MOMČILO UŠĆUMLIĆ
PAVLE MILIČIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ VIŠE MATEMATIKE I

VI IZDANJE

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: 15275
Датум:

Naučna knjiga
BEOGRAD, 1977.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: 15275
Датум:

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

U ovom izdanju izvršene su delimične dopune i promene nekih ranijih paragrafa dok je paragraf računa verovatnoće potpuno izmenjen. Sem toga dodata su tri nova paragrafa: algebarske strukture, vektorski prostori i linearno programiranje, što je uslovilo novu podelu po glavama. Nadamo se da će ove izmene i dopune znatno poboljšati kvalitet knjige.

Čini nam čast da se zahvalimo docentima dr M. Marjanoviću i dr D. Adnađeviću koji su u svojstvu recenzenata dali korisne primedbe i sugestije na rukopis knjige.

Kao i do sada, bićemo zahvalni svima onima koji nam ukažu na omaške, greške i nedostatke knjige.

Beograd
29. VII 1969.

Pisci

PREDGOVOR ČETVRTOM IZDANJU

Četvrto izdanje razlikuje se od prethodnog u kompletiranju izvesnih paragrafa. Sem toga otklonjene su neke manje greške i nedostaci što će, nesumnjivo, doprineti poboljšanju knjige.

Beograd
6. II 1973.

Pisci

PREDGOVOR PETOM IZDANJU

Peto izdanje se bitno ne razlikuje od četvrtog izdanja. U njemu su otklonjeni propusti iz prethodnog izdanja u čemu nam je svesrdno pomogao diplomirani matematičar Slobodan Vujić. Ovom prilikom mu se najsrdačnije zahvaljujemo.

Beograd, 21. 09. 1975.

Pisci

SADRŽAJ

Predgovor

Glava I

Strana

Uvodni zadaci 1

Glava II

Osnovni pojmovi savremene matematike i brojevi

§ 1. Račun iskaza 11
§ 2. Skup. Relacija. Funkcija 17
§ 3. Algebarske strukture 21
§ 4. Realni brojevi 27
§ 5. Matematička indukcija 30
§ 6. Kombinatorika i binomni obrazac 32
§ 7. Nejednakosti i apsolutne vrednosti 39
§ 8. Približne vrednosti i računanje sa njima 53
§ 9. Kompleksan broj 61

Glava III

Linearna algebra

§ 1. Determinante 75
§ 2. Sistemi linearnih jednačina 88
§ 3. Vektorski prostori 94
§ 4. Matrice 98
§ 5. Linearno programiranje 115

Glava IV

Analitička geometrija

§ 1. Vektori 124
§ 2. Afine transformacije koordinata 140
§ 3. Ravan 145
§ 4. Prava u prostoru 149
§ 5. Prava i ravan 152
§ 6. Neke elementarne površi 157

Glava V

Uvod u analizu

§ 1. Brojni nizovi 163
§ 2. Pojam funkcije realne promenljive 169
§ 3. Grafici elementarnih funkcija 179

Strana

§ 4. Granične vrednosti funkcija 182
§ 5. Upoređivanje beskonačno malih i beskonačno velikih veličina 189
§ 6. Neprekidnost funkcija 191

Glava VI

Diferencijalni račun funkcije jedne promenljive

§ 1. Izvodi 195
§ 2. Diferencijal i njegova primena 206
§ 3. Viši izvodi i diferencijali 210
§ 4. Primena izvoda u fizici 214
§ 5. Teoreme o argumentu funkcije 216
§ 6. L'Hospitalovo pravilo 218
§ 7. Rastenje i opadanje funkcija. Ekstremumi i prevojne tačke 221
§ 8. Tangente i normale krivih u ravni 225
§ 9. Asimptote krivih linija u ravni 232
§ 10. Taylorova formula 233
§ 11. Crtanje grafika funkcija pomoću karakterističnih tačaka 236
§ 12. Zadaci iz maksimuma i minimuma 239
§ 13. Dodiri krivih linija. Krivina i poluprečnik krivine. Evoluta 247
§ 14. Polinomi i jednačine 251
§ 15. Približno određivanje korena jednačina 259
§ 16. Interpolacija funkcija 260

Glava VII

Neodređeni integral

§ 1. Prostiji neodređeni integrali 262
§ 2. Integracija racionalnih funkcija 270
§ 3. Integracija iracionalnih funkcija 272
§ 4. Integracija trigonometrijskih funkcija 275
§ 5. Integracija transcedentnih funkcija 278
§ 6. Razni integrali 279

Glava VIII

Određeni integral

§ 1. Određeni integral kao granična vrednost zbira i njegove osobine 282
§ 2. Nepravi integral 290
§ 3. Procena integrala 293
§ 4. Izračunavanje površine ravnog lika 294
§ 5. Zapremina rotacionog tela 299
§ 6. Dužina luka krive 301
§ 7. Komplanacija obrtnih površi 303
§ 8. Primena određenog integrala u mehanici i fizici 304
§ 9. Približno izračunavanje integrala 312

D O D A T A K

§ 1. Totalni diferencijal i njegova primena 315
§ 2. Krivolinijski integral 319
§ 3. Diferencijalne jednačine 324
§ 4. Račun verovatnoće 333
Rezultati 357
Prilog 644

Glava I

UVODNI ZADACI

1. Neka je $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ i $y=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

1° Naći x^2 i y^2 zatim x i y u jednostavnijem obliku od datog. 2° Pokazati da se $7+4\sqrt{3}$ može napisati kao kvadrat zbira jednog celog i jednog iracionalnog broja. 3° Izračunati vrednost izraza:

$$A=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}.$$

2. Ako je $A=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}$, $B=\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}$, $C=\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$ i $a+b+c=0$,

tada je $A+B+C=3$ i $ABC=1$. Dokazati.

3. Dato je: $y=\left(\dfrac{5}{2}x^2-x+5\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}x^2+5x-4\right)^2$.

1° Pokazati da je $y>0$. 2° Rešiti jednačinu $y=0$.

3° Ako je $z=\dfrac{y}{(4x^2-1)^2}$ odrediti x za koje je $z=1$.

4. Da li za svako $x\in R$ važi: 1° $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$?

2° $\sqrt{(2-x)(x-5)}=\sqrt{2-x}\sqrt{x-5}$; 3° $\sqrt{(3-x)^2}=3-x$?

4° $\sqrt{x(x+1)(x+2)}=\sqrt{x}\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}$?

5. Uzimajući aritmetičku vrednost korena, izvršiti naznačene operacije:

$$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(5-x)^2}.$$

Dokazati jednakosti:

6. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\begin{cases} 2\sqrt{x-9}, & x\geqslant 18 \\ 6, & 9<x<18. \end{cases}$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{x+2n-2}+\sqrt{x+2n}}=$

$=\dfrac{n}{\sqrt{x+2n}+\sqrt{x}} \quad (x>0).$

8. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}.$

9. Koji je veći od brojeva: 1° $\dfrac{5}{7}$ ili $\dfrac{7}{9}$; 2° $\sqrt[3]{5}$ ili $\sqrt{3}$;

3° $\log_{10} 5$ ili $\log_9 7$; 4° $\dfrac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ili 6; 5° $\sqrt{8\sqrt{15}}$ ili $\dfrac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})$.

10. Ako je $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ onda je $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{b^2}{a^2+b^2}=1.$

Dokazati! Da li obrnuto važi?

11. Ako su brojevi: a, b i c pozitivni i zadovoljavaju jednakosti $a^2=b^2+c^2$

1° Uporediti a sa $b+c$, b i c. 2° Uporediti a^3 i b^3+c^3.

12. Ako su α i β oštri uglovi i $\sin(\alpha+\beta)=2\cos\alpha$ tada je $\alpha>\beta$.

13. Napisati u obliku proizvoda izraz $y=1+\cos 2x+\cos 4x$, i rešiti jednačinu $y=0$.

14. Data je jednačina: $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x=m \operatorname{tg} 2x$, gde je m data konstanta.

1° Rešiti jednačinu ako je: a) $m=0$, b) $m=-1$.

2° Pokazati da se jednačina može napisati u obliku: $\sin 2x=0$ i $2m\cos^2 2x+(m+2)\cos 2x-m=0$.

Rešiti jednačine:

15. $\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$

16. $32\cos^6 x-\cos 6x=1.$

17. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-14=0, \quad (0<x<\pi).$

18. $\sin x-\cos x-|\sin x+\cos x|=1.$

19. Naći realna rešenja jednačine $\sin^n x+\dfrac{1}{\cos^m x}=\cos^n x+\dfrac{1}{\sin^m x}$ gde su m i n neparni prirodni brojevi.

20. Odrediti parametar k da bi dati trinom bio potpun kvadrat:

1° $y=(k+2)x^2-20x+10k+5$,

2° $y=kx^2-x\sqrt{k}+3k+1$.

21. Rastaviti na proste činioce sa celim koeficijentima polinom

$$P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$$

22. Rešiti jednačinu $\left(x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x+\frac{1}{x}}\right)^2=\frac{81}{100}$.

23. Za koje vrednosti parametra a (a ceo broj) jednačina:

$$(a^2-1)x^2-6(3a-1)x+72=0$$

ima:

1° korene negativne, cele; 2° suprotnog znaka, cele; 3° pozitivne, različite, cele; 4° jednake korene; 5° jedan ceo, jedan razlomak; 6° koren jednak parametru.

24. Rešiti jednačinu $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)=60$.

25. Za koje vrednosti parametra a samo jedan koren jednačine $(a+1)x^2-(a^2+a+6)x+6a=0$ leži u intervalu $(0,1)$?

26. Naći k da bi koreni trinoma $y=(x+k)^2-5(x+3k)+57$ bili recipročni.

27. U jednačini $(b-a)x^2-2(a+b)x+ab-1=0$ odrediti a i b, tako da koreni budu recipročni i da njihov zbir bude $\frac{5}{2}$.

28. U jednačini $4x^2-4kx+k^2-4=0$ odrediti granice u kojima se može kretati k da bi se oba korena jednačine nalazila između -3 i 4.

29. Rešiti i diskutovati korene jednačine $x^3-1+kx(x-1)=0$.

30. U jednačini $x^3-kx^2+2kx-(k+1)=0$ odrediti parametar k tako da bude:

1° zbir korena 7; 2° proizvod korena 8. Naći te korene.

31. U jednačinama: $4x-3=k+1$ i $x^2-(k+1)x+k=0$ odrediti k tako da je koren linearne jednačine geometrijska sredina korena kvadratne jednačine.

32. Pokazati da koreni jednačine $x^3-7mx^2+14m^2x-8m^3=0$ obrazuju geometrijsku progresiju, gde je m realan parametar.

33. Rešiti i diskutovati rešenje jednačine $a^2\sin^2x-a^2\sin x+a-1=0$.

34. Data je jednačina $ax^2+b|x|+c=0$, gde je x nepoznata a a, b i c konstante pri čemu je $a\neq 0$. Ako je $\Delta=b^2-4ac$, pokazati da: 1° jednačina ima dva simetrična korena, ako je $ac<0$ i $\Delta>0$; 2° diskutovati broj korena jednačine, ako je $ac>0$ i $\Delta>0$; 3° analizirati specijalne slučajeve: 1° $c=0$, 2° $\Delta=0$.

35. Data je jednačina $ax^2+bx+1=0$ gde su a i b koordinate tačke M u pravouglom koordinatnom sistemu. Diskutovati korene u zavisnosti od položaja tačke M.

Rešiti jednačine:

36. 1° $2^x=8$; 2° $5^x=4$; 3° $3^{x-1}=27$; 4° $\frac{1}{2^x}+3=0$.

37. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

38. $\log_x 2 \log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$.

39. $\log_{3x}x-\log_3^2 x=\log_{3x}3-1$.

40. $\log_x 2 \log_{2x} 2=\log_{4x} 2$.

Rešiti sistem jednačina:

41. $3^x 2^y=576$

$\log_{\sqrt{2}}(y-x)=4$.

42. $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=19(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=7(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

43. $x^4+y^4=17$

$x+y=3$.

44. $10^{3-\log(x-y)}=250$

$\sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\frac{26-y}{\sqrt{x-y}}$.

45. $\log_y x-3\log_x y=2$

$\log_2 x=4-\log_2 y$.

46. $y=2\sin 2x$

$y=\sin 6x$.

47. $\cos^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{4}$

$x+y=\frac{5\pi}{6}$.

48. $x^y=y^x$

$x^p=y^q (x>0,\ y>0,\ pq>0)$.

Rešiti jednačine:

49. $\sqrt[3x+3]{8^{25-11x}}\cdot\sqrt[5x+5]{4^{10,5-41x}}=\sqrt[x+1]{2^{265-x}}$.

50. $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0$.

51. Uglovi trougla čine aritmetičku progresiju. Izračunati ih ako je zbir njihovih sinusa $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

52. Ako brojevi a, b i c obrazuju aritmetičku progresiju tada i brojevi $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ obrazuju aritmetičku progresiju.

53. Dokazati da je $\log_2\left(\log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ korena}}\right) = -n.$

54. Pretvoriti u proizvod i naći: osnovni period funkcije, amplitudu i početnu fazu ako je $y = a\sin x + b\cos x$.

55. Dokazati da je $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, gde je $x>0$, $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$.

56. Dokazati identitet

$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x$, $\log_c x + \log_c x \cdot \log_a x \equiv \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}$. Generalisati.

57. Izračunati bez upotrebe logaritamskih tablica 1° $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$; 2° $a^{\log_{\sqrt{a}} b}$.

58. Ako logaritmi: $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ obrazuju aritmetičku progresiju, pokazati da je $n^2 = (kn)^{\log k^m}$

59. Dokazati za pravougli trougao odnos: $\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2} > \dfrac{2ab}{c^2}$.

60. Ako je $xyz = 1$, izraz

$$A = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{y}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

ne zavisi od x, y, i z; dokazati.

61. Naći tačke u ravni xOy koje ne zadovoljavaju nejednačinu

$[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2]\,[(x-a_2)^2+(y-b_2)^2]\cdots[(x-a_n)^2+(y-b_n)^2]>0.$

62. 1° Ako su brojevi x, y, z članovi geometrijske progresije, onda važi $(x+y+z)(x-y+z) = x^2+y^2+z^2$. 1° Odrediti tri pozitivna broja geometrijske progresije, ako se zna njihov zbir i zbir njihovih kvadrata.

63. Dati su nizovi brojeva poređani u obliku sledeće kvadratne šeme:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n \\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ (n+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots \end{array}$$

1° Koji je poslednji broj u poslednjoj vrsti? 2° Uporediti vrste i kolone istog ranga. 3° Pokazati da je razlika između zbirova članova dve uzastopne vrste konstantna. Koju vrednost ima ta konstanta? 4° Izvesti obrazac za zbir, s, članova prve vrste upoređujući zbir jednako udaljenih od najviše udaljenih članova sa zbirom najviše udaljenih članova. Isto tako izvesti obrazac za zbir, S, svih članova napisanih u tablici. 5° Izračunati zbir članova koji se nalaze u poslednjoj vrsti (ili u poslednjoj koloni). Izvesti obrazac za zbir kvadrata n prvih prirodnih brojeva.

64. Data je sledeća tabela celih brojeva

0, 2, 4, 6, . . . , 40
5, 7, 9, . . . , 43
10, 12, . . . , 46
. . . . . .
. . . .
. . .
. .
.

1° Koji je najveći broj u tabeli?

2° Koliko nedostaje prirodnih brojeva koji su manji od 100?

65. Naći sve četvorocifrene brojeve koji su potpuni kvadrati i kod kojih su prve dve cifre jednake i poslednje dve cifre jednake.

66. Rešiti po x jednačinu $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2})\cdots\cdots(1+a^{2^n})$.

67. Odrediti momenat poklapanja velike i male kazaljke na časovniku prvi put posle 12 časova.

68. Broj godina jednog čoveka u 1887. g. jednak je zbiru cifara godina njegovog rođenja. Koje je godine rođen?

69. Ako je $a^2+b^2+x^2+y^2=A$ naći najveću vrednost izraza $(ax-by)^2+(bx+ay)^2$.

70. Dokazati da je $1+1\cdot x+1\cdot x^2+\cdots+1\cdot x^{n-1}+x\cdot x^2+x\cdot x^3+\cdots+x\cdot x^{n-1}+$

$$+x^2\cdot x^3+x^2\cdot x^4+\cdots+x^2\cdot x^{n-1}+\cdots+x^{n-2}\cdot x^{n-1}=\frac{(x^n-1)(x^n-x)}{(x-1)(x^2-1)},\quad x\neq\pm 1.$$

71. Naći šestocifreni broj koji pomnožen sa n ($n=2, 3, 4, 5, 6$) daje šestocifren broj čije su cifre ciklički permutovane od traženog broja.

72. Rešiti jednačinu $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1\quad(0<a<1)$.

73. Dokazati: potreban i dovoljan uslov da bi $\Delta\ ABC$ bio oštrougli jeste

$$\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1.$$

74. Dokazati da duži, čiji su merni brojevi jednaki $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ i $\cos\frac{C}{2}$, mogu biti stranice trougla ako su A, B i C uglovi nekog trougla.

75. Krug upisan u pravougli trougao sa hipotenuzom c dodiruje strane oštrog ugla u tačkama M i N. Dokazati da je $MN<\frac{2\sqrt{3}}{9}c$.

76. Kroz dijagonalu strane kocke postaviti ravan tako da je površina preseka jednaka površini strane.

77. Dato je 5 sfera. Svake četiri prolaze kroz jednu tačku. Dokazati da postoji tačka kroz koju prolazi svih pet sfera.

78. Koliki je ostatak ako se broj $(101)^{100}$ podeli sa 7?

79. Proveriti da li je $\sqrt{\underbrace{111\cdots11}_{2n}-\underbrace{222\cdots22}_{n}}=\underbrace{333\cdots33}_{n}$?

80. Kroz koordinatni početak postaviti pravu koja sa pravama: $x+y=a$ i $x=0$ obrazuje trougao površine a^2.

81. Naći poluprečnik opisane lopte oko pravilnog tetraedra čija je ivica 1.

82. Dokazati ekvivalentnost relacija:

$$ad=bc \text{ i } (ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

83. Ako je $aa'=bb'=cc'$, dokazati da je

$$(a+b')(b+c')(c+a')=(a'+b)(b'+c)(c'+a).$$

84. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni jednačine $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+k=0$, onda su: $a_1\, a_2, \ldots, a_n$ koreni jednačine $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)-k=0$. Dokazati sledeće identitete:

85. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad \alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$

86. $\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha.$

87. $\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\cdots+\cos(\varphi+n\alpha)=$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\left(\varphi+\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha\neq k\pi.$$

88. $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right)^2.$

89. $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$

90. Katete pravouglog trougla leže na pozitivnim delovima koordinatnih osa, a teme pravog ugla je u koordinatnom početku. Naći skup tačaka centara kvadrata, konstruisanih nad hipotenuzom izvan trougla. Zbir kateta je stalan.

91. Osnovica trougla je nepokretna, a vrh se kreće po datoj pravoj. Naći jednačinu linije koju opisuje težište tog trougla.

92. Data je prava linija $y=2x-1$ i tačka $A(1, \alpha)$. Naći jednačinu skupa tačaka B simetričnih tački A u odnosu na datu pravu.

93. Naći jednačinu skupa tačaka iz kojih se parabola $y^2=2px$ vidi pod pravim uglom.

94. Naći jednačinu skupa tačaka sredina paralelnih tetiva parabole $y^2=2px$.

95. Dat je krug $x^2+y^2=a^2$. Naći skup tačaka sredina tetiva tog kruga, ako sve tetive prolaze kroz tačku $A(a, 0)$.

96. Naći jednačinu skupa tačaka centara krugova, koji prolaze kroz datu tačku i dodiruju dati krug.

97. Strana $AB=c$ trougla ABC je nepomična dok se strana $AC=b$ obrće oko temena A ne menjajući svoju dužinu. Naći jednačinu skupa tačaka sredina strane BC.

98. Duž $AM=a$ okreće se u ravni xOy ostajući paralelna Ox osi, tako da levi kraj duži klizi po krugu $x^2+y^2=a^2$. Naći jednačinu linije koju opisuje tačka M', ako je M' projekcija tačke M na osu Ox.

99. Naći jednačinu skupa tačaka iz kojih se krug $x^2+y^2=r^2$ vidi pod pravim uglom.

100. Kraci pravog ugla klize po pravama $y=a$ i $y=b$, $(a\neq b)$, a teme mu se nalazi u koordinatnom početku. Naći jednačinu skupa tačaka podnožja visina spuštenih iz temena pravog ugla na hipotenuzu, određenu presekom krakova i datih pravih.

101. Iz tačke $A(a, 0)$ spuštena je normalna AM na pravu L koja prolazi kroz koordinatni početak, pa je na istu pravu, u nastavku duži OM, preneta duž $MP=AM$. Ako se prava L okreće oko koordinatnog početka, naći: 1° jednačinu skupa tačaka M; 2° jednačinu skupa tačaka P.

102. Data je prava i na njoj dva odsečka $AB=2$ i $CD=1$. Ako je tačka C udaljena od tačke B za $BC=3$, naći u ravni jednačinu skupa tačaka iz kojih se odsečci AB i CD vide pod jednakim uglom.

103. Naći jednačinu skupa tačaka sredina tetiva kruga $x^2+y^2=r^2$ koje se vide iz tačke $A(a, 0)$ pod pravim uglom. Šta se dobija za specijalne slučajeve $a=r$ i $a=0$?

104. Dat je krug $(x-1)^2+y^2=2$. Naći jednačinu skupa tačaka preseka visina svih trouglova upisanih u dati krug, ako im je zajednička strana tetiva koju odseca krug na Oy osi.

105. Uopšten prethodni zadatak bi glasio: dat je krug (k) i tetiva tog kruga AB. Naći skup tačaka preseka visina trouglova upisanih u taj krug, ako im je zajednička strana tetiva AB.

106. Naći skup tačaka jednako udaljenih od Oy ose i kruga $(x-3)^2+y^2=1$.

107. Krug $x^2+y^2=r^2$ seče pozitivni smer ose Oy u tački S. Ako je M proizvoljna tačka datog kruga, a M' njena projekcija na Ox osu, naći skup tačaka preseka pravih OM i $M'S$.

108. Tangenta parabole $y^2=2px$ povučena u tački A seče ordinatnu osu u tački B. Naći skup tačaka centara krugova opisanih oko trouglova OAB.

109. Teme pravog ugla nalazi se u koordinatnom početku, a njegovi kraci klize po paraboli $y^2=2px$ i seku tu parabolu u tačkama A i B. 1° Naći skup tačaka sredina duži AB. 2° Pokazati da sve prave AB imaju jednu zajedničku tačku.

110. Duž stalne dužine kreće se tako da joj jedan kraj klizi po Ox, a drugi po Oy osi. Odrediti jednačinu putanje proizvoljne tačke duži.

111. Dat je krug $x^2+y^2=r^2$. Neka je M njegova proizvoljna tačka, a N njena projekcija na osu Ox. Krug sa centrom u M i poluprečnikom MN seče dati krug u tačkama P i Q. Naći skup tačaka preseka S duži PQ i MN, kad se tačka M kreće po krugu.

112. Data su dva kruga $x^2+y^2=a^2$ i $x^2+y^2=b^2$ $(a\neq b)$. Zrak koji rotira oko koordinatnog početka, seče date krugove u tačkama A i B. Ako se kroz tačku A povuče prava paralelna Ox a kroz tačku B paralelna Oy osi, njihovim presekom određena je tačka M. Naći putanju tačke M.

113. Naći skup tačaka koje dele u datom odnosu $\lambda\neq 1$ tetive kruga, paralelne nekom utvrđenom pravcu.

114. Naći jednačinu centra krugova, koji odsecaju na dvema normalnim pravama odsečke dužine $2a$ i $2b$.

115. Date su tačke $A(-a, 0)$ i $B(2a, 0)$. Tačka M se kreće tako da je ugao MAB stalno tri puta manji od spoljašnjeg ugla AMC trougla AMB. Odrediti putanju tačke M.

116. Naći skup tačaka iz kojih se parabola $y^2=2bx$ vidi pod uglom od 45°.

117. Ako se jedno teme ravnostranog trougla nalazi u datoj tački, a drugo na periferiji datog kruga, pri čemu tačka i krug pripadaju istoj ravni, pokazati da je skup tačaka koje odgovaraju trećem temenu jedna kriva višeg reda.

118. Na tetivu OM parabole $y^2=\frac{3}{2}x$ nanesena je duž $OA=1/OM$, gde je O koordinatni početak. Naći jednačinu skupa tačaka A, kada se tačka M kreće po paraboli.

119. Dat je krug $x^2+y^2=a^2$ i na njemu tačka M. Projekcija tačke M na Ox osu je M'. Naći skup tačaka preseka prave OM i normale povučene iz tačke M' na pravu OM.

120. Prava $x=a$ seče Ox osu u tački A, a proizvoljan zrak OB u tački B. Na zraku, od tačke B na obe strane, naneseni su odsečci $BM_1=BM_2=$ $=AB$. Napisati jednačinu skupa tačaka M_1 i M_2.

121. Krajevi duži $AB=2a$ klize po koordinatnim osama. Iz koordinatnog početka povučena je normalna OM na AB. Napisati jednačinu skupa tačaka M.

122. Tačka se kreće tako da proizvod njenih odstojanja od tačaka $(0, c)$ i (π, c) uvek iznosi c^2. Napisati jednačinu skupa tačaka koje zadovoljavaju navedeni uslov.

123. Zrak koji rotira oko tačke O, seče krug $x^2+y^2=ax$ u tački A. Na jednu i na drugu stranu od tačke A, nanesene su na pravoj OA duži $AM=$ $=AM_1=a$. Naći jednačinu skupa tačaka M i M_1.

124. Krug poluprečnika a kotrlja se po pravoj $y=0$ bez klizanja. Sastaviti parametarske jednačine krive koju opisuje proizvoljna tačka kruga, uzimajući za parametar ugao t za koji se krug okrenuo.

125. Krug poluprečnika r kotrlja se bez klizanja po krugu poluprečnika R sa spoljašnje strane. Sastaviti parametarske jednačine krive, koju opisuje proizvoljna tačka pokretnog kruga.

126. Krug poluprečnika r kotrlja se bez klizanja po krugu poluprečnika $R>r$ sa unutrašnje strane. Napisati parametarske jednačine krive, koju opisuje proizvoljna tačka pokretnog kruga.

Glava II

OSNOVNI POJMOVI SAVREMENE MATEMATIKE I BROJEVI

§ 1. Račun iskaza

1° Pojam iskaza

Rečenice u svakodnevnom govoru, koje imaju smisla i sadrže neku informaciju, nazivaju se *iskazi* ili *sudovi*. Neki iskaz može biti *istinit* ili *neistinit* odnosno *lažan*. Otuda se kaže da neki iskaz može imati jednu od dve vrednosti *istinitosti*: istinito „*I*", i neistinito „*N*". Iskaze ćemo obeležavati slovima p, q, r, s itd.

Na skupu iskaza se definišu izvesne operacije pomoću kojih se dobijaju novi složeni iskazi. Navodimo sledeće operacije:

1. Negacija. Ako je p neki iskaz onda je $\bar{p}$ *negacija* tog iskaza. Ova operacija je unarna. Sam znak „—" čitamo „non". To znači ako je p istinito $\bar{p}$ je neistinito i obrnuto. Ovaj princip se naziva „*princip isključivanja trećeg*" ili „*tercium non datur*".
2. Konjunkcija. Ako su p i q dva iskaza, onda se iskaz $p \wedge q$ ($\wedge$ čitaj „i") naziva *konjunkcija* tih iskaza. Operacija $\wedge$ je *binarna*. Iskaz dobijen tom operacijom je istinit onda i samo onda ako su oba iskaza p i q istiniti.
3. Disjunkcija. Ako su p i q dva iskaza, onda se iskaz $p \vee q$ ($\vee$ čitaj „ili") naziva *disjunkcija* tih iskaza. Operacija $\vee$ je binarna i daje iskaz koji je istinit kada je bilo koji iskaz p i q istinit ili su oba istinita.
4. Implikacija. Iskaz $p \Rightarrow q$ ($\Rightarrow$ čitaj implicira) se naziva *implikacija*. Operacija $\Rightarrow$ je binarna a iskaz dobijen na taj način je istinit u svim slučajevima sem ako je iskaz p istinit a iskaz q lažan.
5. Ekvivalencija. Iskaz $p \Leftrightarrow q$ se naziva *ekvivalencija*. Operacija $\Leftrightarrow$ je binarna i daje iskaz koji je istinit onda i samo onda kada su iskazi p i q ili oba istinita ili oba neistinita.

Rezultati primene navedenih operacija dati su u tablicama 1 i 2.

Tablica 1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
N	N	N	N	I	I
N	I	N	I	I	N
I	N	N	I	N	N
I	I	I	I	I	I

Tablica 2

p	$\bar{p}$
I	N
N	I

Skup iskaza posmatran zajedno sa operacijama definisanim na njemu zove se *algebra iskaza*.

Važan pojam logike uopšte je *logička mogućnost*. Kad istovremeno razmatramo više iskaza onda zahtevamo da *svaki* od tih iskaza bude vezan za jedan isti skup logičkih mogućnosti. Ako je neki iskaz istinit u svakom mogućem logičkom slučaju onda ga mi nazivamo *logički istinita*. Ako je, pak, iskaz lažan u svakom logički mogućem slučaju, nazivamo ga *logički lažna*, ili *protivrečna*.

Za jedan složeni iskaz u matematičkoj logici se kaže da je *tautologija* ako je on istinit bez obzira na istinitost odnosno neistinitost njegovih komponenata. Pojam tautologija je sinonim pojmu logički istinit.

2° Booleova algebra

Svaki složeni iskaz, sastavljen od nekih polaznih iskaza primenom logičkih operacija $1 \div 5$, zovemo *formula algebre iskaza*. Svaka formula predstavlja neku funkciju od slova koja ulaze u nju. Za dve formule A i B se kaže da su *istovredne* ako za proizvoljne vrednosti $x_1, \ldots, x_n$, gde su x_i $(i=1, \ldots, n)$ sve promenljive koje ulaze u A i B, te formule imaju istu vrednost. Ako su A i B dve istovredne formule, onda to pišemo u obliku $A=B$. Važniji primeri istovrednih formula su:

1. $\overline{\overline{p}}=p$;
2. $p \wedge q=q \wedge p$;
3. $(p \wedge q) \wedge r=p \wedge (q \wedge r)$;
4. $p \vee q=q \vee p$;
5. $(p \vee p) \vee r=p \vee (q \vee r)$;
6. $p \wedge (q \vee r)=(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
7. $p \vee (q \wedge r)=(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
8. $\overline{(p \vee q)}=\bar{p} \wedge \bar{q}$;
9. $\overline{(p \wedge q)}=\bar{p} \vee \bar{q}$;
10. $p \vee p=p$;
11. $p \wedge p=p$;
12. $p \wedge I=p$;
13. $p \vee N=p$.

Skup elemenata na kojima su definisane operacije sabiranja, množenja i negacije, koje zadovoljavaju aksiome $1 \div 13$ naziva se *Booleova algebra*. Otuda se može reći da iskaz i osnovne logičke operacije $\vee$, $\wedge$, — čine Booleovu algebru. Najprostiji skup koji zadovoljava gornje aksiome sastoji se od elemenata 0 i 1. U ovom slučaju ćemo identifikovati 0 sa N i 1 sa I, operaciju $+$ sa disjunkcijom $\vee$, a operaciju sa konjunkcijom $\wedge$. Na taj način ako su slova $x, y, z, \ldots$ proizvoljni elementi skupa (0, 1) imamo sledeće tablice sabiranja i množenja.

Tablica 3

x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tablica 4

x	y	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Svaka formula Booleove algebre definiše neku *Booleovu funkciju*. Pod Booleovom funkcijom se podrazumeva svaka funkcija f od n promenljivih koje uzimaju vrednost iz skupa (0, 1) a vrednosti funkcije takođe pripadaju skupu (0, 1).

Booleova algebra (0, 1) ili, kako se to kaže, binarni sistem, ima veliku primenu u električnim mrežama. Za dva prekidača se kaže da su u „paralelnoj vezi" kad struja prolazi kroz sistem u kome je bar jedan od njih zatvoren. Analogno tome prekidači su vezani u „seriji" kad struja prolazi kroz mrežu kad su oba prekidača zatvorena. Na sl. 1 sa S je obeležen prekidač. Uzima se da svaki prekidač S ima vrednost 1 ako je zatvoren a vrednost 0 ako je otvoren. Isto tako uzmimo da svaki kombinovani prekidač Y ima vrednost 1 ako je zatvoren i vrednost 0 ako je otvoren. Otuda se to stanje može opisati jednačinama:

Pomoću tablica istinitosti pokazati da su sledeći iskazi tautologije.

137. 1° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$; 2° $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}$;

138. 1° $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$;

2° $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

139. 1° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$;

2° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

140. 1° $(\bar{p} \vee p) \vee (\bar{q} \vee q) \vee (\bar{r} \vee r) \vee (\bar{s} \vee s)$;

2° $(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{q} \vee r) \vee (\bar{r} \vee p)$.

141. 1° $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (q \vee r) \vee (\bar{r} \vee \bar{s}) \vee (s \vee p)$;

2° $(p \Rightarrow \bar{q}) \vee (\bar{q} \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \bar{s}) \vee (\bar{s} \Rightarrow p)$.

142. 1° $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

2° $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \wedge r)] \Rightarrow (q \vee s)$.

143. $(p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \wedge (p_n \Rightarrow p_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee (\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$.

144. Ako su dati iskazi p i q istiniti a sem toga su dati $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q)$ $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$. Izvesti odatle zaključak da je r neistinito.

Na osnovu navedenih aksioma dokazati sledeće stavove:

145. $p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$.

146. $p \vee q \vee r \vee s = \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r} \Rightarrow s$.

147. $(p \vee p) \wedge q \vee (p \vee q) = (p \wedge q) \vee (p \vee p) = (p \wedge q) \vee p$.

148. $\overline{(p \vee \bar{q} \wedge r)}(p \wedge s \vee r) = \bar{p} \wedge q \wedge r$.

149. Izračunati:

1° $1+1+1$: 2° $1 \cdot 1 \cdot 1$; 3° $[1 \cdot (0+1)] \cdot (1+0)$;

4° $[(1+1) \cdot (0+0)] + [(0 \cdot 1) \cdot (1+0)]$.

150. Izraziti sledeće iskaze logike simbolikom Booleove algebre (0, 1):

1° $(p \vee q) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$;

2° $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$;

3° $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow t$, gde je t neki iskaz koji je uvek istinit;

4° $(p \vee q) \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$.

151. Naći iskaze u logici koji odgovaraju sledećim odnosima u Booleovoj algebri (0, 1).

1° $x+x=x$; 2° $x+x \cdot y = x \cdot (x+y) = x$; 3° $x+(y+z) = (x+y)+z$.

152. Neka $z=f(x, y)$ predstavlja funkciju u kojoj su x, y i z elementi Booleove algebre (0, 1). Ta funkcija je određena sledećom tablicom, gde su vrednosti u

x	x	$f(x, y)$
1	1	$f(1, 1)$
1	0	$f(1, 0)$
0	1	$f(0, 1)$
0	0	$f(0, 0)$

desnoj koloni proizvoljno izabrani brojevi iz skupa (0, 1). Pokazati da je tada $f(x, y)$ eksplicitno određeno formulom:

$$f(x\cdot y)=f(1, 1)xy+f(1, 0)x\bar{y}+f(0, 1)\bar{x}y+f(0, 0)\bar{x}\bar{y}.$$

153. Koliko ima Booleovih funkcija od 1, 2, 3, 4 i 5 promenljivih?

154. Dokazati da se svaka Booleova funkcija $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ može predstaviti u obliku:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0\cdot\bar{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)+1\cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1).$$

155. Pokaži induktivnim putem da se svaka Booleova funkcija $f(x_1, \dots, x_n)$ može napisati u jednom od sledećih oblika:

$$1^\circ\ f(x_1, \dots, x_n)=\bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge\cdots\wedge x_n^{\sigma_n} \qquad (x^0=\bar{x},\ x^1=x)$$

gde je logički zbir uzet za one slogove

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n \text{ za koje je } f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1;$$

$$2^\circ\ f(x_1, \dots, x_n)=\bigwedge_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} (x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee\cdots\vee x_n^{\sigma_n}),$$

gde je logički proizvod uzet za one slogove $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, za koje je $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0$.

Služeći se sistemom aksioma $1\div 13$ dokazati bez upotrebe tablica istinitosti sledeće identitete:

156. $1^\circ\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4=\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}\vee\overline{\bar{x}_3x_4}}.$

$2^\circ\ x_1x_2x_3x_4=\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}\vee\overline{\bar{x}_3x_4}}.$

157. $1^\circ\ fx\vee f\bar{x}=f;\quad 2^\circ\ fx\vee f=f.$

$3^\circ\ fx_1\vee fx_2=f(x_1\vee x_2).$

158. $$(\bar{x}_1\vee x_2\vee{}_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)=\begin{cases}\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3\vee x_1x_3\\ x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2x_3.\end{cases}$$

159. $1^\circ\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3=x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3.$

$2^\circ\ xy\bar{z}\vee xz\vee\bar{x}y=xz\vee y.$

160. 1° $AC \vee B\overline{C} = AC \vee B\overline{C} \vee AB.$

2° $A(A \vee D)B(B \vee C)(C \vee D) = ABC \vee ABD.$

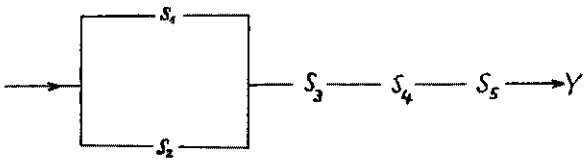
161. $\overline{(B \wedge \overline{A})} \vee \overline{(C \vee \overline{A})} = (A \wedge C) \vee (C \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}).$

162. Booleova funkcija $x_1 | x_2$ se naziva Šeferova funkcija, i definisana je sledećom tablicom

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

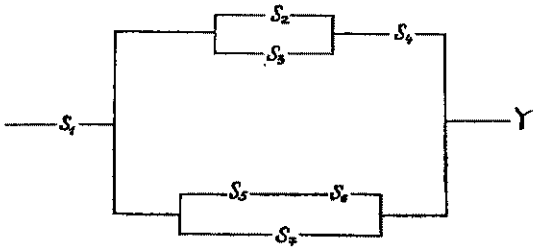
Izraziti pomoću nje funkcije $\overline{x}, x_1 \vee x_2$ i $x_1 \wedge x_2$.

163. Napisati Booleovu jednačinu strujnog kola na sl. 2.



Sl. 2

164. Napisati Booleovu jednačinu za strujno kolo na sl. 3.



Sl. 3

165. Potrebno je da se osvetljenje nekog stepeništa reguliše pomoću dva prekidača, jednog dole i jednog gore. Okrećući bilo koji prekidač zahtevamo da se može upaliti ili ugasiti osvetljenje. Formirati tablicu koja daje rešenje postavljenog problema.

166. Na osnovu aksioma Booleove algebre pokazati da je

$$(D \wedge U) \vee (\overline{D} \wedge \overline{U}) = (D \vee \overline{U}) \wedge (\overline{D} \vee U)$$

i nacrtati oba oblika odgovarajućeg strujnog kola.

167. Nacrtati kolo struje koje odgovara jednačini

$$[(S_1 + S_3) \cdot S_2] + (S_4 \cdot S_5) = Y.$$

§ 2. Skup. Relacija. Funkcija

1° Ako je a element skupa A, pisaćemo

$$a \in A$$

a ako a nije elemenat skupa A, pisaćemo

$$a \notin A.$$

Skup A je dat ako se za svaki objekat može ustanoviti da li pripada skupu A ili ne pripada.

Skup A je podskup skupa B ako iz $a \in A \Rightarrow a \in B$. Tada pišemo

$$A \subset B.$$

Ako je $A \subset B \wedge B \subset A$ kažemo da su A i B jednaki, i pišemo

$$A = B.$$

Ako su $a, b, \ldots, x, y, z$ elementi skupa A označavamo

$$A = \{a, b, \ldots, x, y, z\}.$$

Specijalno $\{a\}$ označava skup čiji je jedini elemenat a. *Prazan skup* (skup bez elemenata) označavamo sa $\emptyset$.

Sknp A čiji elementi imaju osobinu π označavamo

$$A = \{a\colon a \text{ osobine } \pi\}.$$

Pomoću skupova A i B mogu se formirati novi skupovi:

1) *Unija skupova* A i B, $A \cup B$, je skup koji sadrži sve elemente koji su bar u jednom od skupova A i B. Znači da je

$$A \cup B = \{a\colon a \in A \vee a \in B\}.$$

2) *Presek skupova* A i B, $A \cap B$, je skup koji sadrži sve elemenie koji su i iz skupa A i iz skupa B, tj.

$$A \cap B = \{a\colon a \in A \wedge a \in B\}.$$

3) *Komplement skupa* A u odnosu na skup $S \supset A$, $C_s A$, je skup elemenata iz S koji ne pripadaju A

$$C_s A = \{a\colon a \in S \wedge a \notin A\}.$$

4) *Razlika skupova* A i B, $A \setminus B$, je skup elemenata koji su iz A a nisu iz B

$$A \setminus B = \{a\colon a \in A \wedge a \notin B\}.$$

5) *Partitivni skup* skupa A, $\mathbf{P}A$, je skup svih podskupova skupa A.

6) *Dekartov proizvod skupova* A i B, $A \times B$, je skup uređenih parova elemenata, gde je prvi elemenat u paru iz A a drugi iz B

$$A \times B = \{(a, b)\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Skupovi A i B su *projekcije proizvoda* $A \times B$.

2° Kazaćemo da je x, $x \in X$, u *relaciji* ρ sa y, $y \in Y$, tada i samo tada ako je par $(x, y) \in \rho$, gde je $\rho \subset X \times Y$ i pisaćemo $x \rho y$.

Ako je $Y = X$, ρ se zove *binarna relacija* u skupu X.

Neke binarne relacije imaju sledeće osobine:

1) $a \rho a$ za $\forall a \in X$ (refleksivnost)

2) $a \rho b \Rightarrow b \rho a$ (simetričnost)

3) $a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$ (antisimetričnost)

4) $a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$ (tranzitivnost)

Binarna relacija ρ je *relacija ekvivalencije* u skupu X ako ima osobine 1), 2) i 4). Binarna relacija ρ je *relacija poretka* u skupu X ako ima osobine 1), 3) i 4). Obeležava se obično sa $<$.

Kazaćemo da je skup X sa relacijom poretka *uređen*. Ako su svaka dva elementa iz X u relaciji poretka, skup X je *totalno uređen*, inače je delimično uređen ili samo uređen.

Neka je X deo uređenog skupa S i $a \in S$. a je *majoranta* od X ako je $x<a$ za $\forall x \in X$. Ako je još $a \in X$, a je *maksimum skupa* X. Slično se definiše *minoranta* i *minimum* od X. *Supremum skupa* X je minimum skupa majoranata od X, ukoliko postoji. Slično se definiše *infinum skupa* X.

3° Ako svakom elementu $x \in X$ odgovara na neki način elemenat $y \in Y$, kažemo da se skup X *preslikava* u skup Y i pišemo $X \xrightarrow{f} Y$ ili $x \to f(x)$, $f(x)$ je slika elementa x. Ako je $A \subset X$, sa $f(A)$ označavamo skup slika elemenata iz A. Za $B \subset Y$ sa $f^{-1}(B)$ označavamo skup svih $x \in X$ za koje je $f(x) \in B$. $f^{-1}(B)$ je *inverzna slika skupa* B. Ako je $f(X)=Y$ kažemo da se skup X preslikava *na* skup Y. Preslikavanje kod koga svakom $x \in X$ odgovara samo jedan elemenat $y \in Y$ zove se *jednoznačno*. Tada se kaže da je na X definisana *funkcija* f sa skupom vrednosti u Y. Ukoliko je, još, $\forall y \in Y$ slika samo jednog elementa $x \in X$ preslikavanje f je *jednoznačno obostrano* (biunivoko). Tada je f^{-1}, $(Y \xrightarrow{f^{-1}} X)$, *inverzna funkcija* funkcije f.

Dva skupa X i Y su *iste moći (ekvivalentni)* ako između njih postoji biunivoko preslikavanje. Tada pišemo $X \sim Y$.

Skup X je *konačan* ako je ekvivalentan skupu svih prirodnih brojeva n koji zadovoljavaju nejednakost $1 \leqslant n \leqslant N$, gde je N neki prirodni broj. Ako skup nije konačan kažemo da je *beskonačan*.

Skup koji ima istu moć kao i skup N prirodnih brojeva je *prebrojiv*. Za njega se kaže da ima moć χ_0 (alef-nula). Beskonačan skup koji nije ekvivalentan sa skupom prirodnih brojeva je *neprebrojiv*. Ako je neki skup ekvivalentan sa skupom tačaka odsečka [0, 1] kaže se da ima *moć kontinuuma*.

168. Dati su skupovi:

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Naći skupove:

1° $A \cup B$, $A \cup C$,

2° $A \cap B$, $A \cap C$,

3° $\mathbf{C}_S A$, gde je $S=A \cup B$,

4° $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$,

5° $\mathbf{P}A$, $\mathbf{P}B$,

6° $A \times B$, $A \times C$.

169. Dati su skupovi

$A=\{a, b, 1\}$, $B=\{b, 1, c\}$, $C=\{a, 1\}$. Naći $(A \cup B) \cap C$ a zatim proveriti jednakost $(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

170. Za proizvoljne skupove A, B i C važi jednakost $(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dokazati.

171. Dokazati tačnost iskaza

$A \cap B=B \Leftrightarrow B \subset A$.

172. Da li iz $A \setminus B=C \Rightarrow A=B \cup C$?

173. Da li iz $A=B \cup C \Rightarrow A \setminus B=C$?

174. Da li su tačne jednakosti:

1° $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$;

2° $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$;

3° $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus B$? Ako nisu, uporediti leve i desne strane.

175. Dokazati da je

$(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)=A\cup(B\cap C\cap D)$.

176. Ako su A, B, C proizvoljni skupovi nekog podskupa, onda važi jednakost

$(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

Neka su A, B, C, D i X bilo koji skupovi. Dokazati tačnost sledećih iskaza:

177. 1° $A\subset X\Rightarrow X\setminus(X\setminus A)=A$.

2° $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\setminus B$.

3° $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

178. 1° $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

2° $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$.

179. Naći $\mathbf{P}(A)$ ako je $A=\{a, b, c\}$.

Dokazati tačnost sledećih iskaza:

180. $\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\cap\mathbf{P}(B)$; $\mathbf{P}(A\cup B)\supset\mathbf{P}(A)\cup\mathbf{P}(B)$.

181. $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)=\mathbf{C}_A(A\cap B)$.

182. Neka su A, B, C i D proizvoljni neprazni skupovi. Dokazati da je:

1° $(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$.

2° $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

183. Da li je 1° $E\times(F\cup G)=(E\times F)\cup(E\times G)$

2° $(F\cup G)\times E=(F\times E)\cup(G\times E)$

za svaki skup E, F i G?

184. Za skupove A i B, skup $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ naziva se simetrična razlika skupova A i B i označava se $A\Delta B$. Dokazati sledeće jednakosti:

1° $A\Delta B=B\Delta A$; 3° $A\cap(B\Delta D)=(A\cap B)\Delta(A\cap D)$; 5° $A\Delta\varnothing=A$.

2° $A\Delta(B\Delta D)=(A\Delta B)\Delta D$; 4° $A\Delta A=\varnothing$;

185. Iz $A\Delta X=A\Rightarrow X=\varnothing$. Dokazati.

186. Neka je S skup svih pravih u ravni i $a\rho b$ oznaka da je a paralelna sa b. Dokazati da je ρ simetrična, tranzitivna i refleksivna relacija.

187. Neka je C skup svih celih brojeva i $a\rho b\Leftrightarrow a-b$ jednako celom umnošku od k (k fiksiran ceo broj). Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. (Ova

relacija se zove još i kongruencija, a obeležava $a \equiv b \pmod{c}$ i čita se a kongruentno sa b po modulu c).

188. R je skup realnih brojeva. $a \rho b \Leftrightarrow a \leqslant b$. Dokazati da je ρ relacija poretka.

189. $\mathbf{P}S$ je partitivan skup skupa S a $a \rho b\,(a, b \in \mathbf{P}S) \Leftrightarrow a \subset b$. Dokazati da je ρ relacija poretka.

190. S je skup uređenih parova (p, q), gde su p i q celi pozitivni brojevi i $(p, q)\ \rho\ (p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

191. Neka je S skup svih trouglova u ravni i $a \rho b\,(a, b \in S)$ ako a i b imaju jednake uglove, ρ je relacija ekvivalencije. Dokazati.

192. Z je skup svih kompleksnih brojeva i $a \rho b$ $(a, b \in Z)$ ako je $|a| < |b|$ i $\arg\{a\}$ $\arg\{b\}$. ρ je relacija poretka.

193. S je skup uglova sa fiksiranim temenom u tački M i $a \rho b$ ako je ugao a sadržan u uglu b. ρ je relacija poretka.

194. Skup negativnih realnih brojeva u skupu realnih brojeva nema maksimuma a supremum mu je nula.

195. Skup pozitivnih brojeva nema supremuma u skupu realnih brojeva.

196. Skup negativnih brojeva u skupu $R \setminus \{0\}$ nema supremuma. R je skup realnih brojeva.

197. Šta je supremum a šta infinum od X, $X \in \mathbf{P}S$? $\mathbf{P}S$ je uređen relacijom inkluzije $\subset$, a S proizvoljan skup.

198. Naći sve funkcije koje preslikavaju skup A u skup B ako je

1° $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$;

2° $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a\}$.

199. Naći bar jednu funkciju koja skup realnih brojeva preslikava 1° na skup nenegativnih brojeva, 2° na skup prirodnih brojeva.

200. Ako su $A, B \subset X$, gde je X definicioni skup funkcije f dokazati da je

1° $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

2° $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

201. Neka su $A, B \subset Y$, gde je Y skup vrednosti funkcije f definisane na X. Dokazati da je

1° $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ ako je $A \subset B$; 3° $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

2° $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; 4° $f^{-1}(\mathbf{C}_Y A) = \mathbf{C}_X f^{-1}(A)$.

202. Ako je $X \xrightarrow{f} Y$ i $A \subset X$, $B \subset Y$ tada je 1° $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(X)$;

2° $f^{-1}[f(A)] \supset A$; 3° $f^{-1}[f(A)] = A$

ako su f i f^{-1} funkcije.

203. Naći biunivoko preslikavanje koje skup svih parnih brojeva preslikava na skup N prirodnih brojeva.

204. Naći biunivoko preslikavanje segmenta $[0, 2]$ na segment $[1, 3]$.

205. Naći funkciju koja vrši biunivoko preslikavanje intervala $(0, 1)$ na skup realnih brojeva R.

206. Naći biunivoko preslikavanje segmenta $[0, 1]$ na interval $(0, 1)$.

207. Dokazati da je skup parnih brojeva prebrojiv.

208. Dokazati da je skup tačaka na odsečku $[0, 1]$ iste moći kao skup tačaka na odsečku $[0, 101]$.

209. Dokazati da je skup racionalnih brojeva prebrojiv.

210. Kolika je moć skupa svih trouglova u ravni čija temena imaju racionalne koordinate?

211. Dokazati da je skup svih krugova u ravni čiji su poluprečnici racionalni brojevi i čiji su centri sa racionalnim koordinatama prebrojivi.

212. Neka je A skup svih tačaka realne prave kod koga je rastojanje ma koje dve tačke veće od 1. Dokazati da je A konačan ili prebrojiv skup.

213. Kolika je moć skupa svih segmenata na realnoj pravoj?

214. Kolika je moć skupa svih tačaka realne prave?

215. Skup $N \times N$ je prebrojiv gde je N skup prirodnih brojeva.

216. Skup tačaka ravni sa racionalnim koordinatama je prebrojiv.

217. Dokazati da skup svih tačaka ravni xOy ima moć kontinuuma.

218. Dokazati da je skup svih konačnih podskupova prebrojivog skupa prebrojiv skup.

§ 3. Algebarske strukture

1° Grupoid

Neka je G dati skup. Ako svakom uređenom paru (a, b) elemenata iz G odgovara, nekim postupkom f, elemenat c, takođe iz G, kažemo da je u G definisana jedna algebarska operacija f i pišemo $afb = c$. Operacija f se najčešće označava sa $*$, $+$, $\cdot$ itd. $(a * b = c,\ a + b = c,\ a \cdot b = c)$.

Skup G zajedno sa operacijom $*$ koja je u njemu definisana, par $(G, *)$, naziva se *grupoid*.

2° Homomorfizam, automorfizam, endomorfizam, izomorfizam

Jednoznačno preslikavanje h grupoida $(G, *)$ na grupoid $(G', \cdot)$ zove se *homomorfizam* ako za svaki $a, b \in G$ važi

$$h(a * b) = h(a) \cdot h(b) \qquad (h(a),\ h(b) \in G').$$

Ako postoji bar jedan homomorfizam od $(G, *)$ na $(G', \cdot)$ kaže se da je grupoid $(G', \cdot)$

homomorfan grupoidu $(G, *)$

$((G, *) \sim (G', \cdot))$.

Homomorfizam h grupoida $(G, *)$ sa svojim delom zove se *endomorfizam* $(hG \subset G)$. Ako je $hG = G$ onda se h naziva *automorfizam*. Homomorfizam koji je obostrano jednoznačan zove se *izomorfizam*.

3° Polugrupa

Grupoid $(G, *)$ kod koga je operacija $*$ asocijativna zove se *polugrupa ili semigrupa*.

$(a * (b * c) = (a * b) * c, \qquad \forall\, a, b, c \in G)$.

4° Grupa

Polugrupa $(G, *)$ je *grupa* ako postoji elemenat $e \in G$ takav da je za svaki $a \in G$

$$a * e = e * a = a$$

i ako za svaki $a \in G$ postoji elemenat $a^{-1} \in G$ takav da je

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

U grupi $(G, +)$ elemenat e zove se neutralni elemenat i označava se sa 0 a elemenat a^{-1} zove se suprotni elemenat elementa a i označava se sa $-a$. Takva grupa se zove *aditivna*.

U grupi $(G, \cdot)$ elemenat e se zove jedinični a elemenat a^{-1} recipročan elementu a. Takva grupa se obično naziva *multiplikativna* grupa.

Grupa $(G, *)$ je *Abelova* ili *komutativna* ako je operacija $*$ komutativna.

$(a * b = b * a, \qquad \forall\, a, b \in G)$.

Ako u grupi $(G, *)$ postoji elemenat g takav da se svaki drugi elemenat grupe može dobiti kao stepen elementa g, takva grupa se naziva *ciklična* grupa a elemenat g generatorni elemenat grupe.

Grupa $(H, *)$, gde je $H \subset G$, naziva se *podgrupa* grupe $(G, *)$.

Red grupe je broj njenih elemenata.

5° Lagrengeova teorema

Red grupe m deljiv je redom svake njene podgrupe.

6° Prsten

Skup R zajedno sa dve unutrašnje operacije $+$ i $\cdot$, trojka $(R, +, \cdot)$, je *prsten* ako je: $(R, +)$ Abelova grupa, $(R, \cdot)$ polugrupa i ako su operacije $+$ i $\cdot$ vezane zakonima:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levi distributivni zakon)

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (desni distributivni zakon)

za svaki $a, b, c \in R$.

Prsten je *komutativan* ako je za svaki $a, b \in R$ $a \cdot b = b \cdot a$.

Elementi a i b, $a \neq 0$, $b \neq 0$, takvi da je $a \cdot b = 0$ zovu se *delitelji nule*.

7° Telo

Prsten $(\Phi, +; \cdot)$ je *telo* ako je $(\Phi \setminus \{0\}, \cdot)$ grupa. (0 je neutralni elemenat za operaciju $+$).

8° Polje

Komutativno telo je *polje*.

Uobičajene su kraće oznake: za grupu G, za prsten R i za telo Φ.

Ispitati šta je svaki od sledećih skupova zajedno sa naznačenom operacijom. (Da li je grupoid, polugrupa ili grupa?):

219. Celi brojevi u odnosu na sabiranje.

220. Parni brojevi u odnosu na sabiranje.

221. Celi brojevi, deljivi sa datim prirodnim brojem n, u odnosu na sabiranje,

222. Stepeni datog realnog broja a, $a \neq 0$, ± 1, sa celim eksponentima, u odnosu na množenje realnih brojeva.

223. Nenegativni celi brojevi u odnosu na množenje.

224. Celi brojevi u odnosu na oduzimanje.

225. Racionalni brojevi u odnosu na množenje.

226. Racionalni brojevi u odnosu na sabiranje.

227. Racionalni brojevi, različiti od nule, u odnosu na množenje.

228. Pozitivni racionalni brojevi u odnosu na množenje.

229. Pozitivni racionalni brojevi u odnosu na deljenje.

230. Skup kompleksnih brojeva $\{1, -1, i, -i\}$ u odnosu na operacije sabiranje i množenje kompleksnih brojeva.

231. Proveriti da li su sledeći grupoidi, dati tablicom 1 i 2, grupe. Ako jesu naći jedinične elemente.

1°

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tablica 1.

2°

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Tablica 2.

232. Da li su operacije u prethodnom zadatku komutativne?

233. Pokazati da je skup racionalnih brojeva $S=\left\{\frac{1+2m}{1+2n}\right\}$ $(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, u odnosu na operaciju množenja realnih brojeva, grupa.

234. Pokazati da je skup funkcija $S=\left\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{1}{x},\ f_3(x)=-x,\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\right\}$, sa operacijom $f_i(x) * f_j(x)=f_i[f_j(x)]$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$, grupa.

235. Neka je S skup funkcija oblika $\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in R,\ ad-bc=1)$, i u njemu uvedena operacija $f(x) * g(x) = f[g(x)]$.
Pokazati da je $(S, *)$ grupa.

236. Neka je S skup pozitivnih realnih brojeva i $*$ operacija u tom skupu definisana sa

1° $a * b = a^b$; 2° $a * b = a^2 b^2$.

Šta je algebarska struktura $(S, *)$?

237. Neka je S skup obostrano jednoznačnih preslikavanja skupa E na E. Proizvod preslikavanja a i b definiše se kao preslikavanje koje se dobija uzastopnom primenom preslikavanja a i b. Pokazati da je S sa uvedenom operacijom grupa.

238. Pokazati da je skup paralelnih pomeranja u prostoru grupa u odnosu na množenje paralelnih pomeranja.

239. Šta čini skup kretanja trodimenzionog prostora u odnosu na množenje kretanja?

240. Šta je skup polinoma stepena $\leq n$ (uključujući i nulu) u odnosu na sabiranje polinoma?

241. Šta je skup svih polinoma (uključujući i nulu) u odnosu na sabiranje polinoma?

242. Dokazati da je konačan skup G, u kome je definisana asocijativna algebarska operacija $*$ i u kome svaka od jednačina $a * x = b$, $y * a = b$ za svako a, b iz G nema više od jednog rešenja, grupa.

243. Ako je $a^2 = e$ sa svaki elemenat a iz grupe G, dokazati da je G Abelova grupa.

244. Neka je G grupa. Dokazati da je: 1° $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$;

2° $a^n a^m = a^{n+m}$ $(a \in G)$.

245. Ako su a i b elementi grupe G, dokazati da $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$.

246. Dokazati da je svaka grupa reda 6 ili ciklička ili nekomutativna.

247. Dokazati da u grupi iz $xa = xb$ sledi $a = b$.

248. Jedinični elemenat i sama grupa G su podgrupe grupe G.

249. Ako su A i B podgrupe grupe G, pokazati da je $A \cap B$ podgrupa grupe G.

250. Najmanji prirodan broj n za koji je $a^n = e$, u grupi, naziva se red elemenata a. Dokazati da elementi a i $s^{-1} as$ imaju isti red.

251. Pokazati da elementi a i a^{-1} imaju isti red.

252. Pokazati da elementi ab i ba imaju isti red.

253. Ako je svaki elemenat grupe G, izuzev jediničnog elementa reda 2 dokazati da je grupa reda 2^k.

254. Dokazati da je skup svih elemenata grupe G koji su komutativni sa elementom $a \in G$ podgrupa grupe G.

255. Skup svih elemenata grupe G koji su komutativni sa svim elementima grupe G čini normalnu podgrupu, takozvani centar grupe G.

256. Dokazati da su grupe u zadacima 219—222 međusobno izomorfne.

257. Dokazati: 1° Grupa pozitivnih realnih brojeva u odnosu na množenje je izomorfna sa grupom realnih brojeva u odnosu na sabiranje. 2° Grupa pozitivnih racionalnih brojeva u odnosu na množenje je izomorfna grupi svih racionalnih brojeva u odnosu na sabiranje.

258. Neka je $G=\{a, a^2, \ldots, a^p, \ldots, a^q=e\}$ ciklična grupa. Dokazati da je elemenat a^p generatorni elemenat grupe tada i samo tada ako su p i q relativno prosti.

259. Dokazati da su ciklične grupe istog reda i izomorfne.

260. Dokazati da je grupa Abelova tada i samo tada kada je preslikavanje $a \leftrightarrow a^{-1} (a \in G)$ atomorfizam.

261. Dokazati da je svaka grupa prostog reda ciklična.

262. Ako je $S \subset G$ i G grupa konačnog reda i S grupoid u odnosu na operaciju u grupi, onda je S grupa.

263. U grupi G je definisana binarna relacija ρ na sledeći način. Neka je H podgrupa grupe G. Kazaćemo da je $a \rho b$ ako i samo ako je $ab^{-1} \in H$. Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

264. Pokazati da je skup unutrašnjih automorfizama grupe grupa homomorfna datoj grupi.

Ispitati da li su sledeći skupovi, sa naznačenim operacijama, prsten, telo ili polje.

265. Celi brojevi sa uobičajenim operacijama $+$ i $\cdot$.

266. Parni brojevi sa uobičajenim operacijama $+$ i $\cdot$.

267. Celi brojevi, deljivi datim brojem n (specijalno kada je $n=3$) u odnosu na uobičajene operacije $+$ i $\cdot$.

268. Racionalni brojevi u odnosu na $+$ i $\cdot$.

269. Realni brojevi u odnosu na $+$ i $\cdot$.

270. Kompleksni brojevi u odnosu na $+$ i $\cdot$.

271. Skup brojeva oblika $a+b\sqrt{2}$, gde su a i b celi brojevi, u odnosu na $+$ i $\cdot$.

272. Skup brojeva oblika $a+b\sqrt{3}$, gde su a i b racionalni, u odnosu na $+$ i $\cdot$.

273. Polinomi sa celim koeficijentima u odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja polinoma.

274. Polinomi sa realnim koeficijentima u odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja polinoma.

275. Brojevi oblika $a+b\sqrt[3]{2}$ (a i b racionalni) u odnosu na uobičajene operacije $+$ i $\cdot$.

276. Dokazati da brojevi oblika $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ sa racionalnim a, b i c obrazuju polje. Naći inverzan elemenat elementu $x=1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ (uzima se realna vrednost korena).

277. U prstenu C celih brojeva definisane su operacije $\oplus$ i $\odot$ pomoću

$$a\oplus b=a+b+1$$

$$a\odot b=ab+a+b.$$

Pokazati da su $(C, +, \cdot)$ i $(C, \oplus, \odot)$ izomorfni prsteni.

278. Neka je K prsten kompleksnih brojeva i C prsten celih brojeva. U skupu $A=\{(m, n)\}$ $(m\in C, n\in K)$ su definisane binarne operacije $+$ i $\cdot$ pomoću

$$(m_1, n_1)+(m_2, n_2)=(m_1+m_2, n_1+n_2)$$

$$(m_1, n_1)\cdot(m_2, n_2)=(m_1, m_2, n_2m_1+m_1n_2+n_1n_2).$$

1° Ispitati šta je $(A, +, \cdot)$. 2° Pokazati da u $(A, +, \cdot)$ postoji jedinični elemenat. 3° Pokazati da je $(K, +, \cdot)$ izomorfan sa $(K, +, \cdot)$ gde je $K'=\{(o, n)\}$ $(n\in K)$.

279. Pokazati da je skup parova (a, b) celih brojeva, sa operacijama zadatim jednakostima

$$(a_1, b_1)+(a_2+b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2), \quad (a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2, b_1b_2),$$

prsten i naći sve delitelje nule.

280. Dokazati da polje nema delitelja nule.

281. Dokazati da je konačan komutativan prsten, bez delitelja nule, polje.

282. Naći sve automorfizme polja kompleksnih brojeva, koji ne menjaju realne brojeve.

283. Neka je $n>0$ ceo broj. Kaže se da su celi brojevi a i b kongruentni po modulu n ako je razlika a-b deljiva sa n. To se označava $a\equiv b$ (mod n), i to pokazuje da a i b pri deljenju sa n daju isti ostatak koji se zove ostatak po modulu n. Pokazati da se skup svih celih brojeva razbija na klase međusobno kongruentnih brojeva, koje nemaju zajedničkih elemenata. Odredimo sabiranje i množenje klasa preko odgovarajućih operacija nad njihovim predstavnicima na sledeći način: ako brojevi a, b, $a+b$, i ab pripadaju redom klasama A, B, C i D stavimo $A+B=C$ i $AB=D$. Dokazati da je za tako definisane operacije skup klasa kongruencija prsten (tzv. prsten ostataka po modulu n).

284. Pokazati da je prsten ostataka po modulu n polje tada i samo tada kada je n prost broj.

285. Rešiti sistem jednačina $x+2z=1$, $y+2z=2$, $2x+z=1$ u polju ostataka po modulu 3 i po modulu 5.

§ 4. Realni brojevi

286. Napisati broj 13 u diadskom sistemu.

287. Napisati broj 4 u brojnom sistemu sa osnovom 5.

288. Napisati broj 135 u brojnom sistemu za osnovom 7.

289. Dat je broj 10101 u diadskom sistemu. Napisati ga u dekadnom.

290. Dat je broj 3012 u brojnom sistemu sa osnovom 4. Napisati ga u diadskom sistemu.

291. Kvadrat svakog neparnog broja može se napisati u obliku $8p+1$, gde je p prirodan broj ili nula. Dokazati:

292. Za cele brojeve važe ovi stavovi:

1° Ako je zbir dva cela broja paran broj, njihova razlika je paran broj. 2° Ako je zbir dva cela broja neparan broj, njihova razlika je neparan broj. 3° Ako je zbir dva cela broja neparan broj, njihov proizvod je paran broj. 4° Ako je proizvod tri cela broja neparan broj, njihov zbir je takođe neparan broj. Dokazati.

293. Dokazati da je skup prostih brojeva, tj. brojeva koji su deljivi samo sa sobom i sa jedinicom, beskonačan.

294. Da li je skup brojeva $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,\right\}$ ograničen? Šta je najmanja gornja, a šta najveća donja granica toga skupa i da li one pripadaju skupu?

295. Dokazati da između svaka dva racionalna broja postoji racionalan broj.

296. Da li na poluodsečku $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ postoji najveći racionalan broj? Da li postoji najmanji.

297. Skup realnih brojeva nema supremum ni infinum. Dokazati.

298. Neka je S skup svih razlomaka oblika m/n, gde su m i n prirodni brojevi i m manje od n. Dokazati da u S nema najmanjeg ni najvećeg elementa. Naći inf S i sup S.

299. Pokazati da brojevi $3n+1$ i $2n^2+n (n\in N)$ nemaju zajedničkih delilaca.

300. Neka su a i b celi brojevi. Ako se razlomak $\frac{a}{b}$ može skratiti, pokazati da se može skratiti i razlomak $\frac{a-b}{a+b}$.

301. Pokazati da se razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$ ne može skratiti $(n\in N)$.

302. Aku su a i b prosti brojevi veći od 3, pokazati da je broj a^2-b^2 deljiv sa 24.

303. Dokazati da je ostatak, prilikom deljenja prostog broja sa 30, prost broj.

304. Ako su a i $8a^2+1$ prosti brojevi, pokazati da a može biti samo 3.

305. Najmanji broj N uzajamno prost sa svakim od brojeva $1, 2, 3, \ldots, n$ jeste prost broj. Dokazati.

306. Ako su članovi aritmetičke progresije $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uzajamno prosti sa n, pokazati da n i d nisu uzajamno prosti. (d je diferencija progresije).

307. Pokazati da je broj $2222^{5555}+5555^{2222}$ deljiv sa 7.

308. Ako je broj $a+b+c$ deljiv sa 6, pokazati da je broj $a^3+b^3+c^3$ deljiv sa 6 ($a, b, c \in C$).

309. Ako je broj a^2+b^2 deljiv sa 21, pokazati da je on deljiv i sa 441 ($a, b \in C$).

310. Zbir kvadrata tri cela broja pri deljenju sa 8 ne može dati ostatak 7. Dokazati.

311. Najmanji pozitivan broj d oblika $ax+by$, gde su a i b prirodni brojevi a x i y celi brojevi, jednak je najvećem zajedničkom deliocu brojeva a i b. Dokazati.

312. Dokazati da je broj $\dfrac{(2n)!}{(n!)2}$ ceo broj deljiv sa $n+1$.

313. Dokazati da je zbir $1^k+2^k+\cdots+n^k$, za k neparno, deljiv sa brojem $1+2+\cdots+n$.

314. Pokazati da jednačina $x^3+3=4y(y+1)$ nema rešenja u skupu pozitivnih celih brojeva.

315. Neka je $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ ($a_i \in C$, $i=1, 2, \ldots, n$). Pokazati da je proizvod svih razlomaka oblika $\dfrac{a_i-a_j}{i-j}$ ($i>j$) prirodan broj.

316. Dokazati da broj $x=1\underbrace{00\cdots0}_{49}5\underbrace{00\cdots0}_{99}1$ nije kub ni jednog celog broja.

317. Broj $4n+3$ ne može biti kvadrat ni jednog prirodnog broja za ma koje n.

318. Naći sve prirodne brojeve koji zadovoljavaju jednačine 1° $n!=m\cdot10^{19}$, 2° $n!=m\cdot10^{23}$, gde m nije deljivo sa 5.

319. 1° Za koje je racionalne brojeve x izraz $\sqrt{8x^2-2x+3}$ racionalan broj?

2° Za koje je cele brojeve x izraz $\sqrt{8x^2-2x+3}$ ceo broj?

320. Za koje racionalne vrednosti x je izraz $m=\log_2(x^2-4x-1)$ ceo broj?

321. Dokazati da proizvod dva uzastopna prirodna broja nije stepen nijednog celog broja.

322. Dato je 20 pozitivnih celih brojeva takvih da je $a_1<a_2<a_3<\cdots$ $\cdots<a_{20}<70$. Dokazati da među razlikama $a_j-a_k\,(j>k)$ postoje bar četiri koje su međusobno jednake.

323. Dokazati da je $\sum\limits_{r,s=0}^{n-1} a_{r-s}=\sum\limits_{k=-n}^{n}(n-|k|)\,a_k$

$\left(\text{leva strana označava dvostruki zbir } \sum\limits_{r=0}^{n-1}\sum\limits_{s=0}^{n-1} a_{r-s}\right)$.

324. Dokazati da zbir $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n}$ nije ceo broj ako su m i n $(m<n)$ prirodni brojevi.

325. Dokazati da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

326. Dokazati da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj.

327. Dokazati da su $5\sqrt{2}$ i $3+\sqrt{2}$ iracionalni brojevi, ako se zna da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

328. Dokazati da je $n+\sqrt{n}$ iracionalan broj, ako n nije kvadrat nekog celog broja.

329. Dokazati da je $\sqrt[m]{n}$ celi ili iracionalan broj $(m,\ n\in N)$.

330. Dokazati da je $\sqrt{n+\sqrt{n}}$, $(n\in N)$, iracionalan broj.

331. Dokazati da je $\sqrt{\frac{m+1}{m}}$, $(m\in N)$, iracionalan broj.

332. Apsolutna vrednost broja a definiše se na sledeći način:

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

Dokazati jednakosti: $\frac{a+|a|}{2}=\begin{cases} a, & a\geqslant 0\\ 0, & a<0\end{cases}$; $\frac{a-|a|}{2}=\begin{cases} 0, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0.\end{cases}$

333. Neka su a_1, a_2, a_3 i a_4 prirodni brojevi. Od njih su dobijena nova četiri broja: $b_1=|a_1-a_2|$,

$$b_2=|a_2-a_3|,\ b_3=|a_3-a_4| \quad \text{i} \quad b_4=|a_4-a_1|.$$

Od b_1, b_2, b_3 i b_4 istim postupkom su dobijena nova četiri broja, itd. Dokazati da posle konačno koraka sve razlike moraju biti jednake 0. Generalisati.

Dokazati jednakosti:

334. $\frac{a+b+|b-a|}{2}=\max(a,b)$; $\frac{a+b+|b-a|}{2}=\min(a,b)$.

335. $\frac{|a+b|+|a-b|}{2}=\max(|a|,|b|)$; $\frac{|a+b|-|a-b|}{2}=\operatorname{sgn}(a\cdot b)\min(|a|,|b|)$.

336. $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

337. Dokazati identičnost: $\frac{|a+b|+|a-b|}{2ab}=\frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|,|b|)}$.

338. $||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z=4\max\{x,y,z\}$.

§ 5. Matematička indukcija

Princip matematičke indukcije glasi: jedan iskaz je istinit za svaki prirodan broj $n\,(\geqslant n_0)$:
1° ako je istinit za prirodan broj n_0 $(\geqslant 1)$ i
2° ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj $k\,(\geqslant n_0)$ sledi da je istinit za broj $k+1$.

Koristeći metod matematičke indukcije dokazati identitete:

339. $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

340. 1° $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2° $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

341. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

342. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

343. $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

Dokazati nejednakosti:

344. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

345. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}$ za $a>0$, $b>0$ i $n>2$.

346. $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots+n_n)$
za $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ i $n>2$.

347. $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)<1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ za $0<a_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ i $n\geqslant 2$.

348. $(1+a)^n>1+na$ za $0>a>-1$ i $n\geqslant 2$.

349. $\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2+n}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2<\frac{1}{2}$ za $n\geqslant 1$.

350. $\sqrt{a^2+\sqrt{a^2+\cdots+\sqrt{a^2}}}<|a|+1$,
gde na levoj strani ima n korena.

351. $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$ za $n\geqslant 3$.

352. Dokazati da n pravih, koje se nalaze u jednoj ravni i takve su da ni jedan par nije paralelan i nijedna trojka ne prolazi kroz jednu tačku, dele ravan na $1+\frac{n(n+1)}{2}$ delova.

353. Dokazati Moivrovu formulu: $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$.

Dokazati sledeće jednakosti:

354. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

355. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2n}}{1-x^{2n}}$.

356. Dokazati da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja deljiv sa 9.
Dokazati deljivost sledećih brojeva:

357. 5^n+2^{n+1} sa 3 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

358. $2^{12n+3}-3^{6n+2}$ sa 13 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

359. $3^{2n+3}+40n-27$ sa 64 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

360. $5^{2n+1}2^{n+2}+3^{n+2}2^{2n+1}$ sa 19 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

361. n^5-5n^3+4n sa 120 $(n=3, 4, \ldots)$.

362. $11^{n+2}+12^{2n+1}$ sa 133 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

363. $4^{2n}-3^{2n}-7$ sa 84 $(n=1, 2, \ldots)$.

364. $2^{(3n)}+1$ sa 3^{n+1} $(n=1, 2, \ldots)$.

365. $a^{4n+1}-a$ sa 30 $(a, n=1, 2, 3, \ldots)$.

366. Pokazati da ni za jedno n broj $n!$ nije deljiv sa brojem 2^n.

367. Ako je $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$ i $a_0=2$, $a_1=3$, dokazati da je: $a_n=2^n+1$.
Dokazati sledeće identitete:

368. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=1+x+x^2+\cdots+x^{2^{n-1}}$.

369. $\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.

370. $\sum_{m=1}^{n-1} \sin m\alpha = \sin \frac{n-1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$.

371. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg}, \ (x \neq m\pi)$.

372. $\frac{1}{\log_x 2 \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \log_x 8} + \cdots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log_x^2 2}$.

Dokazati da je:

373. $\frac{2^{2n}}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (n > 1)$.

374. $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n$.

375. $1 \cdot 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + \cdots + n(n+1)\, 2 + (n+1)(n+2) =$
$= 2^{n+4} - (n^2 + 7n + 14)$.

376. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

377. Dokazati da je $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ prirodan broj za svako $n \in N$.

§ 6. Kombinatorika i binomni obrazac

1° Permutacije bez ponavljanja

Posmatrajmo skup $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ od n elemenata. Svaki linearni raspored svih elemenata tog skupa u kome se jedan elemenat javlja jedanput, zove se *permutacija* bez ponavljanja.

Broj permutacija od n elemenata je:

$$P_n = n!$$

Ako dva elementa jedne permutacije zamene mesta dobija se nova permutacija Operacija kojom se vrši premeštanje dva elementa zove se *transpozicija*.

Neka je P skup svih permutacija skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Permutacija $(1, 2, 3, \ldots, n)$, u kojoj su elementi poređani po veličini zove se osnovna. Neka u permutaciji p njeni elementi i i j ispunjavaju uslove $i > j$ i i je ispred j. Tada se kaže da elementi i i j u toj permutaciji čine *inverziju*. Permutacija je *parna* ako njeni elementi obrazuju paran broj inverzija, a *neparna* ako obrazuju neparan broj inverzija.

Svaka transpozicija menja parnost permutacije.

2° Permutacija sa ponavljanjem

Posmatrajmo skup od n elemenata, od kojih ima: α_1 jednakih jedne vrste, α_2 jednakih druge vrste itd.; α_s jednakih s-te vrste, pri čemu je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_s = n$. Svaki linearni raspored koji se sastoji od svih elemenata, zove se *permutacija sa ponavljanjem*.

Broj različitih permutacija sa ponavljanjem elemenata je:

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}.$$

3° Varijacije bez ponavljanja

Svaki linearni raspored od k različitih elemenata nekog skupa od n elemenata $(1 < k < n)$ naziva se *varijacija bez ponavljanja k-te klase* od n elemenata.

Broj varijacija bez ponavljanja je:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

4° Kombinacije bez ponavljanja

Svaki podskup od k različitih elemenata nekog skupa od n elemenata zove se *kombinacija bez ponavljanja k-te* klase od n elemenata.

Broj kombinacija bez ponavljanja je:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

5° Kombinacije sa ponavljanjem

Posmatrajmo n različitih vrsta elemenata. Neka je k bilo koji prirodni broj. Pretpostavimo da svaka vrsta elemenata sadrži najmanje k međusobno jednakih, tj. da ih ukupno ima bar $n \cdot k$. Klasifikovaćemo sve elemente po vrstama, bilo kojim redom, tako da ćemo sa 1 označiti bilo koji elemenat prve vrste, sa 2 bilo koji elemenat druge vrste itd., sa n bilo koji elemenat n-te vrste. Ako su r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ prirodni brojevi manji od k, *kombinacijom sa ponavljanjem k-te* klase bez obzira na uređaj zvaćemo svaki skup od k navedenih elemenata u kome se može nalaziti najviše r_i i-te vrste, tako da se dva skupa od k elemenata smatraju jednaki čim se u svakom od njih nalazi isti broj elemenata iste vrste između n vrsta elemenata. U slučaju da je $r_i = k$ za svako i, svaki takav skup zvaćemo kombinacijom sa ponavljanjem k-te klase od n vrsta elemenata.

Broj kombinacija sa ponavljanjem je:

$$C'^k_n = C^k_{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

6° Varijacije sa ponavljanjem

Ako se svaka kombinacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata, bez obzira na uređaj ispermutuje dobijaju se *kombinacije sa ponavljanjem k-te* klase od n elemenata s obzirom na uređaj. Njih ćemo zvati *varijacijama sa ponavljanjem k-te* klase od n elemenata.

Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata je:

$$V'^k_n = n^k.$$

7° Binomni obrazac

Ako je n prirodan broj, onda je

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

378. Napisati sve permutacije od elemenata: a, b, c.

379. Napisati sve reči od slova: p, e, r, o.

380. Rešiti jednačinu $\dfrac{V_{n+2}^{k+2} P_{n-k}}{P_{n-2}} = 360.$

381. Naći broj inverzija u najvećoj permutaciji od n elemenata.

382. Od n kuglica dve su fiksirane: kuglica A i kuglica B. 1° Na koliko se načina mogu poređati kuglice da kuglice A i B budu jedna do druge? 2° Na koliko načina se mogu poređati da A i B ne budu jedna do druge?

383. Na koliko načina pet dečaka i dve devojčice mogu stati u red tako da devojčice ne budu jedna do druge?

384. Na stolu se nalazi n belih i n crnih kuglica numerisanih brojevima 1, 2, 3, ..., n. Na koliko načina se mogu poređati kuglice po jednoj liniji da dve kuglice iste boje ne budu jedna iza druge?

385. Napisati sve različite permutacije od elemenata: a, a, b, c.

386. Napisati sve različite šestocifrene prirodne brojeve permutujući cifre 1, 1, 1, 2, 2, 2.

387. Koliko različitih prirodnih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara 1, 2, 2, 3, 3, 3?

388. Na koliko se načina mogu linearno poređati jedna kraj druge dve crne, tri bele i četiri crvene kuglice?

389. Izletnici su u jednom hotelu uzeli 8 trokrevetnih soba. Svi kreveti su iste cene i sve sobe su istog kvaliteta. Na koliko mogućih načina se mogu razmestiti po sobama ako ih je bilo 24?

390. Na koliko se načina može razmestiti 8 topova na šahovskoj tabli da nikada nijedan top ne može tući drugoga?

391. Napisati sve dvocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara 1, 2, 3, 4, tako da se u jednom broju ne nalaze iste cifre?

392. Naći broj svih četvorocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu napisati od cifara 1, 2, ..., 8, tako da u svakom broju sve cifre budu međusobno različite.

393. Koji je veći od brojeva: V_m^k ili V_{m-1}^{k-1}? Koliko puta?

394. Dokazati da je: $V_{n-1}^k = V_n^k - kV_{n-1}^{k-1}$.

395. Uprostiti izraz $\dfrac{V_{m+n}^{m-n} + V_{m+n}^{m-n-1}}{V_{m+n}^{m-n+2}}$.

396. Rešiti jednačine po n

a) $V_{n-4}^2 + V_{n-3}^2 + V_{n-2}^2 = 20$; b) $V_m^n = nV_m^{n-2}$.

397. Napisati sve trocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara 1, 2, 3, 4 u kojima su sve cifre različite i uređene po veličini.

398. Naći n iz jednačine $C_{2n}^3 : C_n^2 = 44 : 3$.

399. Rešiti jednačinu $\dfrac{1}{C_4^n} - \dfrac{1}{C_5^n} = \dfrac{1}{C_6^n}$.

400. U ravni je dato n tačaka od kojih nijedna trojka ne leži na jednoj pravoj. Naći broj različitih pravih, koje se mogu dobiti spajanjem po dve tačke.

401. Paralelogram je ispresecan pravama paralelnim njegovim stranama. Ako je broj pravih paralelnih jednoj strani m, naći broj tako nastalih pravougaonika.

402. Naći broj tačaka preseka dijagonala konveksnog n-tougaonika.

403. Na jednom šahovskom turniru učestvuje dvanaest šahista. Svaki treba da odigra partiju sa svakim. Koliko će se ukupno odigrati partija?

404. Koliko nastaje trouglova povlačenjem svih dijagonala dvanaestougla ako im se temena poklapaju sa temenima dvanaestougla?

405. Na železničku stanicu treba da dođe iz istog pravca n ljudi. Na koliko mogućih načina s obzirom na vreme dolaska mogu da stignu na stanicu?

406. Koliko se reči može napisati sa 4 slova od slova a, b, c, d, e, f: 1° koje sadrže slovo a; 2° i koje počinju sa a?

407. U ravni je dato n tačaka od kojih su m na jednoj pravoj a od preostalih ni jedna trojka ne leži na jednoj pravoj. Naći broj pravih koje se mogu dobiti spajanjem para tačaka.

408. Dokazati da n različitih pravih, povučenih kroz jednu tačku ravni, dele ravan na $2n$ delova.

409. Dokazati da n ravni koje prolaze kroz jednu tačku, tako da nijedna trojka ne prolazi kroz jednu pravu, dele prostor na $n(n-1)+2$ delova.

410. Naći najveći broj delova ravni koje čine: 1° 15 pravih; 2° 4 kruga.

411. Autobuska mreža grada je ustanovljena na sledeći način:

1° Sa svake stanice može se stići na bilo koju stanicu bez presedanja.

2° Sa svaki par linija A i B postoji i, pri tom jedna jedina, stanica na kojoj se može preći sa jedne linije na drugu.

3° Na svakoj liniji ima tri stanice.

Koliko ima autobuskih linija u gradu?

412. Dato je n međusobno prostih brojeva. Naći broj delilaca broja koji je jednak proizvodu tih brojeva, ne uključujući jedan i sam broj.

413. Na koliko se načina može podeliti špil karata (trideset šest) na pola, tako da u svakom delu budu po dva „keca"?

414. Napisati sve kombinacije sa ponavljanjem 4 klase od elemenata 1, 2, 3.

415. Na koliko se načina n predmeta može podeliti na k osoba?

416. Naći broj svih četvorocifrenih brojeva koji se mogu napisati ciframa: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

417. Koliko ima telefona u gradu čiji su brojevi petocifreni, ako su svi registrovani različitim brojevima tako da je jedan broj napisan različitim ciframa? Koliko, ako se cifre ponavljaju?

418. Na tiketu sportske prognoze nalazi se 12 susreta.
Koliko različito popunjenih kolona obezbeđuje 12 tačnih pogodaka?

419. Koliko treba popuniti kolona ako se „zna" rezultat pet susreta?

420. Koliko treba popuniti kolona ako se „zna" da 7 susreta neće biti nerešeno?

421. Koliko delilaca ima broj $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$? Naći njihov zbir. Generalisati.

422. Koliko ima devetocifrenih brojeva u kojima su sve cifre različite?

423. Dokazati da je:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Naći zbirove:

424. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

425. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

426. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$

Pokazati da je:

427. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

428. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k \in N$.

429. $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$, $a \in R_e$, $k \in N$.

430. $\binom{n+1}{k} + 2\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} = \binom{n+1}{k}$.

431. $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+n+1}{n}$, $a \in R$, $k \in N$.

432. Pokazati da je maksimalni binomni koeficijenat $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ za n parno i $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ za n neparno. (Za n neparno postoje dva maksimalna koeficijenta).

433. Dokazati identitete:

a) $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}$, $n=2k$, $k\in N$;

b) $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1}$.

$n=2k+1$, $k=0, 1, 2, \ldots$

434. Naći koeficijent uz x^m u razvoju: $(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\cdots+(1+x)^n$ za a) $m<k$; b) $m\geqslant k$. c) Dokazati jednakost

$$\binom{k}{m}+\binom{k+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}, \quad (m<k).$$

435. Naći broj različitih ne sličnih članova koji nastaju dizanjem na kub izraza: $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$.

436. Dokazati da među brojevima $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ ne može biti jednak broj parnih i neparnih.

Dokazati sledeće jednakosti:

437. $\sum\limits_{\alpha=0}^{n-k}\sum\limits_{\nu=0}^{k+\alpha}\binom{k+\alpha}{\nu}=2^{n+1}-2^k$.

438. $C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\cdots(-1)^n\frac{1}{2n+1}C_n^n=\frac{n!\,2^n}{(2n+1)!!}$.

439. $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

440. $1+C_n^1\cos\varphi+C_n^2\cos 2\varphi+\cdots+C_n^n\cos n\varphi=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}$.

441. $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\cdots+C_n^kC_m^0=C_{m+n}^k$.

442. Dokazati metodom matematičke indukcije da je

$$f(x)=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\equiv\binom{n}{0}\frac{1}{x}-\binom{n}{1}\frac{1}{x+1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{x+n}.$$

Za $x\neq 0, -1, -2, \ldots, -n$.

443. Dokazati sledeće identitete: 1° metodom matematičke indukcije, 2° koristeći Moivrov obrazac, 3° koristeći binomni obrazac

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right);$$

$$(1-i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos\frac{5n\pi}{3}+i\sin\frac{5n\pi}{3}\right).$$

444. Naći koeficijenat uz x^7 u razvoju $(x^2-x+1)^5$.

445. Naći racionalne sabirke u razvoju $(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x})^{10}$.

446. Naći maksimalan sabirak razvoja $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$, gde je n prirodan broj.

447. Dokazati da, ako se svaki koeficijent u razvoju $x(1+x)^n$ podeli odgovarajućim izložiocem od x, da je zbir tako dobijenih koeficijenata:

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

448. Koliko racionalnih članova ima u razvoju $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?

449. Naći poslednje dve cifre broja $7^{9^{9^9}}$.

450. Ako je p prost broj a m ceo broj dokazati, koristeći binomni obrazac, da je m^p-m deljivo sa p.

451. Dokazati da je broj $54^n+3^n\cdot 16$ deljiv sa 17, gde je n prirodan broj.

452. Dokazati da je $(11\cdot 10^{2n}+1)\,|\,3$.

453. Metodom matematičke indukcije ili pomoću binomnog obrasca dokazati da je broj $10^{2n}+9n+26$ deljiv sa 27.

454. Iz $b+c>a$ sledi $\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{a}$. Dokazati.

455. Dokaži da se broj $(\sqrt{2}\pm 1)^n$ za svaki prirodan broj n može predstaviti u obliku $\sqrt{m+1}\pm\sqrt{m}$, gde je m prirodan broj.

456. Koristeći definiciju $\binom{\alpha}{k}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, & k\in N,\\ 1, & k=0\end{cases}$

dokazati da je:

a) $\binom{-1}{k}=(-1)^k$; b) $\binom{-k}{n}=(-1)^n\binom{k+n-1}{n}$.

457. $\binom{-\frac{1}{2}}{k}=(-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=(-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$, gde je

$(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$; $(2k)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k$.

§ 7. Nejednakosti i apsolutne vrednosti

1° Osnovna svojstva nejednakosti:

1. Iz $a>b \wedge b>c \Rightarrow a>c$. $(a, b, c \in R)$
2. Iz $a>b \Rightarrow a+n>b+n$. $(n \in R)$
3. Iz $a>b \Rightarrow na>nb$ za $n>0$ i
   $na<nb$ za $n<0$.
4. Iz $(a>b>0 \wedge x>0) \Rightarrow a^x>b^x$.
5. Iz $(a>1 \wedge x>y>0) \Rightarrow a^x>a^y$;
   ako je pak $(0<a<1 \wedge x>y>0) \Rightarrow a^x<a^y$.
6. Iz $(a>1 \wedge x>y) \Rightarrow \log_{(a)} x>\log_{(a)} y$.
   Iz $(0<a<1 \wedge x>y) \Rightarrow \log_{(a)} x<\log_{(a)} y$.

U narednim zadacima koristićemo kao osnovne nejednakosti date bez dokaza:

$$(A) \quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (a_i \geqslant 0;\ i=1, 2, \ldots, n)$$

i

$$(B) \quad 2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3, \quad (n>1)$$

zbog toga, što se veliki broj nejednakosti svodi na njih. Dokazi, nejednakosti (A) i (B) mogu da se nađu skoro u svim udžbenicima matematičke analize. Broj na levoj strani nejednakosti (A) naziva se *aritmetička sredina* n pozitivnih brojeva i obeležava sa $A_n(a)$, a broj na desnoj strani te nejednakosti *geometrijska sredina* tih brojeva i obeležava se sa $G_n(a)$.

2° Osnovna svojstva apsolutnih vrednosti:

1. $|ab|=|a|\,|b|$,
2. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$,
3. $|a+b| \leqslant |a|+|b|$,
4. $|a+b| \geqslant ||a|-|b||$,
5. $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$,
   gde su a i b realni ili kompleksni brojevi.

Uz pretpostavku da je n prirodan broj dokazati sledeće nejednakosti:

458. $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, za $n>1$.

459. $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$ za $n>2$.

460. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$.

461. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

462. 1° $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdots n^n \leqslant \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

$$2^\circ\ 1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4^4}\cdots\frac{1}{n^n}<\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

463. $(n!)^2<\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n,\ n>1.$ **464.** $1+n2^{\frac{n-1}{n}}<2^n.$

465. $(2n-1)!!<n^n,\ n>1.$ **466.** $n!>n^{\frac{n}{2}},\ n>1.$

467. $n!>2^{n-1},\ n>1.$ **468.** $(2n)!<\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{2n}.$

469. $2^{n(n+1)}>(n+1)^{n+1}n^n\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdots\left(\frac{2}{n-1}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\ n>1.$

470. $(2n-1)!<n^{2n-1}.$ **471.** $3^n n!>n^n.$

472. $(n!)^3<\left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]^n,\ n>1.$ **473.** $2^n n!<n^n,\ n>2.$

474. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3.$

475. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!<(n+1)!$

476. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$ **477.** $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}>\sqrt{n}.$

478. $\sqrt{2}\sqrt[4]{4}\sqrt[8]{8}\cdots\sqrt[2n]{2^n}<n+1.$

479. $(2n)!<[n(n+1)]^n,\ n>1.$ **480.** $\log_{(10)}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$

481. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi i neka je $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Dokazati da je

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)<1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}.$$

Dokazati sledeće nejednakosti:

482. $ab+ac+bc<a^2+b^2+c^2.$ **483.** $3(ab+bc+ca)<(a+b+c)^2.$

484. Dokazati ako je

$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c,$$

$$\text{da je } 2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2.$$

485. Dokazati nejednakost

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)>6abc.$$

486. Dokazati ako je $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$,

da je $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>2(a^3+b^3+c^3)$.

487. Dokazati ako je $a>b$, $b>0$ i $a\neq b$, da je $a^6+b^6>a^5b+ab^5$.

488. Dokazati da je $a>0$, $b>0$, $a>b$,

da je $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-ba^2}>a$.

Dokazati nejednakosti:

489. $(a+b+c+d)^4>256\,abcd$.

490. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9\,abc$.

491. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}>n$ ako su: $a_1>0,\ldots,a_n>0$.

492. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>\frac{3}{2}$.

493. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.

494. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

495. Dokazati ako je $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, $a+b>c$,

da je $a^3+b^3+c^3+3abc>2(a+b)c^2$.

Dokazati nejednakosti:

496. $27\,abc<(a+b+c)^3<9(a^3+b^3+c^3)$.

497. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$

ako su a i b pozitivni brojevi i $a+b=1$. Za koje vrednosti a i b važi jednakost?

498. $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}<\frac{9}{a+b+c}$.

499. $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ (a, b, c i $d>0$).

500. $\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}>$

$>\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$.

Dokazati ako su a, b i c prirodni brojevi, pri čemu je $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, da je:

501. $a^{\frac{a}{a+b+c}}b^{\frac{b}{a+b+c}}c^{\frac{c}{a+b+c}}>\frac{1}{3}(a+b+c)$.

502. $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}>a^a b^b c^c$.

503. $(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c<\left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}$.

504. Dokazati da je:

$$\frac{n^{k+1}}{k+1}<1^k+2^k+\cdots+n^k<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}\frac{n^{k+1}}{k+1} \qquad (k,\ n\in N).$$

505. Dat je niz brojeva 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, od kojih su prva dva člana jednaka 1, a svi ostali članovi, počev od trećeg jednaki su zbiru dva prethodna. Dokazati nejednakost:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}<2.$$

506. Dokazati da je za dovoljno veliko n zbir $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ veći od svakog unapred zadatog broja (n je prirodan broj).

507. Koji su od brojeva veći: 1° 300! ili 100^{300}; 2° 200! ili 100^{200}?

508. Dokazati Bézout nejednakost

$n(a-b)b^{n-1}\leqslant a^n-b^n\leqslant n(a-b)a^{n-1}$ ako je $a\geqslant b\geqslant 0$.

509. Dokazati da je $\frac{1}{a^n+a^{-n}-1}\leqslant 1$.

510. Ako je dato n razlomaka $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, $b_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ dokazati da se razlomak $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ nalazi između najmanjeg i najvećeg od tih razmaka.

511. Neka je $a>b>0$; ispitati koji od izraza

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\cdots+a^n}$$

ili

$$\frac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$$

ima veću vrednost.

512. Dokazati da se $\sqrt[m+n+\cdots+p]{ab\cdots l}$ nalazi između najmanje i najveće vrednosti:

$$\sqrt[m]{a},\ \sqrt[n]{b},\ \ldots,\ \sqrt[p]{l}.$$

513. Dokazati ako je $a^2+b^2=1$ i $m^2+n^2=1$ da je $|am+bn|\leqslant 1$.

514. Dokazati da je $\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_n}{2}$

ako je $a_i > 0$, i $a_1 a_2, \ldots, a_n$ čine aritmetičku progresiju.
Kao specijalan slučaj ove nejednakosti dokazati da je

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

515. Neka je $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$;
dokazati nejednakost $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$.

516. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2},$$

gde su a_i i b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ma kakvi realni brojevi.
Pod kojim uslovima važi jednakost?

Dokazati nejednakosti:

517. $\sqrt{a_1 a_2}+\sqrt{a_1 a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1} a_n} \leqslant \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$(a_i > 0;\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

518. $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$.

519. Dokazati da za proizvoljne realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ važi nejednakost

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\cdots+$$
$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n)^2}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2} \geqslant n\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Za koje vrednosti tih brojeva važi jednakost?

520. Neka je dato n pozitivnih brojeva $a, b, c, \ldots, l$ i neka je $s = a+b+c+\cdots+l$; dokazati da je

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\cdots+\frac{s}{s-l} \geqslant \frac{n^2}{n-1}.$$

521. Dokazati da je

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n},$$

gde su $a_i (i = 1, \ldots, n)$ pozitivni brojevi a k prirodan broj veći od 1.
Za koje vrednosti tih brojeva važi jednakost?

Ako je α realan broj, onda se *eksponencijalna aritmetička sredina* reda α od n datih pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naziva broj

$$S_\alpha(a) = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Očigledno je da je $S_1(a) = A_n(a)$.

522. Dokazati da je za $\alpha < \beta$

$$S_\alpha(a) \leqslant S_\beta(a),$$

i da znak nejednakosti važi samo za $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Simetrična sredina reda k od n pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (k je prirodan broj koji nije veći od n) naziva se k-ti koren iz aritmetičke sredine svih mogućih proizvoda od n brojeva $a_1, \ldots, a_n$ po k:

$$\sum\nolimits_k(a) = \sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_k + a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_{k+1} + \cdots a_{n-k+1} a_{n-k+2} \cdots a_n}{C_n^k}},$$

očigledno je $\Sigma_1(a) = A_n(a)$ $\Sigma_n(a) = G_n(a)$.

523. Dokazati da je $\left(\sum\nolimits_k\right)^{2k} > \left(\sum\nolimits_{k+1}\right)^{k+1} \cdot \left(\sum\nolimits_{k-1}\right)^{k-1}$.

524. Dokazati da je za $k > l$ $\quad \sum\nolimits_k(a) < \sum\nolimits_l(a)$.

525. Dokazati nejednakost $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$.

Izraz $H_n(a)$ takav da je

$$\frac{1}{H_n(a)} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

naziva se harmonijska sredina od n pozitivnih brojeva.

526. Dokazati nejednakost $H_n(a) \leqslant G_n(a)$, odnosno

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2 \qquad a_i > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

527. Dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ važi nejednakost:

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

528. Dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi nejednakost:

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n)^2 \leqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \cdot (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \cdots + p_n x_n^2).$$

529. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{x_1 y_1}+\sqrt{x_2 y_2}+\cdots+\sqrt{x_n y_n}\leqslant\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\cdot\sqrt{y_1+y_2+\cdots+y_n}$$

ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitivni brojevi.

530. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dva neopadajuća niza brojeva dokazati *Čebiševljevu nejednakost*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n}{n},$$

pri čemu znak jednakosti važi samo kad je $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ili $b_1=b_2=\cdots=b_n$.

531. Ako su p i q pozitivni racionalni brojevi i

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

dokazati da je za proizvoljne pozitivne brojeve x i y

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

532. Ako su α i β pozitivni racionalni brojevi takvi da je

$$\alpha+\beta=1,$$

dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ važi nejednakost

$$a_1^\alpha b_1^\beta+a_2^\alpha b_2^\beta+\cdots+a_n^\alpha b_n^\beta\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha(b_1+b_2+\cdots+b_n)^\beta.$$

533. Ako su p i q pozitivni racionalni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots y_n$ važi *Helderova nejednakost*

$$x_1 y_1+x_2 y_2+\cdots+x_n y_n\leqslant(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)^{1/p}(y_1^q+y_2^q+\cdots+y_n^q)^{1/q};$$

za $p=q=2$ ova nejednakost prelazi u *nejednakost Cauchy-Bunjakovskog*.

534. Neka je dato k nizova pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ i k pozitivnih brojeva $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ takvih da je

$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1;$$

dokazati nejednakost

$$a_1^\alpha b_1^\beta\ldots l_1^\lambda+a_2^\alpha b_2^\beta\ldots l_2^\lambda+\cdots+a_n^\alpha b_n^\beta\ldots l_n^\lambda\leqslant$$

$$\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha(b_1+b_2+\cdots+b_n)^\beta\cdots(l_1+l_2+\cdots+l_n)^\lambda.$$

535. Neka je dato n pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokazati nejednakost

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+G(a))^n.$$

536. Ako je dato k nizova pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ dokazati nejednakost

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} + \cdots + \sqrt[n]{l_1 l_2 \ldots l_n} <$$
$$< \sqrt[n]{(a_1+b_1+\cdots+l_1)(a_2+b_2+\cdots+l_2)\ldots(a_n+b_n+\cdots+l_n)}.$$

537. Neka su x, y i z pozitivni brojevi takvi, da je

$$x+y+z=1;$$

dokazati nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

538. Neka je dato k nizova pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, \ldots, l_n$; dokazati *nejednakosti Minkovskog*

$$S_2(a)+S_2(b)+\cdots+S_2(l) \geqslant S_2(a+b+\cdots+l).$$

539. Dokazati da je: 1° $(1+\alpha)^\lambda > 1+\lambda\alpha$, gde je α ma kakav pozitivan broj a λ racionalan broj veći od 1;

2° $(1+\alpha)^\lambda < \dfrac{1}{1-\alpha\lambda}$, ako je α realan a λ racionalan pozitivan broj i $\alpha\lambda < 1$.

540. Neka je:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n,$$

gde su: $x_{ij} > 0$, $a_{ij} > 0$ i racionalni brojevi. Ako je sem toga

$$a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{kn} = 1,$$
$$a_{1k} + a_{2k} + \cdots + a_{nk} = 1, \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

dokazati da je $y_1 y_2 \cdots y_n > x_1 x_2 \cdots x_n$.

541. *Ceo deo* broja x se naziva najveći ceo broj, koji ne prelazi x. Ceo deo broja x se obeležava sa $[x]$.

Dokazati nejednakost $[x+y] \geqslant [x]+[y]$.

542. Rešiti sledeće nejednačine:

1° $|x| > x$; 2° $|x-1| \geqslant 1$; 3° $|2x-3| < 2$;

4° $|x+2|-|x-4| < |x+5|-|x-6|$; 5° $|x-2| > |x+1|-3$.

Rešiti jednačine:

543. 1° $|x+3|=|x|$; 2° $|x-1|-|x+2|=1$; 3° $|x+1|-|2x-3|=2$.

544. $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

Rešiti i diskutovati rešenja sledećih nejednačina:

545. $3(k+1)x+3k>2kx+3$. **546.** $\frac{2x-1}{k+1}-\frac{x+1}{2(k-1)}>\frac{2x-3}{k+1}$.

547. 1° $ax-b>3-2x$; 2° $ax+b>bx-a$.

Rešiti i diskutovati rešenja sistema nejednačina:

548. $\lambda(x-1)>x-2$.
$3(\lambda+1)>3\lambda x+5$.

549. $3\lambda x-5<6-\lambda x$.
$(\lambda+1)x-3<(1-2\lambda)x+5$.

Rešiti nejednačine:

550. 1° $|3x+2|>4|x-1|$; 2° $\left|\frac{5x+2}{2x-3}\right|\geqslant 3$; 3° $\left|\frac{x}{x+4}\right|<1$.

551. 1° $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$; 2° $|2x-1|<2|x-1|$; 3° $|2x+3|\leqslant|4x-3|$.

552. 1° $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}$; 2° $\frac{1}{|x|}-x>2$; 3° $|x^2-x|-|x|<1$;
4° $|x^3-x^2|<|x^2+x|$.

553. Rešiti sistem nejednačina:

$$|3x+2|\geqslant 4|x-1|, \qquad \frac{(x-1)(x+2)}{2+3x-2x^2}\leqslant 0.$$

554. Ako je $P(x)=x^4-4x^3+12x^2-24x+24$, dokazati da je $P(x)=|P(x)|$.

555. Rešiti nejednačine:

1° $(x^2+x+1)^x<1$; 2° $|x|^{x^2-x-2}<1$.

556. Dokazati da je za $n\geqslant 2$ i $|x|<1$ $2^n>(1-x)^n+(1+x)^n$.

557. Rešiti računski i grafički nejednačine:

1° $|1-|x-1||<1$; 2° $||x+1|-|x-1||<1$.

558. Odrediti parametar n tako da bi postojale jednačine:

1° $\cos x=\frac{n-3}{n+2}$; 2° $\frac{\sin x-n}{2n\sin x+1}=3$.

559. Rešiti jednačine

1° $|x^2-2|=|x|$; 2° $|x^2-2x|=1$; 3° $|x^2+x-2|+|x^2-x-2|=2$.

560. Koji pozitivan broj treba oduzeti od a i dodati na b da bi proizvod dobijenih brojeva bio veći od datih?

561. Znajući da od svih trouglova date površine ravnostrani ima najmanji obim, dokazati ako su površine trougla i kvadrata jednake, da je obim trougla veći od obima kvadrata.

562. Dokazati da pravilni šestougaonik ima veću površinu nego kvadrat sa istim obimom.

563. Rešiti i diskutovati nejednačine:

1° $56x^2+kx<k^2$; 2° $(3k-1)x^2-2(2k-1)x+2k-1>0$;

3° $\alpha x^2+(2\alpha+1)x+\alpha+2>0$.

564. Za koje će vrednosti parametra λ sledeći trinomi biti pozitivni za sve vrednosti nepoznate:

1° $x^2-2(4\lambda-1)x+15\lambda^2-2\lambda-7$; 2° $(\lambda^2-\lambda-2)x^2+2\lambda x+1$.

U sledećim nejednačinama odrediti parametar λ tako da budu zadovoljene za sve vrednosti nepoznate:

565. $\dfrac{x^2+\lambda x+1}{x^2+x+1}<5$. **566.** $-3<\dfrac{x^2+\lambda x-2}{x^2-x+1}<2$.

567. Odrediti parametar λ tako, da se oba korena jednačine $x^2-2kx+k^2-1=0$ nalaze u intervalu $(-2;\ 4)$.

568. Odrediti parametar λ tako, da nejednačine budu zadovoljene za sve vrednosti nepoznate:

1° $\left|\dfrac{(\lambda+2)x}{x^2-x+1}\right|<1$; 2° $|4x^2-(\lambda+1)x+4|<5(x^2+1)$;

3° $\left|\dfrac{x^2+(\lambda+1)x+1}{x^2+x+1}\right|<3$.

Za koju vrednost nepoznate su sledeći izrazi realni:

569. 1° $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}+\sqrt{x^2-3x-4}$; 2° $\sqrt{3x^3+6x^2+x+2}$;

3° $\sqrt{\dfrac{x(x+5)}{x-5}}+\sqrt{2^{-x}-1}$; 4° $\log\dfrac{x-1}{x+2}+\sqrt{x^2-4}$.

570. 1° $\sqrt{\log\dfrac{2x+1}{3x-1}}$; 2° $\sqrt{\log_{(1/2)}\dfrac{x+3}{x-1}}$;

3° $\sqrt{1-\left|\log_{(2)}\dfrac{2x+5}{x+3}\right|}$.

571. Odrediti parametar k, tako da sledeći izrazi budu realni za sve vrednosti nepoznate:

1° $\sqrt{\dfrac{x^2-5x+8}{2x^2-(k+3)x+2}}$; 2° $\sqrt{\log[(k+1)(x^2+x)+2]}$;

3° $\sqrt{\log_{(1/3)}\dfrac{x^2+(k-2)x+4}{2x^2+x+5}}$.

Rešiti sledeće nejednačine:

572. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}>\sqrt{3}$.

573. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$.

574. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

575. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1$.

576. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

577. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

578. $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{x^2+7x}>3$.

579. $\sqrt{2x+1}<\dfrac{2(x+1)}{2-x}$.

580. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

581. $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}<x^2$.

582. $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

583. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$.

584. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x$.

585. Za koju vrednost promenljive izrazi:

1° $\log(x+\sqrt{x+2})$; 2° $\sqrt{\log(x+\sqrt{x+1})}$ imaju realnu vrednost?

586. Naći sve vrednosti nepoznate x veće od nule, a manje od 2π za koje je ispunjena nejednakost

$$\cos x-\sin x-\cos 2x>0.$$

Rešiti nejednačine:

587. $\dfrac{1}{\cos 2x}<\cos x$.

588. $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}>0$.

589. $\sin^4 x+\cos^4 x>a$.

590. Dokazati da je nejednakost $(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-3\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x)>0$ zadovoljena za sve vrednosti za koje leva strana ima smisla.

591. Rešiti nejednakost $\operatorname{tg}\frac{x}{2}>\frac{\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}x+2}$.

592. Dokazati da je za $0<x<\frac{\pi}{4}$ ispunjena nejednakost

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x\,(\cos x-\sin x)}>8.$$

593. Dokazati nejednakost $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}>1+\operatorname{ctg}x$ za $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Rešiti nejednačine:

594. $\sin \pi x>\cos \pi\sqrt{x}$. **595.** $\sin(2\pi\cos x)>0$.

596. Stavljajući $\operatorname{tg}\alpha=n\operatorname{tg}\varphi$ dokazati da je

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\varphi)<\frac{(n-1)^2}{4n}.$$

597. Ako je $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$, dokazati da je data

$$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n.$$

598. Neka je n prirodan broj, veći od 1, i α ugao koji zadovoljava nejednakost $0<\alpha<\frac{\pi}{4}(n-1)$; pokazati metodom potpune matematičke indukcije da je tada $\operatorname{tg}n\alpha>n\operatorname{tg}\alpha$.

599. Dokazati da za proizvoljne koeficijente $a_{31}, a_{30}, \ldots, a_2, a_1$ zbir

$$\cos 32x+a_{31}\cos 31x+a_{30}\cos 30x+\cdots+a_2\cos 2x+a_1\cos x$$

ne može biti samo pozitivan za sve vrednosti promenljive x.

600. Dokazati da je za $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ispunjena nejednakost $\cos(\sin\varphi)>\sin(\cos\varphi)$. Dokaz dati grafički.

601. Ako su A, B i C uglovi trougla, dokazati da je

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{8}.$$

602. Dokazati nejednačinu $|a\sin x+b\cos x|<\sqrt{a^2+b^2}$.

603. Neka je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

1° Naći najmanju moguću vrednost zbira

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

2° Naći najveću moguću vrednost proizvoda

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

604. Dokazati, ako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, da je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}>1.$$

605. Naći najmanju i najveću vrednost izraza

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x, \qquad \text{za } c\neq a.$$

Za koje su vrednosti nepoznate x sledeći izrazi realni:

606. 1° $\sqrt{\dfrac{\sin(x/2)}{1-\sqrt{1+\cos x}}}$; 2° $\sqrt{\dfrac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}-\sin x}}$;

3° $\sqrt{\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x-\sin 8x}$.

607. 1° $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{\sin x}$; 2° $\ln\left(|\cos x|-\dfrac{1}{2}\right)-\sqrt{1-\ln^2 x}$.

608. $\arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\arcsin x\right)$.

Posmatrajući samo osnovni interval utvrditi za koje su vrednosti nepoznate sledeći izrazi realni:

609. 1° $\sqrt{\sin\pi\dfrac{x}{x+1}}$; 2° $\sqrt{\cos\dfrac{x}{x+1}}$; 3° $\sqrt{|\sin x|-\dfrac{1}{2}}$.

610. 1° $\sqrt{\sin\pi|x+2|}$; 2° $\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{2}\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|}$; 3° $\sqrt{\sin\pi\left|\dfrac{x+5}{x-1}\right|-\dfrac{1}{2}}$.

611. $\ln[\sqrt{2}-2|\sin\pi|x||]$.

612. Naći par celih brojeva x i y koji zadovoljavaju sisteme nejednačina

1° $y-|x^2-1|>0, \qquad y-|x+1|<0;$

2° $y-|x^2-2x|+\dfrac{1}{2}>0, \qquad y+|x-1|<2.$

613. Kod dva trapeza sa jednakim donjim osnovama, gornja osnovica jednoga jednaka je visini drugoga. Koji od trapeza ima veću površinu?

Naći oblast određenu nejednačinama:

614. $xy-1>0.$ **615.** $\dfrac{y-x}{2x-y}>0.$ **616.** $\dfrac{x^2+y^2-1}{xy}>0.$

617. $x^2<8y$
$y^2>4x$
$y^2<7x$
$x^2>3y.$

618. $|x-y|-1<0.$

619. $|x|+y+1<0.$

620. $|x|+|y|-1<0.$

621. $\dfrac{x^2-xy}{x^2+y^2+xy}<0.$

622. $\left|\dfrac{x-y}{x+2y}\right|>1.$

623. $\sin(\pi xy)>0.$

624. $\sin\pi(x+y)<0.$

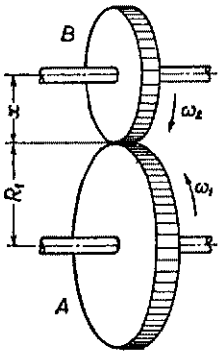
625. $\operatorname{tg}\pi(x+y)>1.$

626. U kojoj oblasti treba da se nalazi tačka $M(b;a)$ da bi jednačina $x^2-2bx+a=0$ imala dva realna korena u razmaku $(1, 2)$?

627. Sud oblika polulopte unutrašnjeg poluprečnika $2r$ postavljen je na horizontalnoj podlozi i napunjen vodom do visine h. Odrediti skup svih uglova za koje može da se nagne sud a da voda ne počne isticati.

628. Centrifugalni šmrk ima kašikasto vodenično kolo poluprečnika R. Koliko obrta u sekundi mora obaviti to kolo, da bi se voda popela najmanje do visine od h m?

629. Laboratorijska ispitivanja modela rečnog čamca izvode se u bazenu za ispitivanje uz promenljive brzine modela i vode. Kakve moraju biti te brzine, da bi model čamca, krećući se ravnomerno, prelazio u smeru toka 60 m najmanje za a sec, a u suprotnom smeru najviše za b sec?

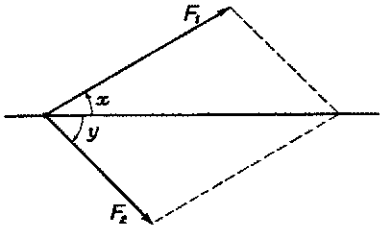


Sl. 4

630. Dat je frikcioni prenosnik (sl. 4) sa cilindričnim valjcima. Ako je vodeći valjak A, a vođeni B, tada se usled pojave sile trenja vođeni valjak okreće u suprotnom smeru bez klizanja. Koliki poluprečnik mora imati vođeni valjak, da bi njegova uglovna brzina ω_2 iznosila najmanje n obrtaja u sekundi, ako su poluprečnik i uglovna brzina vodećeg valjka R_1 i ω_1?

631. Neka je masa Zemlje M, masa Meseca m, a rastojanje između središta Zemlje i Meseca l. Na kom rastojanju od centra Zemlje mora da se nalazi međuplanetarna raketa lansirana sa Zemlje u pravcu Meseca, da bi ta raketa mogla nastaviti dalje kretanje u pravcu Meseca bez upotrebe goriva samo pod uticajem privlačne sile Meseca? Masa rakete je m_1.

632. Materijalna tačka kreće se pod uticajem dveju sila F_1 i F_2 koje sa pravcem kretanja materijalne tačke obrazuju oštre uglove (sl. 5).
Kakvi moraju biti ti uglovi, ako je sila $F_1=6$ t, a sila $F_2=4$ t, pa da rezultujuća sila koja izaziva kretanje materijalne tačke prevaziđe 5 t, a da za $F_1=10$ t i $F_2=5$ t, ta sila ne bude veća od 8 t?



Sl. 5

633. Mesto A nalazi se na jednoj, a mesto B na drugoj obali reke pravolinijskog toka, pri čemu je mesto B bliže ušću od mesta A. Neka je rastojanje između ta dva mesta l, a brzina toka v. Pravac kretanja vode zaklapa sa pravcem AB ugao α. Pretpostavljajući da je brzina vode konstantna na celoj širini reke, kojom brzinom x i pod kojim uglom y u odnosu na pravac AB mora da se kreće brod pravcem AB, da bi, ostajući celo vreme na pravcu AB, prešao put iz A u B za vreme koje nije manje od t_2, a put iz B u A za vreme koje nije veće od t_1? ($t_1 > t_2$).

634. Na čelo klina čiji je presek ravnostrani trougao ABC deluje sila u pravcu kretanja klina kroz sredinu u koju se nabija. Koeficijenat trenja između klina i sredine je k. Za koju će vrednost ugla ABC odnos sile kojom deluje sredina na površinu klina i sile kojom deluje klin na sredinu iznositi najmanje n, gde je $n > 1$?

635. Glavna žižna daljina izdubljenog ogledala iznosi F. Na kom rastojanju od temena ogledala treba postaviti predmet, da bi dimenzije dobijenog lika bile veće od dvostrukih, a manje od trostrukih dimenzija predmeta?

§ 8. Približne vrednosti i računanje sa njima

1° Broj x zove se *tačan broj* ako izražava tačnu vrednost neke veličine.

2° Broj a zove se *približan broj* ako se neznatno razlikuje od tačnog broja x i zamenjuje ga u računu.

3° *Apsolutna greška* približnog broja, Δ, je veličina

$$\Delta = |x - a|.$$

4° Najmanji broj Δa od koga apsolutna greška nije veća, zove se *granica apsolutne greške* približnog broja a. U tom slučaju važi relacija

$$\Delta_a > \Delta = |x - a|.$$

5° *Relativna* greška, δ, približnog broja a, je količnik: $\frac{\Delta}{|a|}$, tj.

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

6° *Granica relativne greške* približnog broja a zove se najmanji broj δa koji nije manji od δ, tj.

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} < \delta a.$$

Znači da je

$$\Delta < |a| \delta a.$$

Pošto je u praksi $a \approx x$, to se često koristi formula $\Delta_a = |a| \delta a$.

7° *Značajnim ciframa* približnog broja nazivaju se sve cifre osim cifara nula, i nule, koje su između značajnih cifara ili koje označavaju desetni razred približnog broja. Tačne cifre približnog broja su sve njegove cifre ako njegova apsolutna greška nije veća od polovine jedinice poslednjeg mesta desetnog razreda.

8° Zaokrugliti broj x na n značajnih cifara znači izostaviti sve cifre desno od n-te značajne cifre, ili ih zameniti nulama ako je to potrebno. Da bi greška zaokrugljenog broja bila minimalna, treba postupiti na sledeći način: 1) Ako je prva izostavljena cifra manja od 5, zadržane cifre se ne menjaju. 2) Ako je prva izostavljena cifra veća od 5, poslednja zadržana cifra se uvećava za 1. 3) Ako je prva izostavljena cifra 5 a među zadržanim ciframa ima ih koje su različite od 0, poslednja zadržana cifra se uvećava za 1. 4) Ako je prva izostavljena cifra 5 a ostale izostavljene su nule, poslednja zadržana ostaje nepromenjena ako je parna a uvećava se za 1 ako je neparna (pravilo parne cifre). 5) Ako je posle zaokrugljivanja zadnja cifra 5, onda se iznad nje stavlja crtica ($\bar{5}$) ako je dobijena uvećanjem cifre 4 za 1, ili tačka ($\dot{5}$) ako nije dobijena uvećanjem za 1 (pravilo Gaussa). Ako približan broj treba dalje zaokrugljivati, postupa se na sledeći način: U slučaju ($\bar{5}$) cifra koja stoji pred njom ostaje bez promene; u slučaju ($\dot{5}$) cifra pred njom se uvećava za 1. U svim ovim slučajevima je

$$\Delta_a < \frac{1}{2} 10^{-n}.$$

9. Pravila računanja sa približnim vrednostima su sledeća: 1) Pri sabiranju i oduzimanju približnih brojeva, u rezultatu treba zadržati onoliko decimalnih mesta koliko ih ima približan broj sa najmanjim brojem decimalnih mesta. 2) Pri množenju i deljenju približnih brojeva, u rezultatu treba zadržati onoliko značajnih cifara koliko ih ima približan broj sa najmanjim brojem značajnih cifara. 3) Pri dizanju približnih brojeva na kvadrat i kub, u rezultatu treba zadržati onoliko značajnih cifara koliko ih ima približan broj koji se stepenuje. 4) Pri vađenju kvadratnog i kubnog korena iz približnih brojeva, u rezultatu treba zadržati onoliko značajnih cifara koliko ih ima radikand. 5) Ako nekoliko datih približnih brojeva ima više decimalnih mesta (pri sabiranju i oduzimanju), ili više značajnih cifara (pri množenju i stepenovanju) nego ostali približni brojevi, onda ih treba prethodno zaokrugliti, tako da imaju jednu decimalnu ili značajnu cifru više nego približan broj sa najmanje decimalnih mesta ili značajnih cifara. To isto važi i za operaciju deljenja približnih brojeva. 6) Pri složenim operacijama treba u rezultatima zadržati jedno decimalno mesto ili značajnu cifru više nego što to propisuju pravila od 1 do 4. To decimalno mesto ili značajnu cifru u krajnjem rezultatu treba odbaciti.

10° *Granica greške rezultata*: Prilikom računanja sa približnim brojevima javljaju se dva osnovna problema: 1) Pomoću granica grešaka svakog približnog broja koji ulazi u račun treba odrediti granicu greške rezultata. Direktan problem.

2) Pomoću granice greške rezultata odrediti granicu grešaka pojedinih približnih brojeva koji ulaze u račun. Obrnut problem.

Direktan problem: Ako su a_1 i a_2 približni brojevi koji ulaze u račun, tada se može uzeti da je:

$$\delta(a_1+a_2)=\frac{\Delta_{a_1}+\Delta_{a_2}}{a_1+a_2}, \qquad \delta(a_1-a_2)=\frac{\Delta_{a_1}+\Delta_{a_2}}{a_1-a_2},$$

$$\delta(a_1\cdot a_2)=\delta a_1+\delta a_2, \qquad \delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\delta a_1+\delta a_2,$$

$$\delta(a^n)=n\delta a, \qquad \delta\sqrt[n]{(a)}=\frac{1}{n}\delta a.$$

Uopšte, ako su poznate granice grešaka približnih brojeva $x_i (i=1,\ldots,n)$ pomoću kojih se izračunava vrednost u po formuli:

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

tada je

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \qquad \text{i} \qquad \delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta_{x_i}.$$

Obrnut problem: Pri rešavanju obrnutog problema usvaja se princip jednakih doprinosa, tj. u formuli:

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i},$$

uzima se da je

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \Delta_{x_2} = \cdots = \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n},$$

odakle se dobija da je:

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ako se traži proizvod (količnik) sa unapred datom relativnom greškom a tačnost približnih brojeva koji ulaze u račun može se birati (primer: jedan broj je π ili $\sqrt{2}$, itd.), te brojeve treba uzimati sa jednom značajnom cifrom više nego što ih ima proizvod (količnik).

636. Zaokrugliti broj 7152486,33523 do: desetohiljaditih, hiljaditih, stotih, desetih, jedinica, desetica, stotina, hiljada itd. i u svim slučajevima odrediti granicu apsolutne greške.

637. Zaokrugliti broj 345,0715 do: stotina, desetica, jedinica, desetih, stotih hiljaditih.

638. Odrediti granicu apsolutne greške broja $a = 3{,}14$ koji zamenjuje broj π.

639. Naći apsolutnu i relativnu grešku brojeva tačnih do poslednje napisane cifre: 241,7; 0,035; 3,14.

640. Poluprečnik ekvatora Zemlje izračunao je Bessel (1837) $R = 6377{,}391$ km. Hayford je 1910. izračunao da je $R = 6378{,}388$ km. Ako se pretpostavi da je Hayford računao tačnije, onda je Besselov rezultat pogrešan. Kolika je greška?

641. Planck je našao (1913) takozvanu Planckovu konstantu $h = 6{,}41 \cdot 10^{-27}$ erg/sec, dok je Ladenburg (1926) našao da je $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg-sec. Smatra se da je Ladenburgov broj tačniji. Kolika je greška?

642. Brzina svetlosti (c) u vakuumu uzima se da je $c = (2{,}99796 \pm 0{,}00004) \cdot 10^5$ km/sec, što se može napisati: $c = (299796 \pm 4)$ km sec^{-1}.
Sme li se, kako se to često radi, napisati da je brzina svetlosti: $c = 300000$ km sec^{-1}?

643. Dužina letve 3,25 m izmerena je sa tačnošću od ± 1 mm a rastojanje dve tačke u prirodi 20,42 km sa tačnošću od ± 2 m. Koje je merenje tačnije i koliko puta?

644. Masa neutrona u miru iznosi $M_n = 1{,}67473 \cdot 10^{-24}$ g. Kolika je relativna greška ako se umesto gornjeg podatka uzme masa: $M_n = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g.

645. Dva tela su izmerena na istoj vagi, pri čemu se dobilo: $P_1 = (24{,}5 \pm 0{,}5)$ g; $P_2 = 12{,}38$ kg ($\pm 0{,}05$ g). Koje je telo izmereno tačnije i koliko puta?

646. Naći relativnu grešku broja $5{,}2 \cdot 10^3$ uzetog umesto broja 5238.

647. Naći granicu relativne greške ubrzanja Zemljine teže $g = (980{,}274 \pm 0{,}003)$ cm sec^{-2}.

648. Naći granicu relativne greške za brzinu svetlosti u vakuumu (zadatak 642).

649. Isto kao u zadatku (646), za broj π uzet sa pet decimala.

650. Odrediti broj tačnih značajnih cifara u tabličnoj vrednosti specifične težine žive na 0°C, $d_0 = 13{,}5955$ cm^3 g ako se zna da je procentualna greška te veličine 0,0007%.

651. Odrediti broj tačnih cifara Planckove konstante: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg/sec koja je određena sa procentualnom greškom od 0,15%.

652. Odrediti broj tačnih cifara i napisati u odgovarajućem obliku brojeve:

1° 48361 pri tačnosti od 1%;

2° 14,9360 pri tačnosti od 1%;

3° 592,8 pri tačnosti od 2%.

653. Zaokrugliti brojeve 0,0830195 i 235,48 sa greškom od 0,01%.

654. Kod brojeva $\pi = 3{,}1415926\ldots$ i $\frac{1}{7} = 0{,}1428571\ldots$ zadržati toliko tačnih cifara da bi relativna greška dobijenih brojeva bila manja od 0,001 kod prvog, i manja od 0,5% kod drugog broja. Proveriti rezultate.

655. Sa koliko decimala treba uzeti $\sqrt{0{,}0259}$ da greška rezultata ne bude veća od $\frac{1}{1\,000}$?

656. Sa koliko decimala treba računati $\sqrt{6583}$ i $\sqrt{3}$ da greška ne bude veća od 0,05%?

657. Koliko značajnih cifara treba zadržati kod brojeva $L = 2{,}7183$ i $P = 8{,}7183$ da relativne greške rezultata ne budu veće od: $\delta_L = 2\%$, $\delta_P = 0{,}1\%$?

658. Tačna merenja otpora V_1, V_2, V_3, V_4 dala su sledeće rezultate:

$$V_1 = 100{,}12 \pm 0{,}01 \text{ om}, \qquad V_2 = 249{,}61 \pm 0{,}02 \text{ om},$$

$$V_3 = 1001{,}2 \pm 0{,}1 \text{ om}, \qquad V_4 = 10003 \pm 1 \text{ om}.$$

Naći $R = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

659. Izračunati sledeće zbirove:

1° $27{,}063+68{,}317+143{,}628$.

2° $4{,}3-15{,}85+0{,}0938+12{,}997$.

3° $0{,}03+2{,}995+12{,}3+1{,}26\overline{5}+0{,}065+3{,}33\overline{5}$.

4° $1{,}2\cdot 10^2+41{,}72+0{,}09$.

5° $4{,}23457+\sqrt{3}+2{,}34+\sqrt{7}+\sqrt{9}$.

6° $27{,}\overline{5}+0{,}484+3{,}7\overline{5}+5{,}77\overline{5}$.

7° $25{,}386+0{,}49+3{,}10+0{,}5$.

8° $38{,}1+2{,}0+3{,}124$.

660. Naći $x=a+b-c$ ako je

$$a=8{,}14\pm 0{,}01;\quad c=3{,}5\pm 0{,}05;\quad 2{,}13<b<2{,}16.$$

661. Naći $x=a-b+c$ ako je

$$a=13{,}5\pm 0{,}05;\quad b=5{,}8\pm 0{,}15;\quad 7{,}30<c<7{,}45.$$

662. Koliko tačnih značajnih cifara ima zbir približnih brojeva: 3248,24; 3218; 2445, čije su sve cifre tačne?

663. Izračunati $x=2\cdot 4-0{,}3509+13{,}85+0{,}04747$, gde je prvi sabirak tačan, ostali približni, dobijeni zaokrugljivanjem i oceniti relativnu grešku.

664. Izračunati $x=\sqrt{2}+\sqrt{4}+(-\sqrt{3})+4-0{,}35$ ako su svi brojevi tačni osim poslednjeg dobijenog zaokrugljivanjem, i oceniti grešku u procentima.

665. Izračunati: 1° $148{,}1-63{,}871$; 2° $29{,}72-11{,}25$;

3° $34{,}22-34{,}21$; 4° $(5{,}27\pm 0{,}01)-(5{,}012\pm 0{,}002)$;

5° $(6102{,}37\pm 0{,}05)+(6109{,}21\pm 0{,}05)$.

666. Strane pravougaonika su 4,02 m i 4,96 m (sa tačnošću od 1 cm). Naći njegovu površinu.

667. Izračunati: 1° $3{,}49\cdot 8\cdot 6$; 2° $25{,}1\cdot 1{,}743$;

3° $0{,}02\cdot 16{,}5$; 4° $0{,}082-4375$; 5° $205-0{,}0090$;

6° $9\cdot 0{,}235$ (broj 9 je tačan); 7° $7\cdot 6{,}145$ (broj 7 je tačan);

8° $2{,}1893:4{,}1$ (broj 4,1 je tačan); 9° $2{,}1893\cdot 4{,}1$.

668. Naći x i y ako je $x=a\pi$, $y=\dfrac{\pi}{a}$ i $a=0{,}825$, $\pi=3{,}141592$.

669. Izračunati $P=2\sqrt{3}\,\dfrac{1}{35}$ g, ako se $\dfrac{1}{35}$ napiše u obliku decimalnog razlomka sa tri decimale, i oceniti grešku.

670. Izračunati $x=ab$ ako je $3{,}141<a<3{,}142$; $0{,}0781<b<0{,}0784$.

671. Izračunati zbir površina dva kvadrata sa stranama: 10,25 m i 10,23 m i oceniti grešku tog zbira ako su strane merene sa tačnošću od 0,01 m.

672. Pri kretanju oko sunca, Zemlja pređe približno 30 ($\pm 0{,}1$) km u sekundi. Koliki put pređe za jedan sat? Naći apsolutnu grešku rezultata.

673. Izračunati: 1° $5{,}684:5{,}032$; 2° $0{,}144:1{,}2$; 3° $216:4$.

674. Katete pravouglog trougla su: 12,10 cm i 25,21 cm, izmerene sa tačnošću do 0,01 cm. Izračunati tangens ugla naspram prve katete.

675. Pri navođenju rakete na cilj granica greške polaznog ugla $c = 1'$. Koliko će ta raketa odstupiti od cilja na daljini $x = 2\,000$ m, ako se zna da se u toku leta ne može vršiti korekcija?

676. Naći $x = \frac{a}{b}$ ako je: $3{,}85 < a < 3{,}88$; $b = 25{,}7 \pm 0{,}1$.

677. Izračunati $x = \frac{ab^2}{c^3}$ ako je: $a = 4{,}378 \pm 0{,}002$; $b = 3{,}42 \pm 0{,}005$; $c = 1{,}941 \pm 0{,}001$.

Izračunati sledeće vrednosti:

678. 1° $13{,}7^2$; 2° $(-0{,}0092)^3$; 3° $0{,}080^2$; 4° $4{,}306^3$; 5° $\sqrt{42{,}3}$; 6° $\sqrt{0{,}049}$; 7° $\sqrt{0{,}000621}$; 8° $\sqrt{0{,}081}$.

679. 1° $(0{,}3862)^4$; 2° $(0{,}3862)^{1/4}$.

680. Naći $x = \frac{a\sqrt{b}}{c}$ ako je:

$$a = 85{,}39 \pm 0{,}01; \quad b = 45{,}1 \pm 0{,}05; \quad 709{,}0 > c > 708{,}5.$$

681. Naći relativnu grešku za $\tau = \frac{2D^2\sqrt{H}}{ad^2\sqrt{2g}}$, gde je: $D = 1 \pm 0{,}01$; $H = 2 \pm 0{,}02$, $d = 0{,}03 + 0{,}001$; $a = 0{,}61 \pm 0{,}02$.

682. Naći relativnu grešku za V iz formule $V = V_0(1 + \alpha t)$ ako su V_0, α i t izmereni sa tačnošću od 1%.

683. Naći relativnu grešku za x iz formule $x = \frac{(M_1 + CM_2)(t - t_0)}{M(T - t)}$.

684. Naći težinu bakarnog šupljeg valjka dužine $l = 2{,}5 \pm 0{,}1$ m ako je unutrašnji dijametar $D = 22{,}3 \pm 0{,}1$, debljina $h = 1{,}8 \pm 0{,}05$ cm a specifična težina bakra $S = 8{,}8 \pm 0{,}05$.

685. Komad stene zapremine $V = (43{,}5 \pm 0{,}1)$ cm³ teži (92 ± 1) g. Naći specifičnu težinu stene.

686. Koliko treba da bude granica apsolutne greške Δa_i sabiraka a_i ako zbir $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ima granicu apsolutne greške ΔA?

