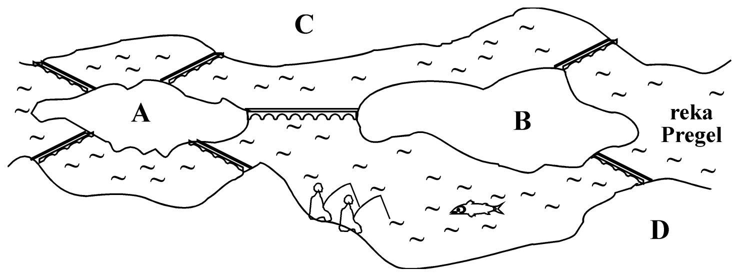
# 1

# Osnovni pojmovi i definicije grafa

## 1.1 Važni momenti u razvoju teorije grafova

Motivi za nastanak i razvoj neke matematičke discipline mogu biti veoma različiti. Tako, na primer, Teorija brojeva, koja vuče svoje korene od samog začetka ljudskog roda, nastala je zbog osnovne potrebe čoveka da nešto izbroji ili izmeri. Numerička matematika nastanak i razvoj duguje razvoju tehnike, jer za brojna neophodna izračunavanja u klasičnoj matematici ne postoji odgovarajući aparat. Verovatnoća i Statistika su plod ljudske pohlepe i želje za brzim bogaćenjem na lak način. Svoj nastanak svakako duguju pojavi kockarnica, lutrija, igara na sreću i slično. Za Teoriju grafova, mada to važi i za Topologiju, možemo reći da svoj začetak, ali i razvoj, duguju ljudskoj potrebi za razonodom koja uključuje i rešavanje logičko-rekreativnih zadataka.

Rađanje Teorije grafova, a i Topologije, jer su nastale istovremeno, direktno se vezuje za već pomenutog, bez premca najvećeg matematičkog genija, Ojlera. Današnji ruski grad Kaliningrad, koji se u Ojlerovo doba zvao Keninzberg i pripadao Istočnoj Pruskoj, smešten na ušću reke Pregl u Baltičko more. Na reci se nalaze dva naseljena ostrva, koja su međusobno i sa obalama, povezana sa sedam mostova. Priča se da se među intelektualcima pojavilo pitanje da li je moguće u jednoj šetnji preći preko svih sedam mostova a da se pri tome ni jedan most ne prelazi dva ili više puta. Ovaj problem poznat je u literaturi pod nazivom *Problem Keninzberških mostova.*




Postoje mišljenja da je ovaj problem izmislio sam Ojler, što nije tako važno, ali ga je on rešio. Odgovor je *ne*, ali ono što je najbitnije je način na koji je Ojler došao do ovog odgovora. On je uveo novi matematički pojam *GRAF* i razradio matematički aparat za rad sa grafovima. Svoje rešenje je saopštio u Sankt Petersburškoj Akademiji nauka 26. avgusta 1735. godine. Ovaj dan je datum rođenja dve nove matematičke discipline Teorije grafova i Topologije. Napomenimo, da su grafovi i rad sa njima oduševili Ojlera, te im je posvetio značajan deo svog naučnog rada. I dan danas fundamentalni rezultati u Teoriji grafova su plod njegovog rada.

U razvoju teorije grafova značajnu ulogu imalo je rešavanje drugih logičko -rekreativnih zadataka. Pomenućemo neke od njih.

Problem osam dama

Problem glasi ovako: "Na koliko različitih načina može da se rasporedi osam dama (kraljica) na šahovskoj tabli ($8 \times 8$), tako da se nikoje dve međusobno ne ugrožavaju " Rešenje ovog zadatka, koje glasi 92, dao je nemački matematičar Nauk 1850. godine. Interesantno je da se rešavanjem ovog zadatka bavio i veliki nemački matematičar Gaus, ali je pronašao samo 72 rešenja. Napomenimo da je rešenje ovog zadatka usko povezano sa problemima vezanim za unutrašnju i spoljašnju stabilnost grafova.

Problem trgovačkog putnika (Vilijam Hamilton, 1805-1865)

Trgovački putnik polazi iz mesta boravka, obilazi sve predviđene gradove i vraća se u mesto boravka. Treba odrediti maršutu tako da u svakom gradu boravi samo jednom i da je cena prevoza minimalna.

Rešavanje ovog zadatka, a svodi se na pronalaženje Hamiltonovih ciklusa, zbog aktuelnosti u raznim sferama nauke i ljudskog života, i dan danas okupira pažnju velikog broja istraživača. Na žalost u opštem slučaju ne postoji teorema koja daje potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju Hamiltonovog ciklusa. Samim tim ne postoji ni algoritam koji bi određivao Hamiltonov ciklus minimalne dužine u datom težinskom grafu.

