# 4 Путеви и циклуси

## Преглед теорије

**Дефиниција 1.** Низ чворова

$$v_p \;\to\; v_{p+1} \;\to\; \cdots \;\to\; v_q$$

са особином да грана $e = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = p, p+1, \ldots, q-1$, припада скупу $E$, назива се пут у графу $G = (V, E)$ који повезује чворове $v_p$ i $v_q$. Ако је $v_p = v_q$, пут се назива затвореним или кружним.

**Теорема 1.** Нека је $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$ k-ти степен матрице суседства граафа $G$, $A = \left(a_{ij}\right)$ реда $n \times n$. Тада $a_{ij}^{(k)}$ одређује укупан број путева дужине k који повезују чворове $v_i$ и $v_j$.

Дијагонални елемент $a_{ii}^{(2)}$ матрице $A^2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$ одређује степен чвора $v_i$.

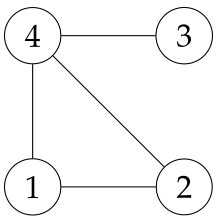
Дијагонални елемент $a_{ii}^{(2)}$ матрице $A^3 = \left(a_{ij}^{(3)}\right)$ одређује двоструки број циклуса дужине 3 (троуглова) који садрже чвор $v_i$.

**Теорема 2.** Укупан број циклуса дужине 3 (троуглова) у графу $G$, у ознаци $C_3(G)$, једнак је

$$C_3(G) = \frac{1}{6}\mathrm{trag}\left(A^3\right).$$

## Решени задаци

**Задатак 1.** Задат је граф $G$ уз скуп чворова $V = \{1, 2, 3, 4\}$ чија је визуелна репрезентација дата на следећој слици:




Одредити матрицу суседства $A(G)$ графа $G$ која одговара природном редоследу чворова $1, 2, 3, 4$. Затим израчунати $A(G)^2$ и $A(G)^3$ и дати интерпретацију значења елемената ових матрица користећи појам пута у графу. Колико у графу $G$ постоји

а) путева дужине нула од чвора 1 до чвора 4;

б) путева дужине један од чвора 1 до чвора 4;

в) путева дужине два од чвора 1 до чвора 4;

г) путева дужине три од чвора 1 до чвора 4;

д) путева произвољне дужине од чвора 1 до чвора 4?

*Решење.* Матрица суседства $A(G)$ графа $G$ која одговара природном редоследу чворова се једноставно одређује са визуелне репрезентације графа и износи

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрице $A(G)^2$ и $A(G)^3$ се добијају обичним степеновањем матрице $A(G)$ и редом су једнаке

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A(G)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Елемент на позицији $(i, j)$ матрице $A(G)^2$ представља укупан број путева дужине два чији је почетни чвор $i$, а крајњи чвор $j$, за свако $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Слично, елемент на позицији $(i, j)$ матрице $A(G)^3$ представља укупан број путева дужине три од чвора $i$ до чвора $j$, за свако $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

а) У графу $G$ постоји нула путева дужине нула од чвора 1 до чвора 4. Ово је очигледно јер сваки пут дужине нула садржи нула грана и има исти почетни и крајњи чвор.

б) У графу $G$ постоји тачно један пут дужине један од чвора 1 до чвора 4. Тај пут се састоји само од гране која спаја чворове 1 и 4, а та грана постоји јер су дати чворови инцидентни, као што се види на слици.

в) У графу $G$ постоји тачно један пут дужине два од чвора 1 до чвора 4. Ово се види директно из матрице $A(G)^2$, пошто је вредност њеног елемента на позицији $(1, 4)$ једнака управо 1.

г) У графу $G$ постоје тачно четири пута дужине три од чвора 1 до чвора 4. Ово се види директно из матрице $A(G)^3$, пошто је вредност њеног елемента на позицији $(1, 4)$ једнака 4.

д) У графу $G$ постоји бесконачно много путева од чвора 1 до чвора 4. На пример, низом чворова

$$\underbrace{1, 4, 1, 4, \ldots, 1, 4}_{\text{по } n \text{ јединица и четворки}}$$

одређен је пут дужине $2n - 1$ чији је почетни чвор 1, а крајњи чвор 4, за свако $n \in \mathbb{N}$. На основу овог примера, јасно је да не може бити коначно много путева произвољне дужине од чвора 1 до чвора 4.