687. Naći zbir $A = 5\frac{2}{3} - \sqrt{2} - \sin 23°\,30'$ sa tačnošću $\Delta A = \pm 0{,}01$.

688. Naći zbir $S = 69256 + 129014 + 357391 + 405137 + 540473 + 830167$ sa tačnošću do hiljada ($\Delta S = \pm 1000$).

689. Izračunati zbirove sa datom tačnošću:

1° $4\frac{1}{3}+\pi+0{,}08673$ sa greškom od $\pm 0{,}005$.

2° $8{,}2631+3{,}8406-1{,}6304+2{,}0435$ sa greškom od 0,1.

3° $0{,}45016+\frac{2}{3}+10{,}2+3{,}24678$ sa tačnošću od 0,3%; brojevi $\frac{2}{3}$ i 10,2 su tačni.

4° $\frac{1}{7}-\frac{1}{3}+\sqrt{2}+5{,}30167$ sa relativnom greškom $\delta=\frac{1}{200}$.

690. Izračunati poluprečnik kruga čija je površina $P=348{,}5\ \mathrm{m}^2$ sa dve značajne tačne cifre.

691. Sa kakvom tačnošću treba izmeriti strane pravougaonika $a=42$ cm, $b=10$ cm, da se dobije površina čija greška ne prelazi $\pm 5\ \mathrm{cm}^2$?

692. Sa kakvom tačnošću treba uzeti brojeve a_i da bi zbir $A=a_1+a_2+\dots+a_n$ imao granicu relativne greške δA?

693. Naći $S=0{,}3567\ldots+\pi+\frac{1}{3}+10{,}8143$ sa tačnošću 0,2%.

694. Naći $S=0{,}45016\ldots+\frac{2}{3}+10{,}2+3{,}24678$ sa tačnošću 0,3%.

695. Izračunati $S=\frac{1}{7}-\frac{1}{3}+\sqrt{2}+5{,}30167$ sa granicom relativne greške $\delta_s=\frac{1}{200}$.

696. Sa kakvom tačnošću treba uzeti broj $\pi=3{,}141592\ldots$ i izmeriti radijus $R\approx 9$ cm da bi se obim kruga dobio sa tačnošću od 0,5%?

697. Izračunati $A=\frac{\pi\cdot 0{,}81026}{5{,}4214}$ sa tačnošću od $\pm 0{,}005$.

698. Izračunati $A=\frac{\sqrt{2}\cdot 0{,}805167}{6{,}2418}$ ako je $\Delta A<0{,}005$.

699. Izračunati $P=\frac{5\cdot 320{,}46\ldots}{\pi(7{,}24603)^3\cdot 12{,}5731\ldots}$ sa tačnošću 0,01.

700. Naći poluprečnik kruga sa dve tačne značajne cifre ako je površina $P=348{,}5\ \mathrm{m}^2$.

701. Sa kakvom tačnošću treba izmeriti poluprečnik kruga $r=9$ cm i sa koliko decimala treba uzeti broj π da bi se dobila površina kruga sa relativnom greškom od $\frac{1}{30}$?

702. Naći fokusno rastojanje F sočiva sa tačnošću do ± 1 po formuli $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Sa kakvom tačnošću treba izmeriti d i f ako su približna merenja: $F=25$ cm, $f=32$ cm, $d=120$ cm?

703. Izračunati granicu apsolutne i relativne greške za d ako je $d=\frac{P-P_2}{P_1-P_2}$, gde je $P=34{,}695\pm 0{,}005$; $P_1=39{,}815\pm 0{,}005$; $P_2=16{,}445\pm 0{,}005$.

704. Radijus r kružnog luka $\widehat{AB}$ čija je odgovarajuća tetiva $2s$ a p najveće normalno rastojanje ove tetive do luka, dat je izrazom: $r=\frac{s^2}{2p}+\frac{p}{2}$. Ako je: $2s=19{,}45$ cm $\pm 0{,}005$ cm; $p=3{,}62$ cm $\pm 0{,}3$ mm, naći apsolutnu i relativnu grešku za r.

705. Sa kolikom tačnošću treba meriti: $h=46$ i $r=38$ u formuli $R=\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{r}$ da bi se R dobilo sa tačnošću do 0,3%?

706. Sa kojom tačnošću treba meriti poluprečnike osnova $R=2$; $r=1$ i izvodnicu zarubljene kupe $s=5$ i sa koliko decimala treba uzeti broj π da bi se površina omotača te kupe mogla izračunati sa tačnošću do 1%?

707. Naći $x=\frac{a+b}{(a-b)c}$, gde je $a=3\frac{4}{7}$; $b=3\frac{5}{11}$; $c=28\frac{1}{3}$ zamenjujući tačne vrednosti za a, b, c njihovim približnim vrednostima uzetim sa dva decimala.

708. Izračunati $d=\frac{P}{\pi r^2 h}$, gde je $2r=(0{,}48\pm 0{,}005)$ mm, $h=(264{,}4\pm 0{,}1)$ mm, $P\approx(0{,}423\pm 0{,}001)$ g.

709. Izračunati $t=\sqrt{\frac{2hd}{g(d-d_1)}}$, gde je $h\approx 25{,}3\pm 0{,}1$; $d_1\approx 0{,}998\pm 0{,}0005$: $d\approx 19{,}32\pm 0{,}01$; $g\approx 982\pm 0{,}5$.

710. Za jedan šuplji cilindar merenjem je nađeno:
$H=(31{,}27\pm 0{,}02$ mm); $r=(8{,}32\pm 0{,}01)$ mm; $R=(15{,}13\pm 0{,}01)$ mm.
Izračunati zapreminu ovog šupljeg cilindra i odrediti apsolutnu i relativnu grešku zapremine.

711. Modul Junge E određuje se po formuli $E=\frac{1}{4}\frac{l^3 P}{a^3 bs}$. Izračunati E i granicu relativne greške za E ako je: $P=20$ kg, $\delta_p=0{,}001$, $a=3$ mm, $\delta_a=0{,}01$, $b=4$ mm, $\delta_b=0{,}001$, $l=50$ cm, $\delta_l=0{,}01$, $s=2{,}5$ cm, $\delta_s=0{,}01$.

§ 9. Kompleksan broj

1° Izraz oblika $x+iy$, gde su x i y realni brojevi a $i=\sqrt{-1}$ naziva se *kompleksan broj*. Kompleksan broj, kod koga je $y\neq 0$ naziva se još i *imaginaran* a i se zove *imaginarna jedinica*.

2° Osobine kompleksnih brojeva i operacije nad njima

(1) $$x+0i=x;\quad 0+iy=iy;\quad 1i=i;\quad -1i=-i;$$

(2) $$x_1+iy_1=x_2+iy_2,$$

onda i samo onda ako je

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2;$$

(3) $$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+(y_1+{}_2)i;$$

(4) $$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

Množenje kompleksnih brojeva se izvodi, kao što se vidi, po pravilima te operacije nad polinomima, pri čemu je uvek $i^2=-1$. Deljenje i korenovanje kompleksnih brojeva definišu se kao inverzne operacije, množenja i stepenovanja.

3° Kompleksan broj $x+iy$ određen je parom realnih brojeva (x, y) i na taj način se svakom kompleksnom broju može jednoznačno dodeliti jedna tačka $M(x, y)$ ravni i obrnuto svakoj tački kompleksan broj. Sem toga, kompleksan broj može biti određen radijus vektorom tačke u ravni i uglom koji taj vektor zaklapa sa Ox osom. Dužina tog vektora

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

naziva se *moduo* kompleksnog broja, a ugao φ koji zaklapa sa Ox osom *argument* kompleksnog broja. Kako je

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

to je

$$x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Ovaj oblik kompleksnog broja naziva se *trigonometrijski*.

Operacije nad kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku:

(1) $$\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];$$

(2) $$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)];$$

(3) $$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi);$$

(4) $$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

gde je $k=0, 1, \ldots, (n-1)$.

Formule (3) i (4) nazivaju se *Moivreove formule*.

4° *Eulerova formula* za kompleksan broj glasi: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. (5)

5° Logaritmovanje kompleksnog broja

(1) $$\operatorname{Ln} z=\ln\rho+i\varphi_0+i2k\pi,$$

gde je φ_0 vrednost argumenta φ koji zadovoljava uslov $-\pi<\varphi_0\leqslant\pi$. Izraz $\ln\rho+i\varphi_0$ naziva se *glavna vrednost* logaritma i obeležava se sa $\operatorname{Ln} z$.

712. Naći kompleksne brojeve koji odgovaraju tačkama:

1° $(0, 1)$; 2° $(1, 0)$; 3° $(0, -1)$; 4° $(-1, 0)$; 5° $(-2, 3)$.

713. Naći tačke koje odgovaraju kompleksnim brojevima i odrediti njihov položaj u kompleksnoj ravni:

1° i; 2° $-2i$; 3° $-1+i$; 4° $2-3i$.

714. Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnih brojeva:

1° $-7i$; 2° $2-4i$; 3° $\cos\alpha+i\sin\alpha-1$; 4° $a+ib+c+i$.

715. Naći moduo i argument kompleksnih brojeva:

1° $-i$; 2° $3i$; 3° 5; 4° $1+i$; 5° $1-i$; 6° $2+5i$; 7° $3-4i$; 8° $-3-5i$.

716. Predstaviti u trigonometrijskom obliku brojeve: 1° $1+i$; 2° $1+i\sqrt{3}$; 3° $\sqrt{3}-i$; 4° $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, $(0<\alpha<2\pi)$; 5° $1+\sin\alpha-i\cos\alpha$; 6° $1+i\operatorname{tg}\alpha$; $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

717. Napisati u eksponencijalnom obliku brojeve:

1° 1; 2° -1; 3° i; 4° $-i$; 5° $1+i$; 6° $1-i$; 7° $-1+i$; 8° $-i-1$.

718. Dati su kompleksni brojevi $z_1=\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}$ i $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+i$. Odrediti realni parametar t iz uslova $z_1=z_2$.

719. Dati su kompleksni brojevi $z_1=1+2ni$ i $z_2=3n-4i$. Odrediti realni parametar n tako da je $I_m(z_1+z_2)=0$.

720. Gde leže tačke u kompleksnoj ravni za koje je ispunjen uslov:

1° $2<|z|<3$, $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{3}$; 2° $|z|>1$, $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$;

3° $|z-z_0|<1$; 4° $|z-i|<1$ i $|z-1|<1$; 5° $|z|+R_e(z)<2$.

721. Pod kojim uslovom tačke $z=x+iy$ leže unutar kruga poluprečnika r sa centrom u tački $c=a+bi$?

722. Odrediti oblast u kojoj važi nejednačina

$$|1-z|<k(1-|z|), \quad \text{za} \quad k>1.$$

723. Pokazati da se tačka

$$z=1+i-\alpha-i\beta, \text{ za}$$

$$0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1, \quad 0<\alpha+\beta<1$$

nalazi u unutrašnjosti trougla 1, $1+i$, i.

724. Ako je $a>0$ i $k>1$, pokazati da je

$$|a+z|\geqslant\frac{a+|z|}{k}$$

kada je $|\arg(z)|\leqslant 2\arccos\frac{1}{k}$.

725. Krajevi duži su z_1 i z_2. Naći njenu sredinu.

726. Za koju je vrednost realnog parametra α broj $z=1+i\alpha$ bliži koordinatnom početku od broja $z=1+\frac{i}{\alpha}$?

727. Ako je $|a|=|b|=1$, pokazati da ne postoje takvi kompleksni brojevi a i b za koje bi bilo $R_e(a)=2I_m(b)$, $I_m(a)=2R_e(b)$.

728. Ako je $f(z)=2+z+3z^2$, naći $f(z)$ i $f(\bar{z})$ za $z=3+2i$.

729. Izračunati sledeće izraze za $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$:

1° $(\alpha a+\alpha^2 b)(\alpha^2 a+\alpha b)$; 2° $(a+b+c)(a+\alpha b+\alpha^2 c)(a+\alpha^2 b+\alpha c)$.

730. Pokazati da je:

$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right].$$

731. Dokazati da je $z\bar{z}=|z|^2$.

732. Gde se nalaze tačke u kompleksnoj ravni za koje je $z\bar{z}=1$?

733. Ako se tačke z_1, z_2, z_3 i z_4 nalaze na istom krugu pokazati da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$R_e(z_1)I_m(z_1)=R_e(z_2)I_m(z_2)=R_e(z_3)I_m(z_3)=R_e(z_4)I_m(z_4),$$

$$R_e(z_4)=R_e(z_1)R_e(z_2)R_e(z_3).$$

734. Odrediti skup tačaka z ako je

$|R_e(az)|+|I_m(az)|=|a|^2$, gde je a realan broj.

735. Ako se tačka z' nalazi u polukrugu $|z'|<1$ i $|\arg(z')|<\frac{\pi}{2}$ pokazati da se tačka $z=z'^2$ nalazi u celom krugu $|z|<1$, izuzev negativnog dela realne ose.

736. Kakav je međusobni položaj tačaka z_1 i z_2 ako je:

1° $R_e(z_1z_2)=0$; 2° $I_m(z_1z_2)=0$;

3° $R_e(z_1\bar{z}_2)=0$; 4° $I_m(z_1z_2)=0$.

737. Ako je $|z|<\frac{1}{2}$, pokazati da je $|(1+i)z^3+iz|<\frac{3}{4}$.

738. Odrediti realne koeficijente b i c tako da polinom $P(x)=x^2+bx+c$ zadovoljava uslov $P(1-i)=2+i$.

739. Odrediti polinom trećeg stepena sa realnim koeficijentima koji zadovoljava uslove:

$$P(1-i)=2+i \quad \text{i} \quad P(i)=1-2i.$$

740. Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava jednačinu

$$|z|+z=2+i.$$

741. Odrediti kompleksne brojeve z_1 i z_2 ako je:

$$z_1+z_2=1-i, \quad \arg(z_1)=\frac{\pi}{6}, \quad \arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}.$$

742. Brojevi z_1, z_2 i z_3 su takvi da je:

$$\arg(z_1)=\arg(z_3)=\frac{\pi}{6}; \quad \arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}; \quad |z_1|=1; \quad |z_3|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odrediti z_2 tako da bude: $I_m(z_1+z_2+z_3)=0$.

743. Dat je broj $z=1+i$. Odrediti kompleksan broj z_1 da realni deo proizvoda zz_1 bude jednak nuli i $|z\overline{z_1}|=2$.

744. Znajući da je $\arg(1+z)=\frac{\pi}{4}$ i $|1+z|=4$ odrediti kompleksan broj z.

745. Ako je $z=1+i$ i $|z+z_1|=1$, kako treba izabrati z_1 pa da $z+z_1$ bude čisto imaginaran broj?

746. Naći sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslov:

$$1^\circ\ \overline{z}=z^2; \qquad 2^\circ\ \overline{z}=z^3.$$

747. Ako je k realan pozitivan broj, odrediti kompleksne brojeve z_1 i z_2 iz uslova

$$\frac{z_1}{\overline{z_2}}=i\sqrt{2}, \quad z_1\overline{z_2}=k.$$

748. Naći jednačinu skupa tačaka koju zadovoljavaju kompleksno konjugovani koreni jednačina:

$$1^\circ\ z^2-2pz+6p=9; \quad 2^\circ\ z^2-4pz+2p^2-3p+2=0; \quad 3^\circ\ z^2-2pz+4p=0.$$

749. Rešiti jednačinu

$$e\left(\frac{\pi}{4}\right)z+e\left(\frac{\pi}{6}\right)z+i=0, \quad (e(\alpha)=e^{\alpha i}).$$

750. Pokazati da jednačina

$$|z^2+1|-2|z|=0$$

predstavlja dva kruga i naći njihove jednačine.

751. Neka je $0<a<1$. Dokazati analitički i geometrijski da iz $|z|<a$ sledi $|\arg(1+z)|\leqslant \arcsin a$.

752. Ako krug $|z-s|=r$ prolazi kroz isečke a, b i c pokazati da je

$$s=\frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \text{i} \quad r^2-|s|=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

gde je

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & a & |a|^2 \\ 1 & b & |b|^2 \\ 1 & c & |c|^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a & \bar{a} & |a|^2 \\ b & \bar{b} & |b|^2 \\ c & \bar{c} & |c|^2 \end{vmatrix}.$$

753. Pokazati da je $I_m(z\bar{z}_1)=2P$, gde je P površina trougla čija su temena 0, z_1, z_2.

754. Dati geometrijsko tumačenje sledećih relacija:

1° $|z-2|+|z+2|=5$; 2° $|z|=R_e(z)+1$; 3° $R_e(z)+I_m(z)<1$.

755. Neka su x i y dva kompleksna broja. Dokazati jednakost

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2\{|x|^2+|y|^2\}$$

i dati geometrijsku interpretaciju.

756. Dokazati nejednakost $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|$, gde je $z=x+iy$.

757. Polazeći od geometrijskih razmatranja dokazati sledeće nejednakosti:

1° $|z_1+z_2|\leqslant|z_2|+|z_2|$; 2° $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

3° $|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg(z)|$.

758. Izvršiti naznačene operacije:

$$1^\circ\ \frac{1}{i};\quad 2^\circ\ \frac{1-i}{1+i};\quad 3^\circ\ \frac{2}{1-3i}.$$

759. Naći realni i imaginarni deo brojeva:

$$1^\circ\ \frac{3i}{i-2};\quad 2^\circ\ \frac{1+i}{2-i}(3+2i);\quad 3^\circ\ \frac{1-3i}{i+1}-\frac{i}{i+2};$$

$$4^\circ\ \frac{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}{3-4i};\qquad 5^\circ\ \frac{i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}.$$

760. Izvesti naznačene operacije:

$$1^\circ\ \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha};\quad 2^\circ\ \frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1};\quad 3^\circ\ \frac{(1+2i)^3-(2-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

761. Srediti jednačinu

$$\frac{x+iy}{x-iy}+\frac{x-iy}{x+iy}+4a\left(\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{x-iy}\right)=2.$$

762. Izračunati vrednost izraza:

$$1^\circ\ \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}},\ \text{ako je } z=1+i;\quad 2^\circ\ \frac{z+\bar{z}}{2z+3},\ \text{ako je } z=\frac{i-1}{2}.$$

763. Izračunati vrednost izraza $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, ako je $z_1=i$, $z_2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

764. Ako su z_1 i z_2 rešenja kvadratne jednačine $z^2-4z+13=0$, pokazati da je

$$1^\circ\ \overline{\left(\frac{z_1-z_2}{z_2+4}\right)}=\frac{z_2-z_1}{z_2+4};\quad 2^\circ\ \overline{(2z_2^2-5i)}=2z_1^2+5i;\quad 3^\circ\ \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{z_2}{z_1}.$$

765. Odrediti kompleksan broj z iz uslova $\left|\frac{z}{z+1}\right|=1$, $\frac{z}{\bar{z}}=i$.

766. Naći kompleksan broj z koji zadovoljava uslove:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3},\quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

767. Neka su $a=\alpha+i\beta$ i $z=x+iy$ dva kompleksna broja kojima u kompleksnoj ravni odgovaraju tačke $m(\alpha,\beta)$ i $M(x,y)$, i neka između njih postoji veza $z=\frac{a-1}{a-2}$. Izračunati koordinate jedne od tačaka m ili M, znajući koordinate one druge. Naći skup tačaka M kada tačka m opisuje pravu $\alpha=1$.

768. Pokazati da je

$$R_e\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\bar{a}b+a\bar{b}}{2|a|^2};\quad I_m\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\bar{a}b-a\bar{b}}{2i|a|^2}.$$

769. Pokazati da $R_e\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{3}\right)=0$ predstavlja jednačinu kruga.

770. Koju krivu opisuje tačka:

$$1^\circ\ z=\frac{1+2it}{1-it};\quad 2^\circ\ z=2e^{it}+e^{-it},$$

ako je t realan parametar?

771. Dat je kompleksan broj $z=\frac{a+tb}{c+td}$, gde je t realan parametar, a a, b, c i d kompleksni brojevi. Pokazati da tačka z definiše krug za $t\in(-\infty, \infty)$ osim u slučaju koji treba navesti.

772. Rešiti sistem jednačina

$$z_1+\overline{z}_2=1+2i,$$

$$2+iz_1+\frac{z_2}{i}=0,$$

ako je $I_m(z_2)=-\frac{6+\sqrt{6}}{2}$.

773. Ako se tačka z' nalazi u poluravni $R_e(z')>1$, pokazati da se tačka $z=\frac{1}{z'}$ nalazi u krugu $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

774. Neka je $0<a<2$. Ako kroz tačku 1 povučemo tetive dužine a kruga $|z|=1$, koje leže simetrično prema realnoj osi, pokazati da je nejednačina

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}<\frac{4}{a}$$

zadovoljena za sve tačke oblasti koja je ograničena ovim tetivama delom kruga $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, koji se nalazi između ovih tetiva.

775. Dokazati, ako je $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ da je

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

776. Dati geometrijsko tumačenje sledećih jednakosti:

$$1^\circ\ I_m\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0; \qquad 2^\circ\ R_e\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0.$$

Odrediti familije krivih linija zadatih jednačinama:

777. $$1^\circ\ R_e\left(\frac{1}{z}\right)=c; \qquad 2^\circ\ I_m\left(\frac{1}{z}\right)=c,\ c\in(-\infty, \infty).$$

778. $1^\circ\ R_e(z^2)=c; \qquad 2^\circ\ I_m(z^2)=c,\ c\in(-\infty, \infty).$

779. $1^\circ\ \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda,\ (\lambda>0); \qquad 2^\circ\ \arg\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\alpha,\ \alpha\in(-\pi, \pi).$

780. Pokazati da je izraz $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ realan broj, ako je $|z_1|=|z_2|=1$.

781. Dokazati da se svaki kompleksan broj $z\neq-1$ čiji je moduo 1, može napisati u obliku $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, gde je t realan broj.

782. Odrediti položaj tačke z u odnosu na tačke a, b i c ako je

$$\frac{c-a}{z-a}:\frac{c-b}{z-b}=-1.$$

783. Dokazati, ako je $z_1+z_2+z_3=0$ i $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, da su tačke z_1, z_2 i z_3 temena ravnostranog trougla upisanog u jediničnom krugu.

784. Dokazati ako je $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ i $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, da su tačke z_1, z_2, z_3 i z_4 ili temena pravougaonika ili se dve i dve poklapaju.

785. Ako su tačke z_1, z_2, z_3 temena jednog ravnostranog trougla, proveriti relaciju $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

786. Tačke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ leže sa jedne strane neke prave koja prolazi kroz koordinatni početak. Dokazati da isto važi i za tačke $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ (pokazati u odnosu na koju pravu) i da je: $z_1+z_2+\cdots+z_n\neq 0$; $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\neq 0$.

787. Dokazati ako je $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$, da proizvoljna prava koja prolazi kroz koordinatni početak, razdvaja tačke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ukoliko te tačke ne leže na toj pravoj.

788. Izračunati:

1° $(1+i\sqrt{3})^3$; 2° $(1-i\sqrt{3})^6$; 3° $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$; 4° $(1+i)^{10}$.

789. Pokazati da je $(1+i)^{4k}$ realan a $(1+i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj, ako je k prirodan broj.

790. Pokazati da je: $\overline{\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n}=\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{-n}$.

791. Odrediti realni i imaginarni deo broja $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, gde je n prirodan broj.

792. Pokazati da su sve nule sledećih polinoma realne:

1° $R_e[(x+i)^n]$; 2° $I_m[(x+i)^n]$;

3° $R_e[(1+ix)^n]\pm I_m[(1+ix)^n]$;

4° $R_e[\bar{a}(1+ix)^n]$; 5° $I_m[\bar{a}(1+ix)^n]$.

793. Dokazati nejednakost

$$|(1+z)^n-1|<(1+|z|)^n-1.$$

794. Ako tačke z_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n$, pripadaju delu ravni ograničenom kracima koji zaklapaju ugao φ takav da je $0<\varphi<\pi$, dokazati nejednakost

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\right| \geqslant \cos\frac{\varphi}{2}\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu|.$$

795. Ako je n prirodan broj, pokazati da je:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$$

i

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

796. Pokazati da je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$, znajući da je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

797. Pokazati da je:

1° $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$; 2° $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$;

3° $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}=-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; 4° $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}=-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

798. Dokazati jednakosti:

1° $$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

2° $$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx=\frac{\cos\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Koristeći Moivreov obrazac dokazati jednakosti:

799. 1° $$\sin nx=\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+$$
$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x-\binom{n}{7}\cos^{n-7}x\sin^7 x+\cdots$$

2° $$\cos nx=\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-$$
$$-\binom{n}{6}\cos^{n-6}x\sin^6 x+\cdots$$

800. 1° $\operatorname{tg} nx = \dfrac{\binom{n}{1}\operatorname{tg} x - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 x + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 x - \cdots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 x + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 x - \cdots}$;

2° $\left(\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\varphi}{1 - i\operatorname{tg}\varphi}\right)^n = \dfrac{1 + i\operatorname{tg} n\varphi}{1 - i\operatorname{tg} n\varphi}$.

Dokazati sledeće jednakosti:

801. $\dfrac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi} = 1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + \binom{n}{4}\operatorname{tg} 4\varphi - \cdots + A,$

gde je $A = (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{tg}^n \varphi$ za n parno i

$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1}\varphi$ za n neparno.

802. $\dfrac{\sin n\varphi}{\cos^n \varphi} = \binom{n}{1}\operatorname{tg}\varphi - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\varphi + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5\varphi + \cdots + A,$

gde je $A = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1}\varphi$ za n parno i

$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}^n \varphi$ za n neparno.

803. Izračunati zbirove:

1° $1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx$;

2° $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2n-1)x$;

3° $\cos x + a\cos 3x + \cdots + a^n \cos(2n+1)x$;

4° $1 + 2a\cos x + 2a^2\cos 2x + \cdots + 2a^n \cos nx$.

804. Izračunati zbirove:

1° $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha$;

2° $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cdots + \sin^2 n\alpha$;

3° $\cos\alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \cdots + C_n^{n-1}\cos n\alpha + \cos(n+1)\alpha$;

4° $\sin\alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + \cdots + C_n^{n-1}\sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha$.

Dokazati jednakosti:

805. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{n}\right) + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{n-1}{n}\pi\right) = n\operatorname{ctg} nx.$

806. $\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)=\frac{\sin nx}{2^{n-1}}$.

Izraziti preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova sledeće izraze:

807. 1° $\sin^3 x$; 2° $\sin^4 x$; 3° $\sin^5 x$.

808. 1° $\cos^3 x$; 2° $\cos^4 x$; 3° $\cos^5 x$.

809. Dokazati identitet:

$$2^{2n}\cos^{2n}x=$$
$$=2\cos 2nx+2\binom{2n}{1}\cos(2n-1)x+\cdots+2\binom{2n}{n-1}\cos 2x+\binom{2n}{n}.$$

810. Stavljajući u prethodnom zadatku $x=\frac{\pi}{2}-x$ dokazati jednakost

$$2^{2n}\sin^{2n}x=\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{n+k}2\binom{2n}{k}\cos(2n-2k+1)+\binom{2n}{n}.$$

811. Naći kvadratne korene brojeva:

1° $\sqrt{i}$; 2° $\sqrt{3+4i}$; 3° $\sqrt{3-4i}$; 4° $\sqrt{-7+24i}$.

812. Izračunati sledeće korene:

1° $\sqrt[3]{-3}$; 2° $\sqrt[4]{-4}$; 3° $\sqrt[6]{1}$; 4° $\sqrt[6]{27}$; 5° $\sqrt[6]{-64}$.

813. 1° $\sqrt[3]{2i}$; 2° $\sqrt[3]{-2i}$; 3° $\sqrt[5]{32i}$; 4° $\sqrt[6]{-\frac{3}{2}i}$.

814. 1° $\sqrt[3]{-1+i}$; 2° $\sqrt[3]{-2+2i}$; 3° $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$;

4° $\sqrt[5]{1+i}$; 5° $\sqrt[7]{3+2i}$.

815. Pokazati da je

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}.$$

816. Rešiti jednačinu $z=\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

817. Naći realni i imaginarni deo razlike korena jednačina:

1° $x^2+(1-2i)x-2i=0$; 2° $x^2+(5-2i)x+5(1-i)=0$.

818. Data je jednačina $z^2-2az+b=0$, gde su a i b kompleksni brojevi. Pokazati da su potrebni i dovoljni uslovi da oba korena ove jednačine leže na jediničnom krugu da je: $|b|=1$, $|a|<1$, $\arg(b)=2\arg(a)$.

819. Dokazati da obe vrednosti $\sqrt{z^2-1}$ leže na pravoj, koja prolazi kroz koordinatni početak a paralelna je simetrali unutrašnjeg ugla sa temenima u tačkama -1, 1 i z, povučenoj iz temena z.

Rešiti jednačine:

820. 1° $x^3-8=0$; 2° $x^3+8=0$; 3° $x^4+5=0$; 4° $x^4-81=0$; 5° $x^4+64=0$.

821. 1° $(\bar{z}-i)^3=1-i$; 2° $z^5-3+4i=0$; 3° $z^6-1+i=0$; 4° $z^n=\bar{z}$.

822. 1° $(x+i)^n+(x-i)^n=0$. 2° $(z+1)^n-(z-1)^n=0$.

823. $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\dfrac{1+ia}{1-ia}$. **824.** $(z^2-2)^n+z^n=0$.

825. $x^n-nax^{n-1}-C_n^2a^2x^{n-2}-\dots-a^n=0$.

Dokazati identitete:

826. $x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos 72^\circ+1)(x^2-2x\cos 144^\circ+1)$.

827. $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{k=n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1\right)$.

828. $x^{2n}+1=\prod\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi+1\right)$.

829. $x^{2n+1}-1=(x-1)\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$.

830. 1° $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

2° $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}=\dfrac{(-1)^{n/2}}{2^n}$ ako je n parno.

831. Dva temena ravnostranog trougla su u tačkama $z_1=1$ i $z_2=2+i$. Naći treće teme.

832. Tri usastopna temena paralelograma su u tačkama z_1, z_2 i z_3. Odrediti položaj četvrtog temena.

833. U krugu sa poluprečnikom R i centrom u tački $C=a+bi$ upisan je pravilan n-tougaonik, čije je jedno teme u tački $z_0=a+(b+R)i$. Odrediti položaj ostalih temena.

834. Tačke z_1 i z_2 su dva susedna temena pravilnog n-tougaonika. Naći teme z_3 susedno temenu $z_2(z_3\neq z_1)$.

835. Sastaviti jednačine čiji bi koreni bili brojevi:

1° $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}$, ..., $\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$;

2° $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1}$; $\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$.

836. Dokazati da je za proizvoljan ceo pozitivan broj n zbir

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots+\frac{1}{n^2} \text{ veći od}$$

$$\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6} \text{ i manji od}$$

$$\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6}.$$

837. 1° Na krugu opisanom oko pravilnog n-tougaonika $A_1 A_2 \ldots A_n$ uzeta je tačka M. Dokazati da zbir kvadrata rastojanja te tačke do svih temena tog n-tougaonika ne zavisi od položaja te tačke na krugu i da iznosi $2nR^2$, gde je R poluprečnik kruga.

2° Dokazati da zbir kvadrata rastojanja od proizvoljne tačke M, uzete u ravni pravilnog n-tougaonika $A_1 A_2 \ldots A_n$ do svih njegovih temena zavisi samo od rastojanja l tačke M od centra O mnogougaonika i da je jednak $n(R^2+l^2)$, gde je R poluprečnik kruga opisanog oko n-tougaonika.

3° Dokazati da tvrđenje 2° ostaje u važnosti i u tom slučaju kada tačka M ne leži u ravni n-tougaonika $A_1 A_2 \ldots A_n$.

838. Na luku $A_1 A_n$ kruga opisanog oko pravilnog n-tougaonika $A_1 A_2 \ldots A_n$ uzeta je tačka M. Dokazati tvrđenje:

1° Ako je n parno, onda je zbir kvadrata rastojanja od tačke M do temena n-tougaonika sa parnim indeksima jednak zbiru kvadrata rastojanja te tačke do temena sa neparnim indeksima.

2° Ako je n neparno, onda je zbir rastojanja od tačke M do temena n-tougaonika sa parnim indeksima jednak zbiru rastojanja od te tačke do neparnih temena.

839. Ako je poluprečnik kruga, opisanog oko pravilnog n-tougaonika $A_1 A_2 \ldots A_n$ jednak R dokazati da je:

1° Zbir kvadrata svih dijagonala n-tougaonika jednak $n^2 R^2$,

2° Zbir svih strana i dijagonala n-tougaonika iznosi $n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} R$,

3° Proizvod svih strana i svih dijagonala n-tougaonika iznosi $n^{\frac{n}{2}} R^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

840. Naći zbir 50-ih stepena svih strana i svih dijagonala pravilnog 100-ugaonika, upisanog u krug poluprečnika R.

841. Dokazati da u trouglu čije su strane izražene celim brojevima ne postoje uglovi različiti od 60°, 90° i 120° i merljivi pravim uglom.

842. 1° Dokazati da za proizvoljno neparno $p>1$ ugao $\arccos \frac{1}{p}$ ne može imati racionalan broj stepeni.

2° Dokazati da ugao $\operatorname{arctg} \frac{p}{q}$, gde su p i q različiti celi pozitivni brojevi, ne može imati racionalan broj stepeni.

Izračunati sledeće vrednosti:

843. 1° $\ln(-e)$; 2° $\ln(-2)$; 3° $\ln i$; 4° $\ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

844. 1° 2^i; 2° i^i; 3° $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$.

845. 1° $\operatorname{tg} \frac{\pi i}{2}$; 2° $\sin(x+iy)$; 3° $\operatorname{arctg} xi$.

Glava III

LINEARNA ALGEBRA

§ 1. Determinante

1° Definicija determinante

Neka su $a_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ realni ili kompleksni brojevi. *Determinanta* n-tog reda, od elemenata a_{ij}, je zbir svih sabiraka oblika

$$(-1)^s a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

gde je s broj inverzija permutacije $j_1 j_2 \ldots j_n$. (Broj takvih sabiraka je $n!$ tj. jednak je broju permutacija skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, pošto su $j_1 j_2 \ldots j_n$ različiti elementi ovog skupa).

Determinanta se označava sa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prema tome je

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \ldots j_n)} (-1)^s a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}.$$

Specijalno za $n = 2$ i $n = 3$ imamo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

2° Minor i algebarski komplement

Elementi $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{in}$ su elementi i-te vrste, a elementi $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots a_{nj}$ su elementi j-te kolone. Neka je $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Elementi determinante D koji se nalaze na preseku k vrsta i k kolona obrazuju determinantu k-tog reda koja se zove *minor k-tog reda* determinante D. Minor determinante D koji se dobija odbacivanjem vrsta i kolona u kojima se nalaze elementi minora M zove se *komplement minora M* i označava se sa M'. *Algebarski komplement* minora M je determinanta

$$A = (-1)^s M'$$

gde je $s = i_1 + i_2 + \ldots, i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$ a $i_1, i_2, \ldots, i_k$ i $j_1, j_2, \ldots, j_k$ su redni brojevi vrsta odnosno kolona u kojima se nalaze elementi minora M.

Specijalno za minor prvog reda $M = a_{ij}$ algebarski komplement je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

gde je M_{ij} komplement minora a_{ij}.

3° Laplaceova teorema

Neka je u determinanti n-tog reda D proizvoljno izabrano k vrsta (k kolona $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Tada je zbir proizvoda svih minora k-tog reda, iz izabranih k vrsta (k kolona), sa njihovim algebarskim komplementima, jednak vrednosti determinante Specijalno za $k = 1$ imamo:

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

4° Osobine determinanata

1) Vrednost determinante se ne menja ako vrste zamene mesta sa odgovarajućim kolonama.
2) Prilikom permutacije dve susedne vrste (kolone) determinanta menja znak.
3) Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima druge vrste (kolone), determinanta je jednaka nuli.
4) Zajednički činilac jedne vrste (kolone) može da se izdvoji ispred determinante.
5) Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste (kolone), umnoženi zajedničkim faktorom.
6) Ako su svi elementi i-te vrste predstavljeni u obliku

$$a_{ij} = b_j + c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

tada je determinanta jednaka zbiru dve determinante kod kojih su vrste u obe, osim i-te, jednake vrstama date determinante a i-ta vrsta jedne determinante jednaka je b a druge c_j.

5° Množenje determinanata

Važi jednakost

$$\det(a_{ij}) \cdot \det(b_{ij}) = \det(c_{ij})$$

gde je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Mogu li sledeći proizvodi biti sabirci u determinanti i ako mogu sa kakvim su znakom:

846. $a_{12} \quad a_{13} \quad a_{23} \quad a_{32}$.

847. $a_{43} \quad a_{21} \quad a_{35} \quad a_{12} \quad a_{54}$.

848. $a_{61} \quad a_{23} \quad a_{45} \quad a_{36} \quad a_{12} \quad a_{54}$.

849. $a_{27} \quad a_{36} \quad a_{51} \quad a_{74} \quad a_{25} \quad a_{43} \quad a_{62}$.

850. $a_{12} \quad a_{23} \ldots a_{n-1,n} a_{kk} \quad (1 < k < n)$.

851. Sa kakvim je znakom u determinanti n-tog reda proizvod elemenata na glavnoj dijagonali (proizvod $a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$)?

852. Sa kakvim je znakom u determinanti n-tog reda proizvod članova na sporednoj dijagonali (proizvod $a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \dots a_{n1}$)?

Koristeći samo definiciju determinante izračunati determinante:

853. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

854. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Izračunati determinante

855. $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$. **856.** $\begin{vmatrix} m^2 & mn \\ mn & n^2 \end{vmatrix}$. **857.** $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$.

858. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **859.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$.

860. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$. **861.** $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

862. $\begin{vmatrix} 1 & \log_{(b)} a \\ \log_{(a)} b & 1 \end{vmatrix}$. **863.** $\begin{vmatrix} \dfrac{1+a^2}{1-a^2} & \dfrac{2a}{1-a^2} \\ \dfrac{2a}{1-a^2} & \dfrac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix}$.

864. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **865.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$. **866.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.

Koristeći Laplaceovu teoremu izračunati determinante:

867. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$. **868.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

869. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$

870. $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$

871. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}.$

Pokazati da je:

872. $$\begin{vmatrix} a_{11}\dots & a_{1k} & 0\dots & 0 \\ a_{21}\dots & a_{2k} & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1}\dots & a_{k+1,k}\dots & a_{k+1,k+1}\dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\dots & a_{nk} & a_{n,k+1}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2}\dots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2}\dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & a_{n,k+2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

873. $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0\dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12}\dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0\dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22}\dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0\dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2}\dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2}\dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Izračunati determinante:

874. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$

875. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$

876. $\begin{vmatrix} 13647 & 13657 & 17844 \\ 28423 & 28433 & -19371 \\ 28423 & 28433 & -19372 \end{vmatrix}.$

877. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

878. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

879. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & -7 \\ -4 & 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}$.

880. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

881. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$.

882. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \\ 64 & 125 & 216 & 343 \end{vmatrix}$.

883. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

884. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

885. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

886. $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 & -14 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 21 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 16 & 4 & 5 & -9 & 5 \\ 11 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

887. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Izračunati determinante:

888. $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, gde je $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

889. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, gde je $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Rešiti jednačine:

890. $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$

891. $\begin{vmatrix} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \sin x \cos x \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \cos x \sin x \\ 1 & a \quad 1-a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}.$

Izračunati sledeće determinante:

892. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. **893.** $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$. **894.** $\begin{vmatrix} a+b & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}$.

895. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$. **896.** $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

897. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$. **898.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

899. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$. Generalisati.

900. $\begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^2\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha \\ \sin^3\beta & \sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta & \cos^3\beta \\ \sin^3\gamma & \sin^2\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\cos^2\gamma & \cos^3\gamma \\ \sin^3\delta & \sin^2\delta\cos\delta & \sin\delta\cos^2\delta & \cos^3\delta \end{vmatrix}$.

Ne razvijajući determinante dokazati sledeće identitete:

901. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

902. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

903. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$.

Dokazati sledeće identitete:

904. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(b-a)(a-c)$.

905. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

906. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (xy+xz+yz)(y-x)(z-x)(z-y).$$

907. $$\begin{vmatrix} 1 & a^4 & a^3 \\ 1 & b^4 & b^3 \\ 1 & c^4 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+a^2bc+ab^2c+abc^2).$$

908. $$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

909. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

910. $$\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

911. $$\begin{vmatrix} -\dfrac{bc}{b+c} & b & c \\ a & -\dfrac{ca}{c+a} & c \\ a & b & -\dfrac{ab}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{(bc+ca+ab)^3}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

912. $$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y).$$

913. $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \\ \cos 3\alpha & \cos 3\beta & \cos 3\gamma \end{vmatrix} = 4(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta-\cos\gamma)(\cos\gamma-\cos\alpha)\times m;$$
$$m = \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

914. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd.$$

915. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(a-b)(c-b)(d-c).$$

916. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

917. $$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\,[(a+b)^2-4x^2].$$

918. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = -3(x^2-1)(x^2-4).$$

919. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ 1 & \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Izračunati determinante:

920. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

921. $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

922. $$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

923. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

924. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Proveriti sledeće rezultate:

925. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2^{n+1}-1.$$

926. $$I_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5I_{n-1} - 6I_{n-2} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

927. $$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} = x + (n-1)a(n-a)^{n-1}.$$

928. Izračunati *Vandermondovu* determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

929. Koristeći samo definiciju, izračunati determinantu.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dokazati sledeće identitete:

930. $$\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \dots & 4 & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \dots & 4 & 5 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \dots & 7 & 3 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2n-1 & n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!,$$

(na sporednoj dijagonali stoje n prvih neparnih brojeva).

931. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & a \end{vmatrix} = a^n - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 a^{n-4} - \dots + (-1)^k C_{n-k}^k a^{n-2k}.$$

932. $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos nx.$$

933. $D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}$, gde je:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

934. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 \dots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 \dots & (n+1)^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 \dots & (n+1)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots & \cdot \\ 1 & 2^n & 3^n \dots & (n+1)^n \end{vmatrix} = 1!\ 2!\ 3!\ \dots n!$$

935. $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} b_1 & a_1^{n-2} b_1^2 & \dots b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1} b_2 & a_2^{n-2} b_2^2 & \dots b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2} b_{n+1}^2 & \dots b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{n+1 \geq i > k \geq 1} (a_k b_i - a_i b_k).$$

936. $$\begin{vmatrix} 1+a_1 b_1 & 1+a_1 b_2 & \dots & 1+a_1 b_n \\ 1+a_2 b_2 & 1+a_2 b_2 & \dots & 1+a_2 a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+a_n b_n & 1+a_n b_n & \dots & 1+a_n b_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (n>2).$$

937. Ne razvijajući determinantu dokazati identitet:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

938. Determinanta:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & a_1^{\alpha_2} & \cdots & a_1^{\alpha_n} \\ a_2^{\alpha_1} & a_2^{\alpha_2} & \cdots & a_2^{\alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^{\alpha_1} & a_n^{\alpha_2} & \cdots & a_n^{\alpha_n} \end{vmatrix},$$

se naziva *uopštena Vandermondova determinanta.* Dokazati da je $D_n > 0$ ako je $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ i $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots \alpha_n$, gde su a_i pozitivni a α_i realni brojevi ($i = 1, \ldots, n$).

939. Determinanta

$$I_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & a_n \end{vmatrix}$$

naziva se *Jacobieva determinanta.* Dokazati identitet

$$I_n = a_n I_{n-1} + b_{n-1} c_n I_{n-2}.$$

940. Dokazati identitet

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

gde $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ predstavlja zbir svih mogućih proizvoda dobijenih iz proizvoda $a_1 a_2 \ldots a_n$ izbacivanjem para susednih činilaca, ili nekoliko parova činilaca sa susednim indeksima a ako je n parno, onda se odbacivanjem svih n činilaca dobija 1. U ovaj zbir ulazi i proizvod svih elemenata. Ova determinanta se naziva *kontinuanta.*

941. Dokazati da je determinanta

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

jednaka n-tom broju *Fibonaccievog niza* 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... u kojem je svaki broj počinjući od trećeg jednak zbiru dva prethodna broja. Ova determinanta je specijalan slučaj kontinuante.

Rešiti jednačine:

942. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

943. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

944. Znajući da su brojevi 546, 273 i 169 deljivi sa 13, pokazati da je i sledeća determinanta

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

deljiva sa 13 ne razvijajući je.

945. Brojevi 20604, 53227, 25755, 20927 i 78421 su deljivi sa 17. Dokazati bez razvijanja da je determinanta

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

takođe deljiva sa 17.

946. Pokazati:

1° Ako tri prave

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

imaju jednu zajedničku tačku, da mora postojati uslov

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2° Ako tri tačke (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) leže na jednoj pravoj, da mora postojati uslov

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Izvest sličan uslov da četiri tačke leže u jednoj ravni.

947. Dokazati da se jednačina prave koja prolazi kroz dve date tačke može napisati u obliku

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

948. Neka je data funkcija $f(x)$ i dve tačke njenog grafika $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$. Pokazati da je

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} = 0,$$

jednačina tetive koja prolazi kroz tačke A i B.

949. Date su dve kvadratne jednačine:

$$a\,x^2 + bx + c = 0$$
$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0.$$

Ako ove jednačine imaju jedan zajednički koren pokazati da onda mora postojati uslov

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Izvesti sličan uslov za sistem

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$
$$b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0.$$

950. Pokazati ako tri kruga

$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

imaju jednu zajedničku tačku, da mora postojati uslov

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2. Sistemi linearnih jednačina

1° Saglasni i nesaglasni sistemi

Neka je dat sistem

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

od m jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Rešenje sistema (1) je svaka n-torka brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takva da za $x_k = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jednačine (1) prelaze u brojne jednakosti. Ako sistem nema nijedno rešenje kaže se da je *protivrečan*, a ako ima bar jedno rešenje, kaže se da je *saglasan*. Dva sistema linearnih jednačina su *ekvivalentna* ako je svako rešenje jednog rešenje i drugog i obrnuto.

Sistem (1) je *homogen* ako je $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Ako je bar jedan od b_i različit od nule sistem je *nehomogen*.

2° Gaussov postupak

Neka je u sistemu (1) $a_{11} \neq 0$. Deobom prve jednačine sa a_{11} i zamenom x_1 iz nje u ostale dobija se ekvivalentan sistem

$$(1') \qquad \begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_2 + \cdots + a'_{1n} = b'_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n} = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn} = b'_m. \end{cases}$$

Ako je, dalje, $a'_{22} \neq 0$ slično se dobija ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad a''_{13}x_3 + \cdots + a''_{1n}x_n &= b''_1 \\ x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a''_{m3}x_3 + \cdots + a''_{mn}x_n &= b''_m \end{aligned}$$

itd.

Ovim postupkom sistem (1) se svodi na ekvivalentan sistem:

$$\begin{array}{l} x_1 + \qquad\qquad\qquad \beta_{1k+1}x_{k+1} + \cdots \beta_{1n}x_n = \gamma_1 \\ \quad x_2 + \qquad\qquad \beta_{2k+1}x_{k+1} + \cdots \beta_{2n}x_n = \gamma_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_k + \beta_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + \beta_{kn}x_n = \gamma_k \end{array}$$

ili sistem:

$$\begin{array}{l} x_1 + \qquad\qquad = \gamma_1 \\ \quad x_2 + \qquad\qquad = \gamma_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_n = \gamma_n. \\ \qquad\qquad 0 = \gamma_{n+1} \\ \qquad\qquad 0 = \gamma_m. \end{array}$$

U prvom slučaju sistem je uvek saglasan jer mu je rešenje na primer: $x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2, \ldots, x_k = \gamma_k$, $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$. U drugom slučaju sistem je saglasan samo ako je $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+2} = \cdots = \gamma_m = 0$. Tada je jedinstveno rešenje: $x_1 = \gamma_1$, $x_2 = \gamma_2, \ldots, x_n = \gamma_n$.

3° Cramerovo pravilo

Neka je u sistemu (1): $m = n$, $D = \det[a_{ij}]$ i D_k determinanta koja se dobija od D kada se umesto k-te kolone u D stave slobodni članovi $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

1) Ako je $D \neq 0$ tada sistem (1) ima jedinstveno rešenje

$$x_k = \frac{D_k}{D} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

2) Ako je $D = 0$ i bar jedna $D_k \neq 0$ sistem je protivurečan.

3) Ako je $b_k = 0\,(k = 1, \ldots, n)$, tj. ako je sistem homogen sa n jednačina i n nepoznatih tada on uvek ima tzv. trivijalno rešenje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Da bi ovaj sistem imao netrivijalnih rešenja potrebno je i dovoljno da je

$$D = 0.$$

Rešiti sisteme jednačina:

951. $2x + 5y = 1$, $3x + 7y = 2$.

952. $2x - 3y = 4$, $4x - 5y = 10$.

953. $4x + 5y = 2$, $8x + 10y = 4$.

954. $3x - 2y = 2$, $6x - 4y = 3$.

955. $x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta$, $x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta$.

956. $x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y = \sin(\alpha + \beta)$, $x - y\,\mathrm{tg}\,\alpha = \cos(\alpha + \beta)$.

Odrediti parametar k tako da sistem jednačina bude protivrečan:

957. $kx + 3y = 3$, $x - y = 7$.

958. $3kx - 4y = 9$, $3x - ky = 1$.

959. Za koju će vrednost parametra t sistem jednačina

$$x\cos t + y\sin t = 1$$
$$x + y - 2 = 0$$

biti protivrečan?

960. Diskutovati vrednosti izraza $x+2y+3$ za one vrednosti x i y koje zadovoljavaju jednačine

$$4x + 9y = a$$
$$6x + ay = -9.$$

Rešiti i diskutovati rešenja sistema jednačina:

961. $ax + 4y = 2$
$9x + ay = 3.$

962. $mx + 6y = 5m - 3$
$2x - (m-7)y = 29 - 7m.$

963. $(a-2)x + (a^2-4)y = a^2 + 2a$
$(a-2)x - (a-2)y = 3.$

964. $3x + (1+k)y = 2k - 1$
$2x + (1-k)y = -(2k+1).$

965. $x\cos\alpha + y\cos\beta = \cos\gamma$
$x\sin\alpha + y\sin\beta = \sin\gamma.$

966. $ax - 9y = 6$
$10x - by = 10.$

967. $2(a-b)x + (a-b)y = 2a + b$
$(a-b)x + 2(a-b)y = a + 2b.$

968. $ax + by = ad.$
$bx + cy = bd.$

Odrediti parametre k i m, tako da jednačine budu zavisne:

969. $kx + y = 2$
$4x + 2y = m.$

970. $x + ky = 8$
$2kx + 2y = m.$

Rešiti sledeće sisteme jednačina:

971. $x + 2y - 3z = 0$
$2x + 3y + z = 0.$

972. $2x - y - 5z = 0$
$4x - 2y - 10z = 0.$

973. $2x - 3y + z = 0$
$x + y + z = 0$
$3x + y - 2z = 0.$

974. $x - y + z = 0$
$2x - 2y + 2z = 0$
$3x - 3y + 3z = 0.$

975. $x + y + z = 0$
$3x - y + 2z = 0$
$x - 3y = 0.$

976. $2x - 3y + z + 1 = 0$
$x + y + z = 6$
$3x + y - 2z = -1.$

977. $2x - 3y + z = 2$
$3x - 5y + 5z = 3$
$5x - 8y + 6z = 5.$

978. $3x - y + 3z = 4$
$6x - 2y + 6z = 1$
$5x + 4y = 2.$

979. $5ax-4by+2cz=3abc,$
$3ax-6by+5cz=2abc,$
$2ax-3by+cz=0.$

980. $x_1+2x_2+3x_3-4x_4=11,$
$2x_1+x_2+5x_3+x_4=3,$
$3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-1,$
$x_1+x_2+5x_3+x_4=5.$

981. $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=13,$
$2x_1+x_2+2x_3+3x_3+2x_4+4x_5=10,$
$2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=11,$
$2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5=6,$
$2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5=3.$

982. Naći zajedničko rešenje sistema:

$$3x+2y-5=0$$
$$x+y=2$$
$$2x-y=1.$$

983. Odrediti parametar α tako da sistem

$$3x+\alpha y-5=0$$
$$x+y=2$$
$$\alpha x+2y=4$$

ima rešenja, a zatim naći ta rešenja.

Odrediti parametar λ, tako da sistemi jednačina imaju rešenja:

984. $4x+y=5$
$3x+2y=5$
$6x+2y+2\lambda=\lambda^2.$

985. $2x-y=\lambda$
$x-2y=3$
$\lambda x-4y=7.$

986. Pokazati da sistem jednačina

$$x+my+m^2+m^3=0$$
$$x+m^2y+m^3+m=0$$
$$x+m^3y+m+m^2=0$$

ima rešenje za svaku vrednost parametra m.

Rešiti sisteme jednačina:

987. $x+zy=1$
$3x+2y=3$
$y-x=z.$

988. $(1+x)y-zx=-1$
$xz-xy=1$
$6y-6z=x-5.$

989. Odrediti parametar a tako da sistem

$$x+y+z=0$$
$$ax+4y+z=0$$
$$6x+(a+2)y+2z=0$$

ima rešenja različita od trivijalnih, a zatim naći ta rešenja.

990. Odrediti parametar m tako da sistem

$$2x+6y+(m+6)z=0$$
$$-x+7y+5z=0$$
$$mx+5y+13z=0$$

ima rešenja različita od trivijalnih.

Diskutovati rešenja sledećih sistema jednačina za razne vrednosti parametara:

991. $x+y+z=6$
$ax+4y+z=5$
$6x+(a+2)y+2z=13.$

992. $2ax-23y+29z=4$
$7x+ay+4z=7$
$5x+2y+az=5.$

993. $ax-3y+5z=4$
$9x-7y+8az=0$
$x-ay+3z=12.$

994. $\lambda x+2y+z=4$
$2x+y+2z=5$
$3x+2y+3z=12.$

995. $\lambda x+y+z=1$
$x+\lambda y+z=\lambda$
$x+y+\lambda z=\lambda^2.$

996. $x+y+z=a$
$x+(1+a)y+z=2a$
$x+y+(1+z)a=0.$

997. $ax+y-z=1$
$x+ay-z=1$
$x-y-az=1.$

998. $ax+2z=2$
$5x+2y=1$
$x-2y+bz=3.$

999. $ax+4y+z=0$
$2y-3z-1=0$
$2x-bz+2=0.$

1000. $ax+y+z=4$
$x+cy+z=3$
$x+2cy+z=4.$

1001.
$$\begin{aligned} ax+by+z&=1\\ x+aby+z&=b\\ x+by+az&=1. \end{aligned}$$

1002.
$$\begin{aligned} x+ay+a^3z+a^4&=0\\ x+by+b^3z+b^4&=0\\ x+cy+c^3z+c^4&=0. \end{aligned}$$

1003.
$$\begin{aligned} x+2y+z+t&=0\\ 2x+y+z+2t&=0\\ x+2y+2z+t&=0\\ x+y+z+t&=0. \end{aligned}$$

1004.
$$\begin{aligned} 2x+3y-z-t&=0\\ x-y-2z-4t&=0\\ 3x+y+3z-2t&=0\\ 6x+3y-7z&=0. \end{aligned}$$

1005.
$$\begin{aligned} 5x+4z+2t&=3\\ x-y+2z+t&=1\\ 4x+y+2z&=1\\ x+y+z+t&=0. \end{aligned}$$

1006. Odrediti parametar k tako da sistem

$$\begin{aligned} kx+3y+2z&=1\\ x+(k-1)y&=4\\ 10y+3z&=-2\\ 2x-ky-z&=5 \end{aligned}$$

ima zajedničko rešenje.

1007. Za koju vrednost parametra m sistem

$$\begin{aligned} mx+y+z+t&=0\\ x+my+z+t&=0\\ x+y+mz+t&=0\\ x+y+z+mt&=0 \end{aligned}$$

ima netrivijalna rešenja.

1008. Rešiti i diskutovati rešenje sistema

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z+t&=1\\ x+\lambda y+z+t&=\lambda\\ x+y+\lambda z+t&=\lambda^2\\ x+y+z+\lambda t&=\lambda^3. \end{aligned}$$

1009. Rešiti sisteme jednačina:

$$\begin{aligned} x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n&=1\\ x_1+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n&=2\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n&=3\\ &\cdots\cdots\\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}&=n. \end{aligned}$$

1010.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1 &= 0 \\ 2x_1 + 2^2 x_2 + \cdots + 2^n x_n + 1 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n x_1 + n^2 x_2 + \cdots + n^n x_n + 1 &= 0. \end{aligned}$$

1011.
$$\begin{aligned} x_n + a_1 x_{n-1} + a_1^2 x_{n-2} + \cdots + a_1^{n-1} x_1 + a_1^n &= 0 \\ x_n + a_2 x_{n-1} + a_2^2 x_{n-2} + \cdots + a_2^{n-1} x_1 + a_2^n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + a_n x_{n-1} + a_n^2 x_{n-2} + \cdots + a_n^{n-1} x_1 + a_n^n &= 0. \end{aligned}$$

§ 3. Vektorski prostori

1° Definicija vektorskog prostora

Vektorski ili *linearni prostor* nad telom Φ je aditivna Abelova grupa $X=\{x, y, z, \ldots\}$ u kojoj je difinisano množenje sa elementima iz Φ tj. za svaki $x \in X$ i svaki $\lambda \in \Phi$ definisan je elemenat λx koji pripada X.
Pri tome su ispunjeni uslovi:

1) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \qquad (\alpha \in \Phi;\ x, y \in X)$

2) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \qquad (\alpha, \beta \in \Phi;\ x \in X)$

3) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \qquad (\alpha, \beta \in \Phi;\ x \in X)$

4) $1x=x \qquad (x \in X)$.

Elementi vektorskog prostora zovu se *vektori*. Telo Φ nad kojim je vektorski prostor X zove se *telo skalara* a njegovi elementi *skalari*. Ako je Φ telo kompleksnih brojeva onda se X zove *kompleksni vektorski prostor* a ako je Φ telo realnih brojeva onda je X *realni vektorski prostor*.

2° Linearna zavisnost

Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, tada se vektor

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

zove *linearna kombinacija* vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Kaže se da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linearno nezavisni* ako iz

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \tag{1}$$

sledi $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

Ako je jednakost (1) ispunjena bar za neko $\alpha_k \neq 0$ kaže se da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linearno zavisni*.

3° Potprostor

Neprazan skup $S \subset X$ je *potprostor* vektorskog prostora X ako je S vektorski prostor u odnosu na operacije koje su definisane u X. Neka je $S \subset X$. Skup svih linearnih kombinacija vektora iz S obrazuje potprostor $L(S)$, prostora X. Kaže se da je prostor $L(S)$ *razapet* nad skupom S.

4° Baza i dimenzija

Skup koji se sastoji od linearno nezavisnih elemenata prostora X i koji razapinje prostor X zove se *algebarska* (*Hamelova*) *baza* prostora X.

Ako baza ima n elemenata, gde je n konačan broj, kaže se da je prostor *konačno dimenzionalan* i da mu je *dimenzija* jednaka n (dim $X = n$).

Ako se baza sastoji od beskonačno mnogo elemenata kaže se da je vektorski prostor X *beskonačno dimenzionalan.*

Označimo sa X^n skup svih n-točlanih nizova $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ u kome su definisane operacije sa

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n)$$
$$\lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n).$$

X^n je n-dimenzionalni vektorski prostor, ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se nazivaju *koordinate* vektora $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. U njemu je sistem vektora $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ jedna baza.

1012. Pokazati da je skup realnih brojeva R vektorski prostor nad telom realnih brojeva.

1013. Pokazati da je skup K kompleksnih brojeva vektorski prostor nad telom kompleksnih brojeva.

1014. Skup vektora u ravni xOy, sa uobičajenom operacijom sabiranja i množenja skalara sa vektorom je vektorski prostor nad telom R realnih brojeva. Naći jednu bazu u tom prostoru.

1015. Da li skup svih vektora koji se nalaze na jednoj pravoj koja prolazi kroz kooordinatni početak, obrazuje vektorski prostor.

1016. Neka je X^3 skup svih tročlanih nizova realnih brojeva $(X^3 = \{(x, y, z): x, y, z \in R\}$. Ako se u X^3 definišu operacije sa

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in X^3, \lambda \in R)$. Da li je X^3 vektorski prostor? Naći dim X^3 i bar jednu bazu.

1017. Da li je skup svih vektora ravni, bez vektora koji su paralelni jednoj datoj pravoj, vektorski prostor?

1018. Neka je R_+ skup pozitivnih realnih brojeva u kojem je operacija „+" definisana kao obično množenje realnih brojeva a „množenje" broja a sa realnim brojem λ iz R kao a^λ. Dokazati da je R_+ realni vektorski prostor.

1019. Skup $C[a, b]$, svih neprekidnih funkcija $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ je vektorski prostor u odnosu na uobičajene operacije sabiranja funkcija i množenje funkcija brojem. Dokazati.

1020. Neka je X vektorski prostor nad telom Φ. Pokazati da je:

1° $x=y \Leftrightarrow x-y=0$;

2° $(-1)x=-x$;

3° $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$, $(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x$;

4° $\lambda x=0 \wedge \lambda\neq 0 \Rightarrow x=0$;

5° $\lambda x=\lambda y \wedge \lambda\neq 0 \Rightarrow x=y$;

6° $\lambda x=\mu x \wedge x\neq 0 \Rightarrow \lambda=\mu$;

gde su λ, $\mu\in\Phi$ i $x, y\in X$.

1021. Pokazati da vektori: $e_1=(1, 1, 1)$, $e_2=(1, 1, 2)$, $e_3=(1, 2, 3)$ obrazuju bazis u prostoru X^3 i naći koordinate vektora $x=(6, 9, 14)$ u tom bazisu.

1022. Dokazati da vektori $e_1=(1, 2, 1,)$, $e_2=(2, 3, 3)$, $e_3=(3, 7,1)$ kao i vektori: $e'_1=(3, 1, 4)$, $e'_2=(5, 2, 1)$, $e'_3=(1, 1, -6)$ obrazuju bazis u prostoru X^3 i naći vezu između koordinata proizvoljnog vektora x u ova dva bazisa.

1023. Naći vektor x iz jednačine $3(a_1-x)+2(a_2+x)=5(a_3+x)$ gde je $a_1=(2, 5, 1, 3)$, $a_2=(10, 1, 5, 10)$, $a_3=(4, 1, -1, 1)$.

1024. Dati su vektori $a_1=(4, 4, 3)$, $a_2=(7, 2, 1)$, $a_3=(4, 1, 6)$ i $b=(5, 9, \lambda)$. Odrediti λ iz uslova da se b može izraziti kao linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3.

1025. Neka su $x_i=(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ vektori prostora X^n. Pokazati da su x_i linearno zavisni ili nezavisni prema tome da li je determinanta

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12}\cdots\xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22}\cdots\xi_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2}\cdots\xi_{nn} \end{vmatrix}$$

jednaka nuli ili različita od nule.

1026. Za sistem vektora $e_1, e_2, \ldots, e_n$ linearnog prostora X je poznato:

1° Svaki vektor $x\in X$ može biti razložen u obliku

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_n e_n.$$

2° Za neki fiksni vektor $x_0\in X$ to razlaganje je jedinstveno. Dokazati da sistem $e_1, e_2, \ldots, e_n$ obrazuje bazu prostora X.

1027. Dokazati, ako je dimenzija prostora $L\subset X$ jednaka dimenziji prostora X, da je onda $L=X$.

1028. Proizvoljan deo nekog skupa linearno nezavisnih vektora je linearno nezavisan skup. Dokazati.

1029. Neka je dat sistem vektora $x_i=(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in})$ $(i=1, 2, \ldots, s)$.

1° Ako je $s<n$ i $|\xi_{ij}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}|\xi_{ij}|$, dokazati da je dati sistem linearno nezavisan.

2° Ako je $s>n$, dokazati da je dati sistem linearno zavisan.

Dokazati linearnu nezavisnost sistema funkcija:

1030. $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

1031. $1, \sin x, \cos x$.

1032. $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$.

1033. $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ $(\lambda_i\neq\lambda_j\,(i\neq j),\ \lambda_i\in R)$.

1034. $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots, x^{\lambda_n}$ $(\lambda_i\in R,\ \lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j))$.

1035. Naći bazis i dimenziju unije i preseka potprostora razapetih nad vektorima x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2, y_3:

$$x_1=(1, 2, 1, -2),\quad x_2=(2, 3, 1, 0),\quad x_3=(1, 2, 2, -3);$$
$$y_1=(1, 1, 1, 1),\quad y_2=(1, 0, 1, -1),\quad y_3=(1, 3, 0, -4).$$

1036. Naći dimenziju i bazis potprostora L razapetog nad sistemom rešenja jednačina

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4&=0\\ 5x_1-x_2-13x_3-4x_4&=0\\ 2x_1+5x_2-16x_3-7x_4&=0\\ x_1-11x_2+19x_3+10x_4&=0 \end{aligned}$$

1037. Dati su vektori

$$\begin{aligned} a_1&=(0, 1, 0, 2, 0),\\ a_2&=(7, 4, 1, 8, 3),\\ a_3&=(0, 3, 0, 4, 0),\\ a_4&=(1, 9, 5, 7, 1),\\ a_5&=(0, 1, 0, 5, 0); \end{aligned}$$

mogu li se naći brojevi c_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, 5)$, tako da vektori

$$\begin{aligned} b_1&=c_{11}a_1+c_{12}a_2+c_{13}a_3+c_{14}a_4+c_{15}a_5,\\ b_2&=c_{21}a_1+c_{22}a_2+c_{23}a_3+c_{24}a_4+c_{25}a_5,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_5&=c_{51}a_1+c_{52}a_2+c_{53}a_3+c_{54}a_4+c_{55}a_5 \end{aligned}$$

budu linearno nezavisni?

1038. Naći sve maksimalne linearno nezavisne podsisteme sistema vektora

$$a_1=(4,\ -1,\ 3,\ -2),$$
$$a_2=(8,\ -2,\ 6,\ -4),$$
$$a_3=(3,\ -1,\ 4,\ -2),$$
$$a_4=(6,\ -2,\ 8,\ -4).$$

Naći sve baze sistema vektora:

1039. $a_1=(1,\ 2,\ 0,\ 0)$,
$a_2=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$,
$a_3=(3,\ 6,\ 0,\ 0)$,

1040. $a_1=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$,
$a_2=(2,\ 3,\ 4,\ 5)$,
$a_3=(3,\ 4,\ 5,\ 6)$,
$a_4=(4,\ 5,\ 6,\ 7)$.

1041. Naći dimenziju i bazis vektorskog prostora razapetog vektorima

$a_1=(1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $a_2=(2,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_3=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$
$a_4=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $a_5=(0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

1042. Da li je skup svih vektora na pravoj $ax+by=c$ potprostor prostora X^2?

1043. Da li je skup svih vektora $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n)$, koji zadovoljavaju jednačinu $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=c$, potprostor prostora x^n?

§ 4. Matrice

1° Definicija matrice

Neka je $D=\{1,\ 2,\dots,\ m\}\times\{1,\ 2,\dots,\ n\}$. *Matrica tipa* $m\times n$ nad telom Φ je funkcija $A=A(i,j)$ dve nezavisno promenljive i i j definisana na skupu D, čije su vrednosti u Φ. Ako vrednost funkcije A u paru (i,j) označimo sa a_{ij} onda se ona može simbolično napisati u obliku jedne pravougaone tablice sa n vrsta i m kolona:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Matricu A ćemo označavati i sa $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$, a ako je $n=m$ sa $[a_{ij}]$.
Matrice $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$ i $B=[b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$ su jednake ako i samo ako je

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,\ 2,\dots,\ n;\ j=1,\ 2,\dots,\ m).$$

2° Operacije sa matricama

1) Zbir dve matrice A i B, istog tipa, je matrica C za koju je

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad (i=1,\ 2,\dots,\ n;\ j=1,\ 2,\dots,\ m).$$

2) Proizvod skalara $\lambda \in \Phi$ i matrice A je matrica C za koju je

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

3) Proizvod AB matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$ i matrice $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,p}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n,p}$ za koju je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, p).$$

4) Ako je $n = m = p$ onda je $\det(AB) = \det A \det B$.

3° Neke specijalne matrice

1) Kvadratna matrica O, čiji su svi elementi jednaki nuli, zove se *nula matrica.*

2) Kvadratna matrica D, čiji su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli, a elementi na glavnoj dijagonali različiti od nule, zove se *dijagonalna.*

3) Dijagonalna matrica E, čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici, zove se *jedinična,*

4) Matrica A^T, koja se dobija kada se vrste matrice A uzmu za kolone matrice A^T, zove se *transponovana* matrica matrice A.

5) Matrica A, kod koje je $A^T = A$, zove se *simetrična.*

6) Matrica A, kod koje je $A^T = -A$, zove se *antisimetrična.*

7) Matrica A, kod koje je $AA^T = E$, zove se *ortogonalna.*

8) Matrica $\tilde{A}$, koja se dobija kada se elementi matrice A^T zamene sa njihovim algebarskim komplementima, zove se *adjungovana* matrica matrice A.

9) Matrica A, kod koje je $\det A = 0$, kaže se da je *singularna,* a ako je $\det A \neq 0$ kaže se da je *regularna.*

10) Matrica A^{-1}, za koju je $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, zove se *inverzna* matrica matrice A. Matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je regularna. Tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

11) Matrica $\bar{A} = [\bar{x}_{ij}]$, za koju je $x_{ij} = \overline{a_{ij}}$ zove se *konjugovana* matrica matrice $A = [a_{ij}]$.

12) Matrica $A^* = \overline{A^T}$ je *hermitski konjugovana* matrica matrice A.

13) Matrica A, kod koje je $A^* = A$, zove se *hermitska.*

14) Matrica A, za koju je $AA^* = E$, zove se *unitarna.*

15) Matrica A čiji su elementi polinomi od promenljive λ, zove se *λ-matrica.*

16) Kvadratna matrica A je slična kvadratnoj matrici B, ako postoji regularna matrica T takva da je

$$A = T^{-1}BT.$$

4° Linearno preslikavanje vektorskih prostora

Neka su X i Y vektorski prostori nad telom realnih brojeva R. Neka je $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ fiksirani bazis u X.

Preslikavanje $f: X \to Y$ zove se *linearno preslikavanje* prostora X u prostor Y, ako je, za svako $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in R$,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

1) Ako je $Y = X$ onda je $y = f(x)$ vektorska linearna funkcija na X, koja se može napisati u obliku

$$y = f(x) = Ax,$$

gde je $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ matrica čije su kolone, redom, koordinate vektora $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, a x i y jednokolone matrice od koordinata vektora x i y u bazisu $\mathscr{E}$. f je jednoznačno određena matricom A u datom bazisu. Matrica A se naziva *matrica preslikavanja* f u bazisu $\mathscr{E}$.

Vektor $x\neq 0$, za koji je $f(x)=\lambda x$ $(Ax=\lambda x)$ naziva se *sopstveni vektor* preslikavanja f (matrice A), a broj λ *sopstvena* (*karakteristična*) vrednost preslikavanja f (matrice A).

Matrica $A-\lambda E$ zove se *karakteristična matrica* preslikavanja f (matrice A), a $\det(A-\lambda E)$ *karakteristični polinom* preslikavanja (matrice A).

Linearno preslikavanje kome odgovara ortogonalna (unitarna) matrica, zove se *ortogonalno* (*unitarno*) *preslikavanje*.

2) Ako je $Y=R$, onda se funkcija $f(x)$ naziva *linearna forma*. Označavaćemo je sa $l(x)$. Opšti oblik linearne forme $l(x)$ u bazisu $\mathscr{E}$ je

$$l(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k,$$

gde je $c_k=l(e_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ i $x=\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, ili, u matričnom obliku,

$$l(x)=c^T x,$$

gde su c i x jednokolone matrice od elemenata c_k i ξ_k.

$l(x)$ je jednoznačno određena vektorom c pa se operacije sa linearnim formama i linearna zavisnost linearnih formi definišu kao odgovarajući pojmovi sa vektorima. Linearne forme na beskonačno dimenzionalnim prostorima, obično se nazivaju *funkcionalima*.

3) Preslikavanje $b: X\times X\to R$, koje je linearno po oba argumenta, zove se *bilinearno preslikavanje*. Funkcija $b(x, y)$ naziva se *bilinearna forma*. Opšti oblik bilinearne forme $b(x, y)$ u bazisu $\mathscr{E}$ je:

$$b(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \eta_j,$$

gde je $a_{ij}=b(e_i, e_j)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Matrica $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ zove se *matrica bilinearne forme* $b(x, y)$.

Ako je $b(x, y)=b(y, x)$, za svako $x, y\in X$, onda se kaže da je bilinearna forma *simetrična*. Tada je njena matrica simetrična.

Funkcija $k(x, x)$ na X, koja se dobija kada se u bilinearnoj formi $b(x, y)$ umesto y stavi x, zove se *kvadratna forma* na X. U bazisu $\mathscr{E}$ je

$$k(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \xi_j.$$

5° Rang matrice

Rang matrice A je broj $r(A)$ koji je jednak redu maksimalnog minora, različitog od nule, determinante $\det A$.

Maksimalni broj linearno nezavisnih vrsta matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih kolona, i rangu matrice.

6° **Kronecker-Capelliev stav**

Sistem

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n&=b_1\\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots+a_{2n}\xi_n&=b_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\xi_1+a_{m2}\xi_2+\cdots+a_{mn}\xi_n&=b_m \end{aligned}$$

je saglasan tada i samo tada ako je $r(A)=r(B)$ gde je:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m\end{bmatrix}.$$

Ako je $r(A)=r(B)=r$ tad je sistem (1) ekvivalentan sistemu koji se iz (1) dobija uzimanjem bilo kojih r nezavisnih jednačina.

Ako su $b_i=0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ onda homogeni sistem (1) ima netrivijalnih rešenja ako i samo ako je $r(A)<n$.

1044. Date su matrice $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$. Naći 1° $A+B$; 2° $A-B$; 3° AB; 4° BA.

1045. Pokazati da je skup kvadratnih matrica n-tog reda Abelova grupa u odnosu na sabiranje matrica.

1046. Pokazati da je skup regularnih matrica n-tog reda grupa u odnosu na množenje matrica.

1047. Pokazati da je skup kvadratnih matrica n-tog reda vektorski prostor čija je dimenzija n^2.

Naći proizvod sledećih matrica:

1048. 1° $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$.

1049. 1° $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$.

1050. $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

1051. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$.

1052. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$ **1053.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$

1054. Izračunati izraze:

$$1^\circ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3; \qquad 2^\circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n; \qquad 3^\circ \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n.$$

1055. Izračunati $AB-BA$ ako je

$$1^\circ\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2^\circ\ A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

1056. Ako je $\varphi(\lambda)=-2-5\lambda+3\lambda^2$ i $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, pokazati da je $\varphi(A)=\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$.

1057. Ako je $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pokazati da je

$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & n & 1/2\,n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1058. Ako je $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

dokazati da je $M^n=M^{n-2}+M^2-E$ $(n\in N$ i $n\geqslant 3)$.

1059. Izračunati $\varphi(A)=A^4-A^2+2A-3E$ ako je

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1060. Dokazati da svaka kvadratna matrica $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dozvoljava uslov

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0,$$

gde je E jedinična matrica a 0 nula matrica drugog reda. Na osnovu toga naći $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}^n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

1061. Dokazati da je: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$, $n=1, 2\ldots$

1062. Pretpostavljajući da je $AB=BA$ dokazati formule

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2,$$

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

1063. Uz pretpostavku da je $AB-BA=E$ dokazati formulu

$$A^mB-BA^m=mA^{m-1} \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

1064. Ako je A kvadratna matrica reda n čiji su elementi 1, dokazati da je

$$\left(\frac{A}{n}\right)^k=\frac{A}{n}, \quad k\in N.$$

1065. Naći sve matrice A drugog reda koje zadovoljavaju uslov $A^2=0$. (Na desnoj strani je nula matrica drugog reda).

1066. Ako je $P(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ i $A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdots\cdot \\ 0 & 0 & 0\cdots\lambda_n \end{bmatrix}$, dokazati da je $P(A)=\begin{bmatrix} P(\lambda_1) & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & 0\cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & 0\cdots P(\lambda_n) \end{bmatrix}$.

1067. Ako je $I=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrica k-tog reda, dokazati da je $I^k=$ $=I^{k+1}=\cdots=0$.

Naći inverzne matrice sledećih matrica:

1068. 1° $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; 2° $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$; 3° $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$;

4° $D=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$.

1069. 1° $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; 2° $B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}$.

1070. $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

1071. Ako je

$$g=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{bmatrix},\qquad g^*=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{21} & g_{31} & -g_{41}\\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & -g_{42}\\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & -g_{43}\\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & -g_{44}\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{4} g_{ij}g_{kj}=\begin{cases}1, & i=k\neq 4\\ -1, & i=k=4\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

tada je $gg^*=I$. Dokazati.

Naći univerznu matricu sledećih matrica:

1072. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$.

1073. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$.

1074. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}$.

1075. $A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a\end{bmatrix}$.

1076. Ako je n prirodan broj i ako je

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad X=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

pokazati da je

$$X^{-1}AX=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix},$$

$$(X^{-1}AX)^n=X^{-1}A^nX=\begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}.$$

1077. Neka je K telo kompleksnih brojeva i M skup svih matrica oblika

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Pokazati da je korespondencija $z=a+ib \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ izomorfizam tela K sa telom $(M, +, \cdot,)$. Pokazati da je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{4n}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1078. Neka je $A=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} : a, b, c \in R\right\}$.

1° Pokazati da je $(A, +, \cdot)$ komutativan prsten, gde su „+" i „·" operacije sabiranja i množenja matrica ali da $(A, +, \cdot)$ nije telo.

2° Naći sve delitelje nule datog prstena.

3° Neka je $(V, +)$ grupa vektora trodimenzionalnog prostora u odnosu na sabiranje vektora (Njihovi počeci su u koordinatnom početku). Pokazati da su grupe $(A, +)$ i $(V, +)$ izomorfne.

4° Pokazati da je $(A, +)$ vektorski prostor nad telom realnih (kompleksnih) brojeva i naći dimenziju toga prostora.

5° Ako je $a=1$, $b=0$ i $c \in C$, gde je C skup celih brojeva, pokazati da je $(A, \cdot)$ grupa.

6° Neka je $N=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : c \text{ deljiv sa datim prirodnim brojem } n\right\}$.

Pokazati da je $(N, \cdot)$ normalni delitelj grupe $(A, \cdot)$ i naći kvocijent grupu A/N.

7° Koliki je indeks grupe $(A, \cdot)$ po podgrupi $(N, \cdot)$?

1079. Pokazati da je, za svaku matricu A, matrica AA^T simetrična matrica.

1080. Pokazati da za operaciju transponovanja matrica važe osobine:
1° $(A+B)^T=A^T+B^T$; 2° $(AB)^T=B^TA^T$; 3° $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;
4° $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

1081. Pokazati da je determinanta ortogonalne matrice jednaka ± 1.

1082. Pokazati da je matrica AA^* ermitska, za bilo koju matricu A.

1083. Pokazati da je:
1° $(A+B)^*=A^*+B^*$; 2° $(AB)^*=B^*A^*$; 3° $(\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*$;
4° $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

Rešiti sledeće matrične jednačine:

1084. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

1085. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1086. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

1087. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

1088. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

1089. $X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$.

1090. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$.

1091. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

1092. Rešiti matričnu jednačinu $(A-2E)\cdot X = A+E$, gde je E jedinična matrica a $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1093. Ako su A i B dve regularne i komutativne kvadratne matrice dokazati da 1° važe relacije

$$AB^{-1}=B^{-1}A, \quad A^{-1}B=BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

2° matrične jednačine $AX=B$ i $YA=B$ imaju jedno isto rešenje koje se može označiti sa B/A.

1094. Rešiti po X i Y matrične jednačine

$$P(A)X=Q(A),$$

$$YP(A)=Q(A),$$

gde je A kvadratna matrica i gde su $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ dva skalarna polinoma po λ. Pretpostavlja se da je det $P(A)\neq 0$.

1095. Dokazati da su matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

slične i naći transformirajuću matricu T, za koju je $B=T^{-1}AT$.

1096. Pokazati da je matrica

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$$

slična dijagonalnoj matrici B, naći tu matricu i transformirajuću matricu T.

1097. Dokazati da matrica $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ nije slična dijagonalnoj matrici.

1098. Pokazati da su slične matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1099. Pokazati da slične matrice imaju jednake determinante.

1100. Pokazati da su slične matrice istog ranga (ekvivalentne).

1101. Pokazati da je relacija sličnosti matrica relacija ekvivalencije.

1102. Pokazati da slične matrice određuju jedno te isto linearno preslikavanje u dva različita bazisa. Obrnuto, matrice jednog linearnog preslikavanja u dva različita bazisa su slične.

1103. Ako neka matrica poseduje dva svojstva od sledeća tri: realna, ortogonalna i unitarna, onda ona poseduje i treće. Dokazati.

1104. Pokazati da svaka matrica može biti predstavljena u obliku zbira simetrične i kososimetrične matrice.

1105. Matrica I se naziva *involutivna* ako je $I^2=E$. Pokazati ako neka matrica poseduje dve od osobina: simetrična, ortogonalna, involutivna, onda ona poseduje i treću.

1106. Matrica P se naziva *idempotentna* ako je $P^2=P$. Pokazati da su matrice

$$1^\circ \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{bmatrix}; \qquad 2^\circ \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}; \qquad 3^\circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

idempotentne.

1107. Ako je P idempotentna matrica, onda je $I=2P-E$ involutivna, i obrnuto, ako je I involutivna, onda je $P=1/2\,(I+E)$ idempotentna. Dokazati

1108. Pod kojim uslovima je dijagonalna matrica ortogonalna?

1109. U kom slučaju je dijagonalna matrica unitarna?

1110. Pokazati da je rotacija ravni xOy za ugao α, oko koordinatnog početka O, linearno preslikavanje ravni xOy i naći matricu preslikavanja u bazisu: $\vec{i}, \vec{j}$.

1111. Pokazati da je simetrija ravni xOy u odnosu na y-osu linearno preslikavanje ravni xOy i naći matricu tog preslikavanja.

1112. Pokazati da je rotacija trodimenzionalnog prostora za ugao $\frac{2\pi}{3}$ oko prave, zadate u pravouglom koordinatnom sistemu jednačinama $x=y=z$, linearno preslikavanje i naći matricu toga preslikavanja u bazisu: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, jediničnih vektora koordinatnih osa.

1113. Pokazati da je operacija diferenciranja linearno preslikavanje prostora svih polinoma stepena $<n$ u isti prostor. Naći matricu toga preslikavanja u bazisima:

1° $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

2° $1, x-a, \frac{(x-a)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-a)^n}{a!}$.

1114. Pokazati da postoji linearno preslikavanje koje preslikava vektore; $a_1=(2, 3, 5)$, $a_2=(0, 1, 2)$, $a_3=(1, 0, 0)$ prostora x^3, redom, u vektore: $b_1=(1, 1, 1)$, $b_2=(1, 1, -1)$, $b_3=(2, 1, 2)$, koji su zadati u bazisu u kome su i vektori a_1, a_2, a_3. Naći matricu toga preslikavanja u datom bazisu.

1115. Naći rezultat uzastopne primene linearnih transformacija:

$$x_1 = 2y_1 - y_2 + y_3,$$
$$x_2 = y_1 - 3y_2,$$
$$x_3 = 3y_1 + 2y_2 - 4y_3,$$

i

$$y_1 = 2z_1 - 3z_2 + z_3,$$
$$y_2 = 5z_1 - z_2 - z_3,$$
$$y_3 = z_1 + z_2.$$

1116. Koordinate x, y, z prelaze u koordinate x_1, y_1, z_1 pomoću formule

$$9x_1 = 4x + 7y - 4z,$$
$$9y_1 = x + 4y + 8z,$$
$$9z_1 = 8x - 4y + z.$$

Pomoću istih formula koordinate x_1, y_1, z_1 prelaze u koordinate x_2, y_2, z_2, itd. Pokazati da je $x_4 = x$, $y_4 = y$, $z_4 = z$.

1117. U trodimenzionalnom prostoru skalarni proizvod $\vec{a} \cdot \vec{x}$ je linearna forma ($\vec{a}$ fiksirani vektor a $\vec{x}$ promenljivi vektor).

1118. Pokazati da su linearne forme:

$$l_1 = 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4, \qquad l_2 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4,$$
$$l_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4, \qquad l_4 = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4,$$

linearno zavisne.

1119. Pokazati da su linearne forme:

$$l_1 = 2x_1 - 4x_2 + x_3, \quad l_2 = x_1 - 5x_2, \quad l_3 = x_1 - x_2 - x_3$$

linearno nezavisne.

Naći linearnu zavisnost među formama:

1120. $l_1 = x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4, \qquad l_2 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4,$

$l_3 = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4, \qquad l_4 = x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 13x_4.$

1121. $l_1 = x_1 + x_3 - x_4, \qquad l_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4,$

$l_3 = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4, \qquad l_4 = 14x_1 + 7x_2 + 12x_3 - 35x_4.$

1122. $l_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5, \qquad l_2 = 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5,$

$l_3 = 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 5x_5, \qquad l_4 = 8x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 2x_5.$

Da li su zavisne linearne forme:

1123. $l_1=2x_1-x_2+5x_3, \quad l_2=x_1-2x_2-3x_3,$
$l_3=6x_1+7x_2-8x_3.$

1124. $l_1=2x_1-3x_2+4x_3-5x_4, \quad l_2=x_1-2x_2+7x_3-8x_4,$
$l_3=4x_1-5x_2+6x_3-7x_4, \quad l_4=6x_1-7x_2-x_4.$

1125. Naći kanonički oblik i nedegenerisanu linearnu transformaciju promenljivih, koja dovodi na taj oblik kvadratnu formu

$$k(x,x)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

1126. Naći kanonični oblik i odgovarajuću nedegenerisanu transformaciju promenljivih za kvadratnu formu

$$k(x,x)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2+\frac{2}{3}x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4.$$

1127. Naći ortogonalnu transformaciju promenljivih koja dovodi na kanonički oblik kvadratnu formu

$$k(x,x)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_4+2x_2x_3+2x_3x_4.$$

1128. Naći ortogonalnu transformaciju, koja dovodi na kanonički oblik polinom

$$2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4+$$
$$+3x_1+3x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+1.$$

1129. Naći sopstvene vrednosti i karakteristične vrednosti linearnog preslikavanja, zadatog matricom A u datom bazisu:

$$1^\circ\ A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad 2^\circ\ A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

1130. Dokazati da slične matrice imaju jednake karakteristične polinome a samim tim i jednake karakteristične vrednosti.

1131. Naći karakteristični polinom i karakteristične vrednosti matrice

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1132. Naći karakteristični polinom matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1133. Ako su poznate karakteristične vrednosti matrice A n-tog reda, odrediti karakteristične vrednosti matrice A^2.

1134. Naći kanoničku formu i invarijantni množitelj λ-matrice

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ \lambda & \lambda^3+\lambda & \lambda-1 & \lambda^3+\lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^3+\lambda+2 & \lambda+1 & \lambda^3+2\lambda+3 \\ \lambda-1 & -3 & \lambda-3 & -6 \end{bmatrix}.$$

1135. Naći invarijantni množitelj i kanoničnu formu λ-matrice

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

1136. Naći elementarni delitelj λ-matrice

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^4-4)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nad poljem racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva.

1137. Naći invarijantne množitelje λ-matrice $A(\lambda)$ razmere 6×8 i ranga 5, ako su dati njeni elementarni delitelji $\lambda+1$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^3$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$.

1138. Naći kanoničku formu dijagonalne λ-matrice $A(\lambda)=(\lambda^2, 0, \lambda^2+\lambda, \lambda^2-1, \lambda^4-\lambda^2)$.

1139. Polinom $P(\lambda)$ minimalnog stepena kod koga je koeficijenat uz najveći stepen od λ jednak 1 i za koji je $P(A)=0$ zove se minimalni polinom matrice A. Naći minimalni polinom matrice

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1140. Naći minimalni polinom involutivne matrice.

1141. Naći minimalni polinom matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1142. Označimo sa J_l matricu k-tog reda, koja odgovara broju λ_l:

$$J_e = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 \cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots \lambda_l & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_l \end{bmatrix}$$

Jordanova matrica n-tog reda je blok matrica oblika:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

Naći Jordanovu formu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1143. Naći prirodnu formu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1144. Naći uopštenu Jordanovu formu nad poljem realnih brojeva za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1145. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

naći ortogonalnu matricu T, koja prevodi A u kanoničku ortogonalnu matricu B.

1146. Za matricu

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

naći njoj sličnu dijagonalnu matricu B i ortogonalnu matricu T, za koju je $B=T^{-1}AT$.

Naći rang sledećih matrica:

1147. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

1148. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1149. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1150. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1151. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}$.

Naći rang i bazisni minor sledećih matrica:

1152. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1153. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1154. Odrediti rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

za razne vrednosti parametra λ.

1155. Odrediti parametar λ tako da matrica

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ima najmanji rang i naći taj rang. Koliki je rang matrice za ostale vrednosti parametra λ?

1156. Dokazati ako matrica ima m vrsta i ako je njen rang r, onda s njenih proizvoljnih vrsta obrazuju matricu, čiji rang nije manji od $r+s-m$.

1157. Dokazati da proizvoljnu matricu ranga r možemo predstaviti u obliku zbira r matrica ranga jedan, ali da se ona može predstaviti u obliku zbira manjeg od r takvih matrica.

1158. Dokazati da bi matrica m-tog reda $[a_{ij}]$ imala rang $r<1$, potrebno je i dovoljno da postoje brojevi $a_1, \ldots, a_m$ i $b_1, \ldots, b_m$ takvi da je $a_{ij}=a_i b_j$ $(i, j=1, 2, \ldots, m)$.

1159. Ako u matrici A postoji minor M r-tog reda, različit od nule, a svi minori $(r+1)$-og reda koji sadrže i sve elemente minora M, su jednaki nuli dokazati da je tada rang matrice A jednak broju r.

1160. Da li su matrice

$$\begin{bmatrix} 3\lambda & +1 & \lambda & 4\lambda \\ 1 & -\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2 & +\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ekvivalentne.

1161. Rešiti sledeće sisteme jednačina:

1° $x-y+z=2,$
$x-y-2z=-1;$

2° $2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6,$
$3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4,$
$9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2;$

3° $x_1+x_2+x_3+x_4=5,$
$x_1-x_2+3x_3-x_4=3,$
$x_1+5x_2-3x_3+5x_4=\lambda,$
za $\lambda\in(-\infty, \infty)$.

1162. Pokazati da je sistem

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+x_3+2x_4&=1, \\ 5x_1-x_2+3x_3-x_4&=3, \\ 2x_1+x_2+2x_3-3x_4&=4 \end{aligned}$$

nesaglasan.

1163. Utvrditi da sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+x_3&=1, \\ x_1-5x_2+3x_3&=2, \\ x_1-x_2+x_3&=-1, \\ 3x_1+5x_2-5x_3&=-6 \end{aligned}$$

ima jedinstveno rešenje i naći to rešenje.

1164. Pokazati da je sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3&=1, \\ 3x_1+2x_2-4x_3&=2, \\ 5x_1+2x_2+2x_3&=4 \end{aligned}$$

saglasan i da ima beskonačno mnogo rešenja. Naći ta rešenja.

1165. Iz skupa linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=3,\\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=9,\\ 2x_1+x_2-2x_3+2x_4-3x_5&=-16,\\ 3x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5&=-2,\\ -x_1+x_2-4x_3+4x_4+2x_5&=-12 \end{aligned}$$

naći x_1 i x_2.

1166. Pod kakvim uslovima tri prave

$$a_1x+b_1y-c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\quad a_3x_3+b_3y+c_3=0$$

prolaze kroz istu tačku.

1167. Pod kakvim uslovima n pravih

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\ \ldots,\ a_nx+b_ny+c_n=0$$

prolaze kroz istu tačku.

1168. Koristeći množenje pravougaonih matrica dokazati identitet

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=$$
$$=\sum_{i<k}(a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

§ 5. Linearno programiranje

1° Konveksni skupovi

Neka je $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ elemenat vektorskog prostora X^n. Skup tačaka $x\in X^n$ čije koordinate zadovoljavaju linearnu jednačinu

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n+a_0=0,$$

gde su a_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ dati brojevi, naziva se *hiperravan*.

Skup tačaka oblika $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, gde je $0<\lambda<1$ i $x_1, x_2\in X^n$, naziva se *duž* sa krajnjim tačkama x_1 i x_2 (x_1x_2). Kaže se da su x_1 i x_2 sa jedne strane hiperravni H ako duž x_1x_2 nema zajedničkih tačaka sa H.

Skup $K\subseteq X^n$ je *konveksan* ako iz $x_1, x_2\in K$ sledi da duž x_1x_2 pripada K.

Najmanji konveksan skup koji sadrži vektore $x_1, x_2,\ldots,x_p$ zove se *konveksna ljuska* vektora $x_1, x_2,\ldots,x_p$.

Tačka x konveksnog skupa $K\subseteq X^n$ je *ekstremalna tačka* ako iz

$$x=\lambda x'+(1-\lambda)x'',\quad 0<\lambda<1;\quad x',x''\in K\ \text{ sledi } x'=x''=x.$$

2° Problem linearnog programiranja

Treba odrediti nenegativne realne brojeve $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tako da je

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\leqslant b_i & (i=1,2,\ldots,p)\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\geqslant b_i & (i=p+1,p+2,\ldots,q)\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j=b_i & (i=q+1,q+2,\ldots,m) \end{cases}$$

i da funkcija

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i \tag{2}$$

ima najveću (najmanju) vrednost za tako određene ξ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. a_{ij}, b_i i c_i su dati realni brojevi.

Uvođenjem novih nepoznatih:

$$\xi_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

$$\xi_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j - b_i \qquad (i=p+1, p+2, \ldots, q)$$

uslovi (1) mogu da se napišu kao jedan sistem linearnih jednačina.

Prema tome ekvivalentan problem problemu linearnog programiranja je: Naći nenegativne brojeve $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ koji zadovoljavaju sistem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{1'}$$

i koji maksimiziraju (minimiziraju) funkciju

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i. \tag{2'}$$

U matričnoj formulaciji problem glasi: Naći nenegativan vektor $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(\xi_i \geqslant 0)$ koji zadovoljava jednačinu

$$Ax = b \tag{1''}$$

i koji maksimizira (minimizira) funkciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i. \tag{2''}$$

(Ovde je A matrica tipa $m \times n$ od elemenata a_{ij} a b vektor-matrica) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Sistem (1), odnosno (1'), zove se sistem ograničenja. Svaki vektor $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ koji zadovoljava sistem ograničenja zove se *moguće rešenje* ili *plan linearnog programa*. Onaj plan za koji je funkcija f minimalna (maksimalna) zove se *optimalni plan*.

3° Simpleksna metoda

Neka je potrebno naći minimum funkcije (2') uz ograničenja (1') i neka je rang matrice A jednak r $(r<m)$. Da bi se našao optimalni plan (rešenje) sistema (1') može se postupiti na sledeći način:

1) Sistem (1') se napiše u obliku u kome je r nepoznatih izraženo preko ostalih $n-r$ nepoznatih i novih slobodnih članova, ali tako da novi slobodni članovi budu nenegativni. Na primer, neka bude

$$\xi_i = a'_{i,r+1}\xi_{r+1} + \cdots + a'_{i,n}\xi_n + b_i' \qquad (i=1, 2, \ldots, r)$$

$$b_i' \geqslant 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, r).$$

Skup $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r\}$ zove se *bazis*, a nepoznate iz ovog skupa zovu se *bazisne*. Ostale nepoznate zovu se *slobodne* nepoznate ili nebazisne.

Rešenje $(b_1', b_2', \ldots, b_r', 0, \ldots, 0)$, zove se *bazisno rešenje.*

2) Izrazi se funkcija f preko nebazisnih nepoznatih. Ako su u dobijenom izrazu svi koeficijenti uz nebazisne nepoznate, nenegativni, tada je bazisno rešenje optimalno rešenje.

3) Neka među koeficijentima u f, dobijenim u 2), ima negativnih. Uzima se bilo koji od njih; neka je to, na primer, koeficijenat uz ξ_j. Posmatra se kolona od koeficijenata uz ξ_j (a'_{kj}) desne strane sistema ograničenja. Ako su svi brojevi te kolone nenegativni tad je $\min f = -\infty$ i zadatak nema rešenja.

4) Neka u koloni koeficijenata, posmatranoj u 3) ima negativnih. Za svaki od tih brojeva a'_{kj}, nalazimo odnose $\frac{b'_k}{a'_{kj}}$ (b'_k je slobodni član u izrazu za ξ_k). Izaberimo od tih odnosa najmanji; neka on odgovara vrsti $k=i$.

5) Formira se novi bazis, izbacujući iz starog bazisa ξ_i i uvodeći umesto njega ξ_j. (Jednačina koja sadrži ξ_i, reši se po ξ_j i tako dobijeno ξ_j se zameni u ostalim jednačinama).

Dalje primeniti postupak u 2). Itd.

4° Dualni problem problema linearnog programiranja

Prvi problem: Naći maksimum funkcije $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i$ pod uslovima

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \leq b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$\xi_j \geq 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Drugi problem: Naći minimum funkcije $\varphi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \sum_{i=1}^{m} b_i \eta_i$ pod uslovima

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \eta_j \geq c_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\eta_i \geq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Kaže se da su prvi i drugi problem uzajamno *dualni.*

Ako jedan od gornjih problema ima rešenje ima ga i njegov dualni i pri tome je, za bilo koji optimalni plan $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ i $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \varphi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

tj. tada je

$$\max f = \min \varphi.$$

1169. Dokazati da je tetraedar konveksan skup.

1170. Da li je hiperravan konveksan skup?

1171. Pokazati da je skup tačaka sa jedne strane hiperravni konveksan skup.

1172. Nazovimo poluprostorom skup tačaka jedne hiperravni i tačaka sa jedne njene strane. Dokazati da je presek bilo koliko poluprostora konveksan skup. (Ako je taj presek ograničen, on se naziva simpleks).

1173. Pokazati da je skup rešenja jedne linearne nejednačine

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n > a_0$$

poluprostor.

1174. Nazovimo ekstremalne tačke jednog simpleksa njegovim temenima. Naći temena simpleksa koji se dobija kao rešenje sistema nejednačina

$$\begin{aligned} 2\xi_1 - 3\xi_2 + 13 &> 0 \\ \xi_1 + \xi_2 - 6 &> 0 \\ 4\xi_1 - \xi_2 - 19 &< 0. \end{aligned}$$

1175. Dokazati da je skup rešenja sistema nejednačina

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n > b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ m > n)$$

simpleks.

1176. Dokazati da je presek dva konveksna skupa konveksan skup.

1177. Pokazati da su sva rešenja sistema

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x > 0$$

konveksna ljuska od $x_1 = (^4/_3, 1, 0, 0)$, $x_2 = (^1/_9, 0, ^1/_3, 0)$, $x_3 = (2, 0, 0, 1)$.

1178. U jednom preduzeću se proizvode dve vrste proizvoda Π_1 i Π_2 od četiri vrste sirovina: S_1, S_2, S_3 i S_4. Za jednu jedinicu proizvoda Π_1 ili Π_2 potrebna je određena količina svake od sirovina S_1, S_2, S_3 i S_4. Zarade preduzeća od proizvoda Π_1 i Π_2 kao i rezerve sirovina koje su na raspolaganju da se dobiju Π_1 i Π_2, date su tablicom 3.

Vrsta sirovina	Rezerve sirovina	Vrsta proizvoda	
		Π_1	Π_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Dohodak		7	5

Tablica 3

Naći plan optimalne proizvodnje.

1179. Jedna fabrika proizvodi pomoću mašina M_1 i M_2 dva modela robe: model Π_1 i model Π_2. Za jedan primerak modela Π_1 mašina M_1 radi dva sata a mašina M_2 4^h; a za model Π_2 mašina M_1 radi 4^h a M_2 2^h. Ako je zarada 30000 d po modelu Π_1 a 50000 d po modelu Π_2, kako treba organizovati rad sa mašinama da zarada bude što veća?

1180. Svaka od tri mašine M_1, M_2 i M_3 može biti iskorišćena za proizvodnju proizvoda Π_1, Π_2 i Π_3. Tablica 4 pokazuje mogućnost proizvodnje mašinom M_i proizvoda Π_j. Tako, na primer, iz tablice se vidi, da mašina M_2 može proizvesti 2 jedinice proizvoda Π_1, 4 jedinice proizvoda Π_2, odnosno 1 jedinicu proizvoda Π_3. Treba organizovati proizvodnju tako da jedna mašina proizvodi jednu i samo jednu vrstu proizvoda a da ukupna proizvodnja bude maksimalna.

	Π_1	Π_2	Π_3
M_1	1	2	3
M_2	2	4	1
M_3	3	1	5

Tablica 4

1181. U jednom preduzeću je napravljen sledeći plan proizvodnje: Za vreme $T=6$ treba proizvesti 30 jedinica proizvoda Π_1 i 96 jedinica proizvoda Π_2. Proizvodi Π_1 i Π_2 se proizvode mašinama M_1 i M_2 sa mogućnostima proizvodnje datim u tablici 5. Iz nje se, na primer, vidi da mašina M_1 može proizvesti 6 jedinica proizvoda Π_1 i 24 jedinice proizvoda Π_2. Rashodi prilikom proizvodnje pojedinih proizvoda mašinama M_1 i M_2 dati su u tablici 6.

	Π_1	Π_2
M_1	6	24
M_2	13	13

Tablica 5

	Π_1	Π_2
M_1	4	47
M_2	13	26

Tablica 6

Naći optimalni plan proizvodnje.

1182. U punktu A_1 nalazi se a_1 jedinica, a u punktu A_2 a_2 jedinica nekog homogenog tereta. Taj teret treba prebaciti u punktove B_1, B_2 i B_3 i to: b_1 jedinica u B_1, b_2 jedinica u B_2 i b_3 jedinica u B_3. Cena prevoza jedinice tereta iz punkta A_i u punkt B_j (c_{ij}) je data. Potrebno je sastaviti takav plan prevoza pri kojem bi cena prevoza bila najmanja ako je: $a_1=20$, $a_2=30$, $b_1=10$, $b_2=30$, $b_3=10$, $c_{11}=4$, $c_{12}=9$, $c_{13}=3$, $c_{21}=4$, $c_{22}=8$, $c_{23}=1$.

1183. Za očuvanje čovekovog zdravlja i radne sposobnosti, u toku 24 časa, potrebna je izvesna količina hranljivih sastojaka; na primer: B_1 — masti, B_2 — belančevina, B_3 — ugljenih hidrata, B_4 — vode i B_5 — vitamina. Ti se sastojci nalaze u namirnicama Π_1 i Π_2. Neka je a_{ij} količina sastojaka B_i u namirnici Π_j i neka je b_i najmanja količina sastojaka B_i koja je potrebna za organizam. Ako je c_i cena jedinice namirnice Π_i, kako treba organizovati ishranu da bi ona bila što je moguće jeftinija ako je: $B_1=10$, $B_2=12$, $B_3=16$, $B_4=10$, $B_5=1$; $a_{11}=1$, $a_{12}=5$, $a_{21}=3$, $a_{22}=2$, $a_{31}=2$, $a_{32}=4$, $a_{41}=2$, $a_{42}=2$, $a_{51}=1$, $a_{52}=0$; $c_1=2$, $c_2=3$.

1184. Neka su x, y, a, b i c nenegativni brojevi, koji ispunjavaju uslove:

$$14x+3y-3a-b-c=15$$

$$8x-10y+a-b+2c=-3$$

$$11x-y-2a-b-c=3.$$

1° Izraziti nepoznate a, b i c preko x i y. 2° U ravni xOy naći i nacrtati oblast tačaka $M(x, y)$. 3° Za koje vrednosti brojeva x, y, a, b i c funkcija $f=3y-4x$ ima maksimum, odnosno minimum? Koliki je taj maksimum, odnosno minimum?

1185. Grafički predstaviti oblast rešenja sistema nejednačina

$$x_1-x_2+1\geqslant 0$$
$$3x_1+2x_2-6\geqslant 0$$
$$-3x_1-x_2+9\geqslant 0 \qquad (x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0).$$

Naći minimum funkcije $f=-x_1-x_2+1$ u dobijenoj oblasti.

1186. Da li je prethodni zadatak moguće rešiti ako je $f=x_1-x_2$?

1187. Postoji li minimum funkcije $f=-x_1-x_2$ pod uslovima

$$x_3=1+x_1-x_2$$
$$x_4=2-x_1+2x_2?$$

1188. Naći minimum linearne forme $f=3x_1+5x_2+x_3$ pri uslovima

$$x_1+x_2+x_3=10$$
$$7x_1+4x_2+8x_3\leqslant 76$$
$$0\leqslant x_1\leqslant 6$$
$$0\leqslant x_2\leqslant 3$$
$$0\leqslant x_3\leqslant 8.$$

1189. Naći maksimum linearne forme $f=3x_3+4x_4$ pri uslovima

$$2x_1-3x_2+x_3=1$$
$$-5x_1+2x_2+x_4=1$$
$$(x_i\geqslant 0, \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

1190. Maksimizirati linearnu formu $f=4x_1+5x_2+x_3$ uz sistem ograničenja

$$3x_1+2x_2\leqslant 10$$
$$x_1+4x_2\leqslant 11$$
$$3x_1+3x_2+x_3\leqslant 13$$

ako su x_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ nenegativni celi brojevi.

1191. Od svih nenegativnih rešenja sistema

$$3x_1-5x_2+x_3+2x_4=1$$
$$2x_1-2x_2+x_4-x_5=-4$$
$$x_1-3x_2+2x_4-x_5=-5$$

naći ono za koje je linearna forma $f=x_1+2x_2$ minimalna.

1192. Naći ono rešenje sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5 \qquad (x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \end{aligned}$$

koje minimizira linearnu formu $f = x_4 - x_5$.

1193. Naći minimum forme $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ pri uslovima

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_6 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 &= 6 \\ x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6) \end{aligned}$$

1194. Naći minimum forme $f = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ pri uslovima

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 &= 10 \\ x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6). \end{aligned}$$

1195. Naći maksimum forme $f = 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 - x_6$ pri uslovima

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 6 \\ 10x_1 - 3x_2 + x_6 &= 15 \\ x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6). \end{aligned}$$

1196. Maksimizirati linearnu formu $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7$ pri uslovima

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 + x_6 + 2x_7 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 &= 7 \\ x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7). \end{aligned}$$

1197. Maksimizirati linearnu formu $f = 10x_1 - x_2 - 42x_3 - 52x_4$ pri sistemu ograničenja

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 + 1 &\geqslant 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 9 &\geqslant 0 \\ x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

1198. Od svih celobrojnih nenegativnih rešenja sistema

$$3x_1+2x_2\leqslant 10$$
$$x_1+4x_2\leqslant 11$$
$$3x_1+3x_2+x_3\leqslant 13$$

naći ono koje maksimizira formu $f=4x_1+5x_2+x_3$.

1199. Ako postoji nenegativni vektor $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ $(\xi_i\geqslant 0)$ za koji je $Ax=b$, dokazati da postoji i bazično nenegativno rešenje ovoga sistema.

1200. Proveriti da li su dualni sledeći zadaci: Prvi zadatak: minimizirati formu $f=x_1-2x_2$ pri uslovima

$$x_1-x_2\geqslant 2$$
$$-x_1+x_2\geqslant -1$$
$$x_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2).$$

Drugi zadatak: maksimizirati formu $\varphi=2y_1-y_2$ pri uslovima

$$y_1-y_2\leqslant 1$$
$$-y_1+y_2\leqslant -2$$
$$y_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2).$$

Da li zadaci imaju rešenja?

1201. Naći dualan program linearnom programu: Maksimizirati formu $f=5x_1+$ $+x_2$ pri uslovima

$$x_1+2x_2\leqslant 4$$
$$2x_1+3x_2\leqslant 3$$
$$x_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2).$$

1202. Naći dualan program linearnog programa: Maksimizirati formu $f=$ $=x_1+3x_2+2x_3-3x_5-x_6$ pri uslovima

$$2x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5+x_6=1$$
$$4x_1+3x_2-x_3-2x_4-x_5+2x_6=1$$
$$x_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6).$$

1203. Dokazati da je skup svih planova zadatka linearnog programa konveksan skup.

1204. Dokazati da linearna forma f u zadatku linearnog programiranja, dostiže ekstremalnu vrednost u ekstremalnoj tački skupa planova.

1205. Naći ono rešenje iz zadatka 1174 za koje funkcija $f=2\xi_1-3\xi_2+\xi_3$ ima najveću vrednost.

1206. Ako linearna forma f dostiže ekstremum u dva optimalna rešenja, tada ona dostiže ekstremum u svakoj tački duži čije su krajnje tačke ta dva optimalna rešenja. Dokazati.

1207. Pokazati da ne postoji par dualnih zadataka sa ograničenim skupovima planova.

1208. Pokazati da ne postoji par dualnih zadataka čije su linearne forme neograničene na skupu odgovarajućih planova.

1209. Ako je zadatak linearnog programiranja rešiv, pokazati da promena vektora ograničenja ne može dovesti do neograničenosti linearne forme na skupu planova.

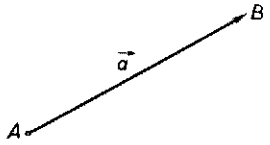
Glava IV

ANALITIČKA GEOMETRIJA

§ 1. Vektori

1° *Vektor* je određen pravcem, smerom i intenzitetom. Svakom vektoru može da se korespondira jedna orijentisana duž $\overline{AB}$. Tačka A je početak a tačka B kraj vektora $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Merni broj duži $\overline{AB}$ je *intenzitet* vektora, prava na kojoj se nalazi duž $\overline{AB}$ je *pravac* vektora a *smer* je od tačke A ka tački B (sl. 6). Vektor čiji je intenzitet jednak nuli naziva se *nula vektor*. Pravac i smer nula vektora su proizvoljni.

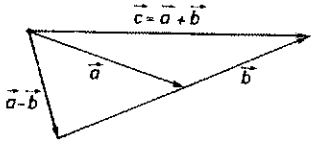


Sl. 6

Za dva vektora se kaže da su jednaki ako su im jednaki: pravac, smer i intenzitet.

2° Proizvod skalara m i vektora $\vec{a}$ zove se vektor čiji je: intenzitet $|m|\ |\vec{a}|$, pravac — pravac vektora $\vec{a}$, a smer — smer vektora $\vec{a}$ za $m>0$ suprotan vektoru $\vec{a}$ za $m<0$.

3° Sabiranje i oduzimanje vektora



Sl. 7

Zbirom vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zove se treći vektor $\vec{c}$ čiji se početak poklapa sa početkom prvog vektora a kraj sa krajem drugog vektora (sl. 7). Razlika se svodi na sabiranje vektora $\vec{a}$ i $-\vec{b}$.

4° Projekcija vektora na osu x je skalar:

$$P_{rx}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=|\vec{a}|\cos(\vec{a};\ x).$$

Projekcija zbira vektora na osu jednaka je zbiru projekcija:

$$P_{rx}(\vec{a}+\vec{b})=P_{rx}\vec{a}+P_{rx}\vec{b}.$$

5° Skalarni proizvod dva vektora. *Skalarni proizvod* dva vektora zove se proizvod njihovih intenziteta i kosinusa ugla između njih. Znači ako vektori

$\vec{a}$ i $\vec{b}$ zaklapaju ugao $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, onda je skalar $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$, njihov skalarni proizvod. Obeležava se sa $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Na osnovu definicije sledi da je

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{a}|\,P_{ra}\vec{b} = |\vec{b}|\,P_{rb}\vec{a}.$$

6° Vektorski proizvod dva vektora. *Vektorskim proizvodom* dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ naziva se treći vektor $\vec{c}$ koji ima osobine:

$$1)\quad |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\alpha; \qquad 2)\quad \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}.$$

3) Smer vektora $\vec{c}$ u odnosu na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je desne orijentacije, tj. smer mu je na onu stranu sa koję se najkraća rotacija vektora $\vec{a}$ do poklapanja sa vektorom $\vec{b}$ vidi, iz kraja vektora $\vec{c}$, u suprotnom smeru kazaljke na časovniku. Označava se sa $\vec{a}\times\vec{b}$ ili $\left[\vec{a}\ \vec{b}\right]$ (sl. 8).

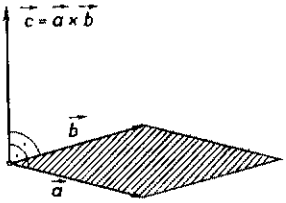
Osobine vektorskog proizvoda:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

(Zakon alternacije),

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

(Distributivni zakon).



Sl. 8

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati preko koordinata:

$\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$, onda je:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Površina P, paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je $P = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

7° Mešoviti proizvod tri vektora. *Mešoviti proizvod* tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je izraz: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Ako su vektori dati preko koordinata $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c}\{c_x, c_y, c_z\}$, onda je:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

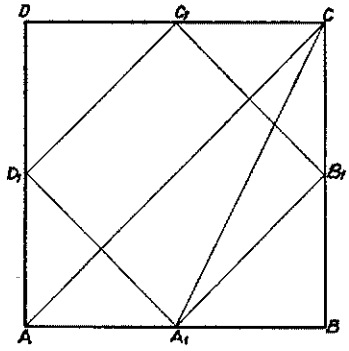
Zapremina V, paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je

$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

1210. Dat je kvadrat $ABCD$ (sl. 9). Neka su A_1, B_1, C_1, D_1 sredine strana tog kvadrata.

Izraziti preko vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ vektore: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$ i $\overrightarrow{A_1C}$.

Izračunati njihove intenzitete ako je $\overline{AB}=2$.



Sl. 9

1211. Dat je pravougaonik $ABCD$. Izraziti preko vektora dijagonala vektore strana.

1212. Kakav međusobni položaj imaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je:

1° $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$;

2° $|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

1213. Kakav međusobni položaj moraju imati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ da bi bilo:

1° $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; 2° $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; 3° $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

1214. Proveriti analitički i grafički vektorske jednakosti:

$$1^\circ\ \vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right);$$

$$2^\circ\ \vec{a}-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right);$$

$$3^\circ\ \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{b}.$$

1215. Pokazati grafički da su tačne vektorske jednakosti:

1° $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

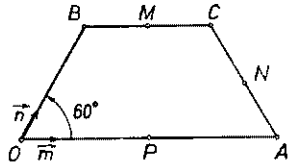
2° $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}-\vec{c}=\left(\vec{b}-\vec{c}\right)+\vec{a}$.

1216. Kakav međusobni položaj i kakve osobine moraju imati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ da bi bilo:

$$1^\circ\ \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|};\qquad 2^\circ\ \vec{a}=-2\lambda\vec{b};\qquad 3^\circ\ \vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right).$$

1217. U ravni su date tačke $A\,(0,\ -2)$, $B\,(4,\ 2)$, $C\,(4,\ -2)$. Iz koordinatnog početka su povučene sile $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Konstruisati rezultantu $\overrightarrow{OM}$ i naći njene projekcije na koordinatne ose.

Izraziti sile: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OM}$ preko jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ koordinatnih osa.

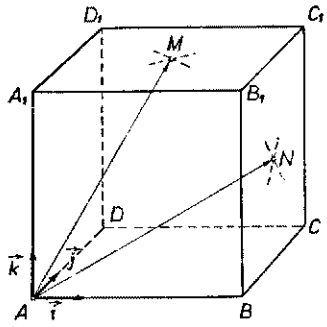


Sl. 10

1218. U ravnokrakom trapezu $OACB$ (sl. 10) je: $\sphericalangle BOA=60^\circ$; $\overline{OB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2$; M, N i P su sredine strana BC, AC i OA.

Izraziti vektore: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM}$ i $\overrightarrow{NP}$ preko $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jediničnih vektora strana $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

1219. Data je kocka ivice 2 cm, temenima $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ (sl. 11). Neka su M i N sredine strana: $A_1B_1C_1D_1$ i BCC_1B_1. Izraziti preko jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pravaca $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AA_1}$, vektore: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{CA_1}$. Pokazati da je vektor $\overrightarrow{MN}$ paralelan sa vektorom $\overrightarrow{A_1B}$.



Sl. 11

1220. Ako su N i M sredine strana OA i AB trougla OAB izraziti analitički i razložiti geometrijski vektore 1° $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{MN}$ preko vektora $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$; 2° vektor $\overrightarrow{ON}$ i $\overrightarrow{BN}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\overrightarrow{OM}=\vec{c}$.

1221. Ako su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori koordinatnih osa konstruisati vektore $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}$, kolike su projekcije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ na koordinatne ose?

1222. Odrediti α i β iz vektorske jednakosti $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, gde je $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}+4\vec{j}$, ako su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori koordinatnih osa

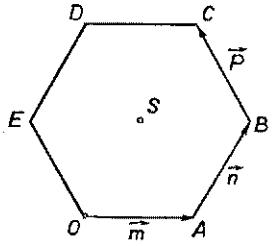
pravouglog koordinatnog sistema. Razložiti analitički i geometrijski $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

1223. Ako su dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearna, onda se uvek može naći konstanta λ tako da je $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ ili dve konstante α i β takve da je: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0$. Kakva je veza između konstanti λ, α i β? Odrediti α ako je: $\lambda=1$, $\beta=2$.

1224. Odrediti parametar α da bi vektori $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$ i $\vec{b}=\alpha\vec{i}-\vec{j}$, bili kolinearni.

1225. Mogu li vektori: $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=\alpha\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{c}=\vec{i}+\beta\vec{j}$ biti kolinearni (α i β parametri).

Kada će, nezavisno od $\vec{a}$, vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ biti kolinearni?



Sl. 12

1226. Dat je pravilni šestougaonik $OABCDE$ strane $OA=3$ (sl 12). Ako je $\overrightarrow{OA}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$ i $\overrightarrow{BC}=\vec{p}$, naći vezu između vektora $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$ i izraziti preko njih vektore $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EB}$ i $\overrightarrow{OC}$.

1227. Nad vektorima $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ konstruisan je trougao ABC.

a) Izraziti pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektore težišnih linija $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ i $\overrightarrow{CC_1}$.

b) Pokazati da se od težišnih linija može konstruisati trougao.

1228. Tačka B deli luk $\widehat{AC}=90°$, kruga sa centrom u O, u razmeri $1:2$. Izraziti analitički i geometrijski vektor $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ preko vektora $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

1229. U trouglu ABC strana BC je podeljena tačkom D u odnosu $m:n$. Izraziti vektor $\overrightarrow{AD}$ preko vektora $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ i $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

1230. Kolika je rezultanta sila, koje deluju iz centra ravnostranog trougla, a koje su orijentisane ka temenima i čiji je intenzitet jednak?

1231. Ako su tri vektora: $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u jednoj ravni ili su paralelni jednoj ravni, onda postoje konstante α i β takve da je $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Važi i obrnuto. Dokazati!

1232. Proveriti da li su komplanarni vektori: $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$.

1233. Dati su vektori $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\alpha\vec{j}$ i $\vec{c}=3\alpha\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ nekomplanarni vektori. Odrediti skalar α da vektori budu komplanarni.

1234. Dati su vektori $\vec{p}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{q}=\vec{i}+2\vec{j}$ i $\vec{a}=9\vec{i}+4\vec{j}$, gde su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori uzajamno normalni. Razložiti analitički i geometrijski vektor $\vec{a}$ u pravcu vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

1235. Dati su vektori $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=-2\vec{p}+\vec{q}$ i $\vec{c}=7\vec{p}-4\vec{q}$, gde su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jedinični vektori i $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q})=\frac{\pi}{3}$. Razložiti vektor $\vec{a}$ u pravcu vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (geometrijski i analitički).

1236. Dati su vektori $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}=3\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$ i $\vec{c}=-\vec{m}+7\vec{n}$. Naći linearnu zavisnost vektora $\vec{p}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

1237. Ako su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori koordinatnih osa prostornog koordinatnog sistema, razložiti vektor $\overrightarrow{OM}$ preko $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ geometrijski i analitički (M je proizvoljna tačka u prostoru sa koordinatama x, y i z, a O koordinatni početak).

1238. Ako su date u prostoru tačke: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$, dokazati da je $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ i da je

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

1239. Ako su α, β i γ uglovi koje vektor $\overrightarrow{OM}$ zaklapa se koordinatnim osama, dokazati da je

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

i da je

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

(x, y i z su koordinate tačke M).

1240. „Nacrtati" tačku $M(5, -3, 4)$ i odrediti dužinu i pravac njenog radijus vektora.

1241. Konstruisati vektor $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ i odrediti mu intenzitet i pravac.

1242. Date su tačke: $A(2, 2, 0)$ i $B(0, -2, 5)$. Konstruisati vektor $\overrightarrow{AB}$ i odrediti njegov intenzitet, pravac i ort.

1243. Vektor $\vec{r}$ zaklapa sa koordinatnim osama Ox i Oy uglove: $\alpha=30°$, $\beta=60°$. Naći ugao koji vektor zaklapa sa Oz osom.

1244. Odrediti vektor položaja tačke M ako se zna: da sa osom Ox zaklapa ugao od 45°, sa osom Oy ugao od 60°, da mu je intenzitet 6 i koordinata z negativna.

1245. Iz tačke $A(2, 1, -1)$ dejstvuje sila $\vec{F}$ čiji je intenzitet 7 i projekcije: na x osu $X=2$, na y osu $Y=-3$. Odrediti pravac i smer sile $\vec{F}$.

1246. Odrediti na sferi, čiji je centar u koordinatnom početku i poluprečnik $R=2\sqrt{3}$, tačku čiji radijus vektor zaklapa sa pozitivnim smerovima koordinatnih osa jednake uglove. Koliki su ti uglovi?

1247. Tačke $A(2, 0, 1)$, $B(1, -2, 3)$, $C(0, 4, 2)$ su temena trougla. Odrediti vektor težišne linije $\overrightarrow{AA_1}$ i njegov intenzitet.

1248. Data su redom tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$: $A(1, -2, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-2, 0, 5)$. Odrediti četvrto teme D i dužinu dijagonale BD.

1249. Ako su tačke: $A(0, 1, 2)$, $B(2, 0, 1)$ i $C(3, 1, 0)$ redom tri uzastopna temena paralelograma, naći tačku O, presek dijagonala i težište trougla ABC.

1250. Data su redom tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$: $A(-3, 2, \lambda)$, $B(3, -3, 1)$ i $C(5, \lambda, 2)$.

1° Odrediti četvrto teme D; 2° Odrediti λ tako da je $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{14}$; 3° Za veću vrednost λ, nađenu u tački 2°, naći linearnu zavisnost između vektora: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{AC}$. Razložiti vektor $\overrightarrow{AC}$ preko vektora $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BD}$.

1251. 1° Dokazati da za skalarni proizvod važi komutativni zakon: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2° Dokazati da za skalarni proizvod važi distributivni zakon:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

1252. Dokazati da je: 1° $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$; 2° $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}$.

1253. Ako je $\vec{a}\perp\vec{b}$ onda je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Da li važi obrnuto tvrđenje?

1254. 1° Naći skalarne proizvode ortova koordinatnih osa u prostoru;
2° Naći: $(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\cdot(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k})$.

1255. Naći skalarni proizvod vektora: $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, gde je

$$|\vec{m}|=2, \quad |\vec{n}|=4 \text{ i } \sphericalangle\left(\vec{m}, \vec{n}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

1256. Naći intenzitet vektora $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ ako je $|\vec{p}|=2$,

$$|\vec{q}|=\sqrt{3} \quad \sphericalangle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

1257. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati preko koordinata, dokazati da je

1° $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$, gde je: $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$;

2° $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)=\dfrac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

1258. Odrediti parametar λ da intenziteti vektora $\vec{a}\{2a^\lambda, \lambda, \lambda-1\}$ i $\vec{b}\{\lambda+1, \lambda-2, 0\}$ budu jednaki a zatim naći ugao između njih.

1259. Ako je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ i ako se znaju intenziteti vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ naći $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

1260. Naći ugao između vektora: $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, ako je

$$|\vec{m}|=|\vec{n}|=2.$$

1261. Naći projekciju vektora $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$ na $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$, ako je

$$|\vec{p}|=2, \quad |\vec{q}|=3, \quad \sphericalangle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

1262. Naći dužine dijagonala i ugao između njih, paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zaklapaju ugao od $\frac{\pi}{3}$.

1263. Data su temena paralelograma: $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ $C(5, 0, 2)$, $D(-1, 1, 1)$. Naći ugao između dijagonala.

1264. Data je kocka $ABCD\,A_1\,B_1\,C_1\,D_1$, ivice $a=4$. Tačka M je sredina gornje osnove $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ a N sredina strane BCC_1B_1. Naći dužine vektora $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ i ugao između njih.

1265. Naći ugao između simetrala strana pravilnog tetraedra koje polaze iz istog temena.

1266. Na tačku A deluju tri sile istog intenziteta a, a međusobno zaklapaju jednak ugao 60°. Naći veličinu rezultante.

1267. Naći ugao između bisektrisa koordinatnih uglova: xOy, xOz, yOz.

1268. Date su tačke: $A(3, 3, -2)$, $B(0, -3, 4)$, $C(0, -3, 0)$ i $D(0, 2, -4)$. Naći $P_{r\,\overrightarrow{AB}}\,\overrightarrow{CD}$.

1269. Ako se tačka M u prostoru kreće po zakonu puta $\vec{S}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ i ako na nju deluje sila $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$, onda je rad A sile $\vec{F}$: $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$. Izračunati rad A sile $\vec{F}$ i ugao između putanje tačke i pravca dejstva sile ako je: $\vec{S}\{2\text{ m}, 1\text{ m}, -2\text{ m}\}$ i $\vec{F}\{5\text{ kg}, 4\text{ kg}, 3\text{ kg}\}$.

1270. Dati su vektori $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{n}=-3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su jedinični vektori koji obrazuju uglove: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})=\frac{\pi}{6}$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})=\frac{5\pi}{6}$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c})=\frac{\pi}{6}$. Izračunati dužine dijagonala paralelograma konstruisanog nad tim vektorima.

1271. Dokazati da je vektor $\vec{h}$, koji se poklapa sa visinom paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i koji je normalan na $\vec{a}$, jednak:

$$\vec{h}=\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\frac{\vec{a}_0}{|\vec{a}|}, \text{ gde je } \vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

1272. Pomoću vektora dokazati da se sve tri visine trougla seku u jednoj tački.

1273. Ako se dijagonale četvorougla polove, pokazati koristeći vektore, da je taj četvorougao paralelogram.

1274. Koristeći vektore dokazati jednakost

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

1275. Izraziti jedinični vektor $\vec{x}$ preko vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ ako $\vec{x}$ polovi ugao između vektora $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$ i $\vec{b}=2\vec{u}+\vec{v}$, komplanaran je sa njima i ako je $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=4$, $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})=120°$.

1276. Za trougao ABC zna se da je: $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=3$ i $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$. Odrediti ugao između visine i težišne linije tog trougla povučenih iz temena A.

1277. Karton, oblika kvadrata, je podeljen na tri dela jednake širine a zatim savijen u pravilnu trostranu prizmu. Naći ugao između dve susedne dužine koje nastaju prelamanjem dijagonale kvadrata pri savijanju u prizmu.

1278. Dati sa vektori $\vec{u}=6\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=3\vec{j}-\vec{k}$ i $\vec{w}=-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$. Odrediti λ da vektori $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ i $\vec{w}$ budu normalni.

1279. Nad vektorima $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}$ i $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}$ konstruisan je trougao. Naći vektor visine $\vec{h}_a$ i ugao koji gradi sa stranom b. ($\vec{i}$ i $\vec{j}$ su uzajamno normalni ortovi).

1280. Dati su vektori $\vec{a}\{0, 2\lambda, \lambda\}$, $\vec{b}\{2, 2, 1\}$, $\vec{c}\{-1, -2, -1\}$ i $\vec{d}\{\lambda, 0, 1\}$. Odrediti λ iz uslova: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}+7$.

1281. Odrediti λ da vektor $\vec{a}=2\lambda\vec{i}+\vec{j}+(1-\lambda)\vec{k}$ obrazuje jednake uglove sa vektorima: $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}$ i $\vec{c}=5\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}$.

1282. Koji ugao zaklapaju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{p}=\vec{m}+2\vec{n}$ i $\vec{q}=5\vec{m}-4\vec{n}$ uzajamno normalni?

1283. U ravni xOy naći vektor $\vec{r}$ koji je normalan na vektoru $\vec{a}\{5, -3, 4\}$ a čiji je intenzitet jednak $|\vec{a}|$. Može li se odrediti $\vec{r}$ ako je $\vec{a}$ ma kakav vektor?

1284. Dokazati da pri ma kakvom rasporedu tačaka A, B, C i D u prostoru važi: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

1285. Vektori položaja tačaka A, B, C i D su redom: $\vec{r}_1\{5, 2, -1\}$, $\vec{r}_2\{1, -3, 4\}$, $\vec{r}_3\{-2, 1, 3\}$ i $\vec{r}_4\{2, 6, -2\}$.

1° Pokazati da je četvorougao $ABCD$ paralelogram;

2° Naći ugao između dijagonala paralelograma.

1286. Ako su ABC i PQR dva trougla u prostoru, dokazati da se njihova težišta poklapaju ako i samo ako je $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=0$.

1287. Neka su $ABCD$ i $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ dva paralelograma i neka su tačke M, N, P i Q redom na dužima AA_0, BB_0, CC_0 i DD_0 tako da je:

$$\frac{AM}{AA_0}=\frac{BN}{BB_0}=\frac{CP}{CC_0}=\frac{DQ}{DD_0}=\lambda.$$

1° Pokazati da je $MNPQ$ paralelogram.

2° Šta je geometrijsko mesto tačaka preseka dijagonala četvorougla $MNPQ$ kad se λ menja?

1288. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ su: $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=7\vec{p}-5\vec{q}$, $\vec{c}=\vec{p}-4\vec{q}$ i $\vec{d}=7\vec{p}-2\vec{q}$. Ako je $\vec{a}\perp\vec{b}$ i $\vec{c}\perp\vec{d}$, naći ugao između $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

1289. Naći jedinični vektor $\vec{n}_0$ komplanaran sa vektorima $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ako je

$$|\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\ \sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{3},\qquad \vec{n}\cdot\vec{p}=7 \text{ i } \vec{n}\cdot\vec{q}=3.$$

1290. Ako je vektor $\vec{n}$ komplanaran sa vektorima $\vec{p}$ i $\vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=4$, $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{3}$, $\vec{n}\cdot\vec{p}=8$, $\vec{n}\cdot\vec{q}=16$, odrediti: 1° jedinični vektor vektora $\vec{n}$ preko vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$; 2° $|\vec{n}+\vec{q}|$; 3° $\sphericalangle(\vec{n},\vec{p})$.

1291. Naći vektor $\vec{c}$, kolinearan vektoru $\vec{a}+\vec{b}$, ako je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=5,\ \vec{c}\cdot\vec{b}=18,\ |\vec{b}|=2.$$

1292. Pravilan tetraedar, strane a, leži u prvom kvadrantu ravni xOy tako da mu se jedno teme poklapa sa koordinatnim početkom, a jedna ivica OA sa osom Ox. 1° Odrediti jedinične vektore duž ivica OA, OB i OC; 2° Ako duž ovih ivica deluju sile intenziteta: 1 kg, 2 kg i 3 kg odrediti intenzitet rezultante i kosinuse uglova koje zaklapa sa pomenutim silama.

1293. Naći vektor $\vec{x}$ iz uslova $\vec{x}\cdot\vec{a}=1$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=2$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=3$, gde je: $\vec{a}\{2,-4,3\}$, $\vec{b}\{3,-1,5\}$ i $\vec{c}\{1,-2,4\}$.

1294. Naći projekciju vektora $\vec{m}\{\sqrt{2},-3\ -5\}$ na osu koja zaklapa sa koordinatnim osama Ox i Oz uglove: $\alpha=45°$, $\gamma=60°$, a sa Oy osom, tup ugao β.

1295. Naći vektor $\vec{x}$ koji je normalan na vektorima $\vec{a}\{3,2,-1\}$, $\vec{b}\{2,-1,3\}$ i $\vec{c}\{1,1,-1\}$. Da li postoji više takvih vektora?

1296. Kakvi su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je: 1° $\vec{a}\times\vec{b}=0$; 2° $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$.

1297. Naći vektorske proizvode ortova koordinatnih osa prostorno-koordinatnog sistema. Izračunati: $\left[(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{i}\right]\times\vec{i}$.

1298. Izračunati $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

1299. Izračunati $|\vec{a}\times 2\vec{b}|$ ako je $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

1300 Naći $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ ako je $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})=\frac{\pi}{4}$.

1301. Ako je $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$, naći $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

1302. Ako je $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=16$, naći $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

1303. Uprostiti izraze: 1° $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$;

2° $(\vec{i}\times\vec{j})\times[\vec{k}+(\vec{j}\times\vec{i})]\times\alpha(\vec{k}\times\vec{i})\times\vec{j}$.

1304. Dokazati da je $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{b}$.

1305. Dokazati da je $\vec{a}\times(\vec{b}+\lambda\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}$ za svako λ.

1306. Nacrtati vektor $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ i naći površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$.

1307. Naći površinu trougla ABC ako je $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ i $C(5, 0, 2)$.

1308. Naći površinu i visinu BD trougla ABC ako je $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$ i $C(6, 2, 0)$.

1309. Neka je: $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=5$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})=\frac{\pi}{4}$.

Naći površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $2\vec{b}-\vec{a}$ i $3\vec{a}+2\vec{b}$.

1310. Naći površinu paralelograma čije su dijagonale vektori $\vec{d}_1=3\vec{m}+3\vec{n}$ i $\vec{d}_2=\vec{m}-\vec{n}$, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zaklapaju ugao $\frac{\pi}{6}$.

1311. Naći jedinični vektor koji je normalan na ravan određenu vektorima: $\vec{a}\{1, 1, 0\}$ i $\vec{b}\{1, -1, 1\}$.

1312. Tri jedinična vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ obrazuju uglove: $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j})=45°$, $\sphericalangle(\vec{j}, \vec{k})=$ $=90°$, $\sphericalangle(\vec{k}, \vec{i})=120°$. Ako je: $\vec{A}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{B}=\vec{i}+\vec{j}$ naći $|\vec{A}\times\vec{B}|$.

1313. Izračunati projekciju vektora $\vec{a}\{3, -12, 4\}$ na vektor $\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$, ako je $\vec{c}\{1, 0, -2\}$ i $\vec{d}\{1, 3, -4\}$.

