Granične vrednosti funkcija

Granične vrednosti funkcija

Poznate granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{x}=e.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1, \qquad (\log=\log_e);$

Primer 1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin ax}{ax}\,ax}{\frac{\sin bx}{bx}\,bx}=\dfrac{a}{b};$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin ax}{ax}\Big)^2 a^2=a^2;$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{kx}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin\frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}}\Big)^2\dfrac{k^2}{2}=\dfrac{k^2}{2};$

Zadaci:

1. Odrediti:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\Big(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\Big)$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{2x}\Big)$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{x}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}}}{1-\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\Big(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\Big)$;

f) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt{2x}-2}$;

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{8x}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}$;

Rešenje: a) Imamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\Big(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\Big)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\Big(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\Big)\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) Računamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{2x}\Big)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{2x}\Big)\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-2x}{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+\sqrt{2}\Big)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\Big(\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+\sqrt{2}\Big)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

c) Nalazimo

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\Big(\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\Big)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}=\frac{1}{9}.$$

d) Određujemo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\left|\begin{array}{c}a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\ a^2-b^2=(a-b)(a+b)\end{array}\right|$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt{1+\frac{5}{x}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}$$

$$\times\frac{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}-\left(1+\frac{3}{x}\right)}{1-\left(1+\frac{5}{x}\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{5}{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}=-\frac{2}{15}.$$

e) Imamo

$$L=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x^2-3x+2}\Big)=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}\Big)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4-(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-2)(x-4)}=\frac{1}{3}.$$

f) Nalazimo

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt{2x}-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt{2x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+4x}+3}{\sqrt{1+4x}+3}\cdot\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{1+4x-9}{2x-4}\cdot\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{1+4x}+3} = \lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{2(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{1+4x}+3}\\
&= \lim_{x\to 2} 2\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{1+4x}+3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

g) Određujemo

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{8x}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{8x}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{(8x)^2}+2\sqrt[3]{8x}+4}{\sqrt[3]{(8x)^2}+2\sqrt[3]{8x}+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{8x-8}{x^2+3-4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt[3]{(8x)^2}+2\sqrt[3]{8x}+4}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{8(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt[3]{(8x)^2}+2\sqrt[3]{8x}+4} = \lim_{x\to 1}\frac{8}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt[3]{(8x)^2}+2\sqrt[3]{8x}+4}\\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

2. Neka je

$$
f(x) = \frac{27x^3-4x^2+2013\sin x}{2013x^3-4x^2+27x}.
$$

Odrediti

$$
\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0} f(x);
$$

Rešenje: Računamo

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{27x^3-4x^2+2013\sin x}{2013x^3-4x^2+27x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(27-4\frac{1}{x}+2013\frac{\sin x}{x^3}\right)}{x^3\left(2013-4\frac{1}{x}+27\frac{1}{x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{27-4\frac{1}{x}+2013\frac{\sin x}{x^3}}{2013-4\frac{1}{x}+27\frac{1}{x^2}} = \frac{27}{2013}.
\end{aligned}
$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{27x^3 - 4x^2 + 2013\sin x}{2013x^3 - 4x^2 + 27x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(27x^2 - 4x + 2013\frac{\sin x}{x})}{x(2013x^2 - 4x + 27)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{27x^2 - 4x + 2013\frac{\sin x}{x}}{2013x^2 - 4x + 27} = \frac{2013}{27}.$$

3. Odrediti graničnu vrednost

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{x - 1},$$

a zatim naći

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)\dots(\sqrt[10]{x} - 1)}{(x-1)^9};$$

Rešenje: Važi:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Imamo

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{(\sqrt[k]{x} - 1)(\sqrt[k]{x^{k-1}} + \sqrt[k]{x^{k-2}} + \ldots + \sqrt[k]{x} + 1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[k]{x^{k-1}} + \sqrt[k]{x^{k-2}} + \ldots + \sqrt[k]{x} + 1} = \frac{1}{k}.$$

Sada je

$$L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)\dots(\sqrt[10]{x} - 1)}{(x-1)^9} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\,\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \cdots \frac{\sqrt[10]{x} - 1}{x - 1}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10} = \frac{1}{10!}.$$

