B + m_n)]c^2.$$

Da bi se našla kinetička energija α- čestice treba koristiti uslov da se jezgro ${}^{10}_{5}$B i neutron kreću po pravoj liniji. Tada iz zakona održanja impulsa

$$\vec{K}_{Pu} = \vec{K}_\alpha + \vec{K}_U,$$

gde je $K_{Pu} = 0$, odnosno $K_\alpha = p_U$, a kako je $K_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha}$ i $K_U = \sqrt{2m_u E_U}$, posle kvadriranja poslednje jednačine dobija se

$$E_u = \frac{m_\alpha}{m_U} E_\alpha.$$

Iz zakona održanja energije za prvu reakciju dobija se:

$$Q_1 = E_\alpha + E_U = E_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_U} E_\alpha = (1 + \frac{m_\alpha}{m_U}) E_\alpha,$$

pa je

$$E_\alpha = \frac{Q_1}{1 + m_\alpha/m_U} = 5.5\,MeV.$$

Zakon održanja energije i impulsa za drugu reakciju glasi:

$$E_\alpha + Q_2 = E_B + E_n; \quad m_\alpha v_\alpha = m_B v_B + m_n v_n,$$

$$E_B = \frac{m_B v_B^2}{2}; \quad v_B = \frac{m_\alpha v_\alpha - m_n v_n}{m_B},$$

$$E_B = m_B \frac{m_n^2 v_n^2 - 2m_n m_\alpha v_n v_\alpha + m_\alpha^2 v_\alpha^2}{2m_B^2},$$

$$E_\alpha + Q_2 = \frac{m_n}{m_B} . \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_n v_\alpha m_\alpha}{m_B} + \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{2m_B} + \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

Pošto su

$$E_n = \frac{m_n v_n^2}{2}; \qquad E_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2},$$

kinetička energija neutrona i α-čestice, to su njihove brzine

$$v_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m_n}}; \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}}.$$

Dobija se da je

$$\frac{m_n m_\alpha v_n v_\alpha}{m_B} = \frac{2\sqrt{m_n m_\alpha E_n E_\alpha}}{m_B}.$$

Prema tome

$$E_\alpha + Q_2 = (1 + \frac{m_n}{m_B}) E_n + \frac{m_\alpha}{m_B} E_\alpha - \frac{2\sqrt{m_n m_\alpha E_n E_\alpha}}{m_B}.$$

Rešavanjem ove jednačine po E_n i zamenom brojnih vrednosti dobija se

$$E_n = 1.23\,MeV.$$

Zadatak 26
Koliku vrednost kinetičke energije izgubi elektron pri elastičnom sudaru sa nepokretnim jezgrom ugljenika ${}^{12}_{6}$C? Posle sudara čestice se kreću po istoj pravoj. Masa neutrona je $m_n = 1.009\,u$ i masa ugljenika $m_C = 12.011\,u$.

Rešenje

Zakoni održanja kinetičke energije i impulsa za ovu reakciju mogu se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{m_n v_{on}^2}{2} = \frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{m_C v_C^2}{2}, \qquad (12.55)$$

$$m_n v_{on} = m_n v_n + m_C v_C, \qquad (12.56)$$

gde je v_{on} brzina neutrona pre sudara, v_n brzina neutrona posle sudara i v_C brzina jezgra ugljenika posle sudara sa neutronom.

Jednačina (12.55) se može napisati u obliku

$$m_C v_C^2 = m_n(v_{on}^2 - v_n^2), \tag{12.57}$$

a jednačina (12.56) u obliku

$$m_C v_C = m_n(v_{on} - v_n). \tag{12.58}$$

Zamenom (12.58) u (12.57) dobija se

$$m_n v_C(v_{on} - v_n) = m_n(v_{on}^2 - v_n^2),$$

odnosno

$$v_C(v_{on} - v_n) = (v_{on} - v_n)(v_{on} + v_n),$$

$$v_C = v_{on} + v_n. \tag{12.59}$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina, dobija se

$$v_n = -\frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{on}. \tag{12.60}$$

Promena kinetičke energije neutrona pri sudaru je

$$\Delta E = \frac{m_n v_{on}^2}{2} - \frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_n v_{on}^2}{2} - \frac{m_n(m_C - m_n)^2}{2(m_n + m_C)^2} v_{on}^2 = \frac{2m_n^2 m_C v_{on}^2}{(m_n + m_C)^2},$$

a njena relativna promena

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta E}{m_n v_{on}^2/2} = \frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2} = 0.29.$$

Zadatak 27
Odrediti energiju brzih neutrona koji nastaju u sledećoj nuklearnoj reakciji:

$${}^9_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C} + {}^1_o\mathrm{n}$$

Masa jezgra berilijuma je $m_{Be} = 9.0122\,u$, α-čestice $m_\alpha = 4.004\,u$, ugljenika $m_C = 12.011\,u$, masa neutrona $m_n = 1.009\,u$ i brzina svetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

Zakoni održanja energije i impulsa za ovu reakciju se mogu napisati u sledećem obliku:

$$Q = E_n + E_C, \tag{12.61}$$

$$m_n v_n + m_C v_C = 0, \tag{12.62}$$

gde je Q enegija reakcije, E_n kinetička energija neutrona, E_C kinetička energija jezgra ugljenika, v_n brzina neutrona i v_C brzina jezgra ugljenika.

Kinetičke energije neutrona i jezgra ugljenika su:

$$E_n = \frac{m_n v_n^2}{2}; \quad E_C = \frac{m_C v_C^2}{2},$$

a njihov odnos

$$\frac{E_C}{E_n} = \frac{m_C v_C^2}{m_n v_n^2}. \tag{12.63}$$

Kvadriranjem jednačine (12.62) dobija se

$$\frac{v_C^2}{v_n^2} = \frac{m_n^2}{m_C^2}. \tag{12.64}$$

Zamenom (12.63) u (12.64) za E_C se dobija

$$E_C = E_n \frac{m_n}{m_C}. \tag{12.65}$$

Zamenom izraza (12.65) u (12.61) dobija se

$$Q = E_n + E_n \frac{m_n}{m_C} = (1 + \frac{m_n}{m_C})E_n,$$

odnosno

$$E_n = \frac{Q}{1 + m_n/m_C}. \tag{12.66}$$

Energija reakcije je

$$Q = (m_{Be} + m_\alpha - m_n - m_C)c^2,$$

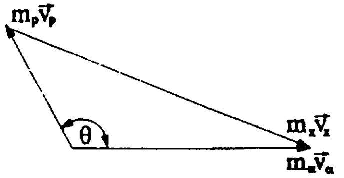
pa se zamenom u (12.66) za E_n konačno dobija

$$E_n = \frac{m_C(m_{Be} + m_\alpha - m_n - m_C)c^2}{m_C + m_n} = -3.27\,MeV.$$

Zadatak 28

Bombardovanjem α-česticama energije E_α, jezgra nekog elementa koja miruju otpuštaju protone energije E_p pod uglom θ u odnosu na pravac kretanja α-čestice. Pritom se obrazuje jezgro mase m_x. Odrediti energiju reakcije Q.

Rešenje



Iz zakona održanja impulsa kao sto se sa slike vidi sledi:

$$m_x v_x = \sqrt{m_\alpha^2 v_\alpha^2 + m_p^2 v_p^2 - 2 m_\alpha v_\alpha m_p v_p \cos\theta}, \tag{12.67}$$

dok se zakon održanja energije može napisati u sledećem obliku:

$$Q = E_p - E_\alpha - E_x. \tag{12.68}$$

Kvadriranjem i deljenjem sa $2m_x$ izraza (12.67) dobija se:

$$\frac{m_x^2 v_x^2}{2m_x} = \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{2m_x} + \frac{m_p^2 v_p^2}{2m_x} - \frac{m_\alpha v_\alpha m_p v_p \cos\theta}{m_x}. \tag{12.69}$$

Pošto je $m_x v_x^2/2 = E_x$; $m_\alpha v_\alpha^2/2 = E_\alpha$ i $m_p v_p^2/2 = E_p$, to iz (12.68) i (12.69) proizilazi da je energija reakcije

$$Q = E_p - E_\alpha - E_\alpha \frac{m_\alpha}{m_x} - E_p \frac{m_p}{m_x} + \frac{m_\alpha v_\alpha m_p v_p}{m_x} \cos\theta,$$

odnosno

$$Q = E_p\left(1 - \frac{m_p}{m_x}\right) - E_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_x}\right) + \frac{m_\alpha m_p}{m_x}\sqrt{\frac{2E_p}{m_p}}\sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}}\cos\theta, \tag{12.70}$$

jer je $v_p = \sqrt{2E_p/m_p}$ i $v_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/m_\alpha}$. Posle sredjivanja izraza (12.70) dobija se

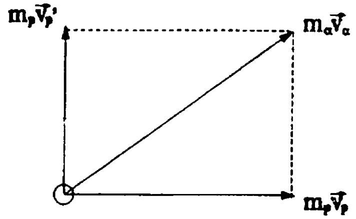
$$Q = E_p\left(1 - \frac{m_p}{m_x}\right) - E_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_x}\right) + \frac{2}{m_x}\sqrt{m_\alpha m_p E_\alpha E_p}\cos\theta.$$

Zadatak 29

Proton sa kinetičkom energijom $E_p = 0.1\,MeV$ rasejava se na jezgru helijuma pod uglom $\theta = 90^o$. Odrediti kinetičku energiju protona E_p' i jezgra

helijuma E_α posle rasejavanja. Masa protona je $m_p = 1.0076\,u$ a jezgra helijuma $m_\alpha = 4.004\,u$.

Rešenje



Na slici je prikazan vektorski dijagram sudara protona i jezgra helijuma.