1314. Dati su vektori: $\vec{a}\{1, 2, 1\}$, $\vec{b}\{1, -1, 2\}$ i $\vec{c}\{2, 1, -1\}$. Naći $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ i projekciju vektora $\vec{b}$ na $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

1315. Može li se odrediti vektor $\vec{x}$ iz uslova: $\vec{x}\times\vec{a}=\vec{b}$ ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati vektori?

1316. Dati su vektori: $\vec{a}\{1, 1, 1\}$, $\vec{b}\{1, 1, 0\}$ i $\vec{c}\{1, -1, 0\}$. Odrediti vektor $\vec{x}$ iz uslova: $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$ i $\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$.

1317. Dati su vektori: $\vec{a}\{0, 2\lambda, \lambda\}$, $\vec{b}\{2, 2, 1\}$ i $\vec{c}\{-1, -2, -1\}$.

1° Odrediti vektor $\vec{d}$ iz uslova: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ i $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$;

2° Pokazati da su vektori $\vec{a}-\vec{d}$ i $\vec{b}-\vec{c}$ kolinearni;

3° Dokazati da su vektori $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$ i $\vec{d}$ komplanarni;

4° Odrediti λ iz uslova: $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\lambda$.

1318. Da li su ispravne relacije: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$?

1319. Mogu li razmeniti mesta $\times$ i $\cdot$ („krst“ i „tačka“) u mešovitom proizvodu?

1320. Kakvi su međusobno vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako je $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$?

1321. Pokazati da je: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot[(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}]=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$.

1322. Naći mešovite proizvode ortova koordinatnih osa.

1323. Pokazati da su vektori: $\vec{a}\{-1, 3, 2\}$, $\vec{b}\{2, -3, -4\}$ i $\vec{c}\{-3, 12, 6\}$ komplanarni i naći njihovu linearnu zavisnost.

1324. Naći zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima:

$$\vec{a}\{0, 1, 1\},\quad \vec{b}\{1, 0, 1\}\quad \text{i}\quad \vec{c}\{1, 1, 0\}.$$

1325. Pokazati da tačke: $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$ i $D(5, 0, -6)$ pripadaju jednoj ravni.

1326. Vektori: $\vec{a}\{1, 2\alpha, 1\}$, $\vec{b}\{2, \alpha, \alpha\}$ i $\vec{c}\{3\alpha, 2, -\alpha\}$ su ivice tetraedra (α realan parametar).

1° Odrediti zapreminu toga tetraedra;

2° Odrediti α da vektori, $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni i u tom slučaju razložiti vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

1327. Tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ $C(0, 0, 6)$ i $D(2, 3, 8)$ su temena piramide.

1° Izračunati zapreminu piramide;

2° Izračunati visinu koja odgovara osnovi ABC.

1328. Vektori $\vec{a}\{\alpha, 1, 1\}$, $\vec{b}\{1, \alpha, 1\}$ i $\vec{c}\{1, 1, \alpha\}$ su ivice paralelepipeda.

1° Naći zapreminu paralelepipeda;

2° Naći vektor visine $\vec{h}$ upravne na vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

3° Ako je α parametar koji pripada $[-2, 1]$, odrediti ga da zapremina bude: a) maksimalna, b) minimalna. Naći te zapremine. Kakvi su vektori za V minimalno?

1329. Dati su vektori: $\vec{a}\{2\lambda, 1, 1-\lambda\}$, $\vec{b}\{-1, 3, 0\}$ i $\vec{c}\{5, -1, 8\}$.

1° Odrediti λ da vektor $\vec{a}$ zaklapa jednake uglove sa vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$;

2° Za tako nađeno λ odrediti nagib vektora $\vec{c}$ prema ravni određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{a}$;

3° Za isto λ odrediti zapreminu i jednu od visina paralelepipeda konstruisanog nad tim vektorima.

1330. Izračunati zapreminu paralelepipeda čije su ivice vektori:

$$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \quad \vec{n}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} \quad \text{i} \quad \vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},$$

ako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju desni triedar i ako je zapremina paralelepipeda konstruisanog nad njima $\frac{1}{4}$.

1331. Odrediti onaj od jediničnih vektora normalnih na $\vec{a}\{-2, -6, -1\}$ i $\vec{b}\{1, 2, 0\}$ koji sa vektorom $\vec{c}\{2, -1, 0\}$ zaklapa oštar ugao. U smeru tog jediničnog vektora odrediti vektor $\vec{d}$ tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ budu ivice paralelepipeda zapremine 18.

1332. Vektori $m\vec{a}-n\vec{b}$, $p\vec{b}-m\vec{c}$, $n\vec{c}-p\vec{a}$ su uvek komplanarni. Dokazati.

1333. Trougao ABC određen je vektorima položaja $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Odrediti vektor $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, gde je M proizvoljna tačka simetrale strane AB trougla ABC.

1334. Dokazati da se prave koje spajaju sredine suprotnih ivica tetraedra seku u jednoj tački. Izraziti koordinate te tačke pomoću koordinata temena tetraedra.

1335. Naći sve tačke u prostoru čije je rastojanje od koordinatnih osa redom a, b, c.

1336. Ako su A, B, C, D četiri tačke u prostoru koje ispunjavaju uslov $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$, tada je $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Dokazati.

1337. Dva tetraedra imaju jedno zajedničko teme a odgovarajuće ivice koje polaze iz tog temena su na istim pravama. Dokazati da im se zapremine odnose kao proizvodi pomenutih ivica.

1338. Dokazati da su četiri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ uvek linearno zavisni, tj. da postoje konstante α, β, γ i δ koje sve nisu jednake nuli, takve da je $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=0$.

1339. Razložiti vektor $\vec{d}=\left(3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}\right)$ preko jediničnih uzajamno normalnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ koji obrazuju desni triedar.

1340. Dati su vektori: $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b}=7\vec{m}-5\vec{n}$, $\vec{c}=\vec{m}-4\vec{n}$ i $\vec{d}=7\vec{m}-2\vec{n}$. Odrediti ugao između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako je vektor $\vec{a}$ normalan na $\vec{b}$ i vektor $\vec{c}$ normalan na $\vec{d}$.

1341. Odrediti t iz uslova da su vektori: $\vec{a}\{\ln(t-2), -2, 6\}$, $\vec{b}\{t, -2, 5\}$ i $\vec{c}\{0, -1, 3\}$ komplanarni.

1342. Dokazati analitički i geometrijski da su vektori: $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ i $\vec{c}-\vec{a}$ komplanarni bez obzira kakvi su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

1343. Pokazati da su vektori $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ i $\vec{c}+\vec{a}$ linearno nezavisni ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni.

1344. Suprotne ivice tetraedra su uzajamno normalne. Dokazati da je $\cos(AB)\cos(CD)=\cos(AC)\cos(BD)=\cos(AD)\cos(BC)$, gde (AB) označava ugao diedar tetraedra sa ivicom AB.

1345. Dokazati da su komplanarni vektori: $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako ispunjavaju uslov: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=0$.

1346. Pokazati da su vektori: $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

1347. Može se pokazati da je $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$. Na osnovu toga razložiti vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako je $\vec{a}\{2, 0, 1\}$, $\vec{b}\{1, -1, 0\}$ i $\vec{c}\{1, 1, 1\}$.

1348. Pomoću vektora pokazati jednakost $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$.

1349. Neka su s_1, s_2, s_3 i s_4 površine strana tetraedra a $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ i $\vec{s}_4$ normalni vektori na tim stranama, orijentisani na one strane gde nije tetraedar i kod kojih je $|\vec{s}_i|=s_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$.
Dokazati da je $\vec{s}_1+\vec{s}_2+\vec{s}_3+\vec{s}_4=0$.

1350. Dokazati da je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}.$$

1351. Koristeći vektore izvesti osnovne formule sferne trigonometrije:

1° $\cos a=\cos b\cos c+\sin c\sin b\cos\alpha$

2° $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$

gde su a, b i c stranice sfernog trougla a α, β i γ uglovi sfernog trougla, naspram tih stranica.

1352. Dokazati da je površina n-tougla $A_1A_2A_3\ldots A_n$ data obrascem:

$$P=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA_1}\times\overrightarrow{OA_2}\right]+\left[\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}\right]+\cdots+\left[\overrightarrow{OA_{n-1}}\times\overrightarrow{OA_n}\right]+\left[\overrightarrow{OA_n}\times\overrightarrow{OA_1}\right]\right|,$$

gde je O proizvoljna tačka ravni n-tougla, a $\left[\overrightarrow{OA_i}\times\overrightarrow{OA_j}\right]$ površine paralelograma nad vektorima $\overrightarrow{OA_i}$ i $\overrightarrow{OA_j}$ sa znakom + ako je $\sphericalangle A_iOA_j$ pozitivan i sa znakom — ako je ovaj ugao negativan.

1353. Naći projekciju vektora $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ na vektor $\vec{b}$ ako je:

$$\vec{a}\{0, 1, 2\},\quad \vec{b}\{2, 1, -1\}\quad \text{i}\quad \vec{c}\{2, 1, 1\}.$$

1354. Dokazati da je $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\left[(\vec{d}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\right]\vec{c}-\left[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right]\vec{d}$.

1355. Dokazati da je $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})=\left[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right]\vec{b}$.

1356. Da li je tačna relacija: $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\left[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right]$?

§ Afine transformacije koordinata

1° Afine koordinate u prostoru

Neka su O, E_1, E_2, E_3 četiri nekomplanarne tačke, M_1 tačka preseka ose OE_1 i ravni koja prolazi M i paralelna je ravni OE_2, E_3 i M_2, M_3 tačke na osama OE_2 i OE_3 određene slično kao tačka M_1. *Afine koordinate* proizvoljne tačke M su brojevi

$$x=\frac{OM_1}{OE_1}, \qquad y=\frac{OM_2}{OE_2}, \qquad z=\frac{OM_3}{OE_3}.$$

2° Afine transformacije prostora

Transformacije koje se u ma kom afinom sistemu koordinata mogu napisati u obliku linearnih jednačina:

$$x'=a_1x+b_1y+c_1z+d_1$$
$$y'=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$$
$$z'=a_3x+b_3y+c_3z+d_3,$$

gde je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

a (x, y, z) i (x', y', z') koordinate proizvoljne tačke M prostora i njene slike M' nazivaju se afine transformacije. Ako je $d_1=d_2=d_3=0$ to su linearne transformacije. Specijalan slučaj su afine i linearne transformacije ravni.

3° Translacija i rotacija koordinatnih osa

Koordinate (x, y) u starom koordinatnom sistemu prelaze u koordinate (x', y') u novom koordinatnom sistemu po formulama:

$$x=x'+\alpha, \quad y=y'+\beta,$$

ako se izvrši translacija starog sistema, tako da mu koordinatni početak O pređe u $O_1(\alpha, \beta)$:

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi, \quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

ako se izvrši rotacija starih koordinatnih osa oko koordinatnog početka O za ugao φ.

4° Krive drugog reda i njihove transformacije

a) Opšta jednačina krivih drugog reda:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

(A, B, C, D, E i F su konstante a x i y koordinate proizvoljne tačke na krivoj).

Pomoću determinanti: $\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ i $\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$,

krive čije su jednačine (1) mogu se klasificirati na sledeći način:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Elipsa (realna ili imaginarna)	Tačka
$\delta < 0$	Hiperbola	Par pravih koje se seku
$\delta = 0$	Parabola	Par paralelnih pravih (realnih ili imaginarnih)

b) Transformacija jednačine (1) translacijom i rotacijom koordinatnih osa

α) Ako je $\delta \neq 0$, kriva (1) ima centar čije se koordinate nalaze iz jednačina:

$$\Phi_x'(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi_y'(x, y) = 0,$$

gde je

$$\Phi(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Translacijom koordinatnog početka u centar $O_1(x_0, y_0)$, jednačina (1) dobija oblik

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0 \tag{2}$$

gde je

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Rotacijom koordinatnih osa $O_1 x_1$ i $O_1 y_1$ za neki ugao φ jednačina (2) dobija oblik

$$A_1 X^2 + C_1 Y^2 + F_1 = 0.$$

Koeficijenti A_1 i C_1 su koreni jednačine

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \delta = 0.$$

Ugao φ se nalazi iz $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{B}{A - C}$.

β) Ako je $\delta = 0$, kriva definisana jednačinom (1) nema centar. Njena jednačina može da se napiše u obliku

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{3}$$

i mogu nastupiti dva slučaja:

β_1) D i E proporcionalni sa α i β: $D = m\alpha$. $E = m\beta$. Tada jednačina (3) dobija oblik

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2m(\alpha x + \beta y) + F = 0$$

odnosno:

$$\alpha x + \beta y = -m \pm \sqrt{m^2 - F^2}$$

— par pravih.

β_2) D i E nisu proporcionalne sa α i β. Jednačina (3) može da se napiše u obliku

$$(\alpha x + \beta y + n)^2 + 2m(\beta x - \alpha y + q) = 0. \tag{4}$$

Parametri m, n i q se nalaze upoređivanjem koeficijenata (3) i (4). Ako se dalje uzme za osu $O_1 X$ prava

$$\alpha x + \beta y + n = 0$$

a za osu $O_1 Y$ prava

$$\beta x - \alpha y + q = 0,$$

nalazi se da je:

$$X = \frac{\beta x - \alpha y + q}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad Y = \frac{\alpha x + \beta y + n}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Posle toga jednačina (4) dobija oblik

$$Y^2 = 2pX,$$

gde je

$$p = \frac{|m|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Osa O_1X se orijentiše na onu stranu poluravni u kojoj $\beta x - \alpha y + q$ ima znak suprotan znaku m.

1357. Translacijom koordinatnog sistema uprostiti jednačine i nacrtati krive koje predstavljaju:

1° $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$; 2° $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$;

3° $(y-2)^2 = 4(x+1)$; 4° $\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$.

1358. Izvršiti translaciju koordinatnog sistema da mu koordinatni početak padne u tačku $O_1(-2, 6)$. Kako glasi jednačina krive

$$xy - 6x + 2y + 3 = 0$$

u novom koordinatnom sistemu? Koja je to kriva?

1359. Naći ugao za koji su koordinatne ose izvršile rotaciju ako je tačka $M(2, 4)$ dobila nove koordinate $X = 4$, $Y = -2$. „Nacrtati" tačku M u oba koordinatna sistema.

1360. Rotacijom, za $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ koordinatnih osa, transformisati jednačinu $xy = -1$ i nacrtati krivu koju predstavlja u oba koordinatna sistema.

1361. Rotacijom koordinatnih osa uprostiti jednačinu

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0 \qquad (\varphi = 45°).$$

1362. Za koji je ugao potrebno izvršiti rotaciju da bi nestao član koji sadrži xy u jednačini $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$.

1363. Koje krive predstavljaju sledeće jednačine:

1° $x^2 - y^2 = 0$; 2° $x^2 + y^2 = 0$;

3° $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} = 1$; 4° $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 4 = 0$;

5° $x^2 - xy = 0$; 6° $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$; 7° $x^2 - 4 = 0$.

1364. Odrediti afinu transformaciju ravni koja prevodi tačke

1° $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(0, 1)$ u tačke
$M'_1(1, -2)$, $M'_2(3, -1)$, $M'_3(0, 1)$

2° $M_1(1, 2)$, $M_2(0, 4)$, $M_3(-1, 1)$ u tačke
$M'_1(11, -3)$, $M'_2(20, 4)$, $M'_3(4, 6)$.

1365. Date su linearne transformacije

$$(A_1):\ \begin{aligned} x' &= 3x-y \\ y' &= x+y \end{aligned} \qquad (A_2):\ \begin{aligned} x' &= -x+3y \\ y' &= x+y \end{aligned}$$

1° Naći proizvod transformacije od A_1 i A_2.

2° Naći prave koje su invarijantne u odnosu na date transformacije.

1366. Pokazati da postoji afina transformacija pomoću koje se:

1° Svaka elipsa transformiše u krug $x'^2+y'^2=1$

2° Svaka hiperbola transformiše u hiperbolu $x'^2-y'^2=1$

3° Svaka parabola transformiše u parabolu $y'=x'^2$.

1367. Jednačina elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ je invarijanta u odnosu na transformaciju

$$x=x'\cos\alpha+\frac{a}{b}y'\sin\alpha,\quad y=-\frac{b}{a}x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Dokazati.

1368. Naći sve afine transformacije koje jednačinu hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ transformišu u istu takvu jednačinu.

1369. Afine transformacije prevode paralelne prave u paralelne prave. Dokazati

1370. Naći afinu transformaciju kojom se jednačina $3x^2-2xy+3y^2+2x+$ $+2y-1=0$ transformiše u kanonički oblik. Koju krivu predstavlja data jednačina?

1371. Odrediti jedinični vektor koji sa afinom transformacijom

$$x'=8x-4y \qquad y'=-6x+2y$$

preslikava u sebi normalan vektor.

1372. Kako glasi afina transformacija koja prave

$$(a):\ x+y-1=0, \qquad (b):\ x-y=0$$

preslikava u prave

$$(a'):\ x+y=0, \qquad (b'):\ x-y-1=0$$

a tačku $A(0, 0)$ u tačku $A'(2, 1)$?

1373. Data su dva koordinatna sistema iste orijentacije xOy i $x'O'y'$. Prvi koordinatni sistem je pravougli, a drugi je kosougli sa koordinatnim uglom $\omega = 45°$. Osa $O'x'$ zaklapa ugao od 30° sa osom Ox. Početak O' novog sistema ima koordinate $(1, -1)$ u odnosu na stari sistem. Naći veze između starih i novih koordinata.

1374. Translacijom i rotacijom Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema xOy svesti jednačinu $2x^2 - xy + 2y^2 - x + \lambda = 0$ (λ je realan parametar) na kanonički oblik. Napisati odgovarajuće formule transformacije.

1375. Odrediti jednačinu one parabole čija je direktrisa $2x + y - 1 = 0$ i koja dodiruje pravu $x - y - 2$ u tački $M_0(0, -2)$.

1376. Ose novog koordinatnog sistema $Ox'y'z'$ su bisektrise uglova koje grade ose Ox, Oy, Oz starog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$. Naći odgovarajuće formule transformacije.

1377. Data su dva koordinatna sistema $Oxyz$ i $O'x'y'z'$. Tačka O' u odnosu na prvi koordinatni sistem ima koordinate $(1, 2, -1)$. Jedinični vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ drugog koordinatnog sistema u odnosu na prvi koordinatni sistem određeni su koordinatama $\vec{a}\{-2, 0, 1\}$, $\vec{b}\{-1, -1, 3\}$, $\vec{c}\{-1, -1, 1\}$. Napisati formule pomoću kojih koordinate u odnosu na prvi koordinatni sistem ma koje tačke prostora se izražavaju koordinatama u odnosu na drugi sistem. Naći koordinate tačke O.

1378. Stare koordinate (x, y, z) proizvoljne tačke izražavaju se pomoću novih koordinata (x', y', z') te iste tačke na sledeći način

$$3x = x' + 2y' + 2z' + 3 \qquad 3y = 2x' + y' - 2z' + 6 \qquad 3z = 2x' - 2y' + z' - 3.$$

Kako glasi jednačina površine $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$ u novim koordinatama? Koja je to površina?

1379. Naći afinu transformaciju prostora koja preslikava

1° tačke $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 0, 0)$, $M_3(0, 1, 0)$, $M_4(0, 0, 1)$
u tačke $M'_1(3, 5, -2)$, $M'_2(2, -1, -1)$, $M'_3(4, 0, 1)$, $M'_4(1, 0, 2)$;

2° $M_1(3, 5, -2)$, $M_2(-3, 2, 1)$, $M_3(0, 3, 0)$, $M_4(4, -2, 0)$
u tačke $M'_1(1, 1, 1)$, $M'_2(1, 2, 3)$, $M'_3(-1, -2, 0)$, $M'_4(0, 0, 0)$.

1380. Pri afinom preslikavanju ravni prelaze u ravni. Dokazati.

1381. Pri afinom preslikavanju odnos odsečaka dve paralelne prave ostaje nepromenjiv.

1382. Dokazati da je za afino preslikavanje odnos zapremina ma kakva dva tela invarijanta.

1383. Naći centar i napisati jednačinu krive $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ u novom koordinatnom sistemu. Koja je to kriva?

1384. Naći centar sledećih krivih: 1° $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$; 2° $2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0$.

1385. Rotacijom koordinatnih osa transformisati jednačinu $2x^2+4xy-y^2=12$ u kanonički oblik i nacrtati krivu koju predstavlja.

1386. Pomoću determinanti δ i Δ odrediti geometrijski smisao jednačina:

1° $x^2-4xy+3y^2-8x+14y+15=0$; 2° $2x^2+3xy-5y^2=0$;

3° $x^2-xy-y^2-x-y=0$.

1387. Dat je skup krivih drugoga reda: $\lambda x^2-3xy+y^2+\lambda x+3=0$. Odrediti λ da bi jednačina predstavljala: 1° skup elipsa (realnih ili imaginarnih); 2° skup hiperbola; 3° parabolu; 4° tačku; 5° par pravih koje se seku; 6° par pravih paralelnih (realnih ili imaginarnih).

1388. Koje krive predstavljaju jednačine: $x^2-2xy+\lambda y^2-4x-6y+3=0$ pri raznim značenjima parametra λ.

1389. Data je jednačina krivih: $x^2-\alpha xy+y^2+4x+6y-\beta=0$. Odrediti α i β da bi krive prolazile kroz tačku $A(2, 0)$ i predstavljale parabole. Približno nacrtati ove parabole.

1390. Za koje vrednosti parametara m i n jednačina

$$x^2+6xy+my^2+3x+ny-4=0$$

predstavlja: 1° centralnu krivu; 2° parabolu; 3° par paralelnih pravih.

1391. U jednačini $x^2+\lambda xy+y^2-4x-4y+1=0$ odrediti parametar λ da ta jednačina predstavlja: 1° par pravih: 2° parabolu: 3° ravnostranu hiperbolu.

§ 3. Ravan

1° Jednačina ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i normalna je na vektoru

$$\vec{N}=\{A, B, C\}$$

(sl. 13) glasi u vektorskom obliku:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{N}=0$$

ili

$$\vec{r}\cdot\vec{N}=\alpha,$$

gde je

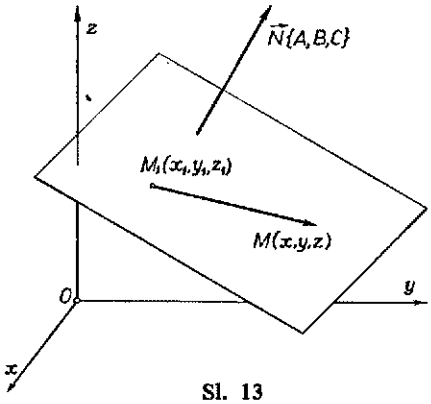
$$\alpha=\vec{r}_1\cdot\vec{N},\quad \vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}$$

i

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM};$$

u skalarnom:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+$$
$$+C(z-z_1)=0$$



Sl. 13

ili

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

2° *Kanonički oblik* jednačine ravni je:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

gde su a, b i c odsečci koje ravan odseca na koordinatnim osama.

3° Jednačine *snopa* ravni koje prolaze kroz presečnu pravu dveju ravni

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ i } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

je:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

4° Ugao između dve ravni čiji su normalni vektori:

$$\vec{N}_1=\{A_1, B_1, C_1\} \quad \text{i} \quad \vec{N}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$$

je:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}|\cdot|\vec{N}_2|}.$$

Odavde se dobijaju uslovi: paralelnosti

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

i normalnosti

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Odstojanje tačke $M(x_0, y_0, z_0)$ od ravni

$$Ax+By+Cz+D=0$$

dato je obrascem:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

1392. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(1, 1, 1)$ i normalna je na z osi.

1393. Koliki je koeficijenat D u jednačini ravni $Ax+By+Cz+D=0$, koja prolazi kroz koordinatni početak?

1394. Odrediti koeficijente B i C u jednačini ravni $Ax+By+Cz+D=0$, koja je paralelna sa yOz ravni.

1395. Kako glase jednačine koordinatnih ravni?

1396. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ $C(0, 0, 1)$ i „nacrtati" je.

1397. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz z osu i tačku $M(2, 1, 1)$. Nacrtati je.

1398. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(0, -1, 3)$ i normalna je na vektoru $\overrightarrow{M_1M_2}$, gde je: $M_2(1, 3, 5)$.

1399. Napisati jednačinu skupa tačaka $M(x, y, z)$ koje su podjednako udaljene od tačaka: $A(2, -1, 2)$ i $B(0, 1, 0)$.

1400. Napisati jednačinu ravni koja je paralelna osi z a na x i y osi odseca odsečke 2 i 3. Nacrtati je.

1401. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, -1, 3)$ i: 1° na koordinatnim osama odseca jednake odsečke, 2° prolazi kroz x osu, 3° prolazi kroz koordinatni početak i tačku (1, 1, 1).

1402. Izračunati odsečke na koordinatnim osama koje odsecaju sledeće ravni:

a) $x-2y+3z-6=0$; b) $5x+y-3z-15=0$; c) $x+2y-3z=0$;

d) $2y-3x-6=0$; e) $x-3=0$.

1403. Kakav je međusobni položaj sledećih ravni: $x-2y+3z=2$ i $2x-4y+$ $+6z=2$.

1404. Imaju li zajedničkih tačaka ravni: $x+2y+3z=4$, $2x+y-z=3$ i $3x+3y+2z=7$?

1405. Imaju li zajedničku tačku ravni: $2x-4y+3z=1$, $x-2y+4z=3$, $3x-y+5z=2$?

1406. Napisati u skalarnom obliku jednačinu ravni datu u vektorskom obliku $\vec{r}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=2$.

1407. Napisati u vektorskom obliku jednačinu ravni: $2x-y+z+3=0$.

1408. Kakav je međusobni položaj ravni datih jednačinama:

$$\vec{r}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=3 \quad \text{i} \quad \vec{r}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-4?$$

1409. Napisati jednačinu ravni u obliku $\vec{r}\cdot\vec{N}=\alpha$, koja je paralelna sa ravni $\vec{r}\cdot(2\vec{i}-\vec{j})=5$ i prolazi kroz tačku $M_1(0, 1, 2)$.

1410. Naći ugao između ravni: 1° $x+2z-6=0$ i $x+2y-4=0$;
2° $\vec{r}\cdot(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})=8$ i $\vec{r}(\vec{i}+\vec{k})=6$.

1411. Naći rastojanje tačke $M_0(2, 0, 1)$ od ravni a) $x-2y+3z+1=0$, b) $\vec{r}\cdot(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=2$.

1412. Naći rastojanje između ravni: 1° $x-2y+z-1=0$ i $2x-4y+$ $+2z+1=0$; 2° $\vec{r}\cdot(2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})+14=0$ i $\vec{r}\cdot(2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})-35=0$.

1413. Kroz presek ravni $4x-y+3z-1=0$; $x+5y-z+2=0$, postaviti ravan koja: 1° prolazi kroz tačku $A(a, b, c)$; 2° je paralelna sa y osom; 3° je paralelna sa xOy ravni; 4° je normalna na ravni $2x-y+5z-3=0$.

1414. Napisati jednačine dve uzajamno normalne ravni koje prolaze kroz presek ravni: $x=y$, $z=0$, ako jedna od traženih ravni prolazi kroz tačku (0, 4, 2).

1415. Napisati jednačinu ravni koja je normalna na ravan $5x-y+3z-2=0$ i koja je seče po pravoj koja leži u ravni xOy.

1416. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 5, -3)$ i presek ravni: $\vec{r}\cdot(3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})=5$ i $\vec{r}\cdot(\vec{i}+2\vec{k})=0$.

1417. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, -1, 1)$ i normalna je na ravnima; $3x+2y-z+4=0$ i $x+y+z-3=0$.

1418. Naći ugao između ravni koja prolazi kroz tačke: $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(2, -2, 0)$, $M_3(2, 2, 2)$ i xOy ravni.

1419. Napisati jednačinu skupa tačaka koje su od ravni $2x+2y+z-8=0$ udaljene za $d=4$.

1420. Napisati jednačinu simetralne ravni ugla diedra ravni: $x=0$ i $z=0$.

1421. Kakva mora postojati veza između koeficijenata A_i, B_i i C_i da tri ravni $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1, 2, 3)$ prolaze kroz jednu tačku?

1422. Kakva mora postojati veza između koeficijenata A_i, B_i, C_i i D_i da tri ravni: $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1, 2, 3)$ pripadaju jednom snopu ravni, tj. seku se po jednoj pravoj?

1423. Odrediti parametar λ tako da se ravni: $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$, $4x-y-2z+\lambda=0$ seku po istoj pravoj.

1424. Prava prolazi kroz tačku $M_1(2, 4, \lambda)$ i tačku $(-3, 0, 0)$ u ravni $x+2y+13z+3=0$. Napisati joj jednačinu. Odrediti λ da prava leži u datoj ravni.

1425. Kakva mora postojati veza između koeficijenata A_i, B_i, C_i i D_i da četiri ravni $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $(i=1, 2, 3, 4)$ prolaze kroz jednu tačku?

1426. U ravni $Ax+3y-6z+D=0$ odrediti koeficijente A i D da bi prolazila kroz presek ravni: $2x+y-z+3=0$ i $x-3y+5=0$.

1427. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz presek ravni $x-y+z+1=0$ i $x+y-z-1=0$ a koja sa prvom ravni zaklapa ugao od 60°.

1428. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu $\begin{cases} x+2y+3z-4=0 \\ 3x+z-5=0 \end{cases}$ i odseca jednake odsečke na osama Oy i Oz.

§ 4. Prava u prostoru

1° Ako prava prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i ako je paralelna vektoru $\vec{p}\{l, m, n\}$ (sl. 14), onda su njene jednačine:

1) *Vektorske*

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{p}=0$$

ili

$$\vec{r}\times\vec{p}=\vec{q},$$

gde je

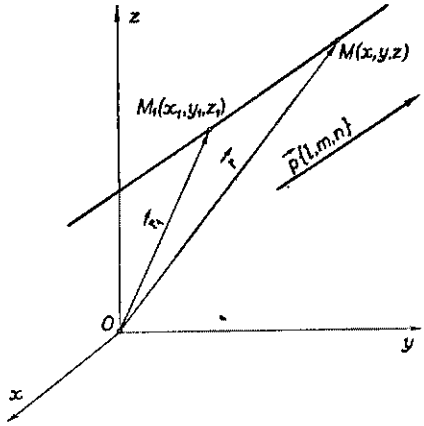
$$\vec{q}=\vec{r}_1\times\vec{p}.$$

2) *Dvojna jednačina* u *kanoničkom obliku*

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

3) *Parametarske jednačine:*

$$x=x_1+lt,\quad y=y_1+mt,\quad z=z_1+nt.$$



Sl. 14

2° Jednačina prave koja je data presekom dve ravni je:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

1429. Napisati jednačine prave koja prolazi kroz tačku $M_1(1, -1, 1)$ i paralelna je vektoru $\vec{p}\{1, 2, 3\}$.

1430. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačke: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

1431. Napisati jednačine ivica tetraedra čija su temena: $A(0, 0, 2)$, $B(4, 0, 5)$ $C(5, 3, 0)$, $D(-1, 4, 2)$.

1432. Naći kosinuse uglova koje prava gradi sa koordinatnim osama:

a) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$; b) $x=y-2=z+1$.

1433. Napisati parametarske jednačine prave koja prolazi kroz tačku $M_1(1, 0, 2)$ i paralelna je sa vektorom $\vec{p}\{-1, 3, 2\}$.

1434. Naći kosinuse pravaca prave $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0. \end{cases}$

1435. Napisati u kanoničkom obliku jednačine prave:

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$$

1436. Napisati jednačine pravih u kanoničkom obliku i naći ugao između njih:

$$\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 3x-2y+8=0, \\ z=3x. \end{cases}$$

1437. Kroz tačku $M_1(1, -2, 1)$ povući pravu: 1° paralelnu x osi; 2° paralelnu pravoj $\frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-3}$; 3° paralelnu pravoj $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$; 4° paralelnu pravoj $x=2$, $y=3$. $\left(\text{Jednačine } \frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-3} \text{ imaju smisla jedino kada je } x=2 \text{ pa se često pišu i ovako: } x=2, \frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-3}\right)$.

1438. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M_1(0, 1, -2)$ i zaklapa sa koordinatnim osama uglove od: 60°, 45° i 120°.

1439. Napisati jednačinu normale na z osu koja prolazi kroz tačku $M_1(-2, -1, 2)$.

1440. Potreban uslov da se prave:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{i} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

seku jeste da je:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Odrediti n u jednačini prave $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{n}$ da bi se sekla sa pravom: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ i u tom slučaju naći presečnu tačku.

1441. Odrediti parametar D da prava $\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 2x-3y-z+D=0 \end{cases}$ seče z osu.

1442. Odrediti parametre α i β tako da prava $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+\alpha y+z+\beta=0 \end{cases}$ leži u ravni xOy.

1443. Da li se seku prave:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1} \quad \text{i} \quad \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}?$$

1444. Odrediti prodor prave $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ kroz koordinatne ravni.

1445. Napisati jednačinu trajektorije tačke $M(x, y, z)$ koja polazi iz tačke $M_1(2, -3, -1)$ i kreće se pravolinijski brzinom $\vec{u}=\{2, 3, 1\}$.

1446. Odrediti uglove koje prava zaklapa sa koordinatnim osama:

$$1^\circ \begin{cases} x=2 \\ \vdots \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} x=1 \\ z=-1 \end{cases} \qquad 3^\circ \begin{cases} y=0 \\ z=2 \end{cases}.$$

1447. Jednačina prave je data u vektorskom obliku: $\vec{r}\times\left(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)=5\vec{i}+$ $+2\vec{j}+4\vec{k}$. Napisati odgovarajući kanonički oblik.

1448. Ako su $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+5}{2}$ kanoničke jednačine prave, napisati odgovarajuću vektorsku jednačinu.

1449. Ako prava ima vektor pravca $\vec{p}$ i ako je M_0 tačka van prave a M_1 tačka na pravoj, onda je odstojanje tačke M_0 od prave dato obrascem

$$d=\frac{|\vec{p}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{p}|}.$$ Dokazati.

1450. Naći rastojanje tačke $M_0(2, -1, 3)$ od prave

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}.$$

1451. Naći rastojanje između dve paralelne prave:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

1452. Izvesti obrazac za najkraće rastojanje između dve neparalelne prave:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{i} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

1453. Naći najkraće rastojanje između pravih:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

1454. Kroz tačku $M_1(1, 2, -1)$ postaviti pravu koja seče prave:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+3}{3} \quad \text{i} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}.$$

1455. Na pravoj $\frac{x-8}{8}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{0}$ naći tačku čije rastojanje od tačke $(8, 2, 0)$ iznosi 10.

§ 5. Prava i ravan

Prava

$$p: \quad \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \qquad \vec{p}\{l,\ m,\ n\}.$$

Ravan

$$\alpha: \quad Ax+By+Cz+D=0, \qquad \vec{N}\{A,\ B,\ C\}.$$

1° Ugao θ između prave p i ravni α:

$$\sin\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{N}}{|\vec{p}|\ |\vec{N}|}.$$

Uslovi paralelnosti:

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Uslov normalnosti:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

2° Tačka prodora prave i ravni nalazi se tako što se napišu parametarske jednačine prave

$$x=x_1+lt; \quad y=y_1+mt; \quad z=z_1+nt$$

i zamene vrednosti x, y, z u jednačini ravni. Iz tako dobijene jednačine odredi se parametar t a samim tim i koordinate prodora.

3° Uslov da prava p leži u ravni α:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$Al+Bm+Cn=0. \quad M_1(x_1,\ y_1,\ z_1) \text{ na pravoj } p.$$

1456. Naći prodor prave $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ kroz ravan $x-2y+z+5=0$.

1457. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(-1,\ 2,\ -3)$ i normalna je na pravoj $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Naći prodor date prave kroz nađenu ravan.

1458. Naći prodor prave

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

kroz ravan $x+y+3z-5=0$. Rezultat protumačiti geometrijski.

1459. Ispitati uzajamni položaj prave

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1} \text{ i ravni } x+y+3z-7=0.$$

1460. Izvesti uslov da data prava pripada datoj ravni.

1461. Naći ugao između prave

$$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-\frac{3}{2}} \text{ i ravni } 2x+y-z-4=0.$$

1462. Odrediti l u pravoj $\frac{x-1}{l}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ da bude paralelna sa ravni $x-2y+3z-1=0$.

1463. Odrediti parametre α i β u ravni $\alpha x+\beta y+2z-1=0$ da bude normalna na pravoj: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

1464. Kako glase uslovi: 1° paralelnosti, 2° normalnosti, ako su prava i ravan date u vektorskom obliku $\vec{r}\times\vec{p}=\vec{q}$ i $\vec{r}\cdot\vec{N}=\alpha$.

1465. Ako su prava i ravan date vektorskim jednačinama: $\vec{r}\times\vec{p}=\vec{q}$ i $\vec{r}\cdot\vec{N}=\alpha$, radijus-vektor prodora prave kroz ravan dat je obrascem:

$$\vec{r}=\frac{\alpha\vec{p}+\vec{N}\times\vec{q}}{\vec{p}\cdot\vec{N}}.$$ Dokazati.

1466. Naći prodor prave $\vec{r}\times\left(4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)=-6\vec{i}-8\vec{j}$ kroz ravan $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}\right)=2$.

1467. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(0, -1, 0)$ i sadrži pravu $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$.

1468. Napisati jednačinu ravni koja je normalna na ravni $2x+3y-z=4$ i koja prolazi kroz pravu $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$.

1469. Napisati jednačinu normale na ravan $x-2y-z-2=0$ koja prolazi kroz tačku $M_1(-2, 1, 1)$.

1470. Naći projekciju tačke $M(-1, 0, -1)$ na ravan $2x+y-z+7=0$.

1471. Naći tačku koja je simetrična tački $M(-1, 0, -1)$ u odnosu na ravan $2x+y-z+7=0$.

1472. Naći projekciju tačke $M(1, 2, 8)$ na pravu $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

1473. Naći tačku simetričnu tački $M(1, 2, 8)$ u odnosu na pravu

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}.$$

1474. Napisati jednačine projekcija prave $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ na koordinatne ravni.

1475. Napisati jednačinu projekcije prave $\begin{cases} 4x-y+3z-6=0 \\ x+5y-z+10=0 \end{cases}$ na ravan $2x-y+5z-5=0$.

1476. Prava $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$ se projektuje na ravan xOy iz tačke $P(5, 5, 2)$. Naći jednačinu projekcije.

1477. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 0, -1)$ i normalna je na ravnima: $2x-y-3=0$ i $x+y-z+1=0$.

1478. Napisati jednačinu ravni u kojoj se nalaze paralelne prave:

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}.$$

1479. Odrediti α i β iz uslova da ravan $\alpha x+\beta y+z+1=0$ sadrži pravu $x-1=y-2=z-3$.

1480. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$, a paralelna je pravoj $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$.

1481. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ i paralelna je pravoj $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$.

Naći najkraće rastojanje između datih pravih.

1482. Date su prave: $\frac{x-2}{\lambda}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$, $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$.

1° Odrediti λ da se prave seku. 2° Za tako nađeno λ naći presek pravih. 3° Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz koordinatni početak i normalna je na ravni koju određuju te dve prave.

1483. Napisati jednačinu zajedničke normale pravih: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$ i $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$.

1484. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-\ \ z+4=0 \end{cases}$ a sa ravni $x-4y-8z+12=0$ zaklapa ugao od 45°.

1485. Date su prave: $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ i $\begin{cases} x+\lambda y+z=0 \\ \lambda x-\ \ y-z=0 \end{cases}$

1° Naći jednačinu zajedničke normale ovih pravih. 2° Odrediti geometrijsko mesto ovih normala kad parametar λ varira.

1486. Sastaviti jednačinu prave koja leži u ravni $x-4y+2z-7=0$ i prolazi kroz tačku u kojoj ova ravan seče pravu $\begin{cases} x-2y-4z+3=0 \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases}$ i normalna je na ovoj pravoj.

1487. Napisati jednačinu prave koja leži u ravni $2x+3y-z+1=0$, prolazi kroz tačku $M(0, 0, z)$ i sa pravom $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$ zaklapa minimalan ugao.

1488. Napisati jednačinu prave koja leži u ravni $2x+3y-z+1=0$, zaklapa minimalni ugao sa pravom $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$ i na minimalnom je rastojanju od koordinatnog početka.

1489. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M_1(3, -2, -4)$, paralelna je ravni $3x-2y-3z-7=0$ i seče pravu $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

1490. Napisati jednačinu prave koja seče prave:

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3} \quad \text{i} \quad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{4}$$

i paralelna je ravnima $3x+12y-3z-5-0$ i $3x-4y+9z+7=0$.

1491. Naći ravan koja je paralelna pravama:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ z=3x+2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} y=-x+2 \\ z=4x-1 \end{cases}$$

i prolazi kroz sredinu rastojanja između njih.

1492. Naći pravu koja prolazi kroz tačku $M(-5, 2, -1)$ i seče pod pravim uglom pravu $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{-2}$.

1493. Tačka M polazi iz $M_0(0, 1, 1)$ brzinom $\vec{V}(1, 0, 2)$. Označimo redom sa d_1 i d_2 rastojanje tačke M od ravni $x+4y-3z+9=0$ i $5x+z+8=0$.

Naći trenutak i položaj tačke M kada je: 1° $d_1=d_2$; 2° $d=d_1+d_2$ minimalno.

1494. Tačka P kreće se u prostoru tako da je u vremenu t:

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{i}+(2-3t)\vec{j}+(2t-1)\vec{k};$$

O je koordinatni početak. 1° Pokazati da se tačka P kreće po pravoj liniji p. 2° Naći jednačinu prave p. 3° U kojem vremenu t se tačka P nalazi u ravni $2x+3y+2z+1=0$. 4° Naći jednačinu ravni koja je normalna na p u kojoj se nalazi tačka P kada je $t=2$.

1495. 1° Dokazati da prave (p_1): $\frac{x-l_1}{l}=\frac{y-m_1}{m}=\frac{z-n_1}{n}$; (p_2): $\frac{x-l}{l_1}=\frac{y-m}{m_1}=\frac{z-n}{n_1}$ uvek pripadaju jednoj ravni.

2° Ravan određena sa p_1 i p_2 uvek prolazi kroz koordinatni početak. Dokazati.

1496. Koja je tačka ravni $Ax+By+Cz+D=0$ najbliža koordinatnom početku?

1497. Data je ravan $x+y=0$ i prave

$$p_1: \frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{i} \quad p_2: \begin{cases} y=z+2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Odrediti pravu p paralelnu datoj ravni i koja seče date prave u tačkama čije je rastojanje 3.

1498. Naći jednačinu prave koja je simetrična pravoj

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+3}{5}$$

u odnosu na ravan $x+y+4z-9=0$.

1499. Neka su $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{a}$ dati vektori, gde je $\vec{r}_2$ vektor položaja tačke P

1° Odrediti rastojanje tačke P od ravni

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{a}=0.$$

2° Odrediti vektor položaja, $\vec{r}_0$, podnožja normale spuštene iz tačke P na datu ravan.

1558. Naći graničnu vrednost nizova čiji su opšti članovi:

$$1^\circ\ a_n=\frac{1}{2^n};\quad 2^\circ\ a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1};\quad 3^\circ\ a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2};\quad 4^\circ\ a_n=\frac{\sin nx}{n}.$$

1559. Da li imaju graničnu vrednost nizovi:

$$1^\circ\ a_n=\begin{cases}1, & n \text{ parno}\\ \frac{1}{n}, & n \text{ neparno}\end{cases}\qquad 2^\circ\ a_n=\frac{1}{n-(-1)^n};\qquad 3^\circ\ a_n=n[1-(-1)^n].$$

1560. Naći graničnu vrednost sledećih nizova:

$$1^\circ\ a_n=\frac{1}{2n}+\frac{2n}{3n+1};\quad 2^\circ\ a_n=\frac{1}{n}\sin n^2;\quad 3^\circ\ a_n=\frac{1}{2n}\cos 2n-\frac{3n}{6n+1};$$

$$4^\circ\ a_n=(\cos n!)\frac{n}{n^2+1}+\frac{2n}{3n+1}\cdot\frac{n}{1-3n}.$$

1561. Koji je izraz veći za dovoljno veliko n: 1°) $5000n+10^4$ ili $0{,}03n^2$; 2° 2^n ili n^{10000}; 3° $(3000)^n$ ili $n!$.

1562. Naći granične vrednosti sledećih nizova:

$$1^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{(n+1)^2};\quad 2^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^3+\frac{1}{2}n^2+0{,}5n+1}.$$

1563. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$. **1564.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5\cdots(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$.

1565. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\cdots+b^h}$, $(a_0,\ b_0\neq 0)$.

1566. Dokazati da je a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^ka^n=0$, $(|a|<1,\ k\in N)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Proverite sledeće zadatke:

1567. $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, $(|a|<1)$; $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$, $(a>1)$; $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$, $(a=1)$.

1568. 1° $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}3)^n=0$; 2° $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n=\infty$; 3° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2e}\right)^n=0$.

$$4^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n+3}{2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^n-3}=-1.$$

Naći granične vrednosti nizova:

1569. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$.

1570. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}$.

1571. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.

1572. Niz brojeva: $a_0, a_1, \ldots,$ sleduje po sledećem zakonu: a_0 i a_1 su dati. Svaki sledeći član jednak je poluzbiru prethodna dva.

1° Izraziti a_n preko a_0, a_1 i n. 2° Naći $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Naći granične vrednosti nizova:

1573. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$.

1574. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{an+b}-\sqrt{an+c})$, $(a>0)$.

1575. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$.

1576. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

1577. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}$.

1578. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+(+1)^{n-1}\cdot\dfrac{n}{n}\right]$.

1579. Dokazati da je: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n}=0$.

1580. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{n!}$.

Proveriti da li je:

1581. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$, $(a>0)$.

1582. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0$ $(a>0)$.

1583. Ako je $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korena}}$,

dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$. Generalisati: $a_1=\sqrt{c}$, $a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$, $c>0$.

1584. Ako je $a_n=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{2}{3}$.

1585. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}71828\ldots$

Naći granične vrednosti:

1586. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

1587. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+10}$

1588. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

1589. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$.

1590. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\ln(n+1)-\ln n]$.

1591. Dat je niz $u_0=-\ln 4$, $u_n=\ln\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}$, $n=1, 2, \ldots$

Ako je $S_n=n(u_0+u_1+\cdots+u_n)$ naći $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

1592. Dat je niz $\{a_n\}$ gde je $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}+\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n+(1+\alpha)\sin\frac{n\pi}{2}$.

Odrediti α iz uslova da niz konvergira pa naći graničnu vrednost.

1593. Odrediti α iz uslova da niz čiji je opšti član $a_n=\sqrt[n]{5+(2\alpha)^{(-1)^n n}}$ konvergira.

1594. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)$, gde je $\{a_n\}$ proizvoljan niz sa pozitivnim članovima.

1595. Ispitati konvergenciju niza

$\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right\}$. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

1596. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)=\ln k$.

1597. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{ puta}}1$.

1598. Dokazati da niz $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\cdots+\frac{1}{3^n+n}$ ima graničnu vrednost.

1599. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$.

1600. Dokazati da niz: $a_n=x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\cdots+\frac{x_n}{10^n}$ konvergira ako je

$$0<x_i<100, \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n).$$

1601. Članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ ispunjavaju uslove:

$$a_1>b_1>0, \; a_{n+1}=\frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

Dokazati: 1° $a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n>0$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$; 2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

1602. Ako je $\{a_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ monotono rastući niz, naći

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{a_1}{a_0\cdot S_1}+\frac{a_2}{S_1\cdot S_2}+\frac{a_3}{S_2\cdot S_3}+\cdots+\frac{a_n}{S_{n-1}\cdot S_n}\right\}$, gde je $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

1603. Neka je $u_1=1,\ u_2=2,\ \ldots,\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\ (n>2)$.

1° Dokazati da je $u_n^2-u_{n-1}\cdot u_{n+1}=(-1)^n$.

2° Pokazati da $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ konvergira kad $n\to\infty$ i naći $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1604. Ako je $a_n=\dfrac{n}{[1+2+3+\cdots+(n-1)]\,[1+2+3+\cdots+n]}$, za $n>1$, naći $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

1605. Znajući da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

1606. Dokazati da je e iracionalan broj.

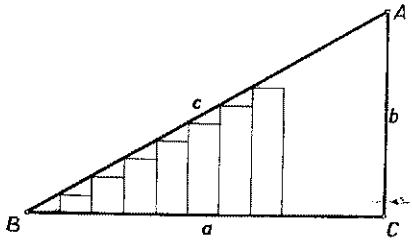
1607. Dokazati da niz čiji je opšti član:

$a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ konvergira.

1608. Dokazati da niz $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ konvergira.

1609. Dokazati da razlika između poluprečnika i odstojanja centra kruga od strana pravilnog upisanog mnogougla teži nuli, kad se broj strana neograničeno uvećava.

1610. U pravouglom trouglu ABC strana BC podeljena je na n jednakih delova i nad svakim delom konstruisan je pravougaonik tako da mu se jedno teme nalazi na hipotenuzi (sl. 15). Dokazati: a) da je granična vrednost zbira površina pravougaonika kad se n beskonačno uvećava, jednaka površini trougla; b) da je razlika površine stepenaste figure i površine trougla, beskonačno mala veličina.



Slika 15

1611. Duž a je podeljena na n jednakih delova. Nad svakim delom konstruisan je krug. Naći: a) zbir O_n, obima svih krugova; b) zbir P_n, površina svih krugova; c) $\lim\limits_{n\to\infty}O_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$; d) diskutovati rezultate pod c).

1612. Važi, sledeća, Stolzova teorema: neka $b_n\to\infty$ kad $n\to\infty$, pri čemu je počev od nekog n $b_{n+1}>b_n$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ ako postoji limes na desnoj strani, konačan ili beskonačan.

1613. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, konačan ili beskonačan, tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty} a_n.$$ Dokazati.

1614. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, konačan ili beskonačan, gde je $a_n>0$ za $n\in N$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1615. Dokazati da je za $a_n>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ako postoji limes na desnoj strani. Naći sledeće limese:

1616. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

1617. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>-1)$. **1618.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

1619. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

§ 2. Pojam funkcije realne promenljive

1° Neka su D i V skupovi realnih brojeva i f jednoznačno preslikavanje skupa D na skup V. Tada pišemo $y=f(x)$, $x\in D$, $y\in V$ i kažemo da je y jednoznačna funkcija od realne promenljive x. Promenljiva x zove se nezavisno promenljiva a y zavisno promenljiva. Skup D se zove definicioni skup ili oblast definisanosti funkcije $y=f(x)$ a V — vrednosni skup. U najjednostavnijim slučajevima oblast definisanosti je zatvoren interval (odsečak) $[a, b]$, tj. skup svih realnih brojeva x koji ispunjavaju uslove $a\leqslant x\leqslant b$, ili otvoren interval (a, b), tj. skup svih realnih brojeva x koji ispunjavaju uslove $a<x<b$. Inače oblast definisanosti može biti složeniji skup realnih brojeva.

2° Ako je funkcija data u obliku $y=f(x)$ kažemo da je zadata analitički u eksplicitnom obliku. Ako je analitički izraz preslikavanja x u y u obliku $F(x, y)=0$ kažemo da je funkcija zadata implicitno. Pored analitičkog načina zadavanja funkcija najčešći su još tabelarni i grafički način zadavanja.

3° Za funkciju $f(x)$, definisanu u intervalu $(-a, a)$, kažemo da je: *parna* ako je $f(-x)=f(x)$, *neparna* ako je $f(-x)=-f(x)$.

4° Ako funkcija $f(x)$ ispunjava uslov: $f(x+\omega)=f(x)$, (ω konstanta $\neq 0$), kažemo da je *periodična*. Najmanja pozitivna konstanta ω za koju je $f(\omega+x)=f(x)$ zove se *osnovni period funkcije* $f(x)$.

5° Ako postoji funkcija $x=\varphi(y)$ takva da je $y=f[\varphi(y)]$ ili $F[\varphi(y), y]=0$, onda se funkcija $x=\varphi(y)$ naziva *inverzna funkcija* funkcije $y=f(x)$, odnosno inverznom funkcijom funkcije $F(x, y)=0$.

6° Ako je za $x_1<x_2$, $x_1, x_2\in X$: a) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, funkcija je *neopadajuća*; b) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ funkcija je *nerastuća*; c) $f(x_1)<f(x_2)$ funkcija je *rastuća*; d) $f(x_1)>f(x_2)$ funkcija je *opadajuća*. Sve se one zovu *monotone*, a c) i d) *strogo monotone*.

1620. U krug je upisan pravougaonik. Dva suprotna temena kreću su po periferiji kruga. Da li su promenljive: a) strane, b) dijagonale, c) centralni ugao pod kojim se vidi manja strana, d) površina pravougaonika, e) obim pravougaonika?

1621. Teme trougla kreće se po pravoj paralelnoj osnovici. Da li su promenljive veličine: a) površina trougla, b) uglovi na osnovici, c) zbir uglova trougla, d) visina koja odgovara osnovici, e) visina povučena iz temena na osnovici? Koje su od promenljivih veličina parametri, a koje apsolutne konstante?

1622. U sferi poluprečnika R upisan je konus. Ako se osnova kreće paralelno samoj sebi, da li su promenljive veličine: a) zapremina konusa, b) visina konusa, c) bočna površina konusa, d) površina osnove, e) ugao pri vrhu osnog preseka konusa?

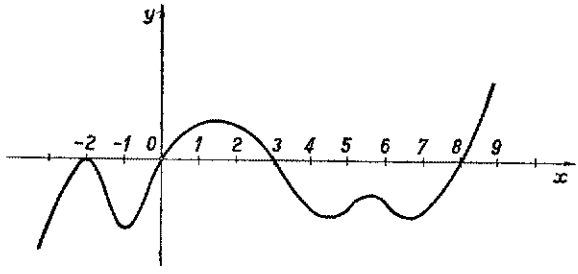
1623. U prethodnom zadatku napisati fukcionalne zavisnosti i ukazati na oblast u kojima mogu da se kreću promenljive veličine: a) površina osnove B, od visine h konusa, b) površina osnove B od ugla φ pri vrhu osnog preseka konusa, c) zapremina konusa V od ugla φ.

1624. Telo je izbačeno iz tačke O početnom brzinom $v_0 = 300$ m/sec pod uglom $\alpha = 45°$ od ravni horizonta. a) Odrediti položaj tela u zavisnosti od vremena t. b) Napisati jednačinu putanje tela. c) Naći oblast definisanosti funkcije y u zavisnosti od x (y visina tela iznad horizonta, a x horizontalno udaljenje tela od tačke O). d) Odrediti trenutak kada će telo dostići najveću visinu. e) Naći najveću visinu. (Zanemariti otpor vazduha i uzeti da je $g = 10$ m/sec^2).

1625. Data je tablica značenja logaritamske funkcije sa dva decimala. Konstruisati grafik spajanjem tačaka neprekidnom krivom.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\log x$	−0,60	−0,30	0	0,18	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,84	0,90	0,96	1	1,3

1626. Nacrtan je grafik funkcije $y = f(x)$ (sl. 16). Odgovoriti na sledeća pitanja: 1° Za koje vrednosti nezavisno promenljive x je vrednost funkcije y jednaka nuli? 2° Za koje vrednosti argumenta je funkcija pozitivna? 3° Za koje vrednosti argumenta je funkcija negativna?



Sl. 16

1627. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$. Naći: $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Da li postoji $f(-1)$?

1628. Data je funkcija $\varphi(x)=2\sin 2x+\cos x$. Naći: $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(a)$, $\varphi(a-b)$, $\varphi(\Delta x)$.

1629. Ako je $f(x)=2x^5-x^3+\frac{1}{x^5}$, dokazati da je $f(-x)=-f(x)$.

1630. Ako je $f(x)=2\sin x-3\cos x$, dokazati da je $f(x+2k\pi)=f(x)$, gde je $k\in C$.

1631. Ako je $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -1<x<0\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ naći: $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Postoje li $f(2)$ i $f(5)$?

1632. Neka je $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

Naći: $f(2)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(-0{,}5)$, $f(3)$.

1633. Označimo sa $E(x)$ najveći ceo broj od x, tj. ako je $x=1{,}3$; $E(1{,}3)=1$; $x=-1{,}2$: $E(-1{,}2)=-1$; $E(\pi)=3$. Nacrtati grafik funkcije $E(x)$.

1634. Dokazati da je $E(x+1)=E(x)+1$.

1635. Ako je $f(x)=x-E(x)$ dokazati da je $0\leqslant f(x)<1$ za svako x.

1636. Ako je $y=\sqrt{u^2-1}$, $u=\sqrt{z+1}$, $z=\sin^2 x$, izraziti y kao funkciju od x.

1637. Dato je: $y=\sin x$, $v=\log y$, $u=\sqrt{1+v^2}$ izraziti u kao funkciju od x.

1638. Sledeće funkcije napisati u obliku niza elementarnih funkcija:

$$1^\circ\ y=\log^2 x;\qquad 2^\circ\ y=\sqrt[3]{\sin^2 x};\qquad 3^\circ\ y=5^{(3x+1)^2}.$$

1639. Za $f(x)=x^3-x$ naći $f[f(x)]$ i $f\{f[f(x)]\}$.

1640. Napisati u eksplicitnom obliku sledeće funkcije, implicitno date:

$$1^\circ\ x^2-y^2=4;\qquad 2^\circ\ 2x^3\cdot y^2=x-1;\qquad 3^\circ\ 3^{x+y}=2;$$
$$4^\circ\ \log(x-1)+\log(y+1)=1;\qquad 5^\circ\ e^{xy}=x.$$

1641. Ako je $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ pokazati da je $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

1642. Date su funkcije: $f(x)=\log_a x$, $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=a^x$. Koje od njih imaju osobine da je: 1° $F(1)=0$; $F(a)=1$; $F(xy)=F(x)+F(y)$; 2° $F(0)=1$, $F(1)=a$, $F(x+y)=F(x)\cdot F(y)$?

1643. Naći jednoznačne grane dvoznačne funkcije y, implicitno definisane

$$2x^2-3y^2+4x-y+3=0.$$

1644. Za $f(x)=\ln x$ naći $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

1645. Naći linearnu funkciju $f(x)$ ako je $f(0)=-3$ i $f(1)=-1$.

1646. Ako je $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, pokazati da je $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1647. Naći kvadratnu funkciju $f(x)$ ako se zna da je

$$f(0)=4,\ f(1)=3,\ f(2)=6.$$

1648. Naći $f(x)$ ako je $f(x+1)=x^2-3x+2$.

1649. Naći $f(x)$ ako je $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

1650. Ako je $f(x)=\log x$ a $\varphi(x)=10^x$, pokazati da je

$$\text{a) } f[\varphi(x)]=x; \qquad \text{b) } \varphi[f(x)]=x.$$

1651. Naći polinom trećeg stepena $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, ako je

$$P_3(-1)=0,\ P_3(0)=2,\ P_3(1)=-3,\ P_3(2)=5.$$

1652. 1° Naći polinom III stepena $f(x)$, takav da je $f(x)-f(x-1)\equiv x^2$ pa na osnovu toga naći zbir kvadrata prvih n prirodnih brojeva.
2° Naći polinom IV stepena $g(x)$, takav da je $g(x)-g(x-1)\equiv x^3$ i na osnovu toga naći zbir kubova n prvih prirodnih brojeva.

√ **1653.** Koje su od sledećih funkcija parne a koje neparne:

$$1^\circ\ f(x)=x^5-5x^3+x; \quad 2^\circ\ f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x});$$

$$3^\circ\ f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}; \quad 4^\circ\ f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x};$$

$$5^\circ\ f(x)=|x|; \quad 6^\circ\ f(x)=\frac{3}{2}; \quad 7^\circ\ f(x)=\ln x.$$

1654. Pokazati da je $f(x)+f(-x)$ parna a $f(x)-f(-x)$ neparna funkcija.

1655. Ispitati parnost sledećih funkcija:

$$1^\circ\ y=12x^8-4; \quad 2^\circ\ y=2^x; \quad 3^\circ\ y=\sin x; \quad 4^\circ\ y=\cos(x+1);$$

$$5^\circ\ y=\sqrt{1-x^2}; \quad 6^\circ\ y=e^{x^2}; \quad 7^\circ\ y=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}.$$

√ **1656.** Pokazati da je funkcija $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ neparna.

√ **1657.** Funkcija $y=f(x)$ definisana u nekom intervalu $[-a, a]$ može se napisati u obliku zbira parne i neparne funkcije na sledeći način:

$$y=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.\ \text{Dokazati.}$$

1658. Koje su od sledećih funkcija periodične:

1° $y=\sin\frac{x}{3}$, 2° $y=\cos\frac{3x-2}{5}$; 3° $y=\operatorname{tg} ax$; 4° $y=\cos^2 x$; 5° $y=x\sin x$;

6° $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$; 7° $y=E(x)$; 8° $y=\sin\sqrt{x}$; 9° $y=3$.

1659. Dokazati da pri konstantnom a i za svako x funkcija $F(x)=\frac{1+F(x-a)}{1-F(x-a)}$ je periodična.

1660. Funkcija $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ ima osnovni period $\omega=2\pi$. Dokazati.

1661. Odrediti period sledećih funkcija;

1° $y=3+\sin\pi x$; 2° $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; 3° $y=5+2\sin(1-x)$;

4° $y=2\sin x-3\cos x$; 5° $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

1662. Dokazati da je proizvod: 1° dve parne funkcije, parna funkcija; 2° dve neparne funkcije, parna funkcija; 3° parne i neparne, neparna funkcija.

1663. Dokazati da funkcija Dirichleta: $\chi(x)=\begin{cases}1, & x \text{ racionalno}\\ 0, & x \text{ iracionalno}\end{cases}$ ima za period svaki racionalan broj r, $r>0$.

1664. Koreni jednačine $f(x)=0$ zovu se nule funkcije $y=f(x)$. Za sledeće funkcije naći: nule i intervale u kojima je $f(x)>0$ i $f(x)<0$:

1° $y=x-1$; 2° $y=a^x$; 3° $y=\ln\frac{2x}{1+x}$.

1665. Naći oblast definisanosti funkcije $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\ln(1-x)}$.

Naći oblast definisanosti sledećih funkcija:

1666. $y=x^{17}-\frac{5x^4}{3}+\sqrt{248}$.

1667. $y=\frac{x^3+7}{x^2-5x+6}$.

1668. $y=\sqrt{2x^2+x+9}$.

1669. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}+e^{\frac{1}{x}}$.

1670. $y=\frac{x^2-4+\ln(-x)}{1+\sqrt{x^2-4}}$.

1671. $y=\ln\arcsin\frac{x+2}{5-x}$.

1672. $y=\arcsin(\sin x)$.

√ **1673.** $y=\sqrt{\ln\frac{x-4}{x+2}}+\sqrt{4-3x-x^2}$.

1674. $y=\arcsin(3+2^x)$.

1675. $y=\ln\frac{x-1}{2x+7}+\sqrt{x^2-4}-\sin\frac{x}{2}$.

1676. $y=\ln\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}+\sqrt{2^x+1}$.

√ **1677.** $y=\sqrt{\cos x^2}$.

1678. $y=\sin\ln(2x-1)$.

1679. $y=\frac{\ln(x+3)}{\sqrt{|x|-x}}$.

1680. $y=\ln(x-|x|)$.

1681. $y=\sqrt{\sin\pi(x-1)}+\sqrt{4-x^2}$.

1682. $y=\frac{x}{|x|}$.

1683. $y=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x-|x|}}$.

1684. $y=\frac{1}{E(x)}$.

1685. $y=\sqrt{E(x)-x}$.

1686. $y=\log\sin\frac{3x-5}{2}\pi$.

1687. Odrediti oblast definisanosti funkcije $y=(-1)^x$ kao i skup njenih vrednosti.

Da li su ekvivalentne funkcije:

1688. $f(x)=\sqrt{x^2}$ i $\varphi(x)=x$.

1689. $f(x)=\frac{x}{x}$ i $\varphi(x)=1$.

1690. $f(x)=\ln x^2$ i $\varphi(x)=2\ln x$.

1691. 1° $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ i $\varphi(x)=1$; 2° $f(x)=\sin x$, $x\in(0,\pi)$ i $\varphi(x)=\sin x$, $x\in(0,\pi)$.

1692. Dokazati da je $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\equiv 2\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ i naći oblast definisanosti funkcije $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

1693. Funkcija $f(x)$ je definisana u $[0, 1]$. Naći definicione skupove sledećih funkcija: a) $f(x^2)$; b) $f(\cos x)$; c) $f(a+x)$; d) $f(\ln y)$.

Naći intervale u kojima su sledeće funkcije monotone (strogo monotone):

1694. $y=x-2$.

1695. $y=x^2-x+2$.

1696. $y=2^x$.

1697. $y=E(x)$.

1698. $y=\sin x$.

√ **1699.** Ako $f(x)$ monotono raste u intervalu $(0, \infty)$, pokazati da je funkcija $F(x)=f(x^{2n})$ (n prirodan broj) definisana za svako x, i da je monotono opadajuća za $x\in(-\infty, 0)$ i monotono rastuća za $x\in(0, \infty)$.

1700. Ako $f(x)$ monotono raste za $x\in(-\infty, \infty)$, šta se može reći o monotoniji funkcije: $F(x)=f(x^{2n+1})$, $(n\in N)$.

1701. Pokazati da funkcija $y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$, $(a>1)$ ima sledeće osobine:

a) definisana za $x\in(-\infty, \infty)$; b) neparna je, c) strogo monotono raste za $x\in(-\infty, \infty)$.

Naći inverzne funkcije i odrediti oblast definisanosti inverznih funkcija za sledeće funkcije:

1702. $y=x+1$. **1703.** $y=\ln\frac{x}{2}$. **1704.** $y=\sqrt[3]{x^2+1}$.

1705. $y=2^x-2$. **1706.** $y=\sin x$. **1707.** $y=\operatorname{arc\,tg} 3x$.

1708. Pokazati da je inverzna funkcija funkcije $y=\frac{1-x}{1+x}$, sama ta funkcija.

1709. Naći funkciju inverznu funkciji $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$.

1710. Naći funkciju inverznu funkciji $y=\frac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$, $x\in[0, \pi]$, i odrediti oblast definisanosti inverzne funkcije.

1711. Naći funkciju $\varphi(x)$, inverznu funkciji $f(x)=\operatorname{ctg} x$ i dokazati da je: $f[\varphi(x)]=x$ i $\varphi[f(x)]=x$, $x\in(0, \pi)$.

1712. Ako je $f(x)=\sin x$ i $\varphi(x)=\arccos x$, pokazati da je

$$f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}.$$

1713. Ako je: $f(x)=ax^2-bx-c$ i $\varphi(x)=cx^2-bx-a$, $a, b, c>0$, $x_1>0$, $x_2>0$, tada iz $f(x_1)=\varphi(x_2)=0$ i $a\neq c$ sledi $x_1+x_2>2$.

1714. Naći funkciju inverznu funkciji:

1° $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 2° $y=\log_a\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)$.

1715. Naći funkciju inverznu funkciji: 1° $y=\frac{\sin x+2}{\sin x+1}$, 2° $y=\frac{\sin x+2\cos x}{2\sin x-3\cos x}$, i odrediti oblast definisanosti, tako dobijene funkcije.

Naći funkciju inverznu funkciji:

1716. $y=\cos x-\sin x+1$. **1717.** $y=\ln\left(\arcsin\frac{x}{x+1}\right)$.

1718. Data je funkcija $f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$.

1° Dokazati identičnost: $f(\pi-2x)=2-[f(x)]^2$.

2° Rešiti jednačinu: $f(x)=f(px)\operatorname{ctg}\frac{px}{2}$.

1719. Data je funkcija u parametarskom obliku: $x=3\sin t$, $y=1-\cos 2t$, (t promenljiv parametar). a) Izraziti y kao funkciju od x. b) Odrediti oblast definisanosti funkcije $y=y(x)$ i skup vrednosti y. c) Kakva je funkcija $y=y(x)$ u pogledu parnosti? d) Naći $y=y(-3)$. e) Naći oblast definisanosti inverzne funkcije za funkciju $y=y(x)$.

U sledećim zadacima eliminisati parametar t i naći direktnu zavisnost između x i y:

1720. $x=t^2-2t+1$,
$y=t^2-t-2$.

1721. $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$,
$y=t+e^t$.

1722. $x=\sin t-\cos t+1$,
$y=\operatorname{tg}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

1723. $x=\sin t+\sqrt{3}\cos t$,
$y=t+\sin\left(t+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}\right)$.

1724. Dokazati da su funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$ inverzne međusobno ako ispunjavaju uslov: $f[g(x)]=x$. Koliko je $g[-f(x)]$, ako su funkcije jednoznačne?

1725. Pokazati da je inverzna funkcija bilinearne funkcije $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, bilinearna.

1726. Naći inverznu funkciju funkcije $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$. $(a>0)$ i dokazati da joj je grafik simetričan u odnosu na Ox osu.

1727. Data je funkcija $f(x)=\sqrt{\sin\ln x+\cos\ln x}-1$. a) Odrediti oblast definisanosti te funkcije. b) Naći najveću i najmanju vrednost funkcije. c) Naći inverznu funkciju i odrediti oblast definisanosti inverzne funkcije.

§ 3. Grafici elementarnih funkcija

Crtanje grafika funkcije $y=f(x)$ vrši se spajanjem tačaka $M_i(x_i, y_i)$, $y_i=f(x_i)$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ koje su dovoljno bliske jedna drugoj.

Pomoću grafika Γ funkcije $y=f(x)$, neposredno se mogu nacrtati grafici sledećih funkcija: 1) $y=-f(x)$—simetrično preslikavanje grafika Γ u odnosu na x osu. 2) $y=f(-x)$—simetrično preslikavanje grafika Γ u odnosu na y osu. 3) $y=f(x-a)$—translacija grafika Γ paralelno x osi za a. 4) $y=f(x)+b$—translacija grafika Γ paralelno y osi za b. 5) $y=kf(x)$—uvećanje grafika Γ k puta.

Isto tako pomoću grafika Γ, funkcije $y=f(x)$, mogu se približno nacrtati grafici sledećih funkcija

1) $y=\frac{1}{f(x)}$, 2) $y=|f(x)|$, 3) $y=[f(x)]^n$, $n\in N$, 4) $y=\frac{1}{|f(x)|}$,

5) $y=\sqrt{f(x)}$ 6) $y=a^{f(x)}$, $a\in R$, 7) $y=\ln|f(x)|$, 8) $y=\frac{1}{\ln|f(x)|}$,

9) $y=\sqrt{\ln|f(x)|}$ itd.

Nacrtati grafike sledećih elementarnih funkcija:

1728. $y=x^n$, n neparan broj. **1729.** $y=x^n$, n paran broj.

1730. $y=\frac{1}{x^n}$, n neparan broj. **1731.** $y=\frac{1}{x^n}$, n paran broj.

1732. $y=\sqrt[n]{x}$, n neparan broj. **1733.** $y=\pm\sqrt[n]{x}$, n paran broj.

1734. $y=a^x$, $(a\gtrless 1)$ — eksponencijalna funkcija.

1735. $y=\log_a x$, $(a\gtrless 1)$ — logaritamska funkcija.

1736. 1° $y=\sin x$, 2° $y=\cos x$. **1737.** 1° $y=\operatorname{tg} x$, 2° $y=\operatorname{ctg} x$.

1738. 1° $y=\arcsin x$, 2° $y=\arccos x$. **1739.** 1° $y=\operatorname{arc\,tg} x$, 2° $y=\operatorname{arc\,ctg} x$.

1740. 1° $y=\operatorname{sh} x$, 2° $y=\operatorname{ch} x$. **1741.** 1° $y=\operatorname{tgh} x$, 2° $y=\operatorname{ctgh} x$.

1742. 1° $y=\operatorname{Ar\,sh} x$, 2° $y=\operatorname{Ar\,ch} x$. **1743.** 1° $y=\operatorname{Artgh} x$, 2° $y=\operatorname{Arctgh} x$.

1744. Pomoću grafika funkcije $y=\sin x$ nacrtati grafike sledećih funkcija:

1° $y=\frac{1}{\sin x}$. 2° $y=|\sin x|$. 3° $y=(\sin x)^n$. 4° $y=\frac{1}{|\sin x|}$.

5° $y=\sqrt{\sin x}$. 6° $y=e^{\sin x}$. 7° $y=\ln|\sin x|$. 8° $y=\frac{1}{\ln|\sin x|}$.

9° $y=\sqrt{\ln|\sin x|}$.

1745. Nacrtati grafike sledećih linearnih funkcija:

1° $y=ax$, za: $a=0, 1, -1, 3, \frac{1}{2}$. 2° $y=x+b$, za: $b=0, 1, \frac{1}{2}, -2$.

3° $y=ax+b$, za: $a=2$, $b=-3$; $a=\frac{1}{2}$, $b=2$.

1746. Ako je za napon $E=2{,}4$ V jačina struje $I=0{,}8$ A, izraziti jačinu struje preko napona i nacrtati grafik te funkcije.

1747. Neka količina gasa zauzimala je na 20°C zapreminu od 107 cm³, a na 40°C, 114 cm³. a) Izraziti zapreminu V u funkciji temperature t. b) Kolika je zapremina V 0°C? Nacrtati sliku.

1748. Nacrtati grafike sledećih kvadratnih funkcija (parabole):

1° $y=ax^2$, $a=1, \frac{1}{2}, -1, 2$. 2° $y=x^2+c$, $c=1, 2, -1, 2$.

3° $y=ax^2+bx+c$, $a=1$, $b=-2$, $c=3$; $a=2$, $b=4$, $c=0$.

1749. Nacrtati grafike funkcija:

1° $y=x^3-1$. 2° $y=(x-1)^3$. 3° $y=2+(x-2)^3$.

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

1750. $y=x^3-3x+2$. **1751.** $y=x^2-x^4$.

1752. $y=\frac{2}{x}$. **1753.** $y=\frac{1}{1-x}$.

1754. $y=\frac{x-2}{x+2}$. **1755.** $y=x+\frac{1}{x}$.

1756. $y=\frac{1}{(x-1)^2}$. **1757.** $y=\frac{x^2}{x+1}$.

1758. $y=\frac{1}{1+x^2}$. **1759.** $y=x^2+\frac{1}{x}$. **1760.** $y=\sqrt[3]{x^2}$.

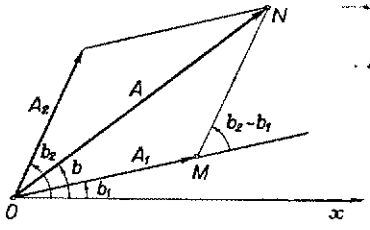
1761. $y=\sqrt{x^3}$. **1762.** $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. **1763.** $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

1764. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$. **1765.** $y=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$.

1766. $y=\pm x\sqrt{1-x^2}$. **1767.** 1° $y=\sin ax$, $a=2, \frac{1}{2}, \pi$.

2° $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$.

1768. Zbir dve harmonijske oscilacije $y_1=A_1\sin(ax+b_1)$ i $y_2=A_2\sin(ax+b_2)$ je harmonijska oscilacija $y=A\sin(ax+b)$. Grafički se može odrediti amplituda A i početna faza b na sledeći način. Nacrtajmo zrake pod uglovima b_1 i b_2 prema horizontalnoj osi (sl. 17) i na njima odmerimo odsečke respektivno A_1 i A_2 jedinica. Slaganjem dobijenih vektora (po pravilu paralelograma) dobijamo vektor dužine A koji sa horizontalnom osom zaklapa ugao b. A i b su amplituda zbira i početna faza zbira. Dokazati ovo tvrđenje.



Sl. 17

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

1769. $y=a\sin x+b\cos x$. **1770.** $y=x+\cos x$. **1771.** $y=x\sin x$.

1772. Pomoću grafika funkcije $y=x^2$ nacrtati grafik funkcije $y=\sin x^2$.

1773. Pomoću grafika funkcije $y=x^2-1$ nacrtati grafik funkcije $y=\sin(x^2-1)$.

Nacrtati grafike funkcija:

1774. $y=\cos(x^2+1)$. **1775.** $y=\sin\frac{1}{x}$. **1776.** $y=\cos\frac{x}{x+1}$.

1777. Pomoću grafika funkcije $y=\log_{10}x$ nacrtati grafik funkcije $y=\cos\log_{10}x$.

1778. Pomoću grafika funkcije $y=x^2-1$ nacrtati grafik funkcije $y=\ln\sin(x^2-1)$.

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

1779. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$. **1780.** $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

1781. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **1782.** $y=(\arcsin x)^2$.

1783. $y=\arccos\frac{1}{x}$. **1784.** $y=\operatorname{arc\,tg}(x-1)$.

1785. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh}x)$. **1786.** $y=\arccos(\cos x)$.

1787. $y=\arcsin|\sin x|$. **1788.** $y=x-\operatorname{arc\,tg}x$.

1789. $y=\arcsin\frac{1}{x-1}$. **1790.** $y=a^x+b$, $(a=2,\ b=1)$.

1791. 1° $y=e^x$, 2° $y=e^{-x}$, $y=e^{x^2}$. **1792.** $y=2^{\frac{1}{x}}$.

1793. $y=e^{-x^2}$ (kriva verovatnoće). **1794.** $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1795. $y=\pm\sqrt{e^{-x}-1}$. **1796.** $y=\ln(x+3)+1$.

1797. $y=\ln x^2$. **1798.** $y=\ln(x^2-1)$. **1799.** $y=\ln(1-x^2)$.

1800. $y=\ln\frac{x-2}{x+1}$. **1801.** $y=\ln\frac{2x-1}{3x+2}$. **1802.** $y=\ln\frac{1-x}{x+5}$.

1803. $y=\frac{1}{\ln(x-1)}$. **1804.** 1° $y=\frac{1}{2+\cos x}$. 2° $y=\ln\frac{1}{1+\cos x}$.

1805. $y=\ln(\ln x)$. **1806.** $y=x+|x|$.

1807. $y=x|x|$. **1808.** $y=|x-3|-|x|$.

1809. $y=\dfrac{1}{1-|x-1|}$.

1810. $y=|x^2-1|-|x-2|$.

1811. $y=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{2x}$.

1812. $y=\dfrac{|x^2-x|}{x}$.

1813. $y=\cos x-|\cos x|$.

1814. $y=2\sin x|\cos x|$.

1815. Neka je

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \quad \text{i} \quad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<2\\ 2, & |x|>2;\end{cases}$$

nacrtati grafike sledećih funkcija:

1° $y=\varphi[\varphi(x)]$; 2° $y=\varphi[\psi(x)]$; 3° $y=\psi[\varphi(x)]$; 4° $y=\psi[\psi(x)]$.

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

1816. $y=H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/2, & x=0.\\ 1, & x>0\end{cases}$

1817. $y=x+E(x)$.

1818. $y=H(t-a)$, $(a>0)$.

1819. $y=H(t-a)-H(t-b)$, $(b>a>0)$.

1820. $y=H(t-a)\cdot H(t-b)$, $(b>a>0)$.

1821. $y=H\{(t-p)\cdot(t-q)\}=H\{t-\max(p,q)\}+H\{\min(p,q)-t\}$, $(p>q)$.

1822. $y=H(\sin t)$.

1823. $y=H(t)\sin t$.

1824. $y=H(\sin t)-H(t)\sin t$.

1825. $y=|x|+E(x)$.

1826. $y=[E(x)]^{E(x)}$.

1827. a) $y=\dbinom{4}{x}$; b) $y=\sqrt{\dbinom{4}{x}}$, $x\in N$.

1828. $\rho=2$.

1829. $\rho=a\varphi$, $(a>0)$ (Arhimedova spirala).

1830. $\rho=e^{\varphi}$ (logaritamska spirala).

1831. $\rho=\dfrac{a}{\varphi}$ (hiperbolička spirala).

1832. $\rho=2\cos\varphi$.

1833. $\rho=\dfrac{2}{\sin\varphi}$.

1834. $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (kardioida).

1835. Napisati jednačinu krive $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $(a>0)$ u polarnim koordinatama i nacrtati je.

Nacrtati grafike funkcija:

1836. 1° $x=t$, $y=t^2$; 2° $x=|t+1|-2$, $y=t^2-3$.

1837. $x^2=5-|t|$, $y^2=t+4$.

1838. $x=2\cos t,\ y=2\sin t.$ **1839.** $x=4\cos t,\ y=3\sin t.$

1840. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$ **1841.** $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

1842. $x=\dfrac{at}{1+t^3},\quad y=\dfrac{at^2}{1+t^3}$ (Deckartesov list).

1843. Grafički rešiti sledeće jednačine:

1° $2x^2-x-2=0$; 2° $x^3+2x-1=0$; 3° $\log x=0{,}1\,x$;

4° $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{x}\ (0<x<\pi)_0$; 5° $2^x=2x$; 6° $\sin x=1-2x$.

1844. Pokazati da su funkcije $f=(x)=x^2-x+1$ i $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{x-\dfrac{3}{4}}$ uzajamno inverzne a zatim rešiti jednačinu:

$$\frac{1}{2}\pm\sqrt{x-\frac{3}{4}}=x^2-x+1.$$

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

1845. $y=\sqrt{1+t+2\sqrt{t}}-\sqrt{1+t-2\sqrt{t}}.$ **1846.** $|x|-|y|=1.$

1847. Pokazati da je grafik funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ simetričan u odnosu na pravu $x=-\dfrac{1}{2}$.

1848. Nacrtati grafik funkcije

$$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(|x|+\frac{1}{n}\right)+\left(|x|+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(|x|+\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

1849. Rešiti jednačinu: $x^2-2x+2=1+\sqrt{x-1}.$

1850. Ako grafik funkcije $y=f(x)$ leži sa jedne strane prave $y=x$ i nema sa njom zajedničkih tačaka, onda jednačina $f(x)=g(x)$, gde je $g(x)$ inverzna funkcija funkcije $f(x)$, nema realnih korena. Dokazati.

1851. Pokazati da jednačina $2^x=\log_2 x$ nema realnih korena.

1852. Naći inverznu funkciju $g(x)$, funkcije: $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & x<2 \\ -x+4, & x>1 \end{cases}$.

Pokazati da jednačina $f(x)=g(x)$ ima tri realna korena. Naći te korene.

1853. Dokazati da se grafik funkcije $y=ka^x$, $k>0$ može dobiti translacijom grafika funkcije $y=a^x$ duž x ose. Za koliko treba izvršiti translaciju?

1854. Dokazati da se grafik funkcije $y=\log_a kx$, $k>0$ može dobiti translacijom grafika funkcije $y=\log_a x$ duž y ose. Za koliko treba izvršiti tu translaciju?

1855. Dokazati da se grafik funkcije $y=\sin x$ može dobiti translacijom grafika $y=\cos x$ duž x ose. Za koliko treba izvršiti translaciju?

§ 4. Granične vrednosti funkcija

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno mali broj, a konstanta i x promenljiv broj. Ako je:

(1) $$|x-a|<\varepsilon,$$

kaže se da x teži ka a i obeležava se $x\to a$. Ako je $x<a$ i ispunjava uslov (1) kaže se da x teži ka a sa leve strane i obeležava se $x\to a-0$. Ako je $x>a$ onda x teži ka a sa desne strane i obeležava se $x\to a+0$.

Kazaćemo da funkcija $f(x)$ teži ka A, $(f(x)\to A)$ kad x teži ka a, $(x\to a)$ ili da je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, ako za ma kakav proizvoljno mali broj $\varepsilon>0$ postoji broj $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, takav da je

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{za} \quad |x-a|<\delta.$$

Ako postoji takav broj A, onda se on zove granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački $x=a$.

Analogno je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, ako je $|f(x)-A|<\varepsilon$ za $|x|>N(\varepsilon)$ koje zavisi od ε i $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ako je $|f(x)|>M$ za $0<|x-a|<\delta(M)$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ (odnosno $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$ kažemo da ima *levu graničnu vrednost* za $x=a$ (odnosno *desnu graničnu vrednost*).

Da bi postojala granična vrednost A funkcije $f(x)$ u tački $x=a$ potrebno je i dovoljno da je, za svaki niz x_n za koji $x_n\to a$, kada $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

1856. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$. Naći broj δ takav da za svako x iz $(1-\delta,\ 1+\delta)$ imamo $f(x)=2x+3$ iz $(3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$, gde je $\varepsilon>0$ proizvoljno dato.

1857. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{2x+1}=2$. Za koje se vrednosti x funkcija razlikuje od svoje granične vrednosti za manje od 0,001.

Naći sledeće granične vrednosti:

1858. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{2}{x-3}$ i $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{2}{x-3}$. **1859.** $\lim\limits_{x\to +0} 3^{\frac{1}{x}}=\infty$ i $\lim\limits_{x\to -0} 3^{\frac{1}{x}}=0$.

1860. Naći graničnu vrednost funkcije $f(x)=\begin{cases} 2x, & -2<x<1 \\ 1, & x=1 \\ 2x, & 1<x<3 \end{cases}$

u tačkama: $x=\dfrac{1}{2}$; $x=1$; $x=1{,}001$; $x=3{,}5$.

1861. Za funkciju $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\leqslant x<1 \\ 3x+2, & 1<x<3 \end{cases}$ naći: vrednost funkcije za $x=0{,}9$ i za $x=1{,}1$ i levu i desnu graničnu vrednost u tački $x=1$.

1862. Da li postoji granična vrednost funkcija:

$$1^\circ\ f(x)=\frac{1}{x};\qquad 2^\circ\ f(x)=\frac{x}{x};\qquad 3^\circ\ f(x)=\frac{\ln x}{\ln x}\ \text{za}\ x=0?$$

1863. Naći $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\alpha^x}}{x^k}$ $(k>0,\ \alpha\neq 0)$.

1864. Naći levu i desnu graničnu vrednost funkcije $f(x)=E(x)$ u tačkama: $-1,\ 0,\ 1,\ 2$.

1865. Pokazati da $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ ne postoji.

Posmatrati nizove $\sin x$ za vrednosti x:

$$1^\circ\ x=k\pi;\qquad 2^\circ\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\qquad 3^\circ\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\quad (k=0,\ 1,\ 0\ldots).$$

1866. Pokazati da $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ ne postoji.

1867. Naći levu i desnu graničnu vrednost funkcije $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$ za $x=0$.

Kad se traži granična vrednost količnika dva polinoma, za $x\to\pm\infty$ treba prethodno podeliti brojilac i imenilac sa najvećim stepenom od x. Analogno se može postupiti u mnogim slučajevima kad razlomak sadrži iracionalne izraze.

Naći granične vrednosti:

1868. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7+3x^6+4x^2-5x-3}{x^7+x^4-x^3+2}$.

1869. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$.

1870. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$, $n\in N$.

1871. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, $m,\ n\in N$.

1872. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3-x+2}$.

1873. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

1874. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{500x+10^4}{0{,}001x^2+1}$.

1875. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7-50x+5}$.

1876. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x-x^2}{2x^2-7}$.

1877. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$.

1878. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Oznaka $x\to\infty$ se podrazumeva da $x\to+\infty$.

Neka su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog, odnosno m-tog stepena. Ako je $P_n(a)=0$ i $Q_m(a)=0$, onda se razlomak $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ može skratiti binomom $x-a$ jedan ili više puta, posle čega se $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nalazi neposredno.

Naći sledeće limese:

1879. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{2x^2-x+1}$.

1880. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$.

1881. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

1882. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-4x+3}{x^4-3x+2}$.

1883. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+9x^2-20x+20}{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$.

1884. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$, $(m, n\in N)$.

1885. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^{p/q}}{1-x^{r/s}}$ $(p, q, r, s\in N)$.

1886. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1887. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

1888. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$.

Graničnu vrednost iracionalnog izraza često je moguće naći racionalisanjem brojioca ili imenioca.

Naći limese.

1889. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

1890. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

1891. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ $(a>0)$.

1892. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

1893. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$, $(a>0)$.

1894. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{x-4}$.

1895. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

1896. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

1897. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

1898. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

1899. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$.

1900. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

1901. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

1902. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^2}{3-x^2}-2^{\frac{1}{x}}\right)$

1903. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

1904. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$.

1905. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+b_1x+c_1})$, a, b, c, b_1c_1 proizvoljne konstante $a>0$.

1906. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5x+4}-x)$.

1907. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$.

1908. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+a_1x+b_1}+\sqrt{x^2+a_2x+b_2}+\cdots+\sqrt{x^2+a_nx+b_n}-nx)$.

1909. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+b^2}+x}$.

1910. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

1911. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

1912. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$.

U sledećim zadacima, u većini slučajeva, koristi se jednakost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1.$$

1913. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

1914. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

1915. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

1916. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a, b\in C)$.

1917. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{3}}{\sin x}$.

1918. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

1919. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

1920. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

1921. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$.

1922. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{a}{n}$.

1923. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

1924. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

1925. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{1-x^3}$.

1926. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$.

1927. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

1928. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}$.

1929. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

1930. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

1931. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[n]{\cos\beta x}}{x^2}$.

1932. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

1933. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

1934. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

1935. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]$.

1936. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 4x\cos 2x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$.

1937. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$.

1938. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{x^3}$.

1939. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

1940. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

1941. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

1942. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$.

1943. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Znajući da je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}=0$ $(n\in N)$, naći limese:

1944. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

1945. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

1946. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^4+3x^3+1}{(1,1)^x}$.

1947. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{a^x}$.

U većini sledećih zadataka može se koristiti jednakost

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

1948. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1949. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

1950. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

1951. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}$

1952. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1953. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}$

1954. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1955. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$.

1956. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $(a>0)$.

1957. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(1\neq a_i>0)$.

1958. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$.

1959. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

1960. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.

1961. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, $(a>0)$.

1962. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

1963. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$, $(a>0)$.

1964. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1965. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

1966. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

1967. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+2}-n\right)$.

1968. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(\sin x+3)}{x+1}$.

1969. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$.

1970. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)^x-2}{x-1}$.

1971. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{\operatorname{tg} nx}$.

1972. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$.

1973. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

1974. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

1975. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1976. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

1977. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\dfrac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$.

1978. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cos 2x\cos 3x\cdots\cos nx-1}{x^2}$.

1979. Naći levi i desni limes funkcije $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2}$ u tački $x=0$.

Za koju vrednost konstante a postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

1980. Znajući da je $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\cdot n}$, gde je $0<\theta_n<1$, dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=1$ i da je $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=2\pi$.

1981. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}$, $(x\geqslant 0)$. **1982.** $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$, $(a,\ b>0)$.

1983. Prava $y=kx+n$ naziva se asimptota krive zadate jednačinom $y=f(x)$ ako je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(kx+n)]=0$. Dokazati da u tom slučaju mora biti

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx].$$

Naći asimptote sledećih krivih:

1984. $y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2}$. **1985.** $y=\frac{ax+b}{mx+n}$. **1986.** $y=\sqrt{x^2+x}$.

1987. $x^2-y^2=a^2$. **1988.** $y=x-2\operatorname{arc\,tg}x$. **1989.** $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

1990. $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$. **1991.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{2a+x}{a+x}$.

Naći levu i desnu graničnu vrednost funkcija u naznačenim tačkama:

1992. $f(x)=\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1}$, $(a>1)$, $x=0$. **1993.** $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{|\sin x|}}$, $x=0$.

1994. 1° $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, 2° $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

1995. Naći levu i desnu graničnu vrednost funkcije $\operatorname{tgh} x$ u tački $x=0$. Ispitati njeno ponašanje za dovoljno velike vrednosti od x i za $x\to\pm 0$. Ispitati ponašanje sledećih funkcija na krajevima intervala definisanosti:

1996. $y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. **1997.** $y=\frac{\ln(1+e^x)}{x}$. **1998.** $y=\ln(1+2^x)$.

1999. $y=\ln(1-2^x)$. **2000.** $y=\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

2001. $y=\frac{x-1}{x-1}$. **2002.** $y=\frac{x-1}{|x-1|}$.

2003. Nacrtati grafik funkcije $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin x)^{2n}$.

2004. Nacrtati grafik funkcije $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+1}{1-x^{2n}}$. Kolika je leva a kolika desna granična vrednost funkcije za $x=1$?

2005. Naći granične vrednosti korena kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ kad $a\to 0$ i pod uslovom da je $b^2-4ac>0$.

2006. Odrediti konstante k i b iz jednakosti:

$$\lim_{x\to\infty}\left(kx+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0.$$

2007. U skupu S svih funkcija koje preslikavaju interval $(0, \infty)$ u interval $(0, \infty)$ uvedena je relacija ρ uslovom $f\rho g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.
Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

§ 5. Upoređivanje beskonačno malih i beskonačno velikih veličina

Ako je

(1) $$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c \quad (c\neq 0, \infty),$$

to se označava sa

$$\alpha(x)=O(\beta(x))$$

i kaže se da funkcije $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ imaju isti poredak raščenja (opadanja) kada $x\to a$. Specijalno kada je $c=1$ kaže se da su *ekvivalentne* kad $x\to a$ i piše se

$$\alpha(x)\sim\beta(x) \quad (x\to a).$$

Ako je $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ onda se kaže da je $\alpha(x)$ *beskonačno mala* ili *infinitezimala* u okolini tačke $x=a$ a ako je $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty$, kaže se da je $\alpha(x)$ *beskonačno velika*. Ako su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ infinitezimale u okolini $x=a$ i $c=0$ u (1), tada se kaže da je $\alpha(x)$ beskonačno mala *višeg reda* u odnosu na $\beta(x)$ i piše se

$$\alpha(x)=o(\beta(x)).$$

$\alpha(x)$ je beskonačno mala *n-tog reda* u odnosu na $\beta(x)$ ako je

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=c \quad (c\neq 0, \infty).$$

Slično se upoređuju i beskonačno velike veličine.

2008. Pokazati da su ekvivalentne sledeće veličine kad $x\to 0$:

1° $\frac{1}{1-x}$ i $1+x$, 2° $\sin x$ i x,

3° $\sqrt{1+x}$ i $1+\frac{1}{2}x$, 4° $(1+x)^n$ i $1+nx$,

5° $1-\cos^3 x$ i $\frac{3}{2}\sin^2 x$, 6° $\ln x$ i $x-1$, $(x\to 1)$,

7° $\varphi(x)+O(\varphi(x))$ i $\varphi(x)$.

2009. Uporediti sledeće beskonačno male sa beskonačno malom x, $(x\to 0)$:
1° $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$, 2° $\sin^3 x$, 3° $\log(1+x)$.

2010. Odrediti red sledećih beskonačno malih u odnosu na beskonačno malu x:

1° $x+\sin x$, 2° $\sqrt[6]{\sin^3 x+x^4}$, 3° $\left[1-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$, 4° $\ln(1+x)$,

5° $\sin x-\operatorname{tg} x$.

2011. Neka je $\widehat{AC}$ luk kruga poluprečnika r i $\widehat{AB}=\widehat{BC}$, $\widehat{AB_1}=\widehat{B_1B}$. Neka je, dalje, tačka D presek prave AC i prave OB a tačka D_1 presek prave AB i prave OB_1. Ako je $\sphericalangle AOB=\varphi$, pokazati da su BD i B_1D_1 beskonačno male kad $\varphi\to 0$ i da je $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{BD}{B_1D_1}=4$.

2012. Tačka C je sredina kružnog luka poluprečnika r čiji su krajevi A i B a odgovarajući centralni ugao x. Izraziti površinu P trougla ABC u funkciji od x i odrediti red veličine P u odnosu na x kad $x\to 0$.

2013. Pokazati da su u okolini tačke $x=0$ ekvivalentne beskonačno male: $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ i $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}$.

2014. Koristeći ekvivalentnost beskonačno malih $\sqrt[n]{1+x}-1$ i $\frac{x}{n}$, $n\in N$, izračunati približno vrednosti korena: 1° $\sqrt{912}$, 2° $\sqrt[3]{1042}$, 3° $\sqrt[4]{10124}$.

2015. Dokazati da je $\log(1+x)\sim x\log e$ pa na osnovu toga naći približno $\log 1,1$ ($\log e\approx 0{,}43429\ldots$).

2016. Koristeći ekvivalentnost veličina $\sqrt[n]{1+x}-1$ i $\frac{x}{n}$ $(x\to 0)$, naći granične vrednosti: 1° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[16]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg} x}$, 2° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt[n]{1+\operatorname{tg} x}-1)}$.

2017. Dokazati da su ekvivalentne beskonačno velike veličine $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ i a_0x^n $(x\to\infty)$.

2018. Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^7+2\sqrt[5]{x^2}+10^{20}}}{\sqrt[6]{(2x^4+x^2)^3(x+8)^2}}$.

2019. Uporediti u pogledu brzine raščenja (reda veličine) funkcije $f(x)=(4x^2+5x+2)^{1/2}$ i $\varphi(x)=(x^3+2x^2)^{1/3}$ kad $x\to\infty$.

2020. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+x)}$.

2021. Kap vode se isparava tako da njen poluprečnik teži nuli. Odrediti red beskonačno male površine i zapremine kapi u odnosu na njen poluprečnik.

2022. Uporediti beskonačno male x^2 i $x^2\sin\frac{1}{x}$ $(x\to 0)$.

Naći sledeće granične vrednosti:

2023. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-3x^2+2\sin x+8x^6}{3x^5+\sin^2 x+4x-7x^8}$.

2024. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\ln(1+2\alpha-\alpha^2+\alpha^4-5\alpha^5)}{\ln(1+\alpha+2\alpha^2+\alpha^4)}$.

2025. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin\alpha)}{\alpha}$.

§ 6. Neprekidnost funkcija

1° Za funkciju $f(x)$ kazaćemo da je *neprekidna* za $x=x_0$ (ili u tački x_0) ako su ispunjeni sledeći uslovi: 1) postoji vrednost funkcije za $x=x_0$: $f(x_0)$, 2) postoje leva i desna granična vrednost za $x=x_0$: $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$ i 3) leva granična vrednost, desna granična vrednost i vrednost funkcija u tački $x=x_0$ su međusobno jednake, tj.

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0). \tag{1}$$

Uslov (1) ekvivalentan je uslovu: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$. Ako je funkcija neprekidna za svako $x\in(a, b)$, kazaćemo da je neprekidna na intervalu (a, b).

Ako uslov (1) nije ispunjen, funkcija je prekidna za $x=x_0$.

Ako postoje vrednosti: $f(x_0-0)$, i $f(x_0)$, $f(x_0+0)$ iako međusobno nisu jednake, tačka x_0 se zove *tačka prekida prvoga reda*. Prekidi koji nisu prekidi prvog reda zovu se *prekidima drugog reda*. Od osobina neprekidnih funkcija u zadacima se najčešće koriste ove:

1) Ako je $f(x)$ neprekidna za $x\in[a, b]$, postoji konstanta M takva da je $|f(x)|\leqslant M$.

2) Neprekidna funkcija $f(x)$ na $[a, b]$ ima najveću i najmanju vrednost.

3) Neprekidna funkcija $f(x)$ uzima sve međuvrednosti između dve date, tj. ako je $f(\alpha)=A$ i $f(\beta)=B$, gde je $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ i C ma kakav broj takav da je $A<C<B$ ili $A>C>B$, postoji broj γ takav da je $f(\gamma)=C$, gde je $\alpha<\gamma<\beta$. Specijalan slučaj: ako je $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, onda $f(x)$ ima bar jedan realan koren između α i β.

2° Funkcija $f(x)$ je ravnomerno neprekidna na datom skupu X ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\delta(\varepsilon)$ tako da za ma koje $x', x''\in X$ iz $|x'-x''|<\delta$ sledi $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Ako je $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ ona je i ravnomerno neprekidna na tom segmentu (Cantorova teorema).

2026. Funkcija $f(x)=ax+b$ je neprekidna za svako x.

2027. Dokazati da je $f(x)=x^n$ neprekidna za svako x.

2028. Pokazati da je polinom $P_n(x)=a_0x^n=a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ neprekidna funkcija za svako x.

2029. Dokazati da je $y=\cos x$ neprekidna za svako x.

2030. Dokazati da je $y=\sin x$ neprekidna za svako x.

2031. Racionalna funkcija $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je neprekidna u svim tačkama osim u nulama polinoma $Q_m(x)$.

2032. Dokazati da je funkcija $y=a^x$ $(a>0)$ neprekidna za svako x.

2033. $f(x)=x^x$, $(x>0)$ je neprekidna funkcija.

2034. Nacrtati grafik funkcije $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq=0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ i ispitati neprekidnost.

2035. Dokazati da je funkcija Dirichleta $f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ iracionalno} \\ 1, & x \text{ racionalno} \end{cases}$ prekidna za svako x.

2036. Ispitati neprekidnost funkcije $y=\frac{x-1}{|x-1|}$.

2037. Naći prekidne tačke funkcija: 1° $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$; 2° $y=xe^{\frac{1}{x}}$; 3° $y=(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$; 4° $y=\sin\frac{1}{x}$; 5° $y=E(x)$. Koji od uslova neprekidnosti nisu ispunjeni?

2038. Ispitati neprekidnost funkcije $y=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x<0 \\ 1, & 0<x<1 \\ x, & 1<x<2 \\ 3, & 2<x<3. \end{cases}$

2039. Dokazati: Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i $f(x)>0$, onda je $F(x)=\sqrt{f(x)}$ neprekidna.

2040. Dokazati da je $y=|x-1|$ neprekidna funkcija.

2041. Data je funkcija $y=\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ a, & x=0 \\ 1+x, & x>0. \end{cases}$

Kolika treba da je konstanta a da bi funkcija bila neprekidna za $x=0$? Nacrtati grafik funkcije.

2042. Funkcija $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1}$ nije definisana za $x=1$. Može li se odrediti $f(1)$ da bi funkcija za $x=1$ bila neprekidna?

2043. Odrediti parametar λ, tako da funkcija $y=\begin{cases} e^{-x}+1, & x>0 \\ x+\lambda, & x<0 \end{cases}$ bude neprekidna za sve vrednosti promenljive. Kako izgleda grafik tako dobijene funkcije?

2044. Funkcija $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ nije definisana u tački $x=0$. Kako je treba definisati u toj tački da bi bila neprekidna za svako $x>-1$?

2045. Odrediti $f(0)$ da bi sledeće funkcije bile neprekidne za $x=0$.

$$1^\circ\ f(x)=\frac{e^x-1}{x};\quad 2^\circ\ f(x)=\frac{(1+x)^n-1}{x};\quad 3^\circ\ f(x)=x^x;\quad 4^\circ\ f(x)=x\sin\frac{1}{x};$$

$$5^\circ\ f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}.$$

2046. Ispitati neprekidnost i konstruisati grafik funkcije $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x\operatorname{arc\,tg} nx)$.

2047. Ispitati neprekidnost funkcije: $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

i nacrtati grafik. Ovako definisana funkcija obeležava se sa $\operatorname{sgn} x$ (čitaj „signum od x", znak od x).

2048. Dokazati da je $x\operatorname{sgn} x=|x|$ i ispitati neprekidnost funkcije $y=x\operatorname{sgn} x$.

2049. Ispitati neprekidnost i nacrtati grafik funkcija:

$$1^\circ\ y=E(x)+\operatorname{sgn} x;\quad 2^\circ\ y=E(x)\cdot\operatorname{sgn} x.$$

2050. Dokazati da jednačina $x^3-6x+3=0$ ima u intervalu $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, jedan realan koren. Izračunati približno taj koren.

2051. Dokazati da jednačina $x^5-3x-1=0$ ima bar jedan realan koren između 1 i 2.

2052. Svaki polinom neparnog stepena ima bar jedan realan koren. Dokazati.

2053. Dokazati da Keplerova jednačina $x=q\sin x+p$, gde je $0<q<1$ i $p>0$ ima jedinstven koren (pozitivan) koji nije veći od $p+q$.

2054. Pokazati da za $x\in[-2,\ 2]$ funkcija $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-2/x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$

uzima sve vrednosti između $f(-2)$ i $f(2)$ iako je prekidna (u kojoj tački?).

2055. Neka je: $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<r^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^2<r^2$ i $0<t<1$.

Dokazati da je: $\sum\limits_{i=1}^{n}[tx_i+(1-t)y_i-a_i]^2<r^2$.

2056. Pokazati da je funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ neprekidna na $(0,\ 1)$ ali nije ravnomerno neprekidna na tom intervalu.

2057. Pokazati da je funkcija $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ neprekidna na $\left(0,\frac{2}{\pi}\right)$ ali da na tom intervalu nije ravnomerno neprekidna.

2058. Ako je $f(x)$ neprekidna za $a<x<\infty$ i postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tada je $f(x)$ ravnomerno neprekidna na tom intervalu.

Pokazati da su sledeće funkcije ravnomerno neprekidne na naznačenim intervalima.

1059. $y=\frac{x-1}{x^2+5}$, $100<x<200$.

2060. $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $-\infty<x<\infty$.

2061. $y=\sqrt{x}$, $1<x<\infty$.

2062. Zbir i proizvod dve ravnomerno neprekidne funkcije na intervalu (a, b) je ravnomerno neprekidna funkcija na tom intervalu.

2063. Dokazati da je funkcija $f(x)=x+\sin x$ ravnomerno neprekidna na celoj realnoj pravoj.

2) *Izvod funkcije date u parametarskom obliku:*

Ako je y funkcija od x zadata posredstvom parametra t:

$$x=\varphi(t) \text{ i } y=\psi(t), \text{ tada je: } y_x'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

3) *Izvod implicitne funkcije:* (1) $F(x, y)=0$: (1)

Treba diferencirati jednačinu (1) po x smatrajući da je y funkcija od x i iz tako dobijene jednačine naći y', tj. treba rešiti jednačinu: $\frac{d}{dx}[F(x, y)]=0$ po y'.

6° Logaritamski izvod

Logaritamski izvod funkcije $y=f(x)$ je izvod od $\ln y$, tj.

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

2064. Naći koeficijenat pravca sečice koja prolazi kroz tačke $M_1(1, y_1)$, $M_2(2, y_2)$ hiperbole $y=\frac{1}{x}$.

2065. Naći srednju brzinu promene funkcije $y=x^3$ u razmaku $1<x<2$.

2066. Zakon kretanja tačke je $s=\sin t$, gde je s rastojanje u cm, a t vreme u sec. Naći srednju brzinu tačke u vremenskom razmaku od $t=0$ do $t=\frac{\pi}{2}$.

2067. Dati definiciju: a) srednje brzine obrtanja neke tačke oko stalne tačke, b) ugaone brzine tačke.

2068. Naći $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ako je $y=kx+n$.

2069. Naći po definiciji $f'(1)$ ako je $f(x)=\sqrt{x}$.

2070. Naći po definiciji $f'(0)$ ako je $f(x)=e^x$.

2071. Naći po definiciji $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ako je $f(x)=\sin x$.

2072. Naći $f'(x)$ za $f(x)=\cos(2x+1)$: a) x u radijanima, b) x u stepenima.

Naći $y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkcije:

2073. $y=x^3$. **2074.** $y=2x^4-\sqrt{3}$. **2075.** $y=\frac{1}{x}$.

2076. $y=\sqrt{1+2x}$. **2077.** $y=x^n$, n prirodan broj.

2078. $y=\sqrt[n]{x}$, n prirodan proj. **2079.** $y=\operatorname{tg} x$.

2080. $y=e^x$. **2081.** $y=a^x$, $(a>0)$. **2082.** $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$.

2083. Naći levi i desni izvod funkcije $f(x)=|x|$ u tački $x=0$. Da li postoji $f'(0)$?

2084. Data je funkcija: $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Da li postoji $f'(0)$? Kakva je funkcija $f(x)$ u pogledu neprekidnosti.

2085. Naći $f_-'(0)$ i $f_+'(0)$. Postoji li $f'(0)$ za funkciju

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

2086. Za funkciju $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0, \end{cases}$

naći: a) $f'_-(0)$, $f'_+(0)$; b) $\lim\limits_{x\to+0} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-0} f'(x)$.

Da li postoji $f'(0)$?

2087. Pokazati da sledeće funkcije nemaju konačan izvod u naznačenim tačkama:

a) $y=\sqrt{x}$ u $x=0$, b) $y=\sqrt[3]{x-1}$ u $x=1$,

c) $y=\operatorname{tg} x$ u $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$,

d) $y=|\sin x|$ u $x=k\pi$, $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$.

2088. Zakon kretanja tačke je $s=3t^2+2t+1$, gde je s rastojanje u metrima a t vreme u sekundama. Odrediti brzinu tačke u trenutku $t=2$.

2089. Naći ugao između tangenata povučenih u presečnim tačkama krivih $y=\dfrac{1}{x}$ i $y=x^2$.

Koristeći pravila naći izvode sledećih funkcija. (Ne koristiti se pravilom izvoda složenih funkcija).

2090. $y=x^4-a^n$, gde su a i n konstante.

2091. $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+4x-\sqrt{10}$. **2092.** $y=ax^2+bx+c$.

2093. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\text{napisati } \frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}} \text{ i primeniti pravilo } (x^n)'=nx^{n-1}\right)$.

2094. $y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$.

2095. $y=\frac{ax+b}{c}$.

2096. $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$.

2097. $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

2098. $y=mx^n-nx^m$.

2099. $y=\frac{x}{1-x^2}$.

2100. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

2101. $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

2102. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

2103. $y=(x+1)(x-1)$.

2104. $y=(x^2-2)\sqrt{x}$.

2105. $y=\frac{at^6-b^6}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

2106. $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$.

2107. $y=\frac{1}{t^2+t+1}$.

2108. $y=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

2109. Koristeći identitet $1+x+x^2+\cdots+x^n\equiv\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ za $x\neq 1$ izvesti obrazac za zbir: $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

2110. $y=\sin x+\cos x$.

2111. $y=\sin^2 x$.

2112. $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.

2113. $\rho=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$.

2114. $\rho=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}$.

2115. $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

2116. $y=\frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

2117. $y=\arcsin x+\arccos x$.

2118. $y=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x$.

2119. $y=\frac{1}{\arcsin x}$.

2120. $y=x\arcsin x$.

2121. $y=(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x)^n$.

2122. $y=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{1+x^2}$.

2123. $y=x\sin x\operatorname{arc\,tg} x$.

2124. $y=e^{-x}$. **2125.** $y=e^x\cos x$. **2126.** $y=\dfrac{e^x}{x-1}$.

2127. $y=xe^{-x}$. **2128.** $y=e^x \operatorname{arc\,tg} x$. **2129.** $y=2^x+x^2$.

2130. $y=\dfrac{3^x}{2^x}$. **2131.** $y=\ln x^2$. **2132.** $y=x\log x$.

2133. $y=x^n\ln x$. **2134.** $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$. **2135.** $y=\dfrac{\ln 3\sin x+\cos x}{3^x}$.

2136. $y=x^3\ln\dfrac{1}{x}$. **2137.** $y=\ln a\log_a x-\log x\ln x$.

2138. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. **2139.** $y=\operatorname{sh}^3 x$. **2140.** $y=\operatorname{ch} x-x\operatorname{sh} x$.

2141. $y=\dfrac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ctg h} x}$. **2142.** $y=\operatorname{Ar\,sh} x\operatorname{Ar\,ch} x$.

2143. $y=\operatorname{Ar\,th} x-\operatorname{arc\,tg} x$. **2144.** $y=\dfrac{\operatorname{Ar\,ch} x}{\ln x}$.

2145. $y=(x^2-2x+3)^{15}$. **2146.** $y=(2+3\ln x)^5$.

2147. $y=(ax^2+bx+c)^n$. **2148.** $y=\sqrt[3]{2x^2+x-1}$.

2149. $y=\dfrac{1}{(1-x^2)^5}$. **2150.** $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

2151. $y=\sin 3x$. **2152.** $y=2\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

2153. $y=\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. **2154.** $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

2155. $y=\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}$. **2156.** $y=\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}}}$.

2157. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. **2158.** $y=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

2159. $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{\sqrt{2x+3}}{x}$.

2160. $y=\dfrac{9}{5(x+2)^5}-\dfrac{3}{(x+2)^4}+\dfrac{2}{(x+2)^3}-\dfrac{1}{2(x+2)^2}$.

2161. $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$. **2162.** $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

2163. $y=\dfrac{\cos 2x+1}{\cos 2x-1}$.

2164. $y=\sin^2 x^3$.

2165. $y=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$; naći $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'(\pi)$, $y'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

2166. $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

2167. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$.

2168. $y=\arccos(1-2x)$.

2169. $y=\arcsin\dfrac{2}{x}$.

2170. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

2171. $y=\operatorname{arc\,tg} x-\dfrac{1}{x}$.

2172. $y=\arcsin(2\sin x)$.

2173. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

2174. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

2175. $y=\arccos e^x+e^{\arcsin x}$.

2176. $y=e^{x^2-x+2}$.

2177. $y=e^{10^x}$.

2178. $y=10^{e^x}$.

2179. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$, $(a>0)$.

2180. $y=\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arc\,tg}(e^x)$.

2181. $y=e^{2x+3}\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$.

2182. $y=\ln\sin x$.

2183. $y=\ln\cos x$.

2184. $y=\log_2(1-x\cos x)$.

2185. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

2186. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

2187. $y=\ln^2 x+\ln\ln x$.

2188. $y=\sqrt{x^2+1}+\ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$.

2189. $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

2190. $y=x\arcsin(\ln x)$.

2191. $y=\ln(e^x+e^{-x}+2)$.

2192. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}-\ln\sqrt[4]{x^4-a^4}$; naći $y'(2a)$.

2193. $y=\operatorname{arc\,tg} e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

2194. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\cos x\ln\operatorname{tg} x$.

2195. $s=\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t-\ln\cos t$.

2196. $y=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$.

2197. $y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$.

2198. $y=\ln\dfrac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

2199. $y=\ln\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{x}(1+\operatorname{ctg} x)$.

2200. $y=\ln\arcsin x-(\arcsin x)^2$.

2201. $y=3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

2202. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}+3\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$

2203. $y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}.$ **2204.** $y=\ln\operatorname{ch}x.$ **2205.** $y=\arcsin(\operatorname{th}x).$

2206. $y=\operatorname{Ar\,ch}\ln x.$ **2207.** $y=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 4x}.$ **2208.** $y=\operatorname{Ar\,sh}\frac{x-1}{x+1}.$

2209. $y=x+\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Ar\,th}x.$ **2210.** $y=\operatorname{arc\,tg}e^{2x}+\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}.$

2211. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$

2212. $y=\ln(\cos x+e^{-2x}\sin x)+x.$

2213. $y=\ln\left(2+e^{-x}+\sqrt{e^x+e^{-x}+4}\right).$

2214. Naći izvod funkcije $y=\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}.$

Da li postoji $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Naći $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0} y'$ i $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} y'$.

2215. Diferenciranjem identiteta $\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$ pokazati da je $\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x.$

2216. Diferenciranjem identiteta $\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$ pokazati da je $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x.$

2217. Naći $\frac{d(\cos x)}{d(\sin x)}.$

2218. Data je funkcija: $f(x)=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x$, gde su a, b, c i d nepoznate konstante. Odrediti te konstante ako je $f'(x)\equiv x\cos x.$

2219. Koristeći jednakost $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$,

$(x\neq 2k\pi)$, naći sledeći zbir:

$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx.$

2220. Odrediti konstante a i b ako se zna da je $y=a\sin 3x+b\cos 3x$ i da je $y'=a\sin 3x+(b+6)\cos 3x.$

2221. Dokazati da funkcija $y=-\ln(1+x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu: $xy'+1=e^y.$

2222. Da li funkcija $y=\dfrac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $2x^2y'-x^2y^2-1=0$?

2223. Pokazati sledeće pravilo diferenciranja determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) f_{12}(x) \cdots f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x) f_{k2}(x) \cdots f_{kn}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x) \cdots f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) f_{12}(x) \cdots f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{k1}(x) f'_{k2}(x) \cdots f'_{kn}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x) \cdots f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

2224. Funkcija $\rho=\dfrac{1}{1+\varphi+\ln\varphi}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\varphi\rho'=\rho(\rho\ln\varphi-1)$. Dokazati!

2225. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0 \\ x, & 0<x<1 \\ 2-x, & 1<x<2 \\ 3x-x^2, & x>2. \end{cases}$

1° Nacrtati grafik date funkcije.
2° Za koje vrednosti x je funkcija neprekidna?
3° Za koje vrednosti x postoji $f'(x)$?
4° Za koje vrednosti x je $f'(x)$ neprekidna funkcija?

2226. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

1° Naći $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$;

2° Ako se funkcija dodefiniše u tački $x=0$ tako da bude $f(0)=\dfrac{1}{2}$ naći $f'(0)$.

2227. Da li je funkcija $f(x)=\begin{cases} (x-2)\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$ diferencijabilna za svako x? Naći $f'(2)$.

2228. Naći ugao pod kojim kriva $y=\operatorname{arc\,tg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ seče x osu.

2229. Dokazati da je izvod parne funkcije neparna funkcija i da je izvod neparne funkcije parna funkcija.

2230. Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna, naći izvode sledećih funkcija:
1° $y=f(x^3)$, 2° $y=f[f(x)]$, 3° $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$,
4° $y=f(\ln x)$, 5° $y=\ln f(x)$.

2231. Dokazati da je izvod periodične funkcije sa periodom ω, periodična funkcija sa periodom ω.

2232. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$

Kako treba odrediti konstante a i b da bi funkcija $f(x)$ bila diferencijabilna u tački $x=1$?

2233. U kojim tačkama grafik funkcije $y=\sqrt[3]{\sin x}$ ima vertikalne tangente? Nacrtati grafik te funkcije.

2234. Ako je $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{x}{2}$, naći $f'(1)$.

2235. Naći $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$ ako je $f(x)=1-x$ i $\varphi(x)=1-\sin\frac{\pi x}{2}$.

2236. Ako je $f'(x)=0$, za $x\in(a, b)$ tada je $f(x)=\text{const}$. Dokazati!
Dokazati sledeće jednakosti:

2237. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $\qquad x\in[0, 1]$.

2238. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$, $\qquad x\in[0, \infty)$.

2239. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x<0. \end{cases}$

2240. $2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi$, $\qquad x\in[1, \infty)$.

Prethodno logaritmovanje pa diferenciranje, ponekad uprošćava nalaženje izvoda nekih funkcija.

2241. $y=x^x$.

2242. $y=u^v$, gde je $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$.

2243. $y=\sqrt{(x+1)^3}\cdot\frac{2x-1}{x+2}\cdot e^{x^2}\cdot\sin^5 x\cos^2 x$.

2244. $y=(\sin x)^{\cos x}$.

2245. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

2246. $y=(\ln x)^x$.

2247. $y=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x$.

2248. $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$.

2249. $y=x^{x^x}$.

2250. $y=\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

2251. $y=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3\cdot(x+3)^4}$.

2252. $y=x^{x+1}(x+1)^x$.

2253. Naći x_y' ako je $y=e^x+x$.

2254. Naći x_y' ako je $y=\sin x$.

2255. Naći x_y' za sledeće funkcije:

a) $y=\ln x+e^x$, b) $y=\sqrt[3]{\sin x+\cos x}$, c) $y=\arcsin x$.

2256. Pomoću izvoda inverzne funkcije dokazati da je

$$\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2257. Naći y_x' ako je $x=\cos t$, $y=\sin t$.

2258. Naći y_x' ako je $x=e^{-t}$, $y=e^t$.

Naći $y_x'=\dfrac{dy}{dx}$ za sledeće funkcije date u parametarskom obliku:

2259. $x=\cos t$, $y=t+\sin t$.

2260. $x=a\cos^2\varphi$, $y=b\sin^2\varphi$.

2261. $x=b\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

2262. $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

2263. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$.

2264. $x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

2265. $x=\varphi(1-\sin\varphi)$, $y=\varphi\cos\varphi$.

2266. $x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

2267. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Naći koeficijenat pravca tangente krivih u naznačenim tačkama:

2268. $x=2\operatorname{tg} t$, $y=2\sin^2 t+\sin 2t$, $(2,\ 2)$.

2269. $x=t^3+1$, $y=t^2+t+1$, $(1,\ 1)$.

2270. $x=t\ln t$, $y=\dfrac{\ln t}{t}$ $(0,\ 0)$.

2271. Pokazati da y kao funkcija od x, zadata parametarski: $x=2t+3t^2$, $y=t^2+2t^3$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu:

$$2y'^3+y'^2-y=0,\ \left(y'=\frac{dy}{dx}\right).$$

2272. Pokazati da funkcija y zadata parametarskim jednačinama:

$$x=\frac{at}{1+t^3},\quad y=\frac{a(4t^3+1)}{6(1+t^3)^2}$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu $x^3+y'^3=axy'$.

Naći ugao pod kojim se seku krive:

2273. $x=t,\ y=t^2$ i $x=\frac{5}{3}\cos t,\ y=\frac{5}{4}\sin t.$

2274. $x=\sqrt{5}\,\mathrm{ch}\,t,\ y=\sqrt{5}\,\mathrm{sh}\,t$ i $x=3\sqrt{2}\cos t,\ y=2\sqrt{2}\sin t.$

2275. $x^2=4ay$ i $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}.$

Naći izvod $y_x'=\frac{dy}{dx}$ sledećih, implicitno datih, funkcija:

2276. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ **2277.** $x^2+xy+y^2=6.$ **2278.** $xy-\mathrm{tg}\,y=0.$

2279. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$ **2280.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4;$ naći $y'(4).$

2281. $e^y+xy=e;$ naći $y'(0).$ **2282.** $\mathrm{arc\,tg}\,(x+y)=x;$ naći $y'(0).$

2283. $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=0;$ naći y' za $y=0.$

2284. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0;$ naći y' za $y=0.$ **2285.** $x^y=y^x.$

2286. $e^{\frac{y}{x}}\ln x-ce^{\frac{y}{x}}+1=0.$ **2287.** $xe^{-\frac{y}{2}}+ye^{-\frac{x}{2}}-2=0;$ naći $y'(0).$

2288. $x\ln y-y\ln x=1;$ naći $y'(1).$ **2289.** $y=\log_x 2,\ (x>0).$

2290. Naći koeficijenat pravca tangente krive $\ln\frac{y}{x}+x-y^2=0$ u tački $(1, 1)$.

2291. Pokazati da funkcija y, definisana implicitno, jednačinom $xy=\ln ey$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu: $y^2+(xy-1)y'=0.$

2292. Funkcija y definisana jednačinom $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ zadovoljava jednačinu $y'(x-y)=x+y.$

2293. Prelaskom na polarne koordinate transformisati:

1° izraz $u=xy'-y;$ 2° jednačinu $y'=\frac{x+y}{x-y}.$

§ 2. Diferencijal i njegova primena

1° Ako priraštaj funkcije $y=f(x)$, usled priraštaja nezavisno promenljive može biti predstavljen u obliku

$$\Delta y=A(x)\,dx+\gamma\,dx,$$

gde je $dx=\Delta x$, a $\gamma\to 0$ kad $\Delta x\to 0$, onda se glavni linearni deo toga priraštaja naziva *diferencijal funkcije* $f(x)$ i obeležava

$$dy=A(x)\,dx.$$

Da bi postojao diferencijal funkcije $y=f(x)$ potreban i dovoljan uslov je da postoji konačan izvod $y'=f'(x)$ pa je $dy=y'dx$.

Ovaj obrazac ostaje u važnosti i u slučaju kad je x funkcija neke druge nezavisno promenljive.

2° Za izračunavanje malih priraštaja funkcije $f(x)$ može se koristiti obrazac

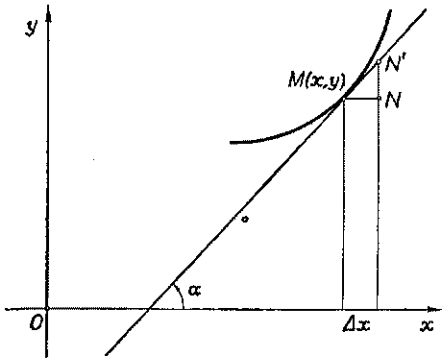
$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x,$$

pri čemu se greška koja se javlja, može učiniti proizvoljno malom ako se uzme $|\Delta x|$ dovoljno malo, a pri tome je $f'(x)\neq 0$.

Ako je $|\Delta x|$ apsolutna greška nezavisno promenljive onda se apsolutna i relativna greška zavisno promenljive $|\Delta y|$ i δy približno izračunavaju po sledećim obrascima:

$$|\Delta y|=|f'(x)\Delta x|,\quad \delta y=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

Geometrijski interpretirano, diferencijal predstavlja priraštaj ordinate tangente u tački $M(x, y)$, koji odgovara priraštaju $\Delta x=dx$ (sl. 18).



Sl. 18

Naći diferencijal sledećih funkcija:

2294. $y=(3x^2-x)^{3/2}$.

2295. $y=2^x-3^{-x}+\sqrt{x}$.

2296. $y=\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$.

2297. $y=x^{a^x}-a^x$.

2298. $y=\arccos\frac{1}{|x|}$.

2299. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2300. $x=e^{-0,1t}$, $y=\ln t$.

2301. Ako je $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$, proveriti jednakost $2x^2dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

2302. Ako je $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, proveriti jednakost

$$x(dy-dx)=y(dx+dy).$$

2303. Naći približno priraštaj funkcije $y=\sqrt{x}$ kada se x promeni od 100 do 101.

2304. Izračunati približno vrednost priraštaja funkcije $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ pri promeni nezavisno promenljive od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

2305. Železnički kolosek je izrađen od jednakih gvozdenih šina, čije su dužine na temperaturi 0°C $l=20$ m. Odrediti najmanji razmak između dve susedne šine, tako da pri promeni temperature okoline od $t_1=20°$ C

do $t_2 = 40°$ C ne dođe do dodirivanja šina. Termički koeficijenat linearnog širenja gvožđa iznosi $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$.

2306. Usled preopterećenosti gradske električne mreže napona $U_1 = 220$ V snaga rešoa opadne od $P_1 = 1000$ W na $P_2 = 800$ W. Izračunati koliki je pad napona u mreži, pretpostavljajući pri tome da otpornost R rešoa ostaje konstantna.

2307. Izračunati vrednost diferencijala funkcija:

1° $y = \frac{1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}$ pri promeni nezavisno promenljive od $x = \frac{\pi}{6}$ do $x = \frac{61\pi}{360}$;

2° $y = \sin 2\varphi$ pri promeni ugla φ od $\frac{\pi}{6}$ do $\frac{61\pi}{360}$;

3° $y = \cos^2 \varphi$ pri promeni ugla φ od 60° do 60° 30′.

2308. Ako je $x = 3^{\frac{1}{x}} + 2^{-2x} + 6^{\sqrt{x}}$ izračunati vrednost diferencijala funkcije za $x = 1$ i $dx = 0{,}2$.

2309. Izračunati priraštaj i diferencijal funkcije $y = x^2$ ako je $x = 1$ a Δx uzima vrednost: 1° 0,1; 2° 0,01; 3° 0,001. Odrediti za sve slučajeve apsolutnu i relativnu grešku koja se čini kad se priraštaj zameni diferencijalom.

2310. Data je funkcija $y = x^3 - x$. Izračunati Δy i dy ako je $x = 2$ a priraštaj nezavisno promenljive uzima vrednosti: 1° $\Delta x = 1$; 2° $\Delta x = 0{,}1$; 3° $\Delta x = 0{,}01$. Odrediti apsolutnu i relativnu grešku koja nastaje usled zamene priraštaja diferencijalom.

2311. Ako je n-ta značajna cifra numeričkog podatka x netačna za ne više od polovine jedinice poslednjeg decimalnog mesta, odrediti granicu greške mantise dekadnog logaritma tog približnog podatka.

2312. Kretanje je dato jednačinom $x = 5t^2$, gde je t vreme izraženo u sekundama a x pređeni put izražen u metrima. Odrediti za momenat $t = 2$ sec priraštaj i diferencijal puta i uporediti ih, ako je: 1° $\Delta t = 1$ sec; 2° $\Delta t = 0{,}1$ sec; 3° $\Delta t = 0{,}001$ sec.

2313. Strana kvadrata je 8 dužinskih jedinica. Za koliko se uvećava njegova površina ako mu se strana povećava za: 1° 1, 2° 0,5? 3° 0,1 dužinskih jedinica. Zameniti priraštaj diferencijalom i oceniti relativnu grešku.

2314. Naći priraštaj ΔV zapremine lopte pri promeni poluprečnika r za Δr. Izračunati ΔV, ako je: 1° $\Delta r = 0{,}5$; 2° $\Delta r = 0{,}1$; 3° $\Delta r = 0{,}01$. Kolika se greška čini pri zameni priraštaja diferencijalom?

2315. Pravougaonik ima stranice $a = 4$ i $b = 5 \pm 0{,}4$. Naći najveću moguću grešku koja se čini pri izračunavanju površine pravougaonika.

2316. U ravnokrakom trouglu kraci su 4 cm a zahvaćeni ugao $\alpha = 60°$. Odrediti za koliko treba da poraste ugao α da bi površina porasla za 0,16.

2317. Ako je poluprečnik kružnog isečka 100 cm, a centralni ugao 60°, izračunati za koliko se smanji površina, ako se centralni ugao smanji za 30′.

2318. Strana kocke je $x=5\pm0{,}01$ m. Odrediti apsolutnu i relativnu grešku pri izračunavanju zapremine kocke.

2319. Za koliko će se promeniti zapremina pravilne jednakoivične četvorostrane piramide, ako ivica piramide poraste od 5 na 5,2 dužinskih jedinica?

2320. Za koliko će da priraste zapremina pravilne šestostrane piramide bočne ivice 5 cm, ako osnovna ivica poraste od 4 cm na 4,1 cm?

2321. Težina nekog tela je $G=3275$ g. Kolika je specifična težina tela, ako mu je zapremina $V=(430\pm1)\ \text{cm}^3$?

2322. Dužina telegrafskog voda je $s=2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)$, gde je $2b$ rastojanje između oslonaca voda, a f najveći ugib. Za koliko se povećava ugib f, kada se dužina voda usled zagrevanja poveća za ds?

2323. Pri očitavanju skale na ogledalu s durbinom merimo odstupanje pri konstantnoj udaljenosti skale s. Kako utiču male greške u merenju odstupanja x na vrednost ugla α?

Dokazati ispravnost sledećih približnih formula za dovoljno malo α:

2324. 1° $\frac{1}{1+\alpha}\approx1-\alpha$; 2° $\sqrt{1+\alpha}\approx1+\frac{1}{2}\alpha$; 3° $\frac{1}{(1+\alpha)^2}\approx1-2\alpha$.

2325. 1° $(1\pm\alpha)^2=1\pm3\alpha$; 2° $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\approx1-\frac{1}{2}\alpha$.

2326. 1° $\cos\alpha\approx1$; 2° $\sin\alpha\approx\alpha$; 3° $\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha$.

2327. Dokazati približnu formulu $\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$, $a>0$ ako je $|x|$ zanemarljivo u odnosu na a.

2328. Izračunati približno: 1° $\sqrt{4{,}3}$; 2° $\sqrt{\frac{2{,}037^2-1}{2{,}037^2+1}}$.

2329. Približno izračunati $\ln 3$ a zatim koristeći taj rezultat izračunati vrednost izraza $3^{\sqrt{4{,}3}}$.

Izračunati približno vrednosti sledećih izraza:

2330. 1° $\frac{1{,}004}{0{,}996}$; 2° $(0{,}998)^5$; 3° $(1{,}002)^{15}$.

2331. 1° $\sqrt[7]{1{,}009}$; 2° $\sqrt[7]{128}$; 3° $\sqrt[7]{0{,}9979}$; 4° $\sqrt[10]{1027}$.

2332. 1° $\log_{(10)} 11$; 2° $\log_{(10)} 998$. **2333.** 1° $\sin 46{,}3°$; 2° $\cos 59{,}1°$; 3° $\sin 1°$.

2334. 1° $\arcsin 0{,}4983$; 2° $\operatorname{arc\,tg} 1{,}05$.

2335. Ako je $f(x)=e^{0{,}1x(1-x)}$, izračunati približno $f(1{,}05)$.

2336. Data je funkcija $f(x)=x^2$. Poznato je da je u nekoj tački priraštaj nezavisno promenljive $\Delta x=0{,}2$ kome odgovara diferencijal $df(x)=0{,}8$. Naći početnu vrednost nezavisne promenljive.

2337. Data je funkcija $y=f(x)$. U nekoj tački x dat je priraštaj $\Delta x=0{,}2$; diferencijal u istoj tački iznosi 0,8. Naći vrednost izvoda funkcije u toj tački.

2338. Sa kojom tačnošću se mora izmeriti apscisa krive $xy=4$ za $x=0{,}5$ da pri izračunavanju njene ordinate greška ne bude veća od 0,1?

2339. Sa kojom tačnošću se mora izmeriti poluprečnik lopte da pri izračunavanju zapremine relativna greška ne bude veća od 1%?

2340. Period oscilovanja klatna dat je formulom $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{981}}$ sec, gde je l dužina klatna u santimetrima. Za koliko je potrebno izmeniti dužinu klatna $l=20$ m da bi se period oscilovanja smanjio za 0,1 sec?

2341. Pri ravnomernom kretanju tela dužina pređenog puta s izmerena je sa tačnošću do 0,2%, a vreme kretanja tela t sa tačnošću do 0,4%. Sa kolikom tačnošću se može izračunati brzina?

§ 3. Viši izvodi i diferencijali

1° Izvodi višeg reda funkcije $y=f(x)$.

Viši izvodi se definišu postupno:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n=2, 3\ldots).$$

(Pretpostavlja se da odgovarajuće operacije imaju smisla).

2° Leibnizova formula:

Ako je $y=uv$, gde je $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, onda je

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}$$

(pretpostavljajući da postoje $u^{(n)}$ i $v^{(n)}$ za $n=1, 2\ldots$).

3° Ako je funkcija zadata parametarski:

$x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$, onda je

$$y''_x=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\dot y}{\dot x}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

ili

$$y''_x=\frac{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}{(\dot x)^3}$$

gde je

$$\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Na sličan način se mogu dobiti izvodi trećeg, četvrtog itd. reda.

$$y'''_x=\frac{\dfrac{d(y''_x)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \quad \text{itd.}$$

4° Diferencijali viših redova funkcije $y=f(x)$ definišu se takođe postupno:

$$d^ny=d(d^{n-1}y), \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

gde se uzima da je $d^1y=dy=y'dx$. Ako je x nezavisno promenljiva, onda je: $d^2x=d^3x=\cdots=d^nx=0$,

$$d^ny=y^{(n)}dx^n \quad \text{i} \quad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

2342. Naći drugi i treći izvod funkcije $y=\sin x$.

2343. Naći y'', y''' i y^{IV} za funkciju $y=x\ln x$.

Naći drugi izvod za funkcije:

2344. $y=x^4-2x^2+\frac{1}{4}x+3$. **2345.** $y=\sin^2 x$. **2346.** $y=\sqrt{1+x^2}$.