4. Neka je

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 14} + x}{\sqrt{x^2 - 2} + x}.$$

Odrediti granične vrednosti

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x);$$

Rešenje: Neka je $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i $L_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
Imamo

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1} = 1.$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+14}-x}{\sqrt{x^2+14}-x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-2}-x}{\sqrt{x^2-2}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+14-x^2}{x^2-2-x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-2}-x}{\sqrt{x^2+14}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{14}{-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-2}-x}{\sqrt{x^2+14}-x} \\
&= = \lim_{x\to-\infty} \frac{14}{-2} \cdot \frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}-x}{|x|\sqrt{1-\frac{14}{x^2}}-x} = \Big| \, |x| = -x, \quad x\to-\infty \Big| \\
&= \lim_{x\to-\infty} (-7) \frac{-x(\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1)}{-x(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1)} = \lim_{x\to-\infty} (-7) \frac{\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1} = -7.
\end{aligned}$$

5. Neka je

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}.$$

Odrediti granične vrednosti

$$\lim_{x\to3} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x);$$

Rešenje: Određujemo

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} \cdot \frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} \\
&= \frac{x^2-2x+6-(x^2+2x-6)}{x^2-4x+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} \\
&= \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} \\
&= \frac{-4}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} = -\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

$$L_1 = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-4}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} = -\frac{1}{3},$$

$$L_2 = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-4}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} = 0,$$

$$L_3 = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-4}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} = 0.$$

6. Odrediti

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin^2 5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(1+\sin x)\sin^3 x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\tan 2x\tan\Big(\dfrac{\pi}{4}-x\Big)$;

i) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

Rešenje: a) Određujemo

$$L = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cos x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cos x}{\cos\frac{x}{2}} = 0.$$

b) *I način:* Određujemo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin^2 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin^2 5x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2 25x^2} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

II način: Određujemo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin^2 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)+(1-\cos 3x)}{\sin^2 5x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x+2\sin^2\frac{3x}{2}}{\sin^2 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2\frac{9}{4}}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2 25} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

c) Određujemo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{(1+\sin x)\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{(1+\sin x)\sin^3 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{(1+\sin x)\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\sin x)\sin^2 x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin x)\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin x)4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+\sin x)\cos^2\frac{x}{2}\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

d) Određujemo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4}(1+\cos x+\cos^2 x)}{\frac{\sin 2x}{2x}2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2(1+\cos x+\cos^2 x)}{4\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

e) Određujemo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(\sin^2 x)}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} 2\Big(\frac{\sin(\sin^2 x)}{\sin^2 x}\Big)^2 \frac{\sin^4 x}{x^4} = 2.$$

f) Određujemo

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\frac{x}{2}}{2\Big(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}/2}\Big)^2\frac{x}{4}} = \sqrt{2}.$$

g) Određujemo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x+\sin x}-\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x+\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+2x+\sin x}+\sqrt{\cos x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\Big(\sqrt{1+2x+\sin x}+\sqrt{\cos x}\Big)}{1+2x+\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\Big(\sqrt{1+2x+\sin x}+\sqrt{\cos x}\Big)}{2\sin^2\frac{x}{2}+2x+\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\Big(\sqrt{1+2x+\sin x}+\sqrt{\cos x}\Big)}{x\Big(2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}+2+\frac{\sin x}{x}\Big)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x+\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}+2+\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{3}.$$

h) Neka je

$$L = \lim_{x\to\pi/4} \tan 2x \tan\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big).$$

Uvodimo smenu

$$\frac{\pi}{4}-x=t \quad \Rightarrow \quad x\to\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad t\to 0,$$
$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\tan t,$$
$$\tan 2x = \tan 2(\frac{\pi}{4}-t) = \tan(\frac{\pi}{2}-2t) = \cot 2t = \frac{1}{\tan 2t} = \frac{1-\tan^2 t}{2\tan t}.$$