Na osnovu Pitagorine teoreme je

$$m_\alpha^2 v_\alpha^2 = m_p^2 v_p^2 + m_p^2 v_p'^2, \tag{12.71}$$

gde je v_α brzina jezgra helijuma posle sudara protona, dok su v_p i v_p' brzine protona pre i posle sudara sa jezgrom helijuma, redom.

Zakon održanja kinetičke energije je

$$\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_p v_p'^2}{2} + \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}, \tag{12.72}$$

odnosno

$$E_p = E_p' + E_\alpha. \tag{12.73}$$

Deljenjem (12.71) sa $2m_\alpha$ dobija se

$$\frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{m_p}{m_\alpha}(E_p + E_p') \Rightarrow \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = E_\alpha = \frac{m_p}{m_\alpha}(E_p + E_p'). \tag{12.74}$$

Iz (12.73) i (12.74) je

$$E_p - E_p' = \frac{m_p}{m_\alpha}(E_p + E_p').$$

Posle sredjivanja gornjeg izraza i zamenom brojnih vrednosti za E_p', dobija se

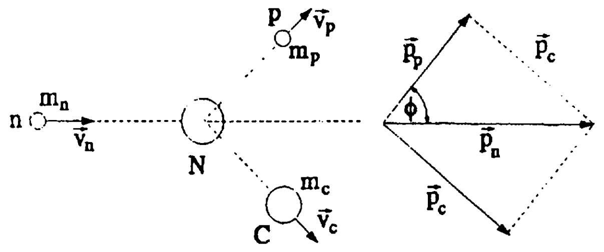
$$E_p' = \frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha + m_p} E_p = 0.06\,MeV.$$

Zadatak 30

Kinetička energija neutrona u nuklearnoj reakciji ${}^{14}_{7}\mathrm{N(n,p)}{}^{14}_{6}\mathrm{C}$ je $E_{kn} = 8\,MeV$. Naći pravac rasejanog protona ako je kinetička energija ugljenika

$E_{kC} = 100\,keV$. Masa mirovanja neutrona je $m_{on} = 1.008982\,u$, a protona $m_{op} = 1.008142\,u$. Masa jezgra ugljenika je $m_C = 14.007682\,u$, a masa jezgra azota $m_N = 14.007515\,u$. Pretpostaviti da jezgro azota pre interakcije sa neutronom miruje.

Rešenje



Treba odrediti ugao ϕ. Sa slike se vidi da je

$$\vec{K_C} = \vec{K_n} - \vec{K_p} \Rightarrow K_C^2 = K_n^2 + K_p^2 - 2K_nK_p\cos\phi,$$

$$\cos\phi = \frac{K_n^2 + K_p^2 - K_C^2}{2K_nK_p}, \qquad (12.75)$$

gde je K_p impuls protona, K_n impuls neutrona i K_C impuls jezgra ugljenika. Da bi se odredili ovi impulsi, treba poći od zakona održanja energije

$$E_n + E_N = E_p + E_C, \qquad (12.76)$$

gde je E_N energija jezgra azota u miru, a E_p energija protona. Izraz (12.76) se može napisati u sledećem obliku

$$E_{kn} + m_{on}c^2 + m_Nc^2 + Q = E_{kp} + m_{op}c^2 + E_{kC} + m_Cc^2. \qquad (12.77)$$

Pošto je energija reakcije

$$Q = (m_{on} + m_N - m_{op} - m_C)c^2,$$

to se zamenom u (12.77) dobija da je kinetička energija protona

$$E_{kp} = E_{kn} + Q - E_{kC} = 8.53\,MeV.$$

Impuls ugljenika je

$$K_C = \sqrt{2m_CE_{kC}} = 2.74 \cdot 10^{-20}\,kgms^{-1}, \qquad (12.78)$$

a neutrona

$$K_n = m_nv_n = \frac{m_{on}v_n}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}} = 6.48 \cdot 10^{-20}\,kgms^{-1}, \qquad (12.79)$$

gde je

$$v_n = c\sqrt{1 - \frac{1}{[1 + E_{kn}/(m_{on}c^2)]^2}} = 3.87 \cdot 10^7\,ms^{-1}.$$

Impuls protona je

$$K_p = m_pv_p = \frac{m_{op}v_p}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}} = 6.79 \cdot 10^{-20}\,kgms^{-1}, \qquad (12.80)$$

gde je

$$v_p = c\sqrt{1 - \frac{1}{[1 + E_{kp}/(m_{op}c^2)]^2}} = 4.01 \cdot 10^7\,ms^{-1}.$$

Zamenom (12.78), (12.79) i (12.80) u (12.75) dobija se

$$\cos\phi = 0.92 \Rightarrow \phi = 23.54^\circ.$$

Zadatak 31

Na jezgro litijuma naleti proton sa kinetičkom energijom E_p. Pri nuklearnoj reakciji obrazuju se dve α-čestice sa jednakim energijama. Naći ugao medju njihovim pravcima kretanja. Smatrati da su mase protona m_p, α-čestice m_α i masa jezgra litijuma m_{Li} poznate.

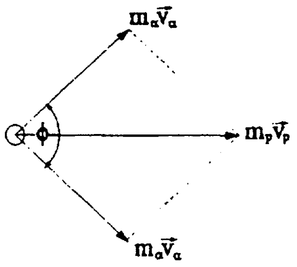
Rešenje

Zakon održanja energije glasi:

$$E_p + Q = 2E_\alpha, \qquad (12.81)$$

gde je $Q = (m_{Li} + m_p - 2m_\alpha)c^2$ energija reakcije, a E_α kinetička energija α-čestice.

Sa slike se vidi da je



$$\cos\frac{\phi}{2} = \frac{m_pv_p}{2m_\alpha v_\alpha} \Rightarrow \phi = 2\arccos\frac{m_pv_p}{2m_\alpha v_\alpha}, \qquad (12.82)$$

gde su v_p i v_α brzina protona i α-čestica, redom.

Kinetička energija protona je

$$E_p = \frac{m_p v_p^2}{2} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2E_p}{m_p}}, \tag{12.83}$$

a kinetička energija α-čestice

$$E_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \Rightarrow v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}}.$$

Zamenom izraza za E_p, Q i E_α u izraz (12.81), za brzinu α-čestice se dobija sledeći izraz:

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{E_p + Q}{m_\alpha}} = \sqrt{\frac{E_p + (m_{Li} + m_p - 2m_\alpha)c^2}{m_\alpha}}. \tag{12.84}$$

Zamenom (12.83) i (12.84) u (12.82) za ugao ϕ se dobija sledeći izraz:

$$\phi = 2 \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_p m_p}{[E_p + (m_{Li} + m_p - 2m_\alpha)c^2] m_\alpha}}.$$

Zadatak 32

Pri sudaru sa nepokretnim jezgrom mete α-čestica skrene za ugao $\phi = 30^o$. Jezgro takodje skrene za ugao $\phi = 30^o$. Odrediti masu jezgra mete m_x ako je masa α-čestice m_α.

Rešenje

Na slici su prikazani pravci i smerovi α-čestice i nepokretnog jezgra posle sudara. $v_{\alpha o}$ i v_α predstavljaju brzine α-čestice pre i posle sudara, redom, a v_x brzinu jezgra mete posle udara α-čestice.

Da bi se našla masa m_x, polazi se od zakona održnja impulsa

$$m_\alpha \vec{v}_{\alpha o} = m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_x \vec{v}_x.$$

Ako se ovaj sudar posmatra u koordinatnom sistemu čija je horizontalna osa vezana za pravac vektora $m_\alpha \vec{v}_{\alpha o}$, onda će komponenta ovog vektora biti horizontalna

$$m_\alpha v_{\alpha o} = m_\alpha v_\alpha \cos\phi + m_x v_x \cos\phi, \tag{12.85}$$

a vertikalna

$$0 = m_\alpha v_\alpha \sin\phi - m_x v_x \sin\phi \Rightarrow m_\alpha v_\alpha = m_x v_x. \tag{12.86}$$

Iz (12.85) i (12.86) sledi

$$m_\alpha v_{\alpha o} = m_x v_x \cos\phi + m_x v_x \cos\phi = 2m_x v_x \cos\phi. \tag{12.87}$$

S druge strane, zakon održanja energije daje

$$\frac{m_\alpha v_{\alpha o}^2}{2} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_x v_x^2}{2}. \tag{12.88}$$

Množenjem jednačine (12.88) sa $2m_\alpha$ i kvadriranjem (12.87) dobija se

$$m_\alpha^2 v_{\alpha o}^2 = m_\alpha^2 v_\alpha^2 + m_x m_\alpha v_x^2 = m_x^2 v_x^2 + m_x m_\alpha v_x^2, \tag{12.89}$$

odnosno

$$m_\alpha^2 v_{\alpha o}^2 = 4m_x^2 v_x^2 \cos^2\phi. \tag{12.90}$$

Iz (12.89) i (12.90) dobija se sledeća jednačina:

$$m_x^2 v_x^2 + m_x m_\alpha v_x^2 = 4m_x^2 v_x^2 \cos^2\phi. \tag{12.91}$$

Deljenjem (12.91) sa $m_x v_x^2$ i sredjivanjem dobija se sledeći izraz za m_x:

$$m_x = \frac{m_\alpha}{4\cos^2\phi - 1} = \frac{1}{2} m_\alpha.$$

Zadatak 33

Odrediti utrošak izotopa urana ${}^{235}_{92}U$ atomske elektrocentrale snage $P = 7\,MW$ za $t = 24\,h$, ako je koeficijent korisnog dejstva elektrocentrale $\eta = 20\%$. Pri fisiji svakog jezgra urana ${}^{235}_{92}U$ oslobadja se energija od $E_o = 190\,MeV$. Avogadrov broj je $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$.