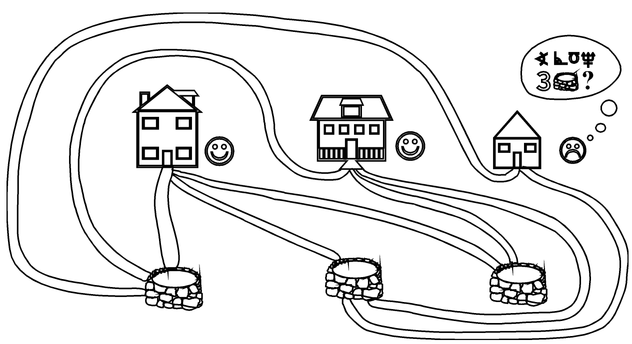
Problem četiri boje (F. Guri)

Data je geografska karta, ili njen deo, pri čemu se ni jedna država ne sastoji od dve ili više celina. Treba obojiti ovu kartu pomoću četiri boje tako da nijedne dve susedne države ne budu obojene istom bojom.

Rešavanje ovog zadatka ima veoma interesantnu istoriju. Konačno su tek 1976. godine ovaj zadatak rešili američki matematičari.

Problem tri kuće i tri bunara

Tri kuće treba povezati stazama sa tri bunara pri čemu se staze ne smeju ukrštati.



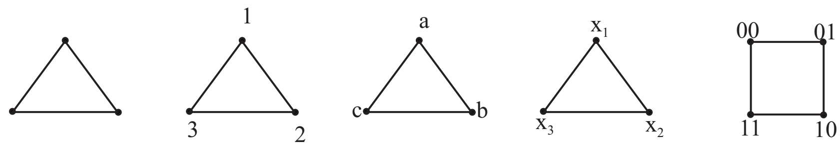
Rešenje ovog zadatka, koje je negativno, a do koga je došao poljski matematičar Kuratovski, omogućilo mu je da formuliše teoremu koja daje potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju planarnih grafova.

## 1.2 Intuitivno shvatanje pojma graf

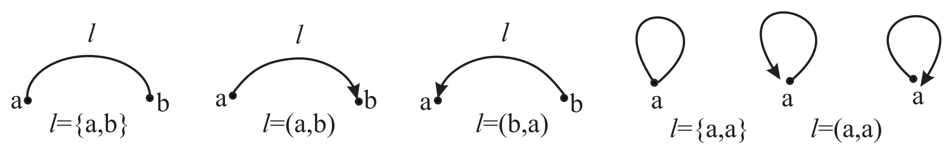
Intuitivno, "graf" je neki skup tačaka, konačan ili beskonačan, u ravni (prostoru, na sferi i slično), pri čemu neke mogu biti međusobno povezane punim linijama. Ove tačke se nazivaju čvorovima (vrhovima, temenima), a linije granama (potezima, bridovima, lukovima) grafa.

Čvorovi se najčešće označavaju malim slovima nekog alfabeta, indeksiranim ili ne, prirodnim brojevima, kao na primer $\{a, b, \ldots\}$, $\{x_1, x_2, \ldots,\}$ ili $\{1, 2, \ldots\}$, zatim promenljivima, kodovima, nekim simbolima, kao na primer

$(\circ, \triangle, \square, \diamond, \ldots\}$ ili se uopšte ne označavaju.




Grane grafa se pored slovnih oznaka, ako se uopšte označavaju, predstavljaju pomoću oznaka čvorova koje povezuju. Mogu biti orjentisane i neorjentisane. Ako neorjentisana grana $l$ povezuje čorove $a$ i $b$ predstavlja se pomoću neuređenog para $l = \{a, b\}$. Ako orjentisana grana $l$ polazi iz čvora $a$ a završava u čvoru $b$, tada se ona predstavlja pomoću uređenog para $l = (a, b)$. Grana koja povezuje čvor $a$ sa samim sobom naziva se petljom. Potpuno je svejedno da li se predstavlja kao orijentsana ili neorijentsana, $l = (a, a) = \{a, a\}$. Grane $l_1 = (a, b)$ i $l_2 = (b, a)$ nazivaju se paralelnim.




## 1.3 Definicije grafa

**Definicija 1.1.** *Neka je $V, V \neq \emptyset$, dati skup i $E$ kolekcija neuređenih (uređenih, mešovitih) parova elemenata iz $V$. Uređeni par $G = (V, E)$ naziva se neorijentisani (orijentisani, mešoviti) pseudograf. Elementi skupa $V$ su čvorovi, a kolekcije $E$ su grane.*

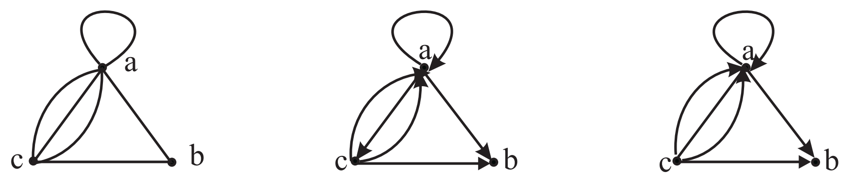
PRIMER 1.1 Uređeni par $G = (V, E)$ definsan je skupom $V = \{a, b, c\}$ i kolekcijom $E$

a) $E = \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$;

b) $E = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (c, a), (c, b)\}$;

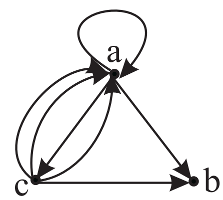
c) $E = \{(a, a), (a, b), \{a, c\}, (c, a), (c, b)\}$.