Sada je

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t(1-\tan^2 t)}{2\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\tan^2 t}{2}=\frac{1}{2}.$$

i) Neka je

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}.$$

Uvodimo smenu

$$t=\frac{\pi}{2}-x \quad\Rightarrow\quad x\to\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad t\to 0, \qquad \sin x=\sin\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)=\cos t.$$

Imamo

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}2\Big(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\Big)^2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

j) Određujemo

$$\begin{aligned}
L&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

7. Odrediti:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{x^2}{x^2+x+1}\Big)^{1+2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{3x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{3}{4x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2x}{x-1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x/x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;

Rešenje: a) Računamo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2}{x^2+x+1}\Big)^{1+2x}=\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+x+1-(x+1)}{x^2+x+1}\Big)^{1+2x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\Big(\Big(1-\frac{x+1}{x^2+x+1}\Big)^{\frac{-(x^2+x+1)}{x+1}}\Big)^{\frac{-(x+1)(1+2x)}{x^2+x+1}}.$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(x+1)(1+2x)}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x}+2\Big)}{x^2\Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x}+2\Big)}{\Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)}=-2.$$

Sada je

$$L=e^{-2}.$$

b) Nalazimo

$$L=\lim_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to0}\Big((1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}\Big)^{\frac{\tan x}{3x}}=\lim_{x\to0}\Big((1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}\Big)^{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3\cos x}}$$
$$=e^{1/3}.$$

c) Neka je

$$L=\lim_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{3}{4x^2}}=\lim_{x\to0}\Big((1+1-\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}\Big)^{\frac{3(1-\cos x)}{4x^2}}. \qquad (0.1)$$

Imamo

$$\lim_{x\to0}\frac{3(1-\cos x)}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3}{8}\Big(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2=\frac{3}{8}. \qquad (0.2)$$

Na osnovu (0.1) i (0.2) dobijamo

$$L=e^{3/8}.$$

d) Određujemo

$$L=\lim_{x\to1}x^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to1}\Big((1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}\Big)^{2x}=e^2.$$

e) Računamo

$$L = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x/x} = \lim_{x\to 0}\Big((1+\cos x-1)^{1/(\cos x-1)}\Big)^{\frac{(\cos x-1)\cot x}{x}}. \tag{0.3}$$

Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\cot x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\cos x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\frac{1}{4}\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{0.4}$$

Zamenom (0.4) u (0.3) dobijamo $L = e^{-1/2}$.

f) Određujemo

$$L = \lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/\sin x} = \lim_{x\to 0}\Big((1+x+e^x-1)^{1/(x+e^x-1)}\Big)^{(x+e^x-1)/\sin x}. \tag{0.5}$$

Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{\sin x}+\frac{e^x-1}{\sin x}\Big)\\ = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{\sin x}+\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\Big) &= 1+1=2.\end{aligned} \tag{0.6}$$

Zamenom (0.6) u (0.5) dobijamo

$$L = e^2.$$

g) Određujemo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to 0}\Big(1+\frac{\sin x}{x}-1\Big)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\Big(\Big(1+\frac{\sin x-x}{x}\Big)^{\frac{x}{\sin x-x}}\Big)^{\frac{\sin x}{-x}} = e^{-1}.\end{aligned}$$

8. Izračunati:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{1+3x^2}}-e}{1-\cos x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\log(1+2x)}{\log(1+x^2)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\cos x}{\log(1-x^2)}$;

Rešenje: a) Određujemo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt[3]{1+3x^2}}-e}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}-1\right)}{1-\cos x}=\left|\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1\right|\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}-1\right)}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{1-\cos x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}-1\right)}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}+\sqrt[3]{1+3x^2}+1}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}+\sqrt[3]{1+3x^2}+1}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}-1\right)}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}\cdot\frac{3x^2}{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}+\sqrt[3]{1+3x^2}+1}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}-1\right)}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}\cdot\frac{6}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}+\sqrt[3]{1+3x^2}+1}=2e.
\end{aligned}$$

b) Određujemo

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{e^{x^2}-1}=1.$$

c) Određujemo

$$L=\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+2x)}{\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\log(1+2x)}{2x}2x}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}x^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\log(1+2x)}{2x}}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}\cdot\frac{2}{x}=+\infty.$$

d) Određujemo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\Big(\frac{\log(1+x)}{x} + \frac{\log(1-x)}{-x}\Big) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

e) Neka je

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \cos x}{\log(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\Big(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\Big) + (1-\cos x)}{\log(1-x^2)}. \tag{0.7}$$