2347. $y=(x-2)e^{2x}$. **2348.** $y=(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

Naći y''' za funkcije:

2349. $y=x^2\ln x$. **2350.** $y=\cos^2 x$. **2351.** $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

2352. Za funkciju $f(x)=e^x\sin x$ naći $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

2353. Naći $f'''(1)$ ako je $f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

2354. Ako su u, v, w i t funkcije od x koje imaju prve i druge izvode, tada je:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ (ut)' & (vt)' & (wt)' \\ (ut)'' & (vt)'' & (wt)'' \end{vmatrix} = t^2 \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

Naći n-ti izvod sledećih funkcija:

2355. $y=e^x$. **2356.** $y=x^n$. **2357.** $y=\ln x$.

2358. $y=e^{-\frac{x}{2}}$. **2359.** $y=\frac{1}{1+x}$. **2360.** $y=\cos x$.

2361. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$. **2362.** $y=a^x$, $(a>0)$.

2363. $y=x^{n-1}\ln x$.

2364. Pokazati da je za funkciju $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$, $f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)(-1)^n}{a^{n-2}}$.

2365. Pokazati da za funkciju $f(x)=e^{-x^2}$ važe relacije:

$$f^{(n)}_{(0)}=-2(n-1)f^{(n-2)}_{(0)},\quad f^{(2n)}=(-2)^n(2n-1)!!.$$

2366. Funkcija $f(x)=x^n$ zadovoljava uslov

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1}+\frac{f''(1)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n.$$

Dokazati:

2367. Naći $y^{(n)}(0)$ ako je $y=\ln(ax+b)$, $(b>0)$.

Naći n-ti izvod funkcija:

2368. $f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}$ $(a,\ b\neq 0)$.

2369. $f(x)=(x^2-x-1)\ln(1-x)$.

2370. Dokazati da funkcija $y=(\arcsin x)^2$ zadovoljava jednačinu $(1-x^2)y''-xy'=2$.

2371. Neka funkcija $y=f(x)$ ima sve izvode.

Dokazati da je: $y'\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}y^{-\nu}\dfrac{d^n(y^\nu)}{dx^n}=$

$$=\frac{y}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1}(-1)^{\nu+1}\binom{n+1}{\nu}y^{-\nu}\frac{d^{n+1}(y^\nu)}{dx^{n+1}}.$$

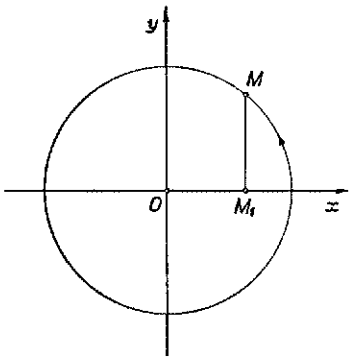
2372. Odrediti: 1° $\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$; 2° $\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ za $x=1$ i za $x=-1$;

3° $\dfrac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$ za $x=1$ i $x=-1$.

2373. Dokazati da funkcija $y=\dfrac{e^{5x}+2}{e^x}$ zadovoljava jednačinu $y'''-13y'-12y=0$.

2374. Za funkciju $y=|x^3|$ naći y''. Postoji li $y''(0)$?

2375. Tačka se kreće po Ox osi po zakonu puta $x=t^3-2t^2+3t+4$, x u santimetrima i t u sekundama. Naći brzinu i ubrzanje tačke u trenutku $t=2$ sec.



Sl. 19

2376. Tačka se kreće pravolinijski, pri čemu je

$$s=\frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2}+s_0,$$

gde je s put u santimetrima, a t vreme u sekundama. Naći ubrzanje w na kraju prve sekunde.

2377. Po krugu $x^2+y^2=a^2$ kreće se tačka M sa konstantnom uglovnom brzinom ω. Naći zakon kretanja njene projekcije M_1 na osi Ox ako u momentu $t=0$ tačka M ima koordinate $(a,\ 0)$ (sl. 19).

Naći brzinu i ubrzanje tačke M_1. Kolika je brzina i ubrzanje tačke M_1 u početnom trenutku i u trenutku prolaza kroz koordinatni početak? Naći maksimalnu vrednost brzine i ubrzanja.

2378. Naći $y''_x = \frac{d^2y}{dx^2}$ za funkciju koja je data jednačinama $x = \ln t$, $y = t^3 - 1$.

2379. Za funkciju definisanu jednačinama: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ naći $y''_x = \frac{d^2_y}{d^2_y}$.

Naći $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ za sledeće funkcije parametarski zadate:

2380. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ **2381.** $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ **2382.** $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

2383. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \\ y = \sqrt{1 + t^2}. \end{cases}$ **2384.** $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

2385. Naći $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ za funkciju definisanu jednačinama $x = e^t$, $y = t^3$.

Naći $\frac{d^3y}{dx^3}$ za funkcije:

2386. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ **2387.** $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$ **2388.** $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$

2389. Naći $\frac{d^ny}{dx^n}$ za funkciju $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$ **2390.** Naći y''_x ako je $\ln xy = x$.

2391. Naći $\frac{d^2y}{dx}$ ako je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. **2392.** Naći $\frac{d^2x}{dy^2}$ ako je $e^{x+y} = xy$.

2393. Naći $\frac{d^2y}{dx^2}$ za sledeće funkcije:

1° $\operatorname{arc\,tg} y = y - x$, 2° $\ln y = y - x$, 3° $\sin(x + y) = y$.

2394. Izvesti obrasce za drugi i treći izvod inverzne funkcije funkciji $y = f(x)$, tj. za $\frac{d^2x}{dy^2}$ i $\frac{d^3x}{dy^3}$.

2395. Ako je $x = x(y)$ inverzna funkcija funkcije $y = y(x)$, dokazati jednakost

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{d^3x}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

2396. Naći $\frac{d^2x}{dy^2}$ i $\frac{d^3x}{dy^3}$ za funkciju $y=\sin x$.

2397. Naći $\frac{d^3y}{dx^3}$ ako je $x^2+y^2=a^2$.

2398. Naći $\frac{d^3y}{dx^3}$ u tački (1, 1) ako je $x^2+2xy+y^2-4x+2y=2$.

§ 4. Primena izvoda u fizici

1° Ako se materijalna tačka kreće po Ox osi i u trenutku t ima koordinatu $x=f(t)$, tada je u trenutku t *brzina*

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

a *ubrzanje*

$$w=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

2° *Rotaciono kretanje čvrstog tela* karakteriše se *uglovnom brzinom*

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

i *uglovnim ubrzanjem*

$$\varepsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

gde je φ *ugao rotacije.*

2399. Neka je v brzina, a w ubrzanje tačke koja se kreće po Ox osi. Pokazati da je $w\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dt}$.

2400. Telo se kreće pravcem Ox po zakonu $x=\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2-4t$. Odrediti brzinu i ubrzanje kretanja. U kojim momentima telo menja smer kretanja?

2401. Telo mase a kg, kreće se pravolinijski po zakonu $s=1+t+t^2$. Odrediti kinetičku energiju $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ tela posle 5 sekundi od početka kretanja.

2402. Voz ima početnu brzinu 54 km/čas i prešao je 600 m za prvih 30 sec. Ako je kretanje voza jednako ubrzano, odrediti brzinu i ubrzanje voza na kraju 30-te sekunde. Kretanje voza se vrši po šinama čiji je poluprečnik krivine R.

2403. Oscilatorno kretanje materijalne tačke odvija se po zakonu $x=a\cos\omega t$. Odrediti brzinu i ubrzanje kretanja u tačkama $x=\pm a$ i $x=0$. Pokazati da ubrzanje i odstojanje x zadovoljavaju jednačinu $\frac{d^2x}{dt}=-\omega t$.

2404. Tačka izvodi harmonijsko kretanje po zakonu: $x = a \sin kt$. Odrediti amplitudu a i kružnu frekvenciju k oscilacije, ako je za $x = x_1$, $v = v_1$, a za $x = x_2$, $v = v_2$.

2405. Točak se okreće tako da je ugao obrtanja proporcionalan kvadratu vremena. Ako se prvi obrt obavi za 8 sec, naći uglovno ubrzanje posle 32 sec od početka okretanja.

2406. Krajevi duži $AB = 10$ cm klize po koordinatnim osama. Tačka A klizi po x osi brzinom od 2 m/sec i udaljava se od koordinatnog početka O. Kolika je brzina tačke B u momentu kada je $OA = 6$ cm?

2407. Tačka $A(x, y)$ se kreće ravnomerno (uniformno) po krugu $x^2 + y^2 = r^2$, pri čemu jedan obrt traje t sekundi. Naći brzinu i ubrzanje projekcije tačke A na osu Ox, ako se u trenutku $t = 0$ tačka nalazila u položaju $A_0(a, 0)$.

2408. Tačka se kreće pravolinijski, tako da se njena brzina menja proporcionalno kvadratnom korenu iz pređenog puta. Pokazati da se kretanje vrši pod dejstvom sile konstantne jačine.

2409. Čovek visine 1,7 m udaljava se brzinom 6,34 km/čas od svetlosnog izvora, koji se nalazi na visini od 3 m iznad tla. Kojom brzinom se kreće vrh senke njegove glave?

2410. Vodene kapi ističu iz otvora vertikalne cevi u vremenskom rasponu od 0,1 sec jedna za drugom ubrzanjem g. Odrediti razliku brzine prve i druge kapi 1 sec posle isticanja prve kapi.

2411. Točak radijusa a kotrlja se po pravoj. Ugao φ za koji se točak okrene u toku t sekundi dat je jednačinom $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$. Odrediti brzinu i ubrzanje centra točka.

2412. Naći odnos između brzine kretanja centra kugle, koja se kotrlja bez klizanja, i uglovne brzine kugle u slučaju da se kugla kotrlja po dvema paralelno postavljenim šinama, čije je uzajamno rastojanje d.

2413. Zrno je izbačeno vertikalno uvis sa početnom brzinom v_0 m/sec. Na kojoj će se visini nalaziti posle t sekundi? Odrediti brzinu i ubrzanje zrna. Posle koliko sekundi zrno dostiže maksimalnu visinu i koliko iznosi ta visina?

2414. Teška materijalna tačka $A(x, y)$ bačena je u vertikalnoj ravni Oxy pod uglom α prema horizontalnoj ravni sa početnom brzinom v_0. Sastaviti, zanemarujući otpor vazduha, jednačine kretanja i odrediti brzinu i ubrzanje tačke kao i putanju kretanja.

2415. Projektil je izbačen brzinom od $v_0 = 400$ m/sec pod uglom α prema horizontu. Izračunati na kojoj će visini projektil da udari u vertikalnu stenu na rastojanju 3 000 m od mesta ispaljivanja i brzinu u tom trenutku. Otpor vazduha ne uzimati u obzir.

2416. Raketa koja je bila u početku nepokretna, izbacuje ravnomernim mlazom gasove brzinom $v_1 = 300$ m/sec (u odnosu na raketu); za 1 sec izbacuje se masa gasa $m_1 = 90$ g. Početna masa rakete je $m_2 = 990$ g.

Posle koliko će vremena, od početka kretanja, raketa postići ubrzanje od 30 m/sec? Koristiti formulu Ciolkovskog $t=\frac{m_2}{m_1}\left(1-e^{-\frac{v}{v_1}}\right)$.

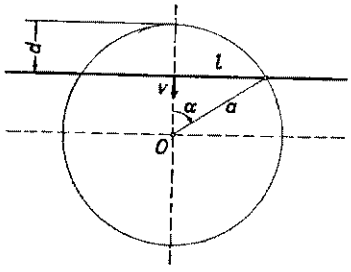
2417. Posuda u obliku polulopte poluprečnika R, puni se vodom konstantnom brzinom od a lit/sec. Odrediti brzinu povećanja dubine vode na visini h i pokazati da je ona obrnuto proporcionalna odgovarajućoj površini tečnosti.

2418. Barometarski pritisak p menja se po obrascu $\ln\frac{p}{p_0}=ch$, gde p_0 označava normalni pritisak. Na visini 5 540 m pritisak je jednak polovini normalnog; naći brzinu promene barometarskog pritiska kad se menja visina.

2419. Zavisnost između količine materije dobijene nekom hemijskom reakcijom i vremena t izražava se jednačinom $x=A(1-e^{-kt})$. Odrediti brzinu reakcije.

2420. Količina elektriciteta, koja protiče kroz provodnik, počinjući od momenta $t=0$ data je formulom $Q=8t^2-5t+1$ (kulona). Odrediti jačinu struje na kraju pete sekunde.

2421. Po obruču od provodnog materijala (sl. 20) klizi provodnik l stalnom brzinom v. Sistem leži u homogenom magnetnom polju indukcije B, koja sa pravcem normale na ravan obruča zaklapa ugao od 180°. Izračunati elektromotornu silu koja deluje u kolu u trenutku kad se provodnik nalazi u položaju određenom koordinatom d.



Sl. 20

§ 5. Teoreme o argumentu funkcije

1° Rolleova teorema

Ako je funkcija $y=f(x)$ neprekidna za $x\in[a, b]$, ima izvod $f'(x)$ za $x\in(a, b)$ i ako je $f(a)=f(b)=0$, tada postoji bar jedna vrednost argumenta $x=\xi$, takva da je $f'(\xi)=0$, gde je $\xi\in(a, b)$.

2° Lagrangeova teorema

Ako je funkcija $y=f(x)$ neprekidna za $x\in[a, b]$ i ima izvod $f'(x)$ za $x\in(a, b)$: tada je:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi), \text{ gde je } \xi\in(a, b).$$

3° Cauchyeva teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ neprekidne za $x\in[a, b]$ i imaju izvode $f'(x)$ i $\varphi'(x)$ za $x\in(a, b)$ koji su različiti od nule istovremeno i ako je $\varphi(b)\neq\varphi(a)$, tada je,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ gde je } \xi\in(a, b).$$

2422. Pokazati da funkcija $f(x)=x^4-2x^2$ zadovoljava uslove Rolleove teoreme za $x\in[0, \sqrt{2}]$. Naći odgovarajuće vrednosti ξ. Uraditi isto za $x\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

2423. Pokazati da se među korenima funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$; $b^2-4ac>0$ nalazi koren jednačine $f'(x)=0$.

2424. Proveriti da li funkcija $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ ispunjava uslove Rolleove teoreme na odsečku $[-1, 1]$.

2425. Koji od uslova Rolleove teoreme nije ispunjen za funkciju $f(x)=|\sin x|$ na odsečku $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

2426. Ako jednačina $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ ima pozitivan koren $x=x_0$, onda jednačina $na_0x^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ ima bar jedan pozitivan koren, manji od x_0. Dokazati!

2427. Ako je: $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ pokazati da jednačina $f'(x)=0$ ima tri realna korena i naći intervale u kojima se nalaze.

2428. U kojoj je tački tangenta krive $y=4-x^2$ paralelna tetivi AB, $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$. Nacrtati grafik.

2429. Nacrtati grafik funkcije $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<2 \\ 1, & |x|\geqslant 2. \end{cases}$

Zašto se ne može na nju primeniti Lagrangeova teorema na odsečku $[0, 2]$?

2430. Nacrtati grafik funkcije $f(x)=|\ln x|$ i ispitati koji od uslova Lagrangeove teoreme nije ispunjen na odsečku $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

2431. Napisati Lagrangeovu formulu i naći odgovarajuće ξ za funkciju: a) $f(x)=1-x^2$ na odsečku $[0, 1]$, b) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ na odsečku $[0, 1]$, c) $f(x)=\ln x$ na odsečku $[1, e]$.

2432. Na krivoj čija je jednačina $y=x^2-1$ date su tačke $A(0, y_1)$, $B(1, y_2)$. Primenom Lagrangeove teoreme, odrediti na krivoj između tačaka A i B tačku M, tako da površina trougla AMB bude najveća, i odrediti tu površinu.

2433. Neka funkcija $f(x)$ ispunjava uslove Lagrangeove teoreme na odsečku $[a, b]$. Primenom Rolleove teoreme na funkciju

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

dokazati Lagrangeovu teoremu za funkciju $f(x)$. Kakvo je geometrijsko značenje funkcije $F(x)$?

2434. Primenom Lagrangeove teoreme dokazati da je $\sin(x+h)-\sin x=h\cos\xi$, gde je $x<\xi<h$.

2435. Da li su ispunjeni uslovi Cauchyeve teoreme za funkcije $f(x)=\sin x$ i $\varphi(x)=\cos x$ na odsečku $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Primeniti teoremu i naći ξ.

2436. Pomoću Cauchyeve teoreme dokazati da je $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^n(\theta x)}{n!}$; $(0<\theta<1)$, ako je $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$

2437. Primenom Lagrangeove teoreme naći: $\log\sqrt[3]{999}$.

2438. Primenom Lagrangeove teoreme izračunati približno $\operatorname{arc\,tg} 1{,}1$.

Primenom Lagrangeove teoreme dokazati nejednakosti:

2439. $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ $\left(0\leqslant a<b<\frac{\pi}{2}\right)$.

2440. $\frac{1}{5}(b-a)<\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{a}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{b}\right)<b-a$, $(0<a<b<1)$.

2441. $\frac{1}{a+1}<\ln\frac{1+a}{a}<\frac{1}{a}$, $(a>0)$.

2442. U Lagrangeovoj formuli $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$ odrediti θ u funkciji od x i h za funkciju $f(x)=\sqrt{x}$ i naći $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

§ 6. L'Hôpitalovo pravilo

1° Neodređeni izrazi oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$

Ako su funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ beskonačno male ili beskonačno velike za $x\to a$, tj. ako je $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ kad $x\to a$ neodređen izraz oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, tada je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

(ako postoji limes na desnoj strani). Pravilo važi i kada je $a=\infty$.

Može postojati $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, a da ne postoji $\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

2° Neodređeni izrazi oblika $0\cdot\infty$ i $\infty-\infty$

Ako je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, onda proizvod $f_1(x)\cdot f_2(x)$ treba napisati u obliku $\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$ $\left(\text{tip } \frac{0}{0}\right)$ ili $\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$ $\left(\text{tip } \frac{\infty}{\infty}\right)$ pa se limes traži kao u 1°.

U slučaju: $\infty-\infty$, treba izraz $f_1(x)-f_2(x)$ transformisati u oblik $f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$.
Ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, tada je neodređenost svedena na prethodni slučaj.

3° Neodređeni izrazi oblika: 1^∞, 0^0, ∞^0

Prethodnim logaritmovanjem izraza $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ sva tri slučaja svode se na oblik $0\cdot\infty$.

Naći granične vrednosti:

2443. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(x+1)}$.

2444. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\operatorname{ch} x}$.

2445. Pokazati da je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1$.

Odrediti sledeće granične vrednosti:

2446. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-3x^4+2x^2+x-1}{x^7-4x+3}$.

2447. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5+4x^2+5}$.

2448. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{\alpha x}}$, $(\alpha\in R_e,\ n\in N)$.

2449. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$.

2450. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$, $(\alpha\in R_e)$.

2451. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x-1}}$.

2452. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

2453. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $(a>0)$.

2454. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$.

2455. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{\operatorname{tg} x}$, $(a>0,\ b>0)$.

2456. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

2457. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{arc\,tg} x}{x^3+x^2+x}$.

2458. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$, $(a,\ b,\ c,\ d>0)$.

2459. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}}$.

2460. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x}{e^x-\cos x}$.

2461. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

2462. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n\cdot e^{-x}$, $(n\in N)$.

2464. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x$.

2465. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-2^x}{x}$.

2466. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

2467. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha\ln x$, $(\alpha>0)$.

2468. $\lim\limits_{x\to -a}(x+a)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$.

2469. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

2470. $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]$.

2471. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}-x\right)$.

2472. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

2473. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

2474. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

2475. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

2476. $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln x\left\{1-\left[\frac{\ln(x-1)}{\ln x}\right]^a\right\}$.

2477. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2478. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2479. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

2480. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$.

2481. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

2482. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(1-e^x)}}$.

2483. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2484. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{3x^4-x^6}-\frac{1}{x^3\operatorname{arc\,tg} x}\right)$.

2485. Dokazati da je (za $x\to 0$) $\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{1}{3}x\approx-\frac{x^2}{9}$.

2486. Data je kriva $y=\operatorname{arc\,tg}(\ln x)$. 1° Naći ugao pod kojim kriva seče x osu. 2° Izračunati: $\lim\limits_{x\to 0}y'$ i $\lim\limits_{x\to\infty}y'$.

2487. Može li se primeniti L'Hôpitalovo pravilo na $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$. Koliki je taj limes?

2488. Da li se može primeniti L'Hôpitalovo pravilo na $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$? Koliki je taj limes?

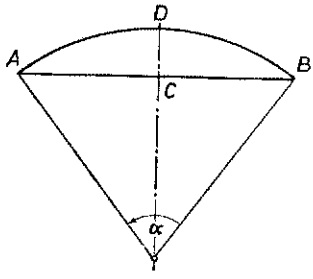
2489. Koliki je red beskonačno male $e-(1+x)^{1/x}$ u odnosu na beskonačno malu x?

2490. Naći red beskonačno male

$$\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$$

u odnosu na beskonačno malu x.

2491. Pokazati da je P, površina kružnog odsečka (sl. 21), približno jednaka $P\approx\frac{2}{3}bh$, gde je: $AB=b$, $CD=h$, $CD\perp AB$ i $\alpha\to 0$.



Sl. 21

§ 7. Rastenje i opadanje funkcija. Ekstremumi i prevojne tačke

1° Dovoljan uslov monotonosti

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u intervalu $[a, b]$ a sem toga joj je prvi izvod $f'(x)$ pozitivan ili negativan u tom intervalu, onda funkcija raste ili opada u tom intervalu.

2° Ekstremumi funkcija

Ako je $f(x)>f(x_0)$ za svako $x\neq x_0$, a koje pripada okolini x_0, funkcija $f(x)$ ima *minimum* $f(x_0)$ za $x=x_0$. Ako je pak $f(x)<f(x_0)$ za svako $x\neq x_0$ a koje pripada okolini x_0, funkcija $f(x)$ ima *maksimum* $f(x_0)$ za $x=x_0$. Minimum i maksimum, zajednički, se zovu *ekstremumi*. Ako je x_0 tačka ekstremuma, tada je $f'(x_0)=0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji. To je potreban uslov za ekstremum neprekidne funkcije u okolini tačke x_0. Takva tačka, x_0, zove se kritična tačka.

Dovoljan uslov: Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u x_0 i ima u okolini tačke x_0 konačan izvod, osim možda u x_0, i ako prilikom prelaska x preko x_0: $f'(x)$ menja znak od $(+)$ na $(-)$, onda je $f(x_0)=y_{max}$; $f'(x)$ menja znak od $(-)$ na $(+)$, onda je $f(x_0)=y_{min}$; $f'(x)$ ne menja znak, nema ekstremuma. Na sledećoj tabeli su ilustrovani svi ovi slučajevi.

x		x_1		x_2		x_3		x_4	
y'	$-$	0	$+$	ne postoji	$-$	0	$-$	$-\infty$	$-$
y	opada	$\smile$ min.	raste	$\wedge$ max.	opada	$\sim$ prevojna tačka	opada	$\wr$ prevojna tačka	opada

Drugi način za utvrđivanje dovoljnog uslova je pomoću y''. Ako je u nekoj tački x_0, $y'=0$, a: 1° $y''>0$, onda funkcija ima minimum; 2° $y''<0$, onda funkcija ima maksimum; 3° $y''=0$, pitanje ostaje nerešeno. U tom slučaju treba tražiti vrednosti sledećih izvoda u tački x_0 i ako je prvi izvod koji je različit od nule, parnog reda, funkcija ima ekstremum maksimum, ako je taj izvod manji od nule, a minimum, ako je veći od nule; ukoliko je prvi izvod koji je različit od nule neparnog reda, onda funkcija u x_0 ima prevojnu tačku.

Tačke u kojima je $y'=0$, zovu se *stacionarne tačke*.

3° Prevojne tačke

Ako je kriva $y=f(x)$ u okolini tačke x_0 iznad svoje tangente u toj tački, kaže se da je *konkavna* u pozitivnom smeru ordinatne ose u okolini te tačke, a ako je ispod tangente kaže se da je *konveksna* u pozitivnom smeru ordinatne ose. Ako je $y''>0$ za $x\in[a, b]$, onda je kriva konkavna u tom intervalu, a ako $y''<0$, onda je konveksna. Tačke u kojima kriva menja konveksitet zovu se *prevojne tačke*. Potreban uslov da kriva ima prevojnu tačku u x_0 je da je $f''(x_0)=0$ ili da $f''(x_0)$ ne postoji. Dovoljan uslov je da $y=f(x)$ u x_0 menja konveksitet.

Odrediti intervale monotonosti funkcija:

2492. $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

2493. $y=x+|\sin 2x|$.

2494. $y=x^2-\ln x^2$.

2495. $y=\dfrac{\sin x-2}{\cos x}$.

2496. $y=2\sin x+\cos 2x$.

2497. $x=te^t;\ y=te^{-t}$.

2498. Data je funkcija: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\\ x^2-6x+6, & x>1.\end{cases}$

1° Ispitati neprekidnost funkcije. 2° Naći izvod i ispitati neprekidnost izvodne funkcije. 3° Naći ekstremne vrednosti funkcije. Naći najmanju i najveću vrednost funkcije u intervalu $\left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{2}\right]$. 4° Nacrtati grafik.

2499. Naći intervale monotonosti funkcije $y=\ln x$. Kolika je najveća vrednost funkcije za $x\in[2, e]$?

2500. Može li u nekom intervalu $[a, b]$ minimum funkcije da bude veći od maksimuma?

2501. Naći stacionarne tačke funkcije $y=\sin^3 x$. Koje su od njih ekstremumi? Utvrditi vrstu ekstremuma.

2502. Odrediti parametre a i b tako da funkcija $y=a\ln x+bx^2+x$ ima ekstremne vrednosti u tačkama $x=1$ i $x=2$.

2503. Naći vezu između koeficijenata k i m tako da funkcija

$$f(x)=\sqrt{2}\frac{\sin^2 x}{k\sqrt{2}-m\sin x} \text{ ima ekstremum za } x=\frac{\pi}{4}.$$

Naći minimalne i maksimalne vrednosti sledećih funkcija:

2504. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$, za $x\in[-1, 2]$.

2505. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$.

2506. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+4}$.

2507. $f(x)=\dfrac{5-x}{9-x^2}$, za $x\in[0, 2]$.

2508. $f(x)=\sqrt{2ax^2(2a-x)}$.

2509. $f(x)=e^x-ax$, $(a>0)$.

2510. $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(x-a_i)^2$, $(p_i>0)$.

2511. $f(x)=x^{1-\ln x}$.

2512. $f(x)=\sin 2x-x$ za $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2513. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\cos x+\sin x-\dfrac{x^2-x}{4}$.

2514. $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\cos x-\sin x}$ za $x\in[0, 2\pi]$.

2515. $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sin x-\cos x}$ za $x\in[0, 2\pi]$.

2516. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$

2517. Naći donju i gornju među za funkciju

$f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ u intervalu $(0;\ \infty)$.

2518. Dokazati da jednačina $\ln x=2\dfrac{x-1}{x+1}$ nema realnih korena za $x>1$.

2519. Pokazati da funkcija $f(x)=\dfrac{4x(1-x)}{(1+x)^2}$ ne može imati vrednosti veće od $\dfrac{1}{2}$.

2520. Koje vrednosti funkcija $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2x}$ ne može uzeti ni za jednu vrednost promenljive.

2521. Funkcija $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x^2+4x+3a}$ za $a\in(0, 1)$ može uzeti sve vrednosti. Dokazati!

Dokazati sledeće nejednakosti:

2522. $x|\ln x|<e^{-1}$ za $x\in(0, 1)$.

2523. $\sqrt[4]{x}<2x+\dfrac{3}{8}$ za $x>0$.

2524. $e^x>1+x$ za $x\neq 0$.

2525. $x^2+1>e^{-x^2}$ za $x\neq 0$.

2526. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\dfrac{x^2}{2}$.

2527. $\arcsin x>x+\dfrac{x^3}{6}$ za $x\in(0, 1)$.

2528. $\ln(1+x)>\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}$ za $x>0$.

2529. $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$ za $x\in[0, 1]$ i $p>1$.

2530. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ za $x\in(0, \infty)$.

2531. $(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}>(a^y+a^y)^{\frac{1}{y}}$, $a>0$, $b>0$, $0<x<y$.

Naći prevojne tačke sledećih krivih:

2532. $y=3x^5-2x^6$. **2533.** $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. **2534.** $y=\sin x$.

2535. $y=\sin^3 x$. **2536.** $y=xe^{1-x}$.

2537. $y=(x-a)^{2n+1}+ax$. $(n\in N,\ a\in R_e)$.

Ispitati znak drugog izvoda sledećih funkcija:

2538. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. **2539.** $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$. **2540.** $y=\sin^2 x$.

2541. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. **2542.** $y=\arcsin\dfrac{1}{x-1}$.

2543. Odrediti parametre a i b tako da tačka (2; 2, 5) bude prevojna tačka krive zadate jednačinom $x^2y+ax+by=0$.

Da li kriva u tom slučaju ima još prevojnih tačaka?

2544. U funkciji $f(x)=\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b}}$ odrediti parametre a i b tako da funkcija za $x=-1$ ima ekstremum a za $x=-2$ prevojnu tačku grafika.

2545. Odrediti realne konstante a i b tako da grafik funkcije

$f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{a-b\cos x}$ ima ekstremum u tački $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{4}\right)$.

2546. Naći skup tačaka u kojima funkcija $y=\dfrac{x^3+\alpha}{x^2-\alpha}$, $(\alpha>0)$ ima ekstremne vrednosti.

2547. Data je funkcija $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-\alpha}$. Za $\alpha<0$ naći jednačinu skupa prevojnih tačaka grafika funkcije.

2548. Odrediti skup stacionarnih tačaka funkcije $y=(x^2+\lambda)e^{-x}-1$ za razne vrednosti parametra λ.

2549. Data je $f(x)=x^2\ln(ax)$, gde je a realna konstanta različita od nule. Naći skup tačaka ekstremuma funkcije.

2550. Pokazati da sve prevojne tačke krive $y=x\sin x$ leže na krivoj $x^2y^2=4(x^2-y^2)$.

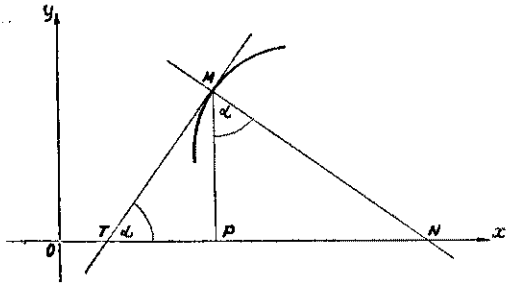
2551. Naći krivu na kojoj leže prevojne tačke krive $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

§ 8. Tangente i normale krivih u ravni

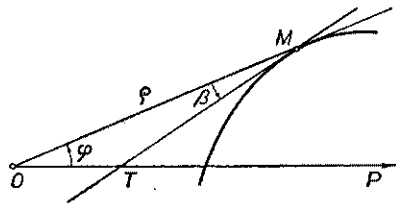
Jednačine tangente i normale grafika diferencijabilne funkcije $y=f(x)$ u tački grafika $M(x; y)$ (sl. 22) imaju respektivno oblik

$$Y-y=y'(X-x) \quad \text{i} \quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

gde su X i Y tekuće koordinate tangente ili normale, a y' vrednost izvoda funkcije $y=f(x)$ u tački M.



Sl. 22



Sl. 23

Dužine tangente, normale subtangente i subnormale su date respektivno obrascima:

$$TM=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|, \quad PN=|yy'|, \quad \text{gde je} \quad y'=\operatorname{tg}\alpha.$$

Ako je $\rho=f(\varphi)$ jednačina krive u polarnom koordinatnom sistemu, β ugao između potega OM i tangente MT (sl. 23), onda je $\operatorname{tg}\beta=\frac{\rho}{\rho'}$.

2552. Data je kriva linija jednačinom $y=x^2+2x$. Naći jednačine tangente i normale u proizvoljnoj tački krive.

2553. Na krivoj $y=x^2+3x-4$ naći tangentu paralelnu pravoj:

1° $y=x$; 2° $y=3x-3$; 3° $2x-3y+1=0$.

2554. U kojoj tački parabole $y=x^2-2x+5$ treba postaviti tangentu da bi ona bila normalna na pravoj $y=x$?

2555. Na krivoj $y=x^2-1$ naći tačku u kojoj je: 1° normala paralelna pravoj $y=x+1$; 2° normala normalna na pravoj $y=-x$.

2556. Odrediti parametar k tako da prava $y=kx+1$ bude tangenta krive $y^2=4x$ i naći tačku dodira.

2557. Napisati jednačine tangenata krive $y=|4x-x^2|$ u tački $x=0$ i naći ugao između njih.

2558. Iz tačke $(2, -2)$ povući tangentu na parabolu $y=x^2-3x+1$ i naći tačku dodira.

2559. Sastaviti jednačinu parabole čija je osa simetrije paralelna Oy osi, prolazi kroz tačke $(1, 2)$ $(-1, 6)$ i dodiruje pravu $2x-y-1=0$.

2560. Tangente krivih $ay=x^2$ i $y=x^2+x$ povučene u tačkama sa istom apscisom seku se u tački S. Odrediti parametar a tako da tačka S padne na pravu $y=2x$.

2561. Na paraboli $y=x^2$ u tačkama sa apscisama x i $x+h$ povučene su normale. Naći granični položaj presečne tačke tih normala kada $h\to 0$.

2562. Date su parabole $y^2+4x-4=0$ i $8x^2-2x-3y-6=0$; u presečnim tačkama tih parabola postaviti normale i pokazati da se tri od ovih normala seku u jednoj tački.

2563. Data je jednačina krive linije $4by-4abx=-(a^2+1)x^2$. Pokazati da ona seče apscisnu osu u dvema tačkama i da tangente u tim tačkama zaklapaju sa Ox osom suplementne uglove.

2564. Tangenta krive $y=x^3$ seče x osu u nekoj tački S. Normalna projekcija tačke dodira na x osu je tačka T. Pokazati da je $\overline{OS}=2\overline{ST}$, gde je O koordinatni početak.

2565. Data je kriva $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$. Tangenta te krive seče koordinatne ose u tačkama A i B. Dokazati da je zbir $\overline{OA}+\overline{OB}=\text{const}$.

2566. U kakvom odnosu treba da stoje koeficijenti p i q da bi osa Ox bila tangenta krive $y=x^3+px+q$?

2567. Tangenta u tački P kriva $y=(x-2)^2(x+2)^3$ seče Ox osu u tački T, Oy osu u tački T_1. Normala u tački P seče Ox osu u N a Oy osu u N_1. Dokazati da je $\overline{T_1N}:\overline{TN_1}=y'$.

2568. Naći jednačine tangenata krivih: 1° $x^2+y^2=a^2$; 2° $y^2=2px$; 3° $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 4° $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, u proizvoljnoj tački.

2569. Tangenta krive $y=\dfrac{a^2}{2x}$ seče koordinatne ose u tačkama A i B.

1° Pokazati da je trougao OAB konstantne površine čija je vrednost a^2.
2° Naći rastojanje koordinatnog početka od te tangente.

2570. Neka su A_1 i A_2 tačke na osi parabole $y^2=2px$ na jednakim odstojanjima od žiže, a d_1 i d_2 odstojanja tačaka A_1 i A_2 od tangente parabole. Pokazati da je $d_1^2-d_2^2=\text{const}$.

2571. Koja od pravih što prolaze kroz koordinatni početak seče hiperbolu $xy=a^2$ pod pravim uglom?

2572. Pokazati da su tangente krive $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ u presečnim tačkama krive sa koordinatnim osama, paralelne među sobom.

2573. Iz tačke $(4, 1)$ postaviti tangentu na krivu $y=\dfrac{x-1}{x}$ i naći tačku dodira.

2574. Odrediti parametar n tako da prava $y=x+n$ bude tangenta krive $y=\frac{x}{x+4}$.

2575. Naći jednačine tangente i normale krive $x(x-y)+1=0$ i granični položaj tangente kad se dodirna tačka udaljava u beskonačnost.

2576. Dokazati da se tangente krive $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, postavljene u tačkama za koje je $y=1$, seku u koordinatnom početku.

2577. Data je kriva linija jednačinom $ay=x^3$. Tangenta ove krive u tački A seče tu krivu u tački B. Naći skup tačaka koje odgovaraju sredinama duži $\overline{AB}$.

2578. Data je kriva $y=\frac{x^2}{x^2-1}$. Napisati jednačinu tangente u proizvoljnoj tački krive a zatim naći koordinatne tačke u kojoj ta tangenta seče krivu.

2579. U proizvoljnoj tački krive $y=x+\frac{1}{x^2}$ povučena je tangenta. Odrediti koordinate tačke M u kojoj ta tangenta seče krivu.

2580. Pokazati da sve tangente krive $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-4x^2}$ seku ordinatnu osu u tački podjednako udaljenoj od koordinatnog početka i dodirne tačke.

2581. Tangenta krive $x^3-ay^2=0$ u proizvoljnoj tački T seče ovu krivu u tački S. Pokazati da Ox osa deli duž ST na dva dela koja stoje u razmeri $8:1$.

2582. Na krivoj $xy^2=2a^3$ naći tačku čija normala prolazi kroz koordinatni početak.

2583. Naći jednačinu tangente krive $2x^3-x^2y^2-3x+y+1=0$ u tački $y=1$.

2584. Data je jednačina krive $x^2-xy+y^2-1=0$. 1° Pokazati da na krivoj postoje dve različite tačke u kojima je tangenta paralelna datoj pravoj. Može li se za datu pravu uzeti ma kakva prava? 2° U kojim tačkama krive treba povući normale pa da one prolaze kroz koordinatni početak?

2585. Data je kriva $y=xe^{\frac{1}{x}}$. Naći jednačinu tangente krive u tački $x=\alpha$ i njen granični položaj kad $\alpha\to\infty$.

2586. Pokazati da tangente krivih $y=e^x$, $y=e^{-x}$ i $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ povučene u tačkama sa istom apscisom imaju zajedničku tačku.

2587. Date su tri krive linije jednačinama $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ i $y=\frac{f(x)+\lambda\varphi(x)}{1+\lambda}$, gde je λ realan parametar a $f(x)$ i $\varphi(x)$ diferencijabilne funkcije. Pokazati da se njihove tangente, povučene, u tačkama sa istom apscisom, seku u jednoj tački.

2588. Odrediti ugao između leve i desne tangente krive $y=\sqrt{1-e^{-(ax)^2}}$ u tački $x=0$.

2589. Normala krive $y^2=ce^{\frac{x}{a}}+4a(x+a)$ u tački M seče Ox osu u tački S. Dokazati da sredina duži $\overline{MS}$ leži na paraboli $y^2=ax$.

2590. Za koje se vrednosti parametra λ mogu povući tangente na krivu $y=(x+\lambda)e^x$ iz koordinatnog početka?

2591. Sastaviti jednačinu normale krive $y=x\ln x$ koja je paralelna pravoj $2x-3y+3=0$.

2592. Napisati jednačinu tangente i normale krivih:

1° $y=\sin x$; 2° $y=\cos x$, u tačkama $x=0$ i $x=\frac{\pi}{2}$.

2593. Napisati jednačinu tangente krive $y=\cos^2\sqrt{x}$ u tački $x=0$.

2594. Napisati jednačine tangente i normale krive $y=\ln(\cos x)$ u tački $x=2\pi$.

2595. Odrediti ugao između leve i desne tangente krive

$$y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2} \text{ u tački } x=1.$$

2596. Napisati jednačine tangente i normale krive $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ u tačkama $t=0$ i $t=1$.

2597. Napisati jednačine tangente i normale krive $x=\frac{2t}{t+2}$, $y=\frac{t}{t-1}$ u tački (1, 2).

2598. U tačkama krive $x=t^2$, $y=\frac{t^3}{3}-t$ u kojima ona seče Ox osu, povučene su tangente; naći jednačine tih tangenata.

2599. Na krivoj $x=2t^3-9t^2+12t-1$, $y=t^2+t+1$, naći tačke u kojima je tangenta paralelna osi Oy.

2600. Data je kriva $x=t^2$, $y=t^3$. Pokazati da se u tački $t_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ tangente i normala poklapaju.

2601. Pokazati da sve normale krive $x=\frac{2at}{1+t^2}$, $y=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ $(a>0)$ prolaze kroz jednu tačku.

2602. Odrediti pravu koja je istovremeno tangenta i normala krive

$$x=1+\frac{1}{t^2}, \qquad y=t+\frac{1}{t^2}.$$

Naći jednačine tangente i normale krivih:

2603. $x=\ln(\cos t)+1$, $y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$ za $t=\frac{\pi}{4}$.

2604. $x=\sin t$, $y=a^t$ za $t=0$.

2605. Tangenta krive $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, povučena u proizvoljnoj tački M seče koordinatne ose u tačkama S i T. Odnos $\frac{\overline{SM}^2}{\overline{ST}^2}$ je funkcija parametra t. Formirati tu funkciju i naći njenu graničnu vrednost kada $t\to 0$.

2606. Cikloida nastaje kotrljanjem kruga po pravoj. Dokazati da normala cikloide prolazi kroz dodirnu tačku kruga i prave.

2607. Dokazati da odsečak na osi Ox između tangente i normale krive $x=2a(\ln\sin t-\sin^2 t)$, $y=a\sin 2t$ iznosi $2a$.

2608. Pokazati da se krug $x^2+y^2=a^2$ i normala epicikloide

$$x=a\left\{(1+\lambda)\cos t-\lambda\cos\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)t\right\},\quad y=a\left\{(1+\lambda)\sin t-\lambda\cos\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)t\right\}$$

seku u tački $(a\cos t,\ a\sin t)$.

2609. Pokazati da tangenta logaritamske spirale $\rho=ae^{m\varphi}$ obrazuje stalan ugao sa potegom.

2610. Data je familija spirala $\rho^m=k^m\cos(m\theta)$, gde su ρ i θ polarne koordinate a k realna konstanta. Pokazati: 1° Ako je φ ugao između tangente potega da je $\varphi-m\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2}$; 2° ako je φ ugao između polarne ose i normale da je $\varphi=(m+1)\theta+k\pi$.

2611. Izračunati rastojanje od koordinatnog početka do tangente krive $\rho=ae^{k\varphi}$.

2612. Naći proizvod rastojanja žiža elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, od njene normale.

2613. Naći dužinu odsečka koji elipsa $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ odseca na svojoj normali.

2614. Dokazati da tangenta krive $x=a(1-\cos t)$, $y=a(1-\sin t)$ obrazuje sa koordinatnim osama trougao stalnog obima.

2615. U trima tačkama A, B i C raspoređenim na Descartesovom listu $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ (uzeti $a=1$) i jednoj pravoj, povučene su tangente koje seku tu krivu u tačkama S_1, S_2 i S_3. Dokazati da te tačke leže na jednoj pravoj.

2616. Svaki radijus vektor krive $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ seče ovu krivu u trima tačkama različitim od pola. Dokazati da tangente u tim tačkama obrazuju ravnostrani trougao.

2617. Odrediti ugao pod kojim se seku krive $x^2+y^2=2$ i $y=x^2$.

2618. Pokazati da se parabole $y^2=4ax+4a^2$ i $y^2=-4bx+4b^2$ $(a>0;\ b>0)$ seku pod pravim uglom.

2619. Za koju vrednost parametra a kriva $y=\frac{ax-x^3}{x}$ seče Ox osu pod uglom od 45°?

2620. Pokazati da se krive $xy=b$ i $x^2-y^2=a$ seku pod pravim uglom.

2621. Pod kojim uglom seku osu Oy krive:

$$1^\circ\ y=\frac{x}{1+x^2}; \qquad 2^\circ\ y=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}.$$

2622. Za koju vrednost parametra A sinusoida $y=A\sin\frac{x}{a}$ seče osu Oy pod uglom od 45°?

2623. Pod kojim uglom prava $y=0{,}5$ seče krivu $y=\cos x$?

2624. Pod kojim uglom se seku krive:

$1^\circ\ y=\sin x$ i $y=\cos x$; $\qquad 2^\circ\ y=\arcsin x$ i $y=\arccos x$.

2625. Za koju vrednost parametra a kriva $y=a^x$ dodiruje pravu $y=x$? Naći tačku dodira.

2626. Odrediti parametar a tako da parabola $y=ax^2$ dodiruje krivu $y=\ln x$. Naći koordinate dodirne tačke.

2627. Posmatrajući krive $y=x$ i $y=a^x$ dokazati da niz brojeva $x_1=a$, $x_2=a^a$, $x_3=a^{a^a}, \ldots, x_n=a^{x_{n-1}}$ za $e^{-e}<a<\sqrt{e}$ teži određenoj vrednosti kada $n\to\infty$.

2628. Pokazati da kriva $y=e^{kx}\sin mx$ dodiruje krive $y=e^{kx}$ i $y=-e^{kx}$ u svim zajedničkim tačkama.

2629. Dokazati da se krive $y=f(x)$ i $y=f(x)\sin ax$, gde je $f(x)$ diferencijabilna funkcija, dodiruju u zajedničkim tačkama.

2630. Za koju vrednost parametra n kriva $y=\operatorname{arc\,tg} nx\ (n>0)$ seče osu Ox pod uglom većim od 89°?

Pod kojim se uglom seku krive linije:

2631. $y=x^2$ i $x=\frac{5}{3}\cos t$, $\quad y=\frac{5}{4}\sin t$.

2632. $x=a\cos\varphi$, $\quad y=a\sin\varphi$ i $x=\frac{at^2}{1+t^2}$, $\quad y=\frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$.

2633. $\sin y=ae^{-x}$ i $\cos y=be^{-x}$.

2634. Ako kriva linija $y=\frac{f(x)}{f'(x)}\operatorname{tg}\lambda$ seče Ox osu više puta, pokazati da je uvek seče pod istim uglom.

2635. Kriva linija je zadata jednačinama $\rho=at^3$, $\varphi=bt^2$. Naći ugao između polarne ose i tangente.

2636. Dokazati da kriva $x=\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$, $y=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}$ seče pravu $y=x$ pod pravim uglom.

2637. Naći tangens ugla između polarne ose i tangente u koordinatnom početku krivih: 1° $\rho=\sin^3\varphi$; 2° $\rho=\sin 3\varphi$.

2638. Pokazati da se parabole $\rho=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ i $\rho=\operatorname{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ seku pod pravim uglom.

2639. Dokazati da se kardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$ i $\rho=a(1-\cos\varphi)$ seku pod pravim uglom.

2640. Pokazati da je subtangenta parabole $y^2=2px$ uvek jednaka dvostrukoj vrednosti apscise dodirne tačke.

2641. Pokazati da je kod krive $y=ax^n$ odnos subtangente i apscise dodirne tačke stalna veličina.

2642. Pokazati da je dužina odsečka na x-osi koji odseca tangenta krive $\frac{a}{x^2}+\frac{y}{b^2}=1$ proporcionalna trećem stepenu apscise dodirne tačke.

2643. Pokazati da je kod krive $y=\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ subtangenta geometrijska sredina dužine normale i konstante a.

2644. Pokazati da je kod krive $y=a\ln(x^2-a^2)$ zbir dužine tangente i subtangente proporcionalan proizvodu xy.

2645. Dokazati da je subnormala krive $y^2=2a\ln x+e$ obrnuto proporcionalna apscisi.

2646. Pokazati da je dužina tangente krive

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)$$

konstantna.

2647. Dokazati da je dužina tangente krive $x=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y=a\sin t$ konstantna.

2648. Naći dužinu tangente, normale, subtangente i subnormale krive

$$x=a(2\cos t-\cos 2t),\qquad y=a(2\sin t-\sin 2t).$$

2649. Pokazati da je $4\rho=3p^2+4a^2$ gde je ρ poteg, a p rastojanje tačke krive $2x=a(3\cos t+\cos 3t)$, $2y=a(3\sin t+\sin 3t)$ od koordinatnog početka.

2650. Pokazati da je dužina subnormale Arhimedove spirale $\rho=a\varphi$ stalna.

2651. Pokazati da je dužina subtangente hiperboličke spirale $\rho=\frac{a}{\varphi}$ stalna.

2652. Naći dužinu subtangente i subnormale logaritamske spirale $\rho=a^{\varphi}$.

2653. Dokazati da su kod krivih $\rho=f(\theta)$ i $\rho=a+f(\theta)$, u tačkama koje leže na istom radijus-vektoru, polarne subnormale jednake.

2654. Data je jednačina parabole $y^2=4kx$ i tačke A $(k\alpha^2, 2k\alpha)$, B $(k\beta^2, 2k\beta)$ $(\alpha\neq\beta)$, na paraboli. 1° Naći jednačinu tangente i normale u tački A. 2° Ako se tangente krive povučene u datim tačkama seku u nekoj tački S a normale u tački M, naći jednačinu skupa tačaka M ako se tačka S kreće po pravoj paralelnoj osi simetrije parabole.

2655. Kroz koordinatni početak povučena je prava paralelna tangenti krive: 1° $y^2=2px$; 2° $x^2+y^2=a^2$ u datoj tački. Naći skup tačaka preseka te prave sa pravom koja prolazi kroz tu tačku a paralelna je ordinatnoj osi.

Naći skup tačaka podnožja normala spuštenih iz date tačke na tangente krivih:

2656. $y^2=2px$ iz žiže parabole.

2657. $x^2-y^2=a^2$ iz koordinatnog početka.

2658. $\rho=e^{a\varphi}$; iz pola.

2659. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ iz koordinatnog početka.

Naći skup tačaka temena pravog ugla čiji kraci tangiraju krive:

2660. $b^2x^2-a^2=y^2a^2b^2$. **2661.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

2662. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

§ 9. Asimptote krivih linija u ravni

Prava, $Ax+By+C=0$, zove se *asimptota* krive $y=f(x)$, ako ima osobinu da rastojanje tačke, koja se kreće po krivoj $y=f(x)$, od nje teži nuli kad x ili y teži beskonačnosti.

1° Vertikalna asimptota

Ako postoji broj a takav da je $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$, onda je prava $x=a$ vertikalna asimptota.

2° Kosa asimptota

Ako postoje limesi $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ i $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$,

onda je prava $y=kx+n$ kosa asimptota, (za $k=0$, horizontalna).

2663. Pokazati da kriva $xy^2+x^2y-8=0$ ima asimptotu $x+y=0$.

Naći asimptote sledećih krivih linija:

2664. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. **2665.** $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$. **2666.** $y=\sqrt{x^2-4}$.

2667. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. **2668.** $y=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$. **2669.** $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

2670. $y=\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)^x$. **2671.** $y=\dfrac{\sin x}{x}$. **2672.** $y=2x+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2}$.

2673. $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, gde su a, b, c realne konstante.

2674. $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$. **2675.** $x=\dfrac{t^3}{1-t^2}$, $y=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$.

2676. $\rho=\dfrac{a}{\varphi}$. **2677.** $\rho^2=\dfrac{a^2}{\varphi}$. **2678.** $\rho\cos\varphi=a\cos 2\varphi$.

§ 10. Taylorova formula

Ako funkcija $y=f(x)$ ima neprekidne izvode do n-tog reda za $x\in[a, b]$, a za $x\in(a, b]$ ima konačan $n+1$-vi izvod, onda je za $x\in[a, b]$:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+$$

$$+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \text{gde je } \xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

U specijalnom slučaju, kada je $a=0$, imamo Mac Laurinovu formulu:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \xi=\theta x,\quad 0<\theta<1.$$

Veličina $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$ zove se ostatak Taylorovog reda u Lagrangeovom obliku, ili

$$R_n=\frac{(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)],\quad (0<\theta_1<1)$$

ostatak u Cauchyevom obliku.

2679. Primeniti Taylorovu formulu na funkciju $f(x)=e^x$ za $a=0$.

2680. Napisati nekoliko prvih članova Mac Laurinova polinoma za funkciju $y=a^x$ $(a>0)$.

2681. Napisati nekoliko prvih članova Mac Laurinova polinoma za funkcije a) $y=\operatorname{sh}x$, b) $y=\operatorname{ch}x$.

2682. Primeniti Mac Laurinovu formulu na funkciju $f(x)=\sin x$, i proceniti grešku. Koliko članova reda treba uzeti da greška bude manja od $\dfrac{1}{10^3}$ za $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$?

2683. Dokazati da je:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x.\qquad 0<\theta<1.$$

2684. Da li se može odrediti interval $[-a, a]$ promenljive u kome će Mac Laurinov polinom četvrtog stepena aproksimirati funkciju $y=\cos x$ sa greškom manjom od $\varepsilon=\dfrac{1}{10^5}$?

2685. Primenom Mac Laurinove formule pokazati da je:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

2686. Pokazati da je: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + R_n(x)$ i naći izraz za ostatak $R_n(x)$.

2687. Naći granicu apsolutne greške približne formule:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{ako je } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

2688. Aproksimirati funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ Mac Laurinovim polinomom trećeg stepena i proceniti grešku aproksimacije za $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

2689. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ Mac Laurinovim polinomom drugog stepena i proceniti grešku aproksimacije za $x \in [0, 1]$.

2690. Aproksimirati funkciju $f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$ Taylorovim polinomom četvrtog stepena oko tačke $x = 0$ i proceniti grešku u intervalu: $-\frac{1}{10} \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}$.

2691. Aproksimirati funkciju $y = x^2 \ln^2 x$ u okolini tačke $x = 1$ Taylorovim polinomom četvrtog stepena i proceniti grešku aproksimacije za $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$.

2692. Aproksimirati funkciju $y = \sqrt{x}$ polinomom trećeg stepena oko tačke $x = 1$ i proceniti grešku za $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$.

2693. Odrediti približno interval za x ako se zna da je $\sin x = x$ sa tačnošću 1% od uzete vrednosti za $\sin x$.

2694. Aproksimirati pozitivnu granu funkcije $y^2(1-x^2) = x^2$ Taylorovim polinomom trećeg stepena oko tačke $x = 0$ i proceniti grešku za $|x| < 10^{-1}$.

2695. Aproksimirati funkciju $f(x) = 1 + x^2\sqrt{1+x}$ u okolini tačke $x = 0$ polinomom 4-og stepena i proceniti grešku za $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2696. U kojim se granicama mora nalaziti x da bi greška aproksimacije $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ iznosila manje od 1%.

2697. Za koje je vrednosti x približno tačna jednakost: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}$ sa tačnošću 0,0001.

2698. Izračunati e sa tačnošću do 10^{-9}.

2699. Izračunati: 1° $\sqrt{5}$ sa tačnošću od 10^{-4}; 2° log 11 sa tačnošću do 10^{-5}; 3° sin 1° sa tačnošću do 10^{-8}.

2700. Izračunati $\sqrt[3]{1{,}121}$ sa tri tačna decimalna mesta.

2701. Znajući da je $f(x)$ polinom četvrtog stepena i da je:

$f(2)=-1,\quad f^{\mathrm{I}}_{(2)}=0,\quad f^{\mathrm{II}}_{(2)}=2,\quad f^{\mathrm{III}}_{(2)}=-12,\quad f^{\mathrm{IV}}_{(2)}=24$ izračunati: $f^{\mathrm{II}}_{(0)}$.

2702. Izračunati koeficijente a_k polinoma $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, pomoću njegovih uzastopnih izvoda u tački $x=0$. Naći Mac Laurinov polinom n-tog stepena za funkciju $P_n(x)$.

2703. Razviti po stepenima razlike $(x-1)$ polinom: $P_5(x)=x^5+4x^3+2$.

2704. Ako su $T_1(x)$ i $T_2(x)$ Taylorovi polinomi n-tog stepena redom za funkcije $y=f(x)$ i $v=\varphi(x)$ u nekoj tački $x=a$, dokazati da je Taylorov polinom n tog stepena $T(x)$, za funkciju $y=f(x)\varphi(x)$, $T(x)=T_1(x)T_2(x)-P(x)$, gde je $P(x)$ polinom koji se dobija množenjem onih članova polinoma $T_1(x)$ i $T_2(x)$ kod kojih je proizvod član oblika αx^k, gde je $k>n$.

2705. Data je funkcija $y=x^2\sqrt{1-x}$. 1° Napisati Mac Laurinov polinom n-tog stepena za datu funkciju i izraz za grešku ako se funkcija zameni sa polinomom; 2° za $n=4$ naći granicu aproksimacije ako je $|x|<\frac{1}{10}$; 3° uzimajući $f(x)=x^2$ i $\varphi(x)=\sqrt{1-x}$ proveriti tačnost prethodnog zadatka.

2706. Ako je $f(x)$ polinom k-tog stepena i $\varphi(x)$ proizvoljna funkcija, može li se Mac Laurinov polinom n-tog stepena funkcije $f(x)\varphi(x)$ dobiti množenjem $f(x)$ sa Mac Laurinovim polinomom $n-k$-og stepena funkcije $\varphi(x)$?

Koristeći razlaganja odgovarajućih funkcija u Taylorov polinom, naći sledeće limese:

2707. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$.

2708. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[2n]{x^{2n}+x^{2n-1}}-\sqrt[2n]{x^{2n}-x^{2n-1}}\right)$.

2709. $\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{(2-2t+t^2)e^t}{2t^3}-\dfrac{\sqrt{1+t^6}}{t^3}\right]$.

2710. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cos 2x\cos 3x\cdots\cos nx-1}{x^2}$.

2711. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[1-\cos(1-\cos x)]}{x^8}$.

2712. Odrediti konstante a i b tako da je $\cos x - a\sin x + b\ln(1+x) - 1 = o(x^3)$ $(x \to 0)$.

2713. Dokazati jednakost

$$(1+x)^{1+x} = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

2714. Dokazati da se funkcija $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$ može napisati u obliku $y = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ i odrediti konstante a, b i c.

§ 11. Crtanje grafika funkcija pomoću karakterističnih tačaka

Prilikom crtanja grafika funkcije $y = f(x)$ potrebno je odrediti: 1° oblast definisanosti te funkcije i ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti; 2° nule funkcije i njen znak; 3° parnost i periodičnost funkcije; 4° asimptote; 5° intervale monotonosti i ekstremne vrednosti; 6° prevojne tačke, k' kavnost i konveksnost. Sem toga, potrebno je ukazati i na druge važni osobine grafika.

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

2715. $y = x^2 - 2x + 4$. **2716.** $y = |x - x^2| - x$. **2717.** $y = x - |x + x^2|$.

2718. $y = x(x^2 - 1)$. **2719.** $y = x^3 + 2x^2 - 1$. **2720.** $y = x^2 - x^4$.

2721. $y = |x+1|(x-1)^2$. **2722.** $y = |x^3 - 2x^2| - x$. **2723.** $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

2724. $y = \frac{x-1}{x+2}$. **2725.** $y = \frac{x+2}{2x+1}$. **2726.** $y = \frac{x}{x^2+1}$.

2727. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$. **2728.** $y = \frac{5-x}{9-x^2}$.

2729. $y = \frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}$. **2730.** $y = \frac{x^2}{x^4+1}$. **2731.** $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

2732. $y = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$. **2733.** $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$. **2734.** $y = x - \frac{1}{x}$.

2735. $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-12}$. **2736.** $y = \frac{(a-x)^3}{(a+x)^2}$, $(a>0)$. **2737.** $y = x + \frac{1}{x^2}$.

2738. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$. **2739.** $y = x + \frac{2x}{x^2-1}$. **2740.** $y = x - 2 - \frac{6}{x-1}$.

2741. $y = 1 + \frac{3(x-2)^2}{(x-1)^3}$. **2742.** $(x^2+x+1)y = (x-2)^3$. **2743.** $y = 1 - \frac{9(x-2)^2}{(2x-3)^3}$.

2744. $y = \frac{x^3-x^2-2x+2}{x}$. **2745.** $y = \frac{x^3-3x+2}{x^2+1}$.

2746. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

2747. $y=\dfrac{x^3+\alpha}{x^2-\alpha}$, $(\alpha>0)$.

2748. $y^2=x-2$.

2749. $y^2=1-x$.

2750. $y^2=x^2-3x-4$.

2751. $y^2=x^4(1+x)$.

2752. $4y^2=x^5+5x^4$.

2753. $y^2=x(x-1)^2$.

2754. $a^2y^2=x^3(2a-x)$, $(a>0)$.

2755. $y^2=(x+2)^3$.

2756. $3y^2=x^3-y^3$.

2757. $xy^2+x-y=0$.

2758. $x-(1+x^2)^2y^2=0$.

2759. $y^2=\dfrac{1-x}{x^2}$.

2760. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$.

2761. $y^2=\dfrac{x^2}{x+1}$.

2762. $y^2=\dfrac{x^3-2}{3x}$.

2763. $y^2=x^2\dfrac{x-1}{x+1}$.

2764. $y^2=x^2\dfrac{2x-1}{x-1}$.

2765. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$, $(a>0)$.

2766. $y=\sqrt{\dfrac{a^3-x^3}{3x}}$, $(a>0)$.

2767. $y^2=\dfrac{x^4}{x^2-a}$.

2768. $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

2769. $(y-x)^2=x^3$.

2770. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

2771. $y=1\pm x^2\sqrt{1+x}$.

2772. $x=y+1+\dfrac{1}{y-1}$.

2773. $y=x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

2774. $y=-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{x-3}}$.

2775. $y=\dfrac{1-x^2}{2\pm\sqrt{1-x^2}}$.

2776. $y=\sqrt[3]{x^2-2x-3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x-3}}$.

2777. $y=\sqrt[3]{x^4-5x^2+5}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4-5x^2+5}}$.

2778. $y=\dfrac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+4}}$.

2779. $y^3-xy^2-2x^2=0$.

2780. $(2x-1)y^2+7x^2y+7x^3=0$.

2781. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

2782. $y=\dfrac{x\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+1}$.

2783. $y^4+x^4=x^2+y^2$.

2784. $x^5-2x^3+y^3-y=0$.

2785. $y=\sqrt{\alpha x^3-8}$.

2786. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2787. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

2788. $y=xe^{-x}$.

2789. $y=xe^{-x^2}$.

2790. $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

2791. $y=xe^{-\frac{1}{x}}$.

2792. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$.

2793. $y=xe^{-\frac{1}{x^2}}$.

2794. $y=x^2e^{-x^2}$.

2795. $y=(1-x^2)e^{-x}$.

2796. $y=(x^2-1)e^{-x^2}$.

2797. $y=\dfrac{e^x}{x}$.

2798. $y=\dfrac{e^{x+1}}{x+2}$.

2799. $y=xe^{\frac{1}{x-2}}$.

2800. $y=e^{\frac{1}{1-x}}$.

2801. $y=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$.

2802. $y=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$.

2803. $y=\left(1+x+\frac{2n+1}{4n}x^2\right)e^{-x}$, $(n\in R)$.

2804. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. **2805.** $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. **2806.** $y=e^{\frac{1}{x}}-x$.

2807. $y=1-xe^{-\frac{2}{x}}$. **2808.** $y=(x+\lambda)\,e^{-\lambda x}$, $(\lambda\neq 0)$.

2809. $y=x\ln x$. **2810.** $y=x\ln^2 x$. **2811.** $y=x^2\ln x$.

2812. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$. **2813.** $y=\frac{1-\ln x}{x^2}$. **2814.** $y=\frac{\ln^3 x}{x^2}$.

2815. $y=x^4\ln\frac{1}{x}$. **2816.** $y=x+\ln(x^2-1)$. **2817.** $y=\frac{\ln\lambda x}{\sqrt{x}}$.

2818. $y=\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$. **2819.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$. **2820.** $y=x-\frac{2}{x}-3\ln x$.

2821. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$. **2822.** $y=\frac{\ln x}{x}e^{-\ln^2 x}$. **2823.** $y=\sqrt{|x|}\,(2-\ln x^2)$.

2824. $y=\ln(x^3-3x^2+4)$. **2825.** $y=\sqrt{x^2+1}+\ln\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$.

2826. $y=\ln(\alpha x^2+1)$. **2827.** $y=e^{-x}\sin x$.

2828. $y=x-\sin 2x$. **2829.** $y=2\sin x+\cos 2x$. **2830.** $y=\cos x-\ln(\cos x)$.

2831. $y=\frac{4x^2-3}{8x\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x$. **2832.** $y=\frac{x}{2}+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

2833. $y=\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$. **2834.** $y=\operatorname{arc\,tg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

2835. $x=2+\sin 2t$, $y=\sin t-\cos t+1$. **2836.** $x=\cos^3 t-\sin^3 t$, $y=\cos^3 t+\sin^3 t$.

2837. $x=te^t$, $y=te^{-t}$. **2838.** $x=\operatorname{tg} t$, $y=\frac{1}{\sin t}$. **2839.** $x=\sin\frac{t}{2}$, $y=\operatorname{tg} t$.

2840. $x=\frac{3t(1-t)}{1+t^3}$, $y=\frac{3t}{1-t+t^2}$. **2841.** $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

2842. $x=t(t-1)$, $y=t^3-1$. **2843.** $x=(1+\sin\varphi)$, $y=(1+\sin\varphi)\sin\varphi+\frac{1}{4}$.

2844. $x=a(1+\cos^2 t)\sin t$, $y=a\sin^2 t\cos t$.

2845. $x=\cos t\left(\sqrt{2}\cos t+1\right)$, $y=\sin t\left(\sqrt{2}\cos t-1\right)$.

2846. $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

2847. $x=\frac{a}{2t(1-t^2)}$, $y=\frac{a}{2(1-t^2)}$.

2848. $x=\pm\sqrt{t^2-3t+2},\quad y=\frac{1}{t}.$ **2849.** $x=\int\limits_0^s \cos\frac{s^2}{2a}\,ds,\quad y=\int\limits_0^s \sin\frac{s^2}{2a}\,ds.$

2850. $\rho=a\sin 3\varphi.$ **2851.** $\rho=a\sin 2\varphi.$ **2852.** $\rho=\frac{a}{\varphi}+l.$

2853. $\rho=\frac{\varphi}{\varphi-1}.$ **2854.** $\rho=\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$ **2855.** $\rho=\frac{a}{\varphi}.$

2856. $\rho=\frac{\sin\varphi}{1-2\cos\varphi}.$ **2857.** $\rho=4+\cos 5\varphi.$ **2858.** $\rho=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$

§ 12. Zadaci iz maksimuma i minimuma

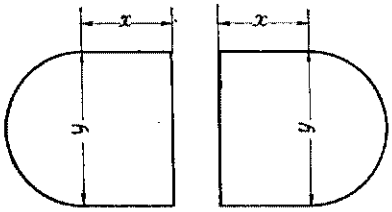
2859. Rastaviti broj 10 na dva sabirka tako da njihov proizvod ima najveću moguću vrednost.

2860. Od svih pravougaonika datog obima naći onaj čija je površina maksimalna.

2861. Od parčeta žice dužine l napraviti kružni isečak najveće površine.

2862. Tenisko igralište datog obima $2s$ ima oblik pravougaonika koji se sa dve suprotne strane završava polukrugovima. Odrediti dimenzije igrališta tako da površina pravougaonog dela bude maksimalna.

2863. Gradski skver sastoji se iz dva simetrična dela u odnosu na pravolinijsku pešačku stazu (sl. 24). Svaki od tih delova ima oblik pravougaonika koji se završava polukrugom. Ukupna površina skvera iznosi $s\,\mathrm{m}^2$. Odrediti dimenzije pravougaonog dela tako da obim celog skvera bude najmanji.



Sl. 24

2864. Data je osnovica trougla c i suprotni ugao γ. Odrediti druga dva ugla trougla da njegova površina bude maksimalna.

2865. Između svih pravouglih trouglova obima $2s$, odrediti onaj čiji je poluprečnik upisanog kruga najveći.

2866. Od svih pravouglih trouglova datog obima $2s$, naći onaj čija je površina maksimalna.

2867. Jedna od paralelnih strana ravnokrakog trapeza je a, a krak mu je b. Odrediti njegovu drugu paralelnu stranu tako da mu površina bude maksimalna.

2868. Ograda je visoka a, a udaljena je od zida b dužinskih jedinica. Naći najkraće stepenice, koje oslonjene na zemlju i ogradu dohvataju zid.

2869. Zapremina pravilne trostrane prizme je V. Kolika treba da bude ivica osnove da bi površina prizme bila najmanja?

2870. Kutija bez poklopca ima zapreminu 72 cm^3, a njene osnovne ivice stoje u razmeri 1 : 2. Kolike su ivice kutije ako joj je površina najveća moguća?

2871. Površina pravouglog paralelepipeda je $P=24$, zbir svih njegovih ivica je $s=25$. Odrediti njegove dimenzije tako da mu zapremina bude minimalna, odnosno maksimalna.

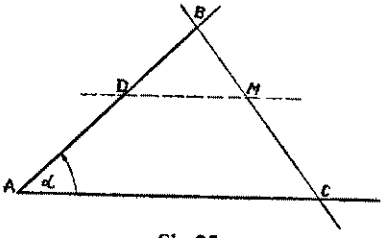
2872. Naći odnos između poluprečnika R i visine H cilindra, tako da njegova površina bude najmanja, pri datoj zapremini.

2873. Prav kružni cilindar završava se odozgo poluloptom. Tako obrazovano telo ima zapreminu V. Odrediti njegove dimenzije, tako da mu površina bude maksimalna.

2874. Silos ima oblik cilindra koji se završava polusferom; izgradnja jednog kvadratnog metra spoljne površine sfernog dela silosa dva puta je skuplja, nego izgradnja kvadratnog metra spoljne površine cilindričnog dela. Odrediti dimenzije silosa date zapremine V, tako da troškovi njegove izgradnje budu najmanji mogući.

2875. Na datoj pravoj naći tačku tako da je zbir rastojanja te tačke od dve date tačke van date prave minimalan.

2876. Između krakova koji zaklapaju ugao α leži tačka M (sl. 25). Kroz tačku M povući pravu koja seče krakove u tačkama B i C, tako da površina trougla ABC bude minimalna.



Sl. 25

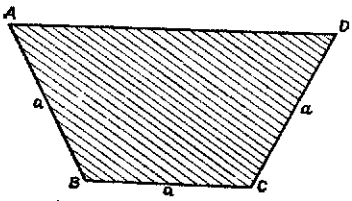
2877. Duži ABC i AC čine ugao α. Kroz tašku C povučena je prava (L) paralelna pravoj AB. Prava povučena kroz tačku B seče prave AC i (L) respektivno u tačkama D i E, gde D pripada duži AC. Odrediti položaj tačke M tako da zbir površina trouglova ABD i DCE bude minimalan.

2878. Na kojoj visini iznad stola datog poluprečnika, treba postaviti sijalicu date jačine pa da periferija stola bude najjače osvetljena.

2879. Dva svetlosna izvora udaljena su jedan od drugog a dužinskih jedinica. Na pravoj koja spaja te izvore naći najslabije osvetljenu tačku, ako intenziteti svetlosnih izvora stoje u odnosu $m:n$.

2880. Od kartona oblika kvadrata strane a napraviti kutiju bez poklopca najveće zapremine.

2881. Od tri jednake daske širine a treba napraviti žleb čiji je poprečni presek trapez $ABCD$ (sl. 26), kod koga je $AB=BC=CD=a$. Za koju će vrednost ugla BAD površina poprečnog preseka biti najveća?



Sl. 26

2882. Parče pleha ima oblik kruga datog poluprečnika r. Iz njega je isečena

figura u obliku krsta od koje se može sastaviti kutija bez poklopca. Odrediti dimenzije kutije, tako da joj površina bude maksimalna.

2883. Stablo drveta dugačko 20 m ima oblik zarubljene kupe čiji su poluprečnici $R=2$ i $r=1$. Iz njega treba istesati gredu najveće moguće zapremine, čiji poprečni presek ima oblik kvadrata. Odrediti njene dimenzije i zapreminu.

2884. U trouglu čija je osnovica a i visina h, upisati pravougaonik najveće površine. Naći površinu tog pravougaonika.

2885. U pravouglom trouglu sa hipotenuzom c i uglom od 60° upisan je pravougaonik tako da mu jedna strana leži na hipotenuzi. Odrediti dimenzije pravougaonika, tako da mu površina bude maksimalna.

2886. Odrediti stranicu s najmanjeg kvadrata, koji se može upisati u dati kvadrat stranice a.

2887. U polukrug poluprečnika R upisan je pravougaonik najveće površine. Odrediti njegove dimenzije.

2888. U polukrug je upisan trapez, čija je veća osnovica prečnik kruga. Odrediti ugao na osnovici trapeza, tako da mu površina bude maksimalna.

2889. U kružni: 1° isečak; 2° odsečak, upisati pravougaonik maksimalne površine.

2890. U datu loptu upisati cilindar maksimalne zapremine.

2891. U loptu poluprečnika r upisati pravilnu četvorostranu piramidu tako da njena zapremina bude maksimalna.

2892. U datu loptu upisati konus najveće zapremine. Koliko iznosi ta zapremina?

2893. Oko pululopte poluprečnika r opisati konus minimalne zapremine, čiji bazis leži u ravni bazisa polulopte.

2894. U pravi kružni konus poluprečnika R i visine H treba upisati cilindar najveće površine. Naći poluprečnik cilindra.

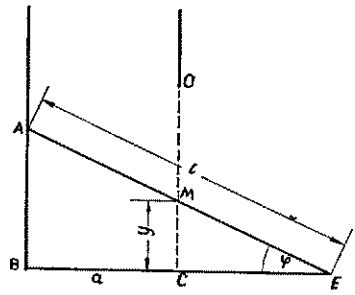
2895. U pravi kružni konus poluprečnika osnove R i visine H upisan je drugi konus čiji je vrh u centru osnove prvoga konusa. Odrediti poluprečnik osnove i visinu upisanog konusa, tako da mu zapremina bude maksimalna.

2896. U kocku upisati cilindar maksimalne zapremine, tako da mu se osovina poklapa sa telesnom dijagonalom kocke.

2897. Iz kruga je izrezan sektor sa središnjim uglom α. Izabrati ugao α tako da zapremina konusa, koji se dobija savijanjem izrezanog sektora bude najveća.

2898. Date su tačke $A(0, a)$ i $B(0, b)$, $a \neq b$, na pozitivnom delu Oy ose. Odrediti tačku M na Ox osi, iz koje se duž AB vidi pod najvećim uglom.

2899. Odrediti najmanju visinu vrata vertikalnog šahta, da bi se u šaht mogle uvući lestvice date dužine l. Širina šahta je $\overline{BC}=a$ (sl. 27).



Sl. 27

2900. Dva kanala širine a i b seku se pod pravim uglom. Odrediti gredu najveće dužine koja može da uplovi iz jednog kanala u drugi.

2901. Kroz tačku (1, 4) postaviti pravu, tako da apsolutna vrednost zbira odsečaka, koje čini prava sa koordinatnim osama, bude najmanja.

2902. Na krugu je data tačka A. Povući tetivu BC kruga paralelnu tangenti u tački A, tako da površina trougla ABC bude najveća.

2903. Date su parabole $y=x^2-2x$ i $y=2x-\frac{1}{2}x^2$.

1° Na kom odstojanju od Ox ose treba povući paralelnu pravu da bi date parabole odsecale na pravoj tetivu jednake dužine?

2° Lukovi datih parabola grade zatvorenu konturu. Odrediti onu od tetiva te konture, koja ima maksimalnu dužinu i stoji normalno na Ox osi.

2904. Na paraboli $y^2=2px$ naći tačku najbližu tački $(a, 0)$. Analizirati resultat za razne vrednosti parametra a.

2905. Naći najkraće rastojanje tačke (p, p) od parabole $y^2=2px$.

2906. Na paraboli $y=x^2$ naći tačku najbližu pravoj $y=2x-4$.

2907. Na krivoj $y=\sqrt{-\ln x}$ naći tačku najbližu tački (0, 0).

2908. U kojoj tački parabole $y=\pm\sqrt{2px}$ treba postaviti normalu na kojoj će parabola odsecati tetivu najmanje dužine?

2909. Na elipsi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ naći tačku čije je odstojanje od krajnje tačke male poluose maksimalno. Analizirati slučajeve $a^2 \gtrless 2b^2$.

2910. U elipsi $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ upisati pravougaonik najveće površine.

2911. Naći pravougaonik najveće površine upisane u segment parabole ograničen parabolom $y^2=2px$ i pravom $x=\frac{m^2}{2p}$.

2912. Trougao ima teme u tački $A(a, 0)$ dok mu je osnovica tetiva parabole $y^2=2px$ koja je normalna na osi Ox i leži između temena i tačke. Naći jednačinu tetive tako da površina trougla bude maksimalna.

2913. U delu parabole $y=-\frac{x^2}{12}+3$ iznad Ox ose upisati trougao maksimalne površine tako da mu je osnovica paralelna Ox osi a treće teme u koordinatnom početku.

2914. Parabola čija je osa simetrije paralelna Oy osi prolazi kroz tačke $O(0, 0)$ i $A(2, 0)$, a njena tangenta u tački $(0, 0)$ zaklapa ugao od $45°$.

1° Napisati jednačinu ove parabole.

2° Odrediti koordinate temena trapeza maksimalne površine, čija je veća osnovica duž OA a manja jedna od tetiva parabole koje su paralelne sa $\overline{OA}$.

2915. Naći položaj temena pravougaonika maksimalne površine upisanog u zatvorenoj konturi koju obrazuju krive linije

$$y=x^2+4x+6 \quad \text{i} \quad y=-x^2-4x+4.$$

2916. U zatvorenoj konturi koju obrazuju krive $y=2-x^2$ i $y=|x|$ upisati pravougaonik maksimalne površine, tako da mu dva temena leže na datoj paraboli.

2917. Naći koordinate temena pravougaonika maksimalne površine, upisanog u zatvorenoj konturi ograničenoj linijama: $y=|x-2|+2$ i $y=3+4x-x^2$, ako mu se dva temena nalaze na datoj paraboli.

2918. Dva temena pravougaonika su na kvivoj $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ a druga dva na njenoj asimptoti. Odrediti položaj temena na krivoj, tako da površina pravougaonika bude maksimalna.

2919. Dva temena pravougaonika su na krivoj $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ a druga dva na krivoj $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Odrediti položaj temena, tako da površina pravougaonika bude najveća.

2920. Data je kriva linija jednačinom $xy^2=4a^2(2a-x)$. Odrediti na datoj krivoj koordinate tačke M tako da površina pravougaonika, čija su dva suprotna temena M i O, gde je O koordinatni početak, ima maksimalnu vrednost.

2921. U zatvorenoj konturi koju obrazuju linije $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ i $4y-x=3$ upisan je trougao maksimalne površine. Odrediti položaj temena tog trougla.

2922. Pokretna tačka M cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1+\cos t)$ projektuje se na Ox osu u tački P. Normala u tački M seče Ox osu u tački S. Odrediti tačku M tako da površina trougla MPS bude maksimalna. Koliko iznosi ta površina?

2923. U kojoj tački krive $x^n y=a^{n+1}$ treba postaviti tangentu, čiji odsečak između koordinatnih osa ima maksimalnu dužinu?

2924. Na krivoj $\rho=a(1+\cos\varphi)$ naći tačku čije je odstojanje od polarne ose maksimalno.

2925. Na krivoj $xy^2=a^2(a-x)$ naći tačku za koju je subtangenta maksimalna.

2926. Odrediti najveći ugao između normale i potega elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ u istoj tački.

2927. U kojoj tački elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ njena tangenta gradi sa koordinatnim osama trougao najmanje površine?

2928. Tangenta elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ seče osu Ox u tački A a osu Oy u tački B. Pokazati da minimalno rastojanje između A i B iznosi $a+b$.

2929. Na elipsi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ naći tačku u kojoj je odstojanje normale elipse od njenog centra maksimalno, a zatim naći to odstojanje.

2930. Na cikloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1+\cos t)$ naći tačku u kojoj je subnormala maksimalna.

2931. Teme parabole leži na krugu poluprečnika r. Osa parabole se poklapa sa prečnikom kruga. Koliki mora biti parametar parabole, da bi površina segmenta, ograničenog parabolom i zajedničkom tetivom kruga i parabole, bila najveća?

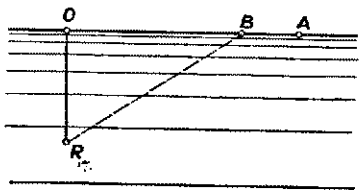
2932. Data je zapremina sfernog isečka V. Odrediti poluprečnik r lopte tako da površina isečka bude minimalna, odnosno maksimalna.

2933. U trapezu $ABCD$, $(AB||DC)$ data je osnovica $-AB=2a$ i ugao $BAD=\alpha$. Odrediti ostale elemente tog trapeza tako da odnos između obima trapeza i obima kruga iste površine bude najmanji.

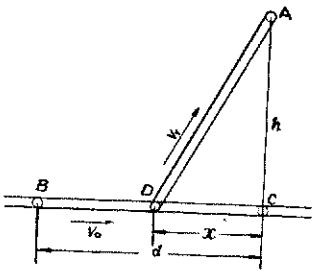
2934. Date su dve tačke parabole $y=Ax^2$, čije su apscise a i b. Odrediti položaj treće tačke parabole, koja leži između datih tačaka, tako da bi razlika između odgovarajućih ordinata parabole i ordinata duži koje spajaju te tri tačke bila najmanja.

2935. Prav konus poluprečnika osnove R i visine H presečen je ravni koja je paralelna izvodnici konusa. Koliko mora biti rastojanje linije preseka te ravni i ravni bazisa konusa od centra konusa, da bi površina preseka bila najveća?

2936. Ribar se nalazi sa čamcem na udaljenosti 3 km od obale (sl. 28). Ako ribar za sat prelazi 5 km peške a čamcem 4 km, gde treba pristati između tačaka O i A da bi se stiglo za najkraće vreme u tačku A koja je udaljena 5 km od O? Tačka O je podnožje normale spuštene iz položaja gde se nalazi ribar, na pravac obale.



Sl. 28

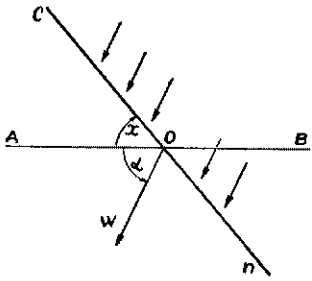


Sl. 29

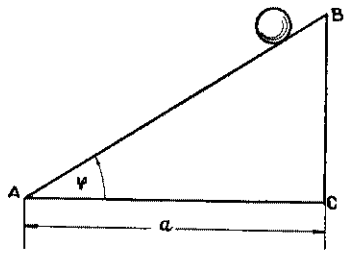
2937. Mesto A se nalazi na rastojanju h km od železničke pruge (sl. 29). Rastojanje BC od najbliže stanice do podnožja normale spuštene iz A

na pravac pruge iznosi d km. Deo pruge BC je prevolinijski. Na kom delu pruge treba izabrati mesto D, tako da bi se vožnja po trasi $BD+DA$ srednjom brzinom $v\frac{\text{km}}{\text{čas}}$ na delu BD i srednjom brzinom $v_1\frac{\text{km}}{\text{čas}}$ na delu $DA\,(v_1<v)$ obavila za najkraće vreme?

2938. Dejstvo vetra konstantne jačine na jedro CE (sl. 30) ima pravac vektora $\overrightarrow{OW}$, koji sa pravcem AB kretanja čamca zaklapa ugao α. Ispitati za koju vrednost ugla x između jedra i pravca kretanja, čamac postiže najveću brzinu.



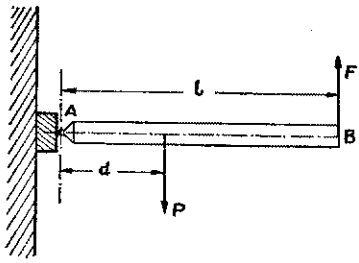
Sl. 30



Sl. 31

2939. Niz strmu ravan (sl. 31) nagnutu prema horizontu za ugao $\varphi\,(a=\text{const})$ kotrlja se kugla bez početne brzine. Zanemarujući trenje između kugle i ravni odrediti ugao φ tako da se kugla skotrlja za najkraće vreme od B do A.

2940. Jedan kraj poluge je pričvršćen u tački B (sl. 32), tako da se može okretati u krugu oko tačke oslonca. U tački A poluge koja se nalazi na rastojanju d od tačke oslonca obešen je teret od p kg. Sopstvena težina poluge je q kg po jedinici dužine. Odrediti dužinu poluge tako, da sila F koja deluje na slobodnom kraju poluge i održava ravnotežu teretu i sopstvenoj težini poluge ima najmanji intenzitet.

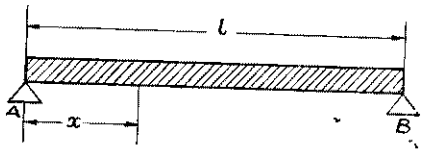


Sl. 32

2941. Jačina grede pravougaonog profila (preseka) proporcionalna je širini a i kvadratu visine preseka h. Odrediti dimenzije preseka da greda, koja se dobija iz okruglog stabla prečnika d, ima maksimalnu jačinu.

2942. Greda je krajevima oslonjena na oslonce A i B. Ako je opterećenje grede kontinualno i iznosi q po jedinici dužine a dužina grede l, pokazati da je maksimalna vrednost momenta uvijanja grede $q\frac{l^2}{8}$ (sl. 33).

2943. Teret dužine G koji leži na horizontalnoj podlozi treba pokrenuti iz tog položaja nekom silom. Kakav ugao treba da zaklapa pravac sile sa horizontalnom podlogom, da bi njen intenzitet bio najmanji mogući, ako koeficijent trenja tereta iznosi k?



Sl. 33

2944. Sud sa vertikalnim zidovima visine h postavljen je na horizontalnoj podlozi. Iz otvora na sudu ističe mlaz vode. Odrediti položaj otvora tako da mlaz dostiže najveći domet, znajući da je brzina tečnosti koja ističe data, prema Torricellievom zakonu, obrascem $\sqrt{2gx}$, gde je x visina otvora.

2945. Iz tačaka A i B po pravama OA i OB u pravcu tačke O polaze istovremeno dva tela brzinama v_1 i v_2. Ako je $OA=l_1$, $OB=l_2$, a ugao između OA i OB jednak α, kad će rastojanje između tela biti najmanje?

2946. Svetlosni izvor nalazi se na pravoj koja spaja centre dveju sfera. Odrediti položaj svetlosnog izvora tako da zbir površina osvetljenih delova sfere bude najveći.

2947. Brzina svetlosti u vazduhu je v_1 a u vodi v_2. Dokazati da će svetlost dospeti za najkraće vreme iz tačke A koja se nalazi u vazdušnoj sredini u tačku B, koja se nalazi u vodi, kad se kreće po dužinama AC i CB, ako je tačka C na granici vazduha i vode, pri čemu je $\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2}$, gde su φ_1 i φ_2 uglovi koji obrazuju prave AC i CB sa površinom vode.

2948. Telo čija površina ne reflektuje zrake („crno" telo) ispušta pri apsolutnoj temperaturi T zrake, koji se mogu spektralno rastaviti. U onom delu spektra čija je talasna dužina λ, gustina emitovane energije E određuje se po Wien-Planckovom zakonu

$$E=\frac{C}{\lambda^5(e^{\frac{c}{\lambda T}}-1)}.$$

Ako je λ izraženo u mikronima, onda je $c=14200$ a C zavisi od izbora jedinice za E. Odrediti talasnu dužinu λ za koju je gustina energije maksimalna pri konstantnoj temperaturi T.

2949. Energija koju poseduje električni elemenat (baterija ili generator), data je obrascem $W=\frac{E^2R}{R+r}$, gde je E elektromotorna sila konstantne jačine, r unutrašnji otpor elemenata a R spoljašnji otpor. Dokazati da je energija maksimalna kada je $R=r$.

2950. Elektromotorna sila akumulatora je E a njegov unutrašnji otpor r. N takvih akumulatora podeljeno je na n grupa (N je deljivo sa n). Unutar svake grupe akumulatori su vezani na red, pa zatim te grupe među sobom paralelno. Struja koju proizvode svi ti akumulatori teče kroz spoljne kolo čiji je otpor R. Za koju vrednost od n-a struja ima najveću vrednost.

2951. Struja se grana kroz dva paralelno vezana provodnika čiji su otpori r_1 i r_2. Ako struje u tim granama proizvode minimalnu količinu toplote, dokazati da mora postojati uslov $\frac{i_1}{i_2}=\frac{r_2}{r_1}$, gde su i_1 i i_2 jačine struje u tim granama.

2952. Pretpostavljajući da su putanje planeta krugovi, odrediti položaj u kome je planeta Venera, posmatrana sa Zemlje, najsvetlija.

§ 13. Dodiri krivih linija. Krivina i poluprečnik krivine. Evoluta

1° Za dve krive $y=\varphi(x)$ i $y=\psi(x)$ kažemo da imaju u tački x_0 dodir n-tog reda, ako je

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0), \quad (k=0, 1, \ldots, n) \quad \text{i} \quad \varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0),$$

gde je $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$ i $\varphi^{(0)}(x_0)=\varphi(x_0)$.

2° Krug $(x-u)^2+(y-v)^2=R$, koji sa datom krivom $y=f(x)$ ima dodir ne manji od 2-og reda, naziva se *krug krivine* u odgovarajućoj tački. Poluprečnik toga kruga

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

naziva se *poluprečnik krivine*, a njegova recipročna vrednost $K=\frac{1}{R}$ *krivina krive*.

3° Skup tačaka centra (u, v) kruga krivine

$$u=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad v=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

naziva se *evoluta* date krive.

2953. Izabrati parametre k i l u jednačini prave $y=kx+l$ tako, da ta prava i kriva $y=x^3-3x^2+2$ imaju dodir reda većeg od prvog.

2954. Za koje vrednosti koeficijenata a, b i c parabola $y=ax^2+bx+c$ ima u tački $x=x_0$ dodir drugog reda sa krivom $y=e^x$?

2955. Odrediti red dodira sa Ox osom u tački $x=0$ krivih:

1° $y=1+\cos x$; 2° $y=\operatorname{tg} x-\sin x$; 3° $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

2956. Utvrditi da li se krive linije

$$y=1+2x-x^2 \quad \text{i} \quad y=x^4-8x^3+24x-32x+17$$

dodiruju, i odrediti red dodira.

2957. Odrediti koeficijente, a, b i c tako da dodir krivih $f(x)=x^4-x^3$ i $\varphi(x)=ax^2+bx+c$ bude što višeg reda.

2958. Dokazati da krug $(x-3a)^2+(y-3a)^2=8a^2$ i parabola $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{a}$ ima u tački (a, a) dodir trećeg reda.

2959. Odrediti parametar a tako da se krive linije $y=ax^4$ i $y=12x^2-4x-3$ dodiruju, i naći red dodira.

2960. Naći tačku u kojoj se krive $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ i $y=\frac{1}{x}$ dodiruju, i odrediti red dodira.

2961. Za koju se vrednost realnog parametra n dodiruju krive:

$$y=\sin 2x \quad \text{i} \quad y=2\cos x+n?$$

2962. Naći red dodira krivih $y=\operatorname{ch} x$ i $y=\frac{x^2}{2}+1$ u tački $x=0$.

2963. Dokazati da kriva $y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

ima u tački $x=0$ dodir beskonačno velikog reda sa Ox osom.

2964. Ako je $x>0$ i $a>0$, ispitati da li kriva zadata jednačinom

$$y=x^a+a^x-1$$

dodiruje Ox osu pa na osnovu toga dokazati nejednakost

$$x^y+y^x\geqslant 1,$$

pri čemu je $x\geqslant 0$ a $y>0$ ili $y\geqslant 0$ a $x>0$.

2965. Naći krivinu i poluprečnik krivih linija:

1° $y^2=2px$; 2° $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 3° $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

2966. Naći krivinu krivih: 1° $y^2=8x$ u tački $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$;

2° $y=x^3$ u tački $(1, 1)$; 3° $y=x^4-4x^3-18x^2$ u koordinatnom početku.

2967. Kriva je data jednačinom $x=y^2-2y+2$. Izračunati krivinu krive u tački minimalne apscise.

2968. Naći poluprečnik krivine krive $xy=a^2$ u tački (a, a).

Odrediti centar krivine krivih:

2969. $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$. **2970.** $y^3=ax^2$.

2971. Odrediti centar krivine krive: $y=x\ln x$ u tački u kojoj je $y'=0$.

2972. Naći tačku u kojoj krivina krive $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ima ekstremnu vrednost.

2973. Naći krug krivine krive $(x^2+y^2)x-2ay^2=0$ u tački (a, a).

2974. Naći poluprečnik krivine krivih:

1° $x^n+y^n=2a^n$ u tački (a, a); 2° $y=a\ln\cos\frac{x}{a}$ u proizvoljnoj tački.

2975. Naći krug krivine krivih:

1° $y=\operatorname{tg}x$ u tački $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; 2° $y=e^x$ u tački $(0, 1)$.

2976. Naći ekstremne vrednosti krivine krivih u proizvoljnoj tački:

1° $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$; 2° $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$; 3° $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

2977. Naći poluprečnik krivine krive $y=\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ u tački $x=-1$.

2978. U kojoj tački krive $y=\operatorname{arc\,tg}(\ln x)$ krivina dostiže maksimalnu vrednost, i koliko iznosi ta krivina?

2979. Na krivoj $y=\ln x$ naći tačku u kojoj krivina dostiže maksimalnu vrednost i sastaviti jednačinu kruga krivine u toj tački.

2980. Data je kriva $y=\frac{mx^2}{4}-\frac{\ln x}{2m}$, gde je m realan parametar. Odrediti parametar m tako da poluprečnik krivine krive u tački $x=1$ ima ekstremnu vrednost.

2981. Naći skup tačaka u kojima krivina krive $y=e^{\lambda x}$ ima maksimalnu vrednost.

Naći poluprečnik krivine krivih:

2982. 1° $x=t^2$, $y=t^3$ u tački $(1, 1)$;

2° $x=a\cos^4 t$, $y=a\sin^4 t$ u tački $(a, 0)$.

2983. 1° $x=a(t-\sin t)$, $y=(1-\cos t)$;

2° $x=a(t+\sin t)+b\sin\frac{t}{2}$, $y=a(3+\cos t)+b\cos\frac{t}{2}$;

3° $y=ae^{-t}(\cos t-\sin t)$, $x=ae^{-t}(\cos t+\sin t)$.

2984. Odrediti poluprečnik krivine krive $\rho=\frac{a}{\varphi}$.

2985. Naći krivinu krivih:

1° $\rho=a\varphi$; 2° $\rho=ae^{m\varphi}$; 3° $\rho=a(1+\cos\varphi)$; 4° $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ za $\varphi=0$.

2986. Data je kriva linija $y=a\ln x$. Odrediti parametar a tako da krivina krive ima ekstremnu vrednost u tački $x=1$. Za tako nađeno a napisati jednačinu kruga krivine u toj tački.

2987. Date su krive linije $y=\frac{a}{2}x^2$ i $y=\ln x$. Znajući da su krivine krivih u tački $x=1$ jednake za $a=\pm 1$ naći ostale realne vrednosti parametra a koje zadovoljavaju isti uslov.

2988. Odrediti parabolu čija je osa simetrije paralelna Oy osi i koja ima isti krug krivine sa krivom $y=\sin x$ u tački $x=\frac{\pi}{2}$.

2989. Odrediti koeficijente a, b i c u jednačini parabole $y=ax^2+bx+c$ tako da parabola ima u tački $t=\pi$ istu krivinu sa krivom $x=t-\sin t$; $y=1-\cos t$.

2990. Naći poluprečnik krivine elipse u tački u kojoj se odsečak tangente, koji leži između koordinatnih osa, polovi dodirnom tačkom.

2991. Neka je S_1 zbir koordinata tačke M krive $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ a S_2 zbir koordinata odgovarajućih centara krivine. Pokazati da je količnik $S_1:S_2$ stalan.

2992. Dokazati da na elipsi, uopšte uzevši, postoje tri tačke takve da krugovi krivine elipse u tim tačkama prolaze kroz datu tačku elipse.

2993. Naći najmanje rastojanje centra krivine elipse od centra elipse.

2994. Dokazati da su centri krivine Arhimedove spirale $\rho=a\varphi$ u tačkama sa istim polarnim uglom, raspoređeni na elipsi, čija razmera ne zavisi od izbora zraka.

2995. Dokazati da je poluprečnik krivine krive $y^2=2px-qx^2$ proporcionalan trećem stepenu dužine normale.

Naći jednačinu evolute krivih:

2996. $y^2=2px$. **2997.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **2998.** $xy=a^2$.

2999. $y^2(2a-x)=x^3$. **3000.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

3001. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

3002. $x=\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$.

3003. $y=a\ln\cos\frac{x}{a}$. **3004.** $\rho=a(1+\cos\varphi)$. **3005.** $\rho=ae^{m\varphi}$.

§ 14. Polinomi i jednačine

1° Funkcija $P(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$, gde je n prirodan broj, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $(A_0\neq 0)$ realni ili kompleksni brojevi a x realna ili kompleksna promenljiva, naziva se *polinom* ili *cela racionalna funkcija*. Broj n naziva se stepen polinoma. Polinomom nultog stepena mogu se smatrati svi brojevi različiti od nule.

Koreni polinoma su one vrednosti nezavisno promenljive x, za koje je vrednost polinoma jednaka nuli.

Dva polinoma n-tog stepena $P(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$ i $Q(x)=B_0x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+B_n$ su identički jednaki onda i samo onda ako je:

$$A_0=B_0, \ldots, A_n=B_n.$$

2° Bézouova teorema. Pri deljenju polinoma $P(x)$ razlikom $(x-a)$ dobija se ostatak koji je jednak $P(a)$. Kao posledica Bézouovog stava izvodi se sledeća teorema: ako je a koren polinoma, tj. $P(a)=0$, onda je polinom $P(x)$ deljiv bez ostatka razlikom $(x-a)$.

3° Glavni stav algebre. Svaki polinom mora imati jedan koren realan ili kompleksan.

4° Na osnovu glavnog i Bézouovog stava izvodi se sledeća teorema: Svaki polinom n-tog stepena može se napisati u obliku

$$P(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koreni polinoma a a_0 koeficijenat uz x^n.

5° Ako polinom $P(x)$ ima jednu nulu oblika $a+bi$ onda mora imati i drugu nulu oblika $a-bi$, ukoliko su koeficijenti polinoma realni brojevi.

6° Jednačina $P(x)=0$, gde je $P(x)$ polinom n-tog stepena naziva se *algebarska jednačina*. Iz same definicije sleduje da se sve prethodne teoreme, koje se odnose na polinome, mogu proširiti i na algebarske jednačine. U slučaju kad jednačina nije algebarska, onda navedeni stavovi ne važe.

Odrediti polinom najmanjeg stepena čije su nule:

3006. $x_1=2;\quad x_2=1+i;\quad x_3=1+2i.$ **3007.** $x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=1-i.$

3008. Naći ostale nule polinoma $P(x)=x^3+a^2x+10a^3$ ako se zna da je jedna nula $a(1+2i)$.

3009. Podeliti sledeće polinome:

1° $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ sa x^2-3x+1;

2° x^3-3x^2-x-1 sa $3x^2-2x+1$.

3010. Uprostiti polinom

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

3011. Koristeći Hornerovu šemu, izračunati $f(x_0)$:

1° $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\quad x_0=4;$

2° $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7,\quad x_0=-2-i.$

3012. Koristeći Hornerovu šemu, razložiti polinom $f(x)$ po stepenima $x-x_0$:

1° $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1, \quad x_0=-1;$

2° $f(x)=x^5;$

3° $f(x)=x^4-8x^3+25x^2-50x+90, \quad x_0=2;$

4° $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, \quad x_0=-i;$

5° $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-(33-20i)x+7+18i,$
$x_0=-1+2i.$

3013. Koristeći Hornerovu šemu, razložiti po stepenima od x:

1° $f(x+3)$, ako je $f(x)=x^4-x^3+1;$

2° $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20.$

3014. Odrediti parametre m i n tako da polinom $P(x)=x^4-3x^2+mx+n$ bude deljiv polinomom $P_1(x)=x^2-2x+4$.

3015. Odrediti koeficijente a, b i c u polinomu $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tako da polinom bude deljiv binomima $x-1$ i $x+2$ a da podeljen sa $x-4$ daje ostatak 18.

3016. Odrediti koeficijente p, q, r i s u polinomu $P(x)=x^4+px^3+qx^2+$ $+rx+s$ tako da bude deljiv binomima: $x+2$, $x+4$, $x-3$ a da podeljen sa $x+1$ daje ostatak 24.

3017. Odrediti realne parametre a, b i c tako da polinom x^3+ax^2+bx+c bude deljiv sa $x-i$ a da podeljen sa $x+1$ daje ostatak -5.

3018. Za koje je vrednosti koeficijenata p i q polinom x^4+1 deljiv sa x^2+px+q?

3019. Odrediti koeficijente p i q u polinomu x^3+px^2+qx+1 tako da bude deljiv trinomom x^2-3x-4.

3020. Odrediti koeficijente A i B tako da polinom $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ bude deljiv sa $(x-1)^2$.

3021. Dat je polinom $P(x)=x^{2n}-2x^na^n\cos\theta+a^{2n}$. Rastaviti taj polinom na proizvod dva polinoma n-tog stepena.

3022. Pokazati da je polinom $(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x-1$ deljiv polinomom $2x^3-3x^2+x$.

3023. Dokazati da je polinom $x^{2n}+x^n+1$ $(n=3k+1;\ k=0, 1, 2\ldots)$ deljiv polinomom x^2+x+1.

3024. Dokazati da je polinom $x(x^{n-1}-na^{n-1})+a^n(n-1)$ deljiv sa $(x-a)^2$.

3025. Dokazati da je polinom $(1-x^n)(1+x)-2nx^n(1-x)-n^2x^n(1-x)^2$ deljiv sa $(1-x)^3$.

3026. Dokazati da su polinomi:

1° $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$;

2° $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^{n}-1$;

3° $(n-2m)x^{n}-nx^{n-m}+nx^{m}-(n-2m)$

deljivi sa $(x-1)^3$.

3027. Dokazati da je polinom:

1° $(\cos\varphi\, x+\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi$ deljiv sa x^2+1;

2° $x^n\sin\varphi-r^{n-1}x\sin n\varphi+r^n\sin(n-1)\varphi$ deljiv sa $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$.

3028. Dokazati da je polinom $x^{n+1}\cos(n-1)\alpha-x^n\cos n\alpha-x\cos\alpha+1$, gde je α realan broj, deljiv polinomom $x^2-2x\cos\alpha+1$.

3029. Dokazati da je polinom

$$x^{2n+1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2}+\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1}-$$

$$-\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}n^{n-1}-1$$

deljiv sa $(x-1)^5$ a nije deljiv sa $(x-1)^6$.

3030. Dokazati da je polinom deljiv svojim izvodom onda i samo onda, kada je on jednak $A_0(x-x_0)^n$.

3031. Naći najveći zajednički delitelj polinoma

$$x^m-1 \quad \text{i} \quad x^n-1.$$

3032. Naći najveći zajednički delitelj polinoma

$$x^m+a^m \quad \text{i} \quad x^n+a^n.$$

3033. Pod kojim uslovima je polinom

$$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$$

deljiv sa x^4+x^2+1?

3034. Za koje vrednosti od n je polinom $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$ deljiv polinomom $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$.

3035. Pod kojim uslovima je x^n-a^n deljivo sa x^p-a^p? (n i p su prirodni brojevi).

3036. Pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x-a$ dobija se ostatak A, a pri deljenju sa $x-b\,(a\neq b)$ ostatak B. Naći ostatak deljenja tog polinoma sa $(x-a)(x-b)$.

3037. Ostaci deljenja polinoma sa $x-a$, $x-b$, i $x-c$ su respektivno A, B i C. Naći ostatak deljenja polinoma sa $(x-a)(x-b)(x-c)$.

3038. Koreni polinoma x^3+x^2-2 su 1, α i β. Naći polinom $P(x)$ drugog stepena, za koji je $P(1)=1$; $P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$ i dokazati da je polinom $P[P(x)]-x$ deljiv sa x^3+x^2-2.

3039. Naći polinom $P(x)$ sedmog stepena, takav da bi $P(x)+1$ bilo deljivo sa $(x-1)^4$, a $P(x)-1$ bilo deljivo sa $(x+1)^4$.

3040. Naći polinom $P(x)$ stepena $2n-1$ takav da je polinom $P(x)+1$ deljiv sa $(x-1)^n$ a polinom $P(x)-1$ deljiv sa $(x+1)^n$.

3041. Naći vezu između koeficijenata polinoma ax^3+bx^2+cx+d ako između njegovih korena postoji veza $x_1x_2+x_2x_3=2x_1x_3$.

3042. Odrediti koeficijenat uz $x^l\,(l=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$ proizvoda

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x+x^2+\cdots+x^n).$$

3043. Naći x tako da je $|f(x)|<|f(1)|$, ako je:

1° $f(x)=x^4-4x^3+2$;

2° $f(x)=x^4-4x+5$; 3° $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+5$.

3044. Dat je polinom $x^3-6x^2-\lambda$, gde je λ realan parametar. Diskutovati broj i prirodu korena ovog polinoma za razne vrednosti parametra.

3045. Dat je polinom $P(x)=x^4-3x^2-2\lambda x-\lambda^2+1$, gde je λ realan parametar. Odrediti broj korena polinoma za razne vrednosti parametra.

3046. Naći zajedničke nule polinoma: 1° $P_1(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ i $P_2(x)=2x^3-5x^2+x+2$; 2° $P_1(x)=x^3+5x^2-2x-24$ i $P_2(x)=x^3-7x+6$.

3047. Naći ostale korene jednačine $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2=0$ ako je jedan koren $1+i$.

3048. Ako niz polinoma $P_n(z)$ ispunjava uslove $P_0(z)=3$, $P_1(z)=z$, $P_{n+2}(z)=P_{n+1}(z)+(z^2-3z+2)P_n(z)$ $(n>0)$, dokazati tačnost sledećih iskaza:

1° $P_n(z)$ je polinom po z stepena n;

2° $P_n(z)$, $(n>1)$ ima n različitih korena koji leže na izvesnom krugu:

3° Ako su m i n dva različita prirodna broja, onda su polinomi $P_m(z)$ i $P_n(z)$ relativno prosti.

3049. Koristeći Euklidov algoritam, odabrati polinome $M_1(x)$ i $M_2(x)$ tako da bude

$$f_1(x)\,M_2(x)+f_2(x)\,M_1(x)=1,$$

ako je:

1° $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2,\quad f_2(x)=x^2-x+1,$

2° $f_1(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2,\quad f_2(x)=2x^3+x^2-x-1,$

3° $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3,\quad f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1.$

3050. Naći polinome najmanjeg stepena $M_1(x)$ i $M_2(x)$ tako da je:

1° $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)\,M_1(x)+(x^3-5x-3)\,M_2(x)=x^4;$

2° $(x^4+2x^3+x+1)\,M_1(x)+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)\,M_2(x)=x^3-2x.$

3051. Naći polinom najmanjeg stepena kada su njegove vrednosti date tablicom

x	0	1	2	$\cdots$	n
y	1	a	a^2	$\cdots$	a^n

3052. Naći racionalne korene sledećih polinoma

1° $x^3-6x^2+15x-14;$

2° $x^4+2x^3-13x^2-38x-24;$

3° $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6.$

3053. Naći donju i gornju granicu realnih korena polinoma:

1° $x^4-4x^3+7x^2-8x+3;$ 2° $x^5+7x^3-3;$

3° $x^7-108x^5-445x^3+900x^2+801.$

3054. Data je algebarska jednačina $ax^6+bx+1=0$, gde su a i b realni brojevi. Odrediti a i b tako da broj $x=1$ bude dvostruki koren jednačine.

3055. Data je jednačina $x^5-5mx^3+5m^2x+2n=0$, gde su m i n realni parametri. Koristeći Sturmovu teoremu, odrediti broj realnih korena date jednačine u zavisnosti od parametra m i n.

3056. Odrediti realan parametar a tako da kompleksno konjugovani koreni jednačine $z^4-2az^3+18z^2-24z+16=0$, budu temena trapeza čiji produžeci krakova prolaze kroz koordinatni početak.

3057. Odrediti broj korena jednačine $x^3-x+\lambda=0$ na segmentu $[-1, 1]$.

3058. U kojim granicama mora varirati parametar λ da bi jednačina $3x^4-4x^3-12x^2+\lambda=0$ imala sva četiri realna korena?

U sledećim zadacima formirati Sturmov niz polinoma i razdeliti korene polinoma:

3059. 1° x^3-3x+1; 2° x^3+x^2-2x-1; 3° x^3-7x+7;
4° x^3-x+5; 5° x^3+3x-5.

3060. 1° $x^4-12x^2-16x-4$; 2° x^4-x-1;
3° $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$; 4° $x^4-2x^3+x^2-2x+1$.

3061. 1° $2x^5-10x^3+10x-3$;
2° $x^5-5x^3-10x^2+2$;
3° $x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$.

3062. Formirati Strumov niz za Hermiteov polinom

$$P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

i odrediti broj realnih korena.

3063. Odrediti broj realnih korena Laguerreovih polinoma

$$P_n(x)=(-1)^n e^x\frac{de^{-x}x^n}{dx^n}.$$

3064. Dokazati da su svi koreni Legendreovog polinoma $P_n(x)=\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ realni i različiti i da pripadaju intervalu $(-1, 1)$.

3065. Dokazati da su svi koreni polinoma

$$x^n+\left(\frac{n}{1}\right)^2x^{n-1}+\left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^2x^{n-2}+\cdots+1$$

realni.

3066. Ako su svi koreni polinoma $f(x)=a_0+xa_1x+\cdots+a_nx^n$ realni, dokazati da su i svi koreni polinoma $a_0+a_1\omega x+a_2\omega^4x^2+\cdots+a_n\omega^{n^2}x^n$ realni za $0<\omega<1$.

Diskutovati broj i prirodu korena sledećih jednačina za razne vrednosti parametara:

3067. $\lambda x^2-x+\lambda=0$.

3068. $x^3-12x+a=0$.

3069. $2x^4-4px^3-\dfrac{1}{2}=0$.

3070. $x^5+x^4=a^2$.

3071. $ax^3+(a-1)x+2(a-1)=0$.

3072. $ax^4-12x^2+4x+3=0$.

3073. Odrediti parametar λ tako da jednačina $e^x=\lambda x$ ima jedan dvostruk koren.

3074. Rešiti i diskutovati jednačinu $ax^2=\ln x$.

3075. Odrediti parametar α tako da jednačina $\alpha x^2 = \ln^3 x$ ima jedan dvostruki koren.

3076. Ispitati broj realnih korena jednačine $e^x = b$ za razne vrednosti realnog parametra b.

3077. Pokazati grafički da jednačina $2x = 5\pi(1 - \cos x)$ ima sedam korena.

3078. Pokazati da jednačina $x + \cos x = a$ nema pozitivnih korena za $a < 1$. Koliko korena ima za slučaj $a = 1$?

3079. Ispitati broj realnih korena jednačine $x \ln x = a$ u zavisnosti od vrednosti realnog parametra a.

Rešiti i diskutovati rešenja sledećih jednačina za razne vrednosti parametara:

3080. $\sin 2x - 2\cos x = n$.

3081. $\operatorname{arc\,tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = a$.

3082. Data je jednačina $z^n + 3z^2 + b = 0$, gde je n prirodan a b realan broj. Ispitati broj i položaj njenih korena kad n i b variraju.

3083. Diskutovati rešenja jednačine $|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 2| = \lambda$ u zavisnosti od parametra λ.

3084. Odrediti ona dva korena jednačine $x^5 - 55x + 21 = 0$ čiji je proizvod 1.

3085. Rešiti jednačinu $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, ako je jedan njen koren jednak kvadratu drugoga.

Odrediti koeficijente a, b i c tako da oni budu koreni jednačina:

3086. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

3087. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

3088. Znajući da je zbir dva korena jednačine

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$$

jednak 1, odrediti parametar λ.

3089. Naći vezu između koeficijenata a, b i c, tako da koreni jednačine $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ obrazuju geometrijsku progresiju. Mogu li se odrediti koeficijenti a, b i c tako da budu koreni date jednačine?

3090. Naći jednačinu čiji su koreni: $y_1 = x_1 x_2$, $y_2 = x_1 x_3$ ako su x_1, x_2 i x_3 koreni jednačine $y^3 - 2y^2 - 1 = 0$.

3091. Naći potrebne i dovoljne uslove da svi koreni jednačine sa realnim koeficijentima $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ne budu po modulu veći od jedan.

§ 15. Približno određivanje korena jednačina

1° Metoda sečice

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u intervalu $[a, b]$ i $f(a)\,f(b)<0$, pri čemu je $f'(x)\neq 0$ za $x\in(a, b)$, tada jednačina (1) $f(x)=0$ ima jedan i samo jedan koren ξ u intervalu (a, b). Kao prva približna vrednost toga korena može se uzeti $\alpha_1=a+\varepsilon_1$, gde je

$$\varepsilon_1=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Primenjujući dalje taj postupak na interval (a, α_1) ili (α_1, b) u zavisnosti od toga da li je $f(a)\,f(\alpha_1)<0$ ili $f(\alpha_1)\,f(b)<0$ dobija se druga približna vrednost korena α_2 itd.

2° Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ako je $f''(x)\neq 0$ u intervalu $[a, b]$ i $f(a)\,f''(a)>0$, onda se kao prva približna vrednost β_1 korena ξ jednačine (1) može uzeti vrednost

$$\beta_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Ponavljanjem ovog postupka dobija se posle n-tog približavanja kao približna vrednost korena $\beta_n\,(n=1, 2, \ldots)$.

Sem ova dva postupka često se koristi i *metoda iteracije* posle dovođenja jednačine (1) na oblik $x=\varphi(x)$.

Orijentacije radi, pri određivanju korena jednačine nekom od navedenih metoda, često se koristi i grafički postupak približnog određivanja korena.

Naći korene jednačina sa greškom koja nije veća od 0,001:

3092. $x^3-6x+2=0.$ **3093.** $x^3-4x+2=0.$

3094. Naći koren jednačine $x^3-2x+3=0$ na dve decimale tačno i oceniti granicu greške.

3095. Naći pozitivni koren jednačine $x^3-0{,}2x^2-0{,}2x-1{,}2=0$ sa tačnošću do 0,002.

Odrediti korene jednačina, na četiri značajne cifre tačno:

3096. $2x^3-x^2-7x+5=0.$ **3097.** $x^4-3x^2+75x-10000=0.$

Odrediti korene jednačina sa greškom koja nije veća od 10^{-3}.

3098. $x^4-x-1=0.$ **3099.** $x^2+\dfrac{1}{x^2}=10x.$

3100. Pokazati da jednačina $x^4+2x^2-6x+2=0$ ima samo dva realna prosta korena koja pripadaju intervalima (0, 1) i (1, 2). Kombinujuću metodu tangente i sečice, naći te korene sa tačnošću do 0,01.

3101. Izračunati sa tačnošću do 0,0005 pozitivni koren jednačine

$$x^5-x-0{,}2=0.$$

3102. Pokazati da su svi koreni jednačine $x^4-x+1=0$ imaginarni i izračunati njihove realne i imaginarne delove na tri tačne decimale.

3103. Naći koren jednačine $x+e^x=0$ sa tačnošću do 10^{-5}.

3104. Pokazati da jednačina $xe^x=2$ ima samo jedan realan koren koji pripada intervalu (0, 1), i naći taj koren sa tačnošću do 0,01.
Naći korene sledećih jednačina na četiri decimale tačno:

3105. $x \log x-2=0$.

3106. $\log x+\frac{x}{3}-1=0$.

3107. Izračunati sa tačnošću do 0,001 koren jednačine $\sin x=1-x$.

3108. Naći koren jednačine $x-0{,}1 \sin x=2$ na tri decimale tačno.

3109. Odrediti koren jednačine $\cos x=2x$ sa greškom koja nije veća od 10^{-4}.

3110. Odrediti korene jednačine $\cos x=x^2$ na tri decimale tačno.

3111. Sa tačnošću do 0,0001 izračunati najmanji pozitivni koren jednačine $x \sin x-0{,}5=0$.

3112. Odrediti dva pozitivna korena jednačine $\cos x \operatorname{ch} x=1$ sa tačnošću do 10^{-3}.

3113. Naći tri prva pozitivna korena jednačine $\operatorname{tg} x=x$ sa tačnošću do 0,001.

3114. Sa tačnošću do 10^{-3}, naći dva pozitivna korena jednačine

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}.$$

3115. Prema raznim vrednostima realnog parametra a odrediti broj realnih korena jednačine $x^4-15x^2+ax-12=0$. Ako za $a=-1$ ova jednačina ima realnih korena, odrediti ih sa jednom tačnom decimalom.

3116. Pokazati da jednačina $a^x=ax$ za $a>1$, ima uvek samo dva realna i pozitivna korena, pri čemu je jedan koren jednak jedinici, a drugi koren manji, veći ili jednak jedan, u zavisnosti od toga da li je a veće, manje ili jednako e. Naći sa tačnošću do 0,001 drugi koren ove jednačine za $a=3$.

3117. Pokazati da jednačina $x^2 \operatorname{arc\,tg} x=a$, gde je $a\neq 0$, ima jedan realan koren. Odrediti sa tačnošću do 0,001 koren te jednačine za $a=1$.

3118. Kružni odsečak poluprečnika $r=2$ cm, ima površinu 1 cm^2; izračunati u radijanima odgovarajući centralni ugao na tri decimale.

3119. Data je lopta poluprečnika 3. Od lopte je jednom ravni odsečen segment, čija je zapremina jednaka jednoj šestini zapremine lopte. Odrediti visinu segmenta na četiri značajne cifre.

3120. Na krivoj $y=\cos x$ naći tačku najbližu tački (1, 0) na tri decimale tačno.

§ 16. Interpolacija funkcija

1° Newtonova interpolaciona formula

Ako su $y_0, y_1, \ldots, y_n$ vrednosti funkcije $y=f(x)$ za odgovarajuće vrednosti argumenata $x_0, x_1, \ldots, x_n$, gde je $x_{i+1}-x_i=h$, $i=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$; vrednosti funkcije u ostalim tačkama približno se daju sledećom interpolacionom formulom:

$$(1) \qquad y=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{q(q-1)\cdot\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

gde je:

$$q=\frac{x-x_0}{h}, \quad \Delta y_0=y_1-y_0, \quad \Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0, \ldots, \quad \Delta^n y_0=\Delta^{n-1} y_1-\Delta^{n-1} y_0.$$

Za $n=1$ imamo linearnu interpolaciju.

Za funkciju $f(x)$ koja ima izvod $f^{(n+1)}(x)$ neprekidan, greška formule (1) je,

$$R_n(x)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,q\cdot(q-1)\cdots(q-n) \quad \xi\in(x_i, x) \quad (i=0, 1, \ldots, n),$$

ili

$$R_n(x)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q\cdot(q-1)\cdots(q-n).$$

2° Lagrangeov interpolacioni polinom

Polinom čiji grafik prolazi kroz $n+1$ tačku $M_i(x_i, y_i)$, $(i=0, 1, \ldots, n)$ glasi:

$$(2) \qquad P_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x-x_n)}y_0+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1+\cdots+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k+\cdots+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Ako funkcija $f(x)$ koja se aproksimira Lagrangeovim polinomom, ima neprekidan $f^{(n+1)}(x)$ za $x\in(x, x_n)$, onda je greška formule (2):

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n); \quad \xi\in(x_i, x), \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n).$$

3121. Kolika je greška Newtonove interpolacione formule ako je $f(x)$ polinom drugog stepena?

3122. Naći Newtonov interpolacioni polinom za funkciju $y=f(x)$ koja za $x=0$; 1; 2, ima vrednost: $y=4$; 7; 9.

3123. Naći Lagrangeov polinom koji aproksimira funkciju čije su vrednosti: $y_0=4$, $y_1=7$, $y_2=9$ za $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$.

3124. Izračunati približno $\sin 26° 15'$, koristeći tablične vrednosti: $\sin 26°=0{,}43837$; $\sin 27°=0{,}45399$; $\sin 28°=0{,}46947$.

3125. Aproksimirati funkciju $y=\sin x$ Lagrangeovim polinomom koji „prolazi" kroz tačke na toj krivoj sa apscisama:

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{\pi}{2},\quad x_2=\pi,\quad x_3=\frac{3\pi}{2},\quad x_4=2\pi.$$

3126. Napisati interpolacioni Newtonov polinom za funkciju koja „prolazi" kroz tačke: $M_0(0, 1)$, $M_1(1, 4)$, $M_2(2, 15)$, $M_3(3, 40)$, $M_4(4, 85)$.

3127. Napisati Lagrangeov interpolacioni polinom čije su vrednosti: $y_0=2$, $y_1=0$, $y_2=2/3$, $y_3=0$ za $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-2$.

3128. Interpolirati funkciju $y=f(x)$, čiji grafik prolazi kroz tačke $M_0(-2, 24)$, $M_1(-1, -2)$, $M_2(0, -2)$, $M_3(1, 12)$, $M_4(2, 25)$ polinomom četvrtog stepena.

3129. Izračunati približno $f(0)$ za funkciju iz zadatka (3096) i proceniti grešku, ako se zna da je $|f'''(x)|<2$ za $x\in(-2, 3)$.

3130. Ispitujući dozvoljeno opterećenje gvozdenih lanaca čije su karike kružnog preseka poluprečnika d, bila su eksperimentalnim putem dobijena: za lance poluprečnika $d_1=8$ mm, $d_2=16$ mm i $d_3=20$ mm, dozvoljena opterećenja: $P_1=400$ kg, $P_2=1600$ kg i $P_3=2500$ kg.

Sastaviti tablicu dozvoljenih opterećenja za lance čiji su poluprečnici preseka karika: 6 mm, 11 mm, 13 mm, 18 mm, 25 mm i 30 mm.

3131. Funkcija je data podacima: $x_0=-2$, $y_0=25$, $x_1=1$, $y_1=-8$; $x_2=2$, $y_2=-15$; $x_3=4$, $y_3=-23$. Napisati interpolacioni Lagrangeov polinom i naći vrednosti funkcije za $x=0$.

3132. Iz logaritamskih tablica nalazi se da je: $\log 1=0.000$; $\log 2=3{,}301$; $\log 3=0{,}477$; $\log 4=0{,}602$. Izračunati pomoću linearnih interpolacija: $\log 1{,}7$, $\log 2{,}5$, $\log 3{,}1$.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: _____

Датум: _____

Glava VII

NEODREĐENI INTEGRAL

§ 1. Prostiji neodređeni integrali

1° Pojam neodređenog integrala

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija i $F'(x)=f(x)$, onda je

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Funkcija $F(x)$ naziva se *primitivna funkcija* funkcije $f(x)$ ili *integral* od $f(x)$. Postupak nalaženja svih primitivnih funkcija naziva se *integracija*.

Ako je u nekom intervalu X funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, onda je i funkcija $F(x)+c$, gde je c proizvoljna konstanta, takođe primitivna funkcija. Obrnuto, svaka funkcija koja je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ u intervalu X, može biti predstavljena u tom obliku.

2° Osnovne osobine neodređenog integrala

1) $d\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)\,dx$; 2) $\int d\varphi(x)=\varphi(x)+c$;

3) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx$, $(A=\text{const})$;

4) $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$.

3° Tablica osnovnih integrala

I. $\int dx=x+c_1$.

II. $\int x^{\alpha}\,dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, $(\alpha\neq-1)$.

III. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c_1$.

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+c$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm1}|+c$.

VI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x+c_1,\\ -\operatorname{arc\,ctg}x+c_1.\end{cases}$

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c_1, \\ -\arccos x + c_2. \end{cases}$

VIII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad (a>0).$

IX. $\int e^x\,dx = e^x + c_1.$

X. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c_1.$

XI. $\int \cos x\,dx = \sin x + c_1.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c_1.$

XIII. $\int \operatorname{ch} dx = \operatorname{sh} x + c_1.$

XIV. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c_1.$

XV. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c_1.$

XVI. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c_1.$

XVII. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{th} x + c_1.$

4° Osnovne metode integracije

1) *Metoda dekompozicije.* Ako je

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \text{onda je} \quad \int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

2) *Metoda smene promenljivih.* Ako se stavi $x = \varphi(t)$, gde su $\varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ neprekidne funkcije, dobija se

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

3) *Metoda parcijalne integracije.* Ako su u i v diferencijabilne funkcije od x, onda je

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Koristeći navedene osobine i tablicu osnovnih integrala, naći sledeće integrale:

3133. $\int x^5\,dx.$

3134. $\int (x^2 + 2x - 3)\,dx.$

3135. $\int \sqrt{x}\,dx.$

3136. $\int x\sqrt[3]{x}\,dx.$

3137. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx.$

3138. $\int \frac{dx}{x^3}.$

3139. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

3140. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

3141. $\int (2 + x^2)^3\,dx.$

3142. $\int x^2(3-x)^4\,dx.$

3143. $\int (1+x)^6\,dx.$

3144. $\int \left(x^4-\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

3145. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

3146. $\int \frac{x^3-2x+4}{x}\,dx.$

3147. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

3148. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

3149. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x}\,dx.$

3150. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx.$

3151. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

3152. $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx.$

3153. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx.$

3154. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx.$

3155. $\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1}\,dx.$

3156. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

3157. $\int (3^x-4^x)\,dx.$

3158. $\int 5^x\,3^{-x}\,dx.$

3159. $\int (2^x+5^x)^2\,dx.$

3160. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx.$

3161. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx.$

3162. $\int (2x-3\sin x+\cos x)\,dx.$

3163. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$

3164. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

3165. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

3166. $\int (m\operatorname{sh} x+n\operatorname{ch} x)\,dx.$

3167. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

3168. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

3169. Ako je $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ pokazati da je

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c,\quad (a\neq 0).$$

Izračunati integrale:

3170. $\int (5-2x)^9\,dx.$ **3171.** $\int \frac{dx}{(x-2)^3}.$ **3172.** $\int \sqrt{2x-3}\,dx.$

3173. $\int \sqrt[5]{1-x}\,dx.$ **3174.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

3175. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}.$ **3176.** $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx.$

3177. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\,dx.$ **3178.** $\int x\sqrt[3]{x-2}\,dx.$ **3179.** $\int \frac{x+5}{\sqrt[5]{1-2x}}\,dx.$

3180. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx.$ **3181.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}.$

3182. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-1}}.$ **3183.** $\int \frac{x-2}{x+3}\,dx.$ **3184.** $\int \frac{2x-3}{1-x}\,dx.$

3185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$ **3186.** $\int \frac{dx}{2x^2+1}.$ **3187.** $\int \frac{dx}{x^2+9}.$

3188. $\int \frac{dx}{x^2+3}.$ **3189.** $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$ **3190.** $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

3191. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$ **3192.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}.$ **3193.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

3194. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$ **3195.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$ **3196.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

3197. $\int e^{-\frac{5}{2}x}\,dx.$ **3198.** $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx.$

3199. $\int \sin\frac{2}{3}x\,dx.$ **3200.** $\int (\sin 5x-\sin 5\alpha)\,dx.$

3201. $\int \sin(2x+3)\,dx.$ **3202.** $\int \cos(1-3x)\,dx.$

3203. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}.$ **3204.** $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

3205. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$ **3206.** $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$ **3207.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

Vodeći računa o strukturi podintegralne funkcije izračunati sledeće integrale:

3208. $\int x(x^2-13)^{23}\,dx.$ **3209.** $\int (3x^2-2x+1)(x^3-x^2+x-9)^7\,dx.$

3210. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}.$ **3211.** $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$ **3212.** $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx.$

3213. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$ **3214.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **3215.** $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}.$

3216. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+6x-5}.$ **3217.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-9}}\,dx.$

3218. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$ **3219.** $\int (x^2-3)\sqrt[5]{x^3-9x}\,dx.$

3220. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{2/3}}.$ **3221.** $\int \frac{x\,dx}{5+x^4}.$ **3222.** $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}.$

3223. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ **3224.** $\int xe^{-x^2}\,dx.$ **3225.** $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

3226. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+2}.$ **3227.** $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx.$ **3228.** $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

3229. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$ **3230.** $\int \frac{2^x\,3^x}{9^x-4^x}\,dx.$ **3231.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

3232. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}.$ **3233.** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$ **3234.** $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx.$

3235. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}.$ **3236.** $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

3237. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$ **3238.** $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx.$

3239. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx.$ **3240.** $\int \sin^5 x\cos x\,dx.$

3241. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx.$ **3242.** $\int \operatorname{tg} x\,dx.$ **3243.** $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

3244. $\int \cos^5 x\sin^4 x\,dx.$

3245. $\int \frac{\cos x + 1}{\sin x + x} dx.$ **3246.** $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx.$ **3247.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$

3248. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}.$ **3249.** $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

3250. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2 + \cos x}}.$ **3251.** $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$ **3252.** $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^3 x}}.$

3253. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$ **3254.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}.$ **3255.** $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, dx.$

3256. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}.$ **3257.** $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arc\,tg} x}.$

3258. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}^3 x}{1 + x^2} dx.$ **3259.** $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 + x} dx.$

3260. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin^5 x}.$ **3261.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$

3262. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$ **3263.** $\int \frac{dx}{\sin x}.$ **3264.** $\int \frac{dx}{\cos x}.$

Koristeći dekompoziciju podintegralnih funkcija izračunati sledeće integrale:

3265. $\int \frac{x^3}{x + 3} dx.$ **3266.** $\int \frac{(2 - x)^2}{2 - x^2} dx.$ **3267.** $\int \frac{dx}{(x - 1)(x + 3)}.$

3268. $\int \frac{x}{(x + 2)(x + 3)} dx.$ **3269.** $\int \frac{x^2}{(1 - x)^{100}} dx.$

3270. $\int \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$ **3271.** $\int \frac{dx}{1 + e^x}.$

3272. $\int \frac{(1 + e^x)^2}{1 + e^{2x}} dx.$ **3273.** $\int \sin^2 x\, dx.$

3274. $\int \cos^2 x\, dx.$ **3275.** $\int \cos x \sin 3x\, dx.$ **3276.** $\int \sin 3x \sin 5x\, dx.$

3277. $\int \cos 3x \cos 4x\, dx.$ **3278.** $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{12} dx.$ **3279.** $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$

3280. $\int \sin x \sin(x+\theta)\,dx.$ **3281.** $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

3282. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx.$ **3283.** $\int \sin^3 x\,dx.$ **3284.** $\int \cos^3 x\,dx.$

3285. $\int \sin^4 x\,dx.$ **3286.** $\int \cos^4 x\,dx.$ **3287.** $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx.$

3288. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$ **3289.** $\int \cos 2x \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$ **3290.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

3291. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$ **3292.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ **3293.** $\int \sin^2 3x \sin^3 2x\,dx.$

Primenom metode parcijalne integracije izračunati integrale:

3294. $\int \ln x\,dx.$ **3295.** $\int x \ln x\,dx.$ **3296.** $\int x \ln^2 x\,dx.$

3297. $\int x^n \ln x\,dx.$ **3298.** $\int x \ln(x^2-1)\,dx.$

3299. $\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx.$ **3300.** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

3301. $\int \sqrt{x} \ln^2 x\,dx.$ **3302.** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$ **3303.** $\int x^3 (\ln x)^2\,dx.$

3304. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$ **3305.** $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}\,dx.$ **3306.** $\int e^{x+\ln x}\,dx.$

3307. $\int x^2 e^{-x}\,dx.$ **3308.** $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$ **3309.** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

3310. $\int x \sin x\,dx.$ **3311.** $\int x \cos x\,dx.$ **3312.** $\int x \operatorname{sh} x\,dx.$

3313. $\int x \operatorname{ch} x\,dx.$ **3314.** $\int \sin(\ln x)\,dx.$ **3315.** $\int \cos(\ln x)\,dx.$

3316. $\int x^2 \sin 2x\,dx.$ **3317.** $\int x^4 \cos x\,dx.$ **3318.** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

3319. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\,dx.$ **3320.** $\int e^{-x} \sin x\,dx.$ **3321.** $\int e^{ax} \sin bx\,dx.$

3322. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$ **3323.** $\int e^{ax}\sin^2 x\,dx.$ **3324.** $\int e^{ax}\cos^2 x\,dx.$

3325. $\int \arcsin x\,dx.$ **3326.** $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$ **3327.** $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx.$

3328. $\int x^2 \arccos x\,dx.$ **3329.** $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

3330. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} e^x}{e^x}\,dx.$ **3331.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$ **3332.** $\int \frac{xe^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

3333. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **3334.** $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx.$ **3335.** $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

3336. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}.$ **3337.** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$ **3338.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

Dovođenjem kvadratnog trinoma na kanonički oblik izračunati sledeće integrale:

3339. $\int \frac{dx}{x^2+2x}.$ **3340.** $\int \frac{dx}{x^2+3x}.$ **3341.** $\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$

3342. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$ **3343.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$ **3344.** $\int \frac{dx}{3+x-x^2}.$

3345. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$ **3346.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$ **3347.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}.$

3348. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$ **3349.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}.$ **3350.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}.$

3351. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$ **3352.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}.$ **3353.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1-x^2}}.$

3354. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$ **3355.** $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}.$

3356. $\int \sqrt{4x^2+x}\,dx.$ **3357.** $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx.$

3358. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx.$ **3359.** $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx.$

3360. $\int \sqrt{4x^2-2x+1}\,dx.$

Podesnom transformacijom podintegralnog izraza izračunati sledeće integrale:

3361. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$ 3362. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx.$ 3363. $\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx.$

3364. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx.$ 3365. $\int \frac{(x-4)\,dx}{x^2-5x+6}.$ 3366. $\int \frac{3-2x}{x^2-x-2}dx.$

3367. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\theta+1}.$ 3368. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

3369. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$ 3370. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$ 3371. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2-x+1}}dx.$

3372. $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}.$ 3373. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$ 3374. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

3375. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}.$ 3376. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx.$

3377. $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}.$ 3378. $\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\,dx.$

3379. $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}.$

§ 2. Integracija racionalnih funkcija

1° Ako je razlomak pod integralom neprav, prethodno treba izdvojiti iz njega ceo deo.