Pseudografovi definisani kolekcijom $E$ pod a), b) i c) su, redom, nerijentisan, orijentisan i mešovit. Prikazani su na sledećoj slici.




a) b) c)

Primetimo da je veoma jednostavno preći od mešovitog pseudografa pod c) na orijentisani zamenom neorijentisane grane $\{a, c\}$ sa dve orijentisane paralelne grane $(a, c)$ i $(c, a)$.




**Definicija 1.2.** *Neorijentisani (orijentisani, mešoviti) pseudograf koji ne sadrži petlje naziva se (orijentisani, mešoviti) multigraf.*

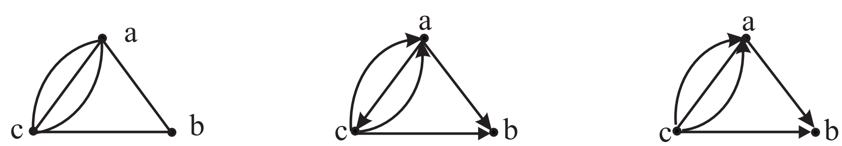
$\boxed{\text{PRIMER 1.2}}$ Uređeni par $G = (V, E)$ definisan je skupom $V = \{a, b, c\}$ i kolekcijom $E$

a) $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

b) $E = \{(a, b), (a, c), (c, a), (c, a), (c, b)\}$

c) $E = \{(a, b), \{a, c\}, (c, a), (c, a), (c, b)\}$.

Odgovarajući multigrafovi, koji su redom, neorijentisani, orijentisani i mešoviti, prikazani su na sledećoj slici




a) b) c)

**Definicija 1.3.** *Neka je $V$ neprazan skup i $E$ skup neuređenih (uređenih, mešovitih) parova različitih elemenata iz $V$. Uređeni par $G = (V, E)$ naziva se graf (orijentisani, mešoviti).*

Primetim da se za neorijentisani graf kaže samo graf, dok se za orijentisani i mešoviti dodaje prefiks. Takođe, primetimo da je graf (orjentisani graf) neorijentisani (orjentisani) multigraf koji ne sadrži višestruke grane.

**Definicija 1.4.** *Orijentisani graf koji ne sadrži paralelne (simetrične) grane naziva se usmereni graf.*

Ako se u proučavanju neke pojave koriste grafovi sa petljama to se posebno naglasi.

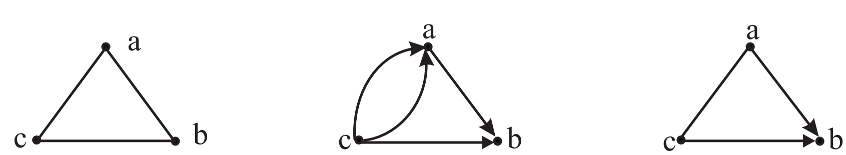
$\boxed{\text{PRIMER 1.3}}$ Uređeni par $G = (V, E)$ definisan je skupom $V = \{a, b, c\}$ i skupom $E$

a) $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ,

b) $E = \{(a, b), (c, a), (c, a), (c, b)\}$,

c) $E = \{(a, b), \{a, c\}, (c, b)\}$.

Odgovarajuće strukture su redom graf, orijentisani graf i mešoviti graf, prikazani na sledećoj slici



a) b) c)

Ako se umesto skupa, tj. kolekcije $E$, posmatra familija, dolazimo do uopštenja pojma pseudograf.

**Definicija 1.5.** *Neka je $V$ neprazan skup i $E$ familija nad njim. Tada se uređeni par $G = (V, E)$ naziva hipergraf.*

Navedene definicije spadaju u apstraktne. Često su mnogo operativnije tvz. algebarske definicije.

**Definicija 1.6.** *Neka je $V$ neprazan skup i $\rho$ binarna relacija na ovom skupu, $\rho \subset V^2$. Uređeni par $G = (V, \rho)$ naziva se orjentisani graf sa petljama.*

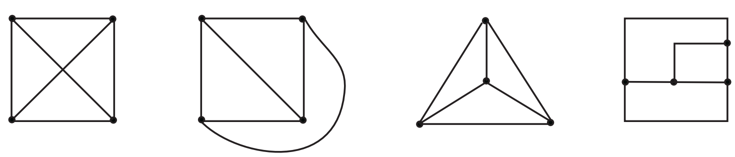
**Definicija 1.7.** *Neka je $V$ neprazan skup i $f$ preslikavanje (funkcija) skupa $V$ u samog sebe, $f : V \to V$. Uređeni par $G = (V, f)$ naziva se orijentisanim grafom sa petljama.*

U obe ove definicije za uređeni par $G = (V, \rho)$, tj. $G = (V, f)$, rekli smo da je orijentisani graf sa petljama. To smo učinili jer neznamo osobine binarne relacije $\rho$, tj. preslikavanja $f$, koje direktno utiču na karakter strukture. Tako, na primer, ako je binarna relacija $\rho, \rho \in V^2$, antirefleksivna i simetrična, uređeni par $G = (V, \rho)$ je graf. Ako je binarna relacija $\rho$ antirefleksivna i nije simetrična, tada je uređeni par $G = (V, \rho)$ orijentisani graf. Ako je binarna relacija $\rho$ antirefleksivna i asimetrična, uređeni par $G = (V, \rho)$ je usmereni graf.