Imamo

$$\sqrt[3]{1+x^2} - 1 = \Big(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\Big)\frac{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1}$$
$$= \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1}, \tag{0.8}$$

i

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}. \tag{0.9}$$

Ako iskoristimo jednakosti (0.8) i (0.9) i podelimo brojilac i imenilac u (0.7) sa x^2 dobijamo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\Big(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\Big) + (1-\cos x)}{\log(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2}+1} + 2\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}}{\frac{\log(1-x^2)}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2}+1} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2}{-\frac{\log(1-x^2)}{-x^2}} = -\frac{5}{6}.$$

9. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{e^{2010x} - 2}{e^{2011x} + 1}.$$

Odrediti

$$\lim_{x\to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0} f(x);$$

Rešenje: Neka je

$$L_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2010x} - 2}{e^{2011x} + 1} = \left| \begin{array}{ccc} & t = -x & \Rightarrow \\ x \to -\infty & \Leftrightarrow & t \to +\infty \end{array} \right|$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-2010t} - 2}{e^{-2011t} + 1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^{2010t}} - 2}{\frac{1}{e^{2011t}} + 1} = -2.$$

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2010x} - 2}{e^{2011x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2010x}\left(1 - \frac{2}{e^{2010x}}\right)}{e^{2011x}\left(1 + \frac{1}{e^{2011x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{2}{e^{2010x}}}{e^{x}\left(1 + \frac{1}{e^{2011x}}\right)} = 0.$$

$$L_3 = \lim_{x\to0} \frac{e^{2010x} - 2}{e^{2011x} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Neprekidnost funkcije

Funkcija f je neprekidna u tački a ako važi

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

Neka je a tačka nagomilavanja oblasti definisanosti funkcije f. Funkcija u tački a ima prekid ukoliko nije definisana u tački a ili ukoliko jeste definisana u tački a, ali nije neprekidna u a.

Ako je a tačka prekida funkcije f i važi

$$\lim_{x\to a-} f(x) = B_1, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = B_2, \qquad B_1, B_2 \in \mathbb{R},$$

tada kažemo da u tački a funkcija ima *prekid prve vrste.* U slučaju $B_1 = B_2$ prekid je *otklonjiv.*

Ako je a tačka prekida funkcije f i prekid nije prve vrste onda je *prekid druge vrste.*

Zadaci:

1. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 2^{1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

u tački $x = 0$.

Rešenje: Računamo levi i desni limes u nuli

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 2^{1/x} = \left| x \to 0- \ \Leftrightarrow \ \tfrac{1}{x} \to -\infty \right| = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2^{1/x} = \left| x \to 0+ \ \Leftrightarrow \ \tfrac{1}{x} \to +\infty \right| = +\infty.$$

Imamo $f(0) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. S obzirom da desni limes nije konačan prekid je druge vrste. Funkcija je neprekidna sleva.

2. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos^4(1-e^x)}{x\sin 3x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x = 0$.

Rešenje: Vrednost koeficijenta $a \in \mathbb{R}$ određujemo iz uslova $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$.
Određujemo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4(1-e^x)}{x\sin 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(1-e^x))(1+\cos(1-e^x)(1+\cos^2(1-e^x))}{x\sin 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{1-e^x}{2}(1+\cos(1-e^x))(1+\cos^2(1-e^x))}{x\sin 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin\frac{1-e^x}{2}}{\frac{1-e^x}{2}}\right)^2\left(\frac{1-e^x}{2}\right)^2(1+\cos(1-e^x))(1+\cos^2(1-e^x))}{3x^2\frac{\sin 3x}{3x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin\frac{1-e^x}{2}}{\frac{1-e^x}{2}}\right)^2\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2(1+\cos(1-e^x))(1+\cos^2(1-e^x))}{6\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Imamo $a = f(0) = \frac{2}{3}$.