□

**Задатак 2.** Колико по еквиваленцији различитих простих циклуса дужине четири има комплетан граф са 6969 чворова?

*Решење.* Пошто је задат комплетан граф са 6969 чворова, укупан број простих циклуса дужине четири може се лако срачунати као $6969 \cdot 6968 \cdot 6967 \cdot 6966$, јер се први чвор може одабрати на 6969 начина, а сваки следећи на један мање начин, пошто сваки следећи чвор мора бити различит од претходних, а притом је сваки чвор са сваким суседан.

Надаље, у свакој класи еквиваленције простих циклуса дужине четири постоји тачно осам чланова. Ови циклуси се разликују по томе који се чвор узима као почетни (четири могућности) и који се смор обиласка користи (две могућности). На пример, нека је дат прост циклус $A - B - C - D - A$, где $A$, $B$, $C$, $D$ представљају међусобно различите чворове датог графа. Тада постоји укупно осам простих циклуса у оквиру његове класе еквиваленције.

$$\begin{array}{cc} A - B - C - D - A\,, & A - D - C - B - A\,, \\ B - C - D - A - B\,, & D - C - B - A - D\,, \\ C - D - A - B - C\,, & C - B - A - D - C\,, \\ D - A - B - C - D\,, & B - A - D - C - B\,. \end{array}$$

Дакле, укупан број класа еквиваленције простих циклуса дужине четири мора бити тачно осам пута мањи од укупног броја простих циклуса дужине четири. Закључујемо да је укупан број по еквиваленцији различитих простих циклуса дужине четири једнак

$$\frac{6969 \cdot 6968 \cdot 6967 \cdot 6966}{8} = 3\binom{6969}{4}.$$

□

**Задатак 3.** Нека у графу $G$ важи да степен сваког чвора није мањи од $r$, $r \geq 2$. Доказати да граф $G$ садржи прост циклус дужине бар $r + 1$.

*Решење.* Нека је $P = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ елементаран пут највеће дужине у графу $G$. Сви суседи чвора $u_k$ морају да припадају скупу $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$, иначе, кад би постојао неки његов сусед $v \notin \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$, онда би елементаран пут $(u_1, u_2, \ldots, u_k, v)$ био дужи од $P$, што је немогуће. Даље, нека $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k-1$ представља најмањи природан број такав да је $u_j \sim u_k$. Због $r \geq 2$, јасно је да важи $j < k - 1$, те $u_j \neq u_{k-1}$, што значи да

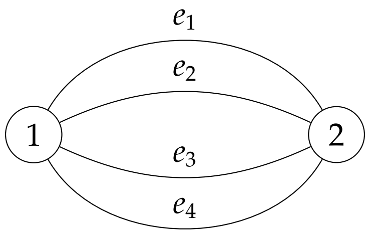
$$C = (u_k, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{k-1}, u_k)$$

обавезно чини прост циклус дужине $k-j+1$. Узевши у обзир да чвор $u_k$ има бар $r$ суседа међу чворовима из скупа $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$, мора бити $j \leq k - r$. Одавде директно следи $k - j + 1 \geq r+1$, што значи да прост циклус $C$ има дужину бар $r+1$. Дакле, граф $G$ сигурно садржи прост циклус дужине бар $r + 1$. □

## Задаци за самосталан рад

**Задатак 4.** Нека је задат произвољан граф $G$ и његова матрица суседства $A(G)$. Доказати да се укупан број по еквиваленцији различитих простих циклуса дужине три овог графа може израчунати преко формуле $\dfrac{\operatorname{tr}(A(G)^3)}{6}$. Да ли се у општем случају укупан број по еквиваленцији различитих простих циклуса дужине четири графа $G$ може срачунати преко формуле $\dfrac{\operatorname{tr}(A(G)^4)}{8}$? Дати образложење. Каква је ситуација што се тиче укупног броја по еквиваленцији различитих простих циклуса дужине веће од четири?

**Задатак 5.** Колико по еквиваленцији различитих циклуса има мултиграф чија је визуелна репрезентација дата на следећој слици:




Из сваке класе еквиваленције циклуса навести по један циклус.