## 1.4 Prikazivanje grafova

Graf se može prikazati u prostoru, 3D, u ravni, 2D, u nekom koordinatnom sistemu, na nekim površima (sfera, torus, ...). Ono je veoma važno, za rad sa grafovima, i najčešće zavisi od iskustva onoga ko to čini, mada se u zavisnosti od konkretnih potreba razvijaju algoritmi za "dobro" prikazivanje grafova. Razmotrimo to na konkretnim primerima.

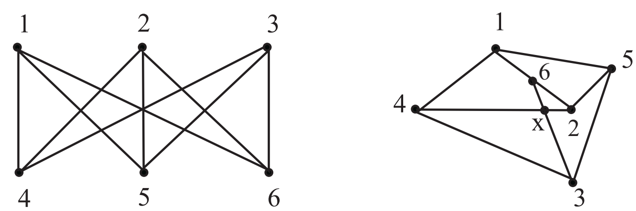
$\boxed{\text{Primer 1.4}}$ Poznato je da se pod planarnim grafom, u ravni, podrazumeva graf čije su grane ne seku van čvorova. Na sledećoj slici su data četiri načina prikazivanja jednog te istog grafa.



a) b) c) d)

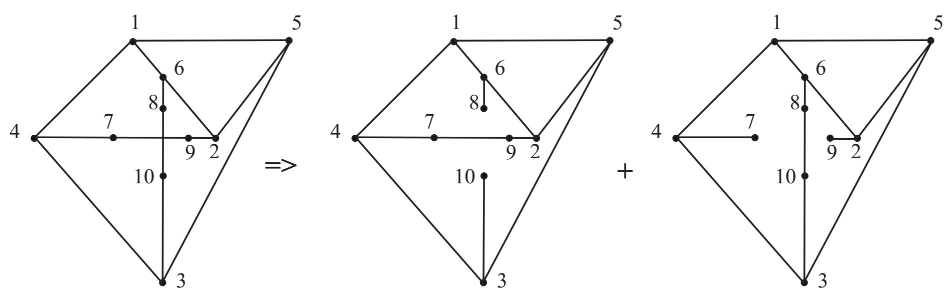
Na osnovu slike pod a) moglo bi se doći u zabludu da dati graf nije planaran, što je demantovano slikom pod b). Na osnovu slike pod b) teško bi se moglo zaključiti da dati graf može u ravni da ograniči tri jednake figure, što se lepo vidi na slici pod c). Da bi se planarni graf iskoristio u proizvodnji štampanih ploča, njegove grane moraju da se seku pod uglom od $90^o$ ili $180^o$ stepeni. To se teško može uočiti nja osnovu načina prikazivanja pod a), b) i c). Na osnovu slike pod d) vidimo da su ispunjeni svi traženi zahtevi.

$\boxed{\text{Primer 1.5}}$ Ako dati graf nije planaran, kažemo da je on dobro prikazan ako je prikazan tako da ima minimalno mogući presek grana van čvorova. Na sledećoj slici prikazan je jedan te isti graf, poznat pod nazivom kompletan bipartitni graf, $K_{33}$. Na silci pod b) on je dobro prikazan.




a) b)

Napomenimo da se način prikazivanja grafa $K_{33}$ pod b) može iskoristiti u proizvodnji dvoslojnih štampanih ploča premošćavanjem presečne tačke $x$. To je prikazano na sledećoj slici




## 1.5 Stepeni čvorova

Posmatraćemo graf (neorijentisani) $G = (V, E)$ definisan skupom čvorova $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i skupom grana $E = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, $|V| = n$, $|E| = m$.

Dva čvora $x_i$ i $x_j$, iz skupa $V$, grafa $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, su susedna ako grana $\{x_i, x_j\}$ pripada skupu $E$. Dve grane $l_i$ i $l_j$, iz skupa $E$, su susedne ako imaju zajednički element iz $V$, $l_i \cap l_j = \{x\}$, $x \in V$. Čvor $x$, $x \in V$, i grana $l$, $l \in E$, su incidentni ako $x \in l$.

Skup svih čvorova skupa $V$, koji su susedni sa čvorom $x$, $x \in V$, naziva se njegovom zvezdom, $z\,(x)$,

$$z\,(x) = \{\,y|\,y \in V \quad \text{i} \quad \{x,\,y\} \in E\}\,.$$

Ukupan broj svih čvorova grafa $G = (V,\,E)$ koji su susedni sa čvorom $x$, $x \in V$, tj. ukupan broj svih grana grafa $G$ koje su incidentne sa čvorom $x$, je stepen ovog čvora i označava se sa $d\,(x)$. Nije teško primetiti da je $d(x) = |Z(x))|$. Kod struktura srodnih grafu (multigraf, pseudograf), stepen čvora se vezuje strogo za incidentne grane. Svaka višestruka grana se broji posebno i svaka petlja se broji dvostruko. Najmanji stepen čvora u grafu $G = (V,\,E)$ označava se sa $\delta\,(G)$, a najveći sa $\Delta\,(G)$,

$$\delta\,(G) = \min_{x \in V} d(x) \quad \text{i} \quad \Delta\,(G) = \max_{x \in V} d(x).$$