2° Ako je razlomak prav, onda se njegov imenitelj rastavi po mogućnosti na činioce oblika $(x-a)^\alpha$ i $(x^2+px+q)^\beta$, pa se zatim razlomak razlaže na zbir elementarnih razlomaka na sledeći način:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}.$$

Izračunati sledeće integrale:

3380. $\int \frac{dx}{x^2+5x}.$ 3381. $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}dx.$ 3382. $\int \frac{2x-3}{(x-2)^2}dx.$

3383. $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}dx.$ 3384. $\int \frac{x^6}{x^2-1}dx.$ 3385. $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx.$

3386. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-1}dx.$ **3387.** $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-3x+2}dx.$ **3388.** $\int \frac{x^4}{x^2+3}dx.$

3389. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$ **3390.** $\int \frac{dx}{x^4-1}.$ **3391.** $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

3392. $\int \frac{x^5}{x^3-1}dx.$ **3393.** $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}.$ **3394.** $\int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)}.$

3395. $\int \frac{x+1}{x(x-1)^3}dx.$ **3396.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$ **3397.** $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$

3398. $\int \frac{2+3x}{(3-x)^3}dx.$ **3399.** $\int \frac{x^4}{(x+1)^3}dx.$ **3400.** $\int \frac{x^3}{(x^2-1)^2}dx.$

3401. $\int \frac{x}{x^3-1}dx.$ **3402.** $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx.$ **3403.** $\int \frac{dx}{x^2(x^4-1)}.$

3404. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx.$ **3405.** $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

3406. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$ **3407.** $\int \frac{dx}{x(x^3+4)}.$ **3408.** $\int \frac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}dx.$

3409. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ **3410.** $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx.$

3411. $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}.$ **3412.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}.$ **3413.** $\int \frac{x}{x^8-1}dx.$

3414. $\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}dx.$ **3415.** $\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}dx.$ **3416.** $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx.$

3417. $\int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-4x^2+4}dx.$ **3418.** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$ **3419.** $\int \frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2}dx.$

3420. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx.$ **3421.** $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+x+1)^2}dx.$

3422. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$ **3423.** $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$ **3424.** $\int \frac{x^6}{(x^2-5)^4}dx.$

3425. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx.$

3426. $\int \frac{dx}{1+x^{2n}}$ $(n\in N).$ **3427.** $\int \frac{dx}{1-x^{2k}},$ $(k\in N).$

3428. $\int \frac{x^n}{1+x^{2k}}dx,$ $(k, n\in N).$

§ 3. Integracija iracionalnih funkcija

1° Integrali oblika $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ i $\int R(x^m, \sqrt{ax^m+b})\,x^{m-1}\,dx$, gde je $R(x, y)$ racionalna funkcija, svode se respektivno smenama $ax+b=t^n$ i $ax^m+b=t^n$ na integraciju racionalnih funkcija.

2° Integral oblika $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ izračunava se smenom $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

3° Integrali oblika $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ i $\int R(x\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ svode se na integraciju racionalnih funkcija respektivno smenama $x=a\sin t$ i $x=a\,\mathrm{tg}\,t$.

4° Integral $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ može da se svede na slučaj 3° ili da se napiše u obliku

$$\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_n}{Q}=(A_0x^{m-1}+\cdots+A_{m-1})\,Q+A_m\int\frac{dx}{Q},$$

gde je $Q=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Koeficijenti A_i se nalaze diferenciranjem zadnje jednakosti, oslobađanjem od imenioca i upoređivanjem koeficijenata na levoj i desnoj strani uz iste stepene od x.

5° Integral binomnog diferencijala $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ može se izraziti u konačnom obliku u sledeća tri slučaja: 1) kad je p ceo broj, razlaganjem na sabirke; 2) kad je $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, smenom $a+bx^n=t^s$; 3) kada je $\frac{m+1}{n}+p$ ceo broj, smenom $ax^{-n}+b=t^s$, gde je s imenitelj razlomka p.

Izračunati sledeće integrale:

3429. $\int x\sqrt[3]{4+3x}\,dx.$ **3430.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$ **3431.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

3432. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}.$ **3433.** $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx.$ **3434.** $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx.$

3435. $\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx.$ **3436.** $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$ **3437.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$

3438. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}}.$ **3439.** $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}.$

3440. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$

3441. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx.$ **3442.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}.$

3443. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}$. **3444.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. **3445.** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

3446. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$. **3447.** $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$. **3448.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

3449. $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$. **3450.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-4}}$.

3451. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$. **3452.** $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$. **3453.** $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}dx$.

3454. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$. **3455.** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$. **3456.** $\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx$.

3457. $\int \frac{1}{1-2x}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}dx$. **3458.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

3459. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. **3460.** $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

3461. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. **3462.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

3463. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$. **3464.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

3465. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. **3466.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$. **3467.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$.

3468. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$. **3469.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$. **3470.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1+x+x^2)^3}}$.

3471. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$. **3472.** $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

3473. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx$. **3474.** $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$. **3475.** $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$.

3476. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx$. **3477.** $\int x^7\sqrt{1+x^2}\,dx$. **3478.** $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}}dx$.

3479. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^2}}$. **3480.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^2(x+1)^5}}$.

3481. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$. **3482.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)}}$.

Razlaganjem podintegralne funkcije na prostije sabirke, izračunati integrale:

3483. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$. **3484.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$. **3485.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

3486. $\int \frac{x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x}}dx$. **3487.** $\int \frac{x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}dx$.

3488. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$. **3489.** $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

Svodeći kvadratni trinom na kanonički oblik, izračunati integrale:

3490. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. **3491.** $\int \frac{dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}dx$.

3492. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Koristeći Eulerove smene: a) $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$ ako je $a>0$. b) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$ ako je $c>0$, c) $a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2$ ako su α i β realni koreni trinoma ax^2+bx+c, izračunati integrale:

3493. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. **3494.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

3495. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$. **3496.** $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

3497. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

Koristeći različite metode, izračunati sledeće integrale:

3498. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$. **3499.** $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

3500. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+x^4+1}}dx$. **3501.** $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx$.

Vodeći računa da su podintegralni izrazi oblika binomnog diferencijala, izračunati integrale:

3502. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **3503.** $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$. **3504.** $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$.

3505. $\int (x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}\,dx.$

3506. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

3507. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

3508. $\int \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

3509. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$

3510. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$

3511. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

3512. $\int \frac{x^3}{(1+2x^2)^{1/2}}\,dx.$

3513. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

3514. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}.$

3515. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^3}}.$

3516. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}.$

§ 4. Integracija trigonometrijskih funkcija

1° Integrali racionalnih funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ smenom

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \text{odakle je}\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{i}\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

svode se na integrale racionalnih funkcija po t.

2° Integrali oblika $\int \sin^n x\,dx$ i $\int \cos^n x\,dx$, gde je n prirodan broj, mogu se izračunati pomoću rekurentnih formula do kojih se dolazi parcijalnom integracijom:

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

3° Integrali oblika $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ i $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, gde je n prirodan broj, izračunavaju se pomoću rekurentnih formula koje se dobijaju metodom parcijalne integracije:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x}=\frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

4° Integrali oblika $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, gde su m i n celi brojevi, izračunavaju se korišćenjem pogodnih transformacija ili primenom rekurentnih formula:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$$

i $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx$$

za $m+n \neq 0$.

5° Pri izračunavanju integrala oblika $\int \sin px \cos qx\, dx$, gde su p i q realne konstante, koriste se trigonometrijski identiteti:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Izračunati sledeće integrale:

3517. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$. **3518.** $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$. **3519.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

3520. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$. **3521.** $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$. **3522.** $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

3523. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}$. **3524.** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

3525. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$. **3526.** $\int \frac{dx}{5-4\sin x + 3\cos x}$.

3527. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx$. **3528.** $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

3529. $\int \frac{1+2\cos x}{\sin x\,(3-\cos x)} dx$. **3530.** $\int \frac{\sin^2 x}{4+\cos^2 x} dx$.

3531. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx$. **3532.** $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.

3533. $\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx$. **3534.** $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

3535. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx$. **3536.** $\int \frac{dx}{1+\alpha\cos x}$.

3537. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$. **3538.** $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx$.

3539. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$. **3540.** $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

3541. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

3542. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x+\cos x}dx$.

3543. $\int \frac{dx}{(2+\sin^2 x)\cos x}$.

3544. $\int \frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}$.

3545. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

3546. $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

3547. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

3548. $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

3549. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$.

3550. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

3551. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x\cos x}dx$.

3552. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$.

3553. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$.

3554. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

3555. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

3556. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

3557. $\int \cos^5 x\,dx$.

3558. $\int \sin^6 x\,dx$.

3559. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

3560. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

3561. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

3562. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

3563. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

3564. $\int \sin^5 x\cos^5 x\,dx$.

3565. $\int \cos^5 2x\sin 2x\,dx$.

3566. $\int \sin^2 x\cos^2 3x\,dx$.

3567. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$.

3568. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

3569. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$.

3570. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$.

3571. $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^2 x}dx$.

3572. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

3573. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

3574. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

3575. $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

3576. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

3577. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

3578. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

3579. $\int \sin 5x\cos x\,dx$.

3580. $\int \cos^2 px \cos^2 qx\, dx.$ **3581.** $\int \sin^3 2x \cos^2 3x\, dx.$

3582. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx.$ **3583.** $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\, dx.$

3584. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3}\, dx.$

§ 5. Integracija transcendentnih funkcija

1° Integrali oblika $\int P(x)\, e^{ax}\, dx$: $\int P(x) \sin ax\, dx$ i $\int P(x) \cos ax\, dx$, gde je $P(x)$ polinom n-tog stepena, izračunavaju sa metodom parcijalne integracije.

2° Integrali oblika $\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx$ i $\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx$ mogu se izračunati metodom parcijalne integracije stavljajući $u = x^n$ i $dv = e^{ax} \sin bx$ odnosno $dv = e^{ax} \cos bx$.

3° Integrali oblika $\int P(\ln x)\, x^n\, dx$ i $\int P(\arcsin x)\, dx$, gde je $P(x)$ polinom po $\ln x$ odnosno $\arcsin x$, svode se smenom $\ln x = t$ odnosno $\arcsin x = t$ na integrale $\int P(t)\, e^{(n+1)t}\, dt$ i $\int P(t) \cos t\, dt$ koji se mogu integraliti.

Izračunati sledeće integrale:

3585. $\int x^3 e^{\frac{x}{2}}\, dx.$ **3586.** $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx.$ **3587.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx.$

3588. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx.$ **3589.** $\int \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x\, dx.$ **3590.** $\int \frac{xe^x}{(e^x-1)^3}\, dx.$

3591. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\, dx.$ **3592.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

3593. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx.$ **3594.** $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2}\, dx.$ **3595.** $\int \frac{\ln x}{(2x+5)^3}\, dx.$

3596. $\int \ln^2 (x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$ **3597.** $\int \ln (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\, dx.$

3598. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$ **3599.** $\int (x-\sin x)^3\, dx.$

3600. $\int xe^x \cos x\, dx.$ **3601.** $\int xe^x \sin^2 x\, dx.$ **3602.** $\int x^2 \cos (\ln x)\, dx.$

3603. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx.$ **3604.** $\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx.$ **3605.** $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx.$

3606. $\int (\arcsin x+\arcsin^2 x)\,dx.$ **3607.** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

3608. $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx.$ **3609.** $\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$

3610. $\int \operatorname{sh} x\cos x\,dx.$ **3611.** $\int \operatorname{ch} x\cos x\,dx.$ **3612.** $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx.$

3613. $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx.$ **3614.** $\int (\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)\operatorname{ch} x\,dx.$

3615. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx.$ **3616.** $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx.$

3617. $\int \operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x\,dx.$ **3618.** $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx.$

3619. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$ **3620.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}.$ **3621.** $\int \frac{dx}{\operatorname{th}^2 x}.$

3622. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}.$ **3623.** $\int \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx.$ **3624.** $\int \frac{dx}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}.$

3625. $\int \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th} x}}\,dx.$ **3626.** $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1-\operatorname{th} x}\,dx.$

§ 6. Razni integrali

Izračunati integrale:

3627. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{12}}\,dx.$ **3628.** $\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,dx.$ **3629.** $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$

3630. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$ **3631.** $\int \frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx.$

3632. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx.$ **3633.** $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,dx.$

3634. $\int e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\,dx.$ **3635.** $\int xe^{x^2}(1+x^2)\,dx.$

3636. $\int x^x(1+\ln x)\,dx.$ **3637.** $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

3638. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$. **3639.** $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx$. **3640.** $\int x^2 \sin^3 x\,dx$.

3641. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx$. **3642.** $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$.

3643. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1+3\sin 2x}\,dx$. **3644.** $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^4 x}\,dx$.

3645. $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,dx$. **3646.** $\int x^{\sqrt{2}} \sin(\ln x)\,dx$.

3647. $\int \frac{\ln(\cos\varphi+\sqrt{\cos 2\varphi})}{1-\cos^2\varphi}\,d\varphi$. **3648.** $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

3649. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **3650.** $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{(1\pm e^x)^3}}$.

3651. $\int \frac{dx}{x^n(ax+b)}$. **3652.** $\int \frac{\ln(a+bx)}{x^n}\,dx$. **3653.** $\int \frac{\ln^2(a+bx)}{x^n}\,dx$.

3654. Naći opšti oblik funkcije koja zadovoljava jednačinu $y'''=8x$ tako da se drugi izvod te funkcije anulira u tački (1,6) i da tangenta u toj tački ima jednačinu $x-3y+17=0$.

3655. Odrediti funkciju $F(x)$ za koju je

$$F'(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} \quad \text{i} \quad F\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 2.$$

3656. Naći $f(x)$ ako je $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

3657. Odrediti konstante a i b tako da funkcija

$$f(x)=\int (x^2+ax+b)\,e^{-x}\,dx$$

ima koren drugog reda za $x=1$, i da je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

3658. Izračunati integral $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx$.

3659. Kakav uslov treba da zadovoljavaju parametri α i β da bi integral

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}}$$

bio algebarska funkcija.

3660. Pod kojim uslovom integral $\int \frac{ax^2+bx+c}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}dx$ predstavlja racionalnu funkciju?

3661. Pokazati:

1° Pomoću kakvih se funkcija izražava integral

$$\int \frac{P_s(x)}{(x-a)^n}dx, \quad P_s(a)\neq 0;$$

2° Kada je taj integral racionalna funkcija.

3662. U kom slučaju integral $\int \sqrt{1+x^p}\,dx$, gde je p racionalan broj, predstavlja elementarnu funkciju?

3663. U kom slučaju integral $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$,

gde je $P(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante predstavlja elementarnu funkciju?

Glava VIII

ODREĐENI INTEGRAL

§ 1. Određeni integral kao granična vrednost zbira i njegove osobine

1° Neka je funkcija $y=f(x)$ definisana na intervalu $[a, b]$. Podelimo interval $[a, b]$ na n delova tačkama: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. Uzmimo $\xi_i\in(x_{i-1}, x_i)$ i posmatrajmo sumu: $\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i)\,\Delta x_i$, gde je $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ i ako je konačan, za ma kakvu podelu intervala $[a, b]$, zvaćemo ga *određenim integralom u Riemannovom smislu funkcije* $f(x)$ u granicama od a do b i označavaćemo ga sa $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Znači da je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

U tom slučaju kaže se da je funkcija integrabilna na odsečku $[a, b]$. Da bi funkcija bila integrabilna na $[a, b]$, dovoljno je da je neprekidna ili da ima konačan broj prekida prvog reda.

2° Važnije osobine određenog integrala

1) $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$; 2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx$;

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$, $(a<c<b)$;

4) ako je $f(x)$ parna funkcija, onda je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_0^a f(x)\,dx$;

5) ako je $f(x)$ neparna funkcija, onda je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

3° Newton-Leibnizova formula

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, tada postoji na tom odsečku neodređeni integral: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ i važi sledeća jednakost:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

4° Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i $x = \varphi(t)$ neprekidna zajedno sa svojim izvodom $\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$, gde je $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ pri čemu je $f[\varphi(t)]$ neprekidna na $[\alpha, \beta]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

5° Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne na odsečku $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

3664. Naći $\int_0^4 x\,dx$ pomoću granične vrednosti integralne sume. (Podeliti odsečak $[0, 4]$ na n jednakih delova i uzeti da je $\xi_i = x_i$). Šta geometrijski predstavlja broj $\int_0^4 x\,dx$?

3665. Izračunati $\int_0^1 e^x\,dx$ pomoću granične vrednosti integralne sume.

3666. Napisati u obliku beskonačnog zbira $\int_0^\pi \sin x\,dx$ i naći graničnu vrednost tog zbira.

3667. Formiranjem integralne sume izračunati $\int_0^{10} a^x\,dx$.

3668. Naći po definiciji: a) $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$; b) $\int_a^b \cos x\,dx$.

3669. Koristeći Newton-Leibnizovu formulu izračunati $\int_{-1}^1 (1 - x^2)\,dx$.

3670. Koristeći osnovne osobine određenog integrala dokazati da je

$$1^\circ \int_{-1}^{1} \arcsin x\,dx = 0; \quad 2^\circ \int_{-a}^{a} \operatorname{sh} x\,dx = 0; \quad 3^\circ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = 0.$$

Geometrijski protumačiti te rezultate.

Primenom Newton-Leibnizove formule izračunati sledeće integrale:

3671. $\int_0^1 x^n\,dx.$ **3672.** $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx.$ **3673.** $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

3674. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$ **3675.** $\int_1^2 \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$ **3676.** $\int_0^1 \operatorname{sh} x\,dx.$

Pomoću određenog integrala naći graničnu vrednost zbira:

3677. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$

3678. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right).$

3679. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p}{n^{p+1}}+\frac{2^p}{n^{p+1}}+\cdots+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right) \quad (p>0).$

Izračunati integrale:

3680. $\int_0^8 (1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx.$ **3681.** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx.$

3682. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$ **3683.** $\int_1^2 x(\ln x+1)\,dx.$ **3684.** $\int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x-1)\,dx.$

3685. $\int_{-\pi}^{\pi} x(2+\cos x)\cos^{17} x\,dx.$ **3686.** $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx.$

3687. $\int_0^1 \sqrt[m]{x^n}\,dx m,\ n\in N.$ **3688.** $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx.$ **3689.** $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt.$

3690. $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **3691.** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$. **3692.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

3693. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$. **3694.** $\displaystyle\int_e^{e^e} x^3 e^{x^4}\,dx$. **3695.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1+\cos^2 x)\,dx$.

3696. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\,dx$. **3697.** $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$. **3698.** $\displaystyle\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

3699. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$. **3700.** $\displaystyle\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$. **3701.** $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{1+3e^{-x}}\,dx$.

3702. $\displaystyle\int_5^0 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. **3703.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$. **3704.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^6+2x^3+1}\,dx$.

3705. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-2x+3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

3706. Transformisati $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ linearnom smenom u integral sa datim granicama α i β.

Dokazati sledeće jednakosti:

3707. $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ **3708.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$.

3709. 1° Dokazati jednakost $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$, gde je $f(x)$ neprekidna funkcija na odsečku $[0, \pi]$.

2° Izračunati $\displaystyle\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Izračunati integrale:

3710. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)^2}$.

3711. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(a+\cos x)\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$.

3712. Dokazati da je:

$$1^\circ \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx; \qquad 2^\circ \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin^{2k} x+\cos^{2k} x}}{\cos 2x}\,dx = 0.$$

3713. Naći vrednost x za koju je $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{3}$.

3714. Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne na odsečku $[a, b]$, tada je $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$. Dokazati!

Izračunati integrale:

3715. $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

3716. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$.

3717. Dokazati da je $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$ pa na osnovu toga

naći $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$.

Dokazati sledeće jednakosti:

3718. $1^\circ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$; $\quad 2^\circ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t\,dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$.

3719. $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3720. Neka je $I(a, b)=\int\limits_a^b \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

1° Pokazati da je: 1) $I(a, b)=I(-b, -a)$;

2) $I(a, b)=I(1/a, 1/b)$ $(ab>0)$; 3) $I(a, 1/a)=0$.

2° Izračunati $I(a, b)$. (Najpre uzeti da je $a\geqslant 1$, $b\geqslant 1$ i smenu promenljive $t=x+1/x$ a zatim iskoristiti rezultate iz 1°).

3721. Neka su n i m prirodni brojevi. Dokazati da je

$$\int\limits_0^\pi \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n}{2}-m\right)x\,dx=\pi\binom{n}{m}.$$

Izračunati integrale:

3722. $\int\limits_0^1 x^n e^{-x}\,dx.$ **3723.** $\int\limits_1^e x^m(\ln x)^n\,dx.$

3724. Izračunati $\int \frac{x^2\,dy}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}-\int \frac{y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$

ako je $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; $t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3725. Posmatrajmo $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$. Očigledno je $\int \frac{dx}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}$ pa je

$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}\Big|_0^3=-\frac{3}{2}$. Ali podintegralna funkcija $\frac{1}{(x-2)^2}$ je pozitivna u posmatranom intervalu, pa integral u datim granicama mora biti pozitivan. Gde je greška?

3726. Integral $J=\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$ nalazimo na sledeći način:

$$\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx=\int\limits_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int\limits_0^\pi \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^\pi=0.$$

Međutim, podintegralna funkcija $f(x)=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ je pozitivna pa vrednost integrala mora biti veća od nule. Gde je greška?

3727. Ako na integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}$ primenimo smenu $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ dobićemo:

$$\int^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(4-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 0.$$

Ali $f(x)=\frac{1}{4-3\cos x}$ je nenegativna! Gde je greška?

3728. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $J(t)=\int_0^1 xe^{\frac{x}{t}}\,dx + t^2 e^{\frac{1}{t}} - t^2$.

3729. Ako funkcija $f(x)$ ispunjava uslove Newton-Leibnizove teoreme za $x\in[a, x]$, dokazati da je: $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)$.

3730. Naći ekstremne vrednosti integrala $\int_0^x \cos t\,dt$. Protumačiti geometrijski rezultat.

3731. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije:

$$f(x)=\int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt \quad \text{za} \quad x\in[1, \sqrt{3}+1].$$

3732. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije:

$$y=\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t-1}\,dx \quad \text{za} \quad t\in[0, 1].$$

3733. Aproksimirati funkciju $f(x)=\int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$ Mac-Laurinovim polinomom drugog stepena i na osnovu toga izračunati približnu vrednost $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Proceniti grešku.

3734. Naći krivinu krive $y=\int_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt$ u tački (0, 0).

3735. Naći maksimalnu krivinu krive $y=\int_0^x \operatorname{sh} t\,dt$.

3736. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$.

3737. 1° Aproksimirati funkciju $f(x)=e^{x^2}$ Taylorovim polinomom, $T_4(x)$ četvrtog stepena u okolini tačke $x=0$ i proceniti greške aproksimacije za $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.

2° Izračunati približno $\int\limits_0^{1/4} e^{x^2}\,dx$ prema $\int\limits_0^{1/4} e^{x^2}\,dx\approx\int\limits_0^{1/4} T_4(x)\,dx$ i koristeći procenu pod 1° odrediti maksimalnu grešku.

3738. Izračunati $\int\limits_{-1}^{x}\frac{\arcsin t}{\sqrt{t+1}}\,dt$ pa zatim rešiti jednačinu:

$$\int\limits_{-1}^{x}\frac{\arcsin t}{\sqrt{1+t}}=2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{2}.$$

Rešiti jednačine:

3739. $\int\limits_0^x\frac{t\operatorname{arc\,tg} t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3840. $\int\limits_x^2(t^4-t^2)^{-1/2}\,dt=\frac{\pi}{3}.$ **3741.** $\int\limits_{\ln 4}^{x}\frac{dt}{\sqrt{e^t-4}}=\frac{\pi}{4}.$

3742. Ako je $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x^2}$ i $I_n=\int\limits_0^n f(x)\,dx$, $J_n=\int\limits_{-n}^{0} f(x)\,dx$.

Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{J_n}$.

3743. $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\int\limits_1^t\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x-1}-\frac{\pi}{4}\right)dx\right]\Big/\ln t$

3744. Funkcija $f(x)$ je neprekidna i strogo rastuća u $[0,a]$ i $f(0)=0$. Neka je $g(x)$ njena inverzna funkcija i funkcija $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt+\int\limits_0^{f(x)} g(t)\,dt-xf(x)$ definisana u $[0,a]$. Dokazati da je $F(x)$ diferencijabilna i da je $F'(x)\equiv 0$.

3745. Ako je $f(x)$ neprekidna i pozitivna, dokazati da je funkcija

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

rastuća u intervalu $[0,\infty)$.

3746. Odrediti graničnu vrednost niza čiji je opšti član $a_n=\frac{1}{n^n}\lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A x^n e^{-x}dx$.

3747. Integrali: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ i $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ zovu se potpuni eliptički integrali prve i druge vrste i ne mogu se izračunati u konačnom obliku.

§ 2. Nepravi integrali

1° Integrali neograničenih funkcija

Ako je $f(x)$ neograničena u $x=c\in[a,b]$ i neprekidna za $x\in[a,c)$ i $x\in(c,b]$, onda se $\int_a^b f(x)\,dx$ definiše na sledeći način:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Ako limesi postoje i konačni su, kažemo da integral konvergira; u protivnom—divergira.

2° Integrali sa beskonačnim granicama

Ako je $f(x)$ neprekidna za $x\in[a,\infty)$, tada je

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako postoji limes i konačan je, integral konvergira, a ako ne postoji, divergira. Analogno je:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \quad\text{i}\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Jedan od testova konvergencije je D'Alambertov:

Ako je $|f(x)| \leqslant F(x)$ za $a < x < b$ i ako $\int_a^b F(x)\,dx$ konvergira, konvergira i $\int_a^b f(x)\,dx$. Analogno: ako je $|f(x)| < F(x)$ za $x \geqslant a$, tada iz konvergencije $\int_a^\infty F(x)\,dx$ sledi konvergencija $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Izračunati integrale:

3748. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **3749.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Ispitati konvergenciju integrala i naći njihove vrednosti:

3750. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. **3751.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. **3752.** $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $(a \neq b)$.

Izračunati neprave integrale (ili ustanoviti njihovu divergenciju):

3753. $\int_0^5 \frac{dx}{x^7}$. **3754.** $\int_0^e x\,|\ln x|\,dx$. **3755.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3756. $\int_0^1 \frac{x+1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$. **3757.** $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-3x+2}$. **3758.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

3759. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. **3760.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **3761.** $\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

3762. $\int_2^\infty \cos x\,dx$. **3763.** $\int_{-1}^\infty e^{-kx}\,dx$. **3764.** $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx$.

3765. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx$. **3766.** $\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

3767. $\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2+a^2}}$. $(a \neq 0)$. **3768.** $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.

Ispitati konvergenciju sledećih integrala:

3769. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$ **3770.** $\int\limits_1^\infty \frac{2x^2-3x+2}{\sqrt[8]{x^8+3x^6+5}}\,dx.$

3771. $\int\limits_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[8]{x^4+1}}.$ **3772.** $\int\limits_1^\infty \frac{1}{xe^x}\,dx.$ **3773.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^a \operatorname{arctg} x}{c+x^b}\,dx,$ $(b \geqslant 0, c>0).$

3774. Pokazati da $B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ (Beta funkcija), konvergira za $p>0$ i $q>0$.

3775. Pokazati da $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ (Gama funkcija), konvergira za $p>0$.

3776. Dokazati da je $\Gamma(p+1)=\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx=p!$, ($p$ prirodan broj).

Dokazati da je:

3777. $\int\limits_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx=\frac{n!}{2}.$ **3778.** $\int\limits_0^\infty f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)dx=$

$$=\int\limits_0^\infty f(\sqrt{x^2+4a^2})\,dx, \quad (a>0).$$

3779. Izračunati integrale:

$$J_1=\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad \text{i} \quad J_2=\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad (a\neq 0,\ a+b\neq 0).$$

Dokazati jednakosti:

3780. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2}, \quad (k=0,1,2,\ldots).$

3781. $\int\limits_{-a}^{a} |x|^x(\ln|x|+1)\,dx=2\operatorname{sh}(a\ln a), \quad (a>0).$

§ 3. Procena integrala

1° Ako je $f(x) \leqslant F(x)$ na $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b F(x)\,dx \quad \text{i} \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

gde je m najmanja vrednost funkcije $f(x)$ na $[a, b]$, a M najveća vrednost na $[a, b]$. Ova nejednakost može se zameniti ekvivalentnom jednakosti:

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ gde je } \xi \in (a, b).$$

2° Broj $\mu = f(\xi) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ zove se *srednja vrednost funkcije* $f(x)$ na $[a, b]$.

3° Neka su funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ ograničene i integrabilne na segmentu $[a, b]$ i pri tom funkcija $\varphi(x)$ ne menja znak za $x \in (a, b)$, tada je

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

gde je $\inf\limits_{a<x<b} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{a<x<b} f(x)$. Ako je, još, $f(x)$ nedrekidno na $[a, b]$, tada postoji $c\,(a \leqslant c \leqslant b)$, tako da je

$$\mu = f(c).$$

Proceniti vrednost integrala:

3782. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3+x^2}\,dx.$ **3783.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{4+x^2}\,dx.$

3784. Proceniti vrednost integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$ majoriranjem i minoriranjem a zatim mu naći vrednost.

3785. Dokazati da se $\displaystyle\int_0^2 e_{x^2-x}\,dx$ nalazi u intervalu $\left(\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}},\ 2e^2\right)$.

3786. Proceniti vrednost integrala $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ pa zatim naći tačnu vrednost i uporediti dobijene rezultate.

Koji je veći od sledećih integrala:

3787. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin^2 x\,dx$ ili $\displaystyle\int_0^1 x \sin^2 x\,dx.$

3788. $\int_1^4 a^x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ ili $\int_1^4 e^x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

3789. $\int_1^2 3^{x^2}\,dx$ ili $\int_1^2 3^{x^3}\,dx$.

3790. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ ili $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx$, $(n \in N)$.

Naći srednju vrednost funkcije na naznačenom intervalu:

3791. $y = \ln x$, $[1, e]$. **3792.** $y = \sin^4 x$, $[0, \pi]$.

3793. Srednja vrednost funkcije $f(x)$ u razmaku $[0, \infty)$ definiše se kao $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int f(x)\,dx$. Naći srednju vrednost funkcije $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ u razmaku $[0, \infty)$.

3794. Ispitati znak integrala $\int_1^e \frac{\operatorname{arc\,tg}(\ln x)}{x}\,dx$.

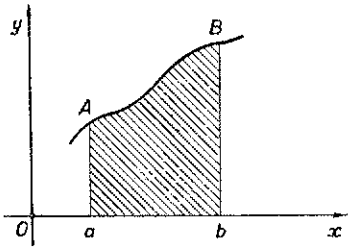
Proceniti vrednosti integrala:

3795. $\int_0^{100} \frac{1}{(x+100)\,e^x}\,dx$. **3796.** $\int_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x}\,dx$.

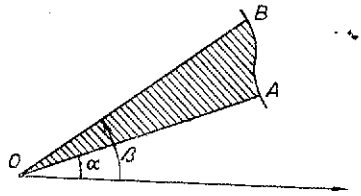
§ 4. Izračunavanje površine ravnog lika

Ako je $y = f(x) \geqslant 0$ za $x \in [a, b]$ tada je površina krivolinijskog trapeza ograničenog: lukom krive, pravama $x = a$, $x = b$ i odsečkom x ose za $x \in [a, b]$, data obrascem:

$$P = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(sl. 34).}$$



Sl. 34



Sl. 35

Ako je kriva data u polarnim koordinatama $\rho = f(\varphi)$, onda je površina krivolinijskog trougla OAB data obrascem:

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi \qquad \text{(sl. 35).}$$

3797. Naći površinu ograničenu lukom krive $y=x^2+x+1$, pravama: $x=0$, $x=1$ i $y=0$.

3798. Naći površinu ograničenu lukom krive $x=6-y-y^2$, i y osom.

3799. Izračunati površinu ograničenu lukom krive $y=\frac{1}{x}$, pravama: $x=1$, $x=a$, $y=0$, $(a>0)$. Čemu teži $P(a)$ kad $a\to 0$?

3800. Izračunati površinu ograničenu lukom krive $y=\operatorname{tg} x$, pravom $x=\frac{\pi}{4}$ i x osom.

3801. Izračunati površinu, ograničenu krivama: $y=3-2x-x^2$ i $y=0$.

3802. Izračunati površinu ograničenu krivom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ i koordinatnim osama.

3803. Dokazati da je površina, ograničena krivom $y=kx^n$ i pravama $x=a$, $y=0$, jednaka $\frac{1}{n+1}$-tom delu površine pravougaonika konstruisanog nad koordinatama tačke na krivoj $y=kx^n$ sa apscisom a.

3804. Izračunati površinu, ograničenu krivom $y=\cos^2 x$, pravama $x=0$, $x=\pi$ i odsečkom $[0, \pi]$ na x osu. Nacrtati sliku.

3805. Naći površinu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3806. Izračunati površinu ograničenu krivim $y=\sin x$, $y=\cos x$ i odsečkom $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ x ose. Nacrtati sliku.

3807. Naći površinu ograničenu lukom parabole $y^2=4a(a+x)$, lukom kruga $x^2+y^2=4a^2$ i tangentnom kruga u tački $(2a, 0)$.

3808. Izračunati površinu orgraničenu linijama $y^2=2x+1$, $y=x-1$.

3809. Naći površinu ograničenu lukom lemniskate: $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

3810. Naći površinu ograničenu lukom astroide: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

3811. U presečnim tačkama prave $x-y+1=0$ i parabole $y=x^2-4x+5$ povučene su tangente na paraboli. Izračunati površinu ograničenu parabolom i tangentama. Nacrtati sliku.

3812. U tačkama preseka prave $y=0$ i parabole $y=x^2-4$ povučene su normale na paraboli. Naći veličinu površine ograničene parabolom i normalama.

3813. Izračunati površine ograničene linijama $x=y^2-2y+2$, $x=0$, $y=0$ $2x+y=9$.

3814. Naći površinu, ograničenu parabolama $x^2=2py$, $y^2=2px$.

3815. Odrediti koeficijente a, b, c i d tako da hiperbola $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ prolazi kroz koordinatni početak i ima za asimptote prave $x=2$ i $y=1$, a zatim izračunati površinu ograničenu lukom tako dobijene hiperbole i pravom $x+y+1=0$.

3816. Naći površinu ograničenu krivom $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ i pravama: $x=0$, $y=0$, $x=b$.

3817. Naći površinu ograničenu krivom $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ i pravama: $x=1$, $y=0$. Na osnovu toga dokazati nejednakost: $\ln(\sqrt{2}-1)<1-\sqrt{2}$.

3818. Naći površinu ograničenu krivama: $x^2=4ay$ i $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $(a>0)$.

3819. Naći površinu ograničenu lukom hiperbole $x^2-y^2=1$, apscisnom osom i potegom proizvoljne tačke.

3820. Naći površinu ograničenu lukom krive $y=\pm x\sqrt{1-x^2}$.

3821. Naći površinu ograničenu krivim:

$$y=-x^2+4x-3, \quad y=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3.$$

3822. Iz tačke $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ povući tangente na hiperbolu $x^2-y^2=1$ i naći površinu ograničenu tim tangentama i lukom hiperbole između dodirnih tačaka.

3823. Naći površinu ograničenu lukom cikloide

$$x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t)$$

i delom x ose.

3824. Naći površinu ograničenu petljom Descartesova lista:

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

3825. Naći površinu ograničenu lukom krive (kardioida): $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

3826. Naći površinu ograničenu lukom krive $y=(1-x^2)\ln(1-x)$ i pozitivnim delom x ose. Nacrtati sliku.

3827. Naći površinu ograničenu lukom krive $y=\frac{1}{x\ln^2 x}$ i pravama: $x=0$, $x=\frac{1}{e}$, $y=0$.

3828. Naći površinu ograničenu lukom krive $y^2 = x(2-x)^3$. Nacrtati sliku.

3829. Naći površinu ograničenu lukom krive $81y^2 = 4x^2(9-x^2)$.

3830. Naći površinu ograničenu lukom krive $y = \operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ i koordinatnim osama.

3831. Naći površinu između krivih:

$$y = \frac{1}{\sin x} \text{ i } y = \operatorname{ctg} x \quad \text{od } x = 0 \quad \text{do } x = \frac{\pi}{2}.$$

3832. Naći jednu od površina, ograničenu krivim:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1, \quad y = \frac{4}{x}.$$

3833. Naći površinu ograničenu krivom:

$$1^\circ\ \rho = a\cos\varphi, \quad 2^\circ\ \rho = a\cos 2\varphi, \quad 3^\circ\ \rho = a\cos 3\varphi.$$

3834. Naći jedan deo površine ograničene krivim:

$$\rho = a(1+\cos\varphi) \text{ i } \rho = \frac{3a}{2}.$$

3835. Naći površinu ograničenu krivom $y = e^{-x^2}(x+x^3)$ i njenom asimptotom.

3836. Odrediti parametar m tako da kriva $y^2 = mx$ dodiruje krivu $y = e^x$ i izračunati površinu ograničenu ovim krivim i y osom.

3837. Naći površinu koju zaklapa kriva $y = \frac{\ln 2 + \ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ sa delom x ose i ordinatom u tački maksimuma.

3838. Naći površinu ograničenu lukom krive $y = e^{-x}$, njenom asimptotom i tangentom te krive povučenom iz koordinatnog početka.

3839. Naći površinu ograničenu linijama: $y = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

3840. Naći površinu ograničenu krivom $y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, pravom $x = 1$ i pozitivnim delom x ose.

3841. Izračunati površinu između krive $y = x^3 e^{-x^2}$ i njene asimptote.

3842. Izračunati površinu koju ograničavaju kriva $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, njena asimptota i pozitivni deo x ose.

3843. Naći površinu koju ograničava kriva $y = \ln(1-x-2x^2)$ sa x osom.

3844. Naći površinu ograničenu krivom $y=6x^2-3x^3$, y osom i tangentom krive povučene u tački $M(3, y)$.

3845. Naći površinu koju ograničava kriva $y=x+3\pm\sqrt{9+6x-3x^2}$.

3846. Naći površinu ograničenu krivom $y=\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$ i njenom asimptotom.

3847. Parabola $y^2=2px$ seče krug $x^2+y^2-2rx=0$ u tačkama A i B. Odrediti parametar p tako da površina ograničena parabolom i tetivom AB bude maksimalna.

3848. Napisati jednačinu sečice parabole $y^2=4x$ koja prolazi kroz koordinatni početak i od date parabole odseca odsečak površine 9.

§ 5. Zapremina rotacionog tela

1° Ako je $P(x)$ površina preseka tela, presečenog ravni normalnom na x osu u tački sa apscisom x, onda je zapremina tela:

$$V=\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx,$$

gde su x_1 i x_2 apscise krajnjih preseka.

Specijalno, telo koje nastaje rotacijom krivolinijskog trapeza ograničenog: krivom $y=f(x)$, pravama $x=a$, $x=b$ i $y=0$, oko x ose i y ose, ima zapreminu:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx; \qquad V_y=2\pi\int_a^b xy\,dx.$$

Ako krivolinijski trapez, ograničen krivom $y=f(x)$ i pravama: $y=c$, $y=d$ i $x=0$, rotira oko y ose, opisuje telo zapremine

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy.$$

2° Zapremina tela koje nastaje rotacijom krivolinijskog trougla, ograničenog krivim: $\rho=f(\varphi)$, $\varphi=\alpha$ i $\varphi=\beta$, oko polarne ose, data je obrascem:

$$V_p=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,d\varphi.$$

3849. Izvesti obrazac za zapreminu lopte poluprečnika R.

3850. Izvesti obrazac za zapreminu sferne kalote visine h.

3851. Naći zapreminu koja nastaje rotacijom dela površi ograničene krivim: $y=x^2$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, oko: 1° x ose, 2° y ose.

3852. Izračunati zapreminu tela koje opisuje elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, rotacijom oko: 1° x ose, 2° y ose.

3853. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene krivom $y=e^{-x^2}$ i x osom oko y ose.

3854. Naći zapreminu koju opisuje astroida $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ rotacijom oko x ose.

3855. Naći zapreminu torusa. (Telo nastalo rotacijom kruga $x^2+(y-b)^2=a^2$ oko x ose, $b>a$).

Naći zapreminu koja nastaje rotacijom dela površi ograničene krivim:

3856. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=\pm 1$, $y=0$: 1° oko x ose, 2° oko y ose.

3857. $y=-x^2+2$, $y=|x|$, oko x ose.

3858. Naći zapreminu koja nastaje rotacijom dela površi ograničene krivom $g(x)=\int\limits_0^x \frac{f(t^2)}{t^2}dt$, gde je $f(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$ i pravama: $x=0$, $x=1$ i $y=0$.

Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene krivim:

3859. $y=|x^3|$ i $y=-x^2+2$, oko x ose.

3860. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=0$, oko x ose.

3861. $y=e^x$, $x=0$, $y=0$. 1° oko x ose, 2° oko y ose.

3862. $y=x^2(1-x^2)$, $y=0$, oko x ose.

3863. $y^2=x^4(1+x)$, oko x ose.

3864. $y=a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}$, $x=\pm a$, $y=0$, oko x ose.

3865. $y=x^2$, $y^2=x$: 1° oko x ose, 2° oko prave $x=y$.

Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene krivim:

3866. $y=2exe^{-2x}$ i njenom asimptotom, oko asimptote.

3867. $y=2^x$, $4y-3x=5$, oko x ose.

3868. Cisoide: $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$, oko njene asimptote.

3869. $y=e^{3x}+e^x$, $x=0$, $y=e^3+e$, oko y ose.

3870. $x-(1+x^2)^2y^2=0$, oko njene asimptote.

3871. Deo luka krive $xy^2+x-y=0$, koji se nalazi između srednje prevojne tačke i tačke sa najvećom apscisom, rotira oko y ose. Naći zapreminu tako nastalog tela.

3872. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom kardioide: $\rho=a(1+\cos\varphi)$, oko polarne ose.

3873. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom lemniskate: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, oko x ose.

3874. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem figure ograničene krivim: $y=\cos x$, $x=\pm\pi$, $y=-1$, oko prave $y=-1$.

3875. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom jednog luka (svoda) cikloide: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, oko: 1° x ose, 2° y ose, 3° prave: $x=a\pi$.

3876. Naći zapreminu pravog eliptičnog konusa čija je osnova elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a visina h.

3877. Naći zapreminu tela ograničenog cilindrom $x^2+y^2=a^2$ i ravnima $z=0$, $y+z=0$. Nacrtati sliku.

3878. Naći zapreminu tela ograničenog površima: $x=\frac{1}{2}(y^2+z^2)$ i $x=a$.

3879. Naći zapreminu tela ograničenog površima: $x^2+4y^2=8z$, $x^2+4y^2=1$, i $z=0$.

3880. Naći zapreminu tela ograničenog površima $x^2+z^2=1$, $y^2+z^2=1$.

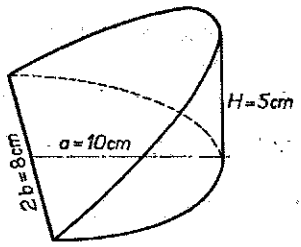
3881. U čašu, oblika kružnog cilindra poluprečnika r, nasuta je voda. Osa čaše je nagnuta pod uglom α prema horizontu. Deo dna, segment sa centralnim uglom 2φ, je pokriven vodom. Naći zapreminu vode.

3882. Naći zapreminu ograničenu jednogranim hiperboloidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ i ravnima: $z=0$, $z=h$.

3883. Naći zapreminu elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3884. Prav cilindar čija je osnova elipsa presečen je kosom ravni koja prolazi kroz malu osu elipse. Odrediti zapreminu tela koje tako nastaje (sl. 36).

3885. Centar kvadrata kreće se duž prečnika kruga, poluprečnika a, pri čemu ravan u kojoj leži kvadrat ostaje normalna na ravni kruga, a dva suprotna temena kvadrata kreću se po krugu. Naći zapreminu tela koju opisuje pokretni kvadrat.



Sl. 36

§ 6. Dužina luka krive

1° Dužina luka s, krive $y=f(x)$ između tačaka sa apscisama $x=a$ i $x=b$ je:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

2° Ako je kriva data u parametarskom obliku: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ onda je:

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt.$$

3° Ako je kriva data jednačinom $\rho=f(\varphi)$, onda je:

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

dužina luka krive između tačaka $(\varphi_1, f(\varphi_1))$ i $(\varphi_2, f(\varphi_2))$.

3886. Naći obim kruga $x^2+y^2=a^2$.

3887. Naći dužinu luka krive: $x=\frac{t^6}{6}$, $y=2-\frac{t^4}{4}$ između presečnih tačaka sa koordinatnim osama.

3888. Naći dužinu luka kardioide $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

3889. Naći dužinu luka astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

3890. Naći dužinu luka jednog svoda cikloide:
$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

3891. Izračunati dužinu luka krive: $x=3\left(\cos t+\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=3\sin t$ između tačaka koje odgovaraju vrednosti parametra: $t_1=\frac{\pi}{2}$, $t_2=\frac{2\pi}{3}$.

3892. Izračunati dužinu luka krive: $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ od $t=0$ do $t=\pi$.

3893. Naći dužinu luka krive $y^2=x^3$ koji odseca prava $x=\frac{4}{3}$.

3894. Naći dužinu luka na paraboli $y^2=2x+1$ koji odseca prava $x-y=1$.

3895. Naći dužinu luka krive $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}$ između tačaka sa apscisama $x=0$ i $x=\frac{a}{2}$.

3896. Dokazati da je dužina luka krive $y_1=f(x)$ jednaka dužini luka krive $y_2=f(x)+c$ između tačaka sa apscisama $x=a$ i $x=b$. Dati geometrijsku interpretaciju.

3897. Naći dužinu luka krive $y=\ln(\cos x)$ između tačaka sa apscisama:

$$x=0,\ x=\frac{\pi}{4}.$$

3898. Naći dužinu luka krive $y=\ln\sin(x-1)$ između tačaka:

$$x=1+\frac{\pi}{3} \text{ i } x=1+\frac{2\pi}{3}.$$

3899. Dokazati da je dužina luka krive $y=f(x)$ između tačaka sa apscisama $x=a$ i $x=b$, jednaka dužini luka krive $y=f(x-h)$ između tačaka sa apscisama: $x=a+h$ i $x=b+h$. Dati geometrijsku interpretaciju.

3900. Naći dužinu luka krive $y=\ln x$ između tačaka sa ordinatama: $y=\ln\sqrt{3}$ i $y=\ln\sqrt{8}$.

3901. Naći dužinu luka krive $y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ od tačke $M_1(a, y_1)$ do tačke $M_2(b, y_2)$, $(b>a)$.

3902. Neka prava $x=t$, $(t>0)$ seče krive: $y=a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}$ i $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ respektivno u tačkama M_1 i M_2, a x osu u tački M. Pokazati da je duž MM_1 jednaka dužini luka krive $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ od tačke $T(0, a)$ do tačke M_2.

3903. Pokazati da je dužina luka elipse $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, jednaka dužini jednog talasa sinusoide $y=\sin x$.

3904. Na cikloidi: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ naći tačku koja deli prvi svod luka u razmeri $1:3$.

3905. Naći dužinu luka krive $y=\frac{1}{2}e^{2x}$ između tačaka sa apscisama:

$$x=0,\ x=1.$$

3906. Naći dužinu luka prvog zavoja Arhimedove spirale $\rho=a\varphi$.

3907. Naći dužinu luka krive $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$, odsečenog pravom $x=-1$.

3908. Naći dužinu luka krive $x=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-\ln y\right)$ između tačaka sa ordinatama: $y=1$ i $y=e$.

3909. Naći dužinu logaritamske spirale $\rho=e^{\alpha\theta}$ od koordinatnog početka do tačke $M(\theta, \rho)$.

3910. Naći dužinu luka krive $y=\arcsin x\pm\sqrt{1-x^2}$.

3911. Primenom Simpsonovog pravila izračunati približno obim elipse:

$$\frac{x^2}{\sqrt{8}}+\frac{y^2}{\sqrt{6}}=1.$$

3912. Naći krive čiji je luk između tačaka sa apscisama $x=0$ i $x=x$:

$$s=\int_0^x\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx.$$

3913. Naći dužinu luka krive date jednačinama:

$$x=(1+\sin\varphi)\cos\varphi,\qquad y=(1+\sin\varphi)\sin\varphi+\frac{1}{4}.$$

3914. Naći Deskartove koordinate tačke na krivoj $\rho=a(1-\cos\theta)$ koja deli dužinu njenog luka iznad polarne ose u odnosu $2:3$.

§ 7. Komplanacija obrtnih površi

Površina koju opisuje luk krive $y=f(x)$, između tačaka sa apscisama $x=a$ i $x=b$, rotiranjem oko x ose, data je obrascem:

(1) $$P_x=2\pi\int_a^b y\,ds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Ako se luk obrće oko y ose, imamo analogan obrazac:

$$P_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy.$$

Ako je kriva data u drugom obliku, treba izvršiti odgovarajuću zamenu promenljivih u obrascu (1) i primeniti ga.

3915. Izvesti obrazac za površinu sfere poluprečnika R.

3916. Izvesti obrazac za površinu sferne kalote visine h.

3917. Izračunati površine, nastale rotacijom luka krive $y=\sin x$ oko x ose između tačaka $x=0$ i $x=\pi$.

3918. Nacrtati krivu: $9y^2=x(3-x)^2$ i naći površinu koja nastaje obrtanjem petlje oko x ose.

3919. Naći površinu koja nastaje rotacijom jednog svoda cikloide: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$: a) oko x ose, b) oko prave $x=\pi a$.

3920. Naći povšinu koju opisuje astroida: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ rotacijom oko x ose.

3921. Izračunati površinu koja nastaje rotacijom luka lančanice $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, oko x ose između tačaka: $x=0$ i $x=a$, $(a>0)$.

Izračunati površine koje nastaju rotacijom krivih:

3922. $x^2+y^2=2y$, oko x ose.

3923. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b)$ oko: a) x ose, b) y ose.

3924. $y=e^{-x}$, oko x ose za $x>0$.

3925. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, oko y ose za $-h<y<h$.

3926. Kardioide: $\rho=a(1+\cos\varphi)$, oko polarne ose.

3927. Lemniskate: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, oko x ose.

3928. $y^2=2x$, oko prave: $y=2x$.

3929. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{2}$, oko x ose.

3930. $y=4-\frac{\sqrt[3]{9x^2}}{2}$, oko x ose za $x>0$, (luk između koordinatnih osa).

§ 8. Primena određenog integrala u mehanici i fizici

1° Statički moment

Statički moment materijalne tačke A, mase m u odnosu na osu l čije je rastojanje od ose d, je veličina

$$M_l=md.$$

Statički moment sistema od n materijalnih tačaka čije su mase: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i koje leže u istoj ravni sa osom l, na rastojanju od nje: $d_1, d_2, \ldots, d_n$ zove se veličina

$$M_l=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i,$$

pri čemu se rastojanja sa jedne strane ose uzimaju sa znakom plus, a sa druge strane sa znakom minus. Analogno se definiše statički moment sistema tačaka u odnosu na ravan.

Ako je masa ravnomerno raspoređena (gustina $\rho=1$) duž luka krive $y=f(x)$ između tačaka sa apscisama: $x=a$ i $x=b$, onda su statički momenti inercije u odnosu na koordinatne ose dati obrascima:

$$M_x=\int_a^b y\,ds, \qquad M_y=\int_a^b x\,ds, \qquad (ds=\sqrt{dx^2+dy^2}).$$

Ako je masa neprekidno raspoređena na delu površine ograničenom krivom $y=f(x)$ i pravama $x=a$, $x=b$ i $y=0$, tada je

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y\,|y|\,dx, \qquad M_y=\int_a^b x\,|y|\,dx.$$

2° Moment inercije u odnosu na osu

Momentom inercije u odnosu na osu l, materijalne tačke mase m, čije je rastojanje od l jednako d, zove se veličina:

$$I_l=md^2.$$

Moment inercije u odnosu na osu l sistema od n materijalnih tačaka dat je obrascem:

$$I_l=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2.$$

Ako je masa ravnomerno raspoređena ($\gamma=1$) na delu ravnog lika, onda umesto zbira imamo odgovarajući integral:

$$I=\int_{(a)}^{(b)} d^2\cdot dp,$$

gde je dp elemenat površine lika, a d rastojanje tog elementa od ose.

3° Polarni moment inercije

Polarni moment inercije, homogene površine S u odnosu na pol P (osa je normalna na površini i prolazi kroz P), zove se veličina:

$$I_p=\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2\,dp,$$

gde je dp elementarna površina na rastojanju ρ od pola

$$I_p=I_x+I_y.$$

4° Težište

Koordinate težišta ravne figure (luka ili neke površine) mase M izračunavaju se po obrascima:

$$x_T=\frac{M_y}{M}, \qquad y_T=\frac{M_x}{M},$$

gde su M_x i M_y statički momenti. U slučaju geometrijske figure, masa M je brojno jednaka dužini luka ili veličini površine, tj. imamo:

za luk $$x_T=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}, \qquad y_T=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx};$$

za površinu $$x_T=\frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \qquad y_T=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

5° Koordinate težišta tela koje postaje rotacijom zatvorene površine ograničene krivom $y=f(x)$, $(f(x)\geqslant 0)$, i pravama $x_1=a$, $x_2=b$, $y=0$, oko x ose, određuju se obrascem:

$$x_T=\frac{\int_a^b y^2\,x\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}, \qquad y_T=z_T=0.$$

6° Put

Ako se tačka kreće po nekoj krivoj i ako joj je intenzitet brzine $v=f(t)$ funkcija vremena t, tada je put koji pređe tačka u intervalu vremena $[t_1, t_2]$ jednak:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

7° Rad sile

Ako promenljiva sila, intenziteta $F=f(x)$, dejstvuje u pravcu x ose, rad koji izvrši na odsečku $[x_1, x_2]$ jednak je:

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

8° Kinetička energija

Kinetička energija materijalne tačke mase m i brzine v naziva se izraz:

$$E=\frac{mv^2}{2}.$$

Kinetička energija sistema n materijalnih tačaka čije su mase: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i brzine $v_1, v_2, \ldots, v_n$, jednaka je:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (1)$$

Telo, ravnomerno raspoređene mase, podeli se na male zapremine (elementarne čestice koje igraju ulogu materijalnih tačaka) pa se formira zbir oblika (1) i traži njegov limes kada broj sabiraka teži beskonačnosti. Time se umesto zbira (1) dobija integral.

9° Pritisak tečnosti

Za izračunavanje pritiska tečnosti koristi se Paskalov zakon po kome je: $\gamma hS=p$, gde je p pritisak; γ specifična težina tečnosti; S površina na koju tečnost vrši pritisak i h dubina te tečnosti.

3931. Naći statički moment u odnosu na koordinatne ose, odsečka prave $x+y=1$ između koordinatnih osa.

3932. Naći statički moment u odnosu na koordinatne ose, trougla ograničenog pravama: $x+y=1$, $x=0$ i $y=0$.

3933. Izračunati statički moment, u odnosu na x osu, luka kosinusoide $y=\cos x$ između tačaka: $x=-\frac{\pi}{2}$ i $x=\frac{\pi}{2}$.

3934. Naći statički moment u odnosu na koordinatne ose, luka astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ u prvom kvadrantu.

3935. Naći težište luka kruga: $x^2+y^2=a^2$ iznad x ose.

3936. Naći težište luka lančanice $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ od $x=-a$ do $x=a$.

3937. Naći težište luka astroide: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ u prvom kvadrantu.

3938. Naći težište površine elipse koja pripada prvom kvadrantu.

3939. Naći težište dela površine, ograničenog parabolom: $y=-ax^2+b$ i x osom $(a>0)$, $(b>0)$.

3940. Naći težište luka kruga poluprečnika R koji odgovara centralnom uglu α.

3941. Naći moment inercije u odnosu na ose: x i y, površine pravougaonika ograničenog pravama: $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=b$.

3942. Naći moment inercije u odnosu na koordinatne ose, površine trougla ograničenog pravama: $x=0$, $y=0$ i $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3943. Naći moment inercije kruga poluprečnika R u odnosu na njegov prečnik.

3944. Naći moment inercije kružnog isečka poluprečnika r kome odgovara centralni ugao α, u odnosu na jedan krajni poluprečnik.

3945. Naći moment inercije površine elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, u odnosu na veliku osu.

3946. Naći polarni moment inercije kružne homogene ploče poluprečnika R u odnosu na centar kruga.

3947. Naći moment inercije kružne ploče poluprečnika R, u odnosu na koordinatne ose.

3948. Naći polarni moment inercije kružnog prstena poluprečnika R_1 i R_2 u odnosu na centar.

3949. Naći moment inercije homogenog konusa poluprečnika osnove R i visine H u odnosu na njegovu osu.

3950. Odrediti moment inercije rotacionog konusa poluprečnika R, visine h, gustine μ, mase M, u odnosu na njegovu osnovu.

3951. Naći statički moment površine ograničene krivim: $y=\frac{2}{1+x^2}$ i $y=x^2$ u odnosu na x osu

3952. Naći težište površine ograničene jednim svodom cikloide: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ i x osom.

3953. Statički moment proizvoljnog luka parabole u odnosu na njenu osu proporcionalan je razlici poluprečnika krivina u krajevima tog luka. Koeficijenat proporcionalnosti iznosi $\frac{p}{3}$, gde je p parametar parabole. Dokazati!

3954. Naći težište ravnog lika ograničenog krivom $ay^2=x^3$ i pravom $x=a$, $(a>0)$.

3955. Naći težište pravog konusa čiji je poluprečnik osnove r i visina h.

3956. Naći težište polulopte poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku, a koja je iznad ravni xOy.

3957. Naći težište tela koje nastaje rotacijom oko y ose dela površine ograničene hiperbolom: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ i pravama: $y=0$, $y=b$, $(b>0)$.

3958. Naći težište tela koje nastaje rotacijom oko x ose dela površine ograničene krivim $y=\operatorname{ch} x$, $x=0$, $x=a$, $(a>0)$.

3959. Brzina tela, izbačenog vertikalno uvis početnom brzinom v_0 bez trenja vazduha, jednaka je $v=v_0-gt$, gde je t vreme a g ubrzanje Zemljine teže. Na kojoj će se visini nalaziti telo posle t sekundi od momenta izbacivanja?

3960. Brzina tela izbačenog vertikalno naviše početnom brzinom v_0, gde se uzima trenje vazduha, data je obrascem: $v=c\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{gt}{c}+\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{c}\right)$, gde je c — konstanta, g — ubrzanje Zemljine teže, t — vreme kretanja. Naći najveću visinu do koje dopre telo.

3961. Za harmonijsko oscilatorno kretanje po apscisnoj osi oko koordinatnog početka brzina se izražava obrascem: $v=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$, gde je: t vreme oscilovanja, T period oscilovanja, φ_0 početna faza. Naći položaj tačke u momentu t_2, ako je poznato da se u momentu t_1 nalazila u tački $x=x_1$.

3962. Materijalna tačka mase m nalazi se iznad središta kružne ploče na odstojanju a. Rastojanje od tačke do ruba ploče je R a gustina μ. Naći privlačnu silu ploče i tačke.

3963. Naći silu privlačenja homogene lopte gustine $\mu=1$ poluprečnika R i materijalne tačke mase m, koja je udaljena od centra lopte za $b\,(b>R)$.

3964. Odrediti brzinu i vreme kao funkciju puta kod slobodnog pada u vakuumu uzimajući u obzir promenljivost sile teže.

3965. Brzina kretanja tačke je $V = te^{-\frac{t}{100}}$. Naći dužinu puta koju je tačka prešla od početka do kraja kretanja.

3966. Izračunati rad koji je potrebno izvršiti da bi se ispumpala voda iz cilindrične bačve poluprečnika osnove R i visine H.

3967. Kotao ima oblik polusfere poluprečnika R i napunjen je vodom. Koliki je rad potrebno izvršiti da se izlije voda iz kolta?

3968. Lopta poluprečnika R je porinuta u vodu. Koliki je rad potrebno utrošiti da se izvadi iz vode, ako je specifična težina vode i lopte 1?

3969. Izračunati rad koji je potrebno upotrebiti da bi se podigla masa m sa površine Zemlje na visinu h. Koliko iznosi rad kad $h \to \infty$?

3970. Izračunati rad koji je potrebno utrošiti da bi se izvadila voda iz kolta oblika rotacionog paraboloida, dubine $H = 0{,}5$ m i poluprečnika osnove $R = 0{,}4$ m. Kotao je pun vode.

3971. Koliki je rad sile trenja u ležaju kod normalne osovine koja se završava poluloptom?

3972. Koliki rad treba izvršiti da bi se nasula gomila peska oblika konusa, čiji je poluprečnik osnove 1,2 m a visina $h = 1$ m? Specifična težina peska je 2 a diže se sa površine Zemlje.

3973. Odrediti rad koji se utroši prilikom ukucavanja eksera u homogenu masu.

3974. Kotao ima oblik eliptičkog cilindra sa horizontalnom osom. Velika osa elipse koja čini osovinu kotla ($2a$) je horizontalna, mala osa ($2b$) je vertikalna. Generatrisa cilindra je L. U kotao je do polovine nasuta tečnost specifične težine $\gamma = 1$. Koliki se rad mora izvršiti da bi se voda izlila iz kotla? (Voda se podiže do najviše generatrise).

3975. Izračunati rad istezanja koji je potrebno utrošiti da se bakarna žica dužine 1 m i poluprečnika poprečnog preseka 2 mm istegne za 0,001 m.

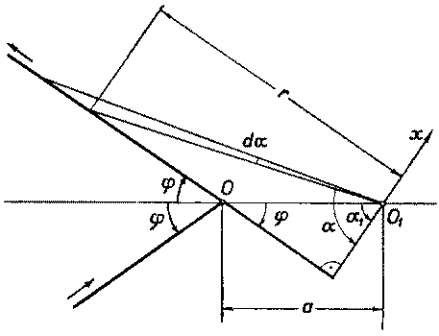
3976. Za koje će vreme isteći voda iz napunjenog cilindričnog suda površine osnove $S = 420\ \text{cm}^2$ i visine $H = 40$ cm ako ističe kroz otvor na dnu suda površine: $s = 2\ \text{cm}^2$.

3977. U cilindru se nalazi vazduh zapremine $V_0 = 0{,}1\ \text{m}^3$ na koji deluje klip i razvija pritisak $P_0 = 10330\ \text{kg/m}^2$. Odrediti rad izotermičkog sabijanja vazduha do zapremine $V_1 = 0{,}03\ \text{m}^3$.

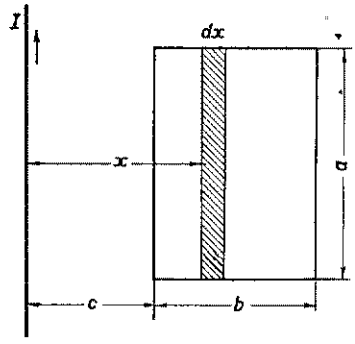
3978. Dva električna naboja $e_0 = 100$ CGSE i $e_1 = 200$ CGSE nalaze se na osi x u tačkama $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ cm. Koliki će rad biti izvršen ako drugi naboj pređe u tačku $x_2 = 10$ cm?

3979. Odrediti rad koji je potrebno izvršiti da bi električni naboj $e_2 = 1$ iz beskonačnosti prišao naboju e_1 na rastojanje R.

3980. Neograničen pravolinijski provodnik savijen je pod uglom 2φ i kroz njega teče struja I. Ako je sredina vazduh, naći indukciju B koju on stvara u tački O_1 koja leži na simetrali ugla 2φ na rastojanju a od tačke O (sl. 37).



Sl. 37



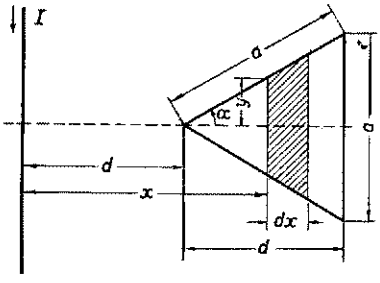
Sl. 38

3981. Dat je neograničen pravolinijski provodnik sa strujom I i kontura pravougaonog oblika. Ako je sredina vazduh, naći magnetni fluks Φ koji potiče od datog provodnika kroz ovu konturu. Vektor B (indukcija) i pravac normale na ravan konture zaklapaju ugao od 0° (sl. 38).

3982. Dat je neograničen pravolinijski provodnik sa strujom I i kontura oblika trougla (sl. 39). Naći magnetni fluks Φ koji potiče od datog provodnika kroz ovu konturu. Vektor B i normala na ravan pravougaonika zaklapaju ugao od 180°.

3983. Odrediti rad izvršen adijabatskim širenjem vazduha, od zapremine $V_0 = 1$ m³ pod pritiskom $P_0 = 1$ kg/cm² do $V_1 = 10$ m³.

3984. Kaplja početne mase m g pada pod dejstvom sile teže i ravnomerno se isparava gubeći svake sekunde n grama. Koliki je rad sile teže za vreme od početka kretanja do potpunog isparenja kaplje? Otpor vazduha ne uzimati u obzir.



Sl. 39

3985. Zračenje „crnog tela" dato je formulom: $E=\dfrac{c}{\lambda^5(e^{\frac{c}{\lambda T}}-1)}$. Pri apsolutnoj temperaturi T celokupna energija zračenja biće:

$$E=\int_0^\infty \frac{c\,d\lambda}{\lambda^5(e^{\frac{c}{\lambda T}}-1)}=\int_0^\infty \frac{cx^3T^4}{c^4(e^x-1)}dx\left(\text{smenom: } x=\frac{c}{\lambda T}\right), \text{ ili}$$

$$E=\frac{c}{c^4}\cdot T^4\cdot\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1}.$$

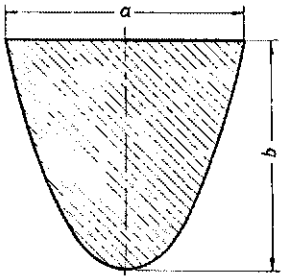
Za $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1}$ može se pokazati da konvergira $\left(\text{vrednost mu je } \frac{\pi^4}{15}\right)$, pa zaključujemo da je ukupna usijana energija „crnog tela" proporcionalna četvrtom stepenu njegove apsolutne temperature (Stefan-Boltzmannov zakon).

3986. Izračunati kinetičku energiju diska mase M i poluprečnika R koji rotira sa uglovnom brzinom ω oko ose koja prolazi kroz centar i normalna je na ravan diska.

3987. Izračunati kinetičku energiju pravougaone ploče čije su dimenzije: a cm i b cm ($a>b$), koja rotira sa konstantnom ugaonom brzinom oko ose koja prolazi kroz centar ploče i paralelna je većoj strani.

3988. Štap AB poprečnog preseka $S=4\,\text{cm}^2$ i dužine $l=20$ cm, rotira oko ose, koja prolazi kroz jedan kraj štapa i normalna je na štap, ugaonom brzinom $\omega=10\pi\,\text{sec}^{-1}$. Gustina materijala od koga je štap je $\gamma=7{,}8$. Naći kinetičku energiju obrtanja štapa.

3989. Ploča oblika paraboličnog segmenta (sl. 40) obrće se oko ose parabole stalnom ugaonom brzinom $\omega=4\pi\,\text{sec}^{-1}$. Osnova segmenta je $a=20$ cm, a visina $h=30$ cm, debljina ploče $d=0{,}3$ cm, gustina materijala od koga je ploča izrađena $\gamma=7{,}8\,\text{g/cm}^3$. Naći kinetičku energiju ploče.



Sl. 40

3990. Izračunati kinetičku energiju pravog kružnog konusa mase M koji rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svoje ose ako mu je poluprečnik osnove R i visina H.

3991. Izračunati pritisak vode na pravougaona vrata brane, široka 20 m i visoka 16 m, ako njihova gornja ivica leži na površini vode.

3992. Odrediti pritisak vode na vertikalnu trougaonu ploču, čija je osnova a na površini vode, a visina joj je h.

3993. Izračunati pritisak vode na vertikalnu ploču oblika trapeza, ako je gornja osnova ploče $a=70$ m i leži na površini vode, donja osnova je $b=50$ m i visina $h=20$ m.

3994. Naći pritisak vode na vertikalnu ploču polukružnog oblika čiji je prečnik $2a$ na površini vode.

3995. Naći pritisak vode na pravi kružni konus, poluprečnika osnove R i visine H koji je potopljen u vodu tako da mu je osnova u ravni površine vode.

3996. Cilindrična cisterna sa horizontalnom osom napunjena je do polovine tečnošću (specifična težina 0,9). Izračunati pritisak tečnosti na svaku od osnova cilindra, ako im je poluprečnik 2 m.

3997. Vetar vrši konstantan pritisak p g/cm^2 na vrata široka b cm i visoka h cm. Naći moment sile pritiska, koja teži da okrene vrata na šarkama.

3998. Odrediti opadanje intenziteta svetlosti u homogenom providnom medijumu.

3999. Stub visine h opterećen je teretom Q. Odrediti debljinu stuba kao funkciju visine, ako je presek stuba na visini $h-x$ proporcionalan sili koja na njega deluje.

§ 9. Približno izračunavanje integrala

1° Metoda pravougaonika

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} y_i,$$

gde je $h=\frac{b-a}{n}$, a y_i ordinate krive $y=f(x)$ u sredini odsečaka $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ na koje je podeljen odsečak $[a, b]$. Pri tome je $x_i-x_{i-1}=h$.

Greška formule (1):

$$\varepsilon(h)<\frac{(b-a)h^2}{24}|y''|_{\max}.$$

2° Trapezna formula

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right],$$

gde je $h=\frac{b-a}{n}$, a y_i ordinate krive $y=f(x)$ povučene na jednakim rastojanjima h u $[a, b]$.

Greška formule (2):

$$\varepsilon(h) < \frac{(b-a)\cdot h^2}{12} |y''|_{\max}.$$

3° Simpsonova formula (za $2n$ podeoka)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right], \quad \left(\sum_{i=1}^{0} y_{2i} = 0\right),$$

gde je $h = \frac{b-a}{2n}$, a y_i ordinate krive $y = f(x)$ na jednakim rastojanjima h u $[a, b]$.

Greška formule (3):

$$\varepsilon(h) < \frac{(b-a)\,h^4}{180}\cdot |y^{\mathrm{IV}}|_{\max}.$$

4000. 1° Pokazati da je formula pravougaonika tačna za funkciju $y = ax + b$;
2° Pokazati da je trapezna formula tačna za $f(x) = ax + b$.

4001. Pokazati da je Simpsonova formula tačna za

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

4002. Izračunati približno $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$:

a) metodom pravougaonika ($n = 10$);
b) trapeznom metodom ($n = 10$);
c) Simpsonovom metodom ($n = 2$).

U sva tri slučaja proceniti grešku.

4003. Izračunati po Simpsonovoj formuli $\int_1^2 (x^3 - x)\,dx$ i proceniti grešku.

4004. Izračunati $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, ($2n = 10$) po Simpsonovoj formuli i proceniti grešku.

4005. Izračunati $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ deobom intervala $[0, 1]$ na 8 podeoka pomoću:

a) formule pravougaonika, b) trapezne formule, c) Simpsonove formule, i uporediti sa tačnom vrednošću.

4006. Izračunati približnu vrednost broja π primenom Simpsonove formule na $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, ($2n = 10$), sa tačnošću 0,01.

4007. Odrediti Simpsonovom formulom dužinu luka elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, iznad dela apscisne ose od $x=0$ do $x=8$.

4008. Naći približno obim elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{3}=1$ (primeniti Simpsonovu formulu $2n=2$).

4009. Izračunati $\ln 2=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ sa tačnošću 0,001:

a) metodom pravougaonika;
b) metodom trapeza i
c) Simpsonovom metodom.

4010. Izračunati $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$ sa tačnošću 0,01.

4011. Izračunati $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ Simpsonovom metodom sa tačnošću 0,0001.

4012. Simpsonovom metodom za $n=5$ izračunati Catalanijevu konstantu $G=\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$.

4013. Izračunati sa tačnošću 0,01: $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$.

4014. Izračunati eliptički integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$ pomoću Simpsonove metode sa tačnošću 0,001.

4015. Primeniti Simpsonove formule za $n=4$ izračunati π iz $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\frac{\pi}{6}$ i proceniti grešku.

DODATAK

§ 1. Totalni diferencijal i njegova primena

1° Ako je $z=f(x, y)$ onda se izraz

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y)$$

naziva *totalni priraštaj* funkcije $z=f(x, y)$.

Izrazi

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,\ y)-f(x, y) \quad \text{i} \quad \Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

nazivaju se respektivno *parcijalni priraštaj* po x i y.

Granične vrednosti

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(y, y)}{\Delta y},$$

nazivaju se respektivno *parcijalni izvod* po x i y.

2° Ako funkcija $z=f(x, y)$ ima u tački (x, y) neprekidne parcijalne izvode, onda njen *totalni priraštaj* može biti predstavljen u obliku

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon\rho, \tag{1}$$

gde $\varepsilon\to 0$ kad i $\rho=\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\to 0$. Izraz $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ predstavlja glavni deo totalnog priraštaja Δz. Taj izraz se naziva *totalni diferencijal* i obeležava se sa dz:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{2}$$

Ako se u obrascu (2) stavi $z=x$ ili $z=y$, dobija se respektivno

$$\Delta x=dx,\quad \Delta y=dy. \quad \text{Otuda je} \quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Iz (1) sledi da je $\Delta z\approx dz$, tj. za dovoljno male priraštaje Δx i Δy totalni priraštaj je ekvivalentan totalnom diferencijalu funkcije.

3° Ako je $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ totalni diferencijal funkcije z tada je

$$z=\int P dx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P dx\right]dy+c.$$

Ako je $z=f(u, v)$, gde je $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$, onda je

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Naći totalni diferencijal funkcija:

4016. $z=x^2y$. **4017.** $z=\frac{xy}{x-y}$. **4018.** $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

4019. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. **4020.** $u=e^{s/t}$. **4021.** $z=e^{xy}$.

4022. $s=x\ln t$. **4023.** $z=x^y$. **4024.** $z=\sin(xy)$.

4025. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

Proveriti sledeće jednakosti:

4026. $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$ ako je $z=x^n\cos\frac{y}{x^2}$.

4027. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$ ako je $z=y\operatorname{arc\,tg}(x^2-y^2)$.

4028. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ako je $z=\arcsin(x^2-y^2)$.

4029. $x^3\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$ ako je $z=\frac{y^2}{3x}+\sin(xy)$.

4030. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$ ako je $z=e^y\cos(ye^{x^2/2y})$.

4031. Data je funkcija $z=x\operatorname{arc\,tg}(y^2-x^2)$; pokazati da se izraz $\frac{1}{yz}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ svodi na konstantu.

4032. Data je funkcija $z=y\ln(x^2-y^2)$: pokazati da izraz $\frac{1}{xz}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ predstavlja konstantu.

4033. Naći $\frac{dz}{dx}$ ako je $z=x^2+\sqrt{y}$ a $y=\sin x$.

4034. Naći $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je: 1° $e^z+z^3+xyz^2+x^2+y=1$;

2° $z=\ln(u^2+v)$; $u=e^{x+y^2}$; $v=x^2+y$.

4035. Naći priraštaj i diferencijal funkcije $z=x^2y$ u tački (1, 2) i uporedit ih ako je: 1° $\Delta x=1$, $\Delta y=2$; 2° $\Delta x=0{,}1$ $\Delta y=0{,}2$.

4036. Naći priraštaj i diferencijal funkcije $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$ za: $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$ i odrediti relativnu grešku koja se čini kada se priraštaj aproksimira diferencijalom.

4037. Izračunati približno promenu funkcije $z=\frac{x+3y}{y-3x}$ pri promeni nezavisno promenljivih: x od $x_1=2$ do $x_2=2{,}5$ i y od $y_1=4$ do $y_2=3{,}5$.

4038. Odrediti diferencijal funkcije

$$z=\frac{xy}{x^2-y^2} \text{ za } x=2,\ y=1,\ \Delta x=0{,}01,\ \Delta y=0{,}03.$$

4039. Naći vrednost totalnog diferencijala funkcije $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ za: $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

4040. Naći vrednost totalnog diferencijala funkcija: 1° $z=xy$ za $x=5$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$; 2° $u=e^{xy}$ za $x=1$, $y=1$, $dx=0{,}1$, $dy=0{,}2$.

4041. Naći približno promenu funkcije $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ kad se x promeni od 2 do 2,1, a y od 3 do 2,5.

4042. Naći približno promenu funkcije $z=\arcsin\frac{y}{x}$ kad se x promeni od 5 do 4,5 a y od 3 do 3,3.

Izračunati približno sledeće vrednosti:

4043. $1{,}002\cdot 2{,}0003^2\cdot 3{,}004^3$. **4044.** $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$. **4045.** $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

4046. $\sqrt{4{,}05^2+2{,}93^2}$. **4047.** $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$.

4048. $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$. **4049.** $0{,}97^{1{,}05}$.

4050. $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$. **4051.** $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$.

4052. Katete pravouglog trougla su izmerene sa tačnošću od 0,1 cm i iznose 7,5 i 18 cm. Odrediti apsolutnu grešku koja se čini pri izračunavanju hipotenuze.

4053. Ako su strane pravougaonika $a=2{,}31\pm 0{,}03$ cm, $b=3{,}14\pm 0{,}06$ cm, izračunati granicu greške obima i površine.

4054. Date su katete pravouglog trougla $a=13{,}7\pm 0{,}1$ cm, $b=18{,}4\pm 0{,}1$ cm. Sa kojom se granicom apsolutne greške može iz ovih podataka izračunati ugao naspram katete a?

4055. Ako su strane trougla $a=3$ cm, $b=4\pm 0{,}01$ cm, $c=5\pm 0{,}01$ cm, sa kojom se granicom tačnosti može izračunati ugao α?

4056. Merenjem je dobijeno za trougao ABC da je $a=100\pm 2$ m, $b=200\pm 3$ m i ugao između njih $\gamma=60^\circ\pm 1^\circ$. Sa kakvom tačnošću može da se izračuna strana c?

4057. Strana trougla ima dužinu 2,4 m i raste brzinom 10 cm/sec; druga strana 1,5 m opada brzinom 5 cm/sec. Ugao između ovih strana koji iznosi 60° raste brzinom od 2° u sekundi. Kako se i kojom brzinom menja površina?

4058. Izračunati sa najvećom mogućom tačnošću površinu kružnog odsečka ako je $r = 1265{,}65$ m, $\alpha = 42° 48' 30''$. Tačnost merenja za dužine je ± 1 cm a za uglove $\pm 10''$.

4059. Pri deformaciji cilindra njegov poluprečnik R se poveća od 2 do 2,05 cm a visina H mu se umanji od 10 do 9,8 cm. Naći približno promenu zapremine.

4060. Pri deformaciji konusa njegov poluprečnik R se povećava od 30 do 30,1 cm a visina H mu se umanji od 60 do 59,5 cm. Naći približno promenu zapremine.

4061. Dimenzije valjka su: $R = 0{,}47 \pm 0{,}03$, $H = 0{,}023 \pm 0{,}002$. Odrediti apsolutnu grešku pri izračunavanju zapremine.

4062. Odrediti granicu apsolutne i relativne greške sa kojom se može izračunati zapremina pravog kružnog konusa, ako mu je visina $h = 12{,}3 \pm 0{,}1$ cm a dužina ivice $s = 20{,}5 \pm 0{,}1$ cm.

4063. U zarubljenoj kupi poluprečnici su $R = 30$ cm i $r = 20$ cm a visina $H = 40$ cm. Koliko se promeni zapremina kupe, ako se R poveća za 3 mm, r za 4 mm a H za 2 mm?

4064. Telo izmereno u vazduhu je teško $4{,}1 \pm 0{,}1$ g a u vodi $1{,}8 \pm 0{,}2$ g. Naći specifičnu težinu i oceniti grešku.

4065. Gustina jednog tela određena je formulom $\delta = \dfrac{p}{p - p_1}$, gde je p težina tela u vazduhu a p_1 težina tela u vodi. Ako je

$$p = 243{,}6 \pm 0{,}1 \text{ g}, \quad p_1 = 218{,}4 \pm 0{,}1 \text{ g},$$

kolika je maksimalna greška učinjena pri merenju gustine?

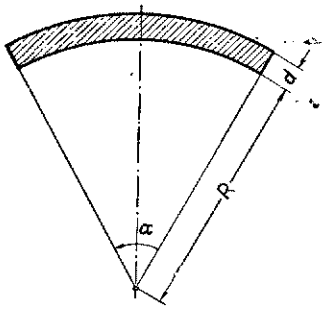
4066. Merenjem metala utvrđeno je da je

$$a = 5 \pm 0{,}003 \text{ g}, \quad V = 4{,}7 \pm 0{,}005 \text{ cm}^3.$$

Oceniti granicu greške pri određivanju specifične težine.

4067. Lučna brana prizmatičnog oblika visine h (sl. 41), ima osnovu oblika isečka kružnog prstena. Izračunati zapreminu brane, ako je merenjem dobijeno: $R = 85{,}62$ m; $d = 1{,}265$ m; $h = 35{,}78$ m; $\alpha = 62°$ a gornja granica apsolutne greške izmerenih podataka definisana je sa

$$\Delta = 1{,}0 \cdot 10^{-n}.$$



Sl. 41

4068. Radijus r kružnog luka $\widehat{AB}$, čija je odgovarajuća tetiva $2s$ a p najveće normalno rastojanje ove tetive, dat je izrazom $r = \dfrac{s^2}{2p} + \dfrac{p}{2}$.

Ako je $2s = 19{,}45$ cm $\pm 0{,}05$ mm, $p = 3{,}62$ cm $\pm 0{,}3$ mm, naći apsolutnu i relativnu grešku za r.

4069. Odrediti granicu δ_c relativne greške sa kojom se može izračunati vrednost $c=\frac{a}{a+v}$, ako su granice relativnih grešaka veličina a i v:

$$\delta_a=0{,}2\%,\quad \delta_v=0{,}3\%,\quad c\approx 2{,}54.$$

4070. Sa kojom tačnošću treba meriti poluprečnike osnova $R=2$, $r=1$ i izvodnicu zarubljene kupe $s=5$ i sa koliko decimala treba uzeti broj π da bi se površina omotača te kupe mogla izračunati sa tačnošću od 1%?

§ 2. Krivolinijski integrali

1° Ako je $f(x, y, z)$ definisana i neprekidna funkcija u svim tačkama glatke krive $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ (1) $(t_0\leqslant t\leqslant T)$ a ds diferencijal luka, onda se

$$\int_c f(x,y,z)\,ds=\int_{t_0}^{T} f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

naziva *krivolinijski integral prve vrste.* Ovaj integral ima osobinu da ne zavisi od orijentacije krive.

2° Ako su funkcije $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ neprekidne u svakoj tački $M(t)$ krive (1), koja se kreće u pravcu rašćenja parametra t onda se:

$$\int_c P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),\ y(t),\ z(t),\ x'(t)]+Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,y'(t)+R[x(t),\ y(t),\ z(t),\ z'(t)]\}\,dt$$

naziva *krivolinijski integral druge vrste.* Pri promeni smera integracije duž krive c ovaj integral menja znak.

3° Integral oblika $\int_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ određuje rad sile potreban da se jedinica mase pomeri duž luka krive c u polju sile $\vec{F}\{P, Q, R\}$.

4° Ako je u nekoj oblasti (V) $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=dU$, onda je

$$\int_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz=U_B-U_A,$$

tj. krivolinijski integral ne zavisi od putanje integracije c uzete u oblasti (V). Njegova vrednost jednaka je razlici vrednosti funkcije $U(x, y, z)$ u tačkama B i A.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

4071. $\int_c x\,ds$, ako je c odsečak prave $y=x$ između tačaka (0, 0) i (1, 1).

4072. $\int_c y^2\,ds$, gde je c gornja polovina kruga $x^2+y^2=a^2$ između tačaka $(a, 0)$ i $(-a, 0)$.

4073. $\int_c y\,ds$, po luku parabole $y^2=2x$ od tačke (0, 0) do tačke $(4, \sqrt{8})$.

4074. $\int\limits_c \sqrt{2y}\,ds$, gde je c prvi svod cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

4075. $\int\limits_c ye^{-x}\,ds$, gde je c luk krive $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\operatorname{arc\,tg} t-t+3$ između tačaka $t=0$ i $t=1$.

4076. $\int\limits_c \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gde je c odsečak prave $y=\frac{x}{2}-2$ od tačke $(0, -2)$ do tačke $(4, 0)$.

4077. $\oint\limits_c xy\,ds$, gde je c kontura pravougaonika, čije su strane: $x=0$; $y=0$; $x=4$ i $y=2$.

4078. $\int\limits_c (x+y)\,ds$ ako je c kontura trougla $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ i $B(0, 1)$.

4079. $\int\limits_c \frac{ds}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, ako je c luk hiperboličke spirale $\rho\theta=1$ od $\theta=\sqrt{3}$ do $\theta=2\sqrt{2}$.

4080. $\int\limits_c y^2\,ds$, gde je c luk cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

4081. $\int\limits_c (x^2+y^2)\,ds$, gde je c kriva $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

4082. $\int\limits_c x\,ds$, ako je c deo logaritamske spirale $\rho=ae^{k\varphi}\,(k>0)$ koji se nalazi unutar kruga $\rho=a$.

4083. $\int\limits_c xyz\,ds$, gde je c luk krive $x=t$, $y=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$ od tačke $t=0$ do tačke $t=1$.

4084. $\int\limits_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, gde je c deo zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

4085. $\int\limits_c x^2 ds$, gde je c krug $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

Naći dužinu luka prostornih krivih:

4086. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^2$ od tačke $O(0, 0, 0)$ do tačke $A(3, 3, 2)$, $(t>0)$.

4087. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$, $(0<t<\infty)$.

4088. Naći: $\int\limits_c xdy+\frac{y}{1+x}dx$, kad x varira od $x=0$ do $x=4$ duž krive $y=2\sqrt{x}-x$.

4089. Naći površinu onog dela omotača cilindra $x^2+y^2=1$ koji se nalazi između ravni $z=4y$ i $z=2y$.

4090. Naći površinu kružnog cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni Oxy i površi $z=R+\frac{x^2}{R}$.

4091. Naći površinu eliptičnog cilindra $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ ograničenu ravnima $z=y$ i $z=0$.

4092. Izračunati površinu paraboličkog cilindra $y^2=2px$ između ravni Oxy, $z=y$ i $x=\frac{8}{9}p$.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

4093. $\int\limits_c (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, gde je c deo krive $y=1-|1-x|$ između tačaka $x=0$ i $x=2$.

4094. $\int\limits_c \frac{xdy-ydx}{x+y}$, ako je c kontura trougla, koji obrazuje prava $x+y=1$ sa koordinatnim osama.

4095. $\int\limits_c x^3dy-y^3dx$, po konturi kruga $x^2+y^2=r^2$.

4096. $\int\limits_c xy\left[\left(\frac{x}{2}+y\right)dy-\left(x+\frac{y}{2}\right)dx\right]$, po krugu $x^2+y^2=1$.

4097. $\int\limits_c (x^2+y^2)dx$, gde je kriva integracije gornji deo kruga $(x-1)^2+y^2=1$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(2, 0)$.

4098. $\int\limits_c xy\,dx+(x+y)\,dy$, gde je c zatvorena kontura koju obrazuju linije $y=0$, $x=1$ i $y=x^2$.

4099. $\int\limits_c y^2dx-x^2dy$, između tačaka $A(0,1)$ i $B(1,0)$: 1° po pravoj AB; 2° po luku kruga čiji je centar u koordinatnom početku a poluprečnik 1.

4100. $\int\limits_c xy\,dx$, ako je c luk parabole $x=y^2$ od tačke $(1,-1)$ do tačke $(1,1)$.

4101. $\int\limits_c 6x^2y\,dx+10xy^2dy$, gde je c luk krive $y=x^3$ od tačke $(1,1)$ do tačke $(2,8)$.

4102. $\int\limits_c 2xy\,dx+x^2dy$, od tačke $(0,0)$ do tačke $(1,1)$, ako je putanja c: 1° $y=x$; 2° $y=x^2$; 3° $x=y^2$; 4° $y=x^3$.

4103. $\int\limits_c y\,dx-x\,dy$, ako je c luk cikloide $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ od tačke $(0,0)$ do tačke $(4\pi,0)$.

4104. $\int\limits_c x\,dy-y\,dx$, gde je c petlja Descartesovog lista $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

4105. $\int\limits_c \dfrac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, ako je c luk astroide $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ od tačke $A(a,0)$ do tačke $B(0,a)$.

4106. $\int\limits_c x^3dx+3zy^2dy-x^2y\,dz$, gde je c deo prave od tačke $(3,2,1)$ do tačke $(0,0,0)$.

4107. $\int\limits_c z\,dx+x\,dy+y\,dz$, ako je c: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

4108. $\int\limits_c (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, ako je c trougao koji isecaju koordinatne ravni od ravni $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

4109. $\int\limits_c z^2dx+x^2dy+y^2dz$, gde je c kontura sfernog trougla koji isecaju koordinatne ravni na sferi $x^2+y^2+z^2=r^2$. $(x>0,\ y>0)$.

4110. 1° Na sferi $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z-22=0$ naći tačku M koja je najbliža pravoj zadatoj jednačinom $x-2y+2z-17=0$ i $7x+4y+$ $+2z-5=0$. 2° Ako sa P označimo ortogonalnu projekciju tačke M na datoj pravoj, izračunati vrednost integrala $\int\limits_c (y+z)\,dx+(x^2+2z)\,dy+$ $+(2x+y+z)\,dz$, uzetog duž odsečka MP.

4111. Odrediti rad koji izvrši sila teže F pri pomeranju mase m iz tačke $M_1\ (a_1, b_1, c_1)$ u tačku $M_2\,(a_2, b_2, c_2)$.

4112. Sila $F\{P, Q\}$, gde je $P=x-y$, $Q=x$ obrazuje polje. Izračunati rad potreban da jedinica mase obiđe konturu kvadrata $x=\pm a$ i $y=\pm a$.

4113. Date su tačke $A(-a, a)$ i $B(a, a)$. Odrediti silu kojom deluje masa M ravnomerno raspoređena na duži AB, na masu m koja je skoncentrisana u tački $O(0, 0)$.

4114. Odrediti silu kojom masa M ravnomerno raspoređena po gornjem delu kruga $x^2+y^2=a^2$, privlači masu m skoncentrisanu u koordinatnom početku.

Naći funkcije čiji je totalni diferencijal:

4115. $(e^y+x)\,dx+(xe^y-2y)\,dy$.

4116. $(2xyz+\ln y)\,dx+\left(x^2y+\dfrac{x}{y}\right)dx+(x^2y-2z)dz$.

Izračunati sledeće integrale:

4117. $\int\limits_c x\,dy+y\,dx$, gde je c deo krive $x^5+y^9+x^2y^2-6y+3x=0$ između tačaka $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

4118. $\oint\limits_c xy^2\,dy-x^2y\,dx$, ako je c kontura kruga $x^2+y^2=a^2$.

4119. $\oint\limits_c (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, ako je c elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4120. $\int\limits_c (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$, ako je c gornji deo kruga $x^2+y^2=ax$ od tačke $(a, 0)$ do tačke $(0, 0)$.

4121. Integral $\int\limits_c \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ uzet po krugu $x^2+y^2=a^2$ iznosi 2π. No, kako je u ovom slučaju $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, trebalo bi očekivati da je vrednost integrala jednaka nuli. Kako se tumači ovaj slučaj?

§ 3. Diferencijalne jednačine

Obična diferencijalna jednačina n-tog reda zove se jednačina oblika:

(1) $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0,$$

u kojoj figuriše nepoznata funkcija $y=f(x)$ i njenih n izvoda. Funkcija $y=f(x)$ koja zadovoljava tu jednačinu zove se *integral* ili *rešenje* jednačine. Kriva koja odgovara tom integralu zove se *integralna kriva*. Funkcija y, definisana jednačinom

(2) $$\varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0,$$

u kojoj figuriše n proizvoljnih konstanti c_i, a koja zadovoljava jednačinu (1), zove se *opšti integral jednačine*. Rešenja koja se dobijaju iz opšteg rešenja dajući konstantama c_i konkretne vrednosti, zovu se *partikularna rešenja* ili *partikularni integrali*.

4122. Naći diferencijalnu jednačinu čiji je opšti integral $y=ce^{\sqrt{x^2-1}}$.

Naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina:

4123. $yy'-x=0$. **4124.** $y=1+y'^2$. **4125.** $\frac{x}{y}=\frac{y'}{x+1}$.

4126. $y'^2+y^2-1=0$. **4127.** $x+xy+y'(y+xy)=0$.

4128. $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0$. **4129.** $y\sqrt{1-x^2}dy+x\sqrt{1-y^2}dx=0$.

4130. $2st^2s'=1+t^2$. **4131.** $y'=-2\sqrt{|y|}$.

Naći opšti i partikularni integral za date početne uslove sledećih jednačina:

4132. $2\sqrt{x}dy=ydx, \quad y(4)=1$. **4133.** $e^y(y'+1)=1, \quad y(0)=\ln 2$.

4134. $y'\sin x=y\ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

4135. Naći ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y-xy'=a(1+x^2y')$ koje zadovoljava uslov $y(1)=1$.

4136. Napisati jednačinu krive koja prolazi kroz tačku $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ i kod koje je koeficijent pravca tangente, u svakoj tački, tri puta veći od koeficijenta pravca radijusa vektora te tačke.

4137. Pri malim količinama radioaktivne materije, može se smatrati da je brzina raspadanja upravo proporcionalna količini radioaktivne materije. Naći masu radioaktivne materije u funkciji vremena.

4138. Naći familiju krivih kod kojih je suptangenta konstantna i jednaka a.

4139. Naći funkciju $y=f(x)$ kod koje je srednja vrednost u intervalu $[0, x]$ proporcionalna s vrednošću x na kraju intervala.

Rešiti sledeće jednačine svođenjem na jednačine koje razdvajaju promenljive zamenom tražene funkcije.

4140. $y(1+xy)\,dx+x(1-xy)\,dy=0.$

4141. $(x^2-y^4)y'-xy=0.$

4142. $y'=\frac{y}{x}+x^{\alpha}f\left(\frac{y}{x}\right).$

4143. $y'=f(x)g\left(\frac{y-b}{x-a}\right)+\frac{y-b}{x-a}.$

4144. Temperatura nekog tela opadne u toku 20 min. od 100° na 60°. Temperatura okolnog vazduha iznosi 25°. Kroz koliko će vremena od momenta početka hlađenja tela njegova temperatura spasti na 30°?

4145. U cilindričnom sudu zapremine $V_0=0{,}1\ \mathrm{m}^3$ zatvoren je vazduh koji se adiabatski sabija na zapreminu $V_1=0{,}01\ \mathrm{m}^3$. Izračunati rad sabijanja.

4146. Vodonik se širi pri konstantnoj temperaturi od svoje prvobitne zapremine V_0, imajući početni pritisak p_0, uz neki spoljni pritisak koji se beskonačno malo razlikuje od pritiska gasa. Naći rad koji izvrši vodonik.

4147. Na rastojanju a jedan od drugoga u tačkama A i B stacionirana su dva jednaka ali suprotnog znaka električna naboja $+q$ i $-q$. Uzimajući tačku A za koordinatni početak i orijentišući osu Ox po liniji AB, formirati jednačinu familije ekvipotencijalnih linija električnog polja, koje prouzrokuju navedeni naboji.

4148. Raketa je ispaljena vertikalno uvis sa početnom brzinom $v_0=100$ m/sec. Otpor vazduha usporava njeno kretanje, saopštavajući raketi negativno ubrzanje, koje iznosi $-kv^2$, gde je v trenutna brzina a k aerodinamički koeficijent. Odrediti vreme kretanja rakete do maksimalnog položaja.

4149. Kroz sud zapremine a litara, napunjen vodenim rastvorom neke soli, neprestano protiče tečnost, pri čemu u jedinici vremena uđe b litara čiste vode a izađe isto tolika količina rastvora.

4150. U kulturi pivskog kvasa brzina priraštaja fermenta koji dejstvuje proporcionalna je njegovoj početnoj količini x. Početna količina fermenta iznosila je a. Nakon jednog časa ta količina se udvostručila. Koliko puta će se ona povećati nakon tri časa?

Diferencijalna jednačina prvog reda oblika $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ se naziva *homogena jednačina.*

Smenom $\frac{y}{x}=u$ ona se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

4151. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}.$

4152. $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}-\frac{t}{s}.$

4153. $x^2+y^2-2xyy'=0.$

4154. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$

4155. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$

4156. $xy'=y\ln\frac{y}{x}.$

4157. $1+e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)y'=0.$

4158. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$

Pokazati da se sledeće jednačine podesno izabranom smenom svode na homogenu jednačinu i naći njihovo opšte rešenje.

4159. $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}.$

4160. $(2x-4y+6)\,dx+(x+4-3)\,dy=0.$

4161. $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0.$

4162. $x-y-1+(y-x+2)y'=0.$

4163. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

4164. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}.$

4165. Naći krive kod kojih je rastojanje tangente od koordinatnog početka jednako apscisi dodirne tačke.

4166. Tačka M krive c projektuje se na y osu u tačku Q, a normala u tački M seče x osu u tački N. Odrediti krive (c) tako da prave OM i QN zaklapaju prav ugao, a zatim naći onu od krivih c koja prolazi kroz tačku (2, 0).

Diferencijalna jednačina oblika $y'+p(x)y=q(x)$ zove se *linearna jednačina* i njeno opšte rešenje je:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int qe^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Rešiti sledeće jednačine:

4167. $y'+y+x=0.$

4168. $y'-y=e^x.$

4169. $y'+\frac{y}{1+x}+x^2=0.$

4170. $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}.$

4171. $y'+y\cos x=\sin x\cos x.$

4172. $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3.$

4173. $tds-2\,sdt=t^3\ln t\,dt.$

4174. $dx+(e^y-x)\,dy=0.$

4175. $(1+y^2)\,dx+(xy+1)\,dy=0.$

4176. Naći onu integralnu krivu diferencijalne jednačine

$(1-x^2)y'+xy-1=0$ koja prolazi kroz tačku (0, 1).

4177. Naći onu integralnu krivu diferencijalne jednačine $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ koja prolazi kroz tačku $(1, -1)$.

4178. Dokazati da linearna jednačina

$$y' = ky + f(x),$$

gde je k konstanta različita od nule, a $f(x)$ periodična funkcija sa periodom ω, ima jedno partikularno rešenje, periodično sa tom istom periodom, i naći to rešenje.

4179. Pokazati da će jedno od rešenja jednačine

$$y' + ky = kq(x) \qquad (0 < x < \infty),$$

gde je k konstantan broj, biti funkcija

$$y = k \int_0^\infty q(x-t) e^{-kt}\, dt.$$

4180. Naći opšte rešenje homogene linearne jednačine

$$y' + p(x) y = 0,$$

koristeći se njenim svođenjem na jednačinu sa konstantnim koeficijentom uz y pomoću odgovarajuće zamene nezavisno promenljive $t = \varphi(x)$.

4181. Opšte rešenje linearne jednačine ima oblik $y = A(x) C + B(x)$. Dokazati obrnuto: diferencijalna jednačina svake familije krivih tog oblika je linearna jednačina.

4182. Naći rešenje linearne jednačine:

$$\frac{dx}{dt} = x \sin \frac{1}{\lambda^2} + \lambda, \quad x(0) = 0,$$

i ispitati postoji li granica tog rešenja kada $\lambda \to 0$.

4183. Pokazati da samo jedno rešenje jednačine $xy' - (2x^2 + 1) y = x^2$ teži konačnoj vrednosti kada $x \to \infty$, i naći to rešenje.

Sledeće jednačine svesti na linearne pomoću zamene tražene funkcije:

4184. $A(x) \varphi'(y) y' + B(x) \varphi(y) + C(x) = 0.$

4185. $y^{m-1} y' + p(x) y^m = q(x).$

4186. $y' + p(x) = q(x) e^{mx}.$

4187. $a \varphi'(y) y' + p(x) \varphi(y) = q(x).$

4188. Pogoditi partikularno rešenje linearne jednačine

$$y' + y \varphi'(x) = \varphi(x) \varphi'(x),$$

i naći njeno opšte rešenje.

4189. Pokazati da će jedno od rešenja jednačine

$$xy' - xy + 1 = 0, \qquad (x > 0)$$

biti

$$y = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\, dt.$$

4190. Odrediti krive kod kojih je odsečak tangente na ordinatnoj osi jednak subnormali dodirne tačke.

4191. Naći krive koje imaju osobinu da im tangenta u svakoj tački obrazuje sa koordinatnim osama i ordinatom tačke dodira trapez konstantne površine a^2. Između tih krivih naći onu koja prolazi kroz tačku (a, a).

4192. Ako je: R — otpor, L — koeficijenat samoindukcije, a U — napon nekog električnog kola, onda njegova jednačina dinamičke ravnoteže glasi:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U.$$

Naći struju u funkciji od vremena t, ako je za $t = 0$ i $i = i_0$.

Diferencijalna jednačina prvog reda oblika $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^\alpha$, gde je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$ naziva se *Bernulijeva jednačina*. Ona se može svesti na linearnu jednačinu smenom $z = y^{1-\alpha}$. Takođe se može integraliti neposredno smenom $y = uv$.

Rešiti sledeće jednačine:

4193. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$

4194. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0.$

4195. $y^{n-1}(ay' + y) = x.$

4196. $x\,dx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy.$

4197. $xy' + y = y^2 \ln x.$

4198. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0.$

4199. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

4200. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$

4201. $y\,dy - \dfrac{ay^2}{x^2}dx = \dfrac{b\,dx}{x^2}.$

4202. $y' = \dfrac{2x}{x^2\cos y + a\sin 2\varphi}.$

4203. $y' = \dfrac{y\varphi'(x) - y^2}{\varphi(x)}$, gde je $\varphi(x)$ data funkcija.

4204. Zamenom tražene funkcije svesti na Bernulijevu jednačinu

$$y' + [y^2 - \varphi^2(x)]\,f(x) - \varphi'(x) = 0.$$

4205. Tangenta u proizvoljnoj tački M krive c seče y osu u tački N. Odrediti krive c tako da se odsečci MN vide iz tačke $(a, 0)$ pod pravim uglom.

4206. Naći familiju krivih c takvu da tangenta povučena u proizvoljnoj tački krivih odseca na ordinatnoj ili apscisnoj osi odsečak:

1° proporcionalan ordinati (ili apscisi) tačke dodira;

2° proporcionalan kubu ordinate (ili apscise) tačke dodira.

4207. Naći familiju krivih kod kojih je u svakoj tački zbir dužine normale i subnormale jednak jedinici, a zatim naći onu krivu koja prolazi kroz tačku (0, 0).

4208. Naći familiju krivih, c, zadatih jednačinom i oblika $\rho = f(\varphi)$ kod kojih je površina sektora ograničena tim krivama i radijusima neke fiksne tačke (ρ_0, φ_0) i neke promenljive tačke (ρ, φ) tih krivih, proporcionalna proizvodu koordinata pokretne tačke ρ i φ. Koeficijenat proporcionalnosti je k.

Diferencijalna jednačina oblika $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, gde je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ zove se *jednačina totalnog diferencijala.* Njen opšti integral glasi:

$$c = \int P\,dx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx \right] dy.$$

Naći opšta rešenja sledećih jednačina:

4209. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x}\,dy = 0.$

4210. $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2 y)\,dy = 0.$

4211. $xy' \cos y + \sin y = 0.$

4212. $\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

4213. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2 y)\,dy = 0.$

4214. $\frac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx.$

4215. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$

4216. $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0.$

4217. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$

4218. $\frac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \sin y\,dy = 0.$

4219. $\left(\frac{1}{y} \sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos\frac{y}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0.$

4220. Od svih integralnih krivih zadatih diferencijalnom jednačinom $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})\,dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})\,y\,dy = 0$ izdvojiti onu koja prolazi kroz tačku (0, 1).

4221. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{2xy+1}{y-x^2}$ a zatim odrediti onu integralnu krivu koja seče pravu $y=-2$ pod uglom od 45°.

4222. Data je diferencijalna jednačina

$$(x^3-1)\,y' = 2xy^2 - x^2y - 1.$$

1° Odrediti njen partikularni integral u obliku $y_1 = ax+b$ pa zatim naći njen opšti integral stavljajući

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

2° Naći partikularni integral $y=\varphi(x)$ date jednačine koje za $x=0$ uzima vrednost $y = -\frac{1}{4}$.

4223. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' + \frac{x}{y} = 1,$$

stavljajući $y=ux$ ili $x=uy$. Pokazati da su tako dobijena opšta rešenja ekvivalentna i naći vezu između integracionih konstanti.

4224. Pokazati da jednačina

$$(x^2+x)\,y' + y^2 + (1-2x)\,y - 2x = 0,$$

ima partikularno rešenje oblika $y_1 = k$ gde je k konstanta koju treba odrediti, a zatim smenom $y = y_1 + \frac{1}{z}$ naći njeno opšte rešenje. Pokazati da sve integralne krive prolaze kroz dve stalne tačke.

4225. Pokazati da integralne krive jednačine

$$(4y-3x-5)\,y' - 3y + 7x + 2 = 0$$

čine jednu familiju zatvorenih krivih. Pokazati da su integralne krive simetrične u odnosu na pravu $y=1$.

4226. Integraliti jednačinu

$$(x^2+2xy-y^2)\,dx + (y^2+2xy-x^2)\,dy = 0$$

i izdvojiti integralnu krivu, koja prolazi kroz tačke: 1° (2, 2); 2° (1, −1); 3° (0, 0).

4227. Naći skup tačaka takvih da se svake dve integralne krive jednačine

$$xy'^2 - yy' + 1 = 0$$

koje prolaze kroz te tačke seku: 1° pod pravim uglom; 2° pod uglom od 45°.

4228. Naći diferencijalnu jednačinu čije je opšte rešenje $y = c_1(x - c_2)^2$.

4229. Odrediti parametar k tako da funkcija $y = x^k$ bude partikularno rešenje diferencijalne jednačine $6x^2y'' + 5xy' - 2y = 0$.

Diferencijalna jednačina oblika $y^{(n)} = f(x)$ rešava se n-puta uzastopno integracijom (posle svake integracije na desnoj strani se dopiše proizvoljna konstanta).

Naći opšte rešenje jednačina:

4230. $y'' = xe^x$.

4231. $y''' = \sin x$.

4232. Naći ono rešenje diferencijalne jednačine $y'' = 4\sin 2x$ koje zadovoljava početne uslove $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$.

Diferencijalna jednačina drugog reda oblika $f(x, y', y'') = 0$ svodi se smenom $y' = p$, na jednačinu prvog reda oblika $f(x, p, p') = 0$.

Rešiti sledeće jednačine:

4233. $y'^2 = y''$.

4234. $(1 - x^2)y'' - xy' - 2 = 0$.

4235. $y'' + y'\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$.

4236. $y'' + y' + x = 0$.

4237. $(1 + x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$.

Diferencijalna jednačina drugog reda oblika $f(y, y', y'') = 0$ svodi se smenom $y' = p$, odakle je $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, na jednačinu prvog reda $f\left(y, p, p\dfrac{dp}{dy}\right) = 0$.

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

4238. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

4239. $y'' + 2yy'^3 = 0$.

4240. $y'' \sin y = 2y'^2 \cos y$.

4241. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.

4242. $2yy'' - 3y'^2 - 4y^2 = 0$.

4243. $3yy'' - 5y'^2 = 0$.

4244. Naći integralnu krivu koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $yy'' + y'^2 = 0$, prolazi kroz koordinatni početak a koeficijenat pravca tangente u proizvoljnoj tački krive je jednak recipročnoj vrednosti ordinate te tačke.

Jednačina oblika $y'' + ay' + by = 0$, gde su a i b konstante, ima partikularni integral oblika $y = e^{rx}$ (r je konstanta koja se određuje iz uslova da funkcija $y = e^{rx}$ zadovoljava jednačinu). Partikularnim, linearno nezavisnim integralima y_1 i y_2 odgovara opšti integral:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Rešiti sledeće jednačine:

4245. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

4246. $y'' - 2y' + y = 0$.

4247. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

4248. $y'' + 2y' + 3y = 0$.

4249. $y'' + 4y = 0$.

4250. $y''' - 8y = 0$.

4251. $y''' + y = 0$.

4252. Naći partikularni integral jednačine: $y^{IV}-a^4y=0$ za sledeće početne uslove: $y(0)=0$, $y'(0)=0$; $y''(l)=0$; $y'''(l)=b$.

4253. U jednačini $y''+2y'+(\lambda^2+1)y=0$ odrediti vrednost parametra λ tako da jednačina ima rešenja koja se anuliraju u tačkama 0 i 2π i još u samo dvema tačkama između 0 i 2π.

4254. Kretanje materijalne tačke mase m duž x ose pod uticajem elastične sile kx, gde je k pozitivna konstanta, i trenja rx ($r=\text{const}$), zove se slobodno oscilatorno kretanje. Jednačina tog kretanja glasi:

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0.$$

Naći opšte rešenje za razne vrednosti konstanata m, r i k.

4255. Naći vezu između puta x i vremena t, oscilatornog kretanja materijalne tačke mase $m=1$ koja se kreće pod dejstvom elastične sile $-\omega x$ bez trenja; ako je u početnom trenutku $t=0$ tačka bila u položaju $x=1$.

Opšti integral y, nehomogene jednačine sa konstantnim koeficijentima:

$$y''+ay'+by=f(x)$$

može se dobiti ako se zna partikularni integral y_p na sledeći način: $y=y_h+y_p$, gde je y_h opšti integral homogenog dela: $y''+ay'+by=0$. Ako je $f(x)$ polinom ili funkcija oblika $e^{mx}(a\cos nx+b\sin nx)$ ili zbir polinoma i te funkcije, partikularni integral y_p ima isti oblik kao $f(x)$ sa izuzecima: a) $f(x)$ — polinom a $r=0$ koren karakteristične jednačine k-tog reda i b) $f(x)=e^{mx}(a\cos nx+b\sin nx)$ a $r=m\pm in$ koren karakteristične jednačine reda k. U tim slučajevima y_p se razlikuje od $f(x)$ ne samo koeficijentima, nego i faktorima x^k.

Naći opšti integral sledećih jednačina:

4256. $y''-5y'+6y=x$.

4257. $y''+2y=x^2+2$.

4258. $y''-y=x^2+1$.

4259. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+2s=2t^3-2$.

4260. $y'''+y'=x^4$.

4261. $y''-2y'+y=e^{2x}$.

4262. $y''-a^2y=e^{bx}$.

4263. $y''-3y'+2y=e^{3x}$.

4264. $y''-3y'+2y=e^x$.

4265. $y''+y=e^{-x}+2$.

4266. $y''+y'-2y=(x^2-1)e^{2x}$.

4267. $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$.

4268. $y'''-y''=xe^x$.

4269. $y'''+y''=x^2+1+3e^x$.

4270. $y''+y=\sin 2x$.

4271. $y''+y=\sin x$.

4272. $y''+y=xe^x\cos x$.

4273. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+2(\lambda-1)y'+(\lambda^2+\lambda-1)y=(3\lambda-2)\cos\lambda x$ za razne vrednosti parametra λ.

4274. Jednačina oscilatornog kretanja, tj. kretanja materijalne tačke mase m po x osi pod dejstvom: sile kx, trenja $r\dot{x}$ i neke spoljašnje sile koja zavisi od vremena t, $f(t)$ glasi: $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=f(t)$. Napisati jednačinu kretanja materijalne tačke mase m pod dejstvom sile k^2x bez trenja i pod uticajem spoljašnje periodične sile $f(t)=2k\sin kt$. Rešiti tu jednačinu.

4275. Materijalna tačka mase $m=1$ kreće se po x osi pod dejstvom stalne sile čiji je pravac pravac x ose pri trenju koje je jednako brzini kretanja. Naći zakon kretanja ako je $x(0)=0$ i $v(0)=0$.

Naći opšti integral sledećih jednačina:

4276. $xy''+2y'+xy=0$, smenom $y=u\dfrac{\sin x}{x}$, $(u=\varphi(x)$.

4277. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$, smenom $y=ux$.

4278. $y''+(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)y'+2\operatorname{ctg}^2x\cdot y=0$, smenom $y=u\sin x$.

4279. $xy''+2y'-xy=0$, smenom $y=u\dfrac{e^x}{x}$.

4280. Data je diferencijalna jednačina $xyy''+xy'^2=yy'$. Koristeći smenu $z=yy'$ naći najpre njeno opšte rešenje, a zatim odrediti onu od integralnih krivih koja prolazi kroz tačke (2, 0) i (0, 1) i izračunati njom ograničenu površinu.

4281. Odrediti krive kod kojih je poluprečnik krivine dva puta veći od dužine normale u proizvoljnoj tački. Mogu li se odrediti krive kod kojih poluprečnik krivine i dužine normale stoji u ma kakvoj linearnoj vezi?

4282. U intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ odrediti krivu koja dodiruje x-osu u koordinatnom početku ako joj je poluprečnik krivine u svakoj tački $r=\dfrac{1}{\cos x}$.

§ 4. Račun verovatnoće

1° Osnovni pojmovi i definicije

U računu verovatnoće pojmovi *opit* i *događaj* ne definišu se. Svaki opit završava se nekim ishodom ili događajem. Događaji se obeležavaju latinskim slovima $A, B, C, \ldots$ Ako neki opit a priori izaziva pojavu događaja A, onda se taj događaj naziva *pouzdan*. Ako se događaj A sigurno ne realizuje datim opitom onda se on naziva *nemoguć*. Događaj se naziva *slučajan* ako se on može, a ne mora, pojaviti kao rezultat nekog opita. Sve pouzdane događaje obeležavaćemo slovom U, a sve nemoguće slovom V.

Zbir (unija) dva događaja A i B naziva se događaj $A+B$ (ili $A\cup B$), koji se sastoji u tome da se realizuje bilo koji od njih (tj. bilo A, bilo B, bilo A i B). Sa $A-B$ obeležavaćemo događaj koji se sastoji u realizaciji jednog i samo jednog od tih događaja. *Proizvod (presek)* AB (ili $A\cap B$) dva događaja naziva se događaj koji se sastoji u tome da se događaji A i B pojavljuju skupa. Ako se pojavom događaja B uvek realizuje i događaj A onda se piše $A\subset B$ i čita, A povlači B, ili A je specijalan slučaj događaja B. Događaji A i B nazivaju se *nespojivi* ako je $AB=V$. Događaji A i $\bar{A}$ nazivaju se *suprotni (komplementarni)*, ako je $A\bar{A}=V$ i $A+\bar{A}=U$. Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ obrazuju *potpunu grupu događaja* ako je $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$ i $A_iA_j=V$, $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$ $(i\neq j)$.

2° Klasična definicija verovatnoće

Neka je kao rezultat opita moguća realizacija samo n nespojivih i jednako mogućih ishoda $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Neka događaj B predstavlja m između njih određenih događaja, tj. $B = A_{i_1} + A_{i_2} + A_{i_m}$. Tada je $P(B) = \frac{m}{n}$.

Sem klasične *Laplaceove* definicije verovatnoće uvodi se još i statistička definicija verovatnoće.

4283. Neka su A, B, i C slučajni događaji. Objasniti smisao jednakosti:

$$1^\circ \quad ABC = A; \qquad 2^\circ \quad A + B + C = A.$$

4284. Iz tablice slučajnih brojeva nasumice se ispisuju dva broja. Neka A označava događaj da je jedan od tih brojeva prost a B da je jedan od njih paran. Šta predstavljaju događaji AB i $A+B$?

4285. Dokazati da je: $1^\circ \quad \overline{AB} = A + B; \quad 2^\circ \quad \overline{\overline{C} + \overline{D}} = CD.$

4286. Odrediti slučajnu veličinu X polazeći od jednačine $AX = AB$.

4287. Šta predstavljaju događaji $A + A$ i AA?

4288. Meta se sastoji iz deset koncentričnih krugova čiji su poluprečnici $r_k (k = 1, 2, \ldots, 10)$ pri čemu je $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Događaj A_k označava pogodak u krug $r_k (k = 1, 2, \ldots, r_{10})$. Šta znače događaji

$$B = \sum_{k=1}^{6} A_k \quad \text{i} \quad C = \prod_{k=5}^{10} A_k?$$

4289. Kvadrat D sadrži dve oblasti D_1 i D_2 čije su površine S_1 i S_2. U D je bačena tačka koja može da padne u bilo koji deo kvadrata sa podjednakom verovatnoćom. Neka događaj A_k znači padanje tačke u oblast $D_k (k = 1, 2)$. Da li su jednako mogući događaji A_1 i A_2?

4290. Neka je jedan koji bilo od tri aparata koji se proveravaju neispravan i neka je to događaj A. Događaj B znači da je aparat ispravan. Šta predstavljaju događaji $A + B$ i AB?

4291. Iz tablice slučajnih brojeva uzet je nasumice jedan broj. Ako je izabrani broj deljiv sa 5 onda je to događaj A; ako se taj broj završava nulom onda je to događaj B. Šta znači događaj $A \backslash B$?

4292. Ako je koji bilo od četiri proizvoda škart onda je to događaj A, ako su ne manje od dva proizvoda škart onda je to događaj B. Šta znače suprotni događaji $\overline{A}$ i $\overline{B}$?

4293. Ako su A, B i C slučajni događaji uprostiti izraze:

$$1^\circ \ (A+B)(B+C); \quad 2^\circ \ (A+B)(A+\overline{B}); \quad 3^\circ \ (A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B).$$

4294. Kada su moguće jednakosti:

$$1^\circ \ A + B = \overline{A}; \quad 2^\circ \ AB = \overline{A}; \quad 3^\circ \ A + B = AB?$$

4295. Naći slučajni događaj X, kada je

$$\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B.$$

4296. Dokazati da je $\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{AB}=\overline{AB}$.

4297. Da li su spojivi događaji

$$A \quad \text{i} \quad \overline{A+B+C}?$$

4298. Dokazati da događaji

$$A, \ \overline{AB} \quad \text{i} \quad \overline{A+B}$$

obrazuju potpunu grupu događaja.

4299. Dvojica šahista igraju jednu partiju. Ako partiju dobije prvi igrač onda je to događaj A, ako nadigra drugi igrač to je događaj B. Kakav događaj treba dodati navedenom skupu događaja da bi dobili potpunu grupu događaja.

4300. Odrediti slučajni događaj X ako je:

1° $A+X=A+B$; 2° $AB+X=(A+C)(B+C)$.

4301. Između studenata koji prisustvuju času iz teorije verovatnoće, izabiramo jednoga od njih nasumice. Neka događaj A znači da je izabrani student mladić. Dalje, neka događaj B znači da on ne puši, a događaj C da stanuje u studentskom domu.

1° Opisati događaj $AB\overline{C}$.

2° Pod kojim uslovima važi identitet $ABC=A$?

3° Kada će biti ispravna relacija $\overline{C}\leqslant B$?

4° Objasniti kada nastupa jednakost $\overline{A}=B$, i da li ona nastupa kada svi prisutni momci ne puše?

4302. Dokazati da su za proizvoljne događaje A i B relacije: $A\subset B$; $\overline{A}\supset\overline{B}$; $A+B=B$; $A\overline{B}=V$ ekvivalentne.

4303. Dokazati da iz $A\cdot B=C\cdot D$ sledi da je $A\cdot C=B\cdot C$.

4304. Pokazati da $\overline{(A+B)}C=\overline{A}C+\overline{B}C$ važi tada i samo tada kada je $AC=BC$.

4305. Neka je $A\subset B$. Uprostiti izraze:

1° AB; 2° $A+B$; 3° ABC; 4° $A+B+C$.

4306. Dokazati da su događaji

1° $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$ i 2° $(A+B)(\overline{A}+B)+(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$

pouzdani.

4307. Pokazati da je događaj

$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

nemoguć.

4308. Radnik je proizveo n artikala. Uzmimo da događaj A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ znači da je i-ti artikal koji je proizveo neispravan. Ispisati sledeće događaje:

1° da su svi proizvodi ispravni;

2° da je bilo koji proizvod neispravan;

3° da je samo jedan proizvod neispravan;

4° da su najviše dva proizvoda neispravna;

5° da su makar dva proizvoda bez defekta;

6° da su tačno dva proizvoda neispravna.

4309. U kutiji se nalazi deset kuglica: tri bele i sedam crnih. Iz kutije se nasumice izvlači jedna kuglica. Odrediti verovatnoću da će izvučena kuglica biti: 1° bela; 2° crna.

4310. Kocka, čije su sve površi obojene izdeljena je na hiljadu kocaka jednakih dimenzija. Tako dobijene kocke su dobro izmešane. Odrediti verovatnoću da će kocka, izvučena nasumice, imati dve površi obojene.

4311. Odrediti verovatnoću da su zadnje dve cifre trećeg stepena nasumice uzetog celog broja N jedinice.

4312. U partiji od n proizvoda ima k defektnih komada. Odrediti verovatnoću da će među m nasumice uzetih proizvoda l njih biti neispravno.

4313. Iz kompletnog skupa domina nasumice je uzeto pet komada. Naći verovatnoću da će među njima biti makar jedna sa šesticom.

4314. Puštena je u prodaju lutrija čija ukupna vrednost srećaka iznosi n dinara. Cena jedne srećke je r dinara. Ceo iznos dobiti vezan je za m srećaka. Naći verovatnoću iznosa dobiti na jednu srećku.

4315. Iz jedne partije proizvoda, među kojima ima n ispravnih i m neispravnih, kontrole radi uzeto je s primeraka. Evidentiranjem je konstatovano da je prvih k od s uzetih primeraka ispravno. Odrediti verovatnoću da će i sledeći primerak biti ispravan.

4316. Odrediti verovatnoću da će se za nasumice uzet ceo broj N završavati jedinicom njegovi: 1° kvadrat; 2° četvrti stepen; 3° broj dobijen množenjem tog broja sa proizvoljnim celim brojem.

4317. Deset knjiga na nekoj polici poređane su nasumice. Naći verovatnoću da će se pri takvom razmeštaju četiri određene knjige naći skupa.

4318. Dato je pet duži, čije su dužine respektivno 1, 3, 5, 7 i 9. Naći verovatnoću da će se od tri nasumice uzete duži moći konstruisati trougao.

4319. Lutrija je pustila u prodaju $n+m$ srećaka od kojih samo n dobija. Ako je neko kupio k srećaka, naći verovatnoću da će među njima biti s komada koji dobijaju.

4320. U bloku od deset karata (ulaznica) ima pet karata po sto dinara, tri karte po tri stotine dinara i dve karte po pet stotina dinara. Ako se iz bloka izvuku na sreću tri karte, kolika je verovatnoća da će:

1° bar dve izvučene karte imati istu vrednost;

2° vrednost sve tri izvučene karte iznositi sedamstotina dinara.

4321. Iz kutije u kojoj se nalazi n novčanica izvučena je bar jedna novčanica. Odrediti verovatnoću da će biti izvučen paran broj novčanica, ako je podjednako moguće izvlačenje proizvoljnog broja novčanica iz datog skupa.

4322. Lutrija raspolaže sa n srećaka od kojih m njih dobijaju. Kolika je verovatnoća da će dobiti neko koje kupio k srećaka?

4323. Iz špila od 36 karata nasumice su izvučene tri karte. Naći verovatnoću da će među njima biti tačno jedan as.

4324. Iz špila od 36 karata nasumice su uzete tri karte. Naći verovatnoću da će među njima biti makar jedan as.

4325. Iz špila od 52 karte nasumice se izvlače tri karte. Naći verovatnoću da će te tri karte biti trojka, sedmica i as.

4326. Špil od 36 karata nasumice se podeli na dva jednaka dela. Kolika je verovatnoća da će u oba dela biti isti broj crvenih i crnih karata?

4327. Špil od 52 karte razdvojen je na četiri grupe od po 13 karata. Pretpostavlja se da je špil brižljivo izmešan, tako da je verovatnoća izvlačenja bilo koje karte jednaka. Pretpostavlja se dalje da je izvučeno šest karata. Opisati prostor elementarnih ishoda i:

1° Naći verovatnoću da će među izvučenim kartama biti kralj pik;

2° Naći verovatnoću da će među izvučenim kartama biti zastupljene sve boje;

3° Koliki je najmanji broj karata koji treba izvući iz špila, da bi verovatnoća, da će se među njima nalaziti koje bilo dve karte istog imena, bila veća od $\frac{1}{2}$?

3° Uslovna verovatnoća. Proizvod i zbir verovatnoća. Totalna verovatnoća.

1. Sa $P(A/B)$ obeležavamo *uslovnu verovatnoću* događaja A pod uslovom da se desio događaj B. Za nezavisne događaje je $P(A/B)=P(A)$; $P(B/A)=P(B)$.

2. Za proizvoljna dva događaja A i B je

$$P(AB)=P(A)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A/B).$$

3. Za proizvoljna dva događaja A i B je

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

4. Ako je $B=BA_1+BA_2+\ldots+BA_n$, a parovi događaja BA_i su nespojivi onda je

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i).$$

Ova formula naziva se *formula totalne verovatnoće*. Pod istim uslovom važi i *Bayesova formula*

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\,P(B/A_k)}.$$

4328. Pri povećanju napona za dva puta može, kao posledica, da dođe do prekida električnog kola usled ispadanja iz stroja jednog od tri uzastopno spojena elementa, respektivno sa verovatnoćama 0,3, 0,4 i 0,6. Odrediti verovatnoću da neće doći do prekida kola. Koliko će se izmeniti verovatnoća ako se ukloni prvi elemenat?

4329. Odrediti verovatnoću da će nasumice izabran proizvod biti prvoklasan, ako se zna, da su 4% proizvoda neispravna a samo 75% proizvoda zadovoljava uslove prvoklasnosti.

4330. Partija od stotinu proizvoda podvrgava se delimičnoj kontroli. Ako se pojavi makar jedan neispravan proizvod između pet proverenih onda se smatra da je cela partija proizvoda neupotrebljiva. Kolika je verovatnoća da će partija ispasti neupotrebljiva ako se zna da ona sadrži 5% neispravnih proizvoda?

4331. Lutrija raspolaže sa 1000 lozova; od svih lozova samo jedan dobija 500 hiljada, 10 lozova po 100 hiljada, 50 lozova po 20 hiljada, 100 lozova po 5 hiljada dinara, dok ostali lozovi ne dobijaju. Ako je neko kupio jedan loz, kolika je verovatnoća da će dobiti najmanje 20 hiljada?

4332. Dva strelca koji pogađaju metu respektivno sa verovatnoćama 0,7 i 0,8 ispaljuju po jedan metak. Odrediti verovatnoću da će cilj biti pogođen.

4333. Verovatnoća da će otkazati k-ti blok računske mašine u toku nekog vremena T iznosi $p_k\,(k=1, 2, \ldots, n)$. Odrediti verovatnoću da će za dati vremenski interval ispasti iz stroja makar jedan blok, ako blokovi nezavisno funkcionišu.

4334. Koliko se mora uzeti brojeva iz tablice slučajnih brojeva, da bi mogli biti ubeđeni sa verovatnoćom 0,9, da će se među njima nalaziti makar jedan paran broj?

4335. Čebiševljev problem. Naći verovatnoću da se nasumice napisan razlomak ne može skratiti.

4336. U kutiji se nalaze dve bele i tri crne kuglice. Iz kutije se izvlače uzastopce dve kuglice. Naći verovatnoću da će obe kuglice biti bele.

4337. Isti uslovi kao u prethodnom zadatku, ali se samo posle prvog vučenja kuglica vraća u kutiju.

4338. Pribor koji funkcioniše u toku vremena t sastavljen je iz tri dela, od kojih svaki, nezavisno jedan od drugoga, može da otkaže u navedenom vremenu. Ako otkaže bilo koji od tri dela onda ceo pribor prestaje da funkcioniše. Verovatnoće da u toku vremena t neće otkazati delovi iznose respektivno $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}7$. Naći pouzdanost celog pribora.

4339. Ako su događaji A i B nespojivi da li iz toga proističe da su oni nezavisni?

4340. Pokazati, ako je uslovna verovatnoća $P(A/B)$ veća od bezuslovne verovatnoće $P(A)$, da je onda i uslovna verovatnoća $P(B/A)$ veća od bezuslovne verovatnoće $P(B)$.

4341. Student je izašao na ispit znajući samo 20 od mogućih 25 pitanja. Ispitivač je dao studentu tri pitanja. Koristeći pojam uslovne verovatnoće, naći verovatnoću da će student znati sva tri pitanja. Odrediti tu istu verovatnoću koristeći klasičnu definiciju verovatnoće.

4342. Da bi našao jednu knjigu student je rešio da obiđe tri biblioteke. Jednaka je verovatnoća da se u svakoj od tih biblioteka nalazi ili ne nalazi knjiga. Ako knjiga postoji, onda je jednako verovatno da je izdata odnosno neizdata drugim čitaocima. Šta je više verovatno — da student nađe ili ne nađe knjigu, ako je poznato da se biblioteke kompletiraju nezavisno jedna od druge?

4343. Bacaju se tri kocke. Kolika je verovatnoća da će se bar na jednoj od njih pojaviti indeks jedan, ako su sve tri kocke pale na različite strane. Pretpostavlja se da su strane svake od kocaka numerisane brojevima od jedan do šest.

4344. Poznato je da se prilikom bacanja 10 kocki pojavila bar jedna jedinica. Koliko iznosi verovatnoća da su se pojavile dve ili više jedinica?

4345. Pomoću 6 karata, na kojima je ispisano po jedno slovo, sastavljena je reč „kareta". Karte se promešaju a zatim se nasumice izvlači po jedna od njih. Kolika je verovatnoća da će uzastopno izvučena slova obrazovati reč raketa?

4346. Dva aviona jedan za drugim bombarduju jedan isti cilj, bacajući u svakom navratu po jednu bombu. Svaki avion ima po tri bombe. Verovatnoća da prvi avion, bacajući jednu bombu, pogodi cilj je $p_1=0{,}3$; verovatnoća za drugi avion je $p_2=0{,}4$. Ako cilj pogodi jedna bomba on će biti uništen i bombardovanje prestaje. Naći verovatnoću da će cilj biti uništen pre nego sve bombe, kojima raspolažu avioni, budu utrošene.

4347. Neka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čine međusobom nezavisan skup događaja. Da li su uvek dati događaji nezavisni u celini, tj. da li je uvek uslovna verovatnoća da se realizuje proizvoljni događaj, izračunata uz pretpostavku da su se kakvi bilo događaji iz tog skupa desili, jednaka bezuslovnoj verovatnoći tog događaja?

4348. U skupu od $2n$ lica nalazi se isti broj muškaraca i žena. Mesta za stolom zauzimaju se po zakonu slučaja. Odrediti verovatnoću da dva lica istog pola neće sesti jedno do drugoga.

4349. U kutiji se nalazi n kuglica sa oznakom od 1 do n. Kuglice se izvlače nasumice bez vraćanja u kutiju. Kolika je verovatnoća da će se u k prvih izvlačenja redni broj kuglica poklapati sa rednim brojem izvlačenja?

4350. U kutiji se nalaze dve kuglice: bela i crna. Iz kutije sa izvlači po jedna kuglica sve dotle dok se ne pojavi crna, pri čemu se bela kuglica, ako se izvuče, vraća u kutiju i sem toga se dodaju još dve bele kuglice. Naći verovatnoću da u prvih 50 opita crna kuglica neće biti izvučena.

4351. Prilikom biranja dva kandidata za prvog je u glasačku kutiju spušteno n listića a za drugoga m, pri čemu je $n>m$. Kolika je verovatnoća da će pri izvlačenju iz kutije jednog po jednog listića broj glasova dat za prvog kandidata stalno biti veći od broja glasova datih za drugog kandidata.

4352. U redu za ulaznice, koje koštaju po 5 dinara, čeka $n+m$ ljudi, od kojih n njih imaju novčanice od 5 dinara a ostalih $m<n-1$ od 10 dinara. Svako lice kupuje samo po jednu kartu. Kolika je verovatnoća da se ni za jednog od njih neće postaviti pitanje kusura?

4353. Dokazati, da iz nezavisnosti po parovima događaja A, B, C, ne sledi njihova nezavisnost kao celine.

4354. Koristeći formulu $P(B)=P(A)P(B/A)+P(\bar{A})P(B/\bar{A})$, pokazati da iz nezavisnosti slučajnih događaja A i B sledi nezavisnost slučajnih događaja A i B.

4355. Odrediti verovatnoću, da će partija od sto proizvoda, među kojima je pet neispravnih, biti primljena pri ispitivanju nasumice uzete polovine cele partije, ako uslov prijema dopušta najviše jedan neispravan primerak na pedeset primeraka.

4356. Bombarduju se tri skladišta municije, pri čemu se baca samo jedna bomba. Verovatnoća da ona padne na prvo skladište iznosi 0,01, na drugo 0,008, na treće 0,025. Ako bomba padne na jedno od skladišta onda ona uništava sva tri. Naći verovatnoću da će skladišta biti uništena.

4357. Verovatnoća pojava događaja A, koji je jednako moguć u proizvoljnom intervalu T, iznosi p. Poznato je da se za vreme $t<T$ događaj nije desio. Odrediti verovatnoću P da će se događaj A desiti u ostatku vremenskog intervala.

4358. U jednu istu metu vrše se tri gađanja. Verovatnoća da će cilj biti pogođen pri prvom, drugom i trećem gađanju su respektivno $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}7$. Odrediti verovatnoću da će u tri gađanja biti samo jedan pogodak.

4359. Zadržavajući uslove prethodnog zadatka naći verovatnoću da će meta biti makar jedanput pogođena.

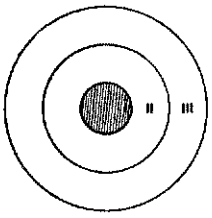
4360. Vodi se vazdušni dvoboj između lovca i bombardera. Prvi otvara vatru lovac, ispaljujući na bombardera jedan plotun, i obara ga sa verovatnoćom 0,2. Ako bombarder ne bude oboren on odgovara vatrom i obara lovca sa verovatnoćom 0,3. Ako lovac ne bude oboren, on nastavlja napad približavajući se još više bombarderu i obara ga sa verovatnoćom 0,4. Naći verovatnoću da će u vazdušnom dvoboju biti oboren: 1° bombarder; 2° lovac.

4361. Avion koji je izložen gađanju sastoji se iz tri dela različitih stepena osetljivosti. Da bi avion bio uništen dovoljan je jedan pogodak u prvi deo, ili dva pogotka u drugi, ili tri pogotka u treći deo. Uslovna verovatnoća da bude pogođen ma koji deo, pod uslovom da je avion pogođen, proporcionalna je površini te oblasti. Prvi, drugi i treći deo zauzimaju respektivno 0,1, 0,2, 0,7 od ukupne površine aviona. Pretpostavimo da su avion pogodile dve granate. Naći verovatnoću da će avion biti uništen.

4362. Uz uslove iz prethodnog zadatka naći verovatnoću da će avion biti uništen ako je pogođen sa tri granate.

4363. Da bi avion bio uništen prilikom eksplozije granate na nekom rastojanju od njega, neophodno je da se parčadima granate unište oba motora ili da se uništi pilot. Ako granata eksplodira na rastojanju r od aviona onda verovatnoća da će oba motora biti uništena iznosi 0,2; verovatnoća da će biti uništen pilot iznosi 0,3. Naći verovatnoću da će prilikom eksplozije granate avion biti izbačen iz stroja.

4364. Kružni cilj na sl. 42 sastoji se iz tri zone: I, II i III. Verovatnoća da se pogodi prva zona, pri jednom gađanju, iznosi 0,15, druga 0,23 a treća 0,17. Naći verovatnoću promašaja.



