6 Изоморфизам

Преглед теорије

Дефиниција 1. Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $|E_1| = |E_2| = m$, су изоморфна ако и само ако постоји обострано једнозначно пресликавање (бијекција) $\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$ тако да очувава суседтсво, тј.

$$\forall x_1, x_2 \in V_1,\ \{x_1, x_2\} \in E_1 \ \Leftrightarrow\ \varphi(x_1),\ \varphi(x_2) \in V_2, \quad \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\} \in E_2\,.$$

Теорема 1. Ако су графови $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ изоморфни, тада:

- имају исти број грана, $|E_1| = |E_2|$,
- имају једнаке низове степена чворова,
- имају исти број циклуса истих дужина,
- сваки подграф графа G_1 има изоморфни подграф у графу G_2 и обрнуто.

Ако наведене особине важе, то не значи да су графови G_1 и G_2 изоморфни.

Следећом процедуром се евентуално може установити да графови $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ нису изоморфни.

Корак 1. Да ли је $|V_1| = |V_2|$? Ако није, прећи на Корак 6. Ако јесте, прећи на Корак 2.

Корак 2. Да ли је $|E_1| = |E_2|$? Ако није, прећи на Корак 6. Ако јесте, прећи на Корак 3.

Корак 3. Да ли су им исти степени чворова? Ако нису, прећи на Корак 6. Ако јесу, прећи на Корак 4.

Корак 4. Да ли сваки циклус у графу G_1 има изоморфни циклус у графу G_2 и обрнуто? Ако не, прећи на Корак 6. Ако да, прећи на Корак 5.

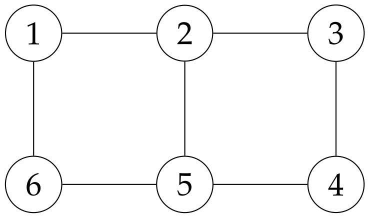
Корак 5. Да ли сваки подграф из графа G_1 има изоморфни подграф у графу G_2 и обрнуто? Ако не, прећи на Корак 6. Ако да, прећи на Корак 7.

Корак 6. Графови G_1 и G_2 нису изоморфни.

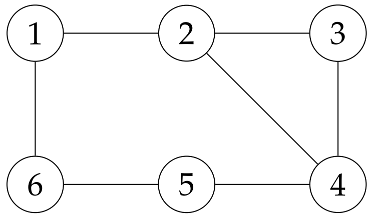
Korak 7. Процедура не омогућава да се установи да ли су графови G_1 и G_2 изоморфни.

Решени задаци

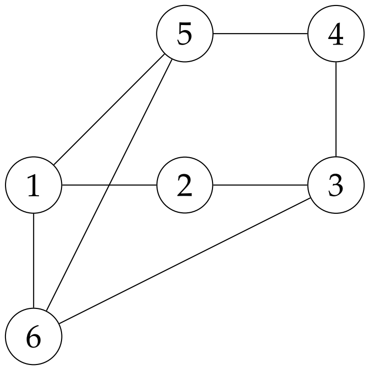
Задатак 1. На следећој слици је дато шест графова $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$:



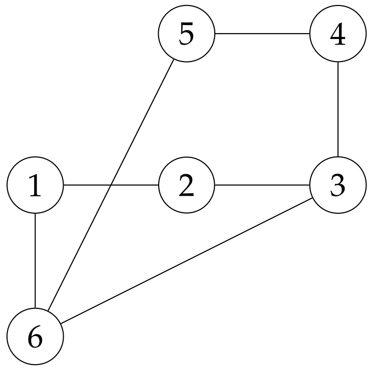
(а) G_1



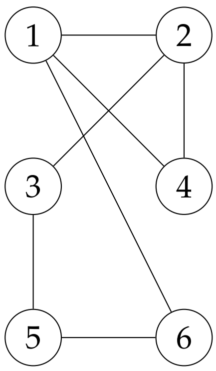
(б) G_2



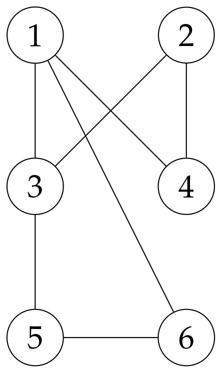
(в) G_3



(г) G_4



(д) G_5

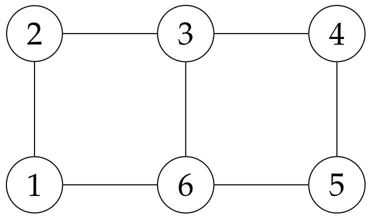


(ђ) G_6

Испитати који су од њих међусобно изоморфни, а који нису.

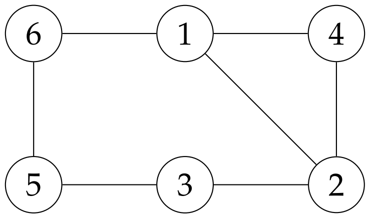
Решење. Пре свега, може се приметити да сви наведени графови имају по шест чворова. Међутим, графови из скупа $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_6\}$ имају тачно седам грана, док граф G_3 има осам. Ово значи да граф G_3 сигурно није изоморфан ни са једним другим графом наведеним у задатку, тј. једино је изоморфан сам са собом. Надаље, може се доказати да графови G_1 и G_2 нису изоморфни. Ово није тешко урадити помоћу њихове визуелне репрезентације. Наиме, граф G_2 садржи прост циклус дужине три, док граф G_1 нема ниједан прост циклус дужине три. Дакле, ова два графа сигурно нису изоморфна.