Srednji stepen čvorova datog grafa $G = (V,\,E)$, $V = \{x_1,\,x_2,\,...\,,\,x_n\}$ definiše se sa

$$s\,(G) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d\,(x_i)}{n}.$$

Važe jednakosti

$$0 \leq \delta(G) \leq S(G) \leq \Delta(G) \leq n-1.$$

Niz nenegativnih celih brojeva $D = (d_1,\,d_2,\,...\,,d_n)$ naziva se grafičkim (grafovskim) ako postoji graf $G = (V,\,E)$, $V = \{1,\,2,\,...\,,\,n\}$, tako da je za svako $i$, $d\,(i) = d_i$, $i = 1,\,2,\,...\,,\,n$.

Veoma je bitno za dati niz $D = (d_1,\,d_2,\,...\,,d_n)$ ustanoviti da li je grafički (grafovski), tj. da li postoji graf koji ima $n$ čvorova čija je raspodela po stepenima definisana ovim nizom. Pre nego što damo postupak za to, definišimo pravilni (valjani) niz.

Niz nenegativnih brojeva $D = (d_1,\,d_2,\ldots,d_n)$ je pravilan (valjan) ako važe nejednaokosti

$$n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \,...\, \geq d_n \geq 0.$$

Za pravilne nizove važi sledeći rezultat.

**Teorema 1.1.** *Ako je $D = (d_1,\,d_2,\,...\,,d_n)$pravilni niz i niz $D_1 = (d_2-1,\,d_3-1,\,...\,,\,d_{d_1+1}-1,\,d_{d_1+2},\,...\,,\,d_n)$ izveden iz njega, tada je niz $D$ grafički ako i samo ako je niz $D_1$ grafički.*

Na osnovu Teoreme 1.1 možemo da formiramo sledeći algoritam pomoću koga ispitujemo da li je dati niz grafički ili nije.

*Algoritam 2.1*

Neka je dat niz $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Korak 1. Proverava se da li je dati niz pravilan. Ako nije, prelazimo nakkorak 4. Ako jeste prelazimo na korak 2.

Korak 2. Formira se niz

$$D_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

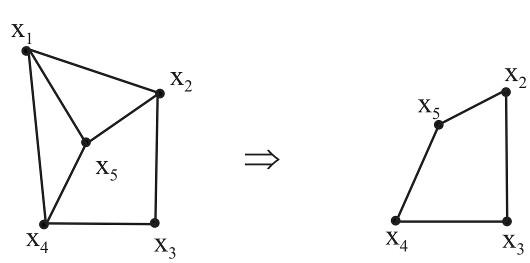
Proverava se da li je niz $D_1$ pravilan. Ako nije prelazi se na korak 4. Ako jeste, prelazi se na korak 3.

Korak 3. Proverava se da li je niz $D_1$ nula niz. Ako jeste prelazi se na korak 5. Ako nije, obavi se supstitucija $D := D_1$ i prelazi na korak 1.

Korak 4. Dati niz $D$ nije grafički.

Korak 5. Dati niz $D$ je grafički.

Algoritam se praktično bazira na operaciji uklanjanja čvora iz grafa. Naime, čvor se uklanja iz grafa tako što se ukloni on i sve sa njim incidentne grane. To je prikazano na sledećoj slici




Uklanjanje čvora $X_1$ iz grafa

Napomenim da se grana uklanja iz grafa tako što se samo ona ukloni, pri čemu se incidentni čvorovi ne diraju.

Za odnos broja grana i broja čvorova, tj. njihovih stepena, u datom grafu $G = (V, E)$ važi sledeći rezultat:

**Teorema 1.2.** *Za dati graf* $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ *i* $E = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, *važi sledeći rezultat*

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(x_i). \tag{1.1}$$

Važno je uočiti da je na levoj strani u jednakosti (1.1) paran broj, $2m$, pa mora biti i na desnoj. Sledeću posledicu Teoreme 1.2 ne smemo nikada gubiti iz vida.

**Posledica 1.1.** *Broj čvorova neparnog stepena u grafu je paran broj.*

Dati graf $G = (V, E)$ je $r-$reuglaran, $r \geq 0$, ili stepena regularnosti $r$, ako za svako $i, i = 1, 2 \ldots, n$, važi jednakost $d(x_i) = r$. Maksimalni stepen regularnosti je $r = n - 1$. Takav graf se naziva kompletnim.