Rešenje

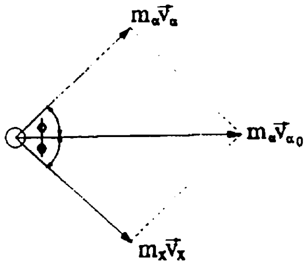
Energija E koja se oslobodi pri radu atomske elektrocentrale za 24 časa je

$$E = nE_o = \frac{m}{M} N_a E_o, \tag{12.92}$$

gde je n broj jezgara urana ${}^{235}_{92}U$ koji je doživeo fisiju, m masa jezgra i M molarna masa.

Korisna energija je

$$E_k = \eta E = Pt \Rightarrow E = \frac{Pt}{\eta}. \qquad (12.93)$$



Iz (12.92) i (12.93) za masu utrošenog urana se dobija

$$m = \frac{PtM}{\eta N_a E_o} = 0.039\,kg.$$

Zadatak 34
Za koliko je veća energija E_1 koja se oslobodi pri fisiji $m = 1\,kg$ urana ${}^{235}_{92}$U od energije E_2 dobijene pri sagorevanju $m_1 = 5 \cdot 10^4\,kg$ nafte? Smatrati da se pri fisiji jednog jezgra urana oslobadja energija od $E_o = 190\,MeV$. Toplota sagorevanja nafte je $Q_s = 4.6 \cdot 10^7\,Jkg^{-1}$, a Avogadrov broj $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$.

Rešenje

Energija koja se oslobodi pri nuklearnoj fisiji $1\,kg$ urana ${}^{235}_{92}$U je

$$E_1 = nE_o,$$

gde je n broj jezgara urana ${}^{235}_{92}$U. Broj jezgara urana je $n = mN_a/M$, gde je M molarna masa urana. Zamenom ovog izraza u izraz za energiju E_1 dobija se

$$E_1 = \frac{m}{M} N_a E_o = 7.79 \cdot 10^{13}\,J.$$

Energija koja se oslobodi sagorevanjem $m_1 = 5 \cdot 10^4\,kg$ nafte je $E_2 = m_1 Q_s = 2 \cdot 3 \cdot 10^{12}\,J$, a odnos ove dve energije je

$$\frac{E_1}{E_2} = 33.9.$$

Zadatak 35
Kolika se energija oslobadja u vodoničnoj bombi pri sintezi $m = 1\,kg$

helijuma? Sinteza helijuma predstavljena je nuklearnom reakcijom: ${}^2_1$D+${}^3_1$T→${}^4_2$He+${}^1_o$n. Masa neutrona je $m_n = 1.009\,u$, jezgra helijuma $m_{He} = 4.004\,u$, deuterijuma $m_D = 2.015\,u$, tricijuma $m_T = 3.017\,u$ i Avogadrov broj $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$.

Rešenje

Pri jednom aktu sinteze oslobadja se energija

$$\Delta E = (m_D + m_T - m_{He} - m_n)c^2 = 16.8\,MeV.$$

Broj atoma u jednom kilogramu helijuma mase m je $N = mN_a/M$, pa je ukupna energija koja se oslobadja pri sintezi $1\,kg$ helijuma

$$E = n_1 \Delta E = 40.4\,TeV.$$

Zadatak 36
Pretpostaviti da se energija koju zrači Sunce oslobadja u sledećoj reakciji: ${}^2_1$D+${}^2_1$D→${}^4_2$He+Q. Energija emitovana sa jedinice površine Sunca u jedinici vremena je $W = 8.2\,Jcm^{-2}min^{-1}$. Rastojanje izmedju Sunca i Zemlje je $R = 1.49 \cdot 10^{11}\,m$. Koliki je defekt mase Sunca u toku jedne godine zračenja? Koliki se broj atoma deuterijuma za to vreme utroši? Apsorpciju izračene energije na putu Sunce-Zemlja zanemariti. Masa deuterijuma je $m_D = 2.014735\,u$, masa helijuma $m_{He} = 4.003873\,u$ i brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8\,ms^{-1}$.

Rešenje

U reakciji

$${}^2_1D + {}^2_1D \rightarrow {}^4_2He + Q$$

Q je energija koja se oslobadja prilikom spajanja dva jezgra ${}^2_1$D u jezgro ${}^4_2$He (energija reakcije).

Defekt mase u ovom slučaju je

$$\Delta m = 2m_D - m_{He} = 4.25 \cdot 10^{-29}\,kg,$$

a energija reakcije je

$$Q = \Delta mc^2 = 3.82 \cdot 10^{-12}\,J.$$

Broj reakcija N_r koje se odigravaju za vreme $t = 1\,godina$ je

$$N_r = \frac{4\pi R^2 W}{Q} t = 3.15 \cdot 10^{45},$$

a broj atoma deuterijuma N_D koji se potroši za $t = 1\,godina$ je

$$N_D = 2N_r = 6.30 \cdot 10^{45}, \tag{12.94}$$

pa je defekt mase Sunca

$$\Delta M = N_r \Delta m = 1.34 \cdot 10^{17}\,kg.$$

13. Tabele i matematičke formule

13.1 Tabele

Tabela 1.1 Vrednosti nekih fundamentalnih konstanti u fizici

Konstanta	Simbol	Brojna vrednost
1	2	3
Brzina svetlosti u vakuumu	c	$299724458\,ms^{-1}$
Magnetna propustljivost vakuuma	μ_o	$12.566370614\,NA^{-1}$
Dielektrična propustljivost vakuuma	ϵ_o	$8.854187817 \cdot 10^{-12}\,Fm^{-1}$
Gravitaciona konstanta	γ	$6.67259 \cdot 10^{-1}\,m^3kg^{-1}s^{-2}$
Plankova konstanta	h	$6.6260755 \cdot 10^{-34}\,Js$
Elementarno naelektrisanje	e	$1.60217733 \cdot 10^{-19}\,C$
Masa elektrona	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31}\,kg$
Borov magneton	$eh/(2m_e)$	$9.2740154 \cdot 10^{-24}\,JT^{-1}$
Komptonova talasna dužina	$h/(m_ec)$	$2.46231058 \cdot 10^{-12}\,m$
Klasični poluprečnik elektrona	r_e	$2.81794092 \cdot 10^{-15}\,m$
Magnetni moment elektrona	μ_e	$9.2847701 \cdot 10^{-24}\,JT^{-1}$
Masa protona	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27}\,kg$
Komptonova talasna dužina protona	$h/(m_pc)$	$1.32141002 \cdot 10^{-15}\,m$
Magnetni moment protona	μ_p	$1.41060761 \cdot 10^{-26}\,JT^{-1}$
Maseno naelektrisanje protona	e/m_p	$9.5788309 \cdot 10^{7}\,Ckg^{-1}$
Molarna masa protona	M_p	$1.007276470 \cdot 10^{-3}\,kgmol^{-1}$
Količnik masa protona i elektrona	m_p/m_e	1836.152
Masa neutrona	m_n	$1.674928 \cdot 10^{-27}\,kg$
Komptonova talasa dužina neutrona	$h/(m_nc)$	$1.31959110 \cdot 10^{-15}\,m$
Magnetni moment neutrona	μ_n	$9.6623707 \cdot 10^{-27}\,JT^{-1}$
Molarna masa neutrona	M_n	$1.00866494 \cdot 10^{-3}\,kgmol^{-1}$
Količnik masa neutrona i elektrona	m_n/m_c	1838.683662
Količnik masa neutrona i protona	m_n/m_p	1.001378404
Masa deuterona	m_d	$3.3435860 \cdot 10^{-27}\,kg$
Molarna masa deuterona	M_d	$2.013553214 \cdot 10^{-3}\,kgm^{-1}$
Magnetni moment deuterona	μ_d	$0.43307375 \cdot 10^{-26}\,JT^{-1}$

1	2	3
Količnik masa deuterona i elektrona	m_d/m_e	3670.483014
Masa miona	m_μ	$1.8835327 \cdot 10^{-28}\,kg$
Molarna masa miona	M_μ	$1.13428913 \cdot 10^{-4}\,kgmol^{-1}$
Magnetni moment miona	μ_μ	$4.490451 \cdot 10^{-26}\,JT^{-1}$
Količnik masa miona i elektrona	m_μ/m_e	206.768262
Avogadrov broj	N_a	$6.0221367 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$
Atomska jedinica mase	m_n	$1.6605402 \cdot 10^{-27}\,kg$
Faradejeva konstanta	$Cmol^{-1}$	$96485.309\,Cmol^{-1}$
Plankova molarna konstanta	N_ah	$3.99031323 \cdot 10^{-10}\,Jsmol^{-1}$
Univerzalna gasna konstanta	R	$8.314510\,Jmol^{-1}K^{-1}$
Bolcmanova konstana	k	$1.380658 \cdot 10^{-23}\,JK^{-1}$
Molarna zapremina (idealnog gasa)	V_m	$22414.10\,cm^3mol^{-1}$
Lošmitova konstanta N_a/V_m	n_o	$2.686763 \cdot 10^{25}\,m^{-3}$
Štefan-Bolcmanova konstanta	σ	$5.670510 \cdot 10^{-8}\,Wm^{-2}k^{-4}$
Konstanta Vinovog zakona pomeranja	b	$2.897756 \cdot 10^{-3}\,m.K$

Tabela 1.2. Zadržane jedinice

Jedinica	Oznaka	Brojna vrednost
Elektronvolt	eV	$1.60217733 \cdot 10^{-19}\,J$
Atomska jedinica mase	u	$1.6605402 \cdot 10^{-27}\,kg$
Standardni atmosferski pritisak	atm	$101325\,Pa$
Standardno ubrzanje Zemljine teže	g_n	$9.80665\,ms^{-2}$