3. Odrediti vrednost konstante $A \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1-x^3} + \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1 \end{cases}$$

bude neprekidna u tački 1.

Rešenje: Funkcija je neprekidna u tački 1 ako važi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = A$. Određujemo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\Big(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\Big) = \lim_{x\to 1}\frac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{1-x^3} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2} = 1.\end{aligned}$$

Imamo $A = 1$.

4. Odrediti vrednost konstante $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{ax^2}, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcija $x+a$ je neprekidna za $x < 0$, jer je elementarna. Funkcija

$$\frac{1-\cos x}{ax^2}$$

je neprekidna za $x > 0$ kao količnik elementarnih funkcija i imenilac je različit od nule.

Realnu konstantu a ćemo odrediti iz uslova neprekidnosti u tački $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$

Određujemo

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x+a) = a = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{ax^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{ax^2} = \lim_{x\to 0+}\Big(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2\frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}.$$

Iz uslova neprekidnosti imamo

$$a = \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Odrediti vrednost konstante $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 1, \\ axe^{1/(1-x)}, & x > 1, \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rešenje: Kao elementarne funkcije, $x + a$ je neprekidna za $x < 1$, a $axe^{1/(1-x)}$ je neprekidna za $x > 1$. Realnu konstantu a ćemo odrediti iz uslova neprekidnosti u tački $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$

Određujemo

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x + a) = 1 + a = f(1),$$

i

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{1-x} = \lim_{t\to 0-} \frac{1}{t} = -\infty,$$

odakle je

$$\lim_{x\to 1+} e^{1/(1-x)} = 0$$

i

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} axe^{1/(1-x)} = 0.$$

Imamo $1 + a = 0$, pa je $a = -1$.

6. Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2015x}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\log x^2}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcije
$$\frac{\sin 2015x}{x}, \qquad ax+b, \qquad \frac{\log x^2}{x-1}$$
su neprekidne na $(-\infty,0)$, $(0,1)$ i $(1,+\infty)$ redom, kao elementarne.

Realne konstante a i b ćemo odrediti iz uslova neprekidnosti u tačkama $x=0$ i $x=1$.

Uslov neprekidnosti u $x=0$:
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$
Određujemo
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin 2015x}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin 2015x}{2015x} 2015 = 2015,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (ax+b) = b = f(0).$$
Dobijamo $b = 2015$.

Uslov neprekidnosti u $x=1$:
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$
Određujemo
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (ax+b) = a+b = f(1),$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\log x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2\log(1+(x-1))}{x-1}$$
$$= \lim_{t\to 0+} \frac{2\log(1+t)}{t} = 2,$$
pri čemu smo uveli smenu $t = x-1$ i važi $x \to 1+ \;\Rightarrow\; t \to 0+$.

Dobijamo $a+b=2$, odakle je $a = 2-2015 = -2013$.

7. Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(e^x-1)}{2x}, & x<0, \\ x^2+ax+b, & 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \end{cases}$$
bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcije

$$\frac{\sin(e^x - 1)}{2x}, \qquad x^2 + ax + b), \qquad \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

su neprekidne na $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$ redom, kao elementarne.

Realne konstante a i b ćemo odrediti iz uslova neprekidnosti u tačkama $x = 0$ i $x = 1$.

Uslov neprekidnosti u $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = f(0).$$

Određujemo

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin(e^x - 1)}{2x} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{2} \frac{\sin(e^x - 1)}{e^x - 1} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x^2 + ax + b) = b = f(0).$$

Dobijamo $b = \dfrac{1}{2}$.

Uslov neprekidnosti u $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1).$$

Određujemo

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = f(1),$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)\Big(\sqrt{x} + 1\Big)}{(x-1)\Big(\sqrt{x+3} + 1\Big)} = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x+3} + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dobijamo $1 + a + b = \frac{2}{3}$, odakle je $a = \dfrac{2}{3} - 1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{6}$.

8. Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2}{\pi^2} - 1, & x \le -\pi/2, \\ 2b + \sin x, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ a - 5b \log_{\pi/2} x, & x > \pi/2 \end{cases}$$

bude neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcije

$$\frac{ax^2}{\pi^2} - 1, \qquad 2b + \sin x, \qquad a - 5b \log_{\pi/2} x$$

su neprekidne na $(-\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ i $(\pi/2, +\infty)$ redom, kao elementarne.

Realne konstante a i b određujemo iz uslova neprekidnosti u tačkama $x = -\pi/2$ i $x = \pi/2$.

Uslov neprekidnosti u $x = -\pi/2$:

$$\lim_{x \to -\pi/2-} f(x) = \lim_{x \to -\pi/2+} f(x) = f(-\pi/2).$$

Određujemo

$$\lim_{x \to -\pi/2-} f(x) = \lim_{x \to -\pi/2-} \left(\frac{ax^2}{\pi^2} - 1 \right) = \frac{a}{4} - 1 = f(-\pi/2),$$

$$\lim_{x \to -\pi/2+} f(x) = \lim_{x \to -\pi/2+} (2b + \sin x) = 2b - 1.$$

Dobijamo $\frac{a}{4} - 1 = 2b - 1$, odnosno $a = 8b$.

Uslov neprekidnosti u $x = \pi/2$:

$$\lim_{x \to \pi/2-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2+} f(x) = f(\pi/2).$$

Određujemo

$$\lim_{x \to \pi/2-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2-} (2b + \sin x) = 2b + 1 = f(\pi/2),$$

$$\lim_{x \to \pi/2+} f(x) = \lim_{x \to \pi/2+} \left(a - 5b \log_{\pi/2} x \right) = a - 5b.$$

Važi $2b + 1 = a - 5b$, odakle imamo $a = 7b + 1$.

Koeficijente a i b određujemo kao rešenje sistema

$$\begin{cases} a = 8b \\ a = 7b + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = 1, \quad a = 8.$$

9. Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{4x}, & x < 0, \\ b^2x^2 + b(x+2), & 0 \le x \le 2, \\ e^{1/(2-x)} - 1, & x > 2 \end{cases}$$

bude neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcije

$$\frac{\sin ax}{4x}, \qquad b^2x^2 + b(x+2), \qquad e^{1/(2-x)} - 1$$

su neprekidne na $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$ redom, kao elementarne.

Realne konstante a i b određujemo iz uslova neprekidnosti u tačkama $x = 0$ i $x = 2$.

Uslov neprekidnosti u $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$

Određujemo

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin ax}{4x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin ax}{ax}\,\frac{a}{4} = \frac{a}{4},$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (b^2x^2 + b(x+2)) = 2b = f(0).$$

Dobijamo $\frac{a}{4} = 2b$, odnosno $a = 8b$.

Uslov neprekidnosti u $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2).$$

Određujemo

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (b^2x^2 + b(x+2)) = 4b^2 + 4b = f(2),$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \left(e^{1/(2-x)} - 1\right) = \left| \begin{array}{l} x \to 2+ \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2-x} \to -\infty \\ \Rightarrow\ e^{1/(2-x)} \to 0 \end{array} \right| = -1.$$

Imamo $4b^2 + 4b = -1$, odakle je $(2b+1)^2 = 0$, odnosno $b = -1/2$. Sada je $a = 8b = -4$.

10. Odrediti konstante $A, B \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3}x + e^{1/(x-1)}, & x < 1, \\ A, & x = 1, \\ B + \arctan \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

neprekidna na svako $\mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcije $\left(\frac{\pi}{3}x + e^{1/(x-1)}\right)$ i $\left(B + \arctan \frac{1}{x-1}\right)$ su neprekidne za $x < 1$ i $x > 1$, redom, kao elementarne.

Realne konstante A i B određujemo iz uslova neprekidnosti u tački $x = 1$.