**Posledica 1.2.** *Ako je dati graf* $G = (V, E)$ $r-$*regularan, tada važi jednakost*

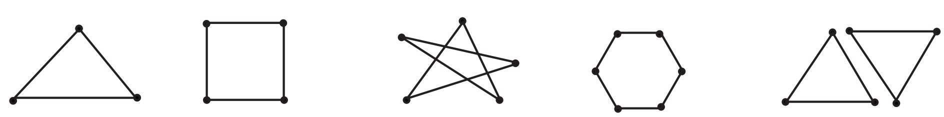
$$m = \frac{r \cdot n}{2}. \tag{1.2}$$

*Ako je dati graf* $G = (V, E)$ *kompletan tada važi jednakost*

$$m = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1.3}$$

Važno je uočiti u jednakosti (1.2), da zbog činjenice da parametar $m$ mora biti prirodan broj, bar jedan od parametara $r$ ili $n$ mora biti deljiv sa 2, tj. biti paran. To znači da za proizvoljne parametre $r$ i $n$ ne mora da postoji $r-$regularan graf.

Na sledećoj slici prikazani su 2-regularni grafovi za $n = 3, 4, 5$ i 6.



n=3 n=4 n=5 n=6 n=6

Na sledećoj slici prikazani su kompletni grafovi za $n = 3, 4, 5$ i 6.

n=3 n=4 n=5 n=6

$\boxed{\text{Primer 2.1}}$ Proveriti da li su sledeći nizovi grafički

a) (7, 5, 4, 4, 3, 3, 2),

b) (5, 4, 4, 4, 3, 3, 2),

c) (6, 4, 4, 4, 2, 1, 1),

d) (5, 4, 4, 3, 2, 2, 2).

U slučaju potvrdnog odgovora skicirati odgovarajući graf.

Rešenje

a) Ako bi postojao, odgovarajući graf bi imao 7 čvorova. Najveći stepen nekog čvora bio bi 6. Dati niz sadrži čvor čiji je stepen 7, te odgovarajući graf ne postoji. Dati niz nije grafički.

   Mogli smo i drugačije. Pretpostavimo da dati graf postoji i označimo njegove čvorove, redom, sa $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, pri čemu je $d(x_1) = 7$, $d(x_2) = 5$, $d(x_3) = d(x_4) = 4$, $d(x_5) = 3$, $d(x_6) = 3$ i $d(x_7) = 2$. Takav graf bi imao

$$m = \frac{1}{2}(d(x_1) + \ldots + d(x_7)) = \frac{25}{2}$$

   grana, što je nemoguće.

b) Kao pod a).

c) Pretpostavimo da je dati niz grafički, tj. da postoji graf koji ima 7 čvorova i dati niz definiše njihovu raspodelu po stepenima. Označimo ove čvorove sa $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, pri čemu je $d(x_1) = 6, d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = 4$, $d(x_5) = 2$, $d(x_6) = d(x_7) = 1$. Graf bi imao samo dva čvora neparnog stepena i

$$m = \frac{1}{2}(d(x_1) + \ldots + d(x_7)) = \frac{22}{2} = 11$$

   grana, te ništa ne možemo zaključiti o njegovoj egzistenciji. Iskoristićemo Algoritam 2.1 da ispitamo da li je grafički.

Na osnovu niza D

$$D = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 6, & 4, & 4, & 4, & 2, & 1, & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}$$

formiramo niz

$$D_1 = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 3, & 3, & 3, & 1, & 0, & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}.$$

Ovaj niz je pravilan, ali ne možemo zaključiti da li je i grafički. Na osnovu njega, ponavljanjem istog postupka iz Teoreme 1.1, formiramo niz $D_2$

$$D_2 = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 2, & 2, & 0, & 0, & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}.$$

Na osnovu niza $D_2$, koji je pravilan, formiramo niz $D_3$

$$D_3 = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{cccc} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1, & -1, & 0, & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}.$$

Ovaj niz sadrži negativan broj, te nije grafički. Samim tim, ni polazni niz $D$ nije grafički, te odgovarajući graf ne postoji.

d) Primenom Algoritma 2.1 proverimo da li je dati niz $D$

$$D = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 5, & 4, & 4, & 3, & 2, & 2, & 2 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}$$

grafički. Na osnovu njega, koji je pravilan niz, formiramo niz $D_1$

$$D_1 = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 3, & 3, & 2, & 1, & 1, & 2 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}.$$

On nije pravilan, ali se lako transformiše u pravilan niz $\bar{D}_1$

$$\bar{D}_1 = \begin{array}{c} \\ ( \end{array} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_7 & x_5 & x_6 \\ 3, & 3, & 2, & 2, & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ ) \end{array}.$$

Na osnovu njega formiramo niz $D_2$

$$D_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & x_7 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccccc} 2, & 1, & 1, & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}.$$

Niz $D_2$ je pravilan. Na osnovu njega formiramo niz $D_3$

$$D_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_7 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left( \begin{array}{cccc} 0, & 0, & 1, & 1 \end{array} \right) \end{array}.$$

On nije pravilan, ali se transformiše u pravilan niz $\bar{D}_3$

$$\bar{D}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_5 & x_6 & x_4 & x_7 \end{array} \\ \left( \begin{array}{cccc} 1, & 1, & 0, & 0 \end{array} \right) \end{array}.$$

Na osnovu ovog niza formiramo niz $D_4$

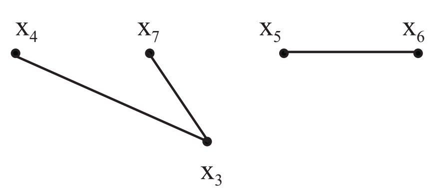
$$D_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_6 & x_4 & x_7 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

To znači da je niz $\bar{D}_3$ grafički, te je i dati niz $D$ grafički.

