Čas 05

Teorijski uvod

Rastojanje između čvorova x i y grafa G, u oznaci $d(x, y)$, je dužina najkraćeg puta koji ih spaja. Pri tome se pod dužinom puta podrazumeva broj grana koje sadrži. Ako takav put ne postoji, tada je $d(x, y) = +\infty$.

Definicija 1. *Pod dijametrom grafa G, u oznaci $d(G)$, podrazumeva se međusobno rastojanje dva njegova najudaljenija čvora,*

$$d(G) = \max_{x,y \in V} d(x, y).$$

Za graf G, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, matrica rastojanja je kvadratna matrica $D = (d_{ij})$, reda $n \times n$, definisana sa $d_{ij} = d(v_i, v_j)$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija 2. *Ekscentricitet čvora x, $x \in V$, povezanog grafa G, je maksimalno njegovo rastojanje u odnosu na preostale čvorove,*

$$e(x) = \max_{y \in V} d(x, y).$$

Definicija 3. *Radijus povezanog grafa G, u oznaci $r(G)$, definisan je sa*

$$r(G) = \min_{x \in V} e(x).$$

Definicija 4. *Pod rastojanjem čvora x, povezanog grafa G, podrazumeva se broj $R(x)$, definisan sa*

$$R(x) = \sum_{y \in V} d(x, y).$$

Centar grafa čini skup čvorova čiji ekscentriciteti su jednaki radijusu grafa.

Periferiju grafa čini skup čvorova čiji su ekscentriciteti jednaki dijametru grafa.

Definicija 5. *Svaki čvor i svaka grana grafa G je deo grafa G.*

Definicija 6. *Neka je dat graf $G = (V, E)$. Svaki graf $G_1 = (V_1, E_1)$ sa osobinom $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$, je deo grafa G. Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ sa osobinom $V_1 \subseteq V$, $E_1 = E \cap (V_1 \times V_1)$ naziva se podgraf grafa G. Graf $G_1 = (V, E_1)$, $E_1 \subset E$, naziva se delimični graf (sprežni graf) grafa G.*

Definicija 7. *Graf G je povezan ako i samo ako za svaka dva njegova čvora postoji put koji ih povezuje.*

Definicija 8. *Maksimalan povezan podgraf grafa zove se komponenta povezanosti tog grafa.*

Definicija 9. *Broj komponenata povezanosti nekog grafa naziva se njegovim stepenom povezanosti.*

Definicija 10. *Čvor čijim se udaljavanjem iz datog grafa, zajedno sa incidentnim granama, povećava broj komponenata povezanosti ovog grafa, naziva se artikulacioni čvor.*

Definicija 11. *Grana čijim se udaljavanjem iz grafa, bez incidentnih čvorova, povećava broj komponenata povezanosti naziva se most. Ako je pri tome incidentna sa čvorom stepena 1 naziva se viseći most.*

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, povezan graf. Za nalaženje matrice rastojanja S, $S = (s_{ij})$, reda $n \times n$ ovog grafa, može da se primeni algoritam opisan sledećim koracima.

Algoritam (MATRAS)

Korak 1. $k := 1$.

Formiramo matricu susedstva datog grafa $A = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$, reda $n \times n$. Na osnovu nje formiramo matricu $S^{(1)} = \left(s_{ij}^{(1)}\right)$, $s_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)}$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ispitamo da li za neki par indeksa i i j, $i \neq j$, važi $s_{ij}^{(1)} = 0$. Ako ne postoji takav par, to je kraj formiranja matrice S i važi

$$S = S^{(1)}.$$

Ako postoji par indeksa i i j, $i \neq j$, sa osobinom $s_{ij}^{(1)} = 0$, tada prelazimo na Korak 2.

Korak 2. $k := k + 1$.