За граф G_4 могуће је дати визуелну репрезентацију на следећи начин:



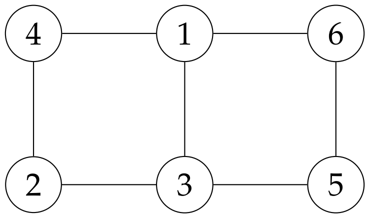
граф G_4

Одавде се директно види да је граф G_4 изоморфан графу G_1, при чему је пример одговарајућег изоморфизма пресликавање $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Граф G_5 је изоморфан графу G_2. Ово се једноставно показује уколико G_5 визуелно представимо на другачији начин:



граф G_5

Дакле, граф G_5 јесте изоморфан графу G_2, узевши у обзир да је пример изоморфног пресликавања управо $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. На крају, граф G_6 се може алтернативно представити преко визуелне репрезентације:



граф G_6

Са наведене слике постаје јасно да он мора бити изоморфан графу G_1, уз пример изоморфног пресликавања у виду $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. На основу свега изложеног, закључујемо да се графови $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ могу разбити у три класе еквиваленције по изоморфизму: $\{G_1, G_4, G_6\}$, $\{G_2, G_5\}$ и $\{G_3\}$. □

Задатак 2.

а) Колико постоји по изоморфизму различитих 2-регуларних графова са шест чворова?

б) Колико постоји по изоморфизму различитих 2-регуларних графова са 12 чворова?

Решење. Главно запажање које можемо да направимо за сваки 2-регуларан граф јесте да свака његова компонента повезаности мора бити прост циклус. Одавде следи да су два 2-регуларна графа са истим бројем чворова изоморфна ако и само ако њихове компоненте повезаности одговарају простим циклусима истих дужина. На овај начин проблем бројања по изоморфизму различитих 2-регуларних графова са $n \in \mathbb{N}$ чворова сводимо на налажење броја начина на који се природан број n може представити као сума природних бројева не мањих од три, пошто дужина простог циклуса не може бити испод три. Редослед појављивања сабирака који формирају суму није битан.

а) Решење је једнако два:

$$\begin{aligned} 6 &= 6, \\ 6 &= 3 + 3. \end{aligned}$$

б) Решење је једнако девет:

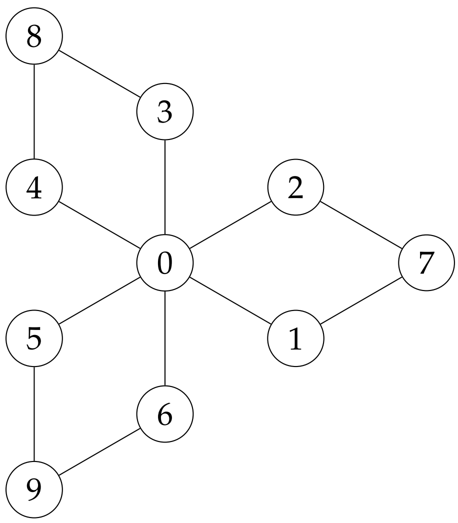
$$
\begin{aligned}
12 &= 12, \\
12 &= 9 + 3, \\
12 &= 8 + 4, \\
12 &= 7 + 5, \\
12 &= 6 + 6, \\
12 &= 6 + 3 + 3, \\
12 &= 5 + 4 + 3, \\
12 &= 4 + 4 + 4, \\
12 &= 3 + 3 + 3 + 3.
\end{aligned}
$$

□

Задаци за самосталан рад

Дефиниција 2 (Аутоморфизам)**.** Аутоморфизам неког графа јесте изоморфизам овог графа на самог себе.

Задатак 3. Нека је задат граф G у виду следеће визуелне репрезентације.

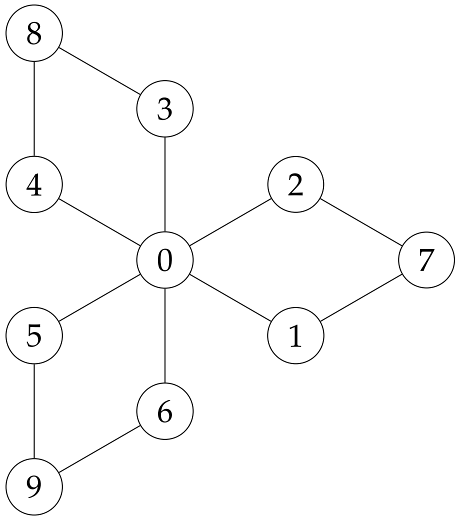


Одредити укупан број аутоморфизама графа G.

Дефиниција 3 (Орбита)**.** За произвољан граф $G = (V, E)$ и неки његов чвор $u \in V$, под орбитом $o(u)$ сматрамо скуп свих чворова овог графа који могу бити слика неког његовог аутоморфизма у тачки u.

Задатак 4. Нека G представља произвољан граф и нека $\mathrm{Aut}(G)$ означава скуп свих његових аутоморфизама. Уколико са $\circ$ означимо операцију композиције функција, доказати да алгебарска структура $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ чини групу.

Задатак 5. Нека је задат граф G у виду следеће визуелне репрезентације.



Одредити орбиту сваког чвора графа G.