Tabela 1.3. Gustina nekih čvrstih tela (ρ) pri temperaturi 20°C

Materijal	$\rho\,(gcm^{-3})$	Materijal	$\rho\,(gcm^{-3})$
1	2	3	4
Metali, legure poluprovodnici		**Metali, legure poluprovodnici**	
Aluminijum	2.7	Bakar	8.93
Bizmut	9.8	Bronza	8.7 - 8.9
Vanadijum	6.02	Volfram	19.34
Germanijum	5.3	Gvoždje	7.88
Duraluminijum	2.79	Zlato	19.31
Kalaj	7.29	Kobalt	8.8
Konstantan	8.88	Liveno gvoždje	7.0
Magnezijum	1.76	Mangan	8.5
Mesing	8.4 - 8.7	Molibden	10.2
Natrijum	0.972	Nikelin	8.77
Nikl	8.9	Niobijum	8.57
Olovo	11.35	Permaloj	8.6
Platina	21.46	Plutonijum	19.25
Silicijum	2.3	Srebro	10.5
Talijum	11.86	Tantal	16.6
Minerali		**Minerali**	
Azbest	2.35 - 2.6	Barit	4.48
Beril	2.67 - 2.72	Grafit	2.21 - 2.25
Dijamant	3.51	Kalcit	2.6 - 2.8
Kaolinit	2.54 - 2.60	Kvarc	2.65
Korund	4.00	Liskun	2.6 - 3.2
Stene		**Stene**	
Bazalt	2.8 - 3.2	Boksit	2.9 -3.5
Granit	2.5 - 3.0	Kameni ugalj	1.2 - 1.5
Kreda	2.0	Mramor	2.5 - 2.8

1	2	3	4
Razni materijali		**Razni materijali**	
Beli vosak	0.95 - 0.96	Guma	1.2
Ebonit	1.2	Kost	1.8 - 2.0
Led (na 0°C)	0.917	Staklo ogledalsko	2.55
Staklo kvarcno	2.21	Staklo pireks	2.59
Porcelan	2.2 - 2.4	Ćilibar	1.1
Titan	4.5	Torijum	11.71
Uran	19.1	Hrom	7.15
Cink	7.15	Cirkonijum	6.5
Čelik	7.7 - 7.9		
Drvo		**Drvo**	
Bambus	0.4	Breza	0.7
Bukva	0.7 - 0.9	Jasen	0.6 - 0.8
Jelika	0.4 - 0.5	Kedar	0.5 - 0.6
Orah	0.6 - 0.7		
Plastične mase		**Plastične mase**	
Aminoplasti	1.4	Viniplast	1.38 - 1.40
Pleksiglas	1.18	Polivinil	1.34 - 1.40
Polistirol	1.06	Tekstolit	1.3 - 1.4
Teflon	2.1 - 2.4		

Tabela 1.4. Gustine nekih tečnosti ρ pri temperaturi 20°C

Tečnost	$\rho\,(gcm^{-3})$	Tečnost	$\rho\,(gcm^{-3})$
1	2	3	4
Azotna kiselina	1.51	Toluol	0.866
Anilin	1.02	Vazelinsko ulje	0.8
Aceton	0.791	Mašinsko ulje	0.9
Benzin	0.68 - 0.72	Heksan	0.660
Benzol	0.879	Heptan	0.684
Brom	3.12	Hlorovodonična kiselina	1,19

1	2	3	4
Voda	0.998	Hloroform	1.489
Glicerin	1.27	Etilalkohol	0.79
Živa	13.55	Metilalkohol	0.729
Mleko	1.03	Morska voda	1.01 - 1.03
Mravlja kiselina	1.22	Nafta	0.76 - 0.85
Nitrobenzol	1.2	Nitroglicerin	1.6
Sirćetna kiselina	1.049	Sumporna kiselina	1.83

Tabela 1.5. Gustine nekih gasova (ρ) pri temperaturi 0^oC i normalnom pritisku

Gas	$\rho\,(kgm^{-3})$	Gas	$\rho\,(kgm^{-3})$
Azot	1.251	Kripton	3.74
Argon	1.783	Neon	0.900
Acetilen	1.173	Ozon	2.139
Vazduh	1.293	Ugljendioksid	1.977
Vodonik	0.08988	Ugljenmonoksid	1.25
Kiseonik	1.429	Helijum	0.1785
Hlor	3.22		

Tabela 1.6. Ubrzanje pri slobodnom padanju (g) na različitim geografskim širinama

Širina	$g\,(ms^{-2})$	Širina	$g\,(ms^{-2})$
0^o	9.78030	50^o	9.81066
10^o	9.78186	60^o	9.81914
20^o	9.78634	70^o	9.82606
30^o	9.79321	80^o	9.83058
40^0	9.80166	90^o	9.83216
45^o	9.8062		

Tabela 1.7. Modul elastičnosti (E_y) i Poasonov koeficijent (μ) nekih materijala

Materijal	$E_y(\times 10^9\,Pa)$	μ
1	2	3
Aluminujum	63 - 70	0.32 - 0.36
Bakar liveni	82	-
Bakar valjani	108	0.31 - 0.34
Bakar izvlačen	127	0,33*)
Beton	15 - 40	0.1 - 0.15
Bizmut	32	0.33*)
Granit	35 - 50	0.1 - 0.15
Guma vulkanizirana	0.0015 - 0.005	0.46 - 0.49
Duraluminijum izvlačen	70	0.31*)
Invar	135	0.25*)
Kadmijum	50	0.3
Kaučuk	0.008	0.46
Konstantan	160	0.33
Legirani čelik	206	0,25 - 0.30
Liveno gvožđje belo	113 - 116	0.23 - 0.27
Liveno gvožđje kovno	150	-
Mangan	123	0.33
Valjani mesing	89 - 97	0.32 - 0.42
Nikl	204	0.28*)
Pleksiglas	5.25	0.35*)
Srebro	82.7	0.37*)
Staklo	49 -78	0.2 - 0.3
Titan	116	0.32*)
Celuloid	1.7 - 1.9	0.39
Valjani cink	82	0.27

*) Izračunate vrednosti

Tabela 1.8. Koeficijent viskoznosti nekih tečnosti (η) pri temperaturi 18^oC

Tečnost	$\eta(\times 10^{-2}\ Pas)$	Tečnost	$\eta(\times 10^{-2}\ Pas)$
Anilin	0.46	Živa	0.159
Aceton	0.0337	Ksilol	0.0647
Benzol	0.0673	Brom	0.102
Mašinsko ulje lako	11.3	Mašinsko ulje teško	66.0
Biljno ulje	120.0	Voda	0.105
Sirćetna kiselina	0.127	Ugljendi-sulfid	0.0382
Glicerin	139.3	Toluol	0.0613
Etar	0.0238	Hloroform	0.0579
Etilalkohol	0.122		

Tabela 1.9. Koeficijent viskoznosti (η) nekih gasova pri temperaturi 0^oC

Gas	$\eta(\times 10^{-5}\ Pas)$	Gas	$\eta(\times 10^{-5}\ Pas)$
Azot	1.67	Kiseonik	1.92
Azot monoksid	1.72	Metan	1.04
Azot suboksid	1.38	Ugljenmonoksid	1.67
Amonijak	0.93	Ugljendioksid	1.40
Vodonik	0.84	Helijum	1.89
Vazduh (bez CO_2)	1.72	Hlor	1.29

Tabela 1.10. Toplota sagorevanja (Q_s) nekih gasova

Gorivo	$Q_s(MJkg^{-1})$	Gorivo	$Q_s(MJkg^{-1})$
Alkohol	27	Benzin	46
Gas-generatorski	4,6	Gas-vodeni	10
Gas iz visoke peći	4	Gas- koks peći	14
Dizel gorivo	39	Drvo suvo	12
Mazut	39	Nafta	42
Petroleum	43	Ter	33
Kameni ugalj	27	Treset	13
Mrki ugalj	12	Ugalj briket	17

Tabela 1.11. Specifični toplotni kapacitet (c na 20^oC), toplot topljenja (Q_t), toplota isparavanja (Q_i), temperatura topljenja (t_t) i ključanja (t_k) nekih materijala

Materijal	$c(Jg^{-1}K^{-1})$	$t_t(^oC)$	$Q_t(Jg^{-1})$	$t_k(^oC)$	$Q_i(Jg^{-1})$
Aluminijum	0.88	658.3	322-394	2300	9220
Aceton	2.18	-94.3	96	56.2	524
Bakar	0.39	1083	214	2360	5410
Benzol	1.705	5.5	127	80.2	396
Bizmut	0.13	271	50	1560	855
Gvoždje	0.45	1530	293	3050	6300
Germanijum	0.31	958	478	2700	-
Glicerin	2.4	-	176	290	825
Etilalkohol	2.43	-114	105	78.3	846
Živa	0.138	-38.9	11.73	356.7	285
Zlato	0.13	1064.4	66.6	2800	1575
Kalaj	0.23	231.9	59	2270	3020
Kalijum	0.763	64	60.8	760	2080
Led (voda)	4.19	0	334	100	2260
Liveno gvoždje	0.50	1100-1200	96 - 138	-	-
Litijum	4.40	186	628	1317	20500
Magnezijum	1.3	651	373	1103	5450
Mesing	0.38	900	-	-	-
Natrijum	1.3	98	113	883	4220
Naftalin	1.3	80.3	151	218	316
Nikl	0.46	1452	243 - 306	3000	7210
Olovo	0.13	327.3	22,5	1750	880
Srebro	0.235	961.9	88	2184	2350
Toluol	1.73	-95.1	72.1	110.7	305
Ugljendisulfid	1.006	-112	66.6	46.2	348
Čelik	0.46	1300-1400	-	-	

Tabela 1.12. Trojna tačka (T_t), molarna toplota topljenja (λ_t), temperatura ključanja (T_k) pri normalnom pritisku i molarna toplota isparavanja tečnih gasova (λ_i)

Tečni gas	$T_t(K)$	$\lambda_t(Jmol^{-1})$	$T_k(K)$	$\lambda_i(Jmol^{-1})$
Azot	63.2	713	77.3	5530
Argon	83.8	1180	87.3	6610
Vazduh	60	-	81	6080
Vodonik	14.0	117	20.4	944
Kiseonik	54.4	445	90.2	6840
Neon	24.6	366	27.1	1770
Ugljendioksid	216.4	7950	194.7	16500
Fluor	55.2	1520	85.2	6460
Helijum	-	14	4.2	93.8

Napomena: Toplota topljenja odgovara temperaturi topljenja u trojnoj tački; toplota isparavanja - temperaturi ključanja pri normalnom pritisku.