Najpre određujemo

$$x \to 1- \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x-1} \to -\infty \;\Rightarrow\; e^{1/(x-1)} \to 0, \quad \arctan \frac{1}{x-1} \to -\frac{\pi}{2},$$

$$x \to 1+ \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x-1} \to +\infty \;\Rightarrow\; e^{1/(x-1)} \to +\infty, \quad \arctan \frac{1}{x-1} \to \frac{\pi}{2}.$$

Uslov neprekidnosti u $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$

Leva i desna granična vrednost su

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(\frac{\pi}{3}x + e^{1/(x-1)}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \left(B + \arctan \frac{1}{x-1}\right) = B + \frac{\pi}{2}.$$

Dobijamo

$$\frac{\pi}{3} = A = B + \frac{\pi}{2}$$

odakle je $A = \dfrac{\pi}{3}$, $B = -\frac{\pi}{6}$.

11. Odrediti tačke prekida i vrstu prekida funkcije

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$, **b)** $f(x) = xe^{1/x}$, **c)** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$,

d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, **e)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Rešenje: U svakom od datih slučajeva tačka $x = 0$ je tačka prekida. Odredićemo vrstu prekida.

a) Određujemo levi i desni limes funkcije f u nuli

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \left| \begin{array}{l} x \to 0- \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{1}{x} \to -\infty \\ \Rightarrow \;\; e^{1/x} \to 0 \end{array} \right| = 1. \tag{0.10}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \left| \begin{array}{l} x \to 0+ \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{1}{x} \to +\infty \\ \Rightarrow \;\; e^{1/x} \to +\infty \end{array} \right| = 0. \tag{0.11}$$

Na osnovu rezultata (0.12) i (0.13) imamo da je prekid prve vrste, neotklonjiv $(\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x))$.

b) Levi i desni limes funkcije f u nuli je

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} xe^{1/x} = \left| \begin{array}{l} x \to 0- \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{1}{x} \to -\infty \\ \Rightarrow \;\; e^{1/x} \to 0 \end{array} \right| = 0. \tag{0.12}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{1/x} &= \left| \begin{array}{l} x \to 0+ \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{1}{x} \to +\infty \\ \Rightarrow \;\; e^{1/x} \to +\infty \end{array} \right| \\ &= \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty. \end{aligned} \tag{0.13}$$

Na osnovu rezultata (0.12) i (0.13) imamo da je prekid druge vrste.

c) Za funkciju $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ ne postoje ni leva ni desna granična vrednost. Naime, ako posmatramo nizove $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0, \qquad x'_n = \frac{2}{4n\pi + \pi} \to 0, \qquad n \to +\infty$$

vrednosti funkcije f u tačkama koje pripadaju ovim nizovima formiraju nizove $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{f(x'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergiraju ka različitim vrednostima

$$f(x_n) = \sin n\pi = 0 \to 0, \qquad f(x'_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \to 1, \qquad n \to +\infty.$$

Na osnovu Hajneove definicije granična vrednost date funkcije ne postoji. Prekid je druge vrste.

d) Za funkciju f imamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Prekid je prve vrste, otklonjiv.

e) Imamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Leva i desna granična vrednost su konačne i različite, pa je prekid prve vrste, neotklonjiv.

12. Odrediti vrstu prekida u tački $x = 0$ za funkciju

a) $f(x) = 2^{-1/x}$, **b)** $f(x) = 2^{-1/x^2}$.

Rešenje: a) Određujemo levi i desni limes funkcije

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 2^{-1/x} = \left| x \to 0- \;\Rightarrow\; \tfrac{-1}{x} \to +\infty \right| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2^{-1/x} = \left| x \to 0+ \;\Rightarrow\; \tfrac{-1}{x} \to -\infty \right| = 0.$$

Imamo $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. S obzirom da levi limes nije konačan, prekid je druge vrste.

b) Određujemo limes funkcije (levi i desni limes su jednaki)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{-1/x^2} = \left| x \to 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{-1}{x^2} \to -\infty \right| = 0.$$

Imamo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, prekid je prve vrste, otklonjiv.

13. Odrediti tačke prekida i vrstu prekida funkcije

$$f(x) = \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}.$$

Rešenje: Funkciju $f(x)$ možemo napisati u obliku

$$f(x)=\frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x-1)}.$$

Uočavamo da su tačke prekida $x=1$ i $x=3$. Odredićemo vrstu prekida u ovim tačkama.