Formiramo matricu $A^k = A \cdot A^{k-1}$, $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, i na osnovu nje matricu

$S^{(k)} = \left(s_{ij}^{(k)}\right)$ pomoću sledećih jednakosti

$$s_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 0, & \text{ako je} \quad i = j, \\ s_{ij}^{(k-1)}, & \text{ako je} \quad s_{ij}^{(k-1)} \neq 0, \\ k, & \text{ako je} \quad s_{ij}^{(k-1)} = 0 \quad \text{i} \quad a_{ij}^{(k)} \neq 0, \\ 0, & \text{ako je} \quad s_{ij}^{(k-1)} = 0 \quad \text{i} \quad a_{ij}^{(k)} = 0, \end{cases}$$

za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n$. Ovaj korak ponavljamo sve dok postoji par i i j, $i \neq j$, tako da je $s_{ij}^{(k)} = 0$.

Kada za neko k, $k = 1, 2, \ldots, n$, ne postoji par indeksa i i j, $i \neq j$, tako da je $s_{ij}^{(k)} = 0$, to je kraj izračunavanja i važi

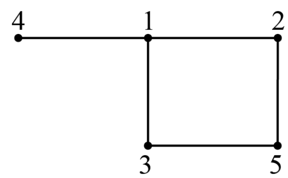
$$S = S^{(k)}.$$

Zadaci

Zadatak 1.

Graf $G = (V, E)$ definisan je skupovima $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$. Naći matricu rastojanja, dijametar, radijus, centar i periferiju datog grafa.

Rešenje. Dati graf je prikazan na sledećoj slici.



G

Kako je matrica rastojanja jednaka

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

to je dijametar grafa

$$d(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v) = d(4, 5) = 3.$$

Ekscentriciteti čvorova su:

$$e(1) = \max_{u \in V} d(1, u) = d(1, 5) = 2, \quad e(2) = \max_{u \in V} d(2, u) = d(2, 3) = 2,$$

$$e(3) = 2, \quad e(4) = 3, \quad e(5) = 3.$$

Radijus grafa je

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u) = 2.$$

Centar grafa je

$$C(G) = \{u \in V \mid e(u) = r(G)\} = \{1, 2, 3\}.$$

Periferija grafa je

$$\{u \in V \mid e(u) = d(G)\} = \{4, 5\}.$$

Zadatak 2.

Skup čvorova grafa G je skup uređenih trojki (a_1, a_2, a_3), $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, pri čemu su dva čvora susedna ako i samo ako se odgovarajuće uređene trojke razlikuju u tačno jednoj koordinati. Naći matricu rastojanja, radijus, dijametar, centar i periferiju grafa.

Rešenje. Neka su čvorovi grafa G dati sa:

$$0 = (0,0,0), \quad 1 = (0,0,1), \quad 2 = (0,1,0), \quad 3 = (0,1,1),$$

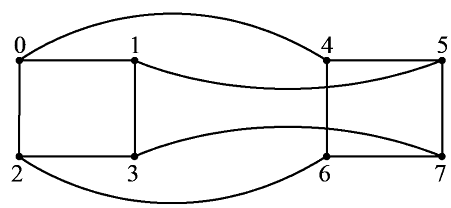
$$4 = (1,0,0), \quad 5 = (1,0,1), \quad 6 = (1,1,0), \quad 7 = (1,1,1).$$

Zvezde čvorova su:

$$z(0) = \{1,2,4\}, \quad z(1) = \{0,3,5\}, \quad z(2) = \{0,3,6\}, \quad z(3) = \{1,2,7\},$$

$$z(4) = \{0,5,6\}, \quad z(5) = \{1,4,7\}, \quad z(6) = \{2,4,7\}, \quad z(7) = \{3,5,6\}.$$

Graf G je prikazan na sledećoj slici.



G

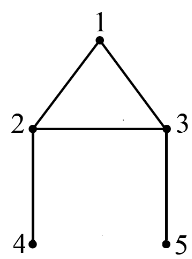
Matrica rastojanja je

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dijametar grafa je $d(G) = 3$.
Ekscentriciteti čvorova su: $e(0) = e(1) = e(2) = e(3) = e(4) = e(5) = e(6) = e(7) = 3$.
Radijus grafa je $r(G) = 3$.
Centar i periferija grafa su međusobno jednaki i sadrže sve čvorove datog grafa.

Zadatak 3.