Tabela 1.13. Kritična temperatura (t_k), kritični pritisak (p_k) i kritična gustin (ρ_k) nekih materijala

Materijal	$t_k(°C)$	$p_k(MPa)$	$\rho_k(gcm^{-3})$
Azot	-147.1	3.39	0.311
Aceton	235	4.76	0.268
Benzol	288.6	4.83	0.304
Voda	374.15	22.9	0.315
Vodonik	-239.9	1.3	0.031
Etilalkohol	243.1	6.38	0.276
Kiseonik	-118.8	5.03	0.430
Metan	-82.5	4.64	0.162
Metilalkohol	240	7.97	0.272
Naftalin	468.2	3.97	-
Propilalkohol	263.7	5.07	0.273
Sirćetna kiselina	321.6	5.79	0.351
Toluol	320.6	4.21	0.292
Ugljena kiselina	31.1	7.39	0.460
Helijum	-267.9	0.2	0.069

Tabela 1.14. Toplotni koeficijent linearnog širenja (α) nekih čvrstih materijala pri temperaturi 20°C

Materijal	$\alpha(\times 10^{-6} K^{-1})$	Materijal	$\alpha(\times 10^{-6} K^{-1})$
Aluminijum	22.9	Konstantan	17.0
Bakar	16.7	Kovno gvoždje	11.9
Bizmut	13.4	Liveno gvoždje	10.2
Bronza	17.5	Magnezijum	25.1
Viniplast	70	Mesing	18.9
Volfram	4.3	Nerdjajući čelik	9.6 - 16.0
Granit	8.3	Nikl	13.4
Drvo (duž vlakna)	2 - 6	Olovo	28.3
Drvo (normalno na vlakno)	50 - 60	Platina	8.9
Duraluminijum	22.6	Dijamant	0.91
Staklo obično	8.5	Staklo pireks	3.0
Ebonit	70	Ugljenični čelik	11.1 - 12.6
Zlato	14.5	Fosfor	3.0
Invar (36.1% Ni)	0.9	Cement i beton	12.0
Iridijum	6.5	Cink	30.0
Kalaj	21.4	Kvarc (legirani)	0.5

Tabela 1.15. Toplotni koeficijent linearnog širenja $\alpha(\times 10^{-6} K^{-1})$ nekih čvrstih materijala na različitim temperaturama

Materijal	α_o	α_{40}	α_{100}	α_{200}	α_{300}
Aluminijum	0	1	11	19.5	23
Bakar	0	1	9.5	15	17.5
Nerdjajući čelik	0	-0.2	8	13.5	16
Staklo (pireks)	0	-0.5	1.6	2.5	3.2
Titan	0	0.5	4	7	8.5
Ugljenični čelik	0	0.5	5	10	11.5

Napomena: α_1, α_{40}, α_{100}, α_{200} i α_{300} predstavljaju koeficijente linearnog širenja materijala na temperaturama 0, 40, 100, 200 i 300 K, redom.

Tabela 1.16. Toplotni koeficijent zapreminskog širenja nekih tečnosti (γ) pri temperaturi 18^oC

Tečnost	$\gamma(\times 10^{-4} K^{-1})$	Tečnost	$\gamma(\times 10^{-4} K^{-1})$
Azotna kiselina	12.4	Etilalkohol	11.0
Anilin	8.5	Živa	1.8
Aceton	14.3	Kerozin	10.0
Benzol	10.6	Metilalkohol	11.9
Voda na 5-10^oC	0.53	Nafta	9.2
10-20^oC	1.5	Propilalkohol	9.8
20-40^oC	3.02	Terpentin	9.4
40-60^oC	4.58	Toluol	10.8
60-80^oC	5.87	Ugljendisulfid	11.9
Glicerin	5.0		

Tabela 1.17. Koeficijenti toplotne provodnosti (λ) nekih gasova pri normalnom atmosferskom pritisku

Gas	Temperatura (^oC)	$\lambda(\times 10^{-4} Wm^{-1}K^{-1})$
Azot	15	251
Argon	41	187
Vazduh	20	257
Vodonik	15	1754
Kiseonik	20	262
Metan	0	307
Ugljendioksid	20	162
helium	43	1558

Tabela 1.18. Koeficijent difuzije gasova i para (D) u vazduhu pri temperaturi 0^oC i normalnom atmosferskom pritisku

Materijal	$D(\times 10^{-4} m^2s^{-1})$	Materijal	$D(\times 10^{-4} m^2s^{-1})$
Amonijak	0.2	Metan	0.2
Acetilen	0.19	Metilalkohol	0.13
Benzol	0.078	Sirćetna kiselina	0.107
Vodena para	0.21	Toluol	0,07
Vodonik	0.64	Ugljendioksid	0.14

Tabela 1.19. Efektivni prečnik molekula (d) nekih gasova

Gas	Prečnik $d(nm)$	Gas	Prečnik $d(nm)$
Azot	0.37	Metan	0.444
Argon	0.36	Neon	0.354
Vodonik	0.27	Ugljenmonoksid	0.370
Živa	0.356	Ugljendioksid	0.454
Kiseonik	0.356	Helijum	0.215
Kripton	0.314	Hlor	0.544
Ksenon	0.40		

Tabela 1.20. Van der Valsove konstante za neke gasove i pare

Gas	a	b	Gas	a	b
Azot	0.141	39.2	Kiseonik	0.138	31.8
Amonijak	0.422	37.2	Kripton	0.234	39.9
Argon	0.136	32.3	Ksenon	0.415	51
Aceton	1.58	98.5	Metan	0.228	27
Benzol	1.85	115	Metilalkohol	0.95	67
Voda	0.555	30.5	Neon	0.21	17.1
Vodonik	0.0245	26.6	Propan	0.92	84.5
Etilalkohol	1.22	84	Propilalkohol	1.5	101
Živa	0.82	16.7	Helijum	0.0035	23.8

Napomena: Konstanta a izražena je u jedinicama (Jm^3mol^{-2}) a konstanta b u jedinicama ($\times 10^{-6} m^3mol^{-1}$)

Tabela 1.21. Brzina zvuka (c) u nekim materijalima pri različitim temperaturama

Materijal	$t(^oC)$	$c(ms^{-1})$	Materijal	$t(^oC)$	$c(ms^{-1})$
1	2	3	4	5	6
Gas			Gas		
Azot	0	334	Amonijak	0	415
Vazduh	0	331	Vodonik	0	1285
Vodena para	134	494	Kiseonik	0	316
Helium	0	965			

1	2	3	4	5	6
Tečnost			**Tečnost**		
Alkohol	20	1120	Aceton	20	1192
Morska voda	17	1550	Obična voda	25	1500
Glicerin	20	1923	Živa	20	1451
Petroleum	34	1295			
Čvrst materijal			**Čvrst materijal**		
Aluminijum	20	5080	Bakar	20	3710
Gvoždje	20	5170	Ebonit	20	1570
Zemlja	20	8200	Led	20	3280
Mesing	20	3490	Olovo	20	2730
Kvarcno staklo	20	5370	Cink	20	3810

Tabela 1.22. Intenzitet zvuka (I) i amplitude pritiska (Δp)

Decibel Db	I (Wm^{-2})	Δp (Pa)	Primeri
0	10^{-12}	$2\cdot 10^{-5}$	Granica čujnosti čovečjeg uva
10	10^{-11}	$6.5\cdot 10^{-5}$	Šum lišća. Tihi šapat na rastojanju $1\,m$
20	10^{-10}	$2\cdot 10^{-4}$	Tihi vrt
30	10^{-9}	$6.5\cdot 10^{-4}$	Tiha soba . Srednji nivo šuma u pozorišnoj sali. Pianisimo zvuk violine
40	10^{-8}	$2\cdot 10^{-3}$	Tiha muzika
50	10^{-7}	$6.5\cdot 10^{-3}$	Glasni govornik. Šum u prostoriji sa otvorenim prozorima
60	10^{-6}	0.02	Glasni radioprijemnik. Srednji nivo šuma govorne reči na rastojanju $1\,m$
70	10^{-5}	0.0645	Šum motora kamiona. Šum u tramvaju
80	10^{-4}	0.20	Bučna ulica
90	10^{-3}	0.645	Fortisimo velikog simfonijskog orkestra
100	10^{-2}	2.0	Automobilska sirena
110	10^{-1}	6.45	Pneumatski čekić
120	1	20	Reaktivni motor na rastojanju $5\,m$. Jaki udari groma
130	10	64.5	Granica bola

Tabela 1.23. Svetlosni fluks (Φ) sijalica sa metalnim vlaknom

Snaga(W)	Φ (lm)	Snaga(W)	Φ (lm)
25	205	40	307
60	620	75	840
100	1240	150	1900
200	2700	300	4400
500	8200	1000	18200

Tabela 1.24. Relativna spektralna osetljivost oka (V_λ) za različite talasne dužine (λ)

$\lambda(nm)$	V_λ	$\lambda(nm)$	V_λ	$\lambda(nm)$	V_λ
400	0.0004	520	0.710	640	0.175
420	0.0040	540	0.954	660	0.061
440	0.023	560	0.995	680	0.017
460	0.060	580	0.870	700	0.0041
480	0.139	600	0.631	720	0.00105
500	0.323	620	0.381	740	0.00025
				760	0.00006

Napomena: U tabeli su date srednje vrednosti V_λ za ljude sa normalnim vidom.