Sl. 42

4365. Radnik nadgleda tri razboja, koji rade nezavisno jedan od drugoga. Verovatnoća da u toku jednog časa neće biti potreban nadzor razboja, iznosi za prvi razboj 0,9, za drugi 0,8 i za treći 0,7. Naći verovatnoću da bar jednom razboju, u toku jednog časa, neće biti potrebna kontrola radnika.

4366. Iz kutije koja sadrži n belih, m crnih i l crvenih kuglica, izvlače se na sreću jedna po jedna kuglica: 1° bez vraćanja; 2° sa vraćanjem posle svakog izvlačenja. Odrediti, u oba slučaja, verovatnoću da će bela kuglica biti izvučena pre crne kuglice.

4367. Neko je napisao n pisama različitim osobama, zapečatio koverte, a zatim nasumice na njima ispisao različite adrese. Odrediti verovatnoću da će bar jedno pismo biti ispravno adresirano.

4368. Kao rezultat opita mogu da nastupe četiri događaja, respektivno sa verovatnoćama 0,012; 0,010; 0,006 i 0,002. Odrediti verovatnoću da će se kao rezultat opita realizovati koji bilo od tih događaja.

4369. U kvadrat koji je izdeljen na n^2 jednakih kvadrata, bačena je kuglica. Verovatnoća da će kuglica pasti u mali kvadrat i-te horizontalne i j-te vertikalne trake iznosi $p_{i,j}\left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j}=1\right)$. Odrediti verovatnoću da će kuglica pasti u k-tu horizontalnu traku.

4370. Kolika je verovatnoća da će iz špila od 52 karte biti izvučen kralj, dama ili žandarm proizvoljne boje ili karta crne boje.

4371. Poznate su verovatnoće događaja A i AB. Naći verovatnoću događaja $A\bar{B}$.

4372. Dokazati da iz uslova

$$P(B/A)=P(B/\bar{A})$$

sledi nezavisnost događaja A i B.

4373. Događaj A je specijalan slučaj događaja B. Dokazati da je $P(A)\leqslant P(B)$.

4374. Odrediti verovatnoću, da nasumice izabran ceo broj neće biti deljiv: 1° ni sa dva ni sa tri; 2° sa dva ili sa tri.

4375. Verovatnoća da se dobije numerisana karta, kod koje jednak zbir prve i zadnje tri cifre, iznosi 0,05525. Kolika je verovatnoća da će se među dve karte nalaziti takva jedna karta, ako obe karte: 1° imaju uzastopne indekse; 2° nezavisne su jedna od druge.

4376. Igrači a i b bacaju novčić. Prvi igrač dobija ako se pojavi grb pri prvom, drugom ili trećem bacanju. U protivnom slučaju dobija drugi igrač. Odrediti verovatnoću da će dobiti drugi igrač.

4377. Obeležena kuglica može se nalaziti u jednoj od dve kutije sa verovatnoćama p i $1-p$. Verovatnoća da se izvuče kuglica iz bilo koje kutije iznosi $P(p\neq 1)$. Na koji način treba izvlačiti prvih n puta iz koje bilo kutije, da verovatnoća izvlačenja obeležene kuglice bude najveća, ako se posle svakog izvlačenja kuglica vraća u kutiju?

4378. Na avion se ispaljuju tri pojedinačna hica. Verovatnoća da avion bude pogođen prvim hicem iznosi 0,4, drugim 0,5, trećim 0,7. Da bi avion bio izbačen iz stroja potrebna su tri pogotka; u slučaju jednog pogotka avion će biti izbačen iz stroja sa verovatnoćom 0,2 a u slučaju dva pogotka sa verovatnoćom 0,6. Naći verovatnoću da će kao ishod toga gađanja avion biti izbačen iz stroja.

4379. Tri aviona, jedan koji vodi i dva vođena, upućeni su da bombarduju neki objekat. Radionavigacioni uređaj, bez koga je nemoguće stići na cilj, ima samo vodeći avion. Kada stignu na cilj avioni vrše bombardovanje nezavisno jedan od drugoga. Verovatnoća da će bilo koji od njih razrušiti objekat iznosi 0,3. Pred sam dolazak na cilj avioni prolaze kroz zonu vazdušne odbrane protivnika, kada svaki od njih može biti oboren sa verovatnoćom 0,2. Naći verovatnoću da će objekat biti uništen.

4380. Date su dve partije istih proizvoda. Jedna od njih sadrži 12 a druga 10 komada, pri čemu obadve partije sadrže po jedan neispravan proizvod. Nasumice je uzet jedan proizvod iz prve partije i prebačen u drugu, a posle toga opet na sreću uzet jedan proizvod iz druge partije. Odrediti verovatnoću da je izvučeni proizvod iz druge partije neispravan.

4381. Iz kompletnog skupa domina na sreću su uzeta dva komada. Odrediti verovatnoću da će se te dve domine moći nadovezati jedna na drugu.

4382. Dato je n kutija a u svakoj od njih nalazi se po m belih i k crnih kuglica. Iz prve kutije nasumice se uzima jedna kuglica i prebacuje u drugu. Dalje se iz druge kutije nasumice izvlači jedna kuglica i prebacuje u treću kutiju itd. Odrediti verovatnoću da će posle takvog prebacivanja zadnje kutije biti izvučena bela kuglica.

4383. Date su tri kutije u kojima se nalaze bele i crne kuglice. Verovatnoća da se uzme crna kuglica iz prve kutije, iznosi 0,2, a iz druge i treće kutije 0,6. Iz kutije uzete nasumice izvučena je jedna kuglica. Naći verovatnoću da je ta kuglica bele boje. Odrediti verovatnoću da će biti dvaput izvučena bela kuglica iz jedne iste kutije, ako se posle svakog izvlačenja kuglica vraća u kutiju.

4384. Verovatnoća da će na telefonsku centralu prispeti k poziva za vreme t iznosi $P_t(k)$. Smatrajući da je broj telefonskih poziva u dva susedna vremenska intervala nezavisan, odrediti verovatnoću $P_{2t}(k)$ da za $2t$ prispe s poziva.

4385. Petnaest ispitnih ceduljica sadrže po dva pitanja koja se ne ponavljaju. Kandidat je naučio samo 25 pitanja. Odrediti verovatnoću da će kandidat položiti ako je za to dovoljan odgovor na dva pitanja sa jedne ceduljice ili na jedno pitanje sa prve izvučene ceduljice i na određeno dopunsko pitanje sa druge ceduljice.

4386. U kojim slučajevima je ispravna jednakost $P(A) = P(A/B) + P(A/\overline{B})$?

4387. U dve kutije, od kojih svaka sadrži po 10 kuglica, jedna kuglica je numerisana. Igrač ima pravo da uzastopno izvuče 20 kuglica iz proizvoljne kutije, vraćajući svaki put kuglicu nazad u istu kutiju iz koje je izvukao. Kako treba izvesti igru, da verovatnoća izvlačenja obeležene kuglice bude najveća, ako se numerisana kuglica nalazi u prvoj kutiji sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$? Čemu je jednaka ta verovatnoća?

4388. Radi predaje poruka pomoću signala „tačka" i „crtica" koristi se telegrafski sistem. Statistička svojstva smetnji su takva, da se iskvare prosečno $\frac{2}{5}$ saopštenja „tačka" i $\frac{1}{3}$ saopštenja „crtica". Poznato je da je odnos predatih signala „tačka" i „crtica" 5 : 3. Naći verovatnoću da će biti primljen isti onaj signal koji je i predat.

4389. Neki pribor može da bude komponovan od visokokvalitetnih delova i od delova prosečnog kvaliteta. Ukupno oko 40% pribora komponovano je od visokokvalitetnih delova. Ako je pribor sastavljen od visokokvalitetnih delova, njegova pouzdanost u toku vremena t iznosi 0,95; ako je sastavljen iz delova prosečnog kvaliteta njegova pouzdanost iznosi 0,7. Pribor je u toku ispitivanja za vreme t ispravno funkcionisao. Kolika je verovatnoća da je on komponovan od visokokvalitetnih delova?

4390. Dva strelca nezavisno jedan od drugoga, gađaju jednu metu ispaljujući po jedan metak. Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi iznosi 0,8 a drugi 0,4. Nakon izvedenog gađanja konstatovan je jedan pogodak u metu. Naći verovatnoću da je pogodio prvi strelac.

4391. Prilikom eksplozije granata se raspada na parčad od tri težinske kategorije: krupna, srednja i mala, pri čemu respektivno ta parčad čine 0,1, 0,3 i 0,6 od ukupnog broja parčadi. Prilikom udara u oklop krupno parče ga probija sa verovatnoćom 0,9, srednje sa verovatnoćom 0,2 i malo sa verovatnoćom 0,05. U momentu eksplozije na oklop je palo samo jedno parče i probilo ga. Naći verovatnoću da je oklop probijen krupnim, srednjim ili malim parčetom.

4392. Date su dve partije proizvoda, pri čemu je poznato, da u jednoj od njih svi proizvodi zadovoljavaju tehničke uslove, a u drugoj partiji $\frac{1}{4}$ artikala su neispravni. Artikal, uzet iz proizvoljne partije, je ispravan. Odrediti verovatnoću, da će i drugi artikal uzet iz te iste partije biti ispravan, ako je prvi artikal nakon provere vraćen u partiju.

4393. Tri lovca su istovremeno gađala vepra, koji je ubijen jednim kuršumom. Odrediti verovatnoću da je prvi, drugi odnosno treći lovac ubio vepra ako su odgovarajuće verovatnoće pogodaka 0,2; 0,4; 0,6.

4394. U jednoj kutiji nalaze se 2 bele, 3 crvene i 20 crnih kuglica, a u drugoj 8 belih, 15 crvenih i 2 crne kuglice. Iz obadve kutije izvučena je po jedna kuglica, pri čemu je jedna izvučena kuglica crna a druga crvena. Pretpostavlja se da je pri tim izvlačenjima jednako moguć izbor koje bilo kutije. Odrediti verovatnoću da je crvena kuglica izvučena iz prve kutije.

4395. Od dva blizanca jedan je dečak. Kolika je verovatnoća da je i drugi blizanac dečak, ako su uslovne verovatnoće da se rode dva dečaka odnosno dve devojčice respektivno a i b?

4° Slučajne veličine i njihove karakteristike

Elementarni prilaz. 1. Neka veličina ξ, zavisno od slučaja uzima jednu od n mogućih vrednosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ respektivno sa verovatnoćama $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tada se ξ naziva *diskretna slučajna veličina sa konačnim skupom mogućih vrednosti.*

2. Ako je diskretna slučajna veličina ξ definisana na prebrojivom skupu $a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$; $P(\xi = a_i) = P_i$; $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, onda se takva slučajna veličina naziva *diskretna slučajna veličina sa prebrojivim skupom mogućih vrednosti.*

3. Postoje slučajne veličine koje su definisane na neprebrojivom skupu mogućih vrednosti. Takve, a takođe i diskretne slučajne veličine, zadaju se pomoću *funkcije raspodele* $F(x)$:

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Na taj način slučajna veličina je takva veličina koja se menja u zavisnosti od slučaja i za koju je definisana funkcija raspodele.

Funkcija raspodele svake slučajne veličine ima sledeća svojstva: $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ $(-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$; $F(-\infty)$ je monotono rastuća na celoj realnoj osi, neprekidna sleva u svakoj tački i ima najviše prebrojivo mnogo prekida prvoga reda. Svaka funkcija sa takvim svojstvima je funkcija raspodele neke slučajne veličine. $P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a)$ za proizvoljno a i b.

Ako skoro svuda postoji

$$f(x) = F'(x), \qquad f(x) > 0, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz,$$

onda se $f(x)$ naziva *gustina raspodele verovatnoće* veličine ξ ili *verovatnosna funkcija* te veličine, dok se veličina ξ i njen zakon raspodele nazivaju neprekidni. U tom slučaju je

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

U opštem slučaju veličina ξ nije ni diskretna ni neprekidna. Tada je

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b dF(x)$$

gde se integral uzima u Stieltjesovom smislu.

Matematičko očekivanje (ili srednja vrednost) slučajne veličine u opštem slučaju naziva se broj $M\xi = \overline{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$, ako ovaj Stieltjesov integral apsolutno konvergira. Za neprekidnu slučajnu veličinu je $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$. Za diskretnu slučajnu veličinu je $M\xi = \sum_i a_i p_i$ (u slučaju apsolutne konvergencije integrala i reda).

Pri izračunavanju matematičkog očekivanja koriste se sledeća njegova svojstva:

1) $MC = C$, ako je C konstanta;
2) $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$;
3) ako su ξ i η nezavisne slučajne veličine onda je $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$;
4) $M(C\xi) = CM\xi$, ako je C konstanta.

Ako je $y=g(x)$ kakva bilo jednoznačna funkcija, onda je $Mg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x)$, ako ovaj integral apsolutno konvergira. Za neprekidnu slučajnu veličinu je

$$Mg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

Za diskretnu slučajnu veličinu je

$$Mg(\xi)=\sum_i g(a_i)p_i.$$

Disperzija $D\xi$ slučajne veličine ξ definiše se formulom

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2,$$
$$D\xi=M(\xi)^2-(M\xi)^2,$$
$$DC=0,$$

ako je C konstanta. Ako su ξ i η nezavisni onda je $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$.

U protivnom slučaju je $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]$. Izraz $M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]=K\xi_\eta$ naziva se *drugi mešoviti centralni moment* slučajnih veličina ξ i η, ili njihov *korelacioni moment*. Ako je $K\xi_\eta=0$, a ξ i η nezavisni onda se naziva *nekorelacioni*. Iz nezavisnosti ξ i η sledi njihova nekorelativnost; obrnuto tvrđenje nije tačno. Ako ξ i η imaju *normalnu* ili *Gaussovu raspodelu*, tj. ako imaju gustine

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}},\qquad f_\eta(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}}$$

gde su a i b proizvoljni a σ_1 i σ_2 pozitivni brojevi, onda se nekorelativnost slučajnih veličina poklapa sa njihovom nezavisnošću. U opštem slučaju je

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2\,dF(x).$$

Za neprekidnu slučajnu veličinu je

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2 f(x)\,dx$$

a za diskretnu slučajnu veličinu je

$$D\xi=\sum_i (a_i-M\xi)^2 p_i.$$

Jedna od najviše upotrebljivih karakteristika mere zavisnosti, veze dveju slučajnih veličina ξ i η je *koeficijent korelacije*

$$r=\frac{M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]}{\sqrt{D\xi\,D\eta}}.$$

Osnovna njegova svojstva su:

1) $-1\leqslant r\leqslant 1$;
2) ako su ξ i η nezavisni onda je $r=0$;
3) $|r|$ se ne menja u slučaju linearne veze slučajnih veličina;
4) $|r|=1$ tada i samo tada kada je jedna od slučajnih velicina linearna transformacija druge, tj. $\eta=a\xi+b$ pri čemu je $r=1$ ako je $a>0$ i $r=1$ ako je $a<0$, i obrnuto.

Moment reda k veličine ξ naziva se

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x).$$

Apsolutni moment reda k naziva se

$$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x).$$

Centralni moment reda k naziva se

$$\eta_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k dF(x).$$

Za neprekidne slučajne veličine je respektivno

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx; \qquad \beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)\, dx; \qquad \eta_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k f(x)\, dx.$$

Za diskretne slučajne veličine je

$$\alpha_k = \sum_i a_i^k p_i; \qquad \beta_k = \sum_i |a_i|^k p_i; \qquad \eta_k = \sum_i (a_i - M\xi)^k p_i.$$

Iz egzistencije konačnog apsolutnog momenta reda k sledi egzistencija svih momenata manjeg reda. *Medijana* slučajne veličine ξ naziva se (proizvoljni) koren jednačine $F(x) = \frac{1}{2}$. *Moda* diskretne slučajne veličine ξ naziva se takva njena moguća vrednost a_M, da je $P(\xi = a_M) \geqslant P(\xi = a)$ za svako $i \neq M$. Moda neprekidne slučajne veličine ξ naziva se broj x_M, kome odgovara najveća vrednost gustine $f(x)$. Raspodela sa jednom modom naziva se *unimodalna*, a raspodela sa više moda *multimodalna*. *Karakteristična funkcija* $E(u)$ slučajne veličine ξ naziva se matematičko očekivanje funkcije $e^{iu\xi}$, gde je u realna veličina a $i = \sqrt{-1}$;

$$E(u) = Me^{iu\xi}.$$

Za neprekidnu slučaju veličinu je

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\, dx$$

gde je $f(x)$ gustina verovatnoće slučajne veličine ξ.

Za diskretnu slučajnu veličinu je

$$E(u) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{iux_k},$$

gde je x_k neka od mogućih vrednosti slučajne veličine a $p_k = P(\xi = \xi_k)$ odgovarajuća verovatnoća.

Karakteristična funkcija je uniformno neprekidna na celoj osi u: $E(0) = 1$; $|E(u) \leqslant 1|$; $-\infty < u < \infty$. Ako je $\eta = a\xi + b$ onda je $E_\eta(u) = E_\xi(au)\, e^{iub}$. Ako su ξ i η nezavisni i $\zeta = \xi + n$, onda je $E_\zeta(u) = E_\xi(u) + E_\eta(u)$; $E(-u) = \overline{E(u)}$. Ako postoji polarni moment slučajne veličine ξ onda se on izražava formulom

$$m_k = M\xi^k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0}.$$

Gustina verovatnoće $f(x)$ se jednoznačno izražava pomoću karakteristične funkcije formulom

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}E(u)\,du,$$

koja za neprekidne slučajne veličine daje neprekidnu funkciju a za diskretne slučajne veličine daje zbir delta-funkcija, i omogućava da se odrede sve moguće vrednosti slučajne veličine i njima odgovarajuće verovatnoće.

4396. Slučajna veličina ξ uzima vrednosti -1, 0 i 1 respektivno sa verovatnoćama $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$. Ispisati izraz i konstruisati grafik funkcije raspodele veličine ξ.

4397. Slučajna veličina ξ ima sledeću raspodelu verovatnoće

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Naći izraz i konstruisati grafikcije raspodele veličine ξ. Naći verovatnoću da će veličina ξ uzeti vrednost koja po apsolutnoj vrednosti nije veća od 1.

4398. Novčić se baca n puta. Naći funkciju raspodele: 1° broja pojavljivanja grbova; 2° odnosa broja pojavljivanja grba prema broju pojavljivanja pisma.

4399. Kocka se baca n puta. Naći funkciju raspodele broja pojavljivanja šestice.

4400. Snejperista puca na kamufliranog protivnika do prvog pogotka. Verovatnoća da će promašiti pri pojedinačnim gađanjima iznosi p. Naći funkciju raspodele broja promašaja.

4401 Novčić se baca sve dotle dok se ne pojavi pismo. Naći funkciju raspodele broja pojavljivanja grba.

4402. Slučajna veličina ξ ima sledeću raspodelu:

ξ	$-1,0$	$-0,5$	$-0,1$	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
p	0,005	0,012	0,074	0,103	0,148	0,231	0,171	0,160	0,081	0,016

Naći: 1° matematičko očekivanje i disperziju veličine ξ; 2° verovatnoća da će ξ uzimati vrednosti iz intervala $[-0,5,\ 0,5]$.

4403. Slučajna veličina raspoređena je po sledećem zakonu:

ξ	-1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Naći $M(\xi^4)$ i $D(\xi^4)$.

4404. Radio-stanica vrši predaju informacija u toku 10 mksec. Njen rad se odvija uz prisustvo haotične impulsne smetnje, čiji je srednji broj impulsa u jednoj sekundi 10^4. Radi sprečavanja predaje dovoljno je da se pojavi jedan impuls smetnje u periodu rada stanice. Smatrajući da je broj impulsa smetnje, koji padaju u dati vremenski interval, raspoređen po Poissonovom zakonu, naći verovatnoću sprečavanja predaje informacije.

4405. Iz kutije, koja sadrži 2 bele i 4 crne kuglice, uzimaju se tri kuglice i prebacuju u drugu kutiju, u kojoj se već nalazi 5 belih kuglica. Zatim se iz druge kutije prebacuju četiri kuglice u prvu. Naći matematičko očekivanje broja belih kuglica x_1 i x_2 u obadvema kuglicama.

4406. Data je funkcija $\eta = \sin \frac{\pi}{2} \xi$ slučajne veličine

ξ	1	2	3	...	n	...
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Naći njenu tablicu raspodele.

4407. Partija od 100 artikala sadrži 10 neispravnih. Iz cele partije nasumice se uzima, u svrhu provere kvaliteta, 5 proizvoda. Naći matematičko očekivanje broja defektnih artikala, koji se nalaze među uzetim.

4408. Pribor koji se ispituje sastoji se od pet elemenata male pouzdanosti. Otkazivanje elemenata je nezavisno, a njihove verovatnoće za elemente sa indeksom i su:

$$p_i = 0{,}2 + 0{,}1 \quad (i-1).$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju broja elemenata koji su otkazali.

4409. Lutrija sadrži m_1 dobitaka vrednosti k_1, m_2 dobitaka vrednosti $k_2, \ldots,$ m_n dobitaka vrednosti k_n. Ukupan broj srećaka (lozova) je N. Matematičko očekivanje igrača na jedan loz jednako je polovini vrednosti loza. Odrediti vrednost loza.

4410. Prvi igrač baca 3, a drugi 2 jednaka novčića. Pobednik, koji dobija svih 5 novčića, biće onaj kod koga se pojavi veći broj grbova. U slučaju nerešene igre ona se nastavlja dok se ne dobije određeni rezultat. Koliko je matematičko očekivanje za svakog od igrača?

4411. Automatska traka pri normalnoj organizaciji (uslovima) izbacuje neispravan proizvod sa verovatnoćom p. Promena trake vrši se odmah posle prvog izbacivanja neispravnog proizvoda. Naći srednji broj svih proizvoda (artikala), proizvedenih između dve uzastopne promene trake.

4412. Funkcija raspodele verovatnoće broja elemenata koji su otkazali, a nakon čega dolazi do prestanka rada pribora, ima oblik

$$F(m)=1-e^{-\alpha m} \qquad (\alpha>0).$$

Naći $M[M]$ i $D[M]$.

4413. Iz kutije koja sadrži m belih i n crnih kuglica izvlači se po jedna kuglica bez vraćanja do prve pojave bele kuglice. Naći matematičko očekivanje broja izvučenih crnih kuglica.

4414. Novčić se baca do prve pojave grba. Naći srednji broj bacanja.

4415. Radnik nadgleda $m\cdot n$ razboja, raspoređenih u m redova od kojih svaki sadrži po n razboja. Rastojanje između redova razboja je b, a između razboja u istom redu a. Radnik kontroliše razboje onim redom kako se javlja potreba kontrolisanja. Naći srednju vrednost puta koji pređe radnik.

4416. Diskretna slučajna veličina ξ zadata je nizom raspodela $p_k=P(\xi=k)$; $k=1, 2, 3\ldots$ funkcija $S(u)=p_0+p_1u+p_2u^2+\cdots$ naziva se funkcija generatrisa niza $\{p_k\}$. Izraziti matematičko očekivanje slučajne veličine ξ preko funkcije generatrise.

4417. Funkcija raspodele slučajne veličine ξ zadata je jednakošću

$$F(x)=\sum_{m<x} C_n^m(1-p)^{n-m}.$$

Dokazati, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} np=a$, da je $\lim\limits_{n\to\infty} D\xi=a$.

4418. Igra se sastoji u tome što se novčić baca do pojave grba. Ako se grb pojavio pri k-tom bacanju novčića, onda igrač A dobija od igrača B k dinara. Koliko je dinara dužan uplatiti igrač A igraču B pre početka igre, pa da bi igra bila naivna?

4419. Slučajna veličina ξ može uzeti proizvoljnu celu pozitivnu vrednost sa verovatnoćama, koje opadaju po geometrijskoj progresiji. Izabrati početni član i količnik progresije q tako, da bi matematičko očekivanje veličine ξ bilo jednako 10. Izračunati pri tim uslovima verovatnoću P_{10} da je $\xi<10$.

4420. Slučajna veličina ξ može uzeti bilo koju celu pozitivnu vrednost n sa verovatnoćom koja je proporcionalna sa $\frac{1}{3^n}$. Naći njeno matematičko očekivanje.

4421. Opit je organizovan tako, da slučajna veličina ξ uzima vrednost $\frac{1}{n}$ sa verovatnoćom $\frac{1}{n}$, gde je n proizvoljan prirodan broj. Naći $M\xi$.

4422. Vezu sa nekom stanicom koja se kreće mogu održavati n radio-stanica. U obostranu vezu stupa ona stanica koja prva primi poziv stanice u pokretu pri čemu je taj događaj jednako verovatan za svih n stanica i iznosi $p=\frac{1}{n}$. Stanica u pokretu uspostavlja vezu m puta. Odrediti verovatnoću da će radio-stanice sa indeksom 1 stupiti u obostranu vezu k puta. Naći za nju matematičko očekivanje i disperziju broja stupanja u obostranu (uzajamnu) vezu.

4423. Slučajna veličina ξ samo cele pozitivne vrednosti sa verovatnoćom $P(\xi=k)=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ $(a>0)$. (Paskalova raspodela). Naći matematičko očekivanje i disperziju.

4424. Neka je μ broj pojavljivanja događaja A u seriji od n nezavisnih opita. Verovatnoća pojave događaja A u k-tom opitu iznosi p_k. Naći matematičko očekivanje i disperziju veličine μ.

4425. U kutiji se nalazi N kuglica među kojima je n belih. Iz kutije se uzima m kuglica. Neka je ξ broj belih kuglica koje se nalaze u m izvučenih $(m<n)$. Naći matematičko očekivanje i disperziju za ξ (hipergeometrijska raspodela).

4426. Opit uspeva sa verovatnoćom p a ne uspeva sa verovatnoćom $(1-p)$. Uslovna verovatnoća da bude dostignut naznačeni rezultat nakon m uspešnih opita $G(m)$ iznosi:

$$G(m)=1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^m.$$

Naći matematičko očekivanje onog broja nezavisnih opita, koji je potreban da se dostigne naznačeni rezultat.

4427. Nezavisna ispitivanja nekog aparata obavljaju se sve dotle dok on ne otkaže. Verovatnoća otkaza od ispitivanja do ispitivanja ne menja se i iznosi p. Naći matematičko očekivanje i disperziju broja ispitivanja kod kojih nije došlo do otkaza.

4428. Dva igrača bacaju sve dotle novčić, dok se kod obadva ne pojavi isti broj grbova. Verovatnoća, da će nakon $2n$ bacanja jedan i drugi imati isti broj grbova iznosi $p_n=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!\,(n-1)!}$. Odrediti matematičko očekivanje broja bacanja.

4429. Iz kutije koja sadrži N kuglica, među kojima je M belih izvlače se: 1° n kuglica sa vraćanjem; 2° n kuglica bez vraćanja. Naći srednju

vrednost broja izvučenih belih kuglica u jednom i drugom slučaju. U kom slučaju je jednako odstupanje od srednjeg verovatnije?

4430. Date su dve kutije od kojih prva sadrži a belih i b crnih kuglica, a druga b belih i a crnih kuglica: 1° iz obe kutije vrši se N izvlačenja kuglica sa vraćanjem svaki put nazad u kutiju. 2° sve kuglice se sasipaju u jednu kutiju, iz nje se vrši $2N$ izvlačenja sa vraćanjem.
Naći matematičko očekivanje i disperziju broja izvučenih belih kuglica u prvom i drugom slučaju. U kom opitu je verovatnije da će se broj izvučenih belih kuglica nalaziti u granicama $N-K$; $N+K$, gde je K malo u poređenju sa N?

4431. Slučajna veličina ξ uzima cele pozitivne vrednosti. Dokazati da je

$$1^\circ \quad M\xi = \sum_{m \geq 1} p_m$$

gde je $p_m = p(\xi \geq m)$

$$2^\circ \quad D\xi = 2\sum_{m \geq 1} m p_m - M\xi(M\xi + 1).$$

4432. Slučajna veličina ξ može uzimati samo sledeće vrednosti:

-2; -1; 0; 1; 2, respektivno sa verovatnoćama p_{-2}; p_{-1}; p_0; p_1; p_2.

Naći te verovatnoće, ako je

$$1^\circ \quad M\xi = M\xi^3 = 0, \quad M\xi^2 = 1, \quad M\xi^4 = 2$$

$$2^\circ \quad M\xi = M\xi^3 = 0, \quad M\xi^2 = 2, \quad M\xi^4 = 6$$

$$3^\circ \quad M\xi = M\xi^3 = 0, \quad M\xi^2 = a, \quad M\xi^4 = b$$

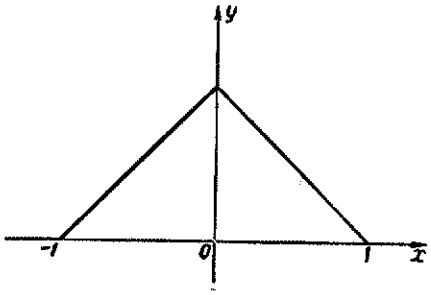
da li se u tom slučaju mogu uzeti proizvoljne vrednosti za a i b?

4433. Slučajna veličina ξ_n uzima prvih n članova niza

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

sa verovatnoćom $p_{n1}, p_{n2}, \ldots p_{nn}$. Dokazati da je dovoljno da $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nk} = 0$, za fiksno k, pa da iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} M\xi_n = a$.

4434. Gustina slučajne veličine ξ ima grafik dat na sl. 43 (Simpsonov zakon). Napisati izraze za gustinu i funkciju raspodele te slučajne veličine; naći njeno matematičko očekivanje i disperziju.



Sl. 43

4435. Funkcija raspodele slučajne veličine ξ ima oblik

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad x > a \\ A + B\arcsin\dfrac{x}{a} & \text{za} \quad -a < x < a \\ 0 & \text{za} \quad x < -a \end{cases}$$

Odrediti 1° za koje je vrednosti A i B funkcija raspodele neprekidna; 2° verovatnoću da će slučajna veličina ostati (biti) u intervalu $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$; 3° gustinu verovatnoće $f(x)$ slučajne veličine x.

4436. Gustina verovatnoće slučajne veličine iznosi

$$f(x) = Ax^2 e^{-kx} \qquad (k > 0,\ 0 \leqslant x < \infty)$$

1° odrediti koeficijenat A;

2° odrediti verovatnoću da će slučajna veličina ξ biti u intervalu $\left(0, \frac{1}{k}\right)$;

3° naći funkciju raspodele slučajne veličine ξ.

4437. Slučajna veličina ξ ima gustinu $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$ (Cauchyev zakon); 1° Naći koeficijenat A i funkciju raspodele ξ. 2° Naći verovatnoću nejednačine $-1 < \xi < 1$. 3° Kakvi su matematičko očekivanje, moduo i medijana te raspodele.

4438. Slučajna veličina ξ ravnomerno je raspoređena, $M\xi = 4$, $D\xi = 3$. Naći gustinu veličine ξ.

4439. Funkcija raspodele slučajne veličine x ima oblik

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leqslant -1 \\ a + b \arcsin x & \text{za } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{za } 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Odrediti konstante a i b. Naći $M[x]$ i $D[x]$.

4440. Slučajna veličina ξ ima gustinu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x & \text{za } |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{za } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Naći matematičko očekivanje i disperziju.

4441. Gustina verovatnoća slučajne veličine ξ ima oblik:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{\rho}{E} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}} & \text{za } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4442. Gustina verovatnoće slučajne veličine ξ ima oblik

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (-a<x<a).$$

Odrediti disperziju i srednje odstupanje.

4443. Gustina verovatnoće slučajnih amplituda A bočnih gibanja broda određuje se po formuli

$$f(a)=\frac{a}{\sigma^2}\,e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

Da li se jednako pojavljuju amplitude manje i veće od srednje?

4444. Gustina verovatnoće slučajne veličine ξ zadata je u obliku

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x<0 \\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x} & \text{za } x>0. \end{cases}$$

Odrediti $M\xi$ i $D\xi$.

4445. Funkcija raspodele verovatnoće ima oblik

$$F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{za } x>x_0 \\ 0 & \text{za } x<x_0. \end{cases} \qquad \text{(stepena raspodela).}$$

Naći $M\xi$ i $D\xi$.

4446. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=\begin{cases} Ax^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{za } x>0 \\ 0 & \text{za } x<0 \end{cases} \qquad \text{(gama-raspodela).}$$

Odrediti parametar A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4447. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće oblika (beta-raspodela)

$$f(x)=\begin{cases} Ax^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{za } 0<x<1, \\ 0 & \text{za } x<0 \text{ i } x>1 \end{cases}$$

$(a>0,\ b<0)$.

Odrediti parametar A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4448. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=A(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

gde $n\in N$. Odrediti konstantu A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4449. Gustina verovatnoće pozitivne slučajne veličine ξ ima oblik

$$f(x)=Ax^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

gde $n\in N$. Odrediti konst. A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4450. Slučajna veličina ξ ima funkciju raspodele

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x<0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{za } 0<x<2 \\ 1 & \text{za } x>0. \end{cases}$$

1° Konstruisati grafik gustine.

2° Naći modu, medijanu i srednju vrednost za ξ.

3° Izračunati verovatnoću $P(0{,}5<\xi<1{,}5)$.

4451. Gustina verovatnoće slučajnih amplituda bočnog ljuljana broda ima oblik

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (x>0).$$

Odrediti: 1° matematičko očekivanje Mx;

2° disperziju Dx i srednje kvadratno odstupanje σ;

3° centralne momente trećeg i četvrtog reda μ_3 i μ_4.

4452. Slučajna veličina ξ raspoređena je na Laplaceovom zakonu, tj. njena gustina je $f(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$, gde je a proizvoljan realan broj, $\alpha>0$.

Naći matematičko očekivanje i disperziju ξ.

4453. Slučajna veličina ξ raspoređena je po normalnom zakonu. Naći $M|\xi-M\xi|$.

4454. Kakvo je matematičko očekivanje dužine tetive, koja spaja zadatu tačku kruga radijusa R sa proizvoljnom tačkom kruga?

4455. Tačka je bačena nasumice unutar kruga poluprečnika r. Verovatnoća da će tačka pasti u proizvoljnu oblast, sadržanu u krugu, proporcionalna je površini te oblasti. Naći funkciju raspodele, matematičko očekivanje i disperziju rastojanja tačke od centra kruga.

4456. U partiji od n proizvoda ima n defektnih. Radi provere kvaliteta uzima se r proizvoda bez vraćanja ($m<r<n-m$). Naći karakterističnu funkciju broja defektnih proizvoda koji su se pojavili pri proveri.

4457. Naći karakterističnu funkciju slučajne veličine ξ, čija je gustina verovatnoće

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

4458. Naći momente slučajne veličine ξ čija je karakteristična funkcija

$$E(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

4459. Verovatnoća pojave događaja pri jednom ispitivanju je p. Naći karakterističnu funkciju broja pojavljivanja događaja pri jednom ispitivanju.

4460. Naći karakterističnu funkciju $E(u)$ binomne raspodele i odrediti pomoću te funkcije matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ, koja je potčinjena binomnoj raspodeli.

4461. Slučajna veličina ξ diskretnog tipa potčinjena je Poissonovom zakonu raspodele

$$P(\xi=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Naći: 1° Karakterističnu funkciju $E(u)$; 2° koristeći $E(u)$ naći $M\xi$ i $D\xi$.

REZULTATI

Glava I

1. 1° Označimo: $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=a$ i $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=b$. Tada je: $x^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. $y^2=a^2+b^2-2ab$; $a^2+b^2=14$, $ab=1$, pa je: $x^2=16$, $x=4$; $y^2=12$, $y=2\sqrt{3}$. 2° $7+4\sqrt{3}=4+3+4\sqrt{3}=2^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 2\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$. 3° $\sqrt{3}$.

3. 1° y može da se napiše u obliku: $y=[(x-3)(2x+1)]^2$. 2° $x=3$, $x=-\frac{1}{2}$.

3° $z=\frac{(x-3)^2}{(2x-1)^2}$ za $z=1$, $\frac{x-3}{2x-1}=\pm 1$, odakle je $x=\frac{4}{3}$, $x=-2$.

4. Važi za: 1° $x\geqslant 2$, 2° $x\leqslant 2$, 3° $x\leqslant 3$, 4° $x\geqslant 0$.

5. $10-x$ za $x\leqslant -3$; $4-3x$ za $-3\leqslant x\leqslant 2$; $-x$ za $2\leqslant x\leqslant 5$; $x-10$ za $x\geqslant 5$.

6. Neka je $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=y$; tada je $y^2=2x+2\sqrt{x^2-36(x-9)}=\begin{cases}4x-36, & x\geqslant 18\\ 36, & x<18\end{cases}$.

Ali leva strana postoji jedino za $x\geqslant 9$ te je konačno $y=\begin{cases}2\sqrt{x-9}, & x\geqslant 18\\ 6, & 9\leqslant x\leqslant 18\end{cases}$.

7. $\frac{1}{\sqrt{x+2k}+\sqrt{x+2k+2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{x+2k+2}-\sqrt{x+2k})$ $(k=0, 1, \ldots, n-2)$. Leva strana, L, je $L=\frac{1}{2}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})+\ldots+(\sqrt{x+2n}-\sqrt{x+2n-2})]=$

$=\frac{n}{\sqrt{x+2n}+\sqrt{x}}$.

9. 1° Drugi, 2° drugi, 3° drugi, 4° drugi, 5° prvi.

11. 1° Iz jednakosti $a^2=b^2+c^2$ sledi da su b i c katete, a a hipotenuza nekog pravouglog trougla, odakle zaključujemo da je: $b+c>a$, $b<a$, $c<a$. 2° Pomnožimo jednakost $a^2=b^2+c^2$ sa a, pa imamo: $a^3=ab^2+ac^2>b^3+c^3 \Rightarrow a^3>b^3+c^3$.

12. $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\alpha<\cos\alpha+\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha<\cos\beta$, tj. $\alpha>\beta$.

13. $1+\cos 4x=2\cos^2 2x$, $y=(1+2\cos 2x)\cos 2x=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+2\cos 2x\right)\cos 2x=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\right.$ $\left.+\cos 2x\right)\cos 2x=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cos 2x$. Ili: $1+2\cos 2x=(2\cos x-1)(2\cos x+1)$; $y=(2\cos x-1)(2\cos x+1)\cos 2x$, rešenja su: $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

14. 1° a) $m=0\Rightarrow \operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}x$; $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in C$. b) $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x=-\operatorname{tg}2x$ ili $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$ ili $\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ ili $\sin 3x(\cos 3x-\cos x\cos 2x)=0$ ili $\sin x\sin 2x\sin 3x=0\Rightarrow x=$ $=k\pi$, $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{k\pi}{3}$, $k\in C$. 2° Leva strana jednačine $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x=m\operatorname{tg}2x$ može

se napisati u obliku proizvoda: $\frac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x} = m \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$. Posle sređivanja imamo $\sin 2x = 0$ i $m \cos x \cos 3x + \cos 2x = 0$ ili $\frac{m}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 2\cos 2x = 0$, tj. $2m\cos^2 2x + (m+2)\cos 2x - m = 0$.

15. $\sin 2x + 1 = (\sin x \cos x)^2$, pa imamo: $(\sin x + \cos x)^2 + \sin x + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$, ili $(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$, odakle je: $\operatorname{tg} x = -1$ i $\cos x = -\frac{1}{2}$.

16. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$. Sa druge strane je: $\cos^6 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3$ i jednačina dobija oblik: $4(1+\cos 2x)^3 - (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) = 1$, ili $4\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0$, odakle je: $\cos 2x = -1$ i $\cos 2x = -\frac{1}{4}$.

17. $\operatorname{tg} x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_1 = 75°$; $\operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 15°$; $\operatorname{tg} x_3 = -(2+\sqrt{3})$, $x_3 = 105°$; $\operatorname{tg} x_4 = -(2-\sqrt{3})$, $x_4 = 165°$.

18. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

19. Lako je videti da je rešenje jednačine za $\sin x = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Dalje je $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ i $\sin x \cos x > 0$. Ako je $\sin x < \cos x < 0 \Rightarrow \sin^n x < \cos^n x$ i $\frac{1}{\cos^m x} < \frac{1}{\sin^m x}$, tj. $\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} < \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}$. Slično za $\cos x > \sin x > 0$.

20. 1° 2; 2° 0.

21. $P(x) \equiv \frac{x^6-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$. $P(x) = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x-1} \equiv \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{x-1} = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. $P(1) = 6$ $P(x) \equiv (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

22. $x^1/_2 = \pm 2$, $x^3/_4 = \pm\frac{1}{2}$.

23. 1° $a = -5$; $x_1 = -1$, $x_2 = -3$; $a = -2$, $x_1 = -2$, $x_2 = -12$. 2° $a = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = 12$ 3° $a = 2$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. 4° $a = 3$, $x_1 = x_2 = 3$. 5° $a = -13$, $x_1 = -\frac{3}{7}$, $x_2 = -1$; $a = -7$, $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = -2$, $a = -4$, $x_1 = -\frac{6}{5}$, $x_2 = 4$, $a = -3$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -6$; $a = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2{,}4$; $a = 5$, $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = 2$; $a = 7$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $a = 11$, $x_1 = 0{,}6$, $x_2 = 1$. 6° $a = -2$, $x_1 = -2$, $x_2 = -12$; $a = 3$, $x_1 = x_2 = 3$; $a = -4$, $x_1 = -\frac{6}{5}$, $x_2 = -4$.

24. $2{,}9$, $\frac{1}{2}(11 \pm \sqrt{15}\, i)$. $[(x-3)(x-8)][(x-4)(x-7)] = (x^2-11x+24)(x^2-11x+56)$. Posle toga staviti smenu $x^2 - 11x + 24 = y$. **25.** $0 < a < 1$ ili $a > 5$. **26.** $k = 7$; $k = 8$.

27. Po Vietovom pravilu je $\frac{ab-1}{b-a} = 1$ i $\frac{2(a+b)}{b-a} = \frac{5}{2}$; $a_1 = 1$, $b_1 = 9$; $a_2 = -\frac{1}{9}$, $b_2 = -1$.

28. $-4 < k < 6$. **29.** $x_1 = 1, x_{2,3} = -\frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)(k+1)}}{2}$.

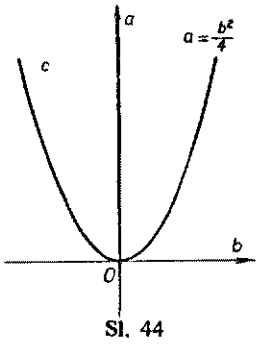
30. a) $k = 7$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$; b) $k = 7$. **31.** $k = 4$.

32. $(x-2m)(x^2+2mx+4m^2-7mx)=0 \Rightarrow x_1=2m,\ x_2=4m,\ x_3=m.$

33. $\sin x_1=\frac{a-1}{a}$, $\sin x_2=\frac{1}{a}$. Moraju postojati sledeći uslovi (da bi važila oba rešenja): $-1\leqslant\frac{a-1}{a}\leqslant 1$ i $-1\leqslant\frac{1}{a}\leqslant 1 \Rightarrow a\geqslant 1.$

34. Neka je $|x|=y$, (1) onda imamo: $ay^2+by+c=0$ (2). 1° Iz uslova $ac<0$ zaključujemo da jednačina (2) ima dva korena y_1 i y_2 suprotnog znaka ($y_1<y_2$). Uzimamo samo $y_2>0$, jer je $y_1<0$ i ne zadovoljava smenu (1). Iz (1) imamo: $x_1=-y_2$, $x_2=y_2$. 2° Ako je $ac>0$, $\Delta>0$ mora biti $b\neq 0$, jer u protivnom bi bilo $\Delta<0$. Jednačina (2) ima dva korena y_1 i y_2 istog znaka. Za $-\frac{b}{a}<0$ koreni y_1 i y_2 su negativni i jednačina (1) nema korena. Za $-\frac{b}{a}>0$ koreni y_1 i y_2 su pozitivni i (1) ima korene: $x_1=-y$, $x_2=y_1$, $x_3=-y_2$, $x_4=y_2$. 3° a) $c=0 \Rightarrow y(ay+b)=0$, $y_1=0$, $y_2=-\frac{b}{a}$. Ako je $-\frac{b}{a}<0$, jednačina ima jedino rešenje: $x=0$. Ako je $-\frac{b}{a}>0$, jednačina ima tri rešenja: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$, $x_3=\frac{b}{a}$ i ako je $-\frac{b}{a}=0$, mora biti $b=0$, jednačina ima samo jedno rešenje $x=0$. b) $\Delta=0$, $y=-\frac{b}{2a}$. Ako je $-\frac{b}{2a}<0$, jednačina nema rešenja. Ako je $-\frac{b}{a}>0$, ima rešenja: $x_1=-\frac{b}{2a}$, $x_2=\frac{b}{2a}$ i ako je $-\frac{b}{2a}=0$, ima jedno rešenje: $x=0$.

35. a) Ako je M na paraboli c, jednačina ima dva jednaka korena. b) Ako je M ispod parabole, jednačina ima dva realna različita korena. c) Ako je M iznad parabole, jednačina nema rešenja (sl. 44). **36.** 1° 3. 2° 4. 3° $\log_3 4$. 4° $-\log_2 3$.



Sl. 44

37. $2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}.$

38. $\frac{1}{\log_2 x\log_2 x-\log_2 16}=\frac{1}{\log_2 x-\log_2 64}$. S obzirom da je $\log_2 16=4$ i $\log_2 64=6$ data jednačina posle sređivanja postaje: $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$, odatle je $\log_2 x=2$, $x_1=4$; $\log_2 x=3$, $x=8$.

39. Ako pređemo na logaritme za osnovu tri, posle sređivanja dobijamo jednačinu: $\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1$ ili $(1-\log_3 x)[1-(1-\log_3 x)^2]=0$, odakle je: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1}{9}$.

40. $\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{1+\log_2 x}=\frac{1}{2+\log_2 x}$, $\log_2^2 x=2 \Rightarrow x_1=2^{\sqrt{2}}$, $x_2=2^{-\sqrt{2}}$.

41. Iz druge jednačine je: $v-x=(\sqrt{2})^4=4$ ili $y=x+4$. Zamenom u prvoj, imamo: $3^x\cdot 2^x=36 \Rightarrow x=2$, $y=6$. **42.** (0, 0); (9, 4); (4, 9); (7, 7).

43. (2, 1)? (1, 2); $\left(\frac{3+i\sqrt{55}}{2}, \frac{3-i\sqrt{55}}{2}\right)$; $\left(\frac{3-i\sqrt{55}}{2}, \frac{3+i\sqrt{55}}{2}\right)$. **44.** $x=20$, $y=16$.

45. Iz druge jednačine se dobija: $xy=16$. Ako se u prvoj jednačini logaritmi izraze preko iste osnove i uvede smena $\log_y x=t$, jednačina postaje: $t^2-2t-3=0$, odakle je: $t_1=-1$,

$t_2=3$, tj. $x=\frac{1}{y}$, što ne zadovoljava jednačinu $xy=16$; i $x=y^3$, što zamenom u prvu jednačinu daje: $y=2$, $x=8$. **46.** $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{12k\pm1}{12}\pi, \pm\sqrt{3}\right)$.

47. $\left(k\pi+\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}-k\pi\right)$; $\left(k\pi+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}-k\pi\right)\cdot k\in N$.

48. Neka je $\frac{q}{p}=\alpha$. Za $\alpha=1$ sistem je zadovoljen za svako x i y veće od nule. Iz druge jednačine je $x=y^\alpha$ (za $\alpha\neq1$). Ako logaritmujemo prvu jednačinu i stavimo smenu: $x=y^\alpha$, dobićemo posle sređivanja: $y\log y(\alpha-y^{\alpha-1})=0$. Pošto je $y>0$, mora biti ili $\log y=0$ ili $\alpha-y^{\alpha-1}=0$, odakle se dobija: $y_1=1$, $x_1=1$, i $y_2=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $x_2=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

49. 3. **50.** -1, 1. **51.** $\alpha=30°$. $\beta=60°$ i $\gamma=90°$.

54. $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\frac{a}{\cos\alpha}\sin(x+\alpha)$; $A=\frac{a}{\cos\alpha}$, $T=2\pi$.

56. Iskoristiti da je $\frac{1}{\log_{abc}x}=\log_x a+\log_x b+\log_x c$. **57.** 1° 25; 2° b^2.

58. Ako svedemo logaritme na istu osnovu i uzmemo da je srednji član aritmetička sredina druga dva člana, dobićemo: $\log_m n\log_m x=\frac{\log_k n\log_n x+\log_n x}{2}$, tj. $\log_m n^2=\log_k(nk)$, odakle je $n^2=(nk)^{\log_k m}$.

60. Pod uslovom: $xyz=1$, A postaje: $A=(x+yz)^2+(y+xz)^2+(z+xy)^2-(x+yz)(y+xz)(z+xy)$ ili, posle množenja i dizanja na kvadrat, konačno: $A=4$.

61. $M_k(a_k, b_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$.

62. 1° $(x+y+z)(x-y+z)=(x+z)^2-y^2=x^2+z^2+2xz-y^2=x^2+y^2+z^2$ ako je $xz=y^2$ (uslov da obrazuju geometrijsku progresiju). 2° $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$. Ove relacije daju: $a(a-2y)=b^2$, tj. $y=\frac{a^2-b^2}{2a}\Rightarrow a^2>b^2$ i $a\neq0$ $(y>0)\Rightarrow xz=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}$, znači da su x i z rešenja jednačine (Vietovo pravilo): $u^2-\frac{a^2+b^2}{2a}u+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}=0$, tj. jednačine: $4a^2u^2-2a(a^2+b^2)u+(a^2-b^2)^2=0$. Ova jednačina će imati rešenja jedino ako je: $a^2[(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2]\geqslant0$ ili $a^2(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)\geqslant0$, tj. $\frac{a^2}{3}\leqslant b^2\leqslant3a^2$ ili, kako je još $b^2<a^2$, $\frac{a^2}{3}\leqslant b^2<a^2$. Ako je: $b^2=\frac{a^2}{3}$, imamo: $x=y=z=\frac{a}{3}$ (progresija degeneriše u tri jednaka broja).

63. 1° Poslednji član je $2n-1$. 2° Vrsta i kolone koje počinju sa istim brojem p su iste, a elementi su simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu. 3° Razlika članova odgovarajućih uzastopnih vrsta je jedan, razlika zbirova članova dve uzastopne vrste je n. 4° Iz kvadratne šeme se vidi da je: $n+1=2+(n-1)=?+(n-2)=4+(n-3)=\cdots$ Pošto svih članova ima n, jednakih zbirova ima $\frac{n}{2}$, pa je $s=\frac{n}{2}(n+1)$. Razlika između zbirova članova dve uzastopne vrste je n. Prema tome je: $S=s+(s+n)+(s+2n)+(s+3n)+\cdots+s+(n-1)n=\frac{n}{2}[2s+(n-1)n]=\frac{n}{2}[(n+1)n+(n-1)n]=n^3$. 5° Zbir članova po-

slednje vrste (ili kolone) je: $s_1=\frac{n}{2}[n+2n-1]=\frac{n}{2}(3n-1)$. Zbir članova koji se nalaze u poslednjoj vrsti i poslednjoj koloni je: $2\cdot\frac{n}{2}(3n-1)-(2n-1)=3n^2-3n+1$. Na osnovu toga i na osnovu rezultata pod 4°, imamo: $[3n^2-3n+1]+[3(n-1)^2-3(n-1)+1]+$ $+[3(n-2)^2-3(n-2)+1]+\cdots+[3\cdot 1^2-3\cdot 1+1]=n^3$. Ako sa S_2 označimo zbir kvadrata, odavde se vidi da je: $3S_2+3s+n=n^3$. Iz poslednje jednakosti sledi: $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

64. 1° 100; 2° 6, (1, 3, 93, 96, 98, 99). **65.** 7744.

66. Za $a=1$ imamo $x+1=2^{n+1}$, tj. $x=2^{n+1}-1$. Za $a\neq 1$ leva strana jednačine je $\frac{a^{x+1}-1}{a-1}$ pa je cela jednačina identična sledećoj:

$$a^{x+1}-1=(a-1)(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2})\cdots(1+a^{2^n})$$

$$a^{x+1}-1=(a^2-1)(1+a^2)(1+a^{2^2})\cdots(1+a^{2^n})$$

$$a^{x+1}-1=(a^4-1)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a^{x+1}-1=a^{2^{n+1}}-1 \Rightarrow x=2^{n+1}-1.$$

67. $t=65'+\left(27+\frac{20}{11}\right)''$. **68.** 1866 *g*.

69. Lako je pokazati da je ovaj izraz jednak $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Da bi proizvod bio najveći, uz konstantan zbir činilaca, moraju činioci biti jednaki, tj. $a^2+b^2=x^2+y^2=\frac{A}{2}$ pa je $\max[(ax-by)^2+(bx+ay)^2]=\frac{A^2}{4}$. **71.** 142857.

72. *Posle deobe jednačine sa* $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ *dobijamo ekvivalentnu jednačinu* $\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x+$ $+\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x=1$. *Stavimo sada* $\frac{2a}{1+a^2}=\cos y \Rightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2}=\sin y$ *pa imamo* $(\cos y)^x+$ $+(\sin y)^x=1$. Kako je $0<\cos y<1$ i $0<\sin y<1$, to su $(\cos y)^x$ i $(\sin y)^x$ monotono opadajuće funkcije od x pa je takva i $(\cos y)^x+(\sin y)^x$, tj. data jednačina može imati samo jedno rešenje $x=2$.

73. Pošto trougao ne može imati dva tupa ugla iz $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1$ sledi $A<90^\circ\wedge B<90$. Dalje je $\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>1 \Leftrightarrow \cos(A+B)<0 \Leftrightarrow \cos c>0 \Leftrightarrow c<90^\circ$.

74. Kako je $\sin\frac{A}{2}<1$, $\sin\frac{B}{2}<1$, to je $\cos\frac{C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+$ $+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}$, čime je dokaz završen.

76. $x=\frac{a(\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1})}{2}$, gde je a ivica kocke a x rastojanje sredine suprotne strane od preseka ravni sa tom stranom.

77. Neka sfere 1, 2 4, 5, prolaze kroz tačku A; sfere 1, 3, 4, 5 kroz tačku B i sfere 2, 3, 4 i 5 kroz tačku C. Ako se dve tačke, recimo A i B poklapaju, onda sve sfere prolaze kroz tu tačku. Ako su A, B, C različite tačke, onda one određuju jednu ravan α koja seče date sfere po krugovima 1′, 2′, 3′, 4′, i 5′. Tada $A \in 4' \cap 5'$, $B \in 4' \cap 5'$ i $C \in 4' \cap 5'$. Međutim pošto se dva kruga mogu seći samo u dve tačke, sledi da se dve tačke poklapaju, suprotno pretpostavci. **78.** 4. **79.** Jeste.

80. $y = -\frac{x}{2}$, $y = -\frac{3x}{2}$. **81.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

84. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni jednačine: $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+k=0$, onda možemo napisati $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+k=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, ili $(x-x_1)\times$ $\times(x-x_2)\cdots(x-x_n)-k=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, odakle se vidi da su: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koreni jednačine: $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)-k=0$.

90. $(x-5)^2+(y-5)^2=0$, ili $x=y=5$. **91.** Prava linija. **92.** $3x-4y+1=0$.

93. $x=0$. **94.** $x=\frac{p}{k}$. **95.** $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

96. Jednačina skupa tačaka je opet krug. **97.** $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

98. $x^2+y^2=2ax$. **99.** $x^2+y^2=2t^2$. **100.** $x^2+y^2-(a+b)y+ab=0$.

101. 1° $y^2+\left(x-\frac{a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$. 2° $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$. **102.** $(x-10)^2+y^2=40$.

103. $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{4}$. Jednačina skupa tačaka je krug sa centrom u tački $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ poluprečnika $R=\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-a^2}$, pod uslovom da je $|a|<r\sqrt{2}$. Ako je $|a|=r\sqrt{2}$, krug degeneriše u tačku $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Za $a=r$ skup tačaka ima jednačinu $x^2+y^2-rx=0$. Za $a=r$ jednačina skupa je krug sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

104. $(x+1)^2+y^2=2$.

105. Kao rezultat se opet dobija krug simetričan datom krugu u odnosu na datu tetivu.

106. $x=\frac{1}{8}y^2+1$.

107. Jednačina prave OM je $y=kx$ a prave $M'Sx\sqrt{1+k^2}+y=r$. Ako je presečna tačka ovih pravih $S_1(u, v)$, onda dobijamo sistem jednačina $v=ku$ i $u\sqrt{1+k^2}+v=r^2$. Eliminacijom parametra k iz ove dve jednačine dobijamo jednačinu skupa $u^2=2r\left(\frac{r}{2}-v\right)$ ili $x^2=2r\left(\frac{r}{2}-y\right)$. **108.** $y^2=\frac{p}{4}\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

109. 1° Rešavanjem jednačina $y^2=2px$ i $y=kx$ odnosno $y=-\frac{1}{k}$, dobijamo koordinate presečnih tačaka kao funkciju parametra k: $A\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$, $B(2pk^2, -2pk)$. Otuda su koordinate središta duži $u=\frac{p}{k^2}+pk^2$ i $v=\frac{p}{k}-pk$. Eliminacijom parametra k iz ovih dveju jednačina dobijamo konačno jednačinu traženog skupa tačaka $v=pu-2p^2$ ili $y^2=p(x-2p)$. 2° Zajednička tačka svih pravih je $(2p, 0)$.

110. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ **111.** $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}=1.$ **112.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

113. $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}r\right)^2}=1.$ **114.** $x^2-y^2=a^2-b^2.$ **115.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$ (za $x>0$).

116. $b+2x=2\sqrt{y^2-2bx}.$

118. Rešavanjem jednačina $y=kx$ i $y^2=\frac{3}{2}x$ dobijamo presečnu tačku $M\left(\frac{3}{2k^2}, \frac{3}{2k}\right)$. Ako koordinate tačke A obeležimo sa u i v, imaćemo sistem jednačina $v=ku$ i $\sqrt{u^2+v^2}=\frac{2}{3}\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}$. Eliminacijom parametra k dobijamo konačno $v^2=\frac{3u^3}{2-3u}$ ili $y^3=\frac{3x^3}{2-3x}$.

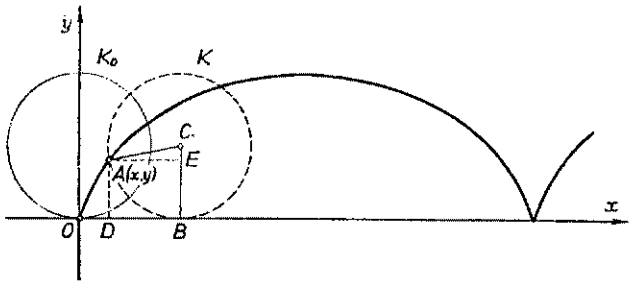
119. $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=rx^2.$ **120.** $y^2=\frac{x(a-x)^2}{2a-x}$. Ova kriva se naziva strofoida.

121. $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=2axy.$ Ova kriva se naziva rozeta.

122. $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2).$ Bernulijeva lemniskata.

123. $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2).$ Ova se kriva naziva kardioida.

124. Neka je k_0 (sl. 45) početni položaj kruga, tačka O dodirna tačka kruga k_0 i Ox ose, a $t=\sphericalangle ACB$ ugao za koji se okrenuo krug počev od svog početnog položaja k_0. Pošto se krug kotrlja bez klizanja, biće $\widehat{AB}=OB=at$. Koordinate tačke A, koje opisuju traženu krivu, mogu se dobiti na sledeći način: $x=OB-AE$, $y=CB-CE$ ili $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. Ovo je jednačina cikloide u parametarskom obliku.



Sl. 45

125. $x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t,\quad y=(r+R)\sin t-r\sin\frac{R+r}{r}t.$ Epicikloida.

126. $x=(R-r)\cos t+r\cos\frac{R-r}{r}t,\quad y=(R-r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t.$ Hipocikloida. Za $r=\frac{R}{r}$ biće $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Astroida.

Glava II

127. $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$.

128. 1° NIII; 2° NN; 3° IIII; 4° INNI.

129. 1° IIINIIII; 2° IINNININ; 3° IIII; 4° NN.

130. 1° II; 2° ININNNIN; 3° IIIIIIII.

131. 1° Logički istinit. 3° Ni jedno ni drugo.

132. 1° Protivurečan. Ostalo će utvrditi čitalac.

134. Logički istinit.

135. Ekvivalentni su.

136. Logički su protivurečni.

149. 1° 1; 2° 1; 3° 1; 4° 0.

150.° 1° $(x+y)=(\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}})$; 2° $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$; 3° $x+\bar{x}=1$; 4° $(\overline{x+y})=\bar{x}\cdot\bar{y}$.

151. $p \vee p = p$; 2° $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$; 3° $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$.

153. U opštem slučaju broj Bulovih funkcija od n promenljivih iznosi 2^{2^n}. Tako npr. za $n=3$ broj Bulovih funkcija je 256 itd.

162. $\bar{x} = x \mid x$; $x_1 \vee x_2 = (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$; $x_1 \wedge x_2 = (\overline{x_1 \mid x_1})\,(\overline{x_2 \mid x_2})$.

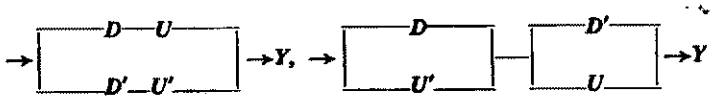
163. $[(S_1 \cdot S_2) + S_3 + S_4]\, S_5 = Y$.

164. $S_1\,[(S_2 + S_3)\, S_4 + S_5\, S_6 + S_7] = Y$.

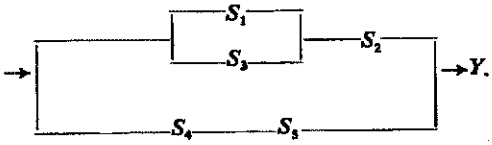
165.

D	U	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

166. Traženo kolo struje može se nacrtati u jednom ili drugom od sledeća dva oblika:



167.



168. 1° $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
2° $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap C = \{1, 2, 3\}$.

3° $S=\{0,1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_S A=\{0\}$.

4° $A\setminus B=\{5\}$, $B\setminus A=\{0\}$, $A\setminus C=\{4, 5\}$.

5° $PA=\{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

6° $A\times B=\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$.

169. $(A\cup B)\cap C=\{a, b, c, 1\}\cap\{a, 1\}=\{a, 1\}$
$(A\cap B)\cup(B\cap C)=\{a, 1\}\cup\{1\}=\{a, 1\} \Rightarrow (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

172. Ne. Iz $A\setminus B=C \Rightarrow$, samo, $A\setminus B\subset C$.

173. Ne. Iz $A=B\cup C \Rightarrow$, samo, $A\setminus B\subset C$.

174. 1° Tačna. 2° Ne. Važi, samo, $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$.
3° Ne. Važi, samo, $(A\setminus B)\cup C\supset(A\cup C)\setminus B$.

175. Neka je $\mathcal{L}$ leva strana jednakosti, a $\mathcal{D}$ desna strana jednakosti. Tada $x\in\mathcal{L} \Rightarrow x\in A$ ili $x\in B\cap C\cap D \Rightarrow x\in\mathcal{D}$. $x\in\mathcal{D} \Rightarrow x\in A$ ili $x\in B\cap C\cap D$, tj. $x\in A$ ili $x\in B\wedge x\in C\wedge x\in D \Rightarrow x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C\wedge x\in A\cup D \Rightarrow x\in\mathcal{L}$.

179. $P(A)=\{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, l\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. **183.** 1° Da. 2° Da.

187. 1° Za $\forall\, a\in C$ je $a-a=0\cdot k$ (refleksivnost). 2° Ako je $a-b=pk \Rightarrow b-a=-p\cdot k$, tj. iz $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ (simetričnost). 3° $a-b=p_1\cdot k$, $b-c=p_2\cdot k \Rightarrow a-c=(p_1+p_2)k$, tj. iz $a\rho b\wedge b\rho c$ sledi $a\rho c$ (tranzitivnost).

197. Supremum od X je unija svih delova od S koji leže u X a infinum presek tih delova.

198. 1° $f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&a&a\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&a&b\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&a\end{pmatrix}$, $f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&b&a\end{pmatrix}$

$f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&a&b\end{pmatrix}$, $f_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&b\end{pmatrix}$, $f_7=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&a&a\end{pmatrix}$, $f_8=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&b&b\end{pmatrix}$.

2° $f=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&a&a\end{pmatrix}$. **199.** 1° $x\to x^2$, $x\in R$. 2° $x\to y$, $y=n$ za $n-1<|x|\leqslant n$, $x\in R$, $n\in N$.

203. Skup parnih brojeva možemo poređati u sledeći niz: 0, 2, −2, 4, −4, 6, −6, ... Svakom parnom broju će tada odgovarati njegov redni broj u napisanom nizu.

204. $y=x+2$ (Napisati jednačinu prave kroz tačke (0, 2) i (1, 3)). **205.** $y=\operatorname{ctg}\pi x$.

206. Uočimo niz brojeva $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{1}{4}, \ldots, x_n=\frac{1}{n+1}$ koji pripadaju intervalu. Tački 0 segmenta dodelimo x_1 sa intervala; tački 1 dodelimo x_2; x_1 segmenta dodelimo x_3 sa intervala; x_2 segmenta dodelimo x_4 intervala itd., tački x_n segmenta dodelimo tačku x_{n+2} intervala itd. Svim ostalim tačkama $x\in[0, 1]$ dodelimo tu istu tačku intervala.

207. Videti zadatak 195.

209. Napišimo tabelu koja „obuhvata" sve racionalne brojeve i precrtajmo one brojeve koji se ponovo pojavljuju i izvršimo numeraciju na sledeći način:

$$0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \ldots$$
$$\frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{2}{2},\ -\frac{2}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \ldots$$
$$\frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{3},\ -\frac{3}{3},\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n}{1},\ -\frac{n}{1},\ \frac{n}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{n}{3},\ -\frac{n}{3},\ \ldots$$

Obeležimo 0 sa 1, $\frac{1}{1}$ sa 2, $-\frac{1}{1}$ sa 3, $\frac{2}{1}$ sa 4, $-\frac{2}{1}$ sa 5, $\frac{1}{2}$ sa 6, $-\frac{1}{2}$ sa 7 itd.

210. χ_0. **213.** Moć kontinuuma. **214.** Moć kontinuuma.

219. Abelova grupa. **220.** Abelova grupa. **221.** Abelova grupa. **222.** Abelova grupa.

223. Polugrupa. **224.** Grupoid. **225.** Grupoid. **226.** Grupa.

227. Abelova grupa. **228.** Abelova grupa. **229.** Grupoid.

230. Abelova grupa za množenje.

231. 1° Da. Jedinični elemenat je e. 2° Da. Jedinični elemenat je a. **232.** 1° Da. 2° Ne.

236. 1° Grupoid. 2° Polugrupa. **239.** Grupa. **240.** Grupa. **241.** Grupa. **265.** Prsten.

266. Prsten. **267.** Prsten. **268.** Polje. **269.** Polje. **270.** Polje. **271.** Prsten.

272. Polje. **273.** Prsten. **274.** Prsten. **275.** Nije prsten. **276.** $x^{-1}=\frac{1}{43}(5+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$.

278. 1° Prsten. **279.** Delitelji nule imaju oblik $(a, 0)$ gde je $a\neq 0$ i $(0, b)$ gde je $b\neq 0$.

282. Identičko preslikavanje i kompleksna konjugacija. **285.** Po modulu 3 sistem je nesaglasan a po modulu 5 ima jedinstveno rešenje $x=2$, $y=3$, $z=2$.

286. $13=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0\sim 1101$. **287.** $4=4\cdot 5^0\sim 4$.

288. $135=2\cdot 7^2+5\cdot 7^1+2\cdot 7^0\sim 252$. **289.** $10101\sim 1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=21$.

290. $3012\sim 3\cdot 4^3+0\cdot 4^2+1\cdot 4^1+2\cdot 4^0=198$ (u dekadnom sistemu): $198=1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+$ $+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+0\cdot 2^0=11000110$.

291. Kako je: $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$ i jedan od dva uzastopna prirodna broja mora biti paran (k ili $k+1$), tvrđenje je dokazano.

293. Pretpostavimo da prostih brojeva ima konačno i neka je najveći među njima p. Tada je $p!+1$ prost broj, jer je $p!$ deljiv sa svim brojevima $2, 3, \ldots, p$ a 1 nije.

294. Skup je ograničen i sa donje (leve) i sa gornje (desne) strane. Donja međa je 1 i pripada skupu A, a gornja 0 i ne pripada skupu A.

295. Ako su racionalni brojevi a i b onda je $c=\frac{a+b}{2}$ racionalan broj, veći od manjeg a manji od većeg, tj. ako je $a<b$ onda je $a<\frac{a+b}{2}<b$.

296. Na $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ne postoji najveći racionalan broj, jer $1 \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ a između ma kog racionalnog broja i 1 postoji racionalan broj. Najmanji racionalan broj na $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ je $\frac{1}{2}$.

298. $\inf S = 0$, $\sup S = 1$.

316. Posmatrajmo brojeve $y = 10^{50}+1$ i $z = 10^{50}+2$. Pošto su y i z uzastopni brojevi i $y^3 < x < z^3$, dokaz je završen.

318. 1° $n = 80, 81, 83, 84$. 2° Jednačina nema rešenja.

319. 1° $8x^2-2x+3 \equiv (4x-3)(2x+1)$. Za $x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{8x^2-2x+3} = 0$ za $x \neq \frac{3}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{8x^2-2x+3} = |4x-3| \sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}$. Da bi ovaj izraz bio racionalan, mora biti $(2x+1)/(4x-3) = m^2$, gde je m racionalan broj $\Rightarrow x = (3m^2+1)/(4m^2-2)$. Znači: $x = 3/4$ i $x = (3m^2+1)/(4m^2-2)$, gde je m racionalan broj.

320. $x^2-4x-1 = 2^m \Rightarrow x^2-4x-(2^m+1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5+2^m}$.
Ako je $\sqrt{5+2^m}$ racionalan, tada je x racionalan, i obrnuto. Zadatak je, prema tome, sveden da se ispita za koje je celo m broj $\sqrt{5+2^m}$ racionalan. Nastaju dve mogućnosti: 1) $m \geqslant 0$. Tada je $5+2^m = (2k+1)^2$ (k ceo broj) i $2^{m-2} = k(k+1)-1$. Desna strana je neparan broj pa mora biti $m = 2$ odakle sledi $x_1 - 5$, $x_2 = -1$.

2) $m < 0$. Tada je $m = -n$, $n > 0$, $\sqrt{5+2^m} - \sqrt{\frac{5 \cdot 2^n+1}{2^n}} \Rightarrow n = 2p$ (p ceo broj), $5 \cdot 4^p + 1 =$ $= (2k+1)^2$ (k ceo broj) $5 \cdot 4^{p-1} = k(k+1)$. Kako su: k, $k+1$, 5 i 4^{p-1} uzajamno prosti, to je $k+1 = 5$, $p = 2$, $m = -4$, tj. $x_3 = \frac{17}{4}$, $x_4 = -\frac{1}{4}$.

322. Pokažimo da postoje četiri jednake razlike među razlikama $d_i = a_{i+1} - a_i$. Zaista, u protivnom bismo imali $a_{20} = (a_{20}-a_{19}) + (a_{19}-a_{18}) + \cdots + (a_2-a_1) + a_1 \geqslant 1 + 3(1+2+3+$ $+ \cdots + 6) + 7 = 71$, što je suprotno pretpostavci da je $a_{20} < 70$.

323. Kada se leva strana, L, razvije poređajmo članove dobijenog zbira po veličini indeksa $r-s$. Broj članova sa indeksom $-(n-1)$ je $n-|-(n-1)| = 1$; sa indeksom $-(n-2)$ broj članova je $n-|-(n-2)| = 2$ itd. Uopšte, kada je $r-s = k$ broj članova je $n-|k|$ pa je

$$L = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n-|a|)\, a_k = \sum_{k=-n}^{n} (n-|k|)\, a_k,$$ što je i trebalo dokazati.

324. Imenioci $m, m+1, \ldots, n$ su oblika $a \cdot 2^k$. Među njima postoji samo jedan sa najvećim izložiocem k. Zaista, ako bi postojala dva imenioca koja su deljiva sa 2^k, bili bi oblika $p \cdot 2^k$ i $q \cdot 2^k$, gde su p i q različiti neparni brojevi. Ali između ma koja dva neparna broja postoji paran broj pa bi između $p \cdot 2^k$ i $q \cdot 2^k$ postojao broj oblika $m \cdot 2^k$, gde je m paran broj, tj. on je oblika $b \cdot 2^{k+1}$, što je suprotno pretpostavci da je k najveći izložilac. Ako sada dati zbir svedemo na najmanji zajednički imenilac, dobićemo razlomak A/B, gde je B paran broj a A neparan broj. A je neparan broj zbog dokazane činjenice da u svim imeniocima $m, n+1, \ldots, n$ postoji samo jedan sa najvećim faktorom oblika 2^k.

325. Pretpostavimo obrnuto, tj. da je $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ racionalan broj. Tada je $3 = \frac{p^2}{p^2}$, odnosno $p^2 = 3q^2$. Odavde se vidi da je p deljiv sa 3, tj. da je $p = 3k$. Na osnovu toga je $q^2 = 3k^2$, pa zaključujemo da je i q deljivo sa 3, što je nemoguće.

326. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionalan broj. Tada je $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=r^2$ ili $5+2\sqrt{6}=r^2$, odnosno $\sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}$, što je nemoguće, jer je na levoj strani iracionalan broj a na desnoj racionalan.

328. Neka je $n+\sqrt{n}=r$ racionalan broj, tada je $\sqrt{n}=r-n$, što je nemoguće, jer je na levoj strani prema (329) iracionalan broj.

329. Neka je $\sqrt[m]{n}=\frac{p}{q}$, gde su p i q prirodni brojevi i $q\neq 1$. Tada je $n=\frac{p^m}{q^m}$, što je nemoguće, jer ako p i q nemaju zajedničkog faktora, nemaju ga ni p^m i q^m.

330. Ako je n kvadrat nekog celog broja b, onda je: $\sqrt{n+\sqrt{n}}=\sqrt{b^2+b}=\sqrt{b(b+1)}$. Kako je $b^2<b(b+1)<(b+1)^2$, to je $b<\sqrt{b(b+1)}<b+1$, što znači da $\sqrt{b(b+1)}=\sqrt{n+\sqrt{n}}$ nije ceo broj i na osnovu zadatka (329) sledi da je iracionalan. Ako n nije kvadrat celog broja, onda, prema (329), $\sqrt{n}$ nije racionalan broj, pa ni $n+\sqrt{n}$ nije racionalan.

332. Za $a\geqslant 0$ imamo na osnovu definicije $\frac{a+|a|}{2}=\frac{a+a}{2}=a$. Za $a<0$: $\frac{a+|a|}{2}=\frac{a+(-a)}{2}=0$. Slično se dokazuje i druga jednakost.

334. Ako je $a<b$, onda je $\frac{a+b+|b-a|}{2}=\frac{a+b+b-a}{2}=b=\max(a,b)$. Ako je $a\geqslant b$, onda je $\frac{a+b+|b-a|}{2}=\frac{a+b-b+a}{2}=a=\max(a,b)$. Slično se dokazuje druga jednakost.

335. Ako je $a+b\geqslant 0$, onda je na osnovu zadatka (334) tvrđenje tačno, jer je u tom slučaju $\operatorname{sgn}(a\cdot b)=1$. Za $a+b<0$ mogu nastupiti slučajevi: $a-b>0$ i $a-b<0$, pa je $\frac{|a+b|+|a-b|}{2}\ \frac{-a-b+a-b}{2}=-b=\max(|a|,|b|)$, jer je pod uslovima $a+b<0$ i $a-b>0$, $b<0$ i $\frac{|a+b|+|a-b|}{2}=\frac{-a-b-a+b}{2}=-a=\max(|a|,|b|)$ pod uslovima $a+b<0$, $a-b<0$, $a<0$, pa je $-a=|a|$. Slično se dokazuje i druga jednakost znajući da je $\operatorname{sgn}(a\cdot b)$ znak proizvoda $a\cdot b$.

336. Za $x\geqslant 0$ imamo da je: $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x+x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-x}{2}\right)^2=x^2$. Za $x<0$ imamo da je: $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{3}\right)^2=\left(\frac{x-x}{2}\right)^2+\left(\frac{x+x}{2}\right)^2=x^2$. Za $x=0$: $\frac{0+0}{2}+\frac{0-0}{2}=0$.

339. Za $n=1$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je tačno za $n=k$, tj. da je: $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ (1). Koristeći ovu pretpostavku, dokažimo da je: $1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Ako levoj i desnoj strani jednakosti (1), dodamo $k+1$, imaćemo $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, čime je dokaz završen.

340. 1° Za $n=1$ tvrđenje jet ačno. Pretpostavimo da je tačno za $n=k$, tj. da je: $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(+1)(2k+1)}{6}$. Dodajmo levoj i desnoj strani ove jednakosti: $(k+1)^2 \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$: 2° Za $n=1$ tvrđenje je tačno. Neka je $1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$, tada je $1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=$
$=(k+1)(k+2)\cdot\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

341. Za $n=1$ tvrđenje je tačno. Neka je $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{(2k+1)}$. Tada je:
$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$.

342. Za $n=1$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je jednakost (1) $1.2.3+2.3.4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ tačna. Ako levoj i desnoj strani ove jednakosti dodamo izraz $(n+1)(n+2)(n+3)$, dobija se jednakost $1.2.3+2.3.4+\cdots+n(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ (2). Jednakost (2) dobija se iz jednakosti (1) stavljanjem $n+1$ umesto n.

343. Treba dodati levoj i desnoj strani $(-1)^n(n+1)^2$.

344. Za $n=1$; 2 tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je tačno za $n=n$ i dodajmo levoj i desnoj strani $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Tada će biti: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Dokažimo još da je $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$, tj. da je: $\sqrt{n}>\sqrt{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n}{\sqrt{n+1}}$. Kako je $\frac{\sqrt{n}}{n}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, to je $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, što je tačno.

352. Za $n=1$ tvrđenje je tačno, jer je $1+\frac{1+1}{2}=2$. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n=k$, tj. da je broj delova $1+\frac{k(k+1)}{2}$. Posmatrajmo još i $k+1$-vu pravu. Ona po uslovu zadatka preseca sve prave u k tačaka i sa njima gradi $k+1$ deo ravni. Prema tome, ukupno će biti delova $1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Poslednji izraz dobija se iz izraza $1+\frac{k(k+1)}{2}$ ako se umesto k stavi $k+1$. Time je tvrđenje dokazano.

354. Za $n=1$ jednakost važi. Pretpostavimo da je tačna za $n=m$, tj. da je $\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2m+3}{4\cdot 3^m}$. Ako dodamo levoj i desnoj strani izraz $\frac{m+1}{3^{m+1}}$, imaćemo: $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2m+3}{4\cdot 3^m}+\frac{m+1}{3^{m+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2m+5}{4\cdot 3^{m+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2(m+1)+3}{4\cdot 3^{m+1}}$.

355. Za $n=1$ jednakost je tačna (pod pretpostavkom da egzistiraju razlomci). Pretpostavimo da je tačna za $n=k$, tj. da je $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-4^4}+\cdots+\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^k}}{1-x^{2^k}}$. Dodajmo levoj i desnoj strani izraz $\frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}}$. Desna strana postaje:

$$\frac{(x-x^{2^k})(1-x^{2^{k+1}})-(1-x)-(1-x^{2^k})\cdot x^{2^k}}{(1-x)(1-x^{2^k})(1-x^{2^{k+1}})}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}.$$

356. Za $n=1$ zbir: $1^3+2^3+3^3$ je deljiv sa 9. Ako je zbir: $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ deljiv sa 9 onda je zbir: $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$ deljiv sa 9.

357. Za $n=0$ i $n=1$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je $f(n)=5^n+2^{n+1}$ deljiv sa 3 i formirajmo $f(n+1)=5^{n+1}+2^{n+2}$. Ovo se može napisati i ovako: $f(n+1)=5^{n+1}+2^{n+2}+5^n+2^{n+1}-5^n-2^{n+1}=6\cdot 5^n+3\cdot 2^{n+1}-f(n)$. Odavde se vidi da je $f(n+1)$ deljiv sa 3.

358. $P_1=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1)$. Vidi se da je P_1 deljiv sa 30 za ma koji prirodan broj a. Kak je još $P_{n+1}=P_n+a^{4n}P_1$, na osnovu teoreme o matematičkoj indukciji sledi da je P_n deljiv sa 30 za svaki prirodan broj a i n.

367. Za $n-1$ je $a_2=3\cdot 3-2\cdot 2=2^2+1$. Pretpostavimo da je $a_k=2^k+1$ za $k=1,2,3,\ldots,n$, dokažimo pomoću te pretpostavke da je $a_{k+1}=2^{k+1}+1$. Zaista je $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=3\cdot 2^k+3-2^k-2=2^k(3-1)=+1=2^{k+1}+1$.

368. Neka je $X=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$. Pomnožimo levu i desnu stranu sa $(1-x)$, imaćemo:

$$\begin{aligned}(1-x)X&=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\&=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\&=(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

odnosno: $(1-x)X=(1-x^{2^n})$, odakle je: $X=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^{2^n-1}$.

369. $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ (1). Za $n=1$ formula je tačna, jer je $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$. Pretpostavimo da je relacija (1) tačna i dokažimo da je: $\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k}=-\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}$.

Množenjem jednakosti (1) sa $\cos\frac{x}{2^{n+1}}$ dobija se $\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{n+1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$

$=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}$.

370. Za $n=2$ važi jednakost $\sin\alpha=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha}$. Ako dodamo levoj i desnoj strani $\sin n\alpha$, dobija se jednakost $\sum_{m=1}^{n}\sin m\alpha=\sin\frac{n-1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin n\alpha=\sin\frac{n\alpha}{2}\left[\frac{\sin\frac{n-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\right.$

$\left.+2\cos\frac{n\alpha}{2}\right]=\sin\frac{n\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{n\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, tj. $\sum_{m=1}^{n}\sin m\alpha=$

$=\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$. Ova jednakost se dobija iz tačne jednakosti, stavljajući $n+1$ umesto n, čime je dokaz završen.

371. Za $n=1$ tvrđenje je tačno, jer je $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$

$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Neka je $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\operatorname{ctg}x$. Tada je

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\operatorname{ctg}x+\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}=$

$=\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}}-\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}-\operatorname{ctg}x.$

378. Jedan elemenat fiksiramo a dva permutujemo:

a b c	*b a c*	*c a b*
a c b	*b c a*	*c b a.*

379.

p e r o	*e p r o*	*r p e o*	*o p e r*
p e o r	*e p o r*	*r p o e*	*o p r e*
p r e o	*e r p o*	*r e p o*	*o e p r*
p r o e	*e r o p*	*r e o p*	*o e r p*
p o e r	*e o p r*	*r o p e*	*o r p e*
p o r e	*e o r p*	*r o e p*	*o r e p*

380. $\frac{(n+2)(n+2-1)\dots(n+2-k-2+1)\cdot(n-k)!}{(a-2)!}=360.$

$\frac{(n+2)(n+1)\cdot n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-2)!}=\frac{(n+2)(n+1)\cdot n(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!}=360,\ n=4.$

381. Najveća permutacija je: $\{n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1\}$.

Elemenat n	pravi	$n-1$	inverzija
„ $n-1$	„	$n-2$	„
„ $n-2$	„	$n-3$	„
⋮		⋮	
„ 2	„	1	„

Ukupno: $S_{n-1} = 1+2+3+\cdots n-1 = \dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$.

382. 1° Postoje sledeći slučajevi: A je na prvom mestu, A na drugom, ..., na kraju, A na $n-1$-om mestu, a B uvek iza A. Isto tako mogu da budu ovi slučajevi: B stoji na prvom, na drugom, ..., ili na $n-1$-om mestu, a A uvek iza B, tj. na drugom, četvrtom, ..., n-tom mestu. Ukupan broj takvih slučajeva je $2(n-1)$. Svakom slučaju posebno odgovara $(n-2)!$ razmeštaja ostalih kuglica. Zbog toga je broj svih mogućnosti da A i B budu jedna iza druge: $(n-2)!\cdot 2(n-1) = 2(n-1)!$. 2° Pošto je broj svih mogućih razmeštaja $n!$, broj mogućnosti da A i B ne budu jedna iza druge je $n!-2(n-1)! = (n-1)!\,(n-2)$.

383. Na osnovu (281) $\Rightarrow$ 3600.

384. Po uslovu zadatka, bele i crne kuglice moraju biti naizmenično jedna iza druge. Zato su moguće dve pretpostavke: a) Bele kuglice zauzimaju neparna mesta, tj.: 1, 3, 5, itd. a crne parna. b) Bele zauzimaju parna a crne neparna. Bele kuglice se mogu rasporediti na neparnim mestima na $n!$ mogućnosti; na isti način crne kuglice zauzimaju parna mesta na $n!$ načina. Znači, da pod prvom pretpostavkom postoji $(n!)^2$ mogućnost da se poređaju kuglice. Druga pretpostavka daje isto toliko mogućnosti, pa je ukupan broj mogućnosti $2(n!)^2$.

385. Označimo elemente redom sa: 1, 2, 3, 4 i napravimo sve permutacije od elemenata 1, 2, 3, 4, pa se vratimo na stare oznake i od onih koje se ponavljaju zadržimo samo jednu a ostale precrtajmo. Dobija se:

a a b c	*b a a c*	*c a a b*
a b a c	*b a c a*	*c a b a*
a b c a	*b c a a*	*c b a a*
a c a b		
a c b a		
a a c b		

386.

1 1 1 2 2 2	1 2 1 2 1 2	2 2 2 1 1 1	2 1 1 1 2 2
1 1 2 1 2 2	1 2 1 2 2 1	2 2 1 2 1 1	2 1 2 2 1 1
1 1 2 2 1 2	1 2 2 1 1 2	2 2 1 1 2 1	2 1 2 1 2 1
1 1 2 2 2 1	1 2 2 1 2 1	2 2 1 1 1 2	2 1 2 1 1 2
1 2 1 1 2 2	1 2 2 2 1 1	2 1 1 2 1 2	2 1 1 2 2 1

387. Broj permutacija od šest elemenata od kojih se ponavljaju dva jedne vrste i tri druge vrste $P_6^{2,3} = \dfrac{6!}{2!\,3!} = 60$.

388. Broj permutacija sa ponavljanjem dva elementa jedne vrste, tri druge vrste i četiri treće vrste. Ukupno elemenata 9. $P_9^{2,3,4} = \dfrac{9!}{2!\,3!\,4!} = 1260$.

389. Ako bi sva mesta bila različita, onda bi broj mogućih razmeštaja bio $P_{24} = 24!$. Broj razmeštaja u jednoj sobi je $P_3 = 3!$ znači, ako su kreveti u jednoj sobi iste cene, broj

različitih razmeštaja je $\frac{P_{24}}{P_3}$. Pošto su sve sobe (ima ih 8) istog kvaliteta, to je broj razmeštaja koji su od važnosti (tj. ko sa kime dolazi u sobu) $\frac{P_{24}}{(P_3)^8}=\frac{24!}{(3!)^8}$.

390. $P_8=8!$

391.
1 2 2 1 3 1 4 1
1 3 2 3 3 2 4 2 $\quad V_4^2=4\cdot 3=12.$
1 4 2 4 3 4 4 3

392. Broj kombinacija bez ponavljanja i s obzirom na poredak (varijacije) četvrte klase od 8 elemenata $V_8^4=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680$.

393. $V_m^k=m(m-1)\ldots(m-k+1)$; $V_{m-1}^{k-1}=(m-1)(m-2)\ldots(m-1-k+1+1)$; $V_{m-1}^{k-1}=(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)$. Znači da je V_m^k veće od V_{m-1}^{k-1} m puta.

395. $$\frac{V_{m+n}^{m-n}+V_{m+n}^{m-n+1}}{V_{m+n}^{m-n+2}}=\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(2n+1)+(m+n)\cdots(2n+2)}{(m+n)\cdots(2n+3)}=$$
$$=(2n+2)(2n+1)+(2n+2)=4(n+1)^2.$$

396. a) $(n-4)(n-5)+(n-3)(n-4)+(n-2)(n-3)=20$. Posle sređivanja dobija se jednačina $3n^2-22n+24=0$, čiji su koreni $n_1=6$ i $n_2=\frac{4}{3}$, znači da je rešenje $n=6$ (drugi koren ne važi, jer je $n_2\notin N$). b) $m(m-1)\cdots(m-n+1)=n\cdot m(m-1)\cdots(m-n+2+1)$. $(m-n+2)(m-n+1)=n$, $n^2-2(m+2)+m^2+3m+2=0$, $n_{1,2}=m+2\pm\sqrt{m+2}$. Jednačina ima rešenja jedino ako je $m+2=k^2$, gde je $k\notin N$ i $k\neq 1$. Tada je $n_{1,2}=k^2\pm k$.

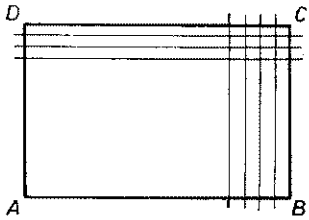
397. Kombinacije treće klase od 5 elemenata bez ponavljanja su:

1 2 3	2 3 4	3 4 5
1 2 4	2 3 5	
1 2 5	2 4 5	
1 3 4		
1 3 5		
1 4 5		

Broj svih je: $C_5^3=\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3}=10.$

398. $n=6.$ **399.** $n=2.$ **400.** $C_n^2=\binom{n}{2}$.

401. Horizontalnih pravih, zajedno sa dve strane AB i DC ima $m+2$ (sl. 46). Vertikalnih takođe $m+2$. Svake dve horizontalne prave određuju jedan pravougaonik. Broj pravougaonika koje određuju horizontalne prave je broj kombinacija druge klase od $m+2$ elemenata: $\binom{m+2}{2}$. Ovo treba pomnožiti sa brojem pravougaonika koje obrazuju vertikalne prave sa $ABCD$, tj. ukupan broj pravougaonika je $\binom{m+2}{2}^2$ (za $m=1$, broj pravougaonika je 9. Koji su to?).



Sl. 46.

402. Broj kombinacija od n elemenata četvrte klase $\binom{n}{4}$; jer četiri tačke daju jedan presek.

403. Broj kombinacija druge glase od 12 elemenata bez obzira na poredak je $\binom{12}{2}=16$.

404. $\binom{12}{3}=220$.

405. Mogu da stignu svi u različitim vremenima, mogu dva zajedno a ostali različito, tri zajedno a ostali različito... mogu u grupama po dva, po tri itd. Ukupan broj mogućnosti da se čovek pojavi sam na stanici je: $C_n^1\cdot C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1$.

406. 1° Broj različitih skupova od 4 slova tako da u svakom a je 10; od svakog skupa može da se napiše po 4! različitih reči (broj permutacija od četiri elementa). Znači da je ukupan broj reči od četiri slova a da svaka sadži a: $10\cdot 4!=240$. 2° Skup od 4 slova u kome se nalazi a daje 3! različitih reči koje počinju sa a. Znači, ukupan broj reči koje počinju sa a od svih slova je: $10\cdot 3!=60$.

407. Od broja pravih, koje se dobijaju spajanjem po dve n tačaka, treba oduzeti broj pravih, koje se dobijaju spajanjem m tačaka, i dodati jednu na kojoj se nalaze tačke m: $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$.

410. 1° n pravih mogu podeliti ravan na $1+\frac{n(n+1)}{2}$ delova, 15 pravih na 121 deo.

2° 14 delova. **411.** 7.

412. Ako su prosti brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onda su delioci broja $a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_n$ sami brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i svi njihovi međusobni proizvodi. Njihov broj je: $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}=$ $=2^n-2$.

413. Svako deljenje pod datim uslovima ekvivalentno je izvlačenje iz špila od 32 karte 16 karata u kojima nema „kečeva", i 2 „keca" iz 4 karte koje su „kečevi". Prvo izvlačenje može se ostvariti na C_{32}^{16} načina, a drugo na C_4^2 moguća načina. Kako svako izvlačenje „ne kečeva" može da se kombinuje sa izvlačenjem „kečeva", to je broj svih mogućnosti: $C_{32}^{16}\cdot C_4^2=\frac{32!}{16!\,16!}\cdot\frac{4}{2!\,2!}$.

414.

1 1 1 1	1 2 2 2	2 2 2 2	3 3 3 3
1 1 1 2	1 2 2 3	2 2 2 3	
1 1 1 3	1 2 3 3	2 2 3 3	
1 1 2 2	1 3 3 3	2 3 3 3	
1 1 2 3			
1 1 3 3			

415. $\binom{k+n-1}{n}$.

416. Broj varijacija sa ponavljanjem 8 elemenata četvrte klase $8^4=4096$.

417. $V_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30240$; $V'^5_{10}=100000$. **418.** $V_3^{12}=3^{12}=531441$.

419. $3^6\cdot 3=2187$. **420.** $3^5\cdot 2^7$.

421. 264 delioca. Zbir svih delioca uključujući jedan i sam broj je 319987040.

422. 3265920.

424. Primenimo binomni obrazac na $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ (1).

425. Pođimo od $0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ (2).

426. Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobija se da je: $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$.

427. $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

428. $$\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)\,k!}\times$$
$$\times\left(1+\frac{\alpha-k}{k+1}\right)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,\frac{\alpha+1}{k+1}=\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)\,k!}=\binom{\alpha+1}{k+1}.$$

431. Sledi na osnovu zadatka (434). **433.** Koristiti zadatke (428) i (429).

434. Sabirci obrazuju geometrijsku progresiju, pa je: $(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\cdots+(1+x)^n=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^k}{x}$. Ako se na ovaj izraz primeni binomni obrazac, posle sređivanja, izraz se može napisati u obliku: $a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots+a_nx^n$.

a) Lako se može uočiti da je $a_m=\binom{n+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}$. b) $a_m=\binom{n+1}{m+1}$. c) Od prvog binoma koeficijenat uz x^m je $\binom{k}{m}$, od drugog $\binom{k+1}{m}$, ..., od poslednjeg je $\binom{m}{n}$. Izjednačavanjem koeficijenata uz x^m s leve i desne strane dobijamo:

$$\binom{k}{m}+\binom{k+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}.$$

435. Broj članova oblika x_i^3, $1\leqslant i\leqslant n$, je $c_n^1=n$. Broj članova oblika $x_i^2x_j$, $(i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j)$ je $2c_n^2=n(n-1)$. Broj članova oblika $x_ix_jx_k$, $(i,j,k=1,2,\ldots,n;\ i\neq j\neq k)$ je $c_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Ukupno: $\frac{n(n+1)(n+1)}{3!}$. (Generalisati zadatak!).

437. Leva strana u razvijenom obliku izgleda $\sum_{\alpha=0}^{n-k}\left[\binom{k+\alpha}{0}+\binom{k+\alpha}{1}+\cdots+\binom{k+\alpha}{k+\alpha}\right]=\left[\binom{k}{0}+\binom{k+1}{0}+\cdots+\binom{n}{0}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k+1}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right]+\cdots+\left[\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k+1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]$. Zbir prvih sabiraka u srednjim zagradama na osnovu zadataka (424) je: $(1+1)^k=2^k$, drugih: $(1+1)^{k+1}$, itd., i kako je $2^k+2^{k+1}+\cdots+2^n=2^{n+1}-2^k$, dokaz je završen.

442. Za $n=1$ identitet je tačan. Pretpostavimo da je tačan za $n=k$, tj. da je:

$$\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}=\binom{k}{0}\frac{1}{x}-\binom{k}{1}\frac{1}{x+1}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}\frac{1}{x+k}.$$ Tada je:

$$\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k)(x+k+1)}=\left[\binom{k}{0}\frac{1}{x}-\binom{k}{1}\frac{1}{x+1}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}\frac{1}{x+k}\right]\frac{k+1}{x+k+1}.$$

Kada se izvrši množenje na desnoj strani, onda se $\nu+1$-vi član može napisati ovako:

$(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\frac{k+1}{x+k+1}\cdot\frac{1}{x+\nu}=(-1)^\nu\binom{k+1}{\nu}\left[\frac{1}{x+\nu}-\frac{1}{x+k+1}\right]$, posle čega je:

$$\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}=\binom{k+1}{0}\frac{1}{x}-\binom{k+1}{1}\frac{1}{x+1}+\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{k}\frac{1}{x+k}-\left[\binom{k+1}{0}-\binom{k+1}{1}+\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{k}\right]\frac{1}{x+k+1}=\binom{k+1}{0}\frac{1}{x}-\binom{k+1}{1}\frac{1}{x+1}+\cdots+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}\frac{1}{x+k+1},$$

jer je vrednost srednje zagrade: $-(-1)^{k+1}$. Na osnovu ovoga naći zbirove: $\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\left(\frac{1}{n+1}\right)$ (za $x=1$);

$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\frac{1}{3}+\binom{n}{2}\frac{1}{5}-\cdots(-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\text{za } x=\frac{1}{2}\right)$. **444.** —30.

445. $(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{3}})^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{\frac{3(10-k)}{4}}\cdot x^{\frac{k}{3}}=\sum_{k=1}^{10}\binom{10}{k}x^{\frac{90-5k}{12}}$. Racionalan sabirak će biti jedino ako je $\frac{90-5k}{12}$ ceo broj. Ako k uzima vrednosti od 0 do 10, lako se može proveriti da je to ispunjeno samo za $k=6$, tj. sedmi član razvoja je racionalan.

446. Pokazati prvo da je $n^{2k}>\binom{2n+1}{k}$. Za $n>2$, $T_1=n^{2n+1}$; za $n=2$, $T_2=40$; za $n=1$, $T_2=T_3=3$.

447. Treba pokazati da je: $1+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\cdots+\frac{C_n^k}{k+1}+\cdots+\frac{C_n^{n-1}}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ili: $1+(n+1)+\frac{n+1}{2}C_n^1+\frac{n+1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{n+1}{k+1}C_n^k+\cdots+\frac{n+1}{n}C_n^{n-1}+1=2^{n+1}$.

Kako je $\frac{n+1}{k+1}C_n^k=\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!}C_{n+1}^{k+1}$, to je leva strana jednaka $1+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^n+1=(1+1)^{n+1}=2^{n+1}$.

448. Posmatrati opšti član $2^{\frac{100-k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}$. Za $k=4p$, p prirodan broj i $k=0, 1, 2, \ldots, 100$ članovi će biti racionalni. Lako se izračuna da je broj takvih članova 26. **449.** 0,7.

450. Neka je: $m=n+1\cdot(n+1)^p-n-1=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}n+1-n-1=$

$=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-2}n^2$. Ovde se vidi da je svaki sabirnik deljiv sa p.

451. $(3\cdot 18)^n+3^n\cdot 16=3^n(18^n+16)=3^n[(17+1)^n+16]=3^n\left[17^n+\binom{n}{1}17^{n-1}+\binom{n}{2}17^{n-2}+\right.$

$\left.+\cdots+\binom{n}{n-1}17+1+16\right]=3^n\left[17^n+\binom{n}{1}17^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}17+17\right]$. Svaki sabirnik je deljiv sa 17.

454. Iz $b+c>a\Rightarrow(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c})^n=b+\binom{n}{1}\sqrt[n]{b^{n-1}c}+\cdots+c>(\sqrt[n]{a})^n$, tj. $\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{a}$.

455. Primenom binomnog obrasca lako je pokazati da je $(\sqrt{2}\pm1)^n=a\sqrt{2}\pm b$, gde su a i b celi brojevi. Ali tada je $1=(\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^n=2a^2-b^2$, odakle je $b=\sqrt{2a^2-1}$. To znači da je $(\sqrt{2}\pm1)^n=\sqrt{2a^2}\pm\sqrt{2a^2-1}$.

456. a) Na osnovu definicije je: $\binom{-1}{k}=\frac{-1(-1-1)\cdot(-1-2)\cdots(-1-k+1)}{k!}=\frac{(-1)^k\cdot k!}{k!}=$

$=(-1)^k$; b) $\binom{-n}{k}=\frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}=\frac{(-1)^k\cdot n\cdot(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}=$

$=(-1)^k\frac{(n+k-1)\cdots(n+3)(n+2)(n+1)n}{k!}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}$.

457. $\binom{\frac{1}{2}}{k}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=(-1)^k\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!}=$

$=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}=\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}$, jer je prema definiciji $(2k)!!=2\cdot4\cdot6\cdots2k=$ $2^k\cdot1\cdot3\cdots k=2^k k!$. Osim toga je $(2k)!=1\cdot2\cdot3\cdots2k=(2k)!!.\ (2k-1)!!$, pa je:

$\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}=\frac{(-1)^k(2k-1)!!\,(2k)!!}{[(2k)!!]^2}=\frac{(-1)^k\cdot(2k)!}{2^{2k}\cdot(k!)^2}$.

458. Nejednakost možemo napisati u obliku $1\cdot2\cdot3\cdots n<\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+1}{2}$. Kako je $1\cdot n<$ $<\left(\frac{1+n}{2}\right)^2$, $2(n-1)<\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, itd., to je $1\cdot2\cdot3\cdots n<\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, što je i trebalo dokazati. Dokaz se može dati i metodom matematičke indukcije.

460. Očigledno je $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Kako je $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}$ time je dokaz završen.

461. Pretpostavimo da je nejednačina zadovoljena za neko k, tj. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}<$ $<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$, onda treba dokazati da je zadovoljena i za $k+1$, tj. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\times$ $\times\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Radi toga dovoljno je pokazati da je $\frac{1}{\sqrt{3k+4}}>\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k-1}{2(k+1)}$.

Iz poslednje nejednačine sledi $4(k+2)^2(3k+1)>(2k+1)(3k+4)$ ili $12k^3+k>0$, što je ispunjeno za svako $k>0$.

462. 1° Aritmetička sredina činilaca, koji figurišu na levoj strani nejednakosti, jednaka je

$$\frac{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots+n\cdot n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Dokaz sledi na osnovu nejednakosti (A).

2° Dokaz se izvodi analogno dokazu pod 1°.

463. Koristiti nejednakost (A) i primetiti da je $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

472. Koristiti nejednakost (A).

477. $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdots n}=\sqrt[n]{\frac{(1\cdot2\cdot3\cdots n)^2}{1\cdot2\cdot3\cdots n}}=\sqrt[n]{\frac{(1\cdot n)[2(n-1)]\cdots[k(n-k+1)]\cdots(n\cdot1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}}$.

No kako je $k(n-k+1)=kn-k(k-1)=kn-n-k(k-1)+n=(k-1)(n-k)+n$, onda je očigledno da za svako $1\leqslant k\leqslant n$, važi nejednakost $k(n-k+1)\geqslant n$. Prema tome, imamo

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{n^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}=\frac{n}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}.$$

Otuda je

$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\geqslant n$ i $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\geqslant\sqrt{n}$. To znači, ako je $n>2$, onda je $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}>n$.

484. Datu nejednačinu možemo napisati u obliku $a^2-a(c+b)+b^2-b(c+a)+c^2-c(a+b)<0$, odakle se očigledno vidi da je izraz na levoj strani negativan.

485. Nejednakost može da se napiše u obliku $(c-ab)^2+(b-ac)^2+(a-bc)^2\geqslant 0$. Znak jednakosti može biti samo kada je: $a=b=c=0$, $a=b=c=1$, $-a=-b=c=1$, $a=-b=-c=1$, $-a=b=c=1$.

490. Koristiti nejednakost (A).

491. Ako se koristi nejednakost (A), biće: $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}>n\sqrt{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_1}}=n$, što je i trebalo dokazati.

493. Prema nejednakosti (A) je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$. No kako je $\sqrt[3]{abc}\leqslant$ $\leqslant\frac{a+b+c}{3}$, onda je očigledno $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{9}{a+b+c}$.

495. Pošto je $c>0$, može se pisati $\frac{a^3+b^3}{c}+c^2+3ab>2(a+b)c$. Ako sada dokažemo da je $\frac{a^3+b^3}{c}+c^2+3ab>(a+b)^2+c^2$, pošto je $(a+b)^2+c^2>2(a+b)c$, onda je dokaz završen. Zaista iz nejednakosti (A) sledi $\frac{a^3+b^3}{c}>a^2+b^2-ab$, ili $\frac{a+b}{c}(a^2+b^2-ab)>a^2+b^2-ab$, pa kako je $a^2+b^2-ab>0$ i $\frac{a+b}{c}>1$, time je dokaz završen.

497. Jednakost važi samo za $a=b=\frac{1}{2}$.

499. Potrebno je dokazati da je $(a+b)(b+d)\geqslant ab+cd+2\sqrt{abcd}$, tj. $cb+ad\geqslant 2\sqrt{abcd}$. No, kako je $cb+ad-2\sqrt{abcd}=(\sqrt{cb}-\sqrt{ad})^2\geqslant 0$, time je dokaz završen.

501. Posmatrajmo a vrednosti $\frac{1}{a}$, b vrednosti $\frac{1}{b}$ i c vrednosti $\frac{1}{c}$. Aritmetička sredina ovih vrednosti je $\frac{a\frac{1}{a}+b\frac{1}{b}+c\frac{1}{c}}{a+b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, a geometrijska $\sqrt[a+b+c]{\frac{1}{a^a}\cdot\frac{1}{b^b}\cdot\frac{1}{c^c}}$,

pa kako je $\frac{3}{a+b+c}\geqslant\sqrt[a+b+c]{\frac{1}{a^a}\cdot\frac{1}{b^b}\cdot\frac{1}{c^c}}$, to je $a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)$, čime je dokaz završen.

504. Koristi se činjenica da je u zbiru $S=x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$ za $x>1$ najveći prvi član a najmanji poslednji, a za $x<1$ — obrnuto. Otuda sledi, da je

$$(k+1)\,x^k>S>k+1, \text{ za } x>1;$$

$$(k+1)\,x^k<S<k+1, \text{ za } x<1.$$

Množeći obe strane zadnjih nejednačina sa $x-1$, imamo za $x\neq 1$

$$(k+1)\,x^k\,(x-1)>x^{k+1}-1>(k+1)\,(x-1).$$

Stavljajući u ovoj nejednačini $x=\dfrac{p}{p-1}$ dobijamo

$$\frac{(k+1)\,p^k}{(p-1)^{k+1}}>\frac{p^{k+1}-(p-1)^{k+1}}{(p-1)^{k+1}}>\frac{(k+1)\,(p-1)^k}{(p-1)^{k+1}};$$

analogno, stavljajući $x=\dfrac{p+1}{p}$ dobijamo

$$\frac{(k+1)(p+1)^k}{p^k+1}>\frac{(p+1)^{k+1}-p^{k+1}}{p^k+1}>\frac{(k+1)\,p^k}{p^k+1}.$$

Otuda imamo:

$$(p+1)^{k+1}-p^{k+1}>(k+1)\,p^k>p^{k+1}-(p-1)^{k+1},$$

ili stavljajući sukcesivno $p=1, 2, 3, \ldots, n$,

$$2^{k+1}-1^{k+1}\,(k+1)\,1^k>1^{k+1}-0,$$

$$3^{k+1}-2^{k+1}>(k+1)\,2^k>2^{k+1}-k^{k+1},$$

$$4^{k+1}-3^{k+1}>(k+1)\,3^k>3^{k+1}-2^{k+1}.$$

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}>(k+1)\,n^k>n^{k+1}-(n-1)^{k+1}.$$

Sabirajući sve ove nejednačine, dobijamo

$$(n+1)^{k+1}-1>(k+1)\,(1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k)>n^{k+1},$$

ili, posle deobe sa $k+1$,

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-\frac{1}{n^{k+1}}\right]\frac{n^{k+1}}{k+1}>1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k>\frac{n^{k+1}}{k+1},$$

što je i trebalo dokazati.

506. Kako je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+$

$+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$, odavde se očigledno dâ zaključiti ono što tvrdi zadatak.

507. 1° $300!>100^{300}$; 2° $100^{200}>200!$

508. Kako je $a^n-b^n=(a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ i $a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\leqslant$ $\leqslant na^{n-1}$, onda je takođe $a^n-b^n\leqslant n\,(a-b)\,a^{n-1}$, što je trebalo dokazati. Slično se dokazuje i leva strana nejednakosti.

509. Ako je $a^n+a^{-n}-1<0$, onda je nejednakost dokazana. Ako je $a^n+a^{-n}-1>0$, onda će biti $a^{2n}-a^n+1\geqslant a^n$ ili $a^{2n}-2a^n+1\geqslant 0$, odnosno $(a^n-1)^2\geqslant 0$, čime je nejednakost dokazana. Pošto je $a^n+a^{-n}-1\neq 10$, to treća mogućnost ne postoji.

510. Neka je m najmanji a M najveći od tih razlomaka. Tada je $m\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant M$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$. Pošto je $b_i>0$, ova nejednakost može da se napiše u obliku $mb_i\leqslant a_i\leqslant Mb_i$. Sabirajući ove nejednakosti od 1 do n, imamo $m\Sigma b_i\leqslant\Sigma a_i\leqslant M\Sigma b_i$ ili $m\leqslant\frac{\Sigma a_i}{\Sigma b_i}\leqslant M$, što je i trebalo dokazati.

511. Ako obeležimo date izraze respektivno sa A i B, onda je očigledno

$$\frac{1}{A}=1+\frac{a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{a^n}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a}};$$

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b}}.$$

Otuda sledi, da je $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$, odnosno $B>A$.

513. Ako stavimo $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, $m=\cos\varphi'$, i $n=\sin\varphi'$, a to je dopušteno, s obzirom na postavljene uslove onda je $|am+bn|=|\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'|=|\cos(\varphi-\varphi')|\leqslant 1$.

514. Prema nejednakosti (A) je

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2n}n=\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Drugi deo nejednakosti dokazuje se na sledeći način: Kako je

$$(a_1a_2\cdots a_n)^2=(a_1a_n)(a_2a_{n-1})\cdots(a_na_1)\quad\text{i}\quad a_ka_{n-k+1}\geqslant a_1a_n,$$

što nije teško dokazati, to je $(a_1a_2\cdots a_n)^2\geqslant(a_1a_n)^n$ ili $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\sqrt{a_1a_n}$.

516. Samo u slučaju kad je $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

518. Posmatrajmo izraz $(\alpha a_1+\beta b_1)^2+(\alpha a_2+\beta b_2)^2+\cdots+(\alpha a_n+\beta b_n)^2=A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2$, gde je $A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, $C=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$ i $B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$. Pošto leva strana predstavlja zbir kvadrata to je $A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2\geqslant 0$ za sve vrednosti α i β. Pa kako je trinom $Ax^2+2Bx+C$ veći ili jednak nuli za sve vrednosti x, onda mora postojati nejednakost $B^2-4AC<0$, odnosno $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_ib_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0$, gde znak jednakosti dolazi u obzir samo kada je $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b^2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, time je dokaz završen.

519. U slučaju kad je n parno, jednakost je moguća kad je $a_1=a_3=\cdots=a_{n-1}=a$, $a_2=a_4=\cdots=a_n=1-a$.

531. Kako je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, odnosno $p+q=pq$, to je $p=\frac{p+q}{q}=\frac{p_1+q_1}{q_1}$, $q=\frac{p+q}{p}=\frac{p_1+q_1}{p_1}$, gde su p_1 i q_1 prirodni brojevi proporcionalni sa p i q $\left(\text{ako je } p=\frac{\alpha}{\beta} \text{ i } q=\frac{\gamma}{\delta}\right.$, gde su α, β, γ, i δ celi brojevi, onda se može staviti, na primer, $\left.p_1=\alpha\delta \text{ i } q_1=\gamma\beta\right)$. Otuda se data nejednakost može pisati u obliku

$$xy\leqslant\frac{qx^{\frac{p+q}{q}}+py^{\frac{p+q}{p}}}{p+q}.$$

Stavljajući

$$x_1=x^{\frac{p_1+q_1}{q_1}},\quad y_1=y^{\frac{p_1+q_1}{q_1}},$$

i koristeći nejednakost (A) biće:

$$xy=x_1^{\frac{q_1}{p_1+q_1}}y_1^{\frac{p_1}{p_1+q_1}}=(\underbrace{x_1x_1\cdots x_1}_{q_1\text{ puta}}\underbrace{y_1y_1\cdots y_1}_{p_1\text{ puta}})^{\frac{1}{p_1+q_1}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\left(\frac{q_1x_1+p_1y_1}{q_1+p_1}\right)^{q_1+p_1}\right]^{\frac{1}{p_1+q_1}}=\frac{qx_1+p_1y}{q+p}=$$

$$=\frac{q}{p+q}x^{\frac{p_1+q_1}{q_1}}+\frac{q}{p+q}y^{\frac{p_1+q_1}{p_1}}=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

Znak jednakosti važi samo ako je $x^p=y^q$.

536. Ovaj zadatak je specijalan slučaj zadatka 534 za $\alpha=\beta=\cdots=\lambda=\frac{1}{n}$. Jednakost važi kad je $a_1:b_1:\cdots:l_1=\cdots=a_n:b_n:\cdots:l_n$.

539. 1° Neka je $\lambda=\frac{m}{n}$, $m>n$, tada imamo:

$$\sqrt[n]{\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)\cdots\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)1\cdot1\cdots1}<\frac{\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)\cdots\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)+m-n}{m},$$

gde se pod korenom činilac $\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)$ uzima n puta, a činilac 1 $(m-n)$ puta. Otuda je:

$\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}<1+\alpha$ ili $(1+\alpha)^{\frac{m}{n}}>1+\alpha\frac{m}{n}$; 2° Dokaz se prepušta čitaocu.

542. 1° $x\in(-\infty, 0)$; 2° $x\in(-\infty, 0]\cup[2, \infty)$; 3° $x\in\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$; 4° $x\in\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$; 5° $x\in(-\infty, 2)$.

543. 1° $x=-\frac{3}{2}$; 2° $x=-1$; 3° $x=2$, $x=\frac{3}{4}$.

544. $x=2$ i za svako $x>2$.

545. Ako je $k<-3$, onda je $x<\frac{3(1-k)}{k+3}$; ako je $k>-3$, onda je $x>\frac{3(1-k)}{k+3}$; za $k=-3$ nejednačina nema smisla.

546. Ako je $k<-1$, onda je $x>\frac{3k-5}{k+1}$; ako je $k=-1$, onda nejednačina nema smisla; ako je $-1<k<1$, onda je $x>\frac{3k-5}{k+1}$; ako je $k=1$, nejednačina nema smisla; ako je $k>1$, onda je $x<\frac{3k-5}{k+1}$.

547. 1° Ako je $a<-2$ i $b>-3$, onda je $x<\frac{b+3}{a+2}$; ako je $a>-2$ i $b<-3$, onda je $x>\frac{b+3}{a+2}$. Za $a=-2$ i $b\geqslant-3$, nejednačina nema smisla ni za jednu vrednost nepoznate. Za $a=-2$ i $b<-3$, nejednačina je zadovoljena za sve vrednosti nepoznate. 2° Ako je $a>b$, onda je $x>\frac{b+a}{b-a}$, ako je $a=b>0$, onda je nejednačina zadovoljena za sve vrednosti nepoznate; ako je $a=b<0$, nejednačina je nemoguća ni za jednu vrednost nepoznate. Ako je $a<b$, onda je $x<\frac{a+b}{b-a}$.

548. Analiziraćemo posebno svaku od nejednačina. 1° Ako je $\lambda<0$, onda je $x<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; ako je $\lambda=1$, onda je nejednačina zadovoljena za sve vrednosti nepoznate; ako je $\lambda>1$, onda je $x>\frac{\lambda-1}{\lambda-1}$. 2° Za ma kakvu vrednost parametra λ je $x>\frac{5}{3}$. Ostaje još da vidimo za koju je vrednost parametra λ ispunjena nejednakost $\frac{5}{3}<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$. Iz poslednje nejednačine sledi $-\frac{1}{2}<\lambda<1$. Za $\lambda\leqslant-\frac{1}{2}$, sistem je nesaglasan. Ako je $-\frac{1}{2}<\lambda<1$, onda je $\frac{5}{3}<x<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$. Ako je $\lambda=1$, prva nejednačina je ispunjena za sve vrednosti nepoznate; ako je $\lambda>1$, onda je $x>\frac{5}{3}$. Konačno: ako je $\lambda\leqslant-\frac{1}{2}$, sistem je nesaglasan; ako je $-\frac{1}{2}<\lambda<1$, onda je $\frac{5}{3}<x<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; ako je $\lambda\geqslant1$ onda je $x>\frac{5}{3}$.

549. Ako je $\lambda<1$, onda je $\frac{11}{4\lambda}<x<\frac{8}{3\lambda}$; ako je $\lambda>0$, onda je $\frac{8}{3\lambda}<x<\frac{11}{4\lambda}$.

550. 1° $x\in\left(\frac{2}{7}, 6\right)$. 2° $x\in\left[\frac{7}{11}; 1{,}5\right)\cup(1{,}5; 11]$. 3° $x\in(-2, \infty)$.

551. 1° $x\in(-1, 0)$. 2° $x\in(-\infty; 0{,}75)$. 3° $x\in(-\infty, 0]\cup[3, \infty)$.

552. 1° $x\in\left(\infty, -\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3}, 0\right)\cup(1, \infty)$. 2° $x\in(-\infty, -1)\cup(-1, 0)\cup(0, \sqrt{2}-1)$.

3° $x\in(-1, 1+\sqrt{2})$. 4° $x\in(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$. **553.** $x\in(2, 6)$.

554. $P(x)=(x^2-2x)^2+8\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$. **555.** 1° $x<-1$; 2° $1<x<2$.

557. 1° $x\in(-1, 1)\cup(1, 3)$; 2° $x\in\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

558. 1° $n\in\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$; 2° $n\in\left(-\infty, -\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{5}, \infty\right)$.

559. 1° $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$; 2° $x_1=1$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=1+\sqrt{2}$, 3° $x_{1,2}=-1$, $x_{3,4}=1$.

560. Ako je $a>b$, onda je $0<x<a-b$; ako je $a=b$, takav broj ne postoji. Ako je $a<b$, onda je $a-b<x<0$.

563. 1° Ako je $k<0$, onda je $\frac{k}{8}<x<-\frac{k}{7}$; ako je $k=0$, nejednakost nije ispunjena ni za jednu vrednost nepoznate. Ako je $k>0$, onda je $-\frac{k}{7}<x<\frac{k}{8}$.

2° Ako je $k\leqslant 0$, nejednačina nije zadovoljena ni za jednu vrednost nepoznate; ako je $0<k<\frac{1}{3}$, onda je $\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}<x<\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}$; ako je $k=\frac{1}{3}$, onda je $x>\frac{1}{2}$; ako je $\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$, onda je ili $x<\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}$ ili $x>\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{2k-1}$; ako je $k\geqslant\frac{1}{2}$, onda je nejednačina zadovoljena za sve vrednosti od x.

3° Ako je $\alpha<0$, onda je $\frac{2\alpha+1+\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}<x<\frac{\sqrt{1-4\alpha}-(2\alpha+1)}{2\alpha}$; ako je $\alpha=0$, onda je $x>-2$; ako je $0<\alpha<\frac{1}{4}$, onda je ili $x<\frac{2\alpha+1+\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}$ ili $x>\frac{\sqrt{1-4\alpha}-(2\alpha+1)}{2\alpha}$.

Ako je $\alpha\geqslant\frac{1}{4}$, onda je nejednačina zadovoljena za sve vrednosti nepoznate.

564. 1° $\lambda\in(2, 4)$. 2° $\lambda\in(-\infty, -2)$. **565.** $\lambda\in(-3, 13)$. **566.** $\lambda\in(-1, 2)$.

567. $\lambda\in(-1, 3)$. **568.** 1° $\lambda\in(-3, -1)$; 2° $\lambda\in(-1, 3)$; 3° $\lambda\in(-2, 4)$.

569. 1° $x\in(-\infty, -1)\cup(5, \infty)$; 2° $x\in[-2, \infty)$; 3° $x\in[-5, 0]$; 4° $x\in(-\infty, -2)\cup[2, \infty)$.

570. 1° $x\in\left(\frac{1}{3}, 2\right]$; 2° $x\in(-\infty, -3)$; 3° $x\in\left[-\frac{7}{3}, \infty\right)$.

571. 1° $k\in(-7, 1)$; 2° $k\in[-1, 3]$; 3° $k\in[1, 5]$.

572. Nejednačina ima smisla samo za $x>0$. Ako kvadriramo levu i desnu stranu, dobija se nejednačina $\sqrt{x(x+1)}>1-x$. Ova nejednačina je zadovoljena uvek kada $1-x<0$, tj. za svako $x>1$. Ako je $1-x>0$, onda posle kvadriranja zadnje nejednačine biće $3x>1$. Ova nejednačina je zadovoljena za $x>\frac{1}{3}$. Otuda je konačno rešenje nejednačine.

$x\in\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. **573.** $x\in[-1, 1]$.

574. Da bi nejednačina imala smisla mora biti $1-x\geqslant 0$ i $x\geqslant 0$, tj. $0\leqslant x\leqslant 1$ i $\sqrt{1-x}>\sqrt{x}$, odnosno $x<\frac{1}{2}$. Znači da se rešenje mora nalaziti u intervalu $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, tako se dobija

sistem nejednačina $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ i $(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})^2 > \frac{1}{2}$ ili $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ i $x(1-x) < \frac{1}{9}$.

Ovaj sistem je zadovoljen za svako $x \in \left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right]$.

575. $x \in \left(\frac{3}{4}, 2\right)$.

576. $x \in [-\infty, -2] \cup \left(5, \frac{74}{13}\right)$.

577. $x \in \left(1, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$.

578. $x \in [0, 5]$.

579. $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right) \cup (0, 2)$.

580. Nejednačina ima smisla samo kada je $x \geqslant 1$. Ako rešimo jednačinu $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$, dobijamo jedan koren $x = \frac{25}{16}$. Radi toga oblast definisanosti funkcije $[1, \infty)$ razdvojićemo na dva dela $\left(1, \frac{25}{16}\right)$ i $\left(\frac{25}{16}, \infty\right)$. Ako uzmemo neku vrednost iz prvog intervala, na primer $x=1$, onda je $\sqrt{1+\sqrt{1}}-\sqrt{1-\sqrt{1}} = 2$ a $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Pa kako je $\sqrt{2} > \frac{3}{2\sqrt{3}}$, znači da je i $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$ za svako $x \in \left[1, \frac{25}{16}\right]$. Ako sada uzmemo neku vrednost iz drugog intervala, npr. $x=9$, onda je leva strana nejednačine $\sqrt{9+\sqrt{9}}-\sqrt{9-\sqrt{9}} = \sqrt{12}-\sqrt{6}$ a desna $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{9+\sqrt{9}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. No kako je $\sqrt{12}-\sqrt{6} < \frac{3\sqrt{3}}{4}$, znači da je $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} < \frac{3}{3}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$ za svako $x \in \left[1, \frac{25}{16}\right]$. Otuda sledi da nejednačina ima rešenje za svako $x < \frac{25}{16}$. Nejednačina se može rešiti i na drugi način.

581. $x \in (-2, -\sqrt[4]{12}) \cup (\sqrt[4]{12}, 2)$.

582. $x \in (5, \infty)$.

583. $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

584. $x \in \left[0, \left(\frac{29}{12}\right)^2\right]$.

585. 1° $x \in (-1, \infty)$; 2° $x \in (0, \infty)$.

586. $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$.

587. $x \in \left(k\pi+\frac{\pi}{4}, k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$.

588. $x \in \left(k\pi-\frac{\pi}{4}, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

589. Nejednačina je zadovoljena za sve vrednosti od x ako je $2a-1<0$, odnosno $a<\frac{1}{2}$. Ako je $a>1$, nema rešenja. Ako je $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, onda se x nalazi u jednom od

sledećih intervala: $x\in\left(k\pi, \frac{\alpha_0}{2}+k\pi\right)\cup\left((2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_0}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\cup\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)\cup\left((k+1)\pi-\frac{\alpha_0}{2}, (k+1)\pi\right)$, gde je $\alpha_0=\arcsin\sqrt{2(1-a)}$ a $k\in C$.

591. $2k\pi+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<\pi+2k\pi$, $2k\pi-2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

592. Leva strana može da se napiše u obliku: $\frac{1}{\sin^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x}\times$ $\times\frac{1}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}$ odnosno $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}>8$. Kako je $1+\operatorname{tg}^2 x>2\operatorname{tg}x$ za $x\in\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, jer je $(1-\operatorname{tg}x)^2>0$, a $\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg}x\right)^2$ ima najmanju vrednost za $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$, ispada da je $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}>8$, što je i trebalo dokazati.

594. $x\in\left(\frac{\sqrt{8k+3}-1}{2}, \frac{\sqrt{8k+3}+1}{2}\right)$.

595. Nejednačina je zadovoljena u dva slučaja: 1° $0<2\pi\cos x<\pi$, odnosno $\cos x>0$ i $\cos x<\frac{1}{2}$. Rešenja ovog sistema su $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ i $x\in\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}, 2k\pi+\frac{5\pi}{2}\right)$; 2° $-2\pi<2\pi\cos x<-\pi$, odnosno $\cos x>-1$ i $\cos x<-\frac{1}{2}$. Rešenje ovog sistema je $x\in\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}, 2k\pi+\pi\right)\cup\left(2k\pi+\pi, 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$.

597. Pošto su u pitanju oštri uglovi, to je $\operatorname{tg}\alpha_1\leqslant\operatorname{tg}\alpha_i\leqslant\operatorname{tg}\alpha_n$ (1) $(i=1, 2, \ldots, n)$, sem toga je $\cos\alpha_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; iz nejednakosti (1) sledi $\operatorname{tg}\alpha_1\cos\alpha_i\leqslant\sin\alpha_i\leqslant\operatorname{tg}\alpha_n\cos\alpha_i$. Uzimajući $i=1, 2, \ldots, n$, i sabirajući sve te nejednakosti, dobijamo $\operatorname{tg}\alpha_1(\cos\alpha_1+\cdots+\cos\alpha_n)\leqslant\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_n\leqslant\operatorname{tg}\alpha_n(\cos\alpha_1+\cdots+\cos\alpha_n)$. Deleći obe strane ove nejednačine sa $\cos\alpha_1+\cdots+\cos\alpha_n$, što je dopušteno, jer je taj zbir pozitivan, dobija se konačno: $\operatorname{tg}\alpha_1\leqslant\frac{\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cdots+\cos\alpha_n}\leqslant\operatorname{tg}\alpha_n$.

601. Označimo levu stranu nejednačine sa t. Tada je $t=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$ $\cos\frac{A+B}{2}$, jer je $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$. Stavljajući $\cos\frac{A+B}{2}=x$, posle očiglednih transformacija dobija se $t=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}=$ $=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2$, odakle sledi $t\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

603. 1° $\sqrt{3}$; 2° $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

605. Ako je $\cos(2x-\varphi)=1$, onda je najveća vrednost $\frac{c+a}{2}+\sqrt{\frac{b^2+(c-a)^2}{2}}$, dok za $\cos(2x-\varphi)=-1$ imamo najmanju vrednost $\frac{c+a}{2}-\frac{b^2+(c-a)^2}{2}$. Ovde je $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

606. 1° $x\in\left(\frac{\pi}{2}+4k\pi,\ 2\pi+4k\pi\right]\cup\left(\frac{7\pi}{2}+4k\pi,\ 4\pi+4k\pi\right]$;

2° $x\in\left(4k\pi,\ \frac{\pi}{2}+4k\pi\right]$, $x\in\left[\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\ 2\pi+4k\pi\right)$, $x\in\left[\frac{5\pi}{2}+4k\pi,\ \frac{7\pi}{2}+4k\pi\right]$.

3° $x\in\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right]$.

607. 1° $x\in[-5,\ -\pi]\cup[0,\ \pi]$; 2° $x\in\left[e^{-1},\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left(\frac{2\pi}{3},\ e\right]$.

608. $x\in\left[-\sin\frac{2}{\pi},\ \sin\frac{2}{\pi}\right]$.

609. 1° $x\in[0,\ \infty)$; 2° $x\in\left(-8,\ \frac{\pi}{2-\pi}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2+\pi},\ +\infty\right)$; 3° $x\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right]$.

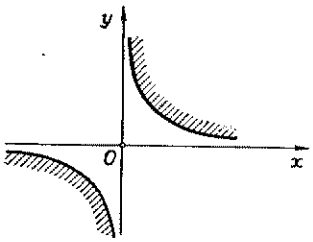
610. 1° $x\in[-3,\ -1]$; 2° $x\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$; 3° $x\in\left[-35,\ -\frac{31}{5}\right]\cup\left[-\frac{29}{5},\ -\frac{25}{11}\right]$.

611. $x\in\left[-2,\ -\frac{7}{4}\right)\cup\left(-\frac{5}{4},\ -\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{7}{4},\ 2\right]$.

612. 1° $y=x=1$; 2° $x=y=0$, $x=2$, $y=0$, $x=y=1$.

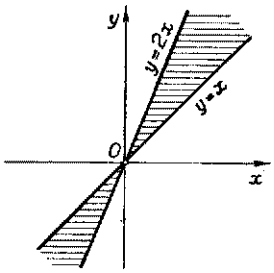
613. Onaj trapez čija je visina veća.

614. Šrafirana oblast (sl. 47), isključujući grane hiperbole.



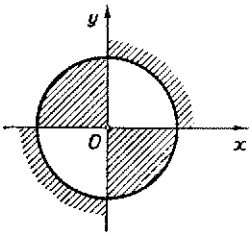
Sl. 47

615. Šrafirana oblast, isključujući tačke na pravama $y=x$ i $y=2x$ (sl. 48).



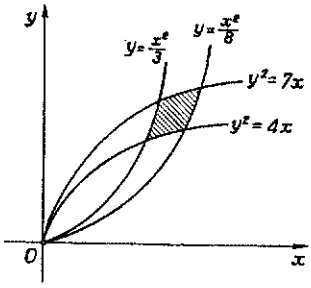
Sl. 48

616. Šrafirano područje (sl. 49), isključujući periferiju kruga. Za $x=y=0$ nejednačina nema smisla.



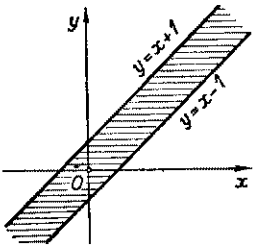
Sl. 49

617. Šrafirano područje (sl. 50) isključujući konturu.



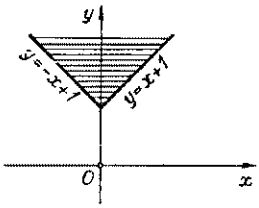
Sl. 50

618. Deo ravni između pravih $y=x+1$ i $y=x-1$, isključujući tačke na pravama (sl. 51).



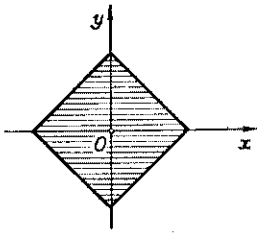
Sl. 51

619. Šrafirano područje isključujući tačke na pravama $y=x+1$ i $y=-x+1$ (sl. 52).



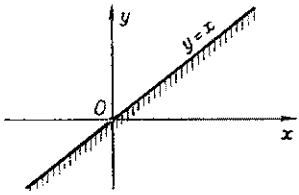
Sl. 52

620. Unutrašnjost kvadrata (sl. 53), isključujući konturu.



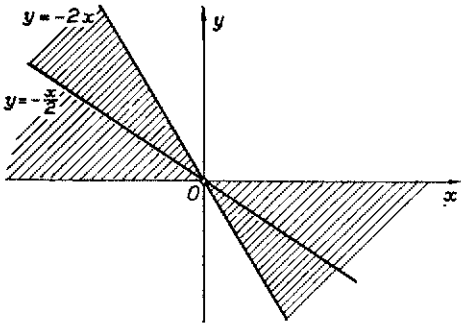
Sl. 53

621. Poluravan omeđena pravom $y=x$ (sl. 54), uključujući i tačke prave, sem tačke $x=y=0$.



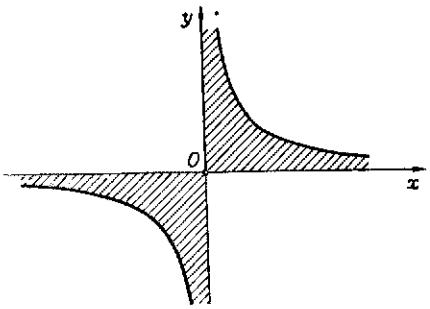
Sl. 54

622. Deo ravni između pravih $y=0$ i $y=-2x$, isključujući tačke na pravoj $y=-\frac{x}{2}$ (sl. 55).



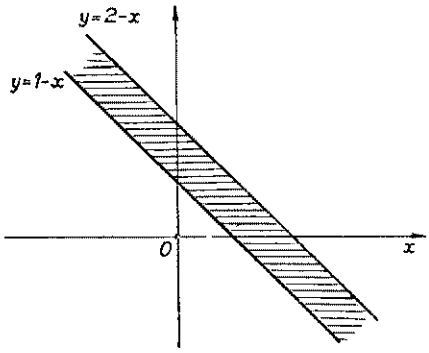
Sl. 55

623. Šrafirano područje, isključujući konture (sl. 56).



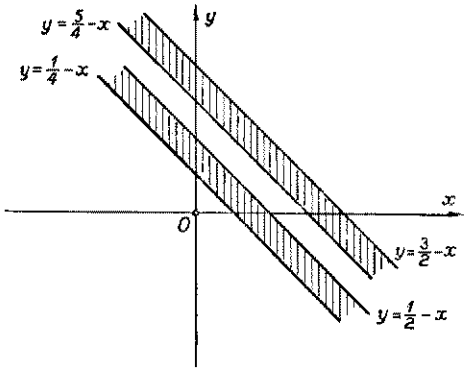
Sl. 56

624. Deo ravni između pravih $y=1-x$ i $y=2-x$ (sl. 57).



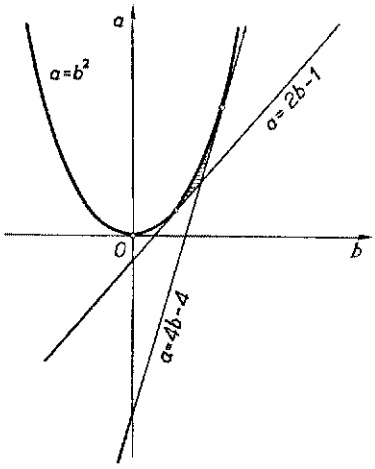
Sl. 57

625. Delovi ravni između pravih $y=\frac{1}{4}-x$ i $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{5}{4}-x$ i $y=\frac{3}{2}-x$ (sl. 58).