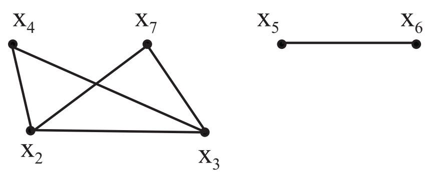
Skiciranje grafa koji odgovara nizu $D$ obavićemo sukcesivno na osnovu nizova $\bar{D}_3, D_2, \bar{D}_1$ i $D$.

Nizu $\bar{D}_3$ odgovara graf koji ima četiri čvora, $x_4, x_5, x_6, x_7$, pri čemu je $d(x_4) = 0, d(x_5) = d(x_6) = 1$ i $d(x_7) = 0$. On je prikazan na sledećoj slici.

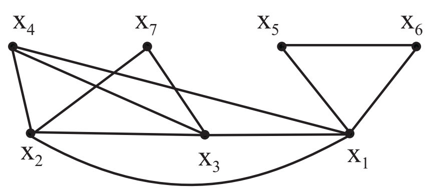

Dodavanjem čvora $x_3$ ovom grafu, na osnovu niza $D_2$ dobijamo sledeći graf



Vraćanjem čvora $x_2$ u ovaj graf na osnovu niza $\bar{D}_1$, dobijamo sledeći graf




Definitivno vraćamo u ovaj graf čvor $x_1$, te na osnovu niza $D$ dobijamo traženi graf




PRIMER 2.2 Da li može da postoji graf $G = (V,\ E)$ čiji je raspored stepena po čvorovima

a) $(2,\ 2) = 2^2$,

b) $(2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7) = 3^2 1^3 1^4 3^5 2^7$,

c) $(2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7) = 3^2 1^3 3^5 3^7$.

U slučaju potvrdnog odgovora skicirati odgovarajući graf.

PRIMER 2.3 Na šahovskom turniru koji se održava po kružnom principu tako što svaki odigra po jednu partiju sa preostalim, učestvuje 7 takmičara: Milan, Marko, Ivan, Nenad, Goran, Olja i Vera. U jednom trenutku Milan je odigrao 6 mečeva, Marko 5, Ivan i Nenad po 3, Goran i Olja po 2 i Vera jedan meč. Odrediti sa kim je do ovog trenutka svoje partije odigrao Ivan.

REŠENJE

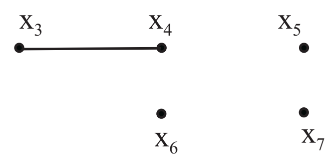
Datom zadatku pridružićemo graf koji ima sedam čvorova $x_1, x_2, \ldots, x_7$, pri čemu čvor $x_1$ odgovara Milanu, $x_2$ Marku, $x_3$ Ivanu, $x_4$ Nenadu, $x_5$ Goranu, $x_6$ Olji, i $x_7$ Veri. Dva čvora u ovom grafu su susedna ako su odgovarajući šahisti odigrali međusobni meč. Stepen svakog čvora definiše po koliko je svaki igrač odigrao mečeva, te datom grafu odgovara grafički niz

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccccccc} 6, & 5, & ,3, & 3, & 2, & 2, & 1 \end{array} \right) \end{array}.$$

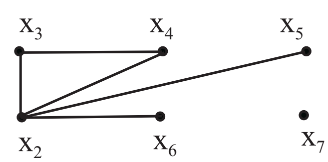
Koristeći Teoremu 1.1, tj. Algoritam 2.1, formiramo nove grafovske nizove udaljavanjem odgovarajućih čvorova. Tako, redom, dobijamo nizove

$$D_1 = \begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \end{array} \atop \left(\begin{array}{cccccc} 4, & ,2, & 2, & 1, & 1, & 0 \end{array}\right), \qquad D_2 = \begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \atop \left(\begin{array}{ccccc} 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{array}\right).$$

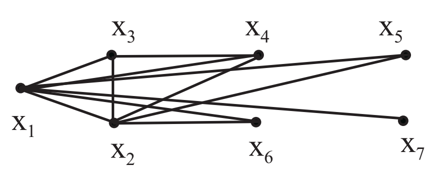
Grafovskom nizu $D_2$ odgovara graf prikazan na sledećoj slici




Vraćamo čvor $x_2$ u ovaj graf, te na osnovu niza $D_1$ dobijamo novi graf




Definitivno, vraćamo u ovaj graf čvor $x_1$, te na osnovu niza $D$ dobijamo graf koji odgovara postavljenom zadatku




Na osnovu dobijenog grafa uočavamo da je čvor $x_3$ susedan sa čvorovima $x_1, x_2$ i $x_4$, te je Ivan odigrao partije šaha sa Milanom, Markom i Nenadom.