Tabela 1.25. Luminacija (L) nekih površina

Površina	$L(cdm^{-2})$
Bioskopski ekran	25 - 50
List bele hartije pri osvetljenju $30-50\,lx$	10 - 15
Sneg pod normalnim sunčevim zracima	$3\cdot 10^4$
Površina Meseca	$2.5\cdot 10^3$

Tabela 1.26. Luminacija (L) nekih svetlosnih izvora

Izvor	$L(cdm^{-2})$
Sunce	$1.5 \cdot 10^{9}$
Živin luk supervisokog pritiska	$(1.2 - 1.5) \cdot 10^{9}$
Usijano metalno vlakno lampe	$(1.5 - 2.0) \cdot 10^{8}$
Nebo noću, bez Meseca	10
Iskra pri pražnjenju u atmosferi	
ksenona	$1.1 \cdot 10^{11}$
argona	$1.5 \cdot 10^{11}$
azota	$2.1 \cdot 10^{11}$
helijuma	$1.5 \cdot 10^{12}$

Tabela 1.27. Osvetljenost (E) u nekim tipičnim slučajevima

Tipični slučajevi	$E(lx)$
Sunčevi zraci u podne	100000
Na otvorenom prostoru	1000
U svetloj sobi (blizu prozora)	100
Na radnom stolu	100 - 200
Neophodno za čitanje	30 - 50
Na bioskopskom ekranu	85 - 120

Tabela 1.28. Indeks prelamanja (n) nekih materijala

Materijal	n	Materijal	n
Alkohol	1.36	Vazduh	1.00029
Voda	1.33	Glicerin	1.47
Dijamant	2.42	Kedrovo ulje	1.52
Kvarc	1.54	Led	1.31
Pleksiglas	1.50	Flint staklo-lako	1.608
Flint staklo teško	1.752	Flint staklo-najteže	1.90
Kron staklo lako	1.515	Kron staklo teško	1.61

Tabela 1.29. Talasne dužine vidljive svetlosti (λ)

Boja	$\lambda(nm)$	Boja	$\lambda(nm)$
Ljubičasta	380 - 450	Žuto-zelena	550 - 575
Indigo	450 - 480	Žuta	575 - 585
Plava	480 - 510	Narandžasta	585 - 620
Zelena	510 - 550	Crvena	620 - 760

Tabela 1.30. Koeficijenti refleksije (R), apsorpcije (A) i transmisije (T) za vidljivu svetlost

Materijal (ili sredina)	R	A	T
Polirani aluminijum	0.85-0.90	0.10-0.15	-
Beli lim	0.60-0.70	0.30-0.40	-
Polirani nikl	0.55-0.60	0.40-0.45	-
Svežepolirano srebro	0.90-0.92	0.08-0.10	-
Stakleno posrebreno ogledalo	0.85-0.88	0.12-0.15	-
Bela hartija	0.75	0.25	-
Mat staklo (debljine $1.3 - 3.7\,mm$)	0.10	0.05	0.85
Organsko staklo (debljine $3.3\,mm$)	0.10	0.06	0.84
Mlečno staklo (debljine $2 - 3\,mm$)	0.45	0.15	0.40
Prozorsko staklo (debljine $1 - 2\,mm$)	0.08	0.02	0.9
Crni somot	0.005	0.995	-

Tabela 1.31. Granični ugao totalne refleksije (α u stepenima) vidljive svetlosti za pojedine materijale

Materijal	α	Materijal	α
Dijamant	25	Voda	49
Glicerin	43	Led	50
Organsko staklo	42	Ugljendisulfid	38
Alkohol	47	Staklo raznih vrsta	32 - 42
Optičko staklo	35 - 41		

Tabela 1.32. Izlazni rad (A) elektrona za neke materijale

Materijal	$A(eV)$	Materijal	$A(eV)$	Materijal	$A(eV)$
Na	1.60	Mg	3.58	Al	3.38
Si	4.50	K	1.60	Ca	3.38
Ti	4.14	V	4.44	Cr	4.38
Mn	4.14	Fe	3.90	Co	4.23
Cu	4.46	Zn	3.66	Ga	3.80
Ge	4.50	As	5.11	Sc	4.42
Rb	2.16	Sr	2.60	Zr	3.60
Y	3.07	Nb	3.94	Mo	4.10
Tc	4.52	Rh	4.52	Rb	4.49
Ag	4.29	Cd	4.00	In	4.08
Sn	4.21	Sb	4.14	Te	4.70
Ba	1.73	Ta	3.96	W	4.38
Ir	4.57	Pt	5.39	Au	4.46
Hg	4.50	Pb	3.94	Bi	4.17
Ni	4.32	Cs	1.89		

Tabela 1.33. Granična talasna dužina (λ_o) fotoefekta za neke materijale

Materijal	$\lambda_o(nm)$	Materijal	$\lambda_o(nm)$
Aluminijum	450	Barijumoksid	1235
Barijum	484	Bakaroksid	239
Barijum na volframu	1130	Parafin	215
Bizmut	330	Platina	230
Voda	200	Živa	260
Volfram	272	Rubidijum	573
Germanijum	272	Olovo	370
Gvoždje	287	Selen	220
Zlato	320	Sumpor	230
Kalijum	550	Srebro	260
Kalcijum	370	Antimon	310
Litijum	500	Torijum na volframu	473
Magnezijum	330	Cezijum	620
Bakar	270	Cezijum na volframu	909
Natrijum	540	Cezijum na platini	895
Nikal	249	Cink	290

Tabela 1.34. Spektar atoma vodonika

Serija	Formula	n	Talasna dužina(nm)
Lajmanova	$\nu = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$	2	121.568
		3	102.573
		4	97.254
Balmerova	$\nu = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$	3	656.2793
		4	486.1317
		5	434.0466
		6	410.1738
		7	397.0075
		8	388.9052
		9	383.5387
		10	379.7900
Pašenova	$\nu = R(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2})$	4	1875.11
		5	1281.81
		6	1093.81
		7	1004.94
		8	954.60
		9	922.91
		10	901.49
		11	886.29
Breketova	$\nu = R(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2})$	5	4051.04
		6	2625.16

Tabala 1.35. Šema popunjavanja nivoa i podnivoa atoma

1	2	3	4	5	6	7
Nivo	Podnivo	n	l	m_l	s	N_{max}
K	$1s$	1	0	0	$\pm 1/2$	2
	$2s$		0	0	$\pm 1/2$	2
L	$2p$	2		-1	$\pm 1/2$	
			1	0	$\pm 1/2$	6
				+1	$\pm 1/2$	
	$3s$		0	0	$\pm 1/2$	2
	$3p$		1	-1	$\pm 1/2$	
				0	$\pm 1/2$	6
				+1	$\pm 1/2$	
M		3		-2	$\pm 1/2$	
				-1	$\pm 1/2$	
	$3d$		2	0	$\pm 1/2$	10
				+1	$\pm 1/2$	
				+2	$\pm 1/2$	
	$4s$		0	0	$\pm 1/2$	2
	$4p$		1	-1	$\pm 1/2$	
				0	$\pm 1/2$	6
				+1	$\pm 1/2$	
	$4d$	4	2	-2	$\pm 1/2$	
				-1	$\pm 1/2$	
N		4	2	0	$\pm 1/2$	10
				+1	$\pm 1/2$	
				+2	$\pm 1/2$	
	$4f$		3	-3	$\pm 1/2$	
				-2	$\pm 1/2$	
				-1	$\pm 1/2$	
				0	$\pm 1/2$	14

1	2	3	4	5	6	7
				+1	$\pm 1/2$	
				+2	$\pm 1/2$	
				+3	$\pm 1/2$	

Napomena: n, l, m_l i s predstavljaju glavni kvantni broj, orbitalni kvantni broj, magnetni kvantni broj i spinski magnetni kvantni broj, redom, dok N_{max} predstavlja maksimalni broj elektrona.