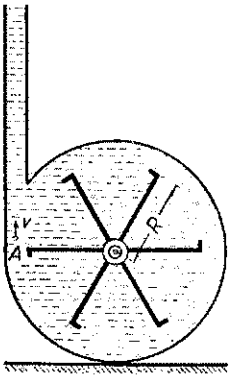
Sl. 58

626. U šrafiranoj oblasti (sl. 59).



Sl. 59

627. $\frac{\pi}{2} \geqslant x \arcsin \frac{\sqrt{(2R-h)h}}{R}$.



Sl. 60

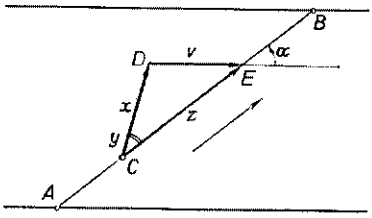
628. Neka je A čestica vode mase m koju kolo ubaci u odvodnu cev (sl. 60). Brzina v koju kolo saopšti toj čestici jednaka je brzini krajnje tačke kola, tj. (1) $v=2\pi Rn$ m/sec, gde je n broj obrta kola u jednoj sekundi, pri čemu je ta brzina orijentisana u pravcu tangente u tački A kruga koji opisuje krajnja tačka kola. Iz (1) zaključujemo da čestice koje kolo ubaci u odvodnu cev imaju kinetičku energiju $W_k=\frac{m(2\pi Rn)^2}{2}$. Očigledno da će se čestice podizati samo dotle, dok sva njihova kinetička energija ne pređe u potencijalnu mgh. Otuda se može izvesti zaključak, da će kašikasto kolo podići vodu najmanje do visine od h metara, ako je ispunjena nejednakost $\frac{m(2\pi Rn)^2}{2} > mgh$. Rešavanjem zadnje nejednačine dobija se $n \geqslant \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi R}$.

629. Ako su brzine čamca i vode y i x, onda se dobijaju sledeće nejednačine $\frac{60}{(y+x)\,\mathrm{m/sec}} \geqslant a\,\mathrm{sec}$, $\frac{60}{(y-x)\,\mathrm{m/sec}} \leqslant b\,\mathrm{sec}$; $y>x>0$. Odatle se rešavanjem ovih nejednačina dobija: $(x+b)\,\mathrm{m/sec} \leqslant y \leqslant (a-x)\,\mathrm{m/sec}$, $0<x\leqslant\frac{a-b}{2}\,\mathrm{m/sec}$.

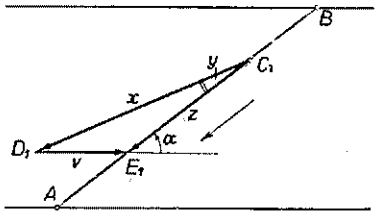
630. $0<x\leqslant\frac{\omega_1 R_1}{n}$. Koristiti jednakost $\omega_2 x=\omega_1 R$.

631. Postavljeni problem se svodi na nejednačinu $\frac{mm_1}{(l-x)^2}k>\frac{Mm_1}{x^2}k$, gde je x rastojanje rakete od centra Zemlje, $l-x$ rastojanje rakete od centra Meseca. Rešavanjem ove nejednačine dobija se $l>x>\frac{l}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}}$. Kako je iz astronomije poznato da je $\frac{m}{M}\approx\frac{1}{81}$, to se konačno dobija $l>x>0{,}9\,l$.

632. Problem se svodi na sistem nejednačina: $6\cos x+4\cos y>5\cdot 10\cos x+5\cos y>8$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, gde su x i y uglovi koje zaklapaju pravci sila F_1 i F_2 sa pravcem kretanja materijalne tačke. Rešavanjem ovog sistema dobija se: 1° $0<y<\arccos\frac{5-6\cos x}{5}$, ako je $\arccos\frac{5}{6}<x<\arccos 0{,}7$; 2° $0<y<\frac{8-10\cos x}{5}$, ako je $\arccos 0{,}3>x>\arccos 0{,}7$.



Sl. 61



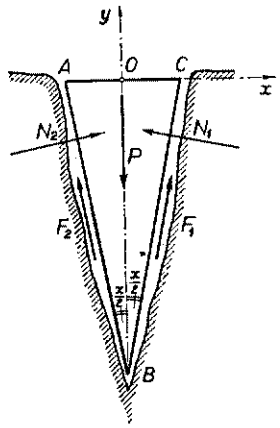
Sl. 62

633. Primenom sinusne teoreme na trouglove CDE i $C_1D_1E_1$ (sl. 61 i 62) dobijamo jednačine: (1) $\frac{v}{\sin y}=\frac{x}{\sin\alpha}$, $\frac{z}{\sin(\alpha+y)}=\frac{v}{\sin y}$ (2), (3) $\frac{z_1}{\sin(\alpha-y)}=\frac{v}{\sin y}$, gde je z brzina broda u odnosu na obalu, kada se brod kreće iz A u B, a z_1 njegova brzina u odnosu na obalu pri kretanju iz B u A. Iz jednačina (1) do (3) dobija se (4) $x=\frac{v\sin\alpha}{\sin y}$, (5) $z=v(\sin\alpha\operatorname{ctg}y-\cos\alpha)$, (6) $z_1=v(\sin\alpha\operatorname{ctg}y-\cos\alpha)$. Na osnovu jednačina (4) do (6) i uslova postavljenih u zadatku, imamo uslove: $\frac{s}{v(\sin\alpha\operatorname{ctg}y+\cos\alpha)}\geqslant t_2$, $\frac{s}{v(\sin\alpha\operatorname{ctg}y-\cos\alpha)}\leqslant t_1$, $x=\frac{v\sin\alpha}{\sin y}$. Rešavanjem ovog sistema dobija se konačno $\operatorname{arc\,tg}\frac{vt_2\sin\alpha}{s-vt_2\cos\alpha}\leqslant y\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{vt_1\sin\alpha}{s+vt_2\cos\alpha}$; $\frac{1}{t_1}\sqrt{s^2+v^2t_1^2-2Svt_1\cos\alpha}\leqslant x\leqslant\frac{1}{t_2}\sqrt{s^2+vt_2^2-2Svt_2\cos\alpha}$.

634. Prema oznakama (sl. 63) dobija se sistem nejednačina: $\dfrac{1}{2\left(\sin\dfrac{x}{2}+f\cos\dfrac{x}{2}\right)}\geqslant n$,

$0°<x<180°$, $n>1$, ili, u prostijem obliku, sistem: $(2fn+1)\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{4}-4n\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-(2fn-1)\geqslant 0$,

$0<\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}<x$, $n>1$, odakle je $0<x<4\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2n-\sqrt{4(1+f^2)n^2-1}}{2nf+1}$ (1). Iz odnosa (1) sledi očigledno da je zadatak moguć samo tada kad n zadovoljava sistem: $4(1+f^2)n^2-1\geqslant 0, 2n>\sqrt{4(1+f^2)^2-1}$, tj kad je $\dfrac{2}{2f}>n\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt{1+f^2}}$.



Sl. 63

635. Problem se svodi na rešavanje nejednačina: $\dfrac{F}{|d-F|}>2$, $\dfrac{F}{|d-F|}<3$, do kojih se dolazi korišćenjem poznatog obrasca fizike $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{F}$. Pri tome treba razlikovati dva slučaja: 1° Ako je lik realan, onda se rešavanjem nejednačina $\dfrac{d}{d-F}>2$ i $\dfrac{F}{d-F}<3$ dobija $\dfrac{4}{3}F<d<\dfrac{3}{2}$.

2° Ako je lik imaginaran, onda nejednačine $\dfrac{F}{F-d}>2$ i $\dfrac{F}{F-d}<3$ daju $\dfrac{1}{2}F<d<\dfrac{2}{3}F$.

636.

Do desethiljaditih	7152486,3352	$\xi=0{,}00003<{}^1/_2\cdot 10^{-4}$
Do hiljaditih	7152486,335	$\xi=0{,}00023<{}^1/_2\cdot 10^{-3}$
Do stotih	7152486,34	$\xi=0{,}00477<{}^1/_2\cdot 10^{-2}$
Do desetih	7152486,3	$\xi=0{,}03523<{}^1/_2\cdot 10^{-1}$
Do jedinica	7152486	$\xi=0{,}33523<{}^1/_2\cdot 10^{0}$
Do desetica	7152400	$\xi=3{,}66477<{}^1/_2\cdot 10^{1}$
Do stotina	7152500	$\xi=13{,}66477<{}^1/_2\cdot 10^{2}$
Do hiljada	7152000	$\xi=486{,}33523<{}^1/_2\cdot 10^{3}$
Do deset hiljada	7150000	$\xi=2486{,}33523<{}^1/_2\cdot 10^{4}$
Do stotina hiljada	7200000	$\xi=47513{,}66477<{}^1/_2\cdot 10^{5}$
Do miliona	7000000	$\xi=152486{,}33523<{}^1/_2\cdot 10^{6}$

637. 300; 340; ili 350; 345; 345.1; 345,07; 345,072.

638. Pošto je $3{,}15<\pi<3{,}15$, to je: $\Delta=|a-\pi|<0{,}001=\Delta a$.

639. 0,05; 0,021%; 0,0005; 1,45%; 0,005; 0,16%. **640.** 0,991 km; 0,02%.

641. $\xi=0{,}14\cdot 10^{-27}$ erg/sec; 2%. **642.** Sme, sa greškom.

643. $\delta_1<\dfrac{1}{3000}$; $\delta_2<\dfrac{1}{10000}$; drugo merenje je tačnije, približno 3,3. **644.** $\delta n=0{,}3\%$.

645. Drugo merenje je tačnije 5 puta. **646.** $\approx 0{,}73\%$. **647.** $\delta\leqslant 0{,}000003$.

648. $\delta\approx 0{,}002\%$. **649.** $\delta=0{,}00017\%$. **650.** Četiri značajne tačne cifre, $d\approx 13{,}596$.

651. 3. a) 2; $48\cdot10^3$. b) 2; 15. c) 1; $6\cdot10^2$. **653.** 0,08302; 235,5.

654. Kod prvog 3, kod drugog 2. **655.** 4 dec. **656.** 1 decimal, 3 decimala.

657. 2 i 3. **658.** $R\approx11354$ om; $\Delta R\leqslant1$ om.

659. a) 239,01. b) $13{,}95\pm0{,}01$. c) 32,3. d) 37,5. e) 20,0. f) 29,5. g) $1{,}6\cdot10^2$. h) 43,2.

660 Najveća vrednost od x: $G(x)=6{,}86$, a najmanja $g(x)=6{,}71$; $x\approx\dfrac{G(x)+g(x)}{2}=6{,}785$; $\Delta x=0{,}075$. **661.** $14{,}80<x<15{,}35$; $x\approx15{,}075\pm0{,}275\approx15{,}1\pm0{,}3$. **662.** 6.

663. $x=15{,}95$; $\delta<0{,}063\%$. **664.** $x=4{,}47$; $\delta\approx0{,}23\%$.

665. a) 84,2. b) 18,5 ili $18{,}47\pm0{,}01$. c) nema tačnih cifara. d) nema tačnih cifara. e) nema tačnih cifara. **666.** $(19{,}9\pm0{,}1)\,\mathrm{cm}^2$.

667. a) $30{,}0\pm0{,}2$. b) $43{,}7\pm0{,}1$. c) $0{,}3\pm0{,}1$. d) 0,36. e) 2,8. f) 2,12. g) 43,01. h) 8,8761. i) 9,0. **668.** $x=2{,}59$; $y=3{,}81$.

669. 100 g ($\pm1{,}8$ g). $0{,}245<x<0{,}247$; $x\approx0{,}246\pm0{,}001$.

670.

	G	g
a	3,142	3,141
b	0,0748	0,0781
x	0,247	0,245

671. $209{,}7\ \mathrm{m}^2$ ($\pm0{,}04$).

672. 108000 km; $\xi=\pm360$ km.

673. a) $1{,}1295\pm0{,}0002$. b) $0{,}120+0{,}006$. c) Količnik je između 48 i 62. **674.** 0,480.

675. 0,480.

676. $G(x)=\dfrac{G(a)}{g(b)}=\dfrac{3{,}88}{25{,}6}\approx0{,}152$; $g(x)=\dfrac{g(x)}{G(x)}=\dfrac{3{,}85}{25{,}8}\approx0{,}149$; $x\approx0{,}150\pm0{,}002$.

677. $2{,}004<x<2{,}022$; $x\approx2{,}013\pm0{,}009$.

678. a) $188\pm1{,}4$. b) $-78\cdot10^{-8}$. c) 0,0064. d) 74,84. e) 6,50. f) 0,22. g) 0,0248. h) 0,28.

679. a) $u=x^n$; $\delta_u=\dfrac{\Delta u}{u}=n\cdot\delta_x=4\,\dfrac{0{,}00005}{0{,}3862}<0{,}00013\cdot4=0{,}00052$ (treba računati na 6 decimala), $(0{,}3862)^4=0{,}02225$. b) 0,78832. **680.** $0{,}8081<x<0{,}8101$; $x\approx0{,}809\pm0{,}001$.

681. $\delta_\tau=2\delta_D+{}^1/_2\delta_H+\delta_\alpha+2\delta_d+{}^1/_2\delta_g=2\cdot1+{}^1/_2\cdot1+3{,}3+2\cdot3{,}3+{}^1/_2\cdot0{,}56=12{,}68\approx13\%$.

682. $\delta V=\delta V_0+\delta(1+\alpha t)=\delta V_0+\dfrac{1}{1+\alpha t}\delta_1+\dfrac{\alpha t}{1+\alpha t}\delta(\alpha t)=\delta V_0+\dfrac{\alpha t}{1+\alpha t}(\delta\alpha+\delta t)=\dfrac{1+3\alpha t}{1+\alpha t}$.

683. $\delta x=\delta(M_1+CM_2)+\delta(t-t_0)+\delta M+\delta(T-t)=\dfrac{M_1}{M_1+CM_2}\delta M_1+\dfrac{CM_2}{M_1+CM_2}(\delta C+\delta M2)+$ $+\dfrac{t\delta t+t_0\delta t_0}{t-t_0}+\delta_M+\dfrac{T\delta T+t\delta t}{T-t}$. **684.** $260\ R_g<t<340$ kg; $t\approx(300\pm40)$ kg.

685. $2{,}0<S<2{,}2$; $S\approx2{,}1\pm0{,}1$.

686. $\Delta A = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_n$. Na osnovu principa jednakih doprinosa je $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cdots \Delta a_n = \Delta a$, pa je $\Delta a = \frac{\Delta A}{n}$.

687. $\Delta a = \frac{0{,}01}{3} = 0{,}0033\cdots > 0{,}001$, tj. treba svaki sabirak uzeti sa tri decimalna mesta. Kako je $\sin 23°30' = 0{,}3987$; $\sqrt{2} = 1{,}414$, to je $A = 5{,}667 - 1{,}414 - 0{,}399 = 3{,}854 = 3{,}854 \pm 0{,}01$.

688. $\Delta a = \frac{1000}{6} = 166{,}6 > 100$; $S = 69300 + 129000 + 357400 + 405100 + 540500 + 830200 = 2331500 \approx 2332000$. **689.** a) 7,50. b) 14,56. c) 6,5. **690.** $r = 10{,}5$ m ($\pm 0{,}1$ m).

691. $\Delta a = 0{,}2$; $\Delta b = 0{,}06$.

692. Iz $\delta_A = \frac{\Delta A}{A}$ sledi da je $\Delta A = A\delta_A$ (grubo). Dalje se postupa kao u zadatku (576).

693. Grubi zbir je $S = 0{,}4 + 3{,}1 + 0{,}3 + 10{,}8 = 14{,}6$; $\Delta S = S \cdot \delta S = 14{,}6 \cdot 0{,}002 = 0{,}0292$; $\Delta a = \frac{\Delta S}{4} = \frac{0{,}0292}{4} = 0{,}0073 < 0{,}05$, pa je $S = 0{,}36 + 3{,}14 + 0{,}33 + 10{,}81 = 14{,}64 = 14{,}6$.

694. $S = 0{,}4 + 0{,}7 + 10{,}2 + 3{,}2 = 14{,}5$; $\Delta S = S \cdot \delta S = 14{,}5 \cdot 0{,}003 = 0{,}0435$; $\Delta a = \frac{0{,}0435}{4} = 0{,}0108 > 0{,}01$; $S = 0{,}45 + 0{,}67 + 10{,}2 + 3{,}25 = 14{,}57$.

695. $\Delta a > 0{,}01$; $S = 0{,}14 - 0{,}33 + 1{,}41 + 5{,}30 = 6{,}52 \approx 6{,}5$

696. Radi obezbeđenja tačnosti u rezultatu; $O = \alpha r \pi$ je dovoljno uzeti dve značajne cifre pa, prema tome, π i R treba uzeti sa tri značajne cifre; to znači $\pi = 3{,}14$ a R meriti do milimetra ako je $R = 90{,}6$ mm; $O = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 90{,}6 = 568{,}968 \approx 570$ mm.

697. $A \approx \frac{3 \cdot 0{,}8}{5{,}4} = \frac{2{,}4}{5{,}4} \approx 0{,}44$; $\delta\Delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}005}{0{,}44} \approx 0{,}01136 > 0{,}01$. To znači da količnik treba uzeti sa dve tačne značajne cifre pa, prema tome, pojedine brojeve koji ulaze u račun sa tri značajne cifre tj. $A = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}810}{5{,}42} = 0{,}46863468$; $A = \approx 0{,}47$.

698. $A \approx \frac{1{,}4 \cdot 0{,}8}{6{,}2} = 0{,}18$; $\delta_A = \frac{\Delta A}{A} = 0{,}027 > 0{,}01$. Prema tome, količnik treba uzeti sa dve tačne značajne cifre a približne brojeve koji ulaze u račun sa tri: $A = \frac{1{,}414 \cdot 0{,}805}{6{,}24} = 0{,}18237179 \approx 0{,}182$.

699. $P \approx 0{,}77$. **700.** $r \approx (10{,}5 \pm 0{,}1)$ m. **701.** π na 4 dec., r na 1 mm tačno.

702. $F = \frac{d \cdot f}{d + f}$. Kako je poslednja računska radnja deljenje, lakše je zadatak rešavati pomoću relativne greške $\delta F = \frac{\Delta F}{F} = \frac{0{,}1 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 0{,}004 < 0{,}005$. Prema relativnoj grešci od 0.005, F mora imati dve značajne cifre. Znači, brojitelj $d \cdot f$ i imenitelj $d + f$ moraju imati tri značajne tačne cifre, a to znači d i f moraju imati tri značajne cifre. Prema tome, treba ih meriti na 0,1 cm = 1 mm tačno.

703. Posmatrajmo sledeću tabelu

	g	G
P	34,690	34,700
P_1	39,810	39,820
P_2	16,440	16,450
$m=p_1-p_2$	18,240	18,260
$m=p_1-p_2$	23,360	23,38
$d=\frac{m}{n}$	0,78015	0,78168

$G(a)$ — gornja granica približnog broja a, $g(a)$ — donja granica približnog broja. $G_{(p)}=34{,}695+0{,}005=34{,}700$; $g_{(p)}=34{,}695-0{,}005=34{,}690$; $G_{(p1)}=39{,}815+0{,}005=39{,}820$; $g_{(p1)}=39{,}815-0{,}005=39{,}810$; $G_{(p2)}=16{,}455+0{,}005=16{,}450$; $g_{(p2)}=16{,}445-0{,}005=16{,}440$; $G\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{G(m)}{G(n)}=\frac{18{,}260}{23{,}360}=0{,}78167808$; $g\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{18{,}240}{23{,}380}=0{,}78015397$. Približna vrednost d je: $d\approx\frac{G(d)+g(d)}{2}=0{,}781168+0{,}780015$. Relativna greška d je: $\delta_d=\frac{\Delta d}{d}=\frac{0{,}001}{0{,}781}=0{,}0012804097\cdots\approx 0{,}00128$, pa je granica apsolutne greške 0,001, granica relativne greške 0,13%.

704. $G(S)=\frac{G(2S)}{2}$; $g(S)=\frac{g(2S)}{2}$; $G(p/2)=1{,}825\approx 1{,}83$. (Povećanje nagore, jer je u pitanju gornja granica). $g(p/2)=1{,}745\approx 1{,}74$. (Povećanje nadole, jer je u pitanju donja granica).

$G(S^2)=95{,}06$ Pravilo 6

$g(S^2)=94{,}09$ Pravilo 6

$$g(S^2/2p)=\frac{g(S^2)}{G(2p)}=12{,}88.$$

(Pravilo 6, i u pitanju je donja granica).

	g	G
$2S$	19,40	19,50
S	9,70	9,70
p	3,59	3,65
$2p$	8,18	7,30
$p/2$	17,4	1,83
S^2	94,09	95,06
$S^2/2p$	12,88	13,24
r	14,62	15,07

Približna vrednost za r je: $r=\frac{G(r)+g(r)}{2}=\frac{15{,}07+14{,}62}{2}=14{,}845$. Apsolutna greška za r je: $\Delta r=\frac{G(r)-g(r)}{2}=0{,}225<0{,}3$.

Relativna greška: $\frac{\Delta r}{r}=0{,}020270270\cdots\approx 0{,}0202$.

705. Na osnovu principa jednakih doprinosa je: $\Delta R\leqslant\left|\frac{\partial R}{\partial r}\Delta r\right|+\left|\frac{\partial R}{\partial r}\Delta h\right|$; $\Delta R=2\left|\frac{\partial R}{\partial r}\Delta r\right|\Rightarrow\Delta r=\frac{\Delta R}{2\left|\frac{\partial R}{\partial r}\right|}$; $\Delta R=2\left|\frac{\partial R}{\partial r}\Delta h\right|\Rightarrow\Delta h=\frac{\Delta R}{2\left|\frac{\partial R}{\partial h}\right|}$. Izračunavanjem $\frac{\partial R}{\partial r}$ i $\frac{\partial R}{\partial r}$ i zamenom odgovarajućih vrednosti dobija se da se r mora meriti sa tačnošću 0,1% a h sa tačnošću 0,7%.

706. $P=\pi S(R+r)$; $\Delta P=S(R+r)\Delta\pi+\pi(R+r)\Delta S+\pi S+\Delta R+\pi S\Delta r$; $\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{\Delta S}{S}+\frac{\Delta R}{R+r}+\frac{\Delta r}{R+r}$. Kako je prema zadatku: $100\frac{\Delta P}{P}=1\Rightarrow\frac{\Delta P}{P}=0{,}01$, to je $0{,}01=4\frac{\Delta\pi}{\pi}\Rightarrow\Delta\pi=\frac{0{,}01\cdot\pi}{4}=0{,}002\cdot 3{,}141593=0{,}0078539825\cdots<0{,}05$, prema tome broj π treba uzeti sa dve decimale, odnosno sa tri značajne cifre, jer je u tom slučaju $\Delta\pi=$

$= {}^1/_2\, 0{,}01 = 0{,}05$; dalje je: $0{,}01 = 4\dfrac{\Delta S}{S}$; $\dfrac{\Delta S}{S} = 0{,}0026$; $100\dfrac{\Delta S}{S} = 0{,}25$. Prema tome S, treba meriti sa tačnošću od 0,25%. $0{,}01 = 4\dfrac{\Delta R}{R+r}$; $\Delta R = 0{,}0025\,(R+r)$; $100\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{0{,}25\,(R+r)}{r} = \dfrac{0{,}25\cdot 3}{2} = \dfrac{0{,}72}{2} = 0{,}375 > 0{,}3$. Prema tome, R treba meriti sa tačnošću od 0,3%, a r sa tačnošću od 0,7%.

707. $x \approx \dfrac{1{,}90+2{,}27}{2} = \dfrac{4{,}17}{2} = 2{,}085$

$\xi = \dfrac{2{,}27-1{,}90}{2} = \dfrac{0{,}37}{2} = 0{,}185.$

$x \approx 2{,}1 \pm 0{,}2.$

708. $\delta \approx 8{,}8 \pm 0{,}25.$

709. $t = 0{,}0233 \pm 0{,}001.$ $\delta t = 0{,}227\%.$

710. $V \approx (15607 \pm 1)\ \mathrm{m}^3$; $\delta_V < \dfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}.$

711. $\ln E = 3\ln l + \ln p - 3\ln a - \ln b - \ln S - \ln 4;$

$\dfrac{\Delta E}{E} = 3\dfrac{\Delta l}{l} + \dfrac{\Delta p}{p} - 3\dfrac{\Delta a}{a} - \dfrac{\Delta b}{b};$

	g	G.
a	3,57	3,58
b	3,45	3,46
$a+b=m$	7,02	7,04
$a-b$	0,11	0,13
c	28,33	28,34
$(a-b)\,c=n$	3,11	3,69
$x=\dfrac{m}{n}$	1,90	2,27

$\partial E = 3\delta_l + \delta_p - 3\delta_a - \delta_b - \delta E = 3\cdot 0{,}01 + 0{,}001 + 3\cdot 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 \approx 0{,}081;$

$E = (2{,}10 \pm 0{,}17)\ 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}.$

712. 1° $z = i$; 2° $z = -1$; 3° $z = -i$; 4° $z = -1$; 5° $z = -2+3i$.

713. 1° (0, 1); 2° (0, −2); 3° (−1, 1); 4° (2, −3).

714. 1° $R_e = 0$, $J_m = -7$; 2° $R_e = 2$, $J_m = -4$; 3° $R_e = \cos\alpha - 1$, $J_m = \sin\alpha$;
4° $R_e = \alpha + b$, $J_m = b + 1$.

715. 1° $\rho = 1$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; 2° $\rho = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; 3° $\rho = 5$, $\varphi = 0$; 4° $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

5° $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$; 6° $\rho = \sqrt{29}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}$; 7° $\rho = 5$, $\varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$;

8° $\rho = \sqrt{34}$, $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$.

716. 1° $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2° $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; 3° $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;

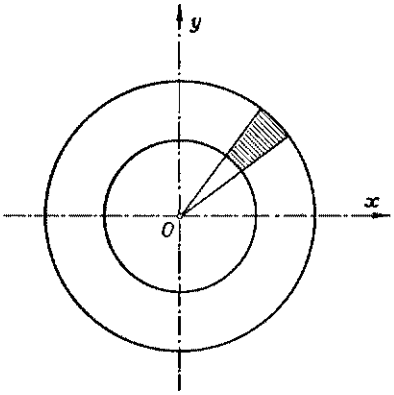
4° $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)$; 5° $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$;

6° $\dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

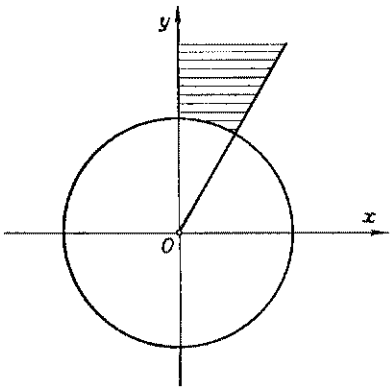
717. 1° e^{0i}; 2° $e^{\pi i}$; 3° $e^{\frac{\pi}{2}i}$; 4° $e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 5° $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$; 6° $\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 7° $\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$;

8° $\sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}i}$. **718.** $t = \pi$. **719.** $n = 2$.

720. 1° U šrafiranom delu (sl. 64), isključujući tačke na periferiji krugova. 2° U šrafiranoj oblasti (sl. 65), isključujući tačke na delu prave $y=\sqrt{3}\,x$; 3° U krugu čiji je poluprečnik $r=1$ a centar je u tački z_0; 4° U oblasti koja pripada krugovima $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2-2x=0$; 5° U oblasti unutar parabole $y=4(1-x)$.



Sl. 64



Sl. 65

721. $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$.

722. Oblast u kojoj je nejednačina zadovoljena je: u krugu $|z|=1$, desno od prave $R(z)=\frac{k-1}{k+1}$, u uglu $\arg(1-z)$ $\arccos\frac{1}{k}$. **725.** $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$.

726. $\alpha\in(-1,\ 0)\vee(0,\ 1)$. **728.** $f(z)=20+38\,i$ $f(z)=20-38\,i$.

730. 1° a^2-ab+b^2; 2° $(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)$.

732. Na periferiji kruga $x^2+y^2=1$.

734. Stranice paralelograma čija su temena: $(a,\ 0)$ $(0,\ a)$, $(-a,\ 0)$ i $(0-a)$.

736. 1° $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$; 2° $\frac{y_1}{x_2}=-\frac{y_2}{x_2}$; 3° $\frac{y_1}{x_1}=-\frac{y_2}{x_2}$; 4° $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$. **738.** $b=-3$, $c=5$.

739. $p(x)=-x^3+2x^2-3x+3$. **740.** $z=\frac{3}{4}+i$. **741.** $1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\rho_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

742. $\rho_2=\frac{2+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$. **743.** $z_1=1+i$; $z_1=-(1+i)$. **744.** $z=2\sqrt{2}(1+i)-1$.

745. $z_1=-1$, $z_2=-(1+2i)$.

746. 1° $z=0$, $z=1$, $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2° $z=0$, $z=\pm1$, $z=\pm i$.

747. To su svi brojevi koji ispunjavaju uslove:

$$x_2y_2=\frac{k}{2} \quad \text{i} \quad x_1y_2=k.$$

748. 1° $x^2+y^2-6x=9$. 2° $x^2+2y^2+3x-4=0$. 3° $x^2+y^2-4x=0$.

749. $x=y\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $y=2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2})+4$.

750. Jednačine krugova su: $|z+i|=\sqrt{2}$ i $|z-i|=\sqrt{2}$.

753. 1° Elipsa sa žižama u tačkama $z=\pm 2$ i velikom poluosom 5/2; 2° Parabola y^2-2x+1; 3° Poluravan ograničena pravom $x+y=1$, koja sadrži koordinatni početak.

758. 1° $-i$; 2° $-i$; 3° $\dfrac{1}{5}(1+3i)$.

759. 1° $R_e=\dfrac{3}{5}$, $I_m=-\dfrac{6}{5}$; 2° $R_e=-\dfrac{3}{5}$, $I_m=\dfrac{11}{5}$; 3° $R_e=-\dfrac{6}{5}$, $I_m=-\dfrac{12}{5}$;

4° $R_e=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{50}$, $I_m=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{50}$; 5° $R_e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $I_m=\dfrac{1}{2}$.

760. 1° $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; 2° $-\dfrac{1+32i}{25}$; 3° $\dfrac{44-5i}{318}$. **761.** $y^2=2ax$.

762. 1° $\dfrac{2i}{3}$; 2° $-\dfrac{1}{5}(2-i)$. **763.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. **765.** $z=-\dfrac{1}{2}(1+i)$.

766. Pošto je moduo količnika dva kompleksna broja jednak količniku modula, dobija se sistem jednačina: $9[(x-12)^2+y^2]=25[x^2+(y-8)^2]$, $(x-4)^2+y^2=(x-8)^2+y^2$, odnosno $x=6$ i $y^2-25y+136=0$, odakle je konačno $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$.

767. $x=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)+\beta^2}{(\alpha-2)^2+\beta^2}$, $y=-\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha-2)^2+\beta^2}$; $x^2+y^2+x=0$.

770. 1° $y^2=2-x-x^2$; 2° $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. **772.** $z_1=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$, $z_2=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$.

776. 1° Prava koja prolazi kroz tačke z_1 i z_2, iz koje je isključena tačka z_2;

2° Krug prečnika $2r=|z_1-z_2|$, iz koga je isključena tačka z_2.

777. 1° Familija krugova koji dodiruju imaginarnu osu u koordinatnom početku i sama imaginarna osa: $c(x^2+y^2)=x$;

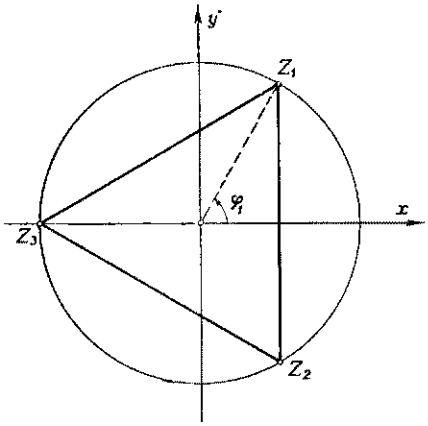
2° Familija krugova koji dodiruju realnu osu u koordinatnom početku i sama realna osa.

778. 1° Familija hiperbola $x^2-y^2=c$; 2° Familija hiperbola $xy=\dfrac{c}{2}$.

779. 1° Familija Apolonijevih krugova; 2° Familija lukova krugova sa krajevima u tačkama z_1 i z_2 (tu spadaju i dva pravolinijska odsečka sa krajevima u tačkama z_1 i z_2, jedan od tih odsečaka sadrži beskonačno daleku tačku).

782. Pošto su ispunjeni uslovi $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)=+\arg\left(\dfrac{c-a}{c-b}\right)$, tj. $\beta=\pi-\alpha$, i $\dfrac{|z-a|}{|z-b|}=\dfrac{|c-a|}{|c-b|}$, tačka z se nalazi na krugu koji prolazi kroz tačke a, b i c, kao i na Apolonijevom krugu koji prolazi kroz tačku c.

783. Pošto su tačke z_1, z_2 i z_3 raspoređene na jediničnom krugu, onda se množenjem sa $e^{\alpha i}$ mogu dovesti u položaj da je jedna od njih, npr. $z_3=-1$, a da se pri tom postavljeni uslovi ne promene. Tada će biti: $z_3=-1$, $z_1=\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$, $z_2=\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2$. Koristeći uslov $z_1+z_2+z_3=0$ dobija se sistem jednačina: $\cos\varphi_1+\cos\varphi_2-1=0$, $\sin\varphi_1+\sin\varphi_2=0 \Rightarrow$ da je $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ a $\varphi_2=-\frac{\pi}{3}$ ili $\varphi_1=-\frac{\pi}{3}$ a $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$, čime je dokaz završen (sl. 66).



Sl. 66

786. Pretpostavimo da je prava imaginarna osa, i da se sve tačke nalaze desno od nje. Ovim se ne narušava opštost, pošto je to uvek moguće izvesti množeći svaki od brojeva brojem oblika $e^{\alpha i}$. Tada je očigledno da je $R_e(z_k)>0$ i $R_e\left(\frac{1}{z_k}\right)>0$ za ma koje k.

788. 1° -8; 2° 64; 3° -27; 4° $32i$.

791. Kako je $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=\left(\frac{(1+i)(1+i)}{2}\right)^n=i^n$, onda je očigledno da je za n parno realni deo 1 ili -1 a imaginarni 0; za n neparno realni deo je 0 a imaginarni 1 ili -1.

803. 1° $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$; 2° $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 3° $\dfrac{(1-a)\cos x-a^{n+1}\cos(2n+3)x+a^{n+2}\cos(2n+1)x}{1-2a\cos 2x+a^2}$;

4° $\dfrac{1-a^2-2a^{n+1}\cos(n+1)x+2a^{n+2}\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}$.

804. 1° $\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{\sin(n+1)\cos n\alpha}{2\sin\alpha}$; 2° $\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{\sin(n+1)\cos n\alpha}{2\sin\alpha}$;

3° $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$; 4° $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$.

807. Kako je $\sin x=\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$, to je $\sin^3 x=\left(\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3=$

$$=\frac{e^{3xi}-3^2xi\,e^{-xi}+3e^{xi}e^{-2xi}-e^{-3xi}}{-8i}=\frac{3i\sin 3x-6i\sin x}{-8i}=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x);$$

2° $\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$; 3° $\frac{1}{16}(11\sin x-5\sin 3x+\sin 5x)$.

808. 1° $\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 2x)$; 2° $\frac{1}{8}(3+4\cos x+\cos 4x)$; 3° $\frac{1}{16}(10\cos x+5\cos 3x+\cos 5x)$.

809. Ako se stavi $\cos x+i\sin x=\varepsilon$ i $\cos x-i\sin x=\varepsilon^{-1}$, dobija se $\cos^{2n}x=\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon^{-1}}{2}\right)^{2n}=$ $=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\varepsilon^{-k}\varepsilon^{2(n-k)}$. Množenjem leve i desne strane zadnje jednačine sa 2^{2n}

dobija se $2^{2n}\cos^{2n}x=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\varepsilon^{2(n-k)}+\binom{2n}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{n}\varepsilon^{2(n-k)}$. Ako se u drugom sabirku na desnoj strani zadnje jednačine stavi $n-k=-(n-k')$, tada on dobija oblik $\sum_{k'=n-1}^{0}\binom{2n}{2n-k'}\varepsilon^{-2(n-k')}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\varepsilon^{-2(n-k)}$, pa je $2^{2n}\cos^{2n}x=$ $=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}(\varepsilon^{2(n-k)}+\varepsilon^{-2(n-k)}$. No, kako je $\varepsilon^{2(n-k)}+\varepsilon^{-2(n-k)}=2\cos 2(n-k)$, to je konačno $2^{2n}\cos^{2n}x=\sum_{k=0}^{n-1}2\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)x+\binom{2n}{n}$, što je i trebalo dokazati.

811. 1° $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2° $\pm(2+i)$; 3° $\pm(i-2)$; 4° $\pm(3+4i)$.

812. 1° $\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2k+1}{3}\pi+i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)$, $(k=0, 1, 2)$;

2° $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi\right)$, $(k=0, 1, 2, 3)$; 3° $\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$;

4° $\sqrt{3}\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$; 5° $2\left(\cos\frac{2k-1}{6}\pi+i\sin\frac{2k-1}{6}\pi\right)$.

813. 1° $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{1+4k}{6}\pi+i\sin\frac{1+4k}{6}\pi\right)$; 2° $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3+4k}{6}\pi+i\sin\frac{3+4k}{6}\pi\right)$;

3° $2\left(\cos\frac{1+4k}{10}\pi+i\sin\frac{1+4k}{10}\pi\right)$; 4° $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{3+4k}{12}\pi+i\sin\frac{3+4k}{12}\pi\right)$.

814. 1° $\sqrt[6]{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; $\varphi=45°$, $\varphi=165°$, $\varphi=-75°$; 2° $2\left(\cos\frac{8k+3}{12}\pi+i\sin\frac{8k+3}{12}\pi\right)$;

3° $\pm 2(\sqrt{3}+i)$, $\pm 2(-1+i\sqrt{3})$; 4° $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{20}\pi+i\sin\frac{8k+1}{20}\pi\right)(k=0, 1, 2, 3, 4)$;

5° $\sqrt[14]{13}\left(\cos\frac{2k\pi+\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}}{7}+i\sin\frac{2k\pi+\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)}{7}\right)$, $(k=0, 1, 3, 4, 5, 6)$.

816. $z=\cos\frac{\pi+8k\pi}{12}+i\sin\frac{\pi+8k\pi}{12}$, $(k=0, 1, 2)$.

817. 1° $R_e(z_1-z_2)=\pm 1$, $I_m(z_1-z_2)=\pm 2$; 2° $R_e(z_1-z_2)=1$, $I_m(z_1-z_2)=0$.

820. 1° $2, -1\pm i\sqrt{3}$; 2° $-2, 1\pm i\sqrt{3}$; 3° $\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{1+2k}{4}\pi+i\sin\frac{1+2k}{4}\pi\right)$;

4° ± 3, $\pm 3i$; 5° $\pm 2i$, $\pm\sqrt{3}\pm i$.

821. 1° $z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{8k-1}{12}\pi-i\sin\frac{8k-1}{12}\pi\right)-i$; 2° $z_k=\sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{2k\pi-\arcsin\left(\frac{4}{3}\right)}{5}+\right.$

$$+i\sin\frac{2k\pi-\arcsin\left(\frac{4}{3}\right)}{5}\Bigg),\ (k=0,1,2,3,4);\quad 3^\circ\ z_k=\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{8k-1}{24}\pi+i\sin\frac{8k-1}{24}\pi\right);$$

$$4^\circ\ z=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

822. 1° Rešavanjem jednačine po x, dobija se $x=\frac{i(1+a)}{a-1}$, gde je $a=\sqrt[n]{-1}-\cos\frac{2k+1}{n}\pi+$ $+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$, odakle je dalje $x=\frac{\sin\frac{2k+1}{n}\pi}{1-\cos^2\frac{2k+1}{n}\pi}=\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi$,

$(k=0,1,\ldots,(n-1))$.

2° $i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $(k=1,2,3,\ldots,(n-1))$.

823. 1° Kako je $\frac{1+ia}{1-ia}=e^{i2\operatorname{arctg}a}$, biće $\frac{1+ix}{1-ix}=e^{\frac{k+\operatorname{arctg}a}{n}\pi i}$ ili, kraće napisano, $\frac{1+ix}{1-ix}=e^{2\alpha\pi i}$, gde je $\alpha=\frac{k+\operatorname{arctg}a}{n}$. Iz zadnje jednačine se dobija $x=\frac{1}{i}\frac{e^{2\alpha i}-1}{e^{2\alpha i}+1}$, odnosno $x=\operatorname{tg}\frac{2k+\operatorname{arctg}a}{n}\pi$, $(x=0,1,2,3,\ldots)$.

824. Ako se jednačina napiše u obliku $\left(\frac{z^2-2}{z}\right)^n=-1$, onda se može dalje pisati $\left(\frac{z^2-2}{z}\right)^n=e^{\pi i}$. Stavljajući $\frac{z^2-2}{z}=u$, dobija se $u=e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}$. Iz jednačine $z^2-ze^{\frac{2k+1}{n}\pi i}-2=0$ dobija se konačno $z=\frac{e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}\pm\sqrt{e^{\frac{2(2k+1)}{n}\pi i}+8}}{2}$.

825. $x_k=\frac{a}{\varepsilon_k\sqrt[n]{2}-1}$, gde je $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $(k=0,1,\ldots,(n-1))$.

827. Kako je $\sqrt[2n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n}$, gde je $(k=1,2,\ldots,2n)$, dobija se $x^{2n}-1=$ $=\prod_{k=1}^{2n}(x-x_k)=\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)\prod_{k=n+1}^{2n-1}(x-x_k)(x^2-1)$, jer je: $x_n=-1$, $x_{2n}=1$. No, kako je $x_{2n-k}=\overline{x}_k$, biće $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\overline{x}_k)=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$.

830. 1° Prema zadatku (827) postoji identitet $x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1=$ $=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$.

Ako se u ovom identitetu stavi $x=1$, dobija se

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=2^{2(n-1)}\sin^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)\pi,$$

odakle je konačno

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)}{2n}\pi=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

831. $1+\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$. **832.** $z_4=z_1-z_2-z_3$. **833.** $a+bi+Re^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

834. $z_3=(z_2-z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$.

835. 1° $C^1_{2n+1}(1-x)^n-C^3_{2n+1}(1-x)^{n-1}x+\cdots+(-1)^n x^n=0$;

2° $C^1_{2n+1}x^n-C^3_{2n+1}x^{n-1}+C^5_{2n+1}x^{n-2}-\cdots=0$.

840. $\frac{5000\cdot 50!}{(25!)^2}R^{50}$.

843. 1° $1+(2n+1)\pi i$; 2° $\ln 2+(2n+1)\pi i$; 3° $(4n+1)\frac{\pi i}{2}$; 4° $(8n+1)\frac{\pi i}{4}$.

844. 1° $e^{-2n\pi+i\ln 2}$; 2° $e^{-(4\pi+1)\frac{\pi}{2}}$; 3° $e^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}$.

845. 1° $i\,\mathrm{th}\frac{\pi}{2}$; 2° $\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$; 3° $\frac{1}{2i}\ln\frac{1-x}{1+x}+n\pi$.

Glava III

846. Ne može. **847.** Mogu sa znakom minus. **848.** Može sa znakom plus.

849. Ne može. **850.** Ne može. **851.** Sa znakom plus.

852. Sa znakom $(-1)^{\binom{n}{2}}$. **853.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$.

854. 0.

855. 3. **856.** 0. **857.** $4xy$. **858.** $\sin(\alpha-\beta)$. **859.** 0. **860.** 0.

861. $a^2+b^2+c^2+d^2$. **862.** 0. **863.** 1. **864.** 40. **865.** -68. **866.** 20.

867. 100. **868.** -2. **869.** 90. **870.** -84.

871. $(x_2-x_1)\sin(\gamma-\beta)+(y_2-y_1)\sin(\alpha-\gamma)+(z_2-z_1)\sin(\beta-\alpha)$.

874. 6. **875.** -29400000. **876.** 147760. **877.** -5. **878.** 35. **879.** 100.

880. $8a+15b+12c-19d$. **881.** 0. **882.** 6. **883.** 394. **884.** -4.

885. -1032. **886.** -200. **887.** 270. **888.** 0. **889.** $3i\sqrt{3}$.

890. $x=\frac{2}{3}$. **891.** $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **892.** $3abc-(a^3+b^3+c^3)$.

893. $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$ **894.** $(ab+bc+ca)x+abc$. **895.** $-2(x^3+y^3)$.

896. $2abc(a+b+c)^3$. **897.** $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$. **898.** 0.

899. $abcd+bcd+acd+abd+abc$.

900. $\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\delta)$.

902. Razdvojiti determinantu na dve determinante trećeg reda.

903. Ako u determinanti na levoj strani pomnožimo drugu kolonu sa bc, treću sa ac i četvrtu sa ab, dobija se identitet

$$\frac{1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ a & 0 & c^2a & b^2c \\ b & c^2b & 0 & a^2b \\ c & b^2c & a^2c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

što je trebalo i dokazati.

910. Ako se elementi druge vrste oduzmu od elemenata prve i treće vrste, dobija se determinanta

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ a & a+2b+c & c \\ 0 & -(a+b+c) & a+b+c \end{vmatrix}.$$

Dodavanjem elemenata prve i treće kolone elementima druge kolone, zadnja determinanta dobija oblik

$$\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ a & 2(a+b+c) & c \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem ove determinante po elementima prve vrste, dobija se konačno

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

916. Ako se prva kolona pomnoži sa a, druga sa b, treća sa c i četvrta sa d, pa se elementima prve kolone dodaju elementi ostalih kolona, dobija se

$$\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & ab & -dc & cd \\ 0 & db & ac & -bd \\ 0 & -cb & bc & ad \end{vmatrix}.$$

Iz ove determinante, posle razvijanja po elementima prve kolone i izdvajanja zajedničkih faktora kolona, dobija se determinanta

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a}\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem zadnje determinante po pravilu trougla, dobija se konačno da je

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

920. Ako se prva vrsta oduzme od svih ostalih, dobija se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

921. Oduzeti prvu vrstu od svih ostalih, a zatim posle izdvajanja faktora a_1-x iz prve kolone, a_2-x iz druge kolone itd., koristeći identitet $\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$ sve kolone sabrati sa prvom. Rezultat $x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right)$.

922. $[2x_1x_2\cdots x_n-(x_1-x)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

923. $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

924. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$. Od svake vrste oduzeti prethodnu, a u donjem desnom uglu staviti $1=x+(1-x)$, pa zatim determinantu predstaviti u obliku zbira dve determinante.

927. Dodati sve kolone prvoj. **928.** $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$. **929.** $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

942. Ako se prva vrsta oduzme od svih ostalih dobija se

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}=0.$$

Odavde, očigledno, posle razvijanja imamo $-x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)=0$, što znači da su koreni jednačine $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2,\ldots,x_n=n-1$.

943. Oduzimanjem prve vrste od svih ostalih dobija se:

$$\begin{vmatrix} a_1-x & a_1^2-x^2 & \cdots & a_1^n-x^n \\ a_2-x & a_2^2-x^2 & \cdots & a_2^n-x^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-x & a_n^2-x^2 & \cdots & a_n^n-x^n \end{vmatrix}=0$$

ili $(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)D_{n-1}=0$, gde je D_{n-2} determinanta dobijena iz prethodne izdvajanjem zajedničkih faktora vrsta. Pošto je u pitanju jednačina n-tog stepena, onda, na osnovu glavnog stava algebre, sledi da ona može imati samo n korena, a to su $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $x_3=a_3,\ldots,x_n=a_n$. Time je dokazano istovremeno da je determinanta D_{n-1} uvek različita od nule, ako su $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n$, različiti brojevi.

946. 2° $\begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ x_4-x_2 & y_4-y_2 & z_4-z_2 \\ x_4-x_3 & y_4-y_3 & z_4-z_3 \end{vmatrix}=0$ **949.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$

951. $x=3$, $y=-1$. **952.** $x=5$, $y=2$. **953.** Neodređen, $x=\frac{2-5y}{4}$.

954. Protivrečan. **955.** $x=\cos(\beta-\alpha)$, $y=\sin(\beta-\alpha)$. **956.** $x=\cos\alpha\cos\beta$, $y=\cos\alpha\sin\beta$.

957. $k=-3$. **958.** $k=\pm 2$. **959.** $t=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $(k=0;\ \pm 1\ldots)$.

960. Izraz ima smisla kada je $2a\neq 27$.

961. Za $a\neq\pm 6$ sistem je određen, za $a=6$ sistem je neodređen, za $a=-6$ sistem je protivrečan.

962. Rešenja sistema su $x=\frac{5(m-3)(m-13)}{(m-3)(m-4)}$, $y=\frac{7(m-3)(m+2/7)}{(m-3)(m-4)}$.

Analizirajući dobijena rešenja, vidi se da je sistem određen za $m\neq 4$ i $m\neq 3$, neodređen za $m=3$, protivrečan za $m=4$.

963. Sistem je neodređen ako je $a=-3$. Sistem je nemoguć ako je $a=2$.

964. Rešenja su: $x=\frac{-6k}{5k-1}$ i $y=\frac{10k+1}{5k-1}$. Sistem je nemoguć kada je $k=\frac{1}{5}$, u svim ostalim slučajevima sistem ima određena rešenja.

965. Za $\beta-\alpha\neq k\pi$ sistem je određen, za $\beta-\alpha=k\pi$, $\beta-\gamma\neq k\pi$ i $\gamma-\alpha\neq k\pi$ sistem je protivrečan, za $\alpha=\beta=\gamma+k\pi$ sistem je neodređen.

966. Rešenja sistema su: $x=\frac{-6(b-15)}{-(ab-90)}$, $y=\frac{10(a-6)}{-(ab-90)}$. Odavde se vidi da je sistem određen za $ab\neq 90$, za $a=b$ i $b=15$ neodređen, za $a\neq 6$, $b\neq 15$ i $ab=90$ istovremeno, protivrečan.

967. Rešenja su: $x=\frac{a}{a-b}$, $y=\frac{b}{a-b}$. Sistem je određen ako je $a-b\neq 0$, $a\neq 0$ i $b\neq 0$; neodređen ako je $a=b$, $a=0$ i $b=0$; nemoguć ako je $a=b$, $a\neq 0$ i $b\neq 0$.

968. Za $ac-b^2\neq 0$ sistem je određen, za $ac-b^2=0$ neodređen. Protivrečan ne može biti.

969. $k=2$, $m=4$. **970.** $k=1$, $m=16$; $k=-1$, $m=-16$. **971.** $x=-11z$, $y=7z$.

972. $x=\frac{y+5z}{2}$. **973.** $x=y=z=0$. **974.** $x=y-z$.

975. $x=-\frac{3}{4}z$; $y=-\frac{z}{4}$. **976.** $x=1$, $y=2$, $z=3$.

977. Sissem je neodređen. Rešenja sistema su: $x=10z+1$, $y=7z$.

978. Sistem je protivrečan. **979.** $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$.

980. $x_1=-2$, $x_4=3$, $x_3=1$, $x_2=-1$. **981.** $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$, $x_4=0$, $x_5=3$.

982. $y=1$, $x=1$. **983.** $\alpha=2$, $x=y=1$; $\alpha=\frac{5}{2}$, $x=0$, $y=2$. **984.** $\lambda=4$, $\lambda=-2$.

985. $\lambda=3$, $\lambda=\frac{1}{2}$. **987.** $x=1$, $y=0$, $z=-1$; $x=\frac{1}{3}$, $y=1$, $z=\frac{2}{3}$.

988. $x=2,\ y=0,\ z=\frac{1}{2};\quad x=3,\ y=0,\ z=\frac{1}{3}.$

989. $a=-3,\ x=\frac{3}{7}z,\ y=-\frac{4}{7}z;\quad a=4,\ x=-y,\ z=0.$ **990.** $m=4,\ m=-\frac{45}{7}.$

991. Kako je $D=(a+3)(a-4),\ \Delta_1=-(a+3),\ \Delta_2=a+3,\ \Delta_3=6(a+3)(a+4)$, to je $x=\frac{-(a+3)}{(a+3)(a-4)},\ y=\frac{a+3}{(a+3)(a-4)}$ i $z=\frac{6(a+3)(a-4)}{(a+3)(a-4)}$. Sistem je određen za $a\neq-3$, $a\neq4$; neodređen za $a=-3$; protivrečan za $a=4$.

992. Za $a\neq3$ sistem je određen, za $a=3$ neodređen.

993. Za $a\neq2$ sistem je neodređen, za $a=2$ i $a=-1\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$ protivrečan.

994. Za $\lambda\neq1$ sistem je određen, za $\lambda=1$ sistem je protivrečan.

995. Sistem je određen za $\lambda\neq1$ i $\lambda\neq-2$, neodređen za $\lambda=1$, nemoguć za $\lambda=-2$.

996. Sistem je određen za $a\neq0$ i $a\neq1$, neodređen za $a=0$, nemoguć za $a=1$.

997. Sistem je određen za $a\neq0$ i $a\neq\pm1$, neodređen za $a=1$, nemoguć za $a=-1$ i $a=0$.

998. Kako je $x=\frac{4(b-4)}{2(ab-12)},\ y=\frac{ab-10b+28}{2(ab-12)}$ i $z=\frac{4(a-3)}{(ab-12)}$, može se izvesti zaključak: za $a\neq12$ sistem je određen, za $a=3$ i $b=4$ neodređen; za $ab=12,\ a\neq3$ i $b\neq5$ protivrečan.

999. Za $ab\neq-14$ sistem je određen; za $a=2$ i $b=-7$ neodređen; za $ab=-14,\ a\neq2$ i $b\neq-7$ sistem je protivrečan.

1000. Sistem je određen za $c\neq0$ i $a\neq1$, neodređen za $a=1$ $c=\frac{1}{2}$, protivrečan za $c=0$ i $a=1$.

1001. Sistem je određen za $a\neq1,\ b\neq0,\ b\neq-2$; neodređen za $a=1$ i $b=1$, $a=-2$ i $b=-2$; nemoguć u svim ostalim slučajevima.

1002. Sistem je određen za $a\neq b$, $c\neq a$ i $c\neq b$ istovremeno; neodređen za $a=b=c=0$; nemoguć kada je $a+b+c=0$.

1003. $x=t,\ y=z=0.$ **1004.** $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}=\frac{t}{3}.$ **1005.** $x=t-1,\ y=z=-1.$

1006. $k=3,\ k=\frac{1}{25}.$ **1007.** $m=1,\ m=-3.$

1008. Za $\lambda\neq1$ i $\lambda\neq-3$, sistem je određen, za $\lambda=1$ neodređen, za $\lambda=-3$ sistem je protivrečan.

1009. $x_k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}k.$

1010. $x_k=\frac{(-1)^k P_{n-k}}{n!}$, gde je $P_i\,(i=1, 2, 3, \ldots, n-1)$ zbir svih mogućih proizvoda po i iz n brojeva $1, 2, \ldots, n-1$ a $P_0=1$.

1014. Bilo koja dva nekolinearna vektora. **1015.** Da. **1016.** $\dim x^3=3$, $E=\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1\}$.

1017. Ne, jer zbir dva vektora koji su simetrični sa tom pravom nisu u datom skupu.

1021. (1, 2, 3).

1022. $x_1=-27x_1'-71x_2'-41x_3'$, $x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3'$, $x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'$.

1023. $x=(1, 2, 3, 4)$. **1024.** λ proizvoljno.

1035. $\dim(L_1\cap L_2)=2$. Bazis obrazuju, na primer, vektori $y_1=-2x_1+x_2+x_3$ i $y_3=5x_1-x_2-2x_3$. $\dim(L_1\cup L_2)=4$, bazis je, na primer, x_1, x_2, x_3, y_2.

1036. $\dim L=2$; $e_1=(3, 2, 1, 0)$, $e_2=(1, 1, 0, 1)$. **1037.** Ne.

1038. Takvih sistema ima četiri: 1° a_1, a_3; 2° a_1, a_4; 3° a_2, a_3; 4° a_2, a_4.

1039. 1° a_1, a_2; 2° a_2, a_3. **1040.** Proizvoljna dva vektora obrazuju bazu.

1041. $\dim x=3$. Bazis obrazuju na primer vektori a_1, a_3 i a_4. **1042.** Za $c=0$ jeste. Za $c\neq 0$ nije. **1043.** Za $c=0$ jeste. Za $c\neq 0$ nije.

1044. 1° $A+B=\begin{bmatrix}3+3 & -2+4\\ 5+2 & -4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}$;

2° $A-B=\begin{bmatrix}3-3 & -2-4\\ 5-2 & -4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -6\\ 3 & -9\end{bmatrix}$;

3° $AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)\cdot 5\\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{bmatrix}$;

4° $BA=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & -22\\ 31 & -24\end{bmatrix}$.

1048. 1° $\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix}a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta\\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta\end{bmatrix}$.

1049. 1° $\begin{bmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{bmatrix}$. 2° $\begin{bmatrix}10\\ 8\end{bmatrix}$. **1050.** $\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$.

1051. 13. **1052.** $\begin{bmatrix}23 & -39 & 29\\ 24 & -48 & 32\\ 58 & 24 & 56\end{bmatrix}$. **1053.** $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

1054. 1° $\begin{bmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; 3° $\begin{bmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{bmatrix}$.

1055. 1° $\begin{bmatrix}-9 & -2 & -10\\ 6 & 14 & 8\\ -7 & 5 & -5\end{bmatrix}$. 2° $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. **1056.** $\begin{bmatrix}292 & 455 & 278 & 66\\ 66 & 94 & 59 & 14\\ 14 & 24 & 10 & 3\\ 3 & 5 & 6 & -2\end{bmatrix}$.

1060. Ako je $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, tada je $B^{2k}=(a^2+bc)^k I$, $B^{2k-1}=(a^2+bc)^{k-1}\cdot B$, $k\in N$.

1065. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. $bc=-a^2$.

1068. 1° Neka je $A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tada je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle se dobija sledeći sistem jednačina:

$a+2c=1$, $b+2d=0$, $3a+4c=0$, $3b+4d=1$, čije je rešenje:

$$a=1,\quad b=1,\quad c=\frac{3}{2},\quad d=-\frac{1}{2},\quad \text{pa je}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \qquad 2^\circ\ B^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

$$3^\circ\ C^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad 4^\circ\ D^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

1069. 1° $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2° $B^{-1}=\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. **1070.** $A^{-1}=A$.

1072. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. **1073.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

1074. $A^{-1}=\dfrac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{bmatrix}$.

1075. $A^{-1}=-\dfrac{1}{a(n+a)}\begin{bmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n-a \end{bmatrix}$.

1078. 2° $a=0$, $b\neq 0$ ili $c\neq 0$. 3° Izomorfizam je preslikavanje

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\right)=(a, b, c).$$ 4° 3. (Sledi iz prethodne tačke).

6° $A/N=\{N, C_1N, C_2N, \ldots, C_{n-1}N\}$, gde je $C_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a c_i broj koji podeljen sa n daje ostatak i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. 7° n.

1084. $X=\begin{bmatrix} 3/5 & 7/5 \\ 4/5 & 6/5 \end{bmatrix}$. **1085.** $X=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. **1086.** $X=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1087. $X=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

1088. Opšti oblik rešenja je $\begin{bmatrix} 7-3a & 5-3b & 7-3c \\ a & b & c \\ 5a-9 & 5b-9 & 5c-7 \end{bmatrix}$, gde su a, b i c proizvoljni brojevi.

1089. $X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. **1090.** $X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

1091. $X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. **1092.** $X=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$.

1094. $X=P^{-1}Q$, $Y=QP^{-1}$. Može se pokazati da je u ovom slučaju $X=Y$.

1095. $T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1096. $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. $T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

1108. Da dijagonalni elementi budu jednaki ± 1.

1109. Da dijagonalni elementi budu po modulu jednaki jedan.

1110. $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. **1111.** $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1112. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1113. 1° $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$;

2° $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

1114. $A=\begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1115. $x_1=-4z_2+3z_3$, $x_2=-13z_1+4z_3$, $x_3=12z_1-15z_2+z_3$.

1118. Lako je pokazati da važi $f_1+f_2+f_3=f_4$.

1120. $f_4=2f_1-2f_2+3f_3$. **1121.** $f_4=f_1+2f_2-3f_3$. **1122.** $f_4=f_2+f_3-f_1$.

1123. Linearno nezavisne. **1124.** $2f_1-2f_2+f_3-f_4=0$.

1125. Tražena transformacija je $x_1=z_1-z_2-z_3$, $x_2=z_1+z_2-z_3$, $x_3=z_3$.

1126. Kanonički oblik je $C(y;\,y)=y_1^2-\frac{1}{3}y_2^2$, $y_1=x_1-2x_2+x_3-x_4$, $y_2=-3x_2+3x_3-x_4$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4$. Tražena transformacija promenljivih je

$$x_1=y_1-\frac{2}{3}y_2+y_3+\frac{1}{3}y_4,\quad x_2=-\frac{1}{3}y_2+y_3-\frac{1}{3}y_4,\quad x_3=y_3,\quad x_4=y_4.$$

1127. Ortogonalna transformacija promenljivih

$$x_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4),\qquad x_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2-y_3-y_4),$$

$$x_3=\frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4),\qquad x_4=\frac{1}{2}(y_1-y_2-y_3+y_4)$$

dovodi datu formulu na oblik $B(y;\,y)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.

1128. Dati polinom se dovodi na kanonički oblik uzastopnom primenom sledećih transformacija:

$$x_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4),\qquad x_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2-y_3-y_4),$$

$$x_3=\frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4),\qquad x_4=\frac{1}{2}(y_1-y_2-y_3+y_4),$$

$x_5=y_5$, $x_6=y_6$; zatim $y_1=z_1-2$, $y_2=z_2-1$, $y_i=z_i$ za $i=3, 4, 5, 6$; zatim $z_i=u_i$ za $i=1, 2, 3, 4$, $z_5=\frac{1}{2}\sqrt{2}(u_5+u_6)$, $z_6=\frac{1}{2}\sqrt{2}(u_5-u_6)$; dalje je $u_i=v_i$ za $i\neq 5$ i $u_5=v_5+$ $+2\sqrt{2}$. Zadnja transformacija dovodi dati polinom na kanonički oblik $v_1^2+v_2^2+v_3^2-$

$-3v_4^2+\sqrt{2}v_5$. Otuda je konačno nehomogena linearna transformacija koja dovodi polazni polinom na zadnji oblik:

$$x_1=\frac{1}{2}(v_1+v_2+v_3+v_4)-\frac{3}{2}, \qquad x_2=\frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3-v_4)-\frac{3}{2},$$

$$x_3=\frac{1}{2}(v_1-v_2+v_3-v_4)-\frac{1}{2}, \qquad x_4=\frac{1}{2}(v_1-v_2-v_3+v_4)-\frac{1}{2},$$

$$x_5=\frac{1}{2}\sqrt{2}(v_5+v_6)+2, \qquad x_6=\frac{1}{2}\sqrt{2}(v_5-v_6)+2.$$

1129. 1° $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, $\quad e=k\ (1,\ 1,\ -1)\ \ (k\neq 0)$;

2° $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$, $\quad e=k\ (1,\ 2,\ 2)$ za $\lambda=3$; $\quad e=k\ (1,\ 2,\ 1)$ za $\lambda=-1$, $k\neq 0$.

1131. $\det(A-\lambda E)=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$; $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$.

1132. $(-1)^n(\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}-a_2\lambda^{n-2}-\ldots-a_n)$.

1133. Karakteristične vrednosti matrice A^2 su λ^2 k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

1134. Kanonička matrica je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Matrica $A(\lambda)$ ima invarijantne množitelje:

$$E_1(\lambda)=1 \quad E_2(\lambda)=\lambda+1, \quad E_3(\lambda)=\lambda^3+1, \quad E_4(\lambda)=0.$$

1135. Kanonička forma matrice $A(\lambda)$ ima oblik $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$.

Invarijantni množitelji su $E_1(\lambda)=1$, $E_2(\lambda)=\lambda-2$, $E_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

1136. 1° Nad poljem racionalnih brojeva

$$e_1(\lambda)=\lambda^2+2, \quad e_2(\lambda)=(\lambda^2+2)^2, \quad e_3(\lambda)=(\lambda^2-2)^2;$$

2° Nad poljem realnih brojeva

$$e_1(\lambda)=\lambda^2+2, \quad e_2(\lambda)=(\lambda^2+2)^2, \quad e_3(\lambda)=(\lambda+\sqrt{2})^2, \quad e_4(\lambda)=(\lambda-\sqrt{2})^2;$$

3° Nad poljem kompleksnih brojeva

$$e_1(\lambda)=\lambda+2i; \quad e_2(\lambda)=\lambda-2i; \quad e_3(\lambda)=(\lambda+2i)^2,$$
$$e_4(\lambda)=(\lambda-2i)^2, \quad e_5(\lambda)=(\lambda+\sqrt{2})^2, \quad e_6(\lambda)=(\lambda-\sqrt{2})^2.$$

1137. $E_6(\lambda)=0$, $E_5(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2$, $E_4(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$, $E_3(\lambda)=\lambda+1$, $E_2(\lambda)=E_1(\lambda)=1$.

1138. Kanonička forma ima oblik

$$\{1,\ \lambda^2+\lambda,\ \lambda^4-\lambda^2,\ \lambda^4-\lambda^2,\ 0\}.$$

1139. $P(\lambda)=\lambda^3-2\lambda+16$.

1140. Za $A\neq\pm E$ i $A^2=E$ onda je $P(\lambda)=\lambda^2-1$.

1141. $P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

1142. $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

1143. Nad poljem kompleksnih brojeva matrica A je slična dijagonalnoj matrici $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

Nad poljem racionalnih brojeva A je slična matrici prirodne forme $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1144. Uopštena Jordanova forma se sastoji od jednog bloka

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

1145. $T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$

1146. $T=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$

$B=\{1,\ 1, 1\ -3\}.$

1147. $r=2$, jer je $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0.$

1148. Data matrica je ekvivalentna matrici $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, čiji je rang 2, pa je i rang date matrice $r=2$.

1149. $r=3$. **1150.** $r=2$. **1151.** $r=4$.

1152. $r=5$; bazisni minor se poklapa sa determinantom matrice.

1153. Rang matrice je 3, bazisni minor, na primer, u levom gornjem uglu.

1154. Za $\lambda=3 \Rightarrow r=2$; za $\lambda\neq 0 \Rightarrow r=3$. **1155.** Za $\lambda=0 \Rightarrow r=2$; za $\lambda\neq 0 \Rightarrow r=3$.

1160. Ekvivalentne su.

1161. 1° Ako se formiraju sve determinante drugog reda od koeficijenata uz nepoznate i slobodnih članova, vidi se da su sve one različite od nule, izuzev determinante $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Znači da odgovarajuće matrice imaju rang 2, izuzev matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, pa se dati sistem može napisati kao matrična jednačina na sledeći način: $-y+z=2-x$ i $y-2z=-1-x$ ili $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-x \\ -1-x \end{bmatrix}$, odakle je $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tj. $y=x-1$, $z=1$.

2° Opšte rešenje je

$$x_1=\frac{x_3-9x_4-2}{11}, \qquad x_2=\frac{x_4-5x_3+10}{11}.$$

3° Za $\lambda\neq 9$ sistem je nemoguć. Za $\lambda=9$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Rešenje sistema je sledeća uređena četvorka: $(4-2v,\ 1-u+v,\ u,\ v)$.

1163. $x_1=-\frac{17}{8}$, $x_2=-\frac{9}{8}$, $x_3=-\frac{3}{4}$. **1164.** $x_1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_3$, $x_2=-\frac{1}{8}+\frac{13}{8}x_3$.

1165. Određivanje nepoznatih x_1 i x_2 može se svesti na relaciju

$\begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$, odakle se lako nalaze x_1 i x_2.

1166. Ako matrice $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ imaju isti rang.

1167. Matrice $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_n & b_n \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix}$ imaju isti rang.

1170. Da. **1174.** (1, 5), (7, 9), (5, 1). **1178.** Neka je x_1 broj jedinica Π_1 i x_2 broj jedinica Π_2. Tada je potrebno $2x_1+3x_2$ jedinica sirovine S_1. Pošto je rezerva sirovine S_1 jednaka 19, to mora biti $2x_1+3x_2\leqslant 19$. Slično se formiraju i sledeće nejednačine

$$2x_1+x_2\leqslant 13, \qquad 3x_2\leqslant 15, \qquad 3x_1\leqslant 18.$$

Dohodak f zavisi od x_1 i x_2 na sledeći način $f=7x_1+5x_2$.

Prema tome linearni program je: Treba maksimizirati linearnu formu $f=7x_1+5x_2$ pri sistemu ograničenja

$$2x_1+3x_2\leqslant 19$$
$$2x_1+x_2\leqslant 13$$
$$3x_2\leqslant 15$$
$$3x_1\leqslant 18$$

Optimalno rešenje je: $x_1=5$, $x_2=3$. Maksimalni prihod je $f=50$.

1179. Neka je x_1 broj izrađenih jedinica modela M_1 za jedan dan, a x_2 broj izrađenih jedinica modela M_2 za jedan dan. Ukupna zarada je $f=30000x_1+50000x_2$ a x_1 i x_2 ispunjavaju uslove

$$2x_1+4x_2\leqslant 24$$

$$4x_1+2x_2\leqslant 24$$

$$x_i\geqslant 0 \quad (i=1, 2).$$

Rešenje svake od ovih jednačina je poluravan. Presek tih poluravni je četvorougao sa temenima (0, 0), (6, 0) (4, 4), (0, 6). Ekstremalna vrednost funkcije dobija se u temenima toga četvorougla. Lako je proveriti da je $\max f=320000$ d, koji se postiže sa $x_1=4$ i $x_2=4$.

1180. Optimalna proizvodnja je 10 uslovnih jedinica, a to se postiže kada mašina M_1 proizvodi Π_3, mašina M_2 proizvodi Π_2 i mašina M_3 proizvodi Π_1.

1181. Označimo sa x_1 vreme rada mašine M_1 da bi se proizvela jedinica proizvoda Π_1, a sa x_2 vreme da bi mašina M_1 proizvela jedinicu proizvoda Π_2. x_3 i x_4 su vremena za koja mašina M_2 radi da bi proizvela jedinicu proizvoda Π_1 i Π_2. Tada je potrebno minimizirati formu $f=4x_1+47x_2+13x_3+26x_4$ pri sistemu ograničenja:

$$x_1+x_2\leqslant 6, \quad x_3+x_4\leqslant 6, \quad 6x_1+13x_3\leqslant 30, \quad 24x_2+13x_4\leqslant 96.$$

Optimalan plan je:

$$x_1=5, \quad x_2=1, \quad x_3=0, \quad x_4=\frac{72}{13}; \qquad \min f=211.$$

1182. Označimo sa x_{ij} broj jedinica tereta koga treba prebaciti iz punkta A_i u punkt B_j. Tada sistem ograničenja i linearna forma imaju oblik

$$x_{11}+x_{21}=10$$

$$x_{12}+x_{22}=30$$

$$x_{13}+x_{23}=10$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=20$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30$$

$$f=4x_{11}+9x_{12}+3x_{13}+4x_{21}+8x_{22}+x_{23}$$

gde treba maksimizirati formu f. Optimalni plan je $x_{11}=10$, $x_{12}=10$, $x_{13}=0$, $x_{21}=0$, $x_{22}=20$, $x_{23}=10$.

1183. Neka su x_1 i x_2 količine matrica π_1 i π_2. Tada je potrebno minimizirati funkciju $f=c_1x_1+c_2x_2$ uz sistem ograničenja

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\geqslant b_i \qquad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

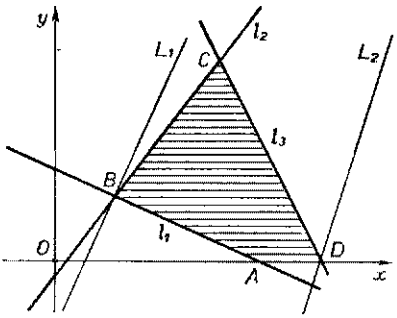
$\min f=13$ za $x_1=2$, $x_2=3$.

1184. 1° $a=3x+4y-12$, $b=7x-8y+11$, $c=-2x-y+20$.

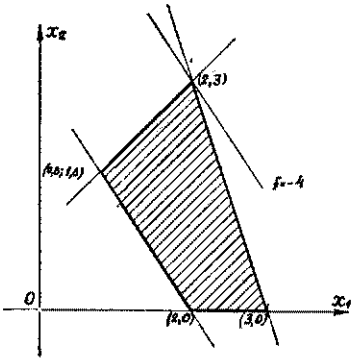
2° Iz uslova nenegativnosti brojeva a, b i c imamo $3x+4y-12\geqslant 0$, $7x-8y+11\geqslant 0$ i $-2x-y+10\geqslant 0$. Označimo sa l_1, l_2 i l_3 grafike pravih: $3x+4y-12=0$, $7x-8y+11=0$ i $-2x-y+10=0$. Zbog prve nejednakosti, tačka M ne sme biti ispod l_1,

a zbog druge dve ne sme biti iznad l_2 i l_3, sl. 67. Kako je još $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, za oblast D dobijamo konturu i unutrašnjost četvorougla $ABCD$; $A(4, 0)$, $B(5, 0)$, $C(3, 4)$, $D\left(1, \frac{9}{4}\right)$.

3° Neka je $3y-4x=f(L)$. Ova prava odseca odsečak na y osi $\frac{f}{3}$. Maksimalnu vrednost za f odnosno za odsečak na y osi, dobijamo ako prava L prolazi kroz tačku B (prava L_1). U tom slučaju lako se nađe da je $f=\frac{11}{4}$. Nalazimo: $x=1$, $y=\frac{9}{4}$, $a=0$, $b=0$, $c=\frac{23}{4}$. Minimalnu vrednost za f odnosno za odsečak na y osi dobijamo ako prava L prolazi kroz tačku D (prava L_2). Tada nalazimo: $f=-20$, $x=5$, $y=0$, $a=3$, $b=46$, $c=0$. (sl. 67).



Sl. 67



Sl. 68

1185. Sl. 68 $\min f=-4$ za $x_1=2$, $x_2=3$.

1186. Zadatak ima beskonačno mnogo rešenja, sve tačke duži sa krajevima (0,8; 1,8) i (2, 3).

1187. Ne postoji. **1188.** $\min f=\frac{46}{3}$, $x=\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 8\right)$.

1189. Zadatak nema rešenja jer vektor $x=(t, t, 1+t, 1+3t)$ $(t \geqslant 0)$ zadovoljava uslove ograničenja a $f(x) \to \infty$ kad $t \to \infty$.

1190. $\max f=19$, $x=(2, 2, 1)$. **1191.** $x=\left(\frac{6}{8}, 5, \frac{2}{8}, 0, 0\right)$, $f=\frac{10}{8}$.

1192. $x=\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$. **1193.** $f=-5$, $x=\left(0, 5, \frac{3}{5}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$.

1194. $x=(0, 4, 5, 0, 0, 11)$ $\min f=-11$.

1195. $\max f=f\left(\frac{48}{23}, \frac{45}{23}, \frac{101}{23}, \frac{20}{23}, 0, 0\right)=\frac{93}{23}$.

1196. $f\left(0, \frac{25}{16}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, 0, \frac{11}{8}, 0\right)=\frac{137}{16}$.

1197. $\max f=f(9, 17, 0, 1)=21$. **1198.** $f(2, 2, 1)=19$.

1200. Zadaci su dualni i nemaju rešenja.

1201. Minimizirati formu $\varphi=4y_1+3y_2$ pri uslovima: $y_1+2y_2 \geqslant 5$, $2y_1+3y_2 \geqslant 1$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$.

1202. Minimizirati formu $\varphi=y_1+y_2$ pri uslovima: $2y_1+4y_2 \geqslant 1$, $2y_1+3y_2 \geqslant 3$, $y_1-y_2 \geqslant 2$, $y_1-2y_2 \geqslant 0$, $2y_1-y_2 \geqslant -3$, $y_1+2y_2 \geqslant -1$. **1205.** $x=(2, 0, 0, 1)$.

Glava IV

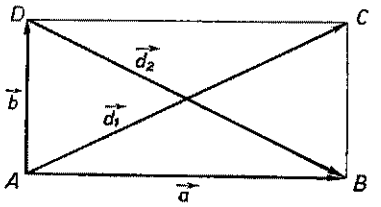
1210. $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{AD}|=2$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$; $|\overrightarrow{BC}|=2$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$,

$|\overrightarrow{AC}|=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{BD}=2|\sqrt{2}$; $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$,

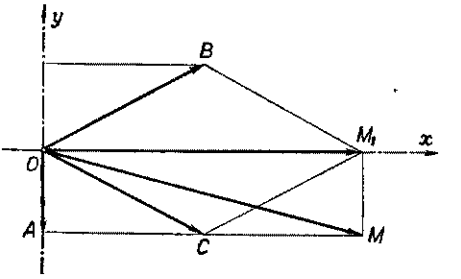
$\overrightarrow{A_1B_1}=\sqrt{2}$; $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$, $|\overrightarrow{B_1C_1}|=\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{C_1D_1}=-\overrightarrow{A_1B_1}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$; $\overrightarrow{A_1C}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{5}$.

1211. $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{d}_1+\vec{d}_2)$; $\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{d}_1-\vec{d}_2)$ (sl. 69).



Sl. 69



Sl. 70.

1212. 1° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moraju imati isti smer. 2° Moraju biti istog smera i $|\vec{a}|>|\vec{b}|$.

1213. 1° Moraju biti međusobno normalni. 2° Moraju biti suprotnog smera.
3° Suprotnog smera i $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$.

1216. 1° Istog smera. 2° Za $\lambda>0$ suprotnog smera i $|\vec{a}|=2\lambda|\vec{b}|$, za $\lambda<0$ istog smera i $|\vec{a}|=-2\lambda|\vec{b}|$. 3° Kolinearni.

1217. $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $P_{r_x}\overrightarrow{OM}=8$, $P_{r_y}\overrightarrow{OM}=-2$,
$|\overrightarrow{OM}|=2\sqrt{17}$, $\overrightarrow{OA}=-2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{OM}=8\vec{i}-2\vec{j}$ (sl. 70).

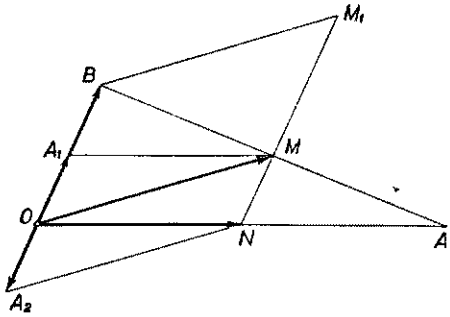
1218. $\overrightarrow{AC}=2(\vec{n}-\vec{m})$; $\overrightarrow{OM}=2\vec{n}+\vec{m}$; $\overrightarrow{ON}=3\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{MN}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\overrightarrow{PM}=2\vec{n}-\vec{m}$; $\overrightarrow{NP}=-\vec{m}-\vec{n}$.

1219. $\overrightarrow{AM}=2\vec{k}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}=2\vec{k}+(\vec{i}+\vec{j})$, $\overrightarrow{AN}=2\vec{i}+(\vec{j}+\vec{k})$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(\vec{i}-\vec{k})$.
$\overrightarrow{CA_1}=2(\vec{k}-\vec{i}-\vec{j})=2(\vec{i}-\vec{k})$, $\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{A_2B}$ jer je $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{A_1B}$.

1220. 1° $\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{b}$; 2° $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BM_1}+\overrightarrow{M_1N}=\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

$\overline{OA_2}=\overline{OA_1}$; $\overline{BM_1}=\overline{OM}$,

$\overline{BM_1}\parallel\overline{OM}$ (sl. 71).



Sl. 71

1221. $P_{r_x}\vec{a}=4$; $P_{r_y}\vec{a}=1$, $P_{r_x}\vec{b}=1$, $P_{r_y}\vec{b}=3$.

1222. $\vec{i}+4\vec{j}=(4\alpha-2\beta)\vec{i}+(\alpha+3\beta)\vec{j}$. Da bi dva vektora bila jednaka potrebno je da su im odgovarajuće projekcije jednake, tj. da je $4\alpha-2\beta=1$ i $\alpha+3\beta=4$

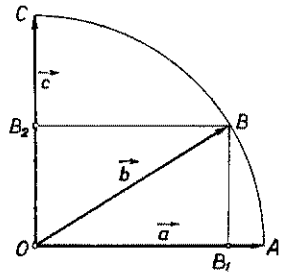
$\Rightarrow \alpha=\frac{11}{14}$, $\beta=\frac{15}{14}$, $\vec{a}=\frac{14}{11}\vec{c}-\frac{15}{11}\vec{b}$.

1223. $\lambda=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha-2$. **1224.** $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, $2\vec{i}+3\vec{j}=\lambda\alpha\vec{i}-\lambda\vec{j}$, $\lambda=-3$, $\alpha=-\frac{2}{3}$.

1225. Mogu: $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=-3$; $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su kolinearni ako α i β zadovoljavaju uslov $\alpha\beta=1$.

1226. $\vec{n}=\vec{m}+\vec{p}$; $(\overrightarrow{OE}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OS}=\vec{n})$, $\overrightarrow{OD}=2\vec{n}-\vec{m}$, $\overrightarrow{DA}=2(\vec{m}-\vec{n})$, $\overrightarrow{EB}=2\vec{m}$, $\overrightarrow{OC}=2\vec{n}$.

1227. a) $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2}=-\left(\frac{\vec{a}}{2}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CC_1}=$
$=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$. b) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$.



Sl. 72

1228. $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\Rightarrow\vec{c}=2\vec{b}-\sqrt{3}\vec{a}$ (sl. 72).

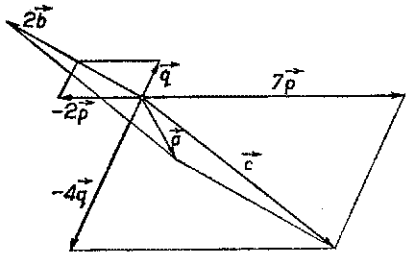
1229. $\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}$. **1230.** 0.

1232. Da. $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, $\vec{i}-\vec{j}=2\alpha\vec{i}-3\alpha\vec{j}+\beta\vec{i}=2\beta\vec{j}\Rightarrow 2\alpha+$
$+\beta=1$, $-3\alpha+2\beta=-1\Rightarrow\alpha=\frac{3}{7}$, $\beta=\frac{1}{7}$. **1233.** $\alpha=\pm1$.

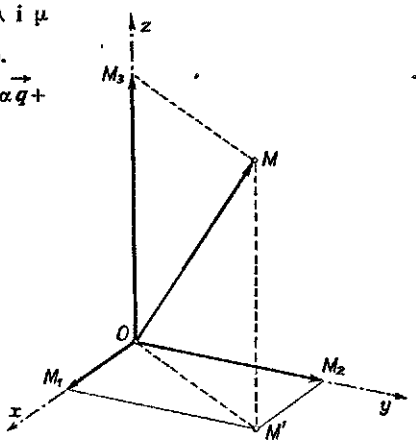
1234. $\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}$, $\lambda=2$, $\mu=5$; uputstvo odrediti λ i μ iz jednakosti $9\vec{i}+4\vec{j}=\lambda(2\vec{i}-3\vec{j})+\mu(\vec{i}+2\vec{j})$.

1235. Ako se pođe od uslova $3\vec{p}-2\vec{q}=-2\alpha\vec{p}+\alpha\vec{q}+$
$+7\beta\vec{p}-4\beta\vec{q}$, dobija se $\alpha=2$, $\beta=1$ (sl. 73).

1236. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$.



Sl. 73



Sl. 74

1237. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$, $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\overrightarrow{M'M}=z\vec{k}$, $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ (sl. 74).

1240. $|\vec{r}|=\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5\sqrt{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=-\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

1241. $|\vec{r}|=\sqrt{35}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{35}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{35}}$, $\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{35}}$.

1242. $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\frac{-2}{3\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{-4}{3\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{5}{3\sqrt{5}}$.

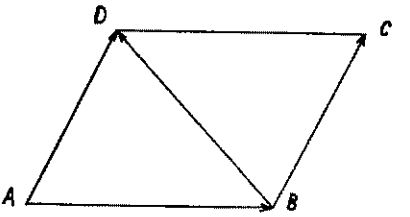
$\vec{a}_0=\frac{-2}{3\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{5}{3\sqrt{5}}\vec{k}$.

1243. $\gamma=90°$. **1244.** $\vec{r}=3(\sqrt{2}\,\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$.

1245. Kraj sile $\vec{F}$ je u tački $B(4,\ -2,\ 5)$ ili $B_1(4,\ -2,\ -7)$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=-\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=\pm\frac{6}{7}$. **1246.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $M(2,\ 2,\ 2)$.

1247. $\overrightarrow{AB}=-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$, $\overrightarrow{BC}=-\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\vec{i}+\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$, $|\overrightarrow{AA_1}|=\sqrt{\frac{11}{2}}$.

1248. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $(x-1)\vec{i}+(y+2)\vec{j}+z\vec{k}=-4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow x-1=-4,\ x=-3;\ y+2=-1,\ y=-3;\ z=2;\ D(-3,\ -3,\ 2)$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{42}$ (sl. 75).



Sl. 75

1249. $O\left(\frac{3}{2},\ 1,\ 1\right)$, $T\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right)$.

1250. 1° $D(-1,\ 5+\lambda,\ 1+\lambda)$; 2° $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-6$; 3° $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$.

1251. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot P_{\overrightarrow{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,(P_{\overrightarrow{a}}\vec{b}+P_{\overrightarrow{a}}\vec{c})=|\vec{a}|\,P_{\overrightarrow{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\,P_{\overrightarrow{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

1252. 1° $\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{a})=0°$, $\cos 0°=1\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|^2$.

1253. Važi i obrnuto, ukoliko jedan ili oba vektora nisu jednaki nuli.

1254. 1° $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$; 2° -4.

1255. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{m}-\vec{n})(\vec{m}-2\vec{n})=2\vec{m}\cdot\vec{m}-4\vec{m}\cdot\vec{n}-\vec{m}\cdot\vec{n}+2\vec{n}\cdot\vec{n}=$

$=2\cdot2\cdot2\cdot1-4\cdot2\cdot4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot4\cdot4=20.$

1256. $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{(\vec{p}-2\vec{q})\cdot(\vec{p}-2\vec{q})}=2$.

1258. $\lambda=0$, $\cos\varphi=\frac{2}{5}$. **1259.** $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

1260. $\cos(\vec{a},\ \vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{0}{2\sqrt{3}\cdot2}=0\Rightarrow\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b})=\frac{\pi}{2}$. **1261.** $P_{\overrightarrow{a}}\vec{a}=\frac{22}{\sqrt{19}}$.

1262. $d_1=\sqrt{7},\ d_2=\sqrt{13},\ \cos(\vec{d_1},\vec{d_2})=\dfrac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{d_1\cdot d_2}=\dfrac{4}{\sqrt{91}}.$

1263. $\varphi=120°.$

1264. $|\overrightarrow{AM}|=2\sqrt{6},\ |\overrightarrow{AN}|=2\sqrt{6},\ \cos(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})=\dfrac{5}{6}.$

1265. $\cos\theta=\dfrac{5}{6}.$

1266. Neka su $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$ ortovi sila. Onda je $\overrightarrow{AM}=a(\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}),\ |\overrightarrow{AM}|=$
$=a\sqrt{(\vec{m}+\vec{n}+\vec{p})^2}=a\sqrt{6}.$

1267. $\dfrac{\pi}{3}.$

1268. $|\overrightarrow{AB}|\cdot P_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\Rightarrow P_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}=-6.$

1269. $A=8$ kgm, $\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{2}}{15}.$

1270. $\vec{d_1}=-\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c},\ d_1=\sqrt{9+4\sqrt{3}};\ \vec{d_2}=5\vec{a},\ d_2=5.$

1275. $\vec{x}=\dfrac{2(1+\sqrt{3})\vec{u}+(2+\sqrt{3})\vec{v}}{4\sqrt{3}}.$

1276. $\cos\alpha=\dfrac{44}{49\sqrt{589}}.$

1277. $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}.$

1278. $\lambda=1.$

1279. $\vec{h_a}=\dfrac{48}{29}\vec{i}-\dfrac{120}{29}\vec{j};\ \cos\varphi=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{h_a}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{h_a}|}.$

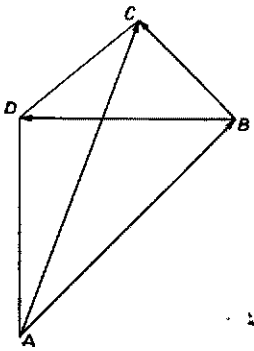
1280. $\lambda=1.$

1281. Iz jednačine $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}$ dobija se $\lambda=\dfrac{1}{4}.$

1282. Iz $p\cdot q=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}.$

1283. $\vec{r_1}\left\{\dfrac{15}{\sqrt{17}},\ \dfrac{25}{\sqrt{17}},\ 0\right\},\ \vec{r_2}\left\{-\dfrac{15}{\sqrt{17}},\ -\dfrac{25}{\sqrt{17}},\ 0\right\}.$

1284. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.$ Na osnovu toga je: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ (sl 76).



Sl. 76

1285. 1° $\overrightarrow{AB}\{-4,\ -5,\ 5\},\ \overrightarrow{CD}\{4,\ 5,\ -5\},\ \overrightarrow{AD}\{-3,\ 4,\ -1\},$
$\overrightarrow{BC}\{3,\ -4,\ 1\}.$ Odavde se vidi da je $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}.$

2° $\vec{d_1}\{-1,\ -9,\ 6\},\ \vec{d_2}\{7,\ 1,\ -4\},\ \cos\varphi=\dfrac{-20}{\sqrt{1947}}.$

1287. 2° Duž koja spaja centre paralelograma $ABCD$ i $A_0\ B_0\ C_0\ D_0.$

1288. $\dfrac{\pi}{3}$ ili $\dfrac{2\pi}{3}.$

1289. $\vec{n_0}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(2\vec{p}-\dfrac{1}{3}\vec{q}\right).$

1290. 1° $\vec{n}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q} \Rightarrow \alpha=\frac{4}{3},\ \beta=\frac{2}{3};\ \vec{n}_0=\frac{1}{4\sqrt{3}}(2\vec{p}+\vec{q});$ 2° $\frac{4\sqrt{39}}{3};$ 3° $\frac{\pi}{6}.$

1291. $\vec{c}=\lambda(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \lambda=2.$

1292. 1° $(\overrightarrow{OA})_0=i,\ (\overrightarrow{OB})_0=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j},\ (\overrightarrow{OC})_0=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{6}}{3}\vec{k}.$

2° $|\overrightarrow{OM}|=5,\ \cos\alpha=\frac{7}{10}$, itd.

1293. Zadatak se svodi na rešavanje sistema jednačina: $2x-4y+3z=1,\ 3x-y+5z=2,\ x-2y+4z=3 \Rightarrow \vec{x}\{-1, 0, 1\}.$

1294. $\beta=120° \Rightarrow \vec{n}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.\ P_{r_{\vec{n}}}\vec{m}=0.$

1295. $\vec{x}=0.$ (Sistem ima samo trivijalno rešenje pa drugih vektora nema).

1296. 1° Paralelni ili jedan od njih jednak nuli, ili oba jednaka nuli. 2° Videti 1°.

1297. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}.$ 2° $-\vec{k}.$

1298. $2(\vec{k}-\vec{i}).$ **1299.** 30.

1300. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\left(1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{2}.$

1301. $|a\times b|=10\cdot5\sqrt{1-\left(\frac{12}{50}\right)^2}=2\sqrt{589}.$ **1302.** $\pm2\sqrt{561}.$

1303. 1° $2\vec{a}\times\vec{c};$ 2° 0. **1306.** $\vec{c}=6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k},\ P=2\sqrt{22}.$

1307. $P\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{3}.$ **1308.** $P=7\sqrt{5},\ BD=\frac{2\sqrt{21}}{3}.$

1309. $P=100\sqrt{2}.$ **1310.** $P=\frac{3}{2}.$ **1311.** $\vec{N}_0=\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}.$

1312. $|\vec{A}\times\vec{B}|=\frac{\sqrt{7}}{2}.$ **1313.** $\frac{6}{7}.$

1314. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k};\ b_{\vec{d}}=\frac{[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})|}=\frac{19}{\sqrt{66}},\ (\vec{d}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})).$

1315. Ne. Da bi postojao takav vektor $\vec{x}$ vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moraju biti: 1° normalni, 2° ne sme biti $\vec{a}=0$ a $\vec{b}\neq0$. U tom slučaju postoji beskonačno mnogo vektora $\vec{x}$ koji zadovoljavaju dati uslov. Primer: ako vektor $\vec{x}$ zadovoljava dati uslov, onda zadovoljava i vektor $\vec{x}+\lambda\vec{a}$, gde je λ ma kakva konstanta.

1316. $\vec{x}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}.$

1317. 1° $\vec{d}\{-3\lambda, -2\lambda, -\lambda\}$; 2° $\vec{a}-\vec{d}=\lambda(3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k})$; $\vec{b}-\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$.
3° $[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})]\cdot\vec{d}=0$. 4° $\lambda=7$.

1318. Da. **1319.** Ne, ukoliko zagrada ostaje na istom mestu.

1320. Komplanarni ili je neki (ili) svi jednaki nuli. **1322.** $(\vec{i}\times\vec{j})\cdot\vec{k}=1$, $(\vec{j}\times\vec{i})\cdot\vec{k}=-1$, itd.

1323. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=0$. $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$. **1324.** $V=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=2$.

1325. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ su komplanarni.

1326. 1° $V(\alpha)=\frac{1}{3}(\alpha+1)(3\alpha^2-3\alpha+2)$; 2° $\alpha=-1$; 3° $\vec{a}=-4\vec{b}-3\vec{c}$.

1327. 1° $V=14$; 2° $H=\sqrt{14}$.

1328. 1° $V=(\alpha+2)(\alpha-1)^2$; 2° $V=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{h}| \Rightarrow |\vec{h}|=\dfrac{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\end{vmatrix}=(1-\alpha)\vec{i}+(1-\alpha)\vec{j}+(\alpha^2-1)\vec{k};\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=(1-\alpha)\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}.$$

Ort vektora: $\vec{h}$ je $\vec{h}_0=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$, a $\vec{h}=|\vec{h}|\vec{h}_0=\dfrac{(\alpha+2)(1-\alpha)}{\alpha^2+2\alpha+3}\{\vec{i}+\vec{j}-(\alpha+1)\vec{k}\}$;

3° $V(\alpha)=(\alpha+2)(\alpha-1)^2$, $V'(\alpha)=3(\alpha-1)(\alpha+1)$, $V'(\alpha)=0$ za $\alpha=1$ i $\alpha=-1$, $V''(\alpha)=6\alpha$, $V''(-1)=-6<0$. Za $\alpha=-1$, $V_{\max}=4$; $V''(1)=6>0$, za $\alpha=1$; $V_{\min}=0$. Osim toga, za $\alpha=-2$ funkcija $V(\alpha)$ ima minimalnu vrednost u intervalu $[-2, 1]$, za $\alpha=1$ i $\alpha=2$ vektori su komplanarni.

1329. 1° $\lambda=\frac{1}{4}$; 2° $\sin\alpha=\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\dfrac{\sqrt{19}}{15}$; 3° $V=\frac{19}{2}$, $h=\dfrac{\sqrt{190}}{5}$, $(\vec{h}\perp\vec{a}, \vec{h}\perp\vec{b})$.

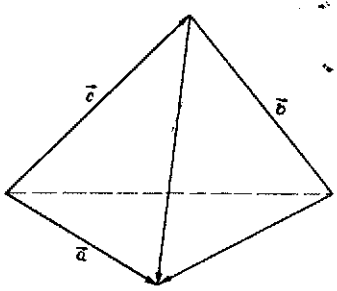
1330. 1.

1331. $\vec{n}_0=\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$; $\vec{d}\{4, -2, 4\}$.

1333. $r=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\left\{\vec{c}-\vec{a}-\dfrac{[(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})](\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}\right\}t$,

gde je t proizvoljan parametar.

1334. Neka je tetraedar $OM_1M_2M_3$, gde su $O(0, 0, 0)$ i $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $i=1, 2, 3$ koordinate temena tetraedra. Tada presečna tačka M ima koordinate



Sl. 77

$$M\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}x_i,\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}y_i,\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}z_i\right).$$

1335. Jedna tačka M_1 ima koordinate $x_1=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$, $y_1=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $z_1=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

Ostale su $M_2(-x_1, y_1, z_1)$, $M_3(x_1, -y_1, z_1)$, $M_4(x_1, y_1, -z_1)$, $M_5(-x_1, -y_1, z_1)$, $M_6(-x_1, y_1, -z_1)$, $M_7(x_1, -y_1, -z_1)$, $M_8(-x_1, y_1, -z_1)$.

1339. $\vec{d}=3\vec{a}-17\vec{b}-4\vec{c}$. **1340.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **1341.** $t=3$.

1342. Analitički: $(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})=0$, ili, pomoću mešovitog proizvoda. Znači, da su strane jednog trougla. Geometrijski: Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, onda je tvrđenje evidentno. Ako nisu, onda je raspored vektora dat na sl. 75.

1343. $\lambda_1(\vec{a}+\vec{b})+\lambda_2(\vec{c}+\vec{a})+\lambda_3(\vec{b}+\vec{c})=0$, $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}+(\lambda_1+\lambda_3)\vec{b}+(\lambda_2+\lambda_3)\vec{c}=0 \Rightarrow$

$$\lambda_1+\lambda_2=0$$
$$\lambda_1+\lambda_3=0$$
$$\lambda_2+\lambda_3=0.$$

Ovaj sistem ima samo trivijalno rešenje, jer je: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$

1344. Neka je $\overrightarrow{DA}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{DB}=\vec{r}_2$, $\overrightarrow{DC}=\vec{r}_3$. Normalni jedinični vektori na stranama ABD, BCD, CAD i ABC su redom:

$$\vec{n}_C=\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{2P_C},\quad \vec{n}_A=\frac{\vec{r}_2\times\vec{r}_3}{2P_A},\quad \vec{n}_B=\frac{\vec{r}_3\times\vec{r}_1}{2P_B},\quad \vec{n}_D=\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1}{2P_D}$$

$\Rightarrow \cos(AB)=\vec{n}_C\cdot\vec{n}_D$, $\cos(CD)=\vec{n}_A\cdot\vec{n}_D$, $\cos(AB)\cos(CD)=\frac{1}{16P_AP_BP_CP_D}$, gde je, na primer, P_C površina $\triangle\ ABD$ itd.

1345. Ako se vektorska jednakost pomnoži skalarno sa $\vec{c}_1$ dobija se: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+$ $+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=0$, tj. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$, jer su poslednja dva proizvoda jednaka nuli. (Zašto?)

1346. Vektor $\vec{b}\times\vec{c}$ je normalan na $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=0$ je normalan na $\vec{a}$ i na $\vec{b}\times\vec{c}$, tj., paralelan je sa ravni koju određuju vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

1347. $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=3\vec{b}-2\vec{c}$.

1348. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori ivica tetraedra koje polaze iz istog temena. Tada je

$$\vec{s}_1=\frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{a}),\quad \vec{s}_2=\frac{1}{2}(\vec{c}\times\vec{b});\quad \vec{s}_3=\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{c});\quad \vec{s}_4=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}).$$

Odavde sledi $\vec{s}_1+\vec{s}_2+\vec{s}_3+\vec{s}_4=0$.

1349. Neka je O centar jedinične sfere na kojoj se nalazi sferni trougao ABC kod koga je $\widehat{AC}=b$, $\widehat{AB}=c$, $\widehat{BC}=a$. Neka je, dalje, $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=\vec{e}_3$. Tada je.

1° $$\cos\alpha=\frac{(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}{|(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)|\,|\vec{e}_1\times\vec{e}_3|}=\frac{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times(\vec{e}_1\times\vec{e}_3))}{\sin b\sin c}=\frac{\vec{e}_1\cdot[\vec{e}_1(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3)-\vec{e}_3(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)]}{\sin b\sin c}=$$

$$=\frac{\vec{e}_1[\vec{e}_1\cos a-\vec{e}_3\cos b]}{\sin b\sin c}=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$ Itd.

2° $$\sin\alpha=\frac{|(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|\,|\vec{e}_1\times\vec{e}_3|}=\dots$$

1352. Dokazati, prvo za trougao $A_1\,A_2\,A_3$. Svaki mnogougao može da se razloži na trouglove.

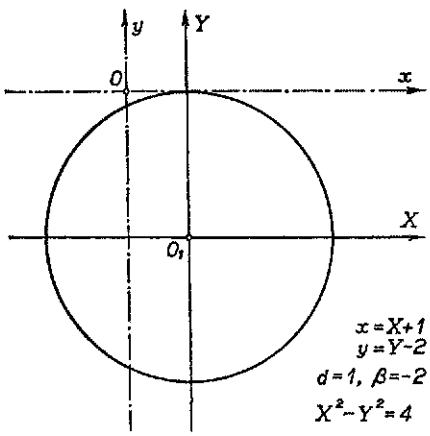
1353. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$; $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=3\vec{b}+\vec{c}=\{8,\ 4,\ -2\}=\vec{d}$; $P_{r_{\vec{b}}}\vec{d}=\dfrac{22}{\sqrt{6}}$.

1354. Neka je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{e}$. Na osnovu zadatka (1 130) možemo napisati

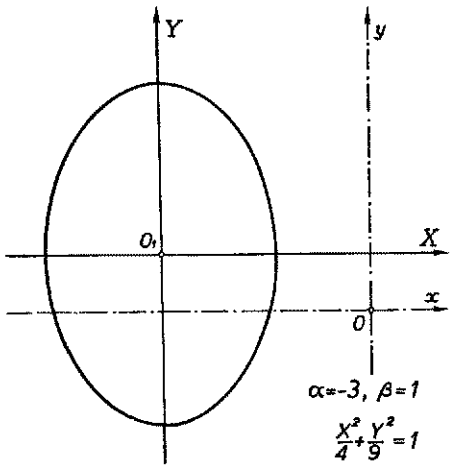
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{e}\cdot\vec{d})\,\vec{c}-(\vec{e}\cdot\vec{c})\,\vec{d}=[(\vec{d}\times\vec{a})\cdot\vec{b}]\,\vec{c}-[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]\,\vec{d}.$$

1355. U zadatku (1 354) staviti: $\vec{c}=\vec{b}$ i $\vec{d}=\vec{c}$. **1356.** Ne.

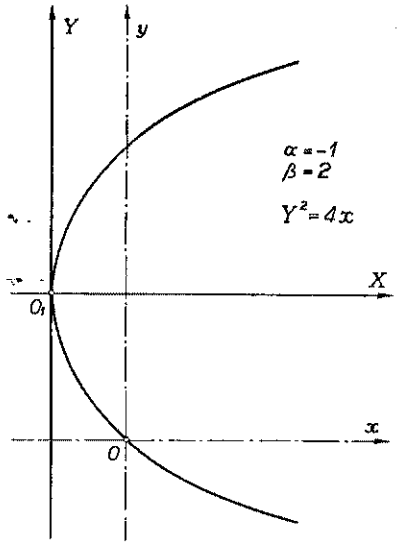
1357.



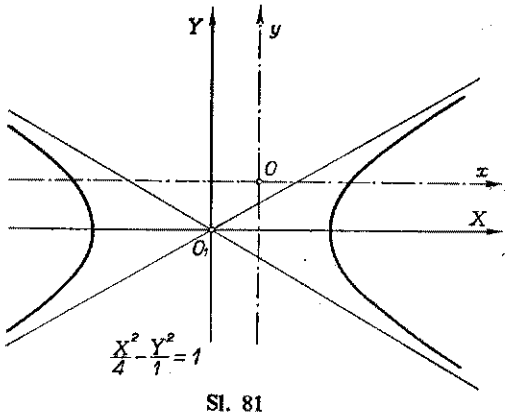
Sl. 78



Sl. 79



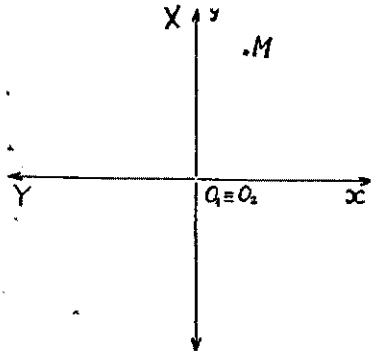
Sl. 80



Sl. 81

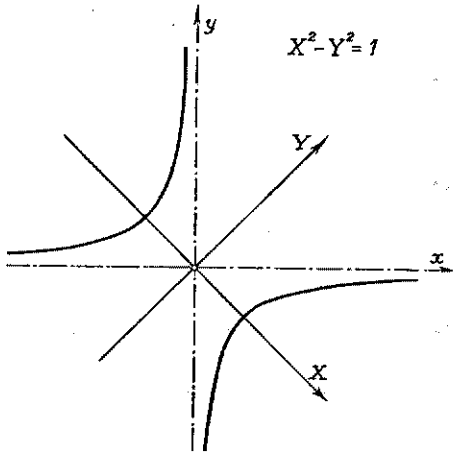
1358. $xy+15=0$ — hiperbola.

1359.



Sl. 82

1360.



Sl. 83

1361. $X^2-4Y^2=16$.

1362. $\varphi=\operatorname{arc\,tg} 2$, $(\operatorname{tg}\varphi=2)$.

1363. 1° $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$; $x-y=0$ i $x+y=0$ — prave koje se seku; 2° $x^2+y^2=0$ — tačka (0, 0); 3° elipsa; 4° krug; 5° $x(x-y)=0$ — prave koje se seku; 6° $x=2y$, $x=y$ — prave koje se seku; 7° $x=\pm 2$ — prave paralelne.

1364. 1° $x'=2x-y+1$, $y'=x+3y-2$; 2° $x'=x+5y$, $y'=-5x+y$.

1365. 1° $x''=-4x+8y$, $y''=4y$.

2° U odnosu na A_1 invarijantna je prava $y=x$; u odnosu na A_2 dve prave $y=x$ i $y=-\frac{1}{3}x$.

1368. $x'=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)x+\frac{a}{kb}\left(-k+\frac{1}{k}\right)y,\quad y'=\frac{b}{2a}\left(-k+\frac{1}{k}\right)x+\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)y.$

1370. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2},\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2},\quad x'^2+2y'^2=1.$

1371. $\vec{r}\{x, y\}$, $\vec{r'}\{x', y'\}$. Iz $\vec{r}\cdot\vec{r'}=0 \Rightarrow xx'+yy'=0$, tj. $8x^2-4xy-6xy+2y^2=0$ ili $4x^2-5xy+y^2=0$. Ovo je jednačina pravih $y=x$ i $y=4x$. Iz uslova da je $x^2+y^2=1$ sledi $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ili $x=\pm\frac{1}{\sqrt{17}},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

1372. $x=-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1+1.\qquad y=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1.$

1373. $x=1+x'\sin 60^\circ+y'\sin 15^\circ$

$y=-1+x'\sin 30^\circ+y'\sin 75^\circ.$

1374. $\frac{3}{2}x'^2+\frac{5}{2}y'^2+\lambda-\frac{2}{15}=0.\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{4}{15},\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{15}.$

1375. $x^2-4xy+4y^2-8x+16y+16=0.$

1376. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y',\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}z',\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2}y'+\frac{\sqrt{2}}{2}z'.$

1377. $x=-2x'-y'-z'+1,\quad y=-y'-z'+2,\quad z=x'+3y'+z'-1.\quad O\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right).$

1378. $x'^2+2y'^2+3z'^2=2.$

1379. 1° $x'=3x+y-2z-1$ 2° $x'=x-y+2$

$y'=x-5y-z+4$ $y'=y+2z-1$

$z'=2x+3y+z$ $z'=x+y+z.$

1382. Uputstvo: Dokazati, prvo, da se zapremina ma kakvog tetraedra pri afinom preslikavanju menja u odnosu $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. U istom odnosu se, prema tome, menja zapremina ma koga poliedra, itd.

1383. $\Phi(x, y)=2x^2+3y^2-4x+6y-7=0;\ \Phi'_x(x, y)=4x-4=0$ za $x=1$,

$\Phi'_y(x, y)=6y+6=0$ za $y=-1 \Rightarrow O_1(1, -1),\ x=X+1;\ y=Y-1;$

$\Phi(x, y)=2(X+1)^2+3(Y-1)^2-4(X+1)+6(Y-1)-7=2X^2+3Y^2-12=0$

$\Rightarrow \frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{4}=1.$

1384. 1° $(-1, -1)$; 2° $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

1385. $x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi$; $y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi$, $2(x\cos\varphi-y\sin\varphi)^2+4(x\cos\varphi-y\sin\varphi)(x\sin\varphi+y\cos\varphi)-(x\sin\varphi+y\cos\varphi)^2=12$. $2x^2\cos^2\varphi-4xy\sin\varphi\cos\varphi+2y^2\sin^2\varphi+4x^2\sin\varphi\cos\varphi+4xy\cos^2\varphi-4xy\sin^2\varphi-4y^2\sin\varphi\cos\varphi-x^2\sin^2\varphi-2xy\sin\varphi\cos\varphi-y^2\cos^2\varphi=12$.
Ako izjednačimo sa nulom koeficijenat uz xy, dobijamo:
$-4\sin\varphi\cos\varphi-4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi=0$, tj. $2\operatorname{tg}^2\varphi-3\operatorname{tg}\varphi-2=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1=-2$, $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{1}{2}$, zamenom ovih vrednosti u transformisanoj jednačini, dobijamo $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$,

$$\left(\cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=-\frac{1}{5};\quad \sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

1386. 1° Par pravih koje se seku. 2° Par pravih koje se seku. 3° Hiperbola.

1387. $\delta=\lambda-\frac{9}{4}$, $\Delta=\frac{-\lambda^2+12\lambda-27}{4}$, $\delta=0$ za $\lambda=\frac{9}{4}$, $\delta>0$ za $\lambda>\frac{9}{4}$ i $\delta<0$ za $\lambda<\frac{9}{4}$;
$\Delta=0$ za $\lambda=9$ i $\lambda=3$; $\Delta\neq0$ za $\lambda\in(-\infty;3)$; $\lambda\in(3;9)$; $\lambda\in(9;\infty)$.
1° Za $\lambda\in\left(\frac{9}{4};3\right)$, $\lambda\in(3,9)$, $\lambda\in(9;\infty)$. 2° $\lambda\in\left(-\infty;\frac{9}{4}\right)$. 3° $\lambda=\frac{9}{4}$.
4° $\lambda=3$ i $\lambda=9$. 5° Ne postoji. 6° Ne postoji.

1388. Za $\lambda>1$ elipse, za $\lambda=1$ parabolu, za $\lambda<1$ hiperbole, za $\lambda=-24$ par pravih koje se seku: $x-6y-3=0$, $x+4y-1=0$.

1389. Iz uslova da kriva prolazi kroz tačku $A(2;0)$, dobija se $\beta=12$. Sem toga, mora biti $\delta=0$ i $\Delta\neq0$, odakle sledi da je $\alpha=\pm2$, pa imamo: $x^2-2xy+y^2+4x+6y-12=0$ i $x^2+2xy+y^2+4x+6y-12=0$.

1390. $\delta=m-9$; $\Delta=\frac{-n^2+18n-25m+144}{4}$: 1° Za $m\neq9$, n p oizvoljno.
2° Za $m=9$ i $n\neq9$. 3° Za $m=9$ i $n=9$.

1391. $\delta=\frac{4-\lambda^2}{4}$, $\Delta=\frac{-\lambda^2+16\lambda-28}{4}$. 1° $\lambda=2$, $\lambda=14$. 2° $\lambda=-2$. 3° Ne postoji.

1392. Normalni vektor na ravan je $\vec{N}=\vec{k}=\{0,0,1\}$ pa je $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0(x-1)+0(y-1)+(z-1)=0$, odnosno $z=1$.

1393. $D=0$.

1394. $\vec{N}=\vec{i}=\{1,0,0\}$ znači $B=0$, $C=0$ i jednačina glasi $Ax+D=0$.

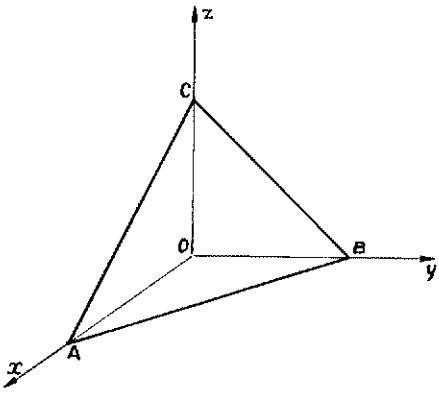
1395. xOy; $z=0$; xOz: $y=0$; yOz: $x=0$.

1396. $\vec{N}=\vec{AB}\times\vec{AC}$; $M_1=A$, $\vec{AB}=-\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{AC}=-\vec{i}+\vec{k}$; $\vec{N}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+1\cdot(z-0)=0$, odnosno $x+y+z=1$ (sl. 84).

1397. $\vec{N}=\vec{k}\times\vec{OM_1}=-\vec{i}+2\vec{j}$, $-1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-1)=0$, tj. $-x+2y=0$.

1398. $x+4y-2z-2=0$.

1399. Ravan koja prolazi kroz sredinu rastojanja AB, i koja je normalna na AB. $x-y+z=2$.



Sl. 84

1400. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$

1401. 1° $x+y+z=4.$ 2° $3y+z=0.$ 3° $4x-y-3z=0.$

1402. a) $a=6,\ b=-3,\ c=2.$ b) $a=3,\ b=15,\ c=-5.$ c) $a=0,\ b=0,\ c=0.$ d) $a=-2.$ $b=3$, ravan je paralelna sa z osom. e) $a=3$, ravan je paralelna sa ravni Oyz.

1403. Paralelne su.

1404. Imaju beskonačno mnogo. Sistem jednačina je neodređen. Ravni se seku po zajedničkoj pravoj.

1405. Da $(-1,\ 0,\ 1)$.

1406. $x-y+z-2=0.$

1407. $\vec{r}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-3$

1408. Paralelne su. Imaju isti normalni vektor $\vec{N}\{1,\ -1,\ 1\}$.

1409. $\vec{r}\cdot(2\vec{i}-\vec{j})=-1.$

1410. a) $\cos\alpha=\frac{1}{5}$, b) $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

1411. 1° $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $d=\frac{6}{\sqrt{14}}$; 2° $d=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

1412. 1° Izaberimo proizvoljnu tačku na jednoj ravni i nađimo njeno rastojanje od druge. Primer, iz druge ravni: $x=0,\ y=0,\ z=-\frac{1}{2},\ d=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

1413. 1° $4x-y+3z-1+\lambda(x+5y-z+2)=0,\quad (4+\lambda)x+(5\lambda-1)y+(3-\lambda)z+2\lambda-1=0;$
$(4+\lambda)a+(5\lambda-1)b+(3-\lambda)c+2\lambda-1=0,\quad \lambda=\frac{1-4a+b-3c}{a+5b-c+2}$. Može li se odrediti λ ako je $a+5b-c+2=0$? (Ne, tada se tačka A nalazi na presečnoj pravoj).
2° $(5\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{5},\ 21x+14z-3=0.$ 3° Zadatak je nemoguć. (Kada bi bio moguć?).
4° $(4+\lambda)\cdot 2-(5\lambda-1)+5(3-\lambda)=0,\quad \lambda=3,\ 7x+14y+5=0.$

1414. $x-y+2z=0,\quad x-y-z=0.$

1415. $15x-3y-26z-6=0$ (uputstvo: odrediti λ iz identiteta.
$5x-y+3z-2+\lambda(5x-y-2)=0.$

1416. $\vec{r}\cdot(21\vec{i}+4\vec{j}+14\vec{k})=20$

1417. $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k};\quad 3x-4y+z=11.$

1418. Jednačina ravni: $x+y-2z=0,\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

1419. $\pm 4=\frac{2x+2y+z-8}{\sqrt{4+4+1}}$, odakle sledi $\Pi_1: 2x+2y+z=20$ i $\Pi_2: 2x+2y+z+4=0.$

1420. $z=\pm x.$

1426. Sistem jednačina $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ mora imati jedno i samo jedno rešenje, tj mora biti: $D=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0.$

1422. Sistem jednačina: $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ je neodređen, tj. mora biti $D=0$ i $D_x=0,\ D_y=0,\ D_z=0.$

1423. $\lambda=3$.

1424. $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{\lambda}$; $\lambda=-1$.

1425. $D'=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$

1426. $A=13$, $D=23$.

1427. Iz snopa ravni koje prolaze kroz presek odredi se λ da ispunjavaju postavljeni uslov $\lambda=\frac{-9\pm\sqrt{216}}{5}$?

1428. Iz snopa ravni dobija se $\lambda=-1$, pa je: $2x-2y-2z-1=0$.

1429. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

1430. $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

1431. $\frac{x}{4}=\frac{z-2}{3}$, $y=0$; $x-4=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{5}$; $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-2}$; $-x=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-4}$;
$\frac{x-4}{-5}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-7}$; $\frac{x-5}{-6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-2}$.

1432. a) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$. b) $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1433. $x=1-t$, $y=3t$, $z=2+2t$.

1434. $\vec{p}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$; $\vec{N}_1\{1, -1, 1\}$, $\vec{N}_2(2, 1, -2\}$, $\vec{p}\{1, 4, 3\}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{26}}$,
$\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{26}}$.

1435. Uzmimo proizvoljnu tačku na datoj pravoj. Tako, ako je $y=0$, dobijamo $x=0$ i $z=-3$,
$M_1(0, 0, -3)$, $\vec{p}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\{9, 5, 1\}$; $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$.

1436. $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-5}{2}$ i $\frac{x}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{6}$; $\cos\varphi=\frac{20}{21}$.

1437. 1° $\vec{p}\{1, 0, 0\}$: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{0}$. 2° $\vec{p}\{0, 1, -3\}$: $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-3}$.
3° $\vec{p}\{1, 4, 3\}$: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$. 4° $\vec{p}\{0, 0, 1\}$: $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$.

1438. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z+2}{-1}$.

1439. Prava prolazi još kroz tačku $M_2(0, 0, 2)$. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{0}$.

1440. $n=3$. Presek pravih je tačka $P\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$.

1441. Da bi prava sekla z osu potrebno je da se seku obadve ravni u istoj tački. Pošto je iz prve jednačine za $x=0$, $y=0$, $z=-1$ a iz druge $z=D$, to je $D=-1$.

1442. U snopu ravni $x-y+z-3+\lambda(2x+\alpha y+z+\beta)=0$, nalazi se i ravan $z=0$. Svi koeficijenti osim koeficijenta uz z moraju biti jednaki nuli, tj.: $1+2\lambda=0$, $\lambda\alpha-1=0$, $\lambda\beta-3=0$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\alpha=-2$, $\beta=-6$.

1443. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$, ne seku se.

1444. Prodor prave i xOy ravni: $z=0$, $\frac{x-4}{1}=\frac{-1}{-2}$, odakle $x=\frac{9}{2}$; $\frac{y-2}{2}=\frac{1}{2}$ ili $y=3$,

$P_1\left(\frac{9}{2}, 3, 0\right)$, $P_2(0, -6, 9)$, $P_3(3, 0, 3)$.

1445. $x=2+2t$; $y=-3+3t$; $z=-1+t$: $t\geqslant 0$.

1446. 1° $\alpha=90°$ $\beta=90°$, $\gamma=0$. 2° $\alpha=90°$, $\beta=0$, $\gamma=90°$. 3° $\alpha=0$, $\beta=90°$, $\gamma=90°$.

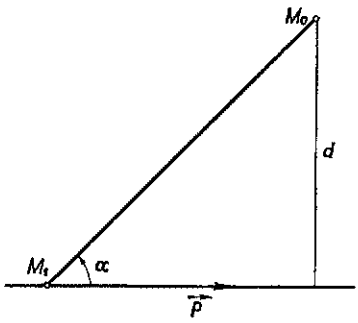
1447. $\vec{r}\times(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-3y-z)\vec{i}+(3x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}=5\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}.$

$-3y-z=5$, $3x+2z=2$, $x-2y=4$, odakle sledi da je: $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-3}$.

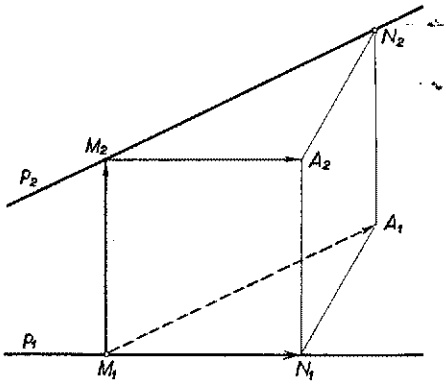
1448. $\vec{r}_1\{2, 0, -5\}$, $\vec{p}\{3, 5, 2\}$, $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{p}=0$, odnosno $\vec{r}\times(2\vec{i}-5\vec{k})=\vec{r}_1\times\vec{p}$.

1449. $\vec{d}=|\overrightarrow{M_1M_0}|\sin\alpha=\frac{|\vec{p}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{p}|}$ (sl. 85). **1450.** $d=\sqrt{\frac{117}{29}}$. (Vidi prethodni zadatak).

1451. Naći rastojanje tačke $M_0(1, 0, 1)$ od prave $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$, $d=\sqrt{\frac{7}{3}}$.



Sl. 85



Sl. 86

1452. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (sl. 86). Neka je $\overrightarrow{M_1A_1}=\vec{p}_1$ i $\overrightarrow{M_2A_2}=\vec{p}_2$, gde su $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2 : \vec{p}_1\{l_1, m_1, n_1\}$, $p_2\{l_2, m_2, n_2\}$, $\overrightarrow{M_1N_1}=\vec{p}_2$, $\overrightarrow{M_2N_2}=\vec{p}_1$. Visina prizme $M_1N_1A_1M_2A_2N_2$ je traženo rastojanje. Znači da je $d=\dfrac{|(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{p}_1\times\vec{p}_2|}$. **1453.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1454. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{1}$.

1455. Postoje dve takve tačke: $M_1(16; -4; 0)$ i $M_2(0; 8; 0)$.

1456. Parametarske jednačine prave su: $x=1+t$; $y=2t$, $z=-1+t$. Smenimo x, y i z u jednačini ravni: $1+t-4t-1+t+5=0$, $t=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{7}{2}, 5, \dfrac{3}{2}\right)$.

1457. $(x+1)+2(y-2)+(z+3)=0$, $x+2y+z=0$, $x=1+t$, $y=2t$, $z=-2+t$, $1+t+4t-2+t=0$, $t=\dfrac{1}{6}$, $P=\left(\dfrac{7}{6}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{11}{6}\right)$.

1458. Nema prodora, prava je paralelna ravni.

1459. x, y i z iz prave izražene preko parametra t identički zadovoljavaju jednačinu ravni, što znači da je prava u ravni.

1460. $x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$, $z=z_1+nt$, $A(x_1+lt)+B(y_1+mt)+C(z_1+nt)+D=0$, odakle sledi $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ i $Al+Bm+Cn=0$.

1461. $\sin\theta=\dfrac{13}{7\sqrt{6}}$. **1462.** $l=7$. **1463.** $\alpha=-2$, $\beta=-4$.

1464. 1° $\vec{p}\cdot\vec{N}=0$. 2° $\vec{p}\times\vec{N}=0$. **1466.** $\vec{r}\{0, 0, -2\}$. Videti prethodni zadatak.

1467. $4x-5y-z-5=0$. Uputstvo: iz snopa ravni koje prolaze kroz pravu $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=y\\ y=\dfrac{z+1}{3}\end{cases}$ odrediti onu koja prolazi kroz tačku M_1.

1468. $8x-5y+z-11=0$ (iz snopa ravni koje prolaze kroz datu pravu izdvojiti onu koja je normalna datoj ravni).

1469. Vektor pravca prave je $\vec{N}\{1, -2, -1\}$; $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

1470. Jednačina normale na datoj ravni kroz datu tačku je: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Njen prodor kroz datu ravan je $M'(-3, -1, 0)$.

1471. Ako je $N(x, y, z)$ simetrična tačka tački M, onda je M' (projekcija tačke M na datu ravan), sredina duži MN. Kako je $M(-1, 0, -1)$ i $M'(-3, -1, 0)$, to je $-3=\dfrac{x-1}{2}$, $-1=\dfrac{y}{2}$, $0=\dfrac{z-1}{2}$, odakle je $x=-5$, $y=-2$, $z=1$.

1472. Jednačina ravni koja prolazi kroz tačku M i koja je normalna na pravu (projekcijska ravan): $2(x-1)-(y-2)+(z-8)=0$; $2x-y+z-8=0$. Prodor date prave kroz nađenu ravan je tražena tačka $M'(3, -1, 1)$.

1473. Tačka M je simetrična sa tačkom N u odnosu na pravu p ako je projekcija tačke M, tačka M' na sredini duži MN. $3=\frac{x+1}{2}$; $-1=\frac{y+2}{2}$; $1=\frac{z+8}{2}$; $x=5$, $y=-4$, $z=-6$.

1474. Iz snopa ravni koje prolaze kroz pravu $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$ izdvojiti tri koje su normalne; jedna na ravan $z=0$, druga na ravan $x=0$ i treća na ravan $y=0$.

Na xOy: $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$; na xOz: $\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y=0 \end{cases}$; na yOz: $\begin{cases} y+z-1=0 \\ x=0 \end{cases}$

1475. $\begin{cases} 7x+14y+24=0 \\ 2x-y+5z-5=0 \end{cases}$.

1476. $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$.

1477. $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $x+2y+3z+1=0$.

1478. Postaviti ravan kroz dve tačke sa jedne prave i jednu sa druge prave, $10x-26y+17z=0$.

1479. $\alpha=2$, $\beta=-3$.

1480. $\vec{N}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$ gde je $\vec{p}_1\{-2, 1, 2\}$ i $\vec{p}_2\{1, 3, 2\}$, $4x-6y+7z-18=0$.

1481. $23x-16y+10z-153=0$. Uzeti proizvoljnu tačku na drugoj pravoj i naći njeno rastojanje od nađene ravni. $d=\frac{123\cdot(-5)-16\cdot 2+10\cdot 1-153}{\sqrt{23^2+16^2+10^2}}=\frac{290}{\sqrt{885}}$.

1482. 1° $\lambda=-\frac{1}{2}$. 2° $S(3, -1, 2)$.

3° $\vec{p}=\vec{p}_1\times\vec{p}_2$; $\vec{p}_1\left\{-\frac{1}{2}, 1, 0\right\}$, $\vec{p}_2\{2, 3, 1\}$, $\vec{p}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{7}{2}\vec{k}$. $\frac{x}{1}=\frac{2y}{1}=-\frac{2z}{7}$.

1483. Vektor pravca tražene prave je: $\vec{p}=\vec{p}_1\times\vec{p}_2$ gde je $\vec{p}_1\{-2, 1, 2\}$, $\vec{p}_2\{1, 3, 2\}$, $\vec{p}=-4\vec{i}+6\vec{j}-7\vec{k}$. Treba još odrediti tačku kroz koju prolazi tražena normala. Ta tačka se određuje iz uslova da normala seče obadve prave. Jednu koordinatu možemo uzeti proizvoljno. Primer: neka je $z_1=0$, tada je:

$$\begin{vmatrix} x_1-3 & y_1+1 & 0 \\ -4 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x_1+1 & y_1-2 & -1 \\ -4 & 6 & -7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0, \Rightarrow x_1=-\frac{1133}{707}, \quad y_1=\frac{2380}{707}.$$

1484. $x+20y+7z-12=0$; $19x+5y-17z+72=0$.

1485. 1° $\frac{a-x}{1+\lambda}=\frac{y-b}{1-\lambda}$. $2z=a(\lambda-1)-b(\lambda+1)$.

2° $(a-x)\left(1-\frac{2z+a+b}{a-b}\right)=(y-b)\left(1+\frac{2z+a+b}{a-b}\right)$.

Uputstvo: iz 1° eliminiše se parametar λ.

1486. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{-3}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{-7}$.

1487. Tražena prava prolazi kroz tačku $M(0;\ 0;\ 1)$ i ima pravac projekcije date prave na datu ravan. Projekcija prave na datu ravan je: $\begin{cases}5x-3y+z-6=0\\2x+3y-z+1=0\end{cases}$. Njen pravac je $\vec{p}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=7\vec{j}+21\vec{k}$. Tražena prava glasi: $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-1}{21}$.

1488. Tražena prava je paralelna sa projekcijom date prave na datu ravan i prolazi kroz prodor normale iz koordinatnog početka na datu ravan. Pravac projekcije na datu ravan je određen vektorom $\vec{p}=7\vec{j}+21\vec{k}$. (Videti prethodni zadatak). Jednačina normale na datu ravan iz koordinatnog početka: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}=t$, $x=2t$, $y=3t$, $z=-t$, $4t+9t+t+1=0$, $t=-\dfrac{1}{14}$, $x=-\dfrac{1}{7}$, $y=-\dfrac{3}{14}$, $z=\dfrac{1}{14}$.

Tražena prava glasi: $\dfrac{x+\frac{1}{7}}{0}=\dfrac{y+\frac{3}{14}}{7}=\dfrac{z-\frac{1}{14}}{21}$.

1489. $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$. **1490.** $\dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+2}{-4}$.

1491. Tražena ravan ima normalni vektor: $\vec{N}=\vec{p}_1\times\vec{p}_2$, $\vec{p}_1\{1,\ 2,\ 3\}$, $\vec{p}_2\{1,\ -1,\ 4\}$ $\Rightarrow$ $\vec{N}=11\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$. Nađimo jednu tačku koja je na sredini rastojanja između paralelnih ravni koje prolaze kroz date prave. Ravan kroz p_2 paralelna p_1 glasi $11x-y-3z-1=0$. Jednačina normale prave koja prolazi kroz $M_1(0,\ -1,\ 2)\in p_1$ je $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$. Njen prodor kroz ravan $11x-y-3z-1=0$ je $x_1=\dfrac{66}{125}$; $y_1=-\dfrac{131}{125}$, $z_1=\dfrac{238}{125}$, $N_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Koordinate sredine duži M_1N_1 su: $x=\dfrac{33}{125}$, $y=-\dfrac{128}{125}$, $z=-\dfrac{244}{125}$.

Tražena ravan je: $11\left(x-\dfrac{33}{125}\right)-\left(y+\dfrac{128}{125}\right)-3\left(z-\dfrac{244}{125}\right)=0$.

1492. $\begin{cases}19x-3y+40z+61=0\\3x+5y+2z+3=0\end{cases}$. **1493.** 1° $t=\dfrac{1}{12}$, $M\left(\dfrac{1}{12},\ 1,\ \dfrac{7}{6}\right)$; 2° $M(2,\ 1,\ 5)$.

1494. 1° Za $t=0$ $\Rightarrow$ $P_0(1,\ 2,\ -1)$. Za $t=1$ $\Rightarrow$ $P_1(0,\ -1,\ 1)$. Jednačina prave kroz tačke P_0 i P_1 je: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$. Za proizvoljni trenutak t koordinate tačke P su $x=1-t$, $y=2-3t$, $z=2t-1$. One zadovoljavaju dobijenu jednačinu. 2° p: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$. 3° $2(1-t)+3(2-3t)+2(2t-1)+1=0$ $\Rightarrow t=1$ 4° Za $t=2$ P ima koordinate $x=-1$, $y=-4$, $z=3$. Jednačina ravni je, prema tome, $x+1+3(y+4)-2(z-3)=0$, tj. $x+3y-2z+19=0$.

1496. Normala kroz koordinatni početak na datu ravan prodire je u tački $M_0\left(\frac{AD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{BD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{CD}{A^2+B^2+C^2}\right)$ to je najbliža tačka koordinatnom početku u datoj tavni.

1497. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$; $\frac{x-1}{4}=\frac{y-{}^{10}/_9}{-4}=\frac{z+{}^{8}/_9}{7}$.

1498. $\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+2}{7}$.

1499. 1° $d=\frac{|(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{a}|}{|\vec{a}|}$;

2° $\vec{r}_0=\vec{r}_2-\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$.

1500. $M\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right)$.

1501. $M_1(2, -3, 4)$; $M_2(-1, 2, -1)$.

1502. $\left(-1, \frac{7}{2}, 11\right)$.

1503. $\overline{QR}=\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$; $\overline{PQ}=\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$;
$\overline{PR}=\sqrt{(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2}$. (Vidi se da je $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RP}$),

$\vec{N}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a-b & b-c & c-a \\ a-c & b-a & c-b \end{vmatrix}$. $[(b-c)(c-b)-(c-a)(b-a)](x-a)+[(a-c)(c-a)-$
$-(a-b)(c-b)](y-b)+[(a-b)(b-a)-(a-c)(b-c)](z-c)=0$.

1504. $x+3y=0$; $3x-y+4z-12=0$; $h=\frac{3}{5}\sqrt{65}$.

1505. $x+2y+1=0$.

1506. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$.

1507. 1° $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$, $C(1, -1, 1)$, $R=\sqrt{3}$;

2° $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$, $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$,

$R=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d}$, $\frac{a^2+b^2+c^2}{4}>d$.

1508. Centar sfere se nalazi na pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak i zaklapa jednake uglove sa osama, tj. na pravoj: $x=y=z=t$. Osim toga je $\overline{CO}=\overline{CA}$, gde je C centar, O koordinatni početak a $A(a, 0, 0)$, pa je $\sqrt{3t^2}=\sqrt{(a-t)^2+t^2+t^2}$; $3t^2=a^2-$
$-2at+3t^2$, $t=\frac{a}{2}$, $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $R^2=3t^2=\frac{3a^2}{4}$; $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=$
$=\frac{3a^2}{4}$.

1509. $(x\pm a)^2+(y\pm a)^2+(z\pm a)^2=a^2$. Dolaze u obzir kombinacije svih znakova. Ukupno ima 8 sfera koje ispunjavaju postavljeni zahtev.

1510. $x^2+y^2+(z-5)^2=34$.

1511. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

1512. $x^2+y^2+(z+1)^2=12$ i $x^2+y^2+(z+4)^2=27$.

1513. Centar se nalazi kao prodor normale iz centra sfere na datu ravan i date ravni. Poluprečnik se nalazi po obrascu $r^2=R^2-d^2$, gde je d rastojanje između centra kruga i centra sfere, ma koje tačke kruga. Normala: $\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}=t$; $x=4+3t$, $y=7+$ $+t$, $z=-1-t$. Prodor te prave i ravni je: $C'(1, 6, 0) \Rightarrow d=\overline{CC'}=\sqrt{11}$. $r^2=36-$ $-11=25$, $r=5$.