Tačka $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x-1}=\left|\begin{array}{l} x\to 1- \;\Rightarrow\; \frac{1}{x-1}\to-\infty \\ x\to 1- \;\Rightarrow\; \frac{\sin(x-3)}{x-3}\to\frac{\sin 2}{2}\end{array}\right|=-\infty.$$

Dobijena leva granična vrednost je beskonačna, pa možemo i bez određivanja desne granične vrednosti da zaključimo da je prekid druge vrste.

Tačka $x=3$:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x-1}=\left|\begin{array}{l} x\to 3 \;\Rightarrow\; \frac{\sin(x-3)}{x-3}\to 1 \\ x\to 3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x-1}\to\frac{1}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}.$$

U ovom slučaju smo dobili konačnu graničnu vrednost, istu i levu i desnu graničnu vrednost, pa je prekid prve vrste, otklonjiv.

14. Dokazati da je $x=1$ tačka prekida funkcije

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\arctan x+e^{1/(1-x)}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$$

i odrediti vrstu prekida.

Rešenje: Određujemo levu i desnu graničnu vrednost:

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\arctan x+e^{1/(1-x)}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1- \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-x}\to+\infty \\ x\to 1- \;\Rightarrow\; e^{\frac{1}{1-x}}\to+\infty \\ x\to 1- \;\Rightarrow\; \arctan x\to\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=0,$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{\arctan x+e^{1/(1-x)}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1+ \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-x}\to-\infty \\ x\to 1+ \;\Rightarrow\; e^{\frac{1}{1-x}}\to 0 \\ x\to 1+ \;\Rightarrow\; \arctan x\to\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=\frac{4}{\pi}.$$

Imamo

$$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 1+} f(x) = \frac{4}{\pi}.$$

Funkcija ima prekid u $x = 1$ (neprekidna je sleva). Prekid je prve vrste.

15. Odrediti tačke prekida i ispitati vrstu prekida funkcije $f(x) = [x]$.

Rešenje: Za svako $x \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveno $n \in \mathbb{Z}$ tako da važi

$$n \leq x < n+1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = [x] = n.$$

Sada imamo, za $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x\to n-} f(x) = \lim_{x\to n-} [x] = n-1,$$

$$\lim_{x\to n+} f(x) = \lim_{x\to n+} [x] = n = f(n).$$

S obzirom da leva i desna granična vrednost nisu jednake funkcija ima prekid u svakoj tački $n \in \mathbb{Z}$, a kako su dobijene granične vrednosti konačne, prekid je prve vrste, neotklonjiv.

16. Ispitati vrstu prekida funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = 1 + 2^{1/x}, \qquad h(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}.$$

Rešenje: Za funkciju f važi

$$x \to 0- \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} \to -\infty$$

odakle imamo i bez određivanja desne granične vrednosti ($x \to 0+ \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \to +\infty$) da je prekid druge vrste.

Za funkciju $g(x)$ imamo

$$x \to 0- \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \to -\infty \;\Rightarrow\; 2^{1/x} \to 0 \;\Rightarrow\; 1 + 2^{1/x} \to 1,$$

$$x \to 0+ \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \to +\infty \;\Rightarrow\; 2^{1/x} \to +\infty \;\Rightarrow\; 1 + 2^{1/x} \to +\infty.$$

Desna granična vrednost je beskonačna, pa je prekid druge vrste.

U slučaju funkcije $h(x)$ važi

$$x \to 0- \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \to -\infty \;\Rightarrow\; 2^{1/x} \to 0 \;\Rightarrow\; 1 + 2^{1/x} \to 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1 + 2^{1/x}} \to 1,$$

$$x \to 0+ \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \to +\infty \;\Rightarrow\; 2^{1/x} \to +\infty \;\Rightarrow\; 1 + 2^{1/x} \to +\infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{1 + 2^{1/x}} \to 0.$$

Leva i desna granična vrednost su konačne i različite, pa je prekid prve vrste, neotklonjiv.