Tabela 1.36. Jonizacioni potencijal (U_i) atoma nekih elemenata

Z	Element	Oznaka	$U_i(eV)$	Z	Oznaka	Element	$U_i(eV)$
1	Vodonik	H	13.539	2	Helijum	He	24.45
3	Litijum	Li	5.39	4	Berilijum	Be	9.48
4	Bor	B	8.4	6	Ugljenik	C	11.217
7	Azot	N	14.47	8	Kiseonik	O	13.56
9	Fluor	F	18.6	10	Neon	Ne	21.5
11	Natrijum	Na	5.14	12	Magnezijum	Mg	7.61
13	Aluminijum	Al	5.96	14	Silicijum	Si	7.39
15	Fosfor	P	10.3	16	Sumpor	S	10.31
17	Hlor	Cl	12.96	18	Argon	Ar	15.69
19	Kalijum	K	4.32	20	Kalcijum	Ca	6.09
21	Skandijum	Sc	6.57	22	Titan	Ti	6.80
23	Vanadijum	V	6.76	24	Hrom	Cr	6.74
25	Mangan	Mn	7.40	26	Gvoždje	Fe	7.83
27	Kobalt	Co	7.81	28	Nikl	Ni	7.606
29	Bakar	Cu	7.35	30	Cink	Zn	9.35
31	Galijum	Ga	5.97	32	Germanijum	Ga	7.85
33	Arsen	As	9.4	34	Selen	Se	9.75
35	Brom	Br	11.80	36	Kripton	Kr	13.940
37	Rubidijum	Rb	4.16	38	Stroncijum	Sr	5.67
39	Itrijum	Y	6.5	42	Molibden	Mo	7.35
44	Rutenijum	Ru	7.7	45	Rodijum	Rh	7.7
46	Paladijum	Pd	8.5	47	Srebro	Ag	7.54
48	Kadmijum	Cd	8.95	49	Indijum	In	5.76
50	Kalaj	Sn	7.37	51	Antimon	Sb	8.5
53	Jod	J	10.44	54	Ksenon	Xe	12.078
55	Cezijum	Cs	3.88	56	Barijum	Ba	5.19
57	Lantan	La	5.61	75	Renijum	Re	7.98

Tabela 1.37. Vreme poluraspada radioaktivnih izotopa

Simbol	T	NR	E_α	$E_{\beta max}$	E_γ	AP	A/ρ
1	2	3	4	5	6	7	8
$^{3}_{1}H$	12.3 g	β^-		0.018			9700
$^{14}_{6}C$	5370 g	β^-		0.156			4.45
$^{22}_{11}Na$	2.6 g	β^+,EZ,γ		0.54	1.28(100)		6250
$^{24}_{11}Na$	15 h	β^-,γ		1.4	1.37 (100)		9.6.10^6
					2.75(100)		
					1.78		
$^{28}_{13}Al$	2.3 min	β^-,γ		2.87			$665 \cdot 10^7$
$^{31}_{14}Si$	2.62 h	β^-,γ		1.48			$3.85 \cdot 10^5$
$^{32}_{15}P$	14.3 d	β^-		1.71			$2.85 \cdot 10^5$
$^{35}_{16}S$	87 d	β^-		0.168			$4.28 \cdot 10^4$
$^{40}_{19}K$	$1.3 \cdot 10^9$ g	β^-,		1.32(89)			$6.85 \cdot 10^3$
		EZ,		EZ(11)	1.46(11)		
		γ					
$^{42}_{19}K$	12.4 h	β^-,γ		2(18)	1.52(18)		$6 \cdot 10^6$
				3.53(82)			
$^{45}_{20}Ca$	165 d	β^-		0.256			$1.76 \cdot 10^4$
$^{56}_{25}Mn$	2.6 h	β^-,γ		0.75(20)	0.84(100)		$1.76 \cdot 10^4$
				1.05(30)	1.81(23)		
				2.86(50)	2.11(15)		
$^{59}_{26}Fe$	45 d	β^-,γ		0,27(46)	1.1(57)		$4.9 \cdot 10^4$
				0.46(54)	1.28(43)		
$^{60}_{27}C0$	5.3 g	β^-,γ		0.31	1.17(100)		1120
					1.33(100)		
$^{89}_{38}Sr$	50.4 d	β^-		1.47			$2.9 \cdot 10^4$
$^{90}_{38}S$	28 g	β^-		0.54	$^{90}_{39}Y$		142
$^{91}_{39}Y$	64 h	β^-,γ			2.26	1.7	$5.4 \cdot 10^5$
$^{90}_{42}Mo$	5.7 h	β^+,γ		1.2	0.25	$^{90}_{41}Nb$	$6.1 \cdot 10^6$
$^{92}_{39}Y$	59 d	β^-,γ		1.55	1.21		$2.43 \cdot 10^4$
				2.7	1.39		
				1.3	0.56		
					0.4-2.1		
$^{95}_{40}Zr$	65 d	β^-,γ		0.36(43)	0.72(43)	$^{95}_{41}Nb$	$4.15 \cdot 10^4$

1	2	3	4	5	6	7	8
		Ip		0.39(55)	0.75(54)		
$^{95}_{41}Nb$	33 d	β^-,γ		0.16	0.77		$3.92 \cdot 10^4$
$^{97}_{41}Nb$	72 min	β^-,γ		1.27	0.66		$2.7 \cdot 10^7$
$^{103}_{45}Rh$	54 min						
$^{99}_{43}Tc$	$2.1 \cdot 10^5$ g	β^-		0.29			0.018
$^{103}_{44}Ru$	40 d	β^-,γ		0.2	0.5		
				0.13	0.05		
				0.69			
$^{131}_{53}J$	8 d	β^-,γ		0.34(93)	0.284(53)		$1.24 \cdot 10^5$
				0.61(88)	0.364(80)		
					0.637(9)		
					0.7(3)		
					0.08(2)		
$^{133}_{54}Xe$	5, 27 d	β^-,γ		0,35	0.081		
$^{135}_{54}Xe$	9.2 h	β^-,γ		0.91	0.25	$^{135}_{55}Cs$	$2.5 \cdot 10^6$
				0.61			
$^{137}_{55}Cs$	30 g	β^-,γ	0,52(92)	0.661			87
				1.20(8)			
$^{138}_{55}Cs$	32 min	β^-,γ	·	3.4	1.43		$4.25 \cdot 10^7$
					1		
					0.46		
					2.2		
$^{140}_{56}Ba$	13 d	β^-,γ		0.48(30)	0.54	$^{140}_{57}La$	$7.15 \cdot 10^4$
				1.2(70)	0.46		
$^{140}_{57}La$	40.2 h	β^-,γ		1.34	1.6		
				0.8-2.15	0.11-2.9		
$^{141}_{58}Ce$	32.5 d	β^-,γ	0.45(67)	0.145			$2.85 \cdot 10^4$
$^{141}_{57}La$	3,9 h	β^-,γ		2.4	1.4	$^{141}_{58}Ce$	$5.7 \cdot 10^6$
$^{143}_{59}Pr$	13.8 d	β^-		0.92			
$^{144}_{58}Ce$	285 d	β^-,γ	0.28(30)	0.033 do	$^{144}_{59}Pr$		3180
				0.32(65)	0.135		
$^{204}_{81}Tl$	3.6 d	$\beta-$		0.76			
$^{147}_{60}Nd$	11.02	β^-,γ		0.81	0.092		
				0.37	0.53		
					0.12-0.69		
$^{210}_{84}Po$	138 d	α,γ	5.3		0.8		4500
$^{222}_{86}Rn$	3,8 d	α,γ	5.5		0.5	$^{218}_{84}Po$	1, 55.10^5
$^{226}_{88}Ra$	1620 g	α,γ	4.59(6)		0.186(6)	$^{222}_{85}Rn$	0.98
			4.78(94)				

1	2	3	4	5	6	7	8
$^{227}_{89}$Ac	$21,2\,g$	α,β^-	4.94(1,2)		0.046(99)	$^{223}_{87}$Fr	
						$^{227}_{90}$Th	74.5
$^{232}_{90}$Th	$1.41\cdot10^{10}\,g$	α,γ	3.95(24)		0.059	$^{228}_{88}$Ra	$1.1\cdot10^{7}$
			4.01(76)				
$^{233}_{92}$U	$1.62\cdot10^{5}\,g$	α,γ	4.8		0.043	$^{229}_{90}$Th	$9.5\cdot10^{-3}$
			4.78		0.054		
			4.73				
$^{235}_{92}$U	$7.1\cdot10^{8}\,g$	α,γ	4.17(6)		0.19	$^{231}_{90}$Th	$2.14\cdot10^{5}$
			4.56(84)				
$^{238}_{92}$U	$4.51\cdot10^{9}\,g$	α,γ	4.13(23)		0.048	$^{234}_{90}$Th	$3.3\cdot10^{7}$
$^{237}_{93}$Np	$2.14\cdot10^{6}\,g$	α,γ	4.52		0.087	$^{233}_{91}$Pa	$7\cdot10^{-4}$
			4.87		0.2-0.29		
$^{239}_{94}$Pu	$2.4\cdot10^{4}\,g$	α,γ,e^-	5.15		0.013	$^{235}_{92}$U	0.062
			5.13		0.38-0.42		
$^{246}_{98}$Cf	$36\,h$	α,γ	6.75		0.044-0.15	$^{242}_{96}$Cm	$3.52\cdot10^{5}$

Napomena: (T) (*min*-minuti, *h*-časovi, *d*-dani i *g*-godine), način raspada (NR), energija α (E_α), β (E_β) i γ (E_γ) zračenja, aktivni potomak (AP) i specifična aktivnost $[A/\rho \times (37\,TBqkg^{-1})]$. U kolonama 4, 5 i 6 date su energije zračenja u MeV i procenat učešća (%)

Tabela 1.38. Talasne dužine ($\lambda \times 10^{-1}\,nm$) karakterističnog rendgenskog zračenja nekih elemenata

Element	$K_{\alpha2}$	$K_{\alpha1}$	$K_{\beta1}$
1	2	3	4
Aluminijum	8,34173	8.33934	7.96
Argon	4.19474	4.19180	3.8860
Barijum	0.389668	0.385111	0.341507
Brom	1.04382	1.03974	0.93327
Vanadijum	2.50738	2.50356	2.28440
Bizmut	0.165717	0.160789	0.142779
Volfram	0.213828	0.209010	0.185181
Volfram	$\boxed{1.30162}$		
Galijum	1.34399	1.340083	1.20835
Hafnijum	0.227024	0.222227	0.19686
Germanijum	1.258011	1.254054	1.12936
Gvoždje	1.93998	1.936042	1.75661
Zlato	0.185075	0.180195	0.159810
Zlato	$\boxed{1.10651}$		