Koristeći algoritam MATRAS naći matricu rastojanja grafa prikazanog na slici.



G

Rešenje. Kako je matrica susedstva grafa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

to je

$$S^{(1)} = (s_{ij}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $s_{14}^{(1)} = 0$, nalazimo matrice A^2 i $S^{(2)} = (s_{ij}^{(2)})$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{(2)} = (s_{ij}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $s_{45}^{(2)} = 0$, nalazimo matrice A^3 i $S^{(3)} = (s_{ij}^{(3)})$:

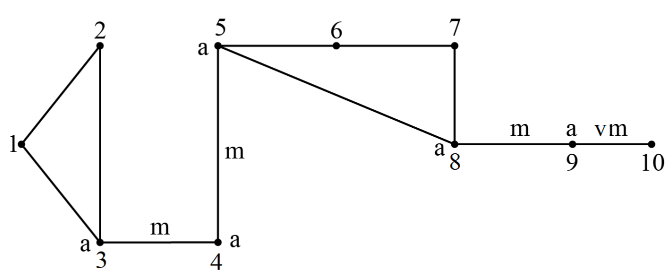
$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{(3)} = (s_{ij}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na to da ne postoji par indeksa i, j, $i \neq j$, za koje je $(s_{ij}^{(3)}) = 0$, važi jednakost $S = S^{(3)}$.

Zadatak 4.

Neka je dat graf $G = (V, E)$, definisan sa $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{7,8\}, \{8,9\}, \{9,10\}\}$. Odrediti artikulacione čvorove, mostove i viseće mostove.

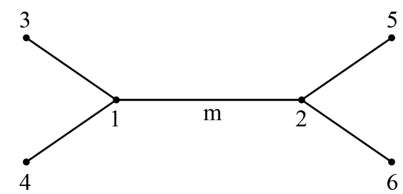
Rešenje.

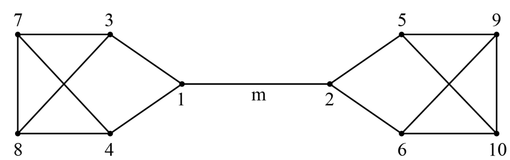


Zadatak 5.

Koliko najmanje čvorova ima 3-regularan graf koji sadrži samo jedan most?

Rešenje. Svaki most ima dva čvora, koja ćemo označiti sa 1 i 2, koji su prema uslovu u zadatku stepena 3. To znači da iz svakog od njih polaze po dve grane čije krajnje čvorove smo redom označili sa 3, 4, 5 i 6. Dobili smo podgraf datog grafa koji ima 6 čvorova, od kojih su 2 stepena 3, i 4 stepena 1. On sadrži jedan most, tako da nijedna druga grana u grafu ne može biti most. Da bi svaki čvor bio stepena 3 treba dodati najmanje još 4 čvora, sa svake strane po dva, u odnosu na podgraf sa prve slike, da bismo formirali 3-regularan graf.





Minimalan broj čvorova u traženom grafu je 10.

Zadatak 6.

Da li postoji 4-regularan graf koji sadrži samo jedan most?

Rešenje. Ne. Most povezuje dve komponente povezanosti. To znači da bi svaka od njih sadržala po jedan čvor neparnog stepena 3, dok bi ostali čvorovi bili stepena 4, što je nemoguće.

Zadatak 7.

Da li r-regularan graf, gde je r neparan broj, $r \geq 3$, koji sadrži tačno jedan most može imati najmanje $2(r+2)$ čvorova?