$\boxed{\text{PRIMER 2.4}}$ Na šahovskom turniru učestvuje 7 takmičara. Može li nastupiti trenutak da je

a) jedan takmičar odigrao 7 partija, drugi 5, treći i četvrti takmičar po 4 partija, peti i šesti po 3, a sedmi takmičar 2 partije,

b) jedan takmičar odigrao 5 partija, drugi, treći i četvrti takmičar po 4, peti i šesti po tri, a sedmi dve partije,

c) jedan takmičar odigrao 6 partija, drugi, treći i četvrti po 4, peti 2, a šesti i sedmi takmičar po jednu partiju.

PRIMER 2.5 Da li može postojati šahovski turnir, tako da u jednom trenutku postoje takmičari koji su odigrali po 7, 5, 3 i dve partije? Koliki je minimalni broj takmičara koji mora da učestvuje na ovakvom turniru? Koliki je minimalni broj takmičara koji bi morao da učestvuje na ovom turniru, ako u posmatranom trenutku postoji samo po jedan takmičar koji je odigrao 7, 5, 3 i dve partije?

REŠENJE

Odgovor je pozitivan. U prvom slučaju minimalan broj šahista je 8, a u drugom 11.

PRIMER 2.6 Grupa od 15 turista, u kojoj je bio i Maksim, letovala je u Antaliji. Vrativši se kući Maksim je saopštio da je svaki od članova grupe bio od ranije poznanik sa petoricom iz grupe. Da li je to moguće?

REŠENJE

Pridružimo zadatku graf. Svakom turisti odgovara po jedan čvor ovog grafa $G = (V, E)$, $|V| = 15$, pri čemu su dva čvora susedna ako i samo ako su se turisti poznavali od ranije. To znači da bi ovaj graf bio regularan, stepena regularnosti

$$|E| = \frac{n \cdot r}{2} = \frac{15 \cdot 5}{2} = \frac{75}{2}$$

grana, što je nemoguće. Maksimova izjava ne može biti istinita.

PRIMER 2.7 Da li je moguće 77 telefona umrežiti pomoću nezavisnih veza tako da svaki od njih bude direktno povezan sa 15 telefona, od preostalih?

PRIMER 2.8 Dokazati da u odeljenju od $n$ učenika, $n \geq 2$, postoje bar dva učenika koji imaju jednak broj prijatelja među preostalim.

REŠENJE

Pridružimo zadatku graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, koji ima $n$ čvorova, pri čemu svaki čvor odgovara jednom učeniku. Dva čvora su susedna ako i samo ako su odgovarajući učenici prijatelji. Pretpostavimo suprotno tvrđenju u zadatku da ne postoje dva učenika u odeljenju koji imaju isti broj prijatelja. To znači da su svi čvorovi u grafu različitog stepena, tj.

$$0 \leq d(x_1) < d(x_2) < \ldots < d(x_n) \leq n - 1.$$

Kako su svi brojevi $d(x_i)$ međusobno različiti, a ima ih $n$, to postoje čvorovi sa osobinom $d(x_1) = 0$ i $d(x_n) = n - 1$. To bi značilo da postoji čvor koji nije susedni ni sa jednim čvorom i čvor koji je susedan sa svakim, što je nemoguće. U prevodu, postojao bi učenik koji je prijatelj sa svima, i učenik koji nije prijatelj nisakim, što je nemoguće.

PRIMER 2.9 Na jezeru se nalazi 9 ostrva, pri čemu su neka međusobno povezana mostovima. Sa svakog od ostrva polazi po jedan, tri ili pet mostova. Dokazati da bar jedan od njih vodi ka obali jezera.

REŠENJE

Pridružimo zadatku graf $G = (V, E)$, koji ima 9 čvorova, pri čemu svaki čvor odgovara jednom ostrvu. Dva čvora u grafu su susedna ako i samo ako postoji most koji povezuje odgovarajuća ostrva. Ako bi takav graf postojao, tada bi on sadržao neparan broj čvorova (9), neparnog stepena, što je nemoguće. To znači da bar jedna grana ne pripada grafu, tj. ne povezuje dva čvora u grafu. Samim tim odgovarajući most vodi ka obali.

PRIMER 2.10 Po završetku mature učenici jednog razreda su međusobno čestitali jedni drugima, tako što je svaki učenik čestitao preostalim. Ako je ukupno bilo 105 čestitanja, koliko je bilo učenika u ovom razredu?

REŠENJE

Pridružimo zadatku graf, tako što svakom učeniku pridružimo po jedan čvor. Dva čvora u grafu su susedna ako su odgovarajući učenici čestitali jedan drugom završenu maturu. Kako su svi završili maturu, tj. čestitali jedan drugom, graf je kompletan. Kako je broj grana u grafu $m = 105$, na osnovu jednakosti $210 = n(n - 1)$ dobijamo da je u razredu bilo 15 učenika.

PRIMER 2.11 Iz kompletnog grafa koji ima 20 čvorova, odstranjeno je njih nekoliko. Dobijeni podgraf ima 66 grana. Koliko je čvorova odstranjeno? Koliko je grana odstranjeno?

REŠENJE

Kompletan graf koji ima 20 čvorova ima 190 grana. To znači da je odstranjeno 124 grana. Dobijeni podgraf je kompletan. Kako on sadrži 66 grana, ima 12 čvorova. Iz kompletnog grafa je odstranjeno 8 čvorova.