1	2	3	4
Indijum	0.516544	0.512113	0.455181
Iridijum	0.195904	0.191047	0.169367
Itrijum	0.83305	0.82884	0.74126
Jod	0.437829	0.433318	0.384564
Kadmijum	0.539422	0.535010	0.475730
Kalijum	3.7445	3.7414	3.4539
Kalcijum	3.36166	3.35839	3.0897
Kobalt	1.79285	1.788965	1.62070
Silicijum	7.12791	7.12542	6.753
Kripton	0.9841	0.9801	0.8790
Ksenon	0.42087	0.41634	0.36941
Lantan	0.375313	0.370737	0.328686
Mangan	2.10578	2.10182	1.91021
Bakar	1.544390	1.540562	1.3926
Molibden	0.713590	0.709300	0.632872
Molibden	$\boxed{5.0488}$		
Arsen	1.17987	1.17588	1.05783
Nikal	1.661747	1.65791	1.500135
Niobium	0.75044	0.74620	0.66634
Kalaj	0.495053	0.490599	0.435877
Osmijum	0.201639	0.196794	0.174431
Paladijum	0.589821	0.585448	0.521123
Platina	0.190381	0.185511	0.164501
Platina	$\boxed{1.17958}$		
Renijum	0.207611	0.202781	0.179697
Renijum	$\boxed{1.25917}$		
Radijum	0.617630	0.613279	0.546200
Rubidijum	0.92969	0.925553	0.82921
Rutenijum	0.647408	0.643083	0.573067
Olovo	0.170294	0.165376	0.146810
Selen	1.10882	1.10477	0.99268
Srebro	0.563798	0.559407	0.497685
Srebro	$\boxed{3.87023}$		
Skandijum	3.0342	3.0309	2.7796
Stroncijum	0.87943	0.87526	0.78345
Antimon	0.474827	0.470354	0.417735
Talijum	0.175036	0.170136	0.150980

1	2	3	4
Tantal	0.220305	0.215497	0.190890
Telur	0.455784	0.451295	0.400659
Titan	2.75216	2.74851	2.51391
Fosfor	6.160	6.157	5.795
Hlor	4.7307	4.7278	4.4034
Hrom	2.29361	2.28970	2.08487
Cezijum	0.404835	0.400290	0.355050
Cink	1.43900	1.435155	1.29525
Cirkonijum	0.79015	0.78593	0.70228

Napomena: Uokvirene vrednosti u tabeli odgovaraju linijama najveće talasne dužine L-serije

Tabela 1.39. Neke astronomske veličine

Poluprečnik Zemlje	$6.37.10^6\ m$
Masa Zemlje	$5.96 \cdot 10^{24}\ kg$
Srednja gustina Zemlje	$5500\ kgm^{-3}$
Poluprečnik Sunca	$6.95 \cdot 10^8\ m$
Masa Sunca	$1.97 \cdot 10^{30}\ kg$
Srednja gustina Sunca	$1400\ kgm^{-3}$
Poluprečnik Meseca	$1.74 \cdot 10^6\ m$
Masa Meseca	$7.3 \cdot 10^{22}\ kg$
Srednje rastojanje do Meseca	$3.84 \cdot 10^8\ m$
Srednje rastojanje do Sunca	$1.5 \cdot 10^{11}\ m$
Period rotacije Meseca oko Zemlje	27 *dana* 7 *h* i 43 *min*

Grčki alfabet

$A, \alpha \to$ alfa	$I, \iota \to$ jota	$P, \rho \to$ ro
$B, \beta \to$ beta	$K, \kappa \to$ kapa	$\Sigma, \sigma \to$ sigma
$\Gamma, \gamma \to$ gama	$\Lambda, \lambda \to$ lambda	$T, \tau \to$ tau
$\Delta, \delta \to$ delta	$M, \mu \to$ mi	$\Upsilon, \upsilon \to$ ipsilon
$E, \epsilon \to$ epsilon	$N, \nu \to$ ni	$\Phi, \phi \to$ fi
$Z, \zeta \to$ zeta	$\Xi, xi \to$ ksi	$X, \chi \to$ hi
$H, \eta \to$ eta	$O, o \to$ omikron	$\Psi, \psi \to$ psi
$\Theta, \theta \to$ teta	$\Pi, \pi \to$ pi	$\Omega, \omega \to$ omega

13.2 Matematičke formule

13.2.1 Vektorski račun

Ako su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori duž x, y i z osa, redom, tada skalarni proizvodi:

$$\begin{aligned} \vec{i}\cdot\vec{i} &= \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j} &= \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0, \end{aligned} \tag{13.1}$$

a vektoriski proizvodi:

$$\begin{aligned} \vec{i}\times\vec{i} &= \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \\ \vec{i}\times\vec{j} &= \vec{k};\ \ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i};\ \ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} \end{aligned}$$

Vektor $\vec{a}$ sa intenzitetima a_x, a_y i a_z duž x, y i z osa može se izraziti na sledeći način:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sa intenzitetima a, b i c, važi:

$$\begin{aligned} \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c}) \\ (s\vec{a})\times\vec{b} &= \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}); \end{aligned}$$

gde s je skalar.

Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta, \tag{13.2}$$

a vektorski proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a} = (a_yb_z - b_ya_z)\vec{i} + (a_zb_x - b_za_x)\vec{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\vec{k} \\ \vec{a}\times\vec{b} &= ab\sin\theta \\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \end{aligned}$$

gde je θ ugao koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

13.2.2 Pravila eksponenta

$$\begin{aligned} x^o &= 1 \\ x^1 &= x \\ x^n x^m &= x^{n+m} \\ \frac{x^n}{x^m} &= x^{n-m} \\ x^{1/n} &= \sqrt[n]{x} \\ (x^n)^m &= x^{nm} \end{aligned}$$

13.2.3 Kvadratna jednačina

Opšti oblik kvadratne jednačine je

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gde je x nepoznata veličina, a a, b i c koeficijenti jednačine

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

13.2.4 Logaritmi

$$\begin{aligned} \log(a \cdot b) &= \log a + \log b \\ \log \frac{a}{b} &= \log a - \log b \\ \log a^n &= n \log a \\ \ln e &= 1 \\ \ln e^a &= a \\ \ln \frac{1}{a} &= -\ln a \end{aligned}$$

13.2.5 Trigonometrijske funkcije

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\ \sin^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ \cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \\ \tan\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \\ \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \pm \sin\beta &= 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)]\cos[\frac{1}{2}(\alpha\mp\beta)] \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]\cos[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)] \\ \cos\alpha - \cos\beta &= 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]\sin[\frac{1}{2}(\beta-\alpha)] \\ \tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \end{aligned}$$

13.2.6 Razvijanje u redove

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots \\ (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ \ln(1\pm x) &= \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \ldots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \mid x \mid < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

13.2.7 Diferencijali (u i v su funkcije jedne promenljive x, a a i m konstante)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a) &= 0\\
\frac{d}{dx}(au) &= a\frac{du}{dx}\\
\frac{d}{dx}(u+v) &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\\
\frac{d}{dx}(x^m) &= mx^{m-1}\\
\frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{1}{x}\\
\frac{d}{dx}(uv) &= u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{(\frac{du}{dx}v-\frac{dv}{dx}u)}{v^2}\\
\frac{d}{dx}(e^{ax}) &= ae^{ax}\\
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x\\
\frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x\\
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x\\
\frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x\\
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \tan x\sec x\\
\frac{d}{dx}(\csc x) &= -cotx\cos x
\end{aligned}
$$

13.2.8 Neki neodredjeni integrali

$$
\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\quad (n\neq -1)\\
\int\frac{dx}{x} &= \int x^{-1}dx = \ln x\\
\int\frac{dx}{a+bx} &= \frac{1}{b}\ln(a+bx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{(a+bx)^2} &= -\frac{1}{b(a+bx)}\\
\int\frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\\
\int\frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}\quad (a^2-x^2>0)\\
\int\frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}\quad (x^2-a^2>0)\\
\int\frac{xdx}{a^2\pm x^2} &= \pm\frac{1}{2}\ln(a^2\pm x^2)\\
\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \sin^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a}\quad (a^2-x^2>0)\\
\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} &= \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\\
\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= -\sqrt{a^2-x^2}\\
\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} &= \sqrt{x^2\pm a^2}\\
\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a})\\
\int x\sqrt{a^2-x^2}dx &= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\\
\int x\exp(ax)dx &= \frac{\exp(ax)}{a^2}(ax-1)\\
\int\frac{dx}{a+b\exp(cx)} &= \frac{x}{a}-\frac{1}{ac}\ln[(a+b\exp cx)]\\
\int\sin axdx &= -\frac{1}{a}\cos ax\\
\int\cos axdx &= \frac{1}{a}\sin ax\\
\int\tan axdx &= -\frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}(\sec ax)\\
\int\cot axdx &= \frac{1}{a}\ln(\sin ax)\\
\int\sec axdx &= \frac{1}{a}\ln(\sec ax+\tan ax) = \frac{1}{a}\ln[\tan(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4})]\\
\int\csc axdx &= \frac{1}{a}\ln(\csc ax-\cot ax) = \frac{1}{a}\ln(\tan\frac{ax}{2})
\end{aligned}
$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a}(\tan ax) - x$$

$$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a}(\cot ax) - x$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}]$$

$$\int x(\sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$$

$$\int \exp(ax) dx = \frac{1}{a}\exp(ax)$$

$$\int \ln(ax) dx = (x \ln ax) - x$$

$$\int \sin^{-1} ax dx = x(\sin^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1 - a^2x^2}}{a}$$

$$\int \cos^{-1} ax dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1 - a^2x^2}}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Napomena: Svakom neodredjenom integralu treba dodati integracionu konstantu.