Rešenje. Dokazaćemo da ovakav graf mora da ima broj čvorova koji je veći ili jednak $2(r+2)$ i da postoji graf koji ima tačno toliko čvorova. Pretpostavimo da grana $\{x, y\}$ predstavlja jedini most u grafu G. Ako odstranimo ovu granu iz grafa G, dobićemo graf G_1 kod kojega svi čvorovi imaju stepen r, osim x i y, koji imaju stepene jednake $r-1$. Posmatrajmo komponentu povezanosti grafa G_1 koja sadrži čvor x. Pokazaćemo da ona mora da sadrži bar $r+2$ čvorova. Očigledno je da ova komponenta povezanosti mora da ima bar $r+1$ čvorova. Kada bi ova komponenta imala tačno $r+1$ čvorova, tada bi r čvorova imalo stepen r, a jedan čvor bi imao stepen $r-1$. Kako je r neparan broj, imali bismo slučaj da neparan broj čvorova ima neparan stepen, što nije moguće. Dakle, ova komponenta povezanosti mora da ima bar $r+2$ čvorova. Analogno se dokazuje da i komponenta povezanosti koja sadrži čvor y mora da ima bar $r+2$ čvorova, te graf G mora da ima bar $2(r+2)$ čvorova.

Ostalo je da damo primer grafa G koji ima tačno $2(r+2)$ čvorova. Nek je $G = (V, E)$, gde je $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_{r+2}, b_1, b_2, \ldots, b_{r+2}\}$. Između čvorova a_1, a_2, $\ldots$, a_{r+2}, nek postoje sve moguće grane osim $\{a_{r+2}, a_1\}$, $\{a_{r+2}, a_2\}$, kao i $\{a_3, a_4\}$, $\{a_5, a_6\}$, $\ldots$, $\{a_r, a_{r+1}\}$. Slično, između čvorova b_1, b_2, $\ldots$, b_{r+2}, neka postoje sve moguće grane osim $\{b_{r+2}, b_1\}$, $\{b_{r+2}, b_2\}$, kao i $\{b_3, b_4\}$, $\{b_5, b_6\}$, $\ldots$, $\{b_r, b_{r+1}\}$. Dodatno, nek postoji grana $\{a_{r+2}, b_{r+2}\}$. Ovakav graf ima tačno jedan most, i to je grana $\{a_{r+2}, b_{r+2}\}$, svaki čvor je stepena r i ima ukupno $2(r+2)$ čvorova.

Zadatak 8.

Neka je dat graf G čiji je skup čvorova skup uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dva čvora su susedna ako i samo ako se odgovarajuće n-torke razlikuju u tačno jednoj koordinati. Dokazati da je graf G povezan.

Rešenje. Od proizvoljnog čvora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ grafa G postoji put do čvora $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ koji dobijamo tako što u svakom koraku po jednu jedinicu zamenimo nulom. Ako su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dva proizvoljna čvora grafa G, tada je unija puteva od a do 0 i od b do 0 put koji povezuje čvorove a i b.

Zadatak 9.

Dokazati da povezan graf $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, ima bar dva čvora koji nisu artikulacioni.

Rešenje. Neka je l najduži elementarni put u grafu G,

$$l = u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k.$$

Pokazaćemo da čvorovi u_1 i u_k nisu artikulacioni. Pretpostavimo suprotno da je čvor u_1 artikulacioni. Tada postoji čvor $v \in V$ tako da je susedan sa čvorom u_1 i ne pripada skupu $\{u_2, u_3, \ldots, u_k\}$. Tada put

$$l_1 = v \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k.$$

je elementaran veće dužine nego put l, što je kontradikcija. Dakle, čvor u_1 nije artikulacioni. Slično, čvor u_k nije artikulacioni.

Zadatak 10.

U jednoj državi u svakom gradu postoji autobuska stanica. Autobuski saobraćaj je organizovan tako da se iz svakog grada može stići u bilo koji drugi grad. Da li je moguće zatvoriti jednu autobusku stanicu a da se i dalje saobraćaj odvija normalno?

Rešenje. Pridružimo zadatku graf G, pri čemu su čvorovi gradovi. Dva čvora su susedna ako postoji direktna autobuska linija između njih. Po uslovima u zadatku graf G je povezan, pa na osnovu prethodnog zadatka sadrži bar dva čvora koji nisu artikulacioni. Zato je moguće autobusku stanicu u nekom od gradova koji odgovaraju ovim čvorovima zatvoriti a da se i dalje iz svakog grada može stići u svaki drugi.

Zadatak 11.

U nekoj zemlji 20 gradova je povezano putevima svaki sa svakim. Koliko najviše puteva može biti zatvoreno a da se ipak iz svakog grada može stići u bilo koji drugi? Šta se dešava ako putevi koji se zatvaraju polaze iz istog grada?

Rešenje. Pridružimo zadatku graf $G = (V, E)$, pri čemu su čvorovi gradovi, a grane putevi između njih. Dobijeni graf je kompletan, pa je $|V| = 20$, $|E| = \frac{20\cdot 19}{2} = 190$. Najveći broj grana koji možemo da udaljimo iz grafa a da graf ostane povezan imamo u slučaju kada u grafu ostane elementaran put koji sadrži sve čvorove. Taj put je dužine 19 tako da smo udaljili $190 - 19 = 171$ granu, odnosno zatvorili smo 171 put. Ako putevi koji se zatvaraju polaze iz istog grada, najviše možemo da zatvorimo 18 puteva jer je stepen svakog čvora 19.

Zadatak 12.

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, takav da je

$$\min_{1\leq i\leq n} d(x_i) \geq \frac{n-1}{2}.$$

Dokazati da je graf G povezan.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, da graf G nije povezan. Neka je H komponenta povezanosti grafa sa minimalnim brojem čvorova, koji nije manji od $\frac{n-1}{2} + 1$, jer je stepen svakog čvora najmanje $\frac{n-1}{2}$. Ostatak grafa onda sadrži najviše $n - (\frac{n-1}{2} + 1) = \frac{n-1}{2}$ čvorova, pa je najveći stepen nekog od ovih čvorova jednak $\frac{n-1}{2} - 1$. To je nemoguće jer je stepen svakog čvora najmanje $\frac{n-1}{2}$, što znači da naša pretpostavka nije tačna. Dakle, graf G je povezan.

Zadatak 13.

U jednom odeljenju ima 35 učenika. Učenici su razmenili brojeve telefona pri čemu je svaki učenik sačuvao najmanje 17 brojeva. Ani je zatrebao Markov broj, sa kojim nije razmenila brojeve. Dokazati da putem poruka ona može dobiti Markov broj.

Rešenje. Svakom učeniku iz odeljenja dodelimo po jedan čvor grafa $G = (V, E)$, $|V| = 35 = n$. Dva čvora ovog grafa su susedna ako i samo ako su učenici razmenili brojeve telefona. Po uslovu zadatka, stepen svakog čvora ovog grafa nije manji od 17. Za rešenje zadatka dovoljno je pokazati da je graf G povezan. Kako stepen svakog čvora nije manji od 17, imamo da važi $\min_{1\leq i\leq n} d(x_i) \geq 17 = \frac{n-1}{2}$. Na osnovu prethodnog zadatka znamo da je graf sa ovom osobinom povezan, što znači da Ana može dobiti Markov broj.

Zadatak 14.

Dokazati da je graf G koji ima $n \geq 3$ čvorova i m grana, pri čemu je $m > \binom{n-1}{2}$, povezan.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno da graf G nije povezan, tj. da ima bar dve komponente povezanosti ($k \geq 2$). Tada važi

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) \\ &\leq \frac{1}{2}(n-2)(n-1), \end{aligned}$$

što predstavlja kontradikciju. Dakle, graf G mora biti povezan.

Zadatak 15.

U jednoj državi postoji 35 gradova koji su povezani putevima. Ako ukupno ima 570 puteva, dokazati da se iz svakog grada može stići u bilo koji drugi grad.

Rešenje. Svakom gradu dodelimo po jedan čvor grafa $G = (V, E)$, $|V| = 35 = n$, $|E| = 570 = m$. Dva čvora su susedna ako i samo ako su odgovarajući gradovi povezani. Za rešenje zadatka dovoljno je pokazati da je graf G povezan. Kako je $570 > \binom{n-1}{2} = \binom{34}{2} = \frac{34\cdot 33}{2} = 561$, budući da je graf za koji važi $m > \binom{n-1}{2}$ povezan (prethodni zadatak), sledi da je graf G povezan. Dakle, iz svakog grada se može stići u bilo koji drugi grad.