1514. Centar sfere se nalazi na pravoj: $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ Odatle se dobija da je $C(1, -1, c)$. Osim toga je: $R^2=c^2+1$ (c je rastojanje između centra kruga i centra sfere) i: $R^2=(0-1)^2+(0+1)^2+(c-3)^2$, tj. $R^2=2+c^2-6c+9$. Imajući u vidu još: $R^2=c^2+1$, dobija se: $c=\frac{5}{3}$ i $R=\sqrt{\frac{34}{9}}$, pa je jednačina sfere: $(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{34}{9}$.

1515. 1° Iz snopa ravni koje prolaze kroz datu pravu izdvojiti onu koja je udaljena od tačke $O(0, 0, 0)$ za 1 (O centar sfere a $R=1$ poluprečnik).
$3x-4y-5=0$ i $387x-164y-24z-421=0$.
2° Iz snopa izdvojiti onu koja prolazi kroz centar sfere $\Rightarrow$ $84x+108y-15z=0$.

1516. Treba postaviti ravan kroz tačku čije su koordinate $x=2t+5$, $y=3t-1$ i $z=-5t-13$, gde je $t=\pm 2$, a čiji je normalni vektor $\vec{N}=4\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$.

1517. Jednačina generatrise je: $\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{2}=\frac{z-z_1}{3}$, gde je $M(x_1, y_1, z_1)$ tačka na direktrisi. Znači da imamo još: $y_1^2=4x_1$, $z_1=0$. Eliminacijom x_1, y_1, z_1 iz ove četiri jednačine dobijamo traženu jednačinu. Tako iz $\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{2}=\frac{z}{3}$ dobijamo:
$x_1=x-\frac{z}{3}$, $y_1=y-\frac{2z}{3}$, pa je: $\left(y-\frac{2z}{3}\right)^2=4\left(x-\frac{z}{3}\right)$ tražena jednačina.

1518. Odstojanje tačke M od ravni $x=0$ je x, a od prave $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ je: $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, pa je $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x$, odnosno $y^2=2x-1$. Skup tačaka predstavlja cilindričnu površinu čija je izvodnica paralelna sa z osom.

1519. Kontura senke je presek cilindrične površine čija je izvodnica paralelna pravoj $x=y=z$, a vodilja veliki krug na sferi koji je normalan na tu izvodnicu. Jednačina vodilje: $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ (treba postaviti ravan kroz centar sfere normalnu na pravu $x=y=z$). Jednačina izvodnice: $x-x_1=y-y_1=z-z_1$ iz sistema jednačina: $x_1+y_1+z_1-3=0$, $(x_1-1)^2+(y_1-1)^2+(z_1-1)^2=1$, $x-x_1=y-y_1$, $x-x_1=z-z_1$, treba eliminisati x_1, y_1, z_1. Eliminacijom se dobija jednačina: $(2x-y-z)^2+(2y-x-z)^2+$ $+(2z-x-y)^2=3$, koja predstavlja cilindričnu površinu.
Za $z=0$ dobijamo konturu senke na ravan xOy: $x^2-xy+y^2=\frac{1}{2}$.

1520. $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$.

1521. 1° $2y^2+2z^2-2yz+12y-10z-3=0$. 2° $(x-y)^2+3z^2-8(x-y)-8z-26=0$.

1522. Ortogonalna trajektorija je presek cilindrične površine, koja prolazi kroz datu krivu čija je izvodnica paralelna sa z osom, sa ravni $z=0$. Pošto je jednačina izvodnice $\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}$, tj. $x=x_1$, $y=y_1$ i $z_1=z-t$. Eliminacijom z iz dve površine dobijamo $x^2+y^2+4x+2y+5=0$, (krug).

1523. $\frac{(x-2)^2}{36}=\frac{(y+4)^2}{18}=1.$

1524. Prava prolazi kroz tačke $O(0, 0, 0)$ i $M_1(x_1, \sqrt{a-x_1^2}, c)$. Njena jednačina glasi: $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{\sqrt{a^2-x_1^2}}=\frac{z}{c}$. Eliminišimo x_1 iz ove jednačine $\frac{x}{x_1}=\frac{z}{c}$, $\frac{y}{\sqrt{a^2-x_1^2}}=\frac{z}{c}$

$\left(\text{iz prve je: } x_1=\frac{cx}{z}\right)$ smenimo i drugu $\frac{y}{\sqrt{a^2-\frac{c^2x^2}{z^2}}}=\frac{z}{c}$, tj. posle sređivanja imamo: $a^2z^2=c^2(x^2+y^2)$.

1525. Izvodnica prolazi kroz tačke $S(0, 0, 2)$ i $M_1(x_1, \sqrt{9-x_1^2}, 1)$. Jednačina izvodnice glasi

$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{\sqrt{9-x_1^2}}=\frac{z-2}{1}$ iz $\frac{x}{x_1}=\frac{z-2}{2}$ dobija se $x_1=\frac{x}{z-2}$.

Zamenom u $\frac{y}{\sqrt{9-x_1^2}}=\frac{z-2}{1}$ dobija se $9(z-2)^2=x^2+y^2$.

1526. Izvodnica prolazi kroz tačke $O(0, 0, 0)$ i $M_1(x_1, \sqrt{8-x_1^2}, 4)$. Ostalo kao u prethodnom zadatku. $2x^2+2y^2-z^2=0$.

1527. 1° $y^2+z^2=1$ predstavlja cilindar a $x+z=0$ ravan. Njihov presek je elipsa. 2° Projekcija na ravan xOy je elipsa, na ravan xOz je prava $x+z=0$ a na ravan yOz krug $x^2+y^2=1$.

3° Izvodnica prolazi kroz tačke: $S(1, 1, 1)$ i $M_1(x_1, \sqrt{1-x_1^2}, -x_1)$. Eliminacijom x_1 iz jednačina izvodnice: $\frac{x-x_1}{1-x_1}=\frac{y-\sqrt{1-x_1^2}}{1-\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{z+x_1}{1+x_1}$ dobija se tražena jednačina:

$$\frac{y-\sqrt{1-\left(\frac{x-z}{2-z-x}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{x-z}{2-z-x}\right)^2}}=\frac{x-\frac{x-z}{2-z-x}}{1-\frac{x-z}{2-z-x}}, \text{ itd.}$$

1528. To je konusna površina čiji je vrh u $O(0, 0, 0)$ a vodilja:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-10x+2y+10=0 \\ 5x-y=10 \end{cases} \Rightarrow (y-5x)^2-10(x^2+y^2+z^2)=0.$$

1529. $\begin{cases} 10(x^2+y^2+z^2)-(5x-y)^2=0 \\ 3x-2y=30 \end{cases}$ (Videti prethodni zadatak).

1530. $F(x, z)=x+z-1=0$; $F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=\sqrt{x^2+y^2}+z-1=0$.

1531. a) $z=x^2+y^2$. b) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$.

1532. $F(x, y)=y-\ln x=0$. 1° $\sqrt{y^2+z^2}-\ln x=0$. 2° $y-\frac{1}{2}\ln(x^2+z^2)=0$.

1533. Konus nastaje rotacijom prave OM oko z ose (sl. 87). Jednačina vodilje je $x^2+y^2=\sqrt{9+16}$, $z=-5$, tj. $x^2+y^2=5$, $z=-5$. Za $x=0$, y je $\pm\sqrt{5}$; $z=5$, pa možemo smatrati da konus nastaje rotacijom prave $z=\sqrt{5}\,y$ oko z ose. Konačno je $z=\sqrt{5(x^2+y^2)}$ jednačina konusa.

1534. $xy+xz+yz=0$.

1535. Jednačina generatrise biće: $y=ax$, $z=b$. Neka je $M_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka sa c. Tada je: $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$, $x_1+y_1+z_1=0$ $y_1=ax_1$, $z_1=b$. Eliminacijom koordinata x_1, y_1, z_1 iz ovog sistema dobijamo $(1+a^2)\left(\frac{1-b}{1+a}\right)^2+b^2=1 \Rightarrow$

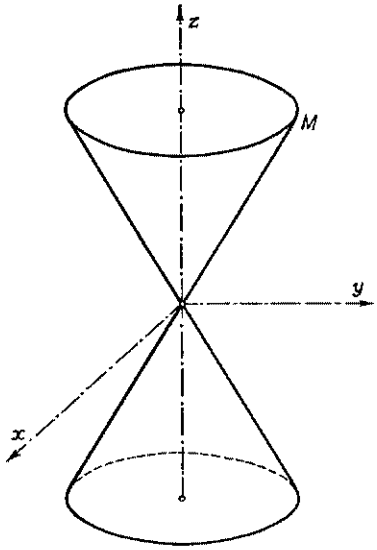
$\Rightarrow (x^2+y^2)\left(\frac{1-z}{x+y}\right)^2+z^2=1.$

1536. $z^2(x+y)^2=2a^2xy$.

1538. $x'^2+2y'^2+3z'^2=6$ (elipsoid).

1539. $x'^2+y'^2=3$ (kružni cilindar).

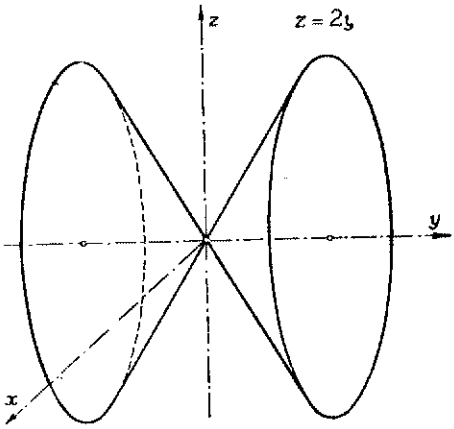
1540. Parametarske jednačine date prave su $x=-2t$, $y=0$, $z=3-3t$. Ako smenimo u elipsoid, dobićemo: $t^2+\frac{9-18t+9t^2}{9}=1$, odakle se dobija: $t_1=0$, $t_2=1$, pa je $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=3$, $x_2=-2$, $y_2=0$, $z_2=0$.



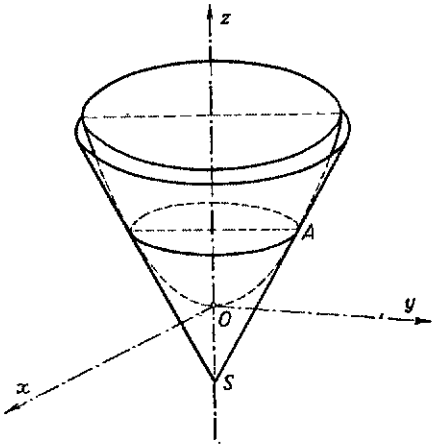
Sl. 87

1541. Elipsa.

1542. Za $x=0$; $z=\pm 2y$ (prave), za $y=0$: $x=0$, $z=0$ (tačka), za $z=0$: $y=\pm\frac{x}{2}$ (prave). Rotacioni konus čija je osa y osa, teme mu je koordinatni početak (sl. 88).



Sl. 88



Sl. 89

1543. Skup tačaka se nalazi na kružnom konusu čiji je vrh u S, a osa z osa (sl. 89). Presek površine $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sa ravni yOz je parabola $z=\frac{y^2}{2}$. Odredimo dodirne tačke te parabole i tangente iz S. Prava kroz tačku S je $z=ky-1$; u dodirnoj tački moraju biti ispunjeni ovi uslovi: $\frac{y^2}{2}=ky-1$ i $y=k$, odakle se dobija da je $y=\pm\sqrt{2}$ a $z=1$, traženi skup tačaka nastaje rotacijom prave SA oko z ose, pa je $(z+1)^2=2(x^2+y^2)$ tražena jednačina.

1544. Rastojanje tačke $M(x, y, z)$ od tačke $F\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$ je $\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2}$ a od ravni $z+\frac{a}{2}=0$ je $Z+\frac{a}{2}$. Izjednačavanjem i sređivanjem dobija se $z=\frac{x^2+y^2}{2a}$. Jednačina predstavlja površinu kružnog paraboloida. Za $a>0$ otvor mu je nagore, a za $a<0$ otvor mu je nadole.

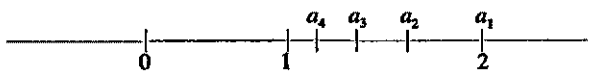
1545. a) Vektor pravca prave MN je: $\vec{P}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OA'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}=6\vec{i}+18\vec{j}+15\vec{k}$.

Jednačina prave je: $\frac{x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}$. b) Ravan rotacije prolazi kroz $O(0, 0, 0)$ i normalna je na vektor $\vec{p}\cdot 2x+6y+5z=0$. c) $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}}{|\overrightarrow{OA}|^2}=\frac{20+4}{29}=\frac{24}{29}$. d) $\cos\varphi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{|\vec{p}|}=$ $=\frac{15}{3\sqrt{65}}=\frac{5}{\sqrt{65}}$. e) Krug rotacije tačke A je: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=29 \\ 2x+6y+5z=0. \end{cases}$ Neka je: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka na velikom krugu, onda je jednačina izvodnice cilindrične površine pomoću koje ćemo naći projekciju: $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1+t$. Osim toga je: $\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=20 \\ 2x_1+6y+5z_1=0. \end{cases}$ Eliminacijom x_1, y_1, z_1 i t iz pet jednačina dobijamo: $25(x^2+y^2)+(2x+6y)^2=725$.

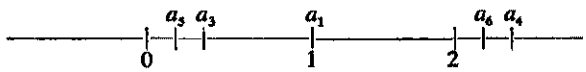
Glava V

1546. Svakom se parnom broju može korespondirati jedan prirodan broj: $2n$.

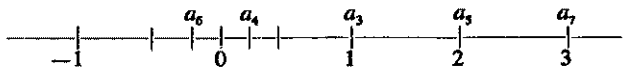
1547. Članove možemo numerisati (prebrojati) na sledeći način: Članove na neparnim mestima: $a_{2n-1}=n$, $n=1, 2, 3 \ldots$ a članove na parnim mestima: $a_{2n}=\frac{1}{n+1}$, $n=1, 2, 3 \ldots$.

1548. 

. Na $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ 3 člana. Na $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ beskonačno mnogo. Ne postoji član niza koji bi odgovarao tački 1.

1549. 

. Neparni članovi se približavaju 0, a parni 1 ukoliko se n povećava. Tačke nagomilavanja su 0 i 1.

1550. 

. Tačka nagomilavanja je 0. Niz je neograničen.

1551. $a_n=\frac{2n\cdot(-1)^n+5}{n}$.

1552. $a_n=\frac{1-3n}{n}$.

1553. 1°

. Niz je ograničen. Tačka nagomilavanja je 0. Granična vrednost mu je 0. 2° Niz je neograničen. Tačka nagomilavanja je 0. Nema graničnu vrednost. 3° Neograničen, nema tačaka nagomilavanja, nema granične vrednosti u konačnosti.

1554. 1° Napišimo nekoliko prvih članova niza: $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=1$, ... $a_{2k}=1$, $a_{2k-1}=-1$. Tačke nagomilavanja su -1 i 1. Niz je ograničen i divergentan. 2° $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{3}$, $a_3=1$, $a_4=\frac{9}{5}$, $a_5=1, \ldots$ Svi članovi niza sa neparnim indeksom su 1, jer je $\cos\frac{2k+1}{2}\cdot\pi=0$ za svako $k\in N$ i ima ih beskonačno mnogo. Ako je $n=2k$, onda je $\cos\frac{n\pi}{2}=\cos k\pi=\pm 1$, pa je za k parno $a_n=1+\frac{2k}{2k+1}$ a za k neparno $a_n=1-\frac{2k}{2k+1}$. Ako k teži beskonačnosti, preko parnih brojeva, onda a_n teži 2. Ako $k\to\infty$ preko neparnih brojeva, onda $a_n\to 0$. Prema tome, tačke nagomilavanja su 0, 1 i 2. Niz je divergentan i ograničen. 3° Tačke nagomilavanja su -1 i 3, divergira i ograničen je. 4° Tačka nagomilavanja je 0, konvergentan i ograničen.

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-1$; b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=0$; c) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=3$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-1$; d) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=0$.

1555. Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan mali broj. Tada iz $\left|\frac{1}{3n}-0\right|<\varepsilon$ sledi da je $n(\varepsilon)>\frac{1}{3\varepsilon}$. Ako je ε fiksirano, onda je $N_0(\varepsilon)=\frac{1}{3\varepsilon}$ fiksirano i za svako $n>N_0$ je $\left|\frac{1}{3n}-0\right|<\varepsilon$ što znači da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0$.

1556. Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno malo. $\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n+1}<\varepsilon$; $n>\frac{3}{\varepsilon}-1$, $N_0(\varepsilon)=\frac{3}{\varepsilon}-1$.

1557. $\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{8}{25n+5}<\varepsilon$, $N_0(\varepsilon)=\frac{1}{25}\left(\frac{8}{\varepsilon}-5\right)$, $N(0{,}0001)=3200$.

1558. 1° 0; 2° 1; 3° 0; 4° 0. **1559.** 1° Nema; 2° ima, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=0$; 3° nema.

1560. Ako se iskoriste pravila o graničnim vrednostima zbira, razlike i proizvoda, lako se vidi da je: 1° $\frac{2}{3}$; 2° 0; 3° $-\frac{1}{2}$; 4° $-\frac{2}{9}$.

1561. 1° Drugi, 2° prvi; 3° drugi. **1562.** 1° 1; 2° 1.

1563. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$. **1564.** $\frac{-3}{2}$.

1565. Razlikujemo tri slučaja: 1° $k=h$. Podelimo brojilac i imenilac sa $n^h=n^k$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\cdots+b_h}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_h}{n^k}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

2° $k<h$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\cdots+b_h}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0\frac{1}{n^{h-k}}+\cdots+\frac{a_k}{n^h}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_h}{n^h}}=0.$$

3° $k>h$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\cdots+b_h}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^{k-h}+\cdots+\frac{a_k}{n^h}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_h}{n^h}}=\operatorname{sgn}(a_0\cdot b_0)\cdot\infty.$$

1566. a) $a=\frac{1}{b}$. $|b|>1$, tada je: $|b|=1+h$, $h>0$ i $|n^k a^n|=\frac{n^k}{(1+h)^n}=$

$$=\frac{n^k}{1+nh+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}+\cdots}<\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}}=$$

$$=\frac{(k+1)!}{h^{k+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(n-k)}.$$ Ovaj izraz teži 0 kada $n\to\infty$. Prema

tome je $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$. b) Neka je $\sqrt[n]{n} = 1+h \Rightarrow n = (1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2} h^2$. Odavde je

$h^2 < \frac{2}{n-1}$ ili: $h < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Za $n \to \infty$ $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to \infty \Rightarrow h \to 0$, tj. $\lim \sqrt[n]{n} \to 1$.

1567. 1° $a>1$, tada je $a = 1+h$ i $a^n = (1+h)^n \geqslant 1+nh$, gde je $h>0$. Za $n \to \infty$ $1+nh$ je beskonačno velika tim pre je a^n beskonačno velika, što znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$;

2° $|a|<1$, tada je $|a| = \frac{1}{|b|} = \frac{1}{1+h}$, $|a|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+nh}$; $\frac{1}{1+nh} \to 0 \Rightarrow |a|^n \to 0$ za $n \to \infty$.

1569. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}{\frac{\frac{1}{4^{n+1}}-1}{\frac{1}{4}-1}} = \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4(1-a)},$$ ukoliko je $|a|<1$.

Za $|a| \geqslant 1$ niz nema graničnu vrednost.

1570. 1, $|a|>1$; 0, $|a|<1$; $\frac{1}{2}$; $a=1$.

1571. 0, $|a| \gtrless 1$; $\frac{1}{2}$; $a=1$.

1572. 1° $a_2 = \frac{a_0+a_1}{2}$, $a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}$, $a_4 = \frac{a_2+a_3}{2}$, $a_5 = \frac{a_4+a_3}{2}$, ..., odakle je

$$a_2 - a_1 = -\frac{a_1-a_0}{2}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{a_1-a_0}{2^2}$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{a_1-a_0}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n - a_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a_1-a_0}{2^{n-1}}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobija se: $a_n - a_1 = -\frac{a_1-a_0}{2} + \frac{a_1-a_0}{2^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1-a_0}{2^{n-1}}$.

Konačno je $a_n = \frac{2a_1+a_0}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1-a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}$; 2° $\frac{2a_1+a_0}{3}$.

1573. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = 0$.

1574. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{an-b} - \sqrt{an+c}) = 0$.

1575. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{5}.$$

1576. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

1577. $a_n=\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$. Kako je: $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n(n+1)>1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ i $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)<2^2+3^2+\cdots+(n+1)^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{3}$.

1578. $\dfrac{1}{2}$. **1580.** 0.

1582. $a_{n+1}=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a^n}{n!}\cdot\dfrac{a}{n+1}=a_n\cdot\dfrac{a}{n+1}$ (1). Odavde se vidi da je $a_{n+1}<a_n$. Osim toga je $a_n>0$. Svaki ograničen monotono opadajući niz ima graničnu vrednost. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$, tada je i $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=x$. Znači, na osnovu (1) je $x=x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}$. Ova jednakost može postojati jedino ako je $x=0$.

1584. $a_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$, gde je: $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdots\dfrac{n-1}{n+1}=$ $=\dfrac{2}{n(n+1)}$; $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{n^2+n+1}{3}$, znači da je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}=\dfrac{2}{3}$.

1586. $\dfrac{1}{e}$. **1587.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}=e$. **1588.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}}=e^{-1/3}$.

1589. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}=1$. **1590.** $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=1$.

1591. Može se pokazati da je $S_n=n\ln\left(1-\dfrac{3}{n+4}\right)$, odakle je $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-3$.

1592. Iz $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n\Rightarrow\alpha=-1$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{3}+e^2$. **1593.** $\alpha=\dfrac{1}{2}$. **1594.** ∞.

Napomena: $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_1}\geqslant n$. **1595.** Neka je $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. Tada je $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2n+2}=a_n+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n+1}$, tj. niz je monotono rastući. Osim toga je ograničen $a_n<\dfrac{n}{n+1}<1$, $\lim a_n=\ln 2$. **1597.** 0.

1598. $a_n<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)=\dfrac{1}{2}$, niz je ograničen. Osim toga je monotono rastući, jer je $a_n<a_{n+1}$. Znači da je konvergentan.

1599. Neka je $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Tada je $b_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<a_n<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=c_n$ za $n\in N$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$, to je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

1602. $\frac{a_1}{a_0\cdot S_1}=\frac{S_1-a_0}{a_0\cdot S_1}=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{S_1}$

$\frac{a_2}{S_1\cdot S_2}=\frac{S_2-S_1}{S_1\cdot S_2}=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}$

$\frac{a_3}{S_2\cdot S_3}=\frac{S_3-S_2}{S_2\cdot S_3}=\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}$

.....

$\frac{a_n}{S_{n-1}\cdot S_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}\cdot S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}.$

Posle sabiranja ovih jednakosti dobijamo $\frac{a_1}{a_0\cdot S_1}+\frac{a_2}{S_1\cdot S_2}+\frac{a_3}{S_2\cdot S_3}+\cdots+\frac{a_n}{S_{n-1}\cdot S_n}=$

$=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{S_n}$ pa je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a\cdot S_1}+\frac{a_2}{S_1\cdot S_2}+\cdots+\frac{a_n}{S_{n1}\cdot S_n}\right)=\frac{1}{a_0}.$

1603. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$ **1604.** 1.

1606. U zadatku (1605) dokazano je da je $e=1+1+\frac{1}{2!}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ Pretpostavimo obrnuto, tj. da je $e=\frac{p}{q}$, gde su p i q prirodni brojevi. Tada je: $\frac{p}{q}=$ $=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\cdots,\Rightarrow p(q-1)!-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)\cdot q!=\frac{1}{q+1}+$ $+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$ Odavde sledi da je $p(q-1)!-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)\cdot q!<$ $<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\cdots=\frac{1}{q}$. Ovo je nemoguće jer na levoj strani imamo pozitivan ceo broj a na desnoj pravilan razlomak.

1607. Dokazaćemo, prvo, da je niz monotono opadajući: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-$ $-\sqrt{n})$, kako je $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$, to je $a_{n+1}-a_n<0$, tj. $a_{n+1}<a_n$. Dokažimo još da je niz ograničen sa donje strane. Jasno je da je $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=$ $=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ i $1>2\sqrt{2}-2$, $\frac{2}{\sqrt{2}}>2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}>2\sqrt{4}-2\sqrt{3}$, ..., $\frac{1}{\sqrt{n}}>$ $>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$. Sabiranjem nejednakosti imamo: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-$ -2. Zato je $a_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2>-2$.

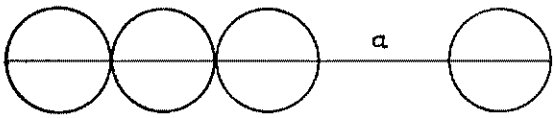
1608. Pokazati da je monotono opadajući i ograničen. Vrednost: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\right.$ $\left.-\ln n\right)=c$ se naziva Eulerova konstanta i iznosi $c=0{,}5772156\ldots$

1610. a) Iz osobine sličnih trouglova lako se zaključuje da je osnovica svakog od pravougaonika $\frac{a}{n}$, a visine su respektivno: $\frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}$. Ako označimo sa S_n zbir površina pravougaonika, onda je $S_n = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{2b}{n} + \cdots + \frac{a}{n}\cdot\frac{(n-1)b}{n}$, ili $S_n = \frac{ab}{n^2}[1+2+3+\cdots+(n-1)]$ odnosno $S_n = \frac{abn(n-1)}{2n^2} = \frac{ab(n-1)}{2n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{ab}{2}$.

b) $P - S_n = \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{ab}{2}\left[1-\frac{n-1}{n}\right]$; $P - S_n = \frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(P-S_n) = 0$.

1611. a) Ako je poluprečnik jednog kruga r (a svi su jednaki), onda je $n\cdot 2r = a$, tj. $r = \frac{a}{2n}$, a zbir obima: $O_n = n\cdot 2r\pi = n\cdot\frac{a}{n}\pi = a\pi$ (sl. 90). b) $P_n = n\cdot r^2\pi = n\cdot\frac{a^2}{4n^2}\pi = \frac{a^2\pi}{4n}$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\pi = a\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^2\pi}{4n} = 0$. d) Zbir površina teži 0, a zbir obima istih krugova teži $a\pi \neq a$!? Objasniti ovu činjenicu.



Sl. 90

1613. Primeniti Stolzovu teoremu.

1614. Označiti sa $A_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ pa logaritmovati. Posle primeniti prethodnu teoremu.

1615 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

1616. 1 (primeniti teoremu iz zadatka 1613).

1617. $\frac{1}{p+1}$.

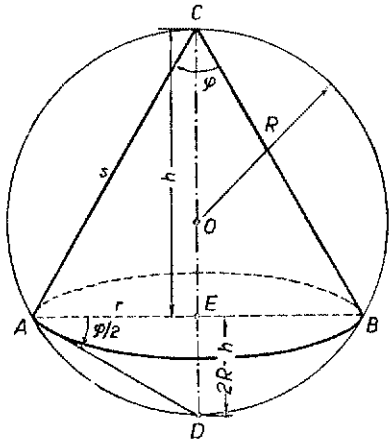
1618. e (primeniti teoremu iz zadatka 1614).

1619. e.

1620. a) Da; b) ne; c) da; d) da; e) da.

1621. a) Parametar; b) promenljiva; c) apsolutna konstanta; d) konstanta; e) promenljiva.

1622. a) Da; b) da; c) da; d) da; e) da.



Sl. 91

1623. Iz ΔADC sledi: $r^2=h(2R-h)$. Isto tako je iz ΔAEC: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{r}{S}$ i iz ΔADC: $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{S}{2R}$, tj. $S=2R\cos\frac{\varphi}{2}$ pa je $r=R\sin\varphi$; $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{h}{S}$, odakle je $h=2R\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

a) $B=\pi(2R-h)h$; $0<h<2R$; b) $B=\pi R^2\sin^2\varphi$, $0<\varphi<\pi$ (sl. 91);

c) $V=\frac{1}{3}\pi R^2\sin^2\varphi(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in(0;\pi)$.

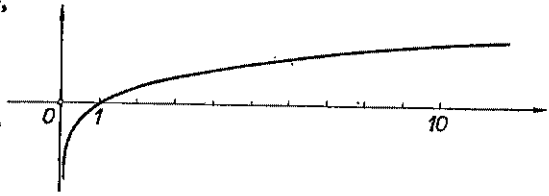
1624. a) $x=150\sqrt{2}t$, $y=150\sqrt{2}t-5t^2$; b) $y=x-\frac{x^2}{9000}$; c) $x\in[0,9000]$; d) $t=15\sqrt{2}$ sec; e) $h=2250$ m.

1625. Sl. 90.

1626. a) $y=0$ za: $x=-2$, $x=0$, $x=3$, $x=8$; b) $y>0$ za: $x\in(0,3)$ i $x\in(8,\infty)$; c) $y<0$ za: $x\in(-\infty,-2)$, $x\in(-2,0)$, $x\in(3,8)$.

1627. $f(-2)=-\frac{5}{3}$, $f(0)=3$, $f(3)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{3}$, ne postoji $f(-1)$.

(Funkcija nije definisana za $x=\pm1$).



Sl. 92

1628. $\varphi(0)=1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(1)=2\sin2+\cos1$, $\varphi(a)=2\sin2a+\cos a$, $\varphi(a-b)=2\sin2(a+b)+\cos(a-b)$, $\varphi(\Delta x)=2\sin2\Delta x+\cos\Delta x$.

1631. $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\pi^2}{4}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(0)=1$; $f(2)$ ne postoji, $f(5)$ ne postoji.

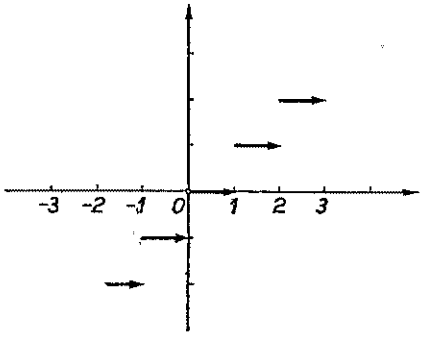
1632. $f(2)=1$, $f(0)=2$, $f(0{,}5)=2$, $f(-0{,}5)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(3)=2$.

1633. Sl. 93.

1636. $y=\sqrt{z+1-1}=\sqrt{z}=\sqrt{\sin^2x}=|\sin x|$.

1637. $u=\sqrt{1+(\log\sin x)^2}$.

1638. a) $z=\log x$, $y=z^2$; b) $z=\sin x$, $u=z^2$, $y=\sqrt[3]{u}$; c) $z=3x+1$, $u=z^2$, $y=5^u$.



Sl. 93

1639. $f[f(x)]=x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$, $f\{f[f(x)]\}=0$.

1640. 1° $y=\pm\sqrt{x^2-4}$; 2° $y=\pm\sqrt{\frac{x-1}{2x^3}}$;

3° $y=\log_3 2-x$; 4° $\log(y+1)(x-1)=1 \Rightarrow y=\frac{10}{x-1}-1$; 5° $xy=\ln x$, $y=\frac{\ln x}{x}$.

1642. 1° $f(x)$; 2° $\psi(x)$. **1643.** $y_{1/2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+12(2x^2+4x+3)}}{-6}$.

1644. $\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$. **1645.** $f(x)=kx+n,\ k=2,\ n=-3,\ f(x)=2x-3$.

1647. $f(x)=ax^2+bx+c$. Zamenom odgovarajućih vrednosti u ovoj jednakosti dobijamo jednačine: $c=4,\ a+b+c=3,\ 4a+2b+c=6$, odakle je: $a=2,\ b=-3,\ c=4$, te je $f(x)=2x^2-3x+4$.

1648. $f(x)=x^2-5x+6$. **1649.** $f(x)=x^2-2$. **1651.** $P_3(x)=\dfrac{10}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{29}{6}x+2$.

1652. 1° Neka je $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f(x)-f(x-1)\equiv 3ax^2+(2b-3a)x+a-b+c\equiv$
$\equiv x^2,\ a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{6};\ f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x+d=\dfrac{1}{6}x(x+1)(2x+1)+d.$

$f(n)-f(n-1)=n^2$

$f(n-1)-f(n-2)=(n-1)^2$

. . . . . .

$f(1)-f(0)=1^2 \Rightarrow S_2=f(n)-f(0)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

2° $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$g(x)-g(x-1)=4ax^3+(4b-ba)x^2+(4a-3b+2c)x-a+b-c+d.$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{4},\ d=0.$

$g(x)-g(x-1)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{4}x=\dfrac{1}{4}x^2(x+1)^2.$

$S_3=g(n)-g(0)=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$

1653. a) $f(-x)=-x^5+5x^3-x=-(x^5-5x^3+x)=-f(x)$ — neparna; b) $f(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}+a^x)=f(x)$ — parna; c) $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=-f(x)$ — neparna; d) $f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$ — neparna; e) $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$ — parna; f) $f(-x)=\dfrac{3}{2}=f(x)$ — parna; g) $f(x)=\ln x$ — nije ni parna, ni neparna.

1655. a) Parna, b) ni parna, ni neparna, c) neparna, d) ni parna ni neparna, e) parna, f) parna, g) parna.

1658. a) Periodična, $\omega=6\pi$, b) periodična, $\omega=\dfrac{10\pi}{3}$, c) periodična, $\omega=\dfrac{\pi}{a}$, d) periodična, $\omega=\pi$, e) neperiodična, f) periodična, $\omega=4$, g) neperiodična, h) neperiodična, i) periodična, period ma kakav pozitivan broj.

1660. $y_1=\sin x$: $\omega_1=2\pi$; $y_2=\frac{1}{2}\sin 2x$: $\omega_2=\pi$; $y_3=\frac{1}{3}\sin 3x$: $\omega_3=\frac{2\pi}{3}\cdot\omega=2\pi$ (ω najmanji zajednički sadržalac za ω_1, ω_2, ω_3).

1661. a) π; b) π; c) 2π; d) 2π; e) π.

1662. $F(x)=f(x)\varphi(x)$; a) $F(-x)=f(-x)\cdot\varphi(-x)=f(x)\cdot\varphi(x)=F(x)$;
b) $F(-x)=f(-x)\cdot\varphi(-x)=+f(x)\cdot\varphi(x)=F(x)$; c) $F(-x)=-f(x)\cdot\varphi(x)=-F(x)$.

1664. a) nule: $x=1$, $y>0$ za $x-1>0$ tj. $x>1$; $y<0$ za $x<1$. b) $a^x>0$ za svako x. Funkcija nema nula. c) $\ln\frac{2x}{1+x}=0$ odakle sledi da je $x-1=0$, tj. $x=1$; $y>0$ za $\ln\frac{2x}{1+x}>0$, tj. $\frac{2x}{1+x}>1$, odakle je: $1<x<\infty$, $-\infty<x<-1$; $y<0$ za $0<x<1$.

1665. Da bi imenilac imao smisla mora biti $1-x>0$, tj. $x<1$. Da bi brojilac imao smisla mora biti $x+1\geqslant 0$, tj. $x\geqslant -1$ i, najzad, da bi razlomak imao smisla mora biti $\ln(1-x)\neq 0$, tj. $1-x\neq 1$ ili $x\neq 0$. Oblast u kojoj su sva tri zahteva ispunjena je $x\in[-1, 0)$ i $x\in(0, 1)$.

1666. $(-\infty, \infty)$. **1667.** $(-\infty, 2)$: $(2, 3)$; $(3, +\infty)$. **1668.** $(-\infty, \infty)$.

1669. $[-1, 0)$; $(0, 3]$. **1670.** $(-\infty, -2]$. **1671.** $(-2, {}^3/_2]$.

1672. $(-\infty, \infty)$. **1673.** $[-4, -2)$. **1674.** Nije nigde definisana.

1675. $\left(+\infty, -\frac{7}{2}\right)$; $[2, \infty)$. **1676.** $(3-2\pi, 3-\pi)$; $(3, 4]$.

1677. $|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$, $k=1, 2, 3, \ldots$

1678. $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. **1679.** $(-3, 0)$. **1680.** Nije nigde definisana.

1681. $\{-2\}\cup[-1, 0]\cup[1, 2]$. **1682.** $(-\infty, 0)$; $(0, \infty)$. **1683.** $(-\infty, 0)$.

1684. $(-\infty, 0)$; $[1, \infty)$. **1685.** $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **1686.** $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{5}\right)$.

1687. Funkcija je definisana u tačkama $x=\frac{m}{2n+1}$, gde su m i $2n+1$ uzajamno prosti celi brojevi (n—ceo broj). Vrednosti funkcije su $y=\pm 1$ (za $m=2k$, $y=1$; za $m=2k+1$, $y=-1$, gde je k—ceo broj).

1688. Ne, samo za $x\geqslant 0$. **1689.** Ne, jer $f(0)$ ne postoji.

1690. Ne, jer je $f(x)$ definisana za $x\neq 0$ a $\varphi(x)$ za $x>0$. Za $x>0$ one su ekvivalentne.

1691. a) Da. b) Ne, jer su definisane u raznim intervalima. **1692.** $(-\infty, \infty)$.

1693. a) $[-1, 1]$. b) $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k\in C$. c) $[-a, 1-a]$, $a<1$. d) $[1, e]$.

1694. Rastuća za $x\in(-\infty, \infty)$. **1695.** Opada za $x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, raste za $x\in\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

1696. Raste za $x\in(-\infty, \infty)$. **1697.** Ne opada za $x\in(-\infty, \infty)$.

1698. Raste za $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

1699. Neka je $x^{2n}=u$; onda je $F(x)=f(u)$, kako je $x^{2n}\geqslant 0$ za svako x, to je $F(x)$ definisana za svako x. Kad x raste od $-\infty$ do 0, u opada od ∞ do 0, a kada x raste od 0 do ∞, u raste od 0 do ∞, pa je $F(x)$ za $x\in(-\infty, 0)$ monotono opadajuća, a za $x\in(0, \infty)$ monotono rastuća.

1700. Monotono raste. **1702.** $y=x-1$, definisana za $x\in(-\infty, \infty)$.

1703. $y=2e^x$, $x\in(-\infty, \infty)$. **1704.** $y=\pm\sqrt{x^3-1}$; $x\in[1, \infty)$.

1705. $y=\log_2(x+2)$; $(-2, \infty)$. **1706.** $y=\arcsin x$, $[-1, 1]$.

1707. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. **1709.** $y=\frac{3x+x^3}{2}$.

1710. $y=\arccos\ln\frac{2x+1}{1-x}$, $\left[-\frac{e-1}{2e+1}, \frac{e-1}{2+e}\right]$. **1712.** Pokazati prvo da je $\sin(\arcsin x)=x$.

1714. a) $y=\frac{a^{2x}-1}{2a^x}$, b) $y=\sqrt{\frac{a^{2x}-1}{2a^x}}$. **1715.** 1° $y=\arcsin\frac{2-x}{x-1}$, $[{}^3/_2, \infty)$;

2° $y=\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{2x-1}$, $x\neq\frac{1}{2}$.

1716. $y=\frac{1}{2}\arcsin(2x-x^2)$. **1717.** $y=\frac{\sin e^x}{1-\sin e^x}$.

1718. b) $x=2(2k+1)\pi-\pi+px$.

1719. a) $y=\frac{2}{9}x^2$, b) $[-3, 3]$; $x\in[0, 3]$, c) parna, d) $y=2$, e) $y\geqslant 0$.

1720. $y=|x|\pm\sqrt{x}$. **1721.** $y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})+x\pm\sqrt{x^2-1}$.

1722. $y=\frac{2}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

1723. $y=\operatorname{arctg}(x\cos\theta)+x\cos\theta-\theta$, gde je $\theta=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

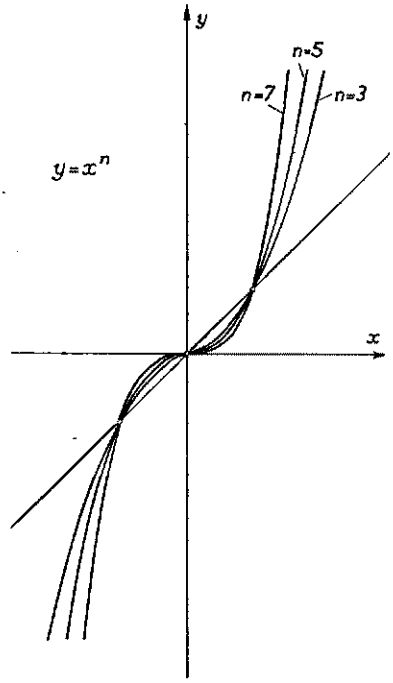
1724. $g[f(x)]\equiv x$.

1726. $a^x+a^{-x}=2y$, $a^{2x}-2ya^x+1=0 \Rightarrow (a^x)_{1/2}=y\pm\sqrt{y^2-1}$, $x=\log_{(a)}(y\pm\sqrt{y^2-1})$, odnosno, $y=\log_{(a)}(x+\sqrt{x^2-1})$. Funkcija $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ je parna pa je grafik njene inverzne funkcije $y=\log_{(a)}(x+\sqrt{x^2-1})$, simetričan u odnosu na x osu.

1727. a) $e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}\leqslant x\leqslant e^{(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}}$, b) $y_{\max}=\sqrt[4]{2}-1$, $y_{\min}=-1$,

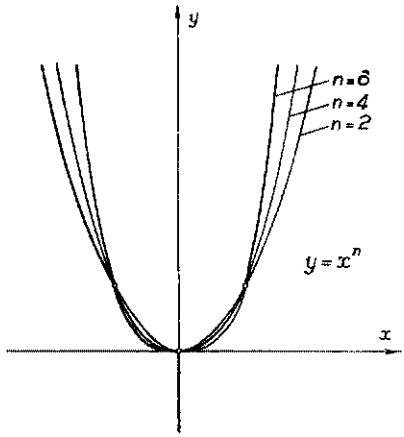
c) $y=e^{\frac{1}{2}\arcsin[(x+1)^4-1]}$, $x\in[-1, -1+\sqrt[4]{2}]$.

1728.



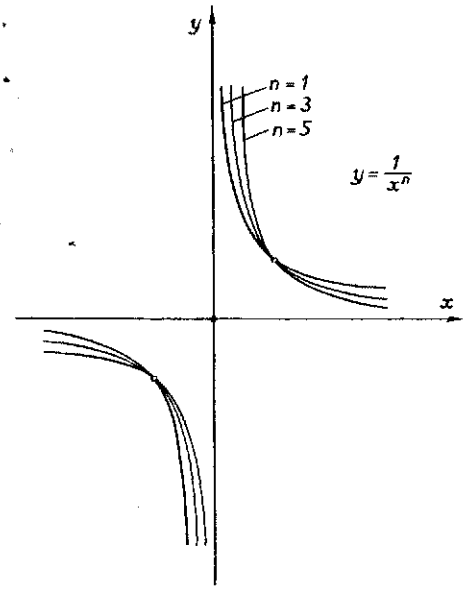
Sl. 94

1729.



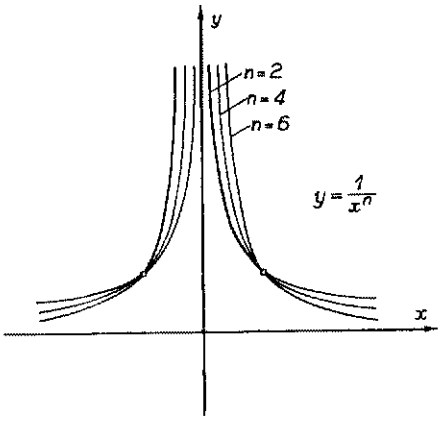
Sl. 95

1730.



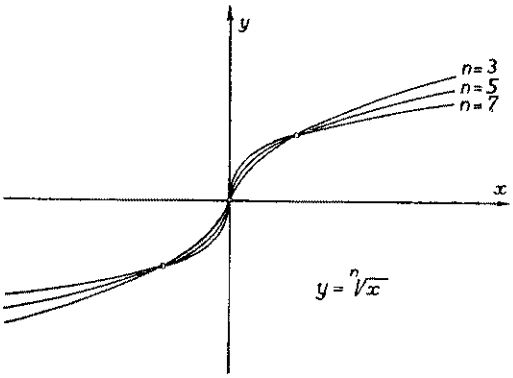
Sl. 96

1731.



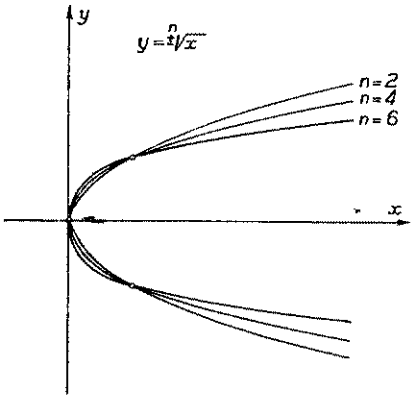
Sl. 97

1732.



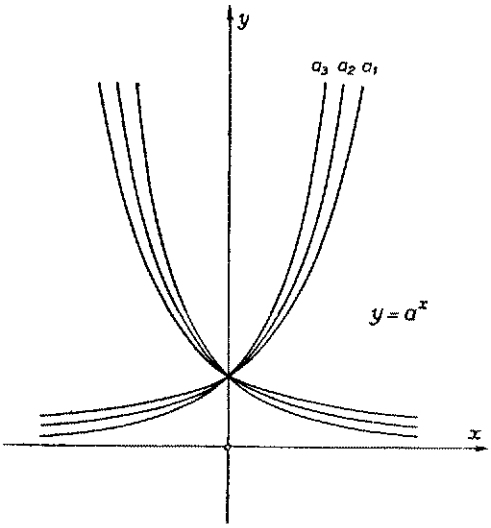
Sl. 98

1733.



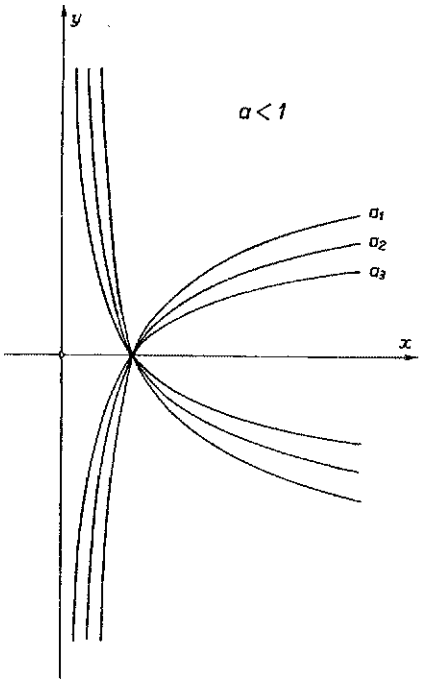
Sl. 99

1734.



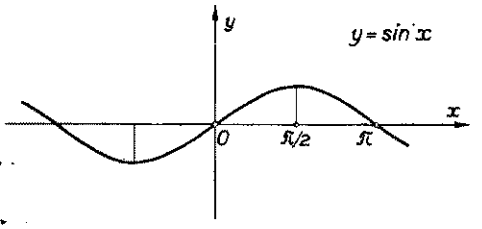
Sl. 100

1735.



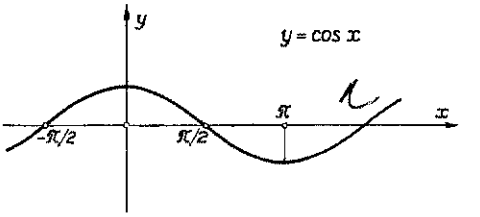
Sl. 101

1736. 1°



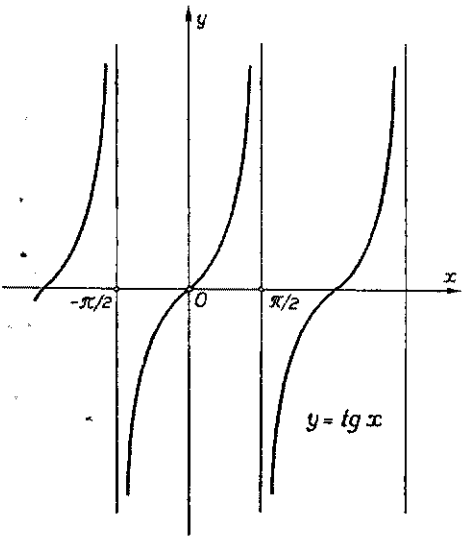
Sl. 102

2°



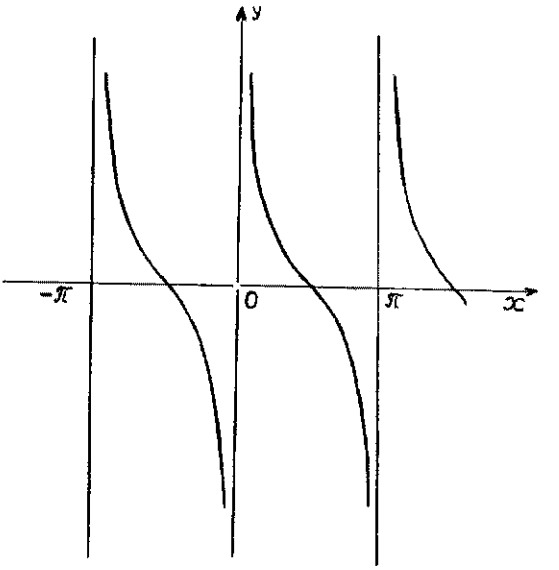
Sl. 103

1737. 1°



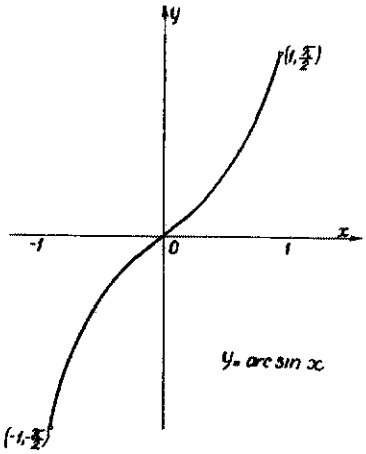
Sl. 104

2°



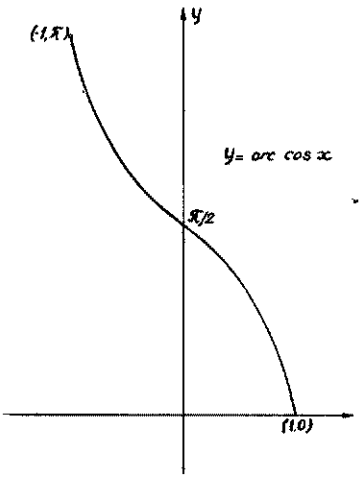
Sl. 105

1738. 1°



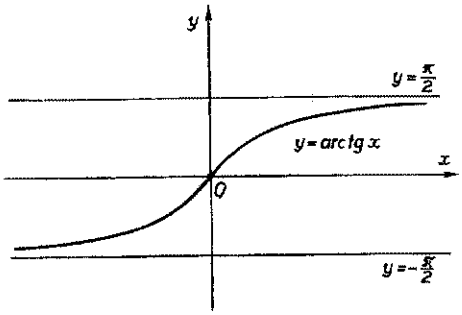
Sl. 106

2°



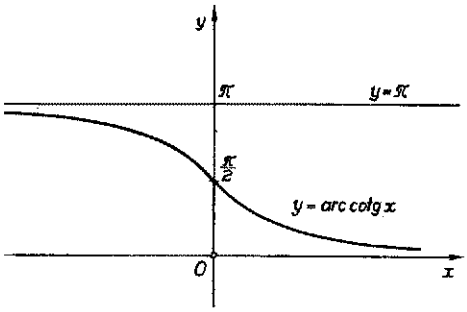
Sl. 107

1739. 1°



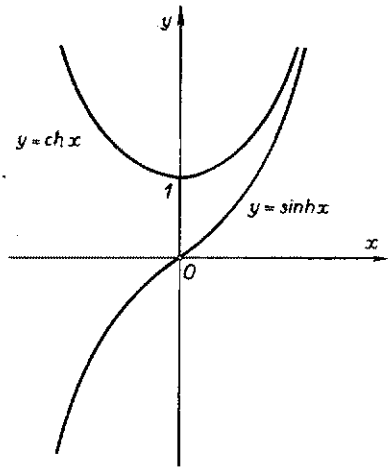
Sl. 108

2°



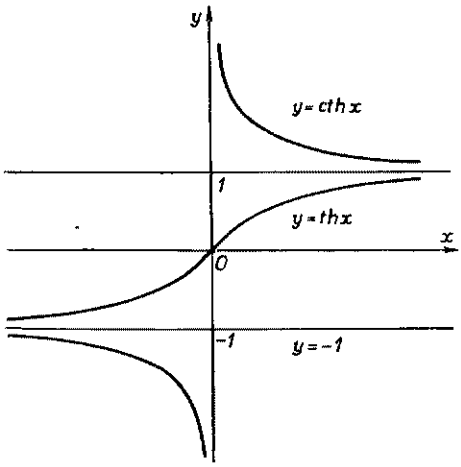
Sl. 109

1740.



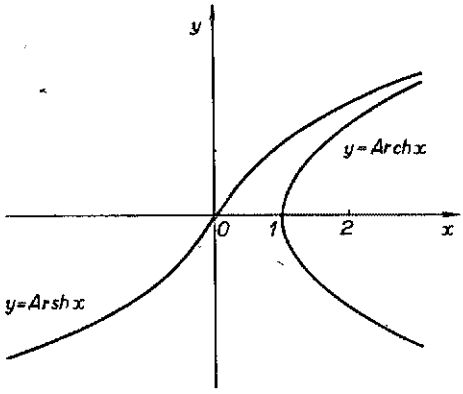
Sl. 110

1741.



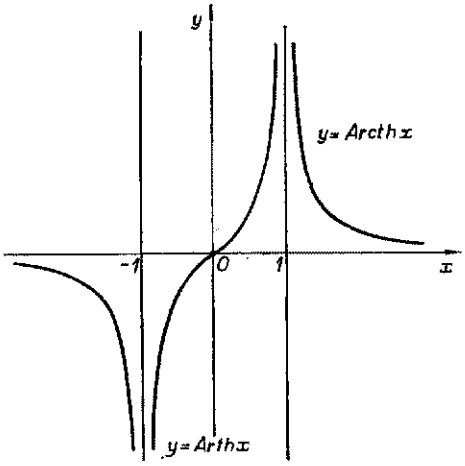
Sl. 111

1742.



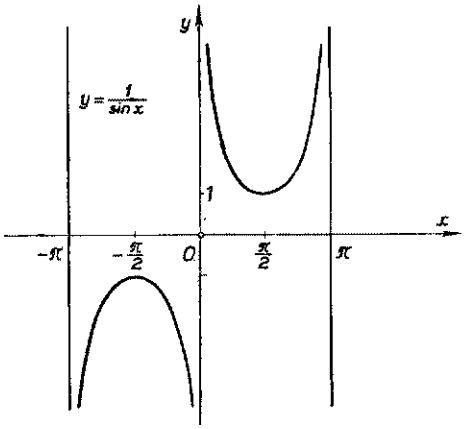
Sl. 112

1743.



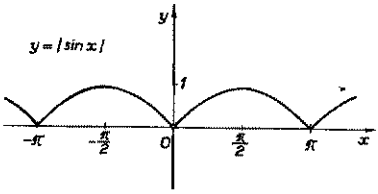
Sl. 113

1744. 1°



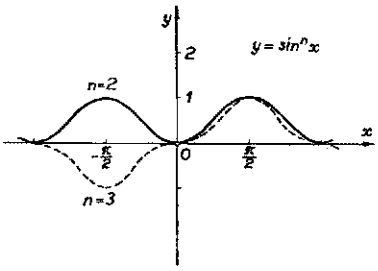
Sl. 114

2°



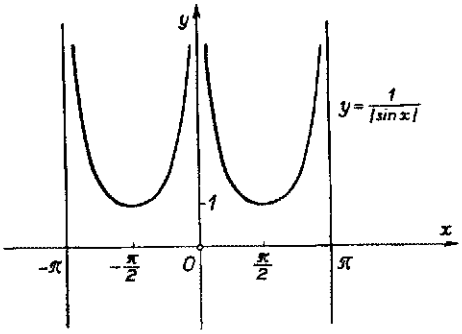
Sl. 115

3°



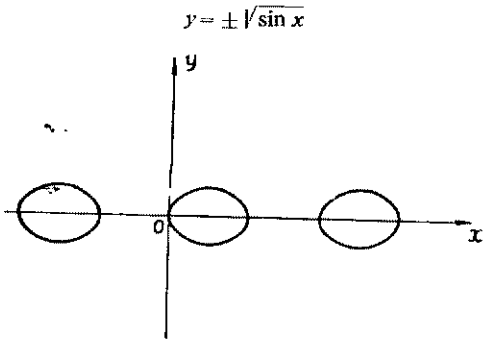
Sl. 116

4°



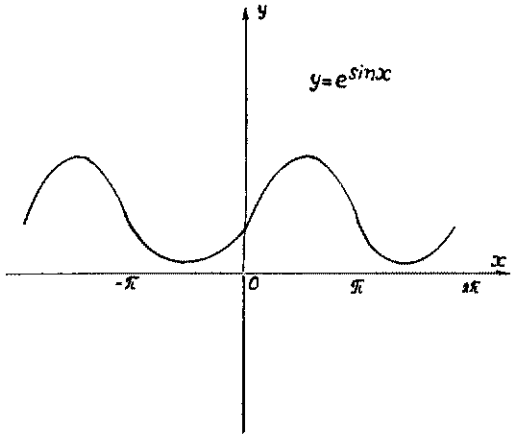
Sl. 117

5°



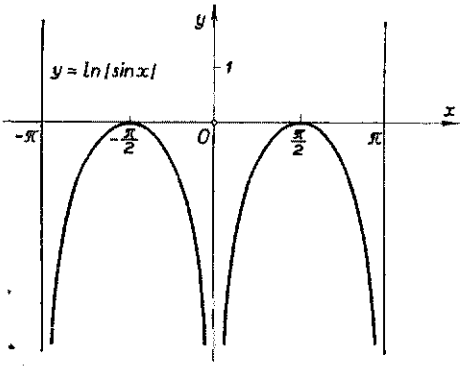
Sl. 118

6°



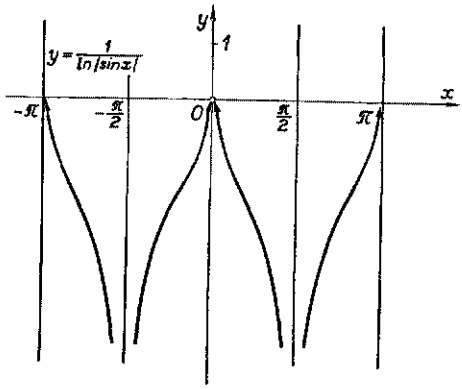
Sl. 119

7°



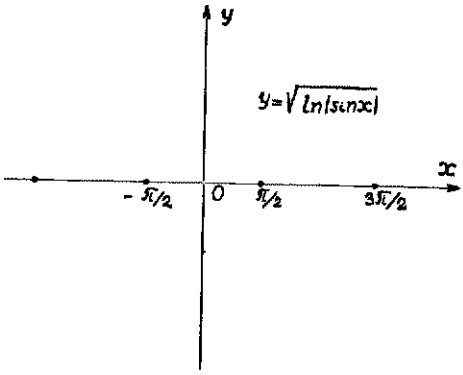
Sl. 120

8°



Sl. 121

9°

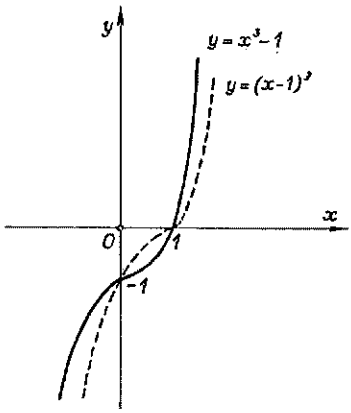


Sl. 122

1746. Korišćenjem Omovog zakona dobija se $I=\frac{E}{3}$, a to je jednačina prave.

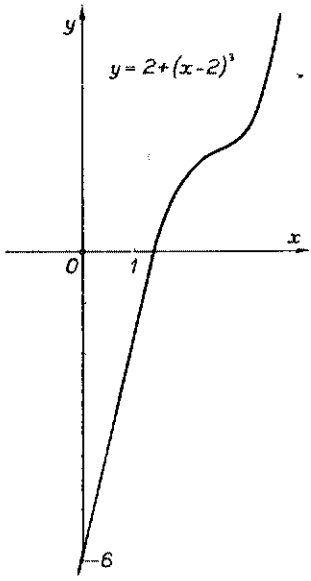
1747. $V=\frac{7}{20}t+100$, $V_0=100\,\text{cm}^3$. Grafik je prava linija.

1749. 1°, 2°



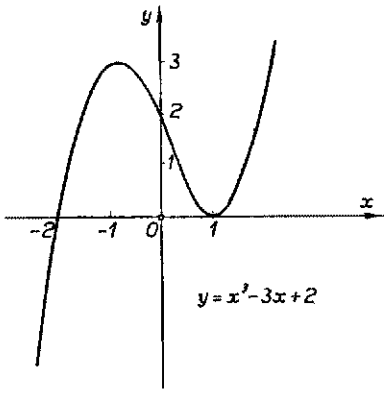
Sl. 123

3°



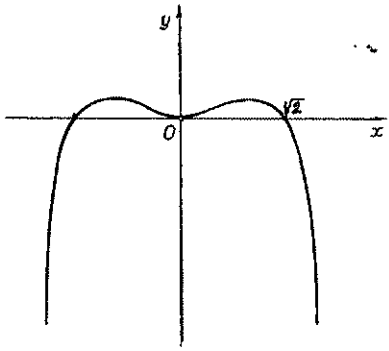
Sl. 124

1750.



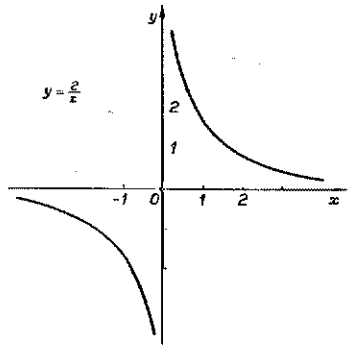
Sl. 125

1751.



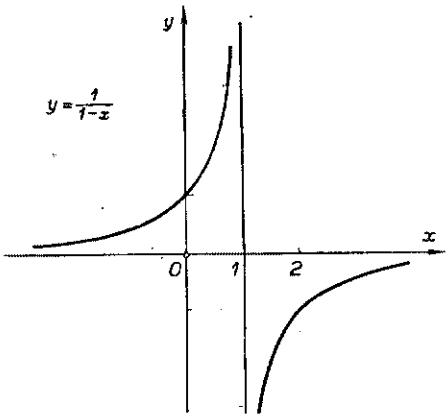
Sl. 126

1752.



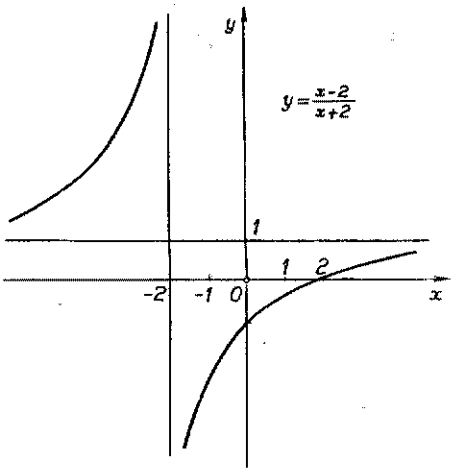
Sl. 127.

1753.



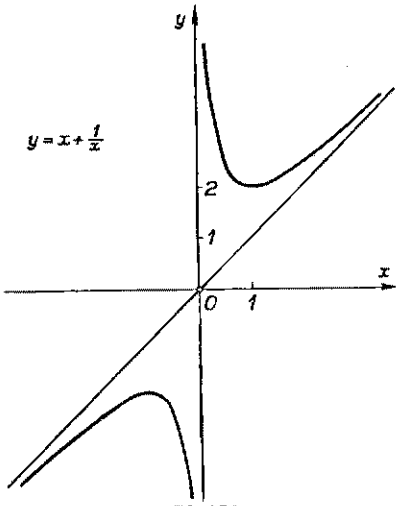
Sl. 128

1754.



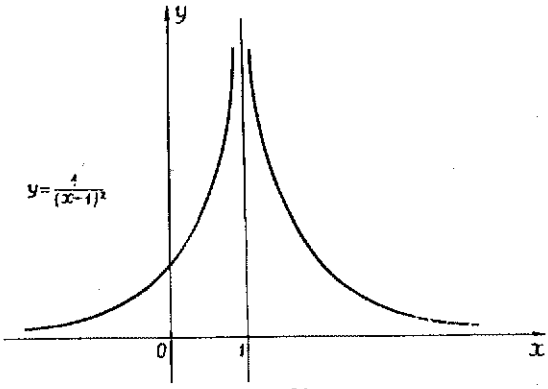
Sl. 129

1755.



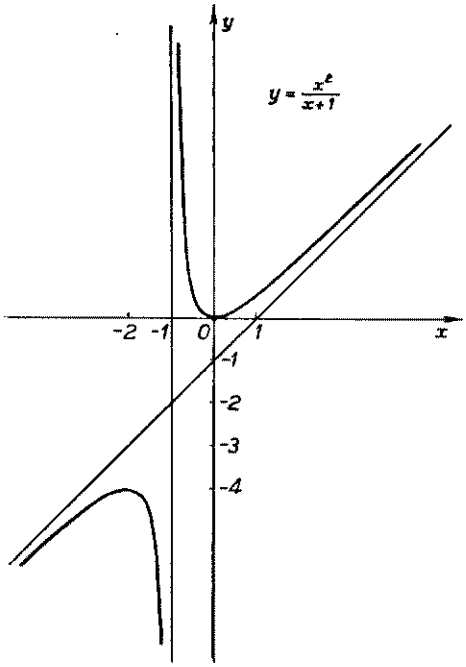
Sl. 130

1756.



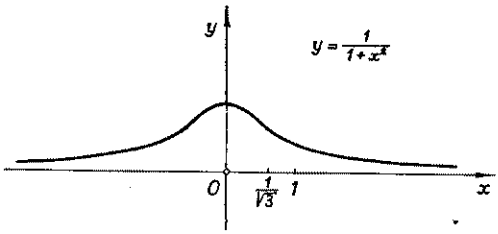
Sl. 131

1757.



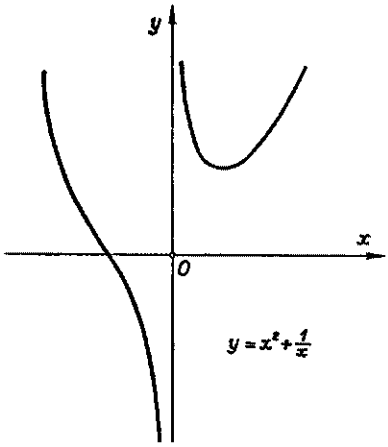
Sl. 132

1758.



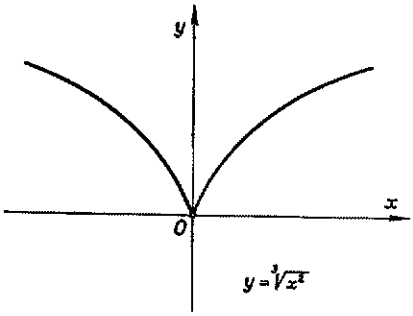
Sl. 133

1759.



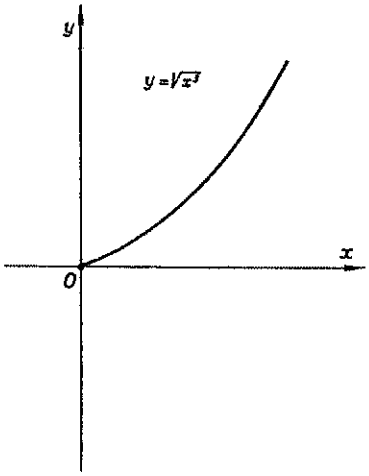
Sl. 134

1760.



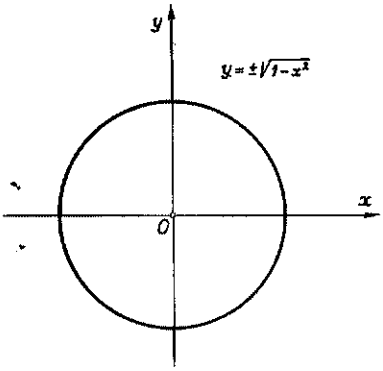
Sl. 135

1761.



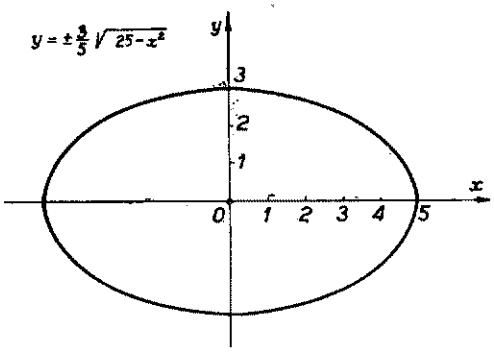
Sl. 136

1762.



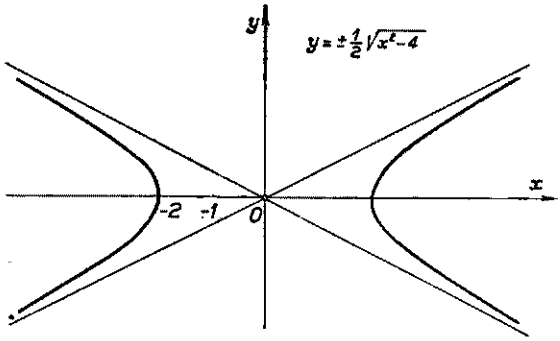
Sl. 137

1763.



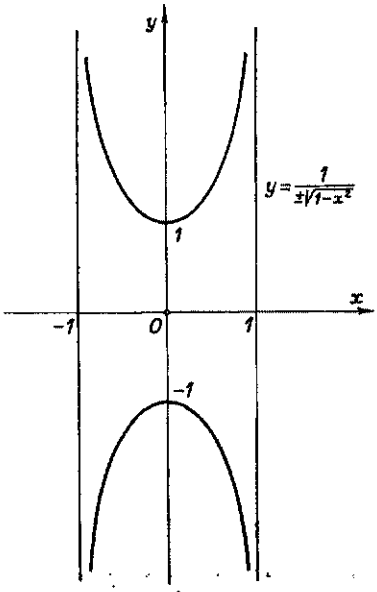
Sl. 138

1764.



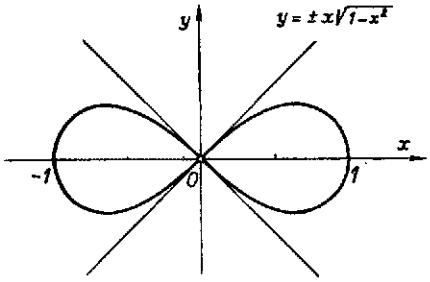
Sl 139

1765.



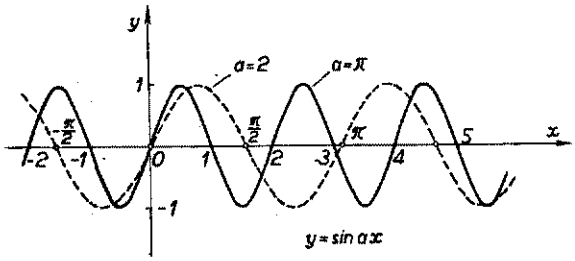
Sl. 140

1766.

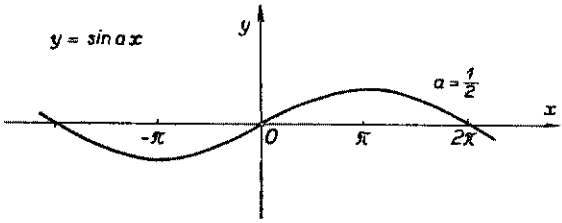


Sl. 141

1767. 1°

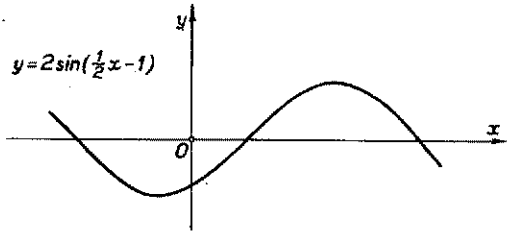


Sl. 142a



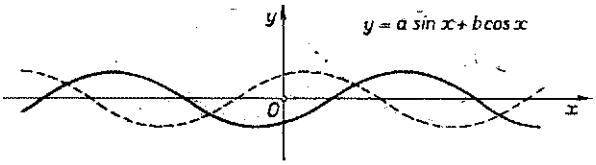
Sl. 142b

2°



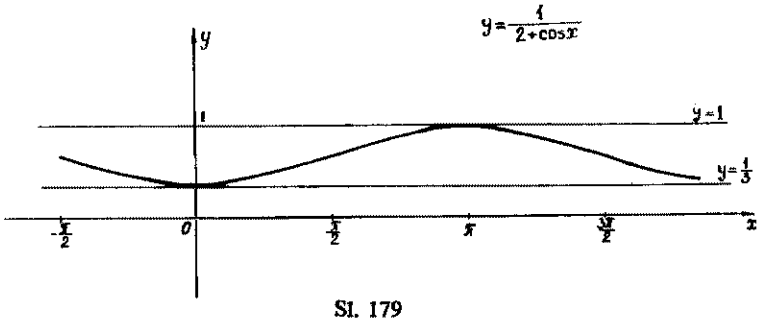
Sl. 143

1769.



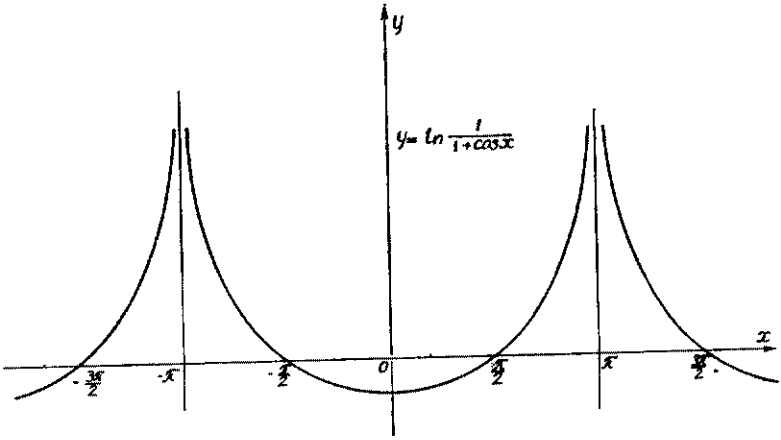
Sl. 144

1804. 1°



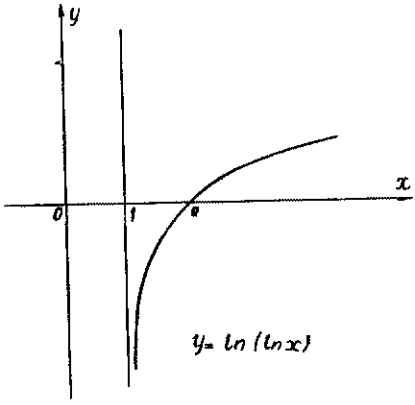
Sl. 179

2°



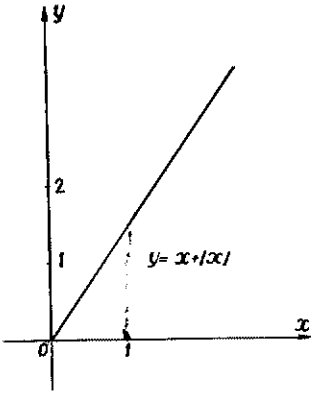
Sl. 180

1805.



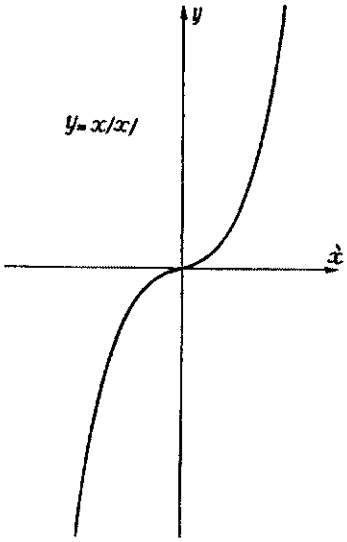
Sl. 181

1806.



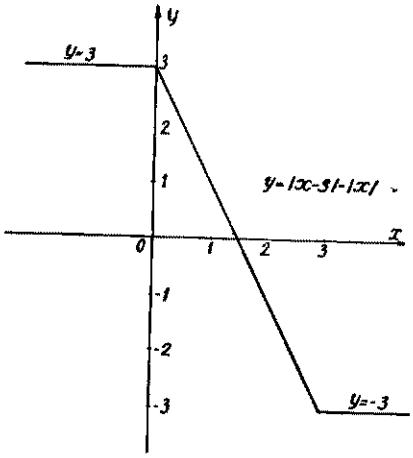
Sl. 182

1807.



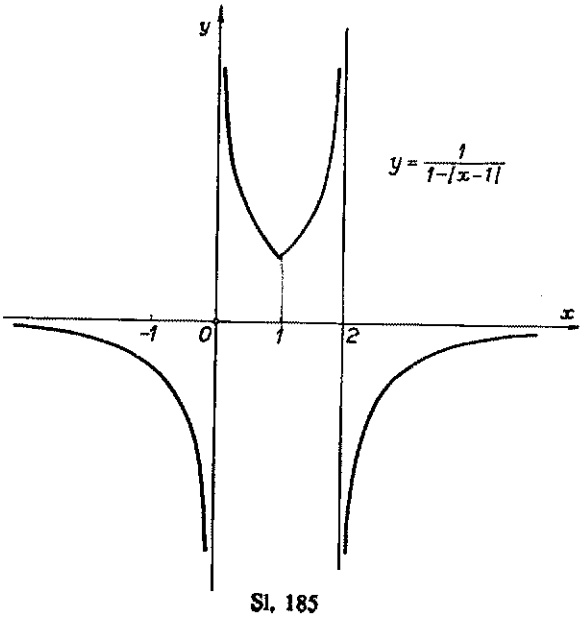
Sl. 183

1808.



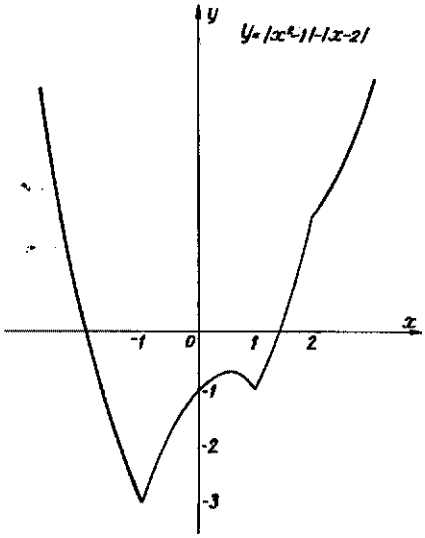
Sl. 184

1809.



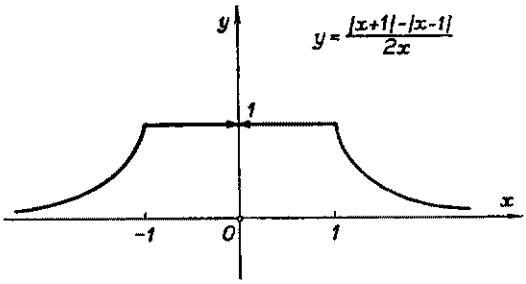
Sl. 185

1810.



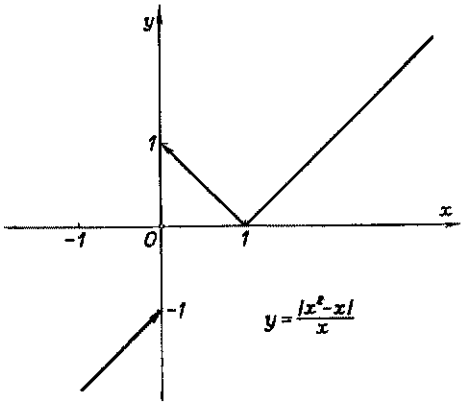
Sl. 186

1811.



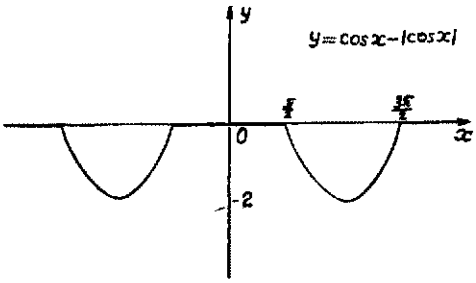
Sl. 187

1812.



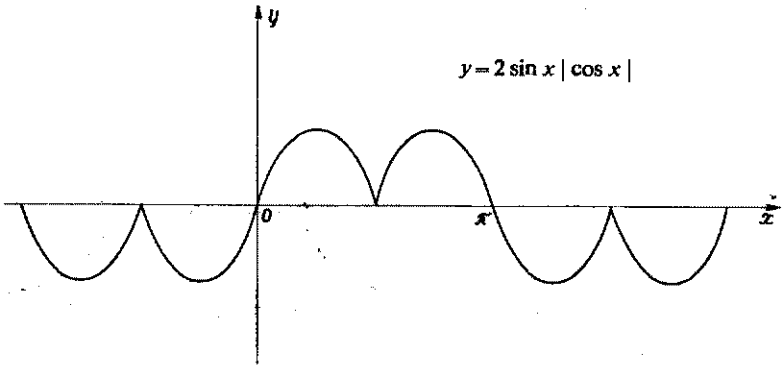
Sl. 188

1813.



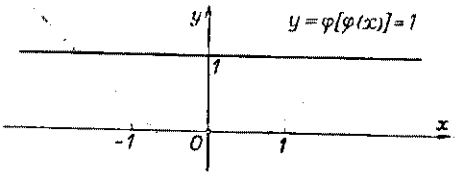
Sl. 189

1814.



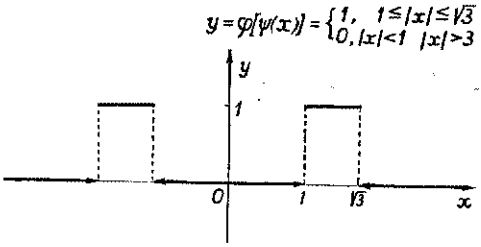
Sl. 190

1815. 1°



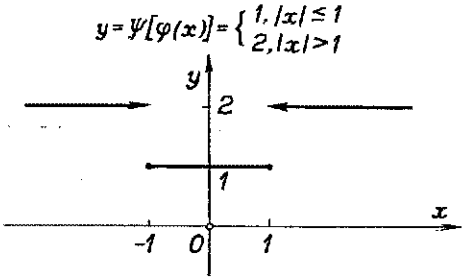
Sl. 191

2°



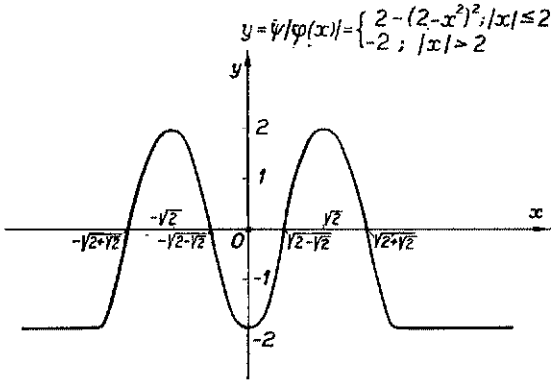
Sl. 192

3°



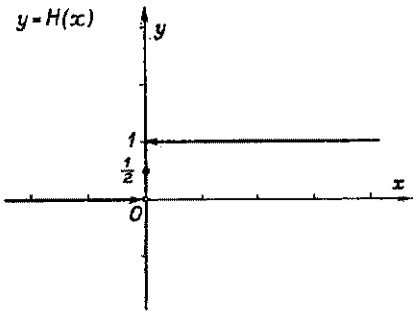
Sl. 193

4°



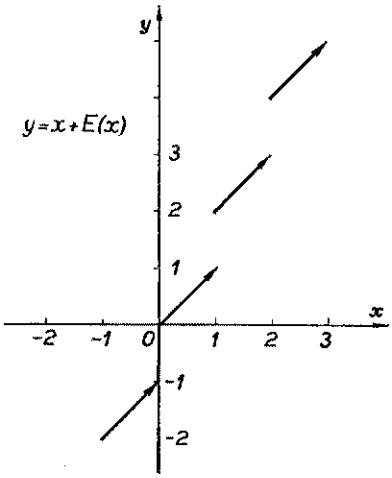
Sl. 194

1816.



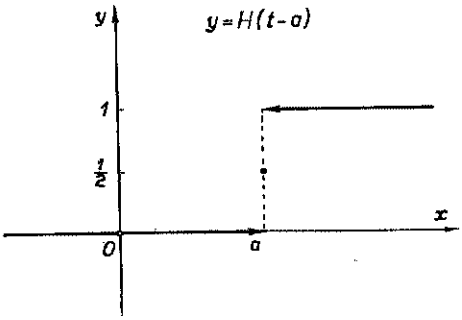
Sl. 195

1817.



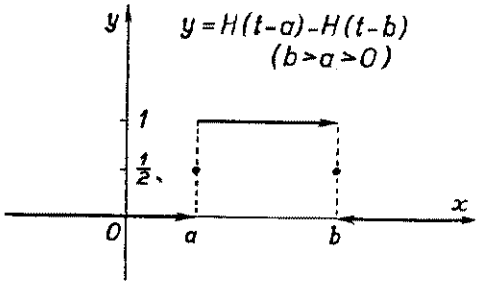
Sl. 196

1818.



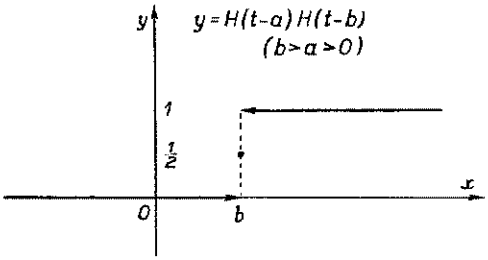
Sl. 197

1819.



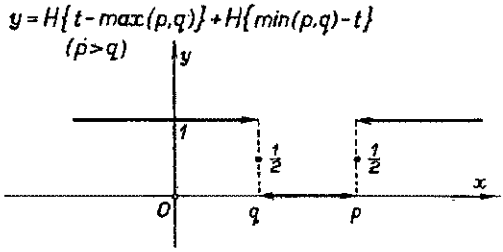
Sl. 198

1820.



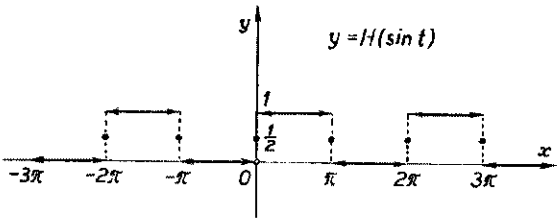
Sl. 199

1821.



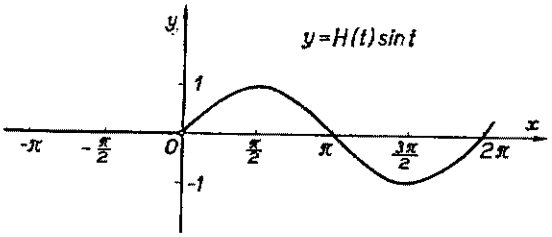
Sl. 200

1822.



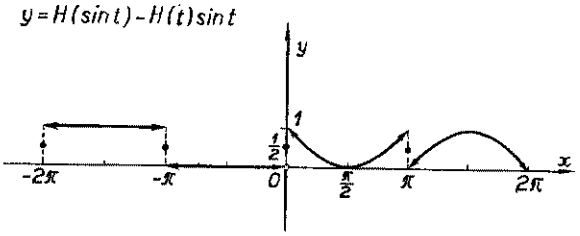
Sl. 201

1823.



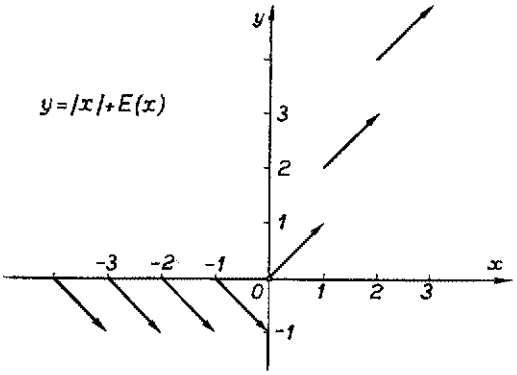
Sl. 202

1824.



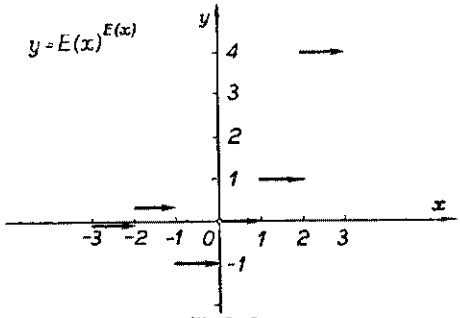
Sl. 203

1825.



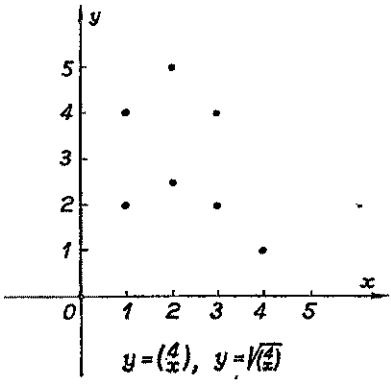
Sl. 204

1826.



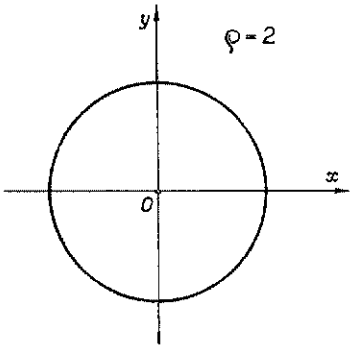
Sl. 205

1827.



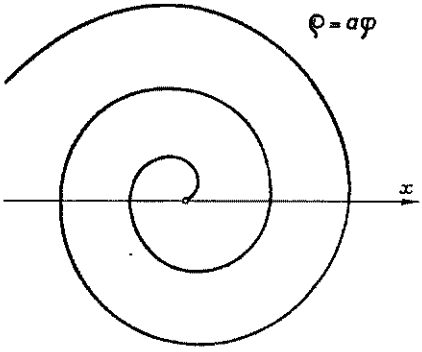
Sl. 206

1828.



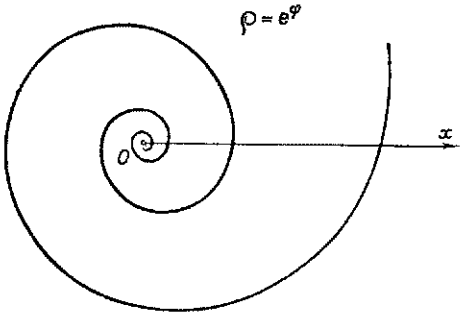
Sl. 207

1829.



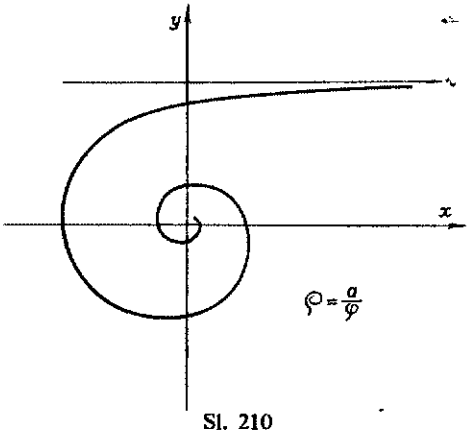
Sl. 208

1830.



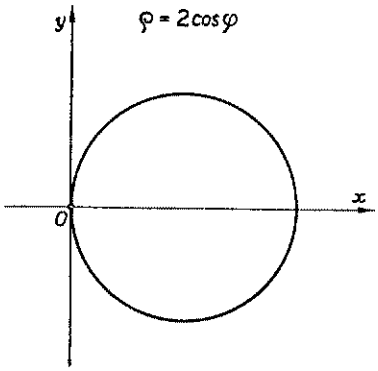
Sl. 209

1831.



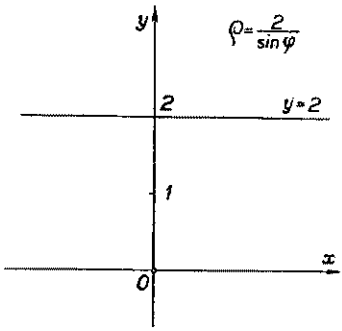
Sl. 210

1832.



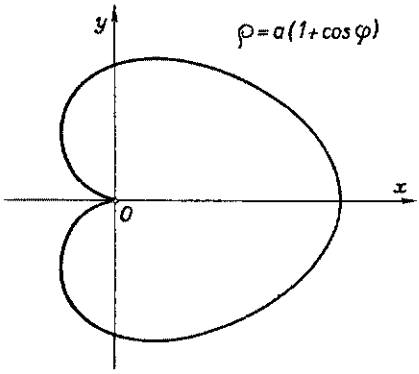
Sl. 211

1833.



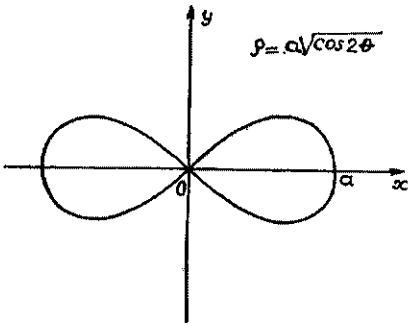
Sl. 212

1834.



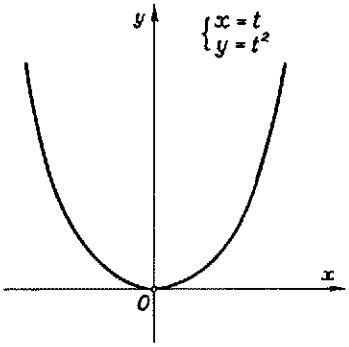
Sl. 213

1835.



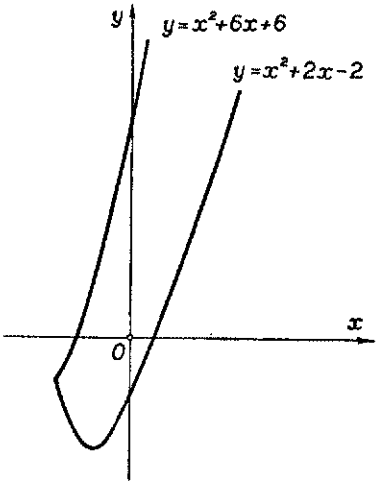
Sl. 214

1836. 1°



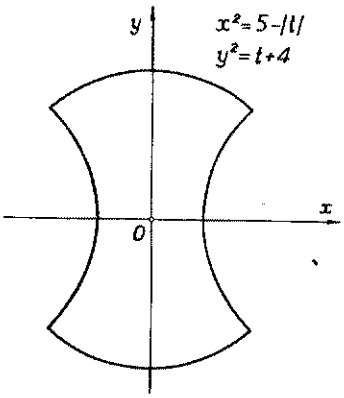
Sl. 215

2°



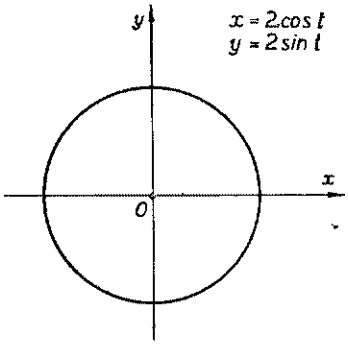
Sl. 216

1837.



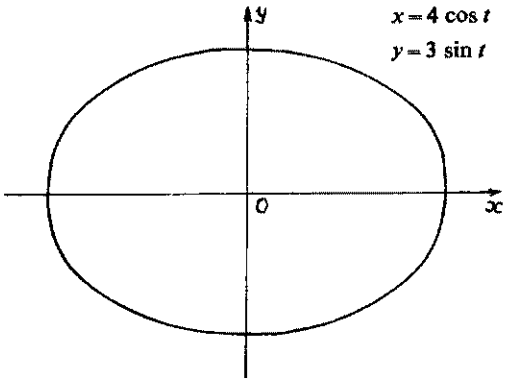
Sl. 217

1838.



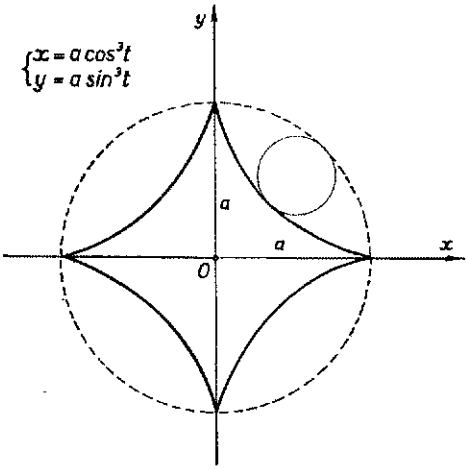
Sl. 218

1839.



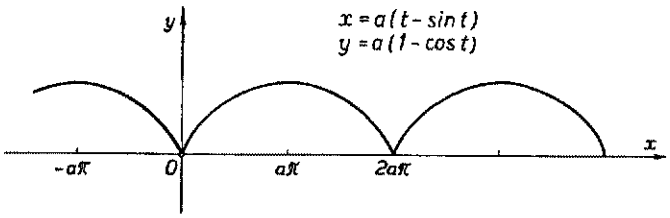
Sl. 219

1840.



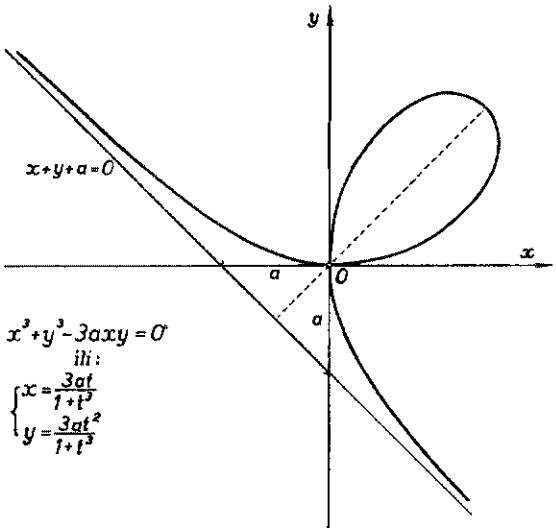
Sl. 220

1841.



Sl. 221

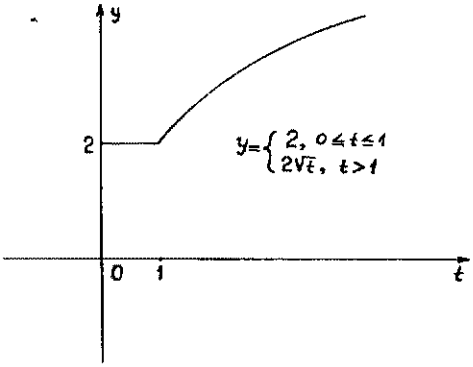
1842.



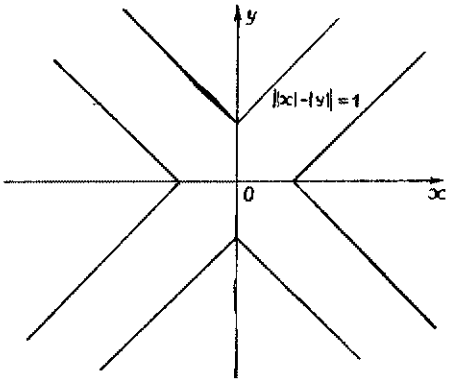
Sl. 222

1843. 1° $x_1 \approx -0{,}78$; $x_2 \approx 1{,}28$. 2° $x_1 = 0{,}45$. 3° $x_1 = 1{,}37$; $x_2 = 10$. 4° $x = 0{,}86$. 5° $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. 6° $x_1 \approx 0{,}34$: $x_2 \approx 1{,}9$.

1844. $x = 1$. **1845.** Sl. 223 **1846.** Sl.224



Sl. 223



Sl. 224

1848. $y=f(x)=|x|+\frac{1}{2}$ (sl. 225). **1849.** $x_1=1;\ x_2=2.$

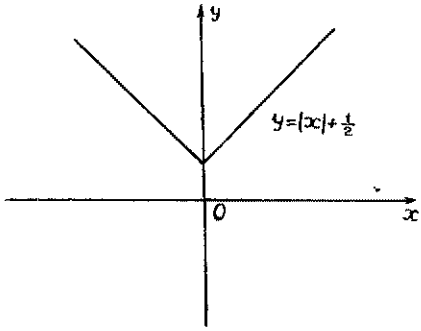
1850. Pošto se grafici krivih $y=f(x)$ i $y=g(x)$ ne seku, to jednačina $f(x)=g(x)$ ne može imati rešenje.

1851. Videti prethodni zadatak.

1852. $g(x)=\begin{cases}4-x; & x<2\\ 2-\sqrt{x-2}; & x>2\end{cases}$

$x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=3.$

1853. Treba izvršiti translaciju grafika funkcije $y=a^x$ za vrednosti $b=\log_{(a)}k$.



Sl. 225

1854. Za vrednosti $b=\log_a k$. **1855.** Za $b=\frac{\pi}{2}$.

1856. $|2x+1-3|<\varepsilon$ ili $2|x-1|<\varepsilon$, odakle je: $-\frac{\varepsilon}{2}<x-1<\frac{\varepsilon}{2}$, pa je $1-\frac{\varepsilon}{2}<x<1+\frac{\varepsilon}{2}$, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

1857. Za $x<-3501$ i $x>3499$. **1858.** ∞; $-\infty$.

1860. 1; 2; 2,002. Za $x=3{,}5$ ne postoji, jer funkcija nije definisana.

1861. $f(0{,}9)=1{,}9$; $f(1{,}1)=5{,}3$; $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=5$.

1862. 1° Ne postoji; 2° postoji; 3° ne postoji. **1863.** ∞.

1864. $\lim\limits_{x\to -1-0} E(x)=-2$; $\lim\limits_{x\to -1+0} E(x)=-1$. $\lim\limits_{x\to -0} E(x)=1$ $\lim\limits_{x\to +0} E(x)=0$ (sl. 226).

1866. Može da se pokaže da ne postoji ni $f(+0)$ ni $f(-0)$ ni $f(0)$. Funkcija stalno oscilira između -1 i 1, gde je $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\sin\frac{1}{x}=+1$, $\underline{\lim\limits_{x\to 0}}\sin\frac{1}{x}=-1$. **1867.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

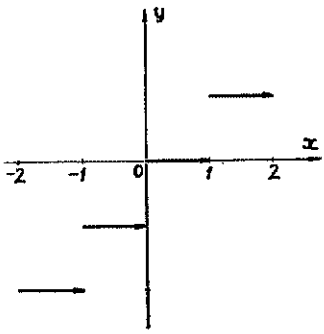
1868. Ako se podeli razlomak sa x^7 dobija se: $\frac{2x^7+3x^6+4x^2-5x-3}{x^7+x^4-x^3+2}=$

$$=\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^5}-\frac{5}{x^6}-\frac{3}{x^7}}{1-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^7}}\to 2.$$

1869. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}=1$. **1870.** $\frac{a_0}{b_0}$.

1871. $\frac{a_0}{b_0}$ za $n=m$; 0 za $n<m$; ∞ za $n>m$.

1872. $\frac{1}{2}$. **1873.** 1.



Sl. 226

1874. 0. **1875.** 1. **1876.** $-\frac{1}{2}$. **1877.** 2. **1878.** 1. **1879.** -1.

1880. $\frac{3}{2}$. **1881.** $-\frac{1}{2}$. **1882.** 1. Podeliti brojilac i imenilac sa $(x-1)$. **1883.** 3.

1884. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}=\frac{n}{m}$.

1885. $\frac{ps}{gr}$. Staviti $x=t^{qs}$ i svesti na zadatak (1884). **1886.** $\frac{3}{5}$. Staviti $x=t^{15}$.

1887. $\frac{3}{2}$, $(1+x=t^6)$. **1888.** 1. **1889.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1890. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **1891.** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. **1892.** $\frac{2}{3}$.

1893. $\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}$. (Iskoristiti identičnost: $(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{x^{n-1}\cdot a}+\cdots+\sqrt[n]{a^{n-1}})=x-a$ ili izvršiti smenu: $x=t^n$, $a=b^n$ pa rastaviti imenilac na činioce).

1894. $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$. **1895.** $\frac{m}{3}$. **1896.** -1.

1897. $\frac{4}{3}$; $\left(\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}\right)$.

1898. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\frac{1}{n!}$. Videti zadatak (1868). **1899.** $\frac{1}{4}$.

1900. $\frac{1}{2}$, $\left(\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \sin 2x=2\sin x\cos x\right)$.

1901. $-\frac{1}{2}$. **1902.** -6. **1903.** -2. **1904.** $\frac{3}{2}$.

1905. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{bx+c-b_1x-c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+b_1x+c_1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b-b_1+\frac{c-c_1}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{b_1}{x}+\frac{c_1}{x^2}}}=\frac{b-b_1}{2\sqrt{a}}$.

1906. $-\frac{5}{2}$. **1907.** 2. **1908.** $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$. **1909.** $\frac{a^2}{b^2}$. **1910.** $\frac{1}{2}$.

1911. $\frac{1}{2}$. **1912.** $\frac{1}{2}$. **1913.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$.

1914. $\frac{1}{2}$. **1915.** $\frac{a}{b}$. **1916.** $(-1)^{a-b}\frac{a}{b}$. **1917.** $\frac{1}{3}$.

1918. $\frac{1}{2}$. **1919.** $\frac{1}{4}$. **1920.** 2. **1921.** $\frac{3}{2}$. **1922.** a.

1923. $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}=\cos a.$$

1924. $\cos x$. **1925.** $-\frac{1}{3}$. **1926.** $\sin 1$. **1927.** 8.

1928. 1. **1929.** 1. **1930.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1931.** $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{n}-\frac{\alpha^2}{m}\right)$.

1932. 0, ($\lim\limits_{x\to\infty}\sin\sqrt{x+1}$ ne postoji). **1933.** 3. **1934.** $\frac{1}{p}$.

1935. ∞, $(x-2=t)$. **1936.** 8, $\left(x-\frac{\pi}{4}=t\right)$.

1937. 1. ($\operatorname{arc\,tg} x=t$, odakle je $x=\operatorname{tg} t$). **1938.** 0.

1939. $-\frac{1}{2}$. Staviti $\arcsin(x+2)=t$, odakle je $x=\sin t-2$ pa naći $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t(\sin t-2)}=-\frac{1}{2}$.

1940. $\frac{1}{4}$. **1941.** $\frac{2}{\pi}$. **1942.** $-\sqrt{2\pi}$. **1943.** $-\infty$.

1944. 0. **1945.** 0. **1946.** 0. **1947.** 0. **1948.** e.

1949. e^2. **1950.** e. **1951.** $\sqrt{e}$. **1952.** 1.

1953. e^2. **1954.** $e^{-1/3}$. **1955.** 1. (smena: $e^h-1=t$; $h=\ln(1+t)$).

1956. $\ln a$; $(a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a})$, pa je: $\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a\to\ln a$, $(x\to 0)$.

1957. $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. **1958.** -2. **1959.** $a-b$.

1960. 1, (podeliti sa x i brojilac i imenilac). **1961.** $\ln a$; $\left(\frac{1}{n}=t\right)$. **1962.** e^{-1}.

1963. 1 za $a\leqslant 1$; a za $a>1$. **1964.** 1. **1965.** -1. **1966.** $e^{-1/2}$.

1967. $\frac{2}{3}$. **1968.** Ne postoji. **1969.** $a^{a^a}(\ln a-1)$. **1970.** $\ln 4+1$. **1971.** $\frac{m}{n}$.

1972. a) 0; b) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$. **1973.** -2. **1974.** $-\frac{\pi}{2}$. **1975.** 1. **1976.** $\frac{1}{8}$.

1977. $\frac{1}{6}$. **1978.** $-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

1979. Neposredno sledi da je $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\frac{a^2+a}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$. Da bi postojao $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mora biti $f(-0)=f(+0)$, tj. $\frac{a^2+a}{2}=1$, odakle je: $a_1=1$, $a_2=-2$.

1981. $\ln 2$ za $0\leqslant x\leqslant 2$; $\ln x$ za $x>2$. **1982.** 1.

1984. $y=x+1$ (kosa); $x=0$ (vertikalna). **1985.** $x=-\frac{n}{m}$, $y=\frac{a}{m}$.

1986. $y=x+\frac{1}{2}$ za $x\to\infty$; $y=-x-\frac{1}{2}$ za $x\to-\infty$. **1987.** $y=\pm 1$.

1988. $y=x\pm\pi$. **1989.** $y=\pm 2x$. **1990.** $y=x$ za $x\to\infty$, $y=0$ za $x\to-\infty$.

1991. a. **1992.** $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$.

1993. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{|\sin x|}}=\sqrt{\left|\frac{x}{\sin x}\right|\cdot|x|}$. Pošto je $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left|\frac{x}{\sin x}\right|=1$, onda je $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$.

1994. 1° 1; 2° -1. **1995.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\operatorname{tgh} x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tgh} x=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{tgh} x=-1$.

1996. Definisana je za $x\in(-\infty, 0)$, i $x\in(0,\infty)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)-1$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$.

1997. Definisana za $x\in(-\infty, 0)$ $x\in(0,\infty)$; neposredno sledi da je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, (za dovoljno veliko x je: $\ln(1+e^x)\sim\ln e^x=x$).

1998. $1+2^x>0$ za svako x; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

1999. $1-2^x>0$ za $x<0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\infty$.

2000. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{4}$.

2001. $f(x)=1$, $x\neq 1$. Za $x=1$ nije definisana. $\lim\limits_{x\to\pm 1\pm 0}\frac{x-1}{x-1}=1$.

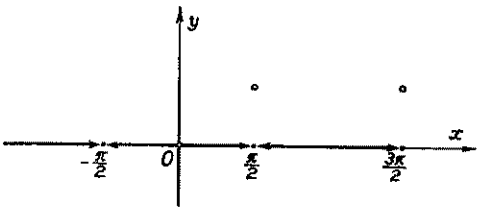
2002. Za $x=1$ nije definisana.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{|x-1|}=-1,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{|x-1|}=1.$$

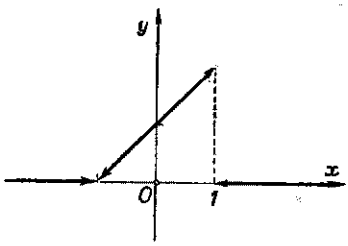
2003. $y=\begin{cases}1, & x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in c\\ 0, & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$ (sl. 227).

2004. $y=\begin{cases}x+1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1-0} y=2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=0$ (sl. 228).

Za $|x|=1$ nije definisana.



Sl. 227



Sl. 228

2005. $\lim\limits_{a\to 0} x_1=-\frac{c}{b}$, $\lim\limits_{a\to 0} x_2=\begin{cases}-\infty, & ab>0\\ +\infty, & ab<0.\end{cases}$

2006. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(kx+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(k-1)x^3+bx^2+b-1}{x^2+1}=0.$$

Da bi jednakost bila ispravna mora polinom brojioca biti nižeg stepena od polinoma imenioca, tj. mora biti: $k=1$ i $b=0$.

2009. 1° Nižeg reda; 2° višeg reda; 3° istog reda. **2010.** 1° 1; 2° 1; 3° 2; 4° 1; 5° 3.

2012. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{P}{x^3}=\frac{r^2}{16}$. **2014.** 1° 30,2; 2° 10,14; 3° 10,03. **2015.** 0,043...

2016. 1° $\frac{1}{16}$; 2° $4n$. **2017.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{a_0x^n}=1$. **2018.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2019. Istog reda $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=2\right)$. **2020.** 1. **2021.** Drugog i trećeg reda.

2022. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Neuporedive su (ima beskonačno malih i beskonačno velikih koje se ne mogu upoređivati).

2023. U brojiocu su svi sabirci beskonačno male višega reda u odnosu na $2\sin x$ pa se mogu zanemariti tako da je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-3x^2+2\sin x+8x^6}{3x^5+\sin^2 x+4x-7x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{4x}=\frac{1}{2}$.

2024. 2. **2025.** 1; $(\ln(1+\sin\alpha)\sim\alpha)$.

2026. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[a(x+\Delta x)+b-ax-b]=\lim\limits_{\Delta x\to 0} a\Delta x=0.$

2027. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(x+\Delta x)^n-x^n]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x-x)[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}]=$

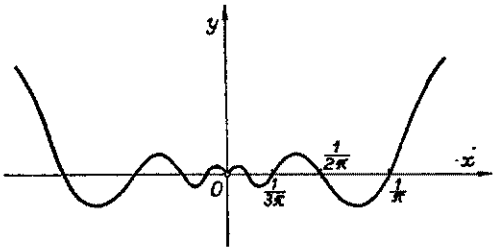
$\lim\limits_{x\to 0}\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}]=0\cdot nx^{n-1}=0.$

2028. Koristiti zadatak (2027).

2029. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\cos(x+\Delta x)-\cos x]=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}=0.$

2032. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{x+\Delta x}-a^x)=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)=0.$

2034. Očigledno je da je funkcija neprekidna za sve vrednosti $x\neq 0$ (proizvod dve neprekidne funkcije). $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=0$ i $f(0)=0$ znači da je neprekidna za svako x (sl. 229).



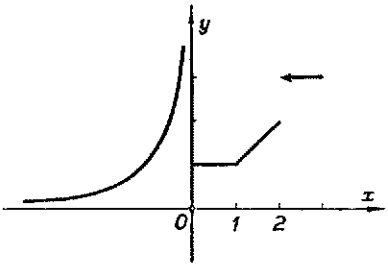
Sl. 229

2035. Neka je x_0 racionalna tačka. Uočimo dva niza nezavisno promenljive x koji konvergiraju tački x_0: $\{x_r\}$, $(r=1, 2, 3, \ldots;\ x_r$ racionalni) i $\{x_i\}$, $(i=1, 2, 3, \ldots;\ x_i$ iracionalni brojevi). Pošto je $f(x_r)=1$, to je $\lim\limits_{r\to\infty}f(x_r)=1$. Isto tako je $f(x_i)=0$ pa je $\lim\limits_{i\to\infty}f(x_i)=0$. Da bi funkcija $f(x)$ bila neprekidna u x_0 potrebno je da $f(x_n)\to f(x_0)$ za svaki niz x_n koji teži x_0. Ovde to nije ispunjeno jer je $f(x_0)=1$ a $f(x_i)\to 0$. Na isti se način dokazuje da je funkcija prekidna ako je tačka x_0 iracionalna. Prema tome, Dirichletova funkcija je definisana za sve vrednosti nezavisno promenljive x i prekidna za svako x. Prekidi su drugog reda.

2036. Funkcija je neprekidna za $x\in(-\infty, 1)$ i $x\in(1,+\infty)$. U $x=1$ nije definisana. Važi $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to +1+0}f(x)=1$.

2037. 1° Svuda je neprekidna, 2° Svuda je neprekidna, 4° Svuda je neprekidna, 5° $x\in C$.

2038. Neprekidna je za $x\in(-\infty;\ 0)$; $x\in(0;\ 2)$, $x\in(2;\ 3)$. U $x=0$ prekidna s leve a neprekidna s desne (prekid drugog reda). U $x=2$ neprekidna s leve a prekidna s desne (prekid prvog reda). U $x=3$ neprekidna s leve (sl. 230).



Sl. 230

2039. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[F(x+\Delta x)-F(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sqrt{f(x+\Delta x)}-$

$-\sqrt{f(x)}]=\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)}=0.$

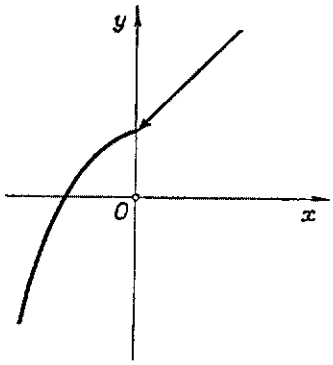
2040. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[|x+\Delta x-1|-|x-1|]=|x-1|-$

$-|x-1|=0.$

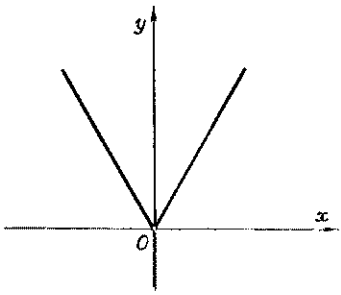
2041. $a=1$ (sl. 231).

2042. Ne može zato što je $f(1-0)\neq f(1+0)$.

2043. Funkcija $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1, & x\geqslant 0 \\ x+\lambda, & x<0 \end{cases}$ je neprekidna za $x<0$ i za $x>0$. Osim toga je: $f(0)=e^{-0}+1=2$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lambda$ i $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=2$. Da bi funkcija bila neprekidna i u



Sl. 231



Sl. 232

tački $x=0$ potrebno je i dovoljno da je: $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to +0} f(x)$, tj. treba da bude $\lambda=2$.

2044. $f(0)=\dfrac{3}{2}$.

2045. 1° $f(0)=1$, jer je $\lim \dfrac{e^x-1}{x}=1$; 2° $f(0)=n$, jer je $\lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to\pm 0}\frac{1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n-1}{x}=n;$$ 3° $f(0)=1$; 4° $f(0)=0$; 5° $f(0)=2$.

2046. Funkcija je neprekidna za svako x (sl. 232).

$$y=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{\pi}{2}x, & x>0. \end{cases}$$

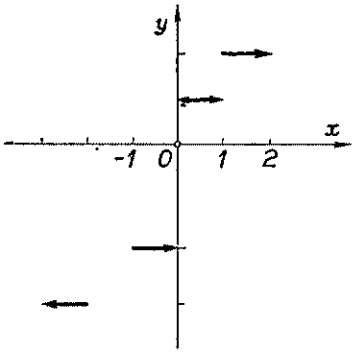
2047. U $x=0$ prekid prvog reda. **2948.** Neprekidna za svaku vrednost od x.

2049. 1° (sl. 231) $x=k$ prekid prvog reda; 2° Prekid prvog reda za $x=k$ (sl. 234).

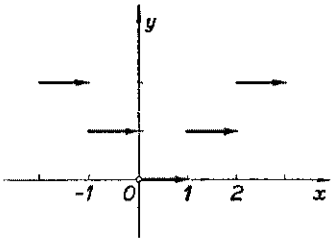
2050. $x\approx 0{,}52$; $f(x)=x^3-6x+3$ je neprekidna na $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Osim toga je: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$, $f(1)=-2$. (Nacrtati grafike funkcija: $y=x^3$ i $y=6x-3$).

2051. Funkcija $f(x)=x^5-3x-1$ je neprekidna za sve vrednosti promenljive x. (Polinomi su neprekidne funkcije). Osim toga je: $f(1)=-3$ i $f(2)=25$. Kako je $f(1)<0$ i $f(2)>0$, sledi da funkcija $f(x)$ mora imati bar jednu nulu između $x=1$ i $x=2$.

Može se pokazati da ova jednačina ima u naznačenom intervalu samo jedan koren. Postoje još dva realna korena. Jedan u intervalu $(-1, 0)$ i drugi u intervalu $(-2, -1)$. Dokaz se prepušta čitaocu.



Sl. 233



Sl. 234

2052. $F_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ je neprekidna funkcija. Za dovoljno velike vrednosti x, znak polinoma je kao d_0, a za negativne dovoljno velike, po apsolutnoj vrednosti, suprotan znak od a_0.

2053. Funkcija $f(x)=x-q\sin x-p$ je neprekidna i pri tom je: $f(0)=-p<0$, $f(p+q)=q[1-\sin(p+q)]\geqslant 0$. Znači da postoji x_0 tako da je $f(x_0)=0$ i $0<x_0\leqslant p+q$.

2054. Neprekidna je za $x\in(-\infty, 0)$, $x\in[0, \infty)$. Za $x=0$ prekid prvog reda. $f(-2)=-1$, $f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f(2)=\frac{3}{e}$. Pošto je funkcija neprekidna za $x\in[-2, 1]$, $f(x)$ uzima sve vrednosti između -1 i 0, uključujući -1 i 0. Isto tako $f(x)$ uzima sve vrednosti od 0 do $\frac{3}{e}$, jer je neprekidna za $x\in[0, 2]$.

2055. Neka je $R_1=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2$, $R_2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^2$ i $R=\sum_{i=1}^{n}[tx_i+(1-t)y_i-a_i]^2$.

Tada je $R=\sum_{i=1}^{n}[t(x_i-y_i)+(y_i-a_i)]^2=t^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+2t\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-a_i)+$

$+\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^2$, tj. $R=f(t)=At^2+Bt+C$, gde je $A\geqslant 0$, $R\geqslant 0$, $R_1=f(1)$, $R_2=f(0)$.

Za $t\in[0, 1]$ R postiže maksimum na jednom kraju a pošto je i $R_1<r^2$ i $R_2<r^2$, to je i $R<r^2$.

2056. Neka je $x'=\frac{1}{n}$, $x''=\frac{1}{n+1}$, n prirodan broj veći od 1. Tada je $|f(x')-f(x'')|=1$ iako se $|x'-x''|=\frac{1}{n(n+1)}$ može učiniti proizvoljno malim kad $n\to\infty$.

2057. $x'=\frac{1}{n\pi}$, $x''=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, gde je n prirodan broj. Dalje kao u prethodnom zadatku.

2063. Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan broj i x', x'' takvi da je $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{2}$ tada je $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Glava VI

2064. $\Delta x = 2-1 = 1$, $\Delta y = \frac{1}{x_1+\Delta x} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$.

2065. $\Delta x = 1$, $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3$, tj. $\Delta y = (1+1)^3 - 1^3 = 7$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$.

2066. $\Delta t = \frac{\pi}{2}$, $\Delta s = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$; $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2}{\pi}\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

2067. Ugao obrtanja φ zavisi od vremena obrtanja t. Srednja brzina je $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, ugaona brzina

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

2068. $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x)+n-(kx+n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

2069. $$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-\sqrt{1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1} = \frac{1}{2}.$$

2070. $$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{0+\Delta x}-e^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1.$$

2071. $$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\pi+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{\pi+\Delta x}{2} = 1\cdot 0 = 0.$$

2072. a) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos[2(x+\Delta x)+1]-\cos(2x+1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\sin\dfrac{4x+2\Delta x+2}{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=$

$=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(2x+1+\Delta x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=-2\sin(2x+1);$

b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\dfrac{\pi}{180}$, pa je $f'(x)=-\dfrac{\pi}{90}\sin(2x+1)$.

2073. $y'=3x^2$. **2074.** $y'=8x^3$. **2075.** $y'=-\dfrac{1}{x^2}$. **2076.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.

2077. $y'=nx^{n-1}$ (vidi zadatak 2027).

2078. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (vidi zadatak 1893). **2079.** $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2080. $y'=e^x$. **2081.** $y'=a^x\ln a$. **2082.** $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

2083. $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$; $f'_+(0)\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$, pošto je $f'_-(0)\neq f'_-(0)$ ne postoji $f'(0)$.

2084. $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$. $f'(0)$ ne postoji. Funkcija je neprekidna za svako x.

2085. $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0$; $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0$, postoji $f'(0)=0$.

2086. a) $f'_-(0)=\infty$, $f'_+(0)=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to +0}f'(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to -0}f'(x)=1$, $f'_+(0)\neq\lim\limits_{x\to +0}f'(x)$, $f'(0)$ ne postoji.

2088. $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(2+\Delta t)^2+2(2+\Delta t)+1-(3\cdot 2^2+2\cdot 2+1)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{12\Delta t+3(\Delta t)^2+2\Delta t}{\Delta t}=$

$=14\dfrac{m}{\sec}$.

2089. $\operatorname{tg}\varphi=3$. **2090.** $y'=4x^3$. **2091.** x^4-2x^2+4x. **2092.** $2ax+b$.

2093. $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. **2094.** $\dfrac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **2095.** $\dfrac{a}{c}$. **2096.** $1-\sqrt{\dfrac{a}{x}}$.

2097. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **2098.** $mn(x^{n-1}-x^{m-1})$. **2099.** $\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

2100. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **2101.** $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. **2102.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}$. **2103.** $2x$.

2104. $\dfrac{5x^2-2}{2\sqrt{x}}$. **2105.** $\dfrac{6at^5}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

2106. $2x\,[(x^2-4)\,(x^2-9)+(x^2-1)\,(x^2-9)+(x^2-1)\,(x^2-4)]$. **2107.** $-\dfrac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$.

2108. $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

2109. Traženi zbir je izvod desne strane identiteta, tj. $\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1}{(x-1)^2}$.

2110. $\cos x-\sin x$. **2111.** $\sin 2x$. **2112.** $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$. **2113.** $\dfrac{1}{1+\cos\varphi}$.

2114. $\dfrac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}$. **2115.** $\dfrac{(\sin x+x\cos x)\,(1+\operatorname{tg} x)-x\sin x\cos^{-2}x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$.

2116. $\dfrac{\sin x\,(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$. **2117.** 0. **2118.** 0. **2119.** $-\dfrac{1}{(\arcsin x)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

2120. $\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **2121.** 0. **2122.** $\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

2123. $\sin x\operatorname{arc\,tg} x+x\cos x\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{x}{1+x^2}\sin x$. **2124.** $-\dfrac{1}{e^x}$.

2125. $e^x(\cos x-\sin x)$. **2126.** $\dfrac{(x-2)\,e^x}{(x-1)^2}$. **2127.** $e^{-x}(1-x)$.

2128. $e^x\left(\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$. **2129.** $2^x\ln 2+2x$. **2130.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\cdot\ln\dfrac{3}{2}$.

2131. $\dfrac{2}{x}$. **2132.** $\log x+\log e$. **2133.** $x^{n-1}\,(n\ln x+1)$. **2134.** $\dfrac{-2}{(1+\ln x)^2\cdot x}$.

2135. $-\dfrac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **2136.** $-x^2\ln ex^3$. **2137.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x\ln 10}$.

2138. $y'=\operatorname{ch} x$. **2139.** $3\operatorname{sh}^2 x\cdot\operatorname{ch} x$. **2140.** $-x\operatorname{ch} x$.

2141. $\dfrac{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ctgh}^2 x}$. **2142.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{Arch} x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{Arsh} x,\ |x|>1$.

2143. $\dfrac{2x^2}{1-x^4}$. **2144.** $\dfrac{x\ln x-\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arch} x}{x\sqrt{x^2-1}\ln^2 x},\ x>1$.

2145. Stavimo $u=x^2-2x+3$, pa imamo $y=u^{15}$, odakle je $y_u'=15\,u^{14}$, $u_x'=2x-2$, pa je $y_x'=y_u'\cdot u_x'=15\,(x^2-2x+3)^{14}\,(2x-2)$.

2146. $u=2+3\ln x$, $y=u^5$, $y_x'=y_u'\cdot u_x'=5\,u^4\,u_x'=5\,(2+3\ln x)^4\cdot\dfrac{3}{x}$.

2147. $n(ax^2+bx+c)^{n-1}\cdot(2ax+b)$. **2148.** $\dfrac{4x+1}{3\sqrt[3]{(2x^2+x-1)^2}}$. **2149.** $\dfrac{10x}{(1-x^2)^6}$.

2150. $\dfrac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$. **2151.** $3\cos 3x$. **2152.** $\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}$.

2153. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. **2154.** $-\dfrac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$. **2155.** $\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$.

2156. $\dfrac{1}{27\sqrt[3]{x^2\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$. **2157.** $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$.

2158. $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{x})}$. **2159.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}-1$. **2160.** $\dfrac{x^3-1}{(x+2)^6}$.

2161. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$. **2162.** $-\sin 4x$. **2163.** $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

2164. $3x^2\sin 2x^3$. **2165.** $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y'(\pi)=0$, $y'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2166. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$. **2167.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$. **2168.** $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

2169. $-\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$. **2170.** $\dfrac{1}{1+x^2}$. **2171.** $\dfrac{1}{x^2+x^4}$. **2172.** $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}$.

2173. $\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$. **2174.** $\arccos x$. **2175.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^2x}}$.

2176. $(2x-1)e^{x^2-x+2}$. **2177.** $10^x\ln 10\cdot e^{10x}$. **2178.** $e^x\cdot 10^{ex}\cdot\ln 10$.

2179. $a^a\cdot x^{a^a-1}+ax^{a-1}\cdot\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$. **2180.** $\dfrac{2e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}$.

2181. $2x^2e^{2x+3}$. **2182.** $\operatorname{ctg} x$. **2183.** $-\operatorname{tg} x$. **2184.** $\dfrac{x\sin x-\cos x}{(1-x\cos x)\ln 2}$.

2185. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **2186.** $\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}$. **2187.** $\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$.

2188. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. **2189.** $\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$. **2190.** $\arcsin\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

2191. $\operatorname{tg} h\dfrac{x}{2}$. **2192.** $y'(2a)=-\dfrac{1}{3a}$. **2193.** $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

2194. $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x$, $\left(0<x-2k\pi<\dfrac{\pi}{2}\right)$. **2195.** $\operatorname{tg}^5 t$. **2196.** $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$.

2197. $\dfrac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$. **2198.** $\dfrac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. **2199.** $\dfrac{2\sin x+\cos x}{2\sin^2 x\cos x}$.

2200. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1}{\arcsin x}-2\arcsin x\right)$.

2201. $\left(3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln 3+\dfrac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\cdot\dfrac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}$. **2202.** $\dfrac{x^2-3x}{x^4-1}$.

2203. $\dfrac{-16\cos 2x}{\cos^4 x}$. **2204.** $\operatorname{tgh} x$. **2205.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. **2206.** $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$.

2207. $4\operatorname{sh} 4x$. **2208.** $\dfrac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$. **2209.** $x\operatorname{Artgh} x+\dfrac{1}{2}$.

2210. $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}+\dfrac{1}{1-e^{2x}}$. **2211.** $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$. **2212.** $\dfrac{(\cos x-\sin x)(e^x+e^{-x})}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$.

2213. $\dfrac{-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

2214. $\pm(\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x})$; znak plus za $\cos 2x>0$, znak minus za $\cos 2x<0$. Za $\cos 2x=0$, y' ne postoji $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0} y'=\sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} y'=-\sqrt{2}$.

2217. $\dfrac{d(\cos x)}{d(\sin x)}=\dfrac{\dfrac{d(\cos x)}{dx}}{\dfrac{d(\sin x)}{dx}}=-\operatorname{tg} x$.

2218. Diferenciranje funkcije $f(x)$ dobija se $f'(x)=(a-d-cx)\sin x+(b+c+ax)\cos x$. Sa druge strane je $f'(x)\equiv x\cos x$, pa imamo identitet: $(a-d-cx)\sin x+(b+c+ax)\cos x\equiv$ $\equiv x\cos x$, odakle je $a-d=0$; $c=0$, $b+c=0$, $a=1$; dakle: $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$.

2219. $\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$. **2220.** $a=1{,}8$; $b=-0{,}6$.

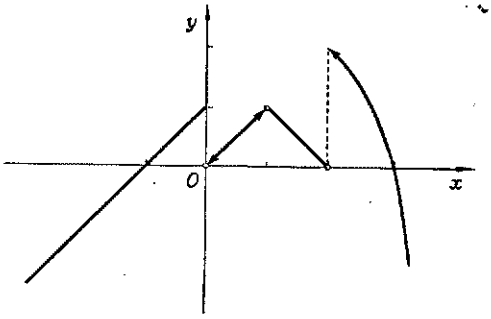
2221. $y'=-\dfrac{1}{1+x}$. Zamenom ove vrednosti u jednačini: $xy'+1=e^y$, dobijamo na levoj strani $\dfrac{1}{1+x}$, a na desnoj strani $e^{-\ln(1+x)}=\dfrac{1}{e^{\ln(1+x)}}=\dfrac{1}{1+x}$.

2222. Da.

2225. 1° (sl. 235); 2° $f(x)$ je neprekidna za $x(-\infty, 0)$, $x\in(0, 2)$, $x\in(2, \infty)$;

$$3^\circ\ f'(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 1, & 0<x<1\\ -1, & 1<x<2\\ 3-2x, & x>2\end{cases}$$

Ne postoji: $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$;
4° $f'(x)$ je neprekidna za
$x\in(-\infty, 0)$, $x\in(0, 1)$,
$x\in(1, 2)$, $x\in(2, +\infty)$.



Sl. 235

2226. 1° $-\frac{1}{8}$; 2° $-\frac{1}{8}$. **2227.** Da. $f'(2)=\frac{\pi}{2}$. **2228.** $y'(-1)=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

2229. Diferenciranjem jednakosti $f(-x)=f(x)$ i $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ dobijaju se jednakosti: $f'(-x)=-f'(x)$ i $\varphi(-x)=\varphi(x)$; ($f(-x)$ i $\varphi(-x)$ tretirati kao složenu funkciju).

2230. 1° $y'=3x^2f'(x^3)$; 2° $y'=f'(x)\cdot f'[f(x)]$; 3° $y'=e^{f(x)}[e^xf'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$;

4° $y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$; 5° $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2231. Diferenciranjem jednakosti $f(x+\omega)=f(x)$ dobija se $f'(x+\omega)=f'(x)$.

2232. $a=2$, $b=-1$. **2233.** $y'=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, za $x=k\pi$; $k\in C$; $M_k(k\pi, 0)$.

2234. $f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2235.** 0.

2237. U zadacima od (2237) do (2240) treba, prvo, pokazati da je izvod leve strane jednak nuli u naznačenim intervalima, tj. da je funkcija konstantna; zatim za proizvoljnu vrednost x iz naznačenog intervala naći te konstante.

2241. Ako logaritmujemo jednakost $y=x^x$ i posle toga diferenciramo, dobijamo $\frac{y'}{y}=\ln x+1$, odakle je $y'=x^x(1+\ln x)$.

2242. $\ln y=v\ln u$, $\frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{vu'}{u}$, $y=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)$.

2243. $\ln y=\frac{3}{2}\ln(x+1)+\ln(2x-1)+x^2+5\ln\sin x+2\ln\sin x-\ln(x+2)$, (1); $\frac{y'}{y}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+$
$+\frac{2}{2x-1}+2x+5\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x-\frac{1}{x+2}$, $y'=y\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x-1}+2x+5\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x-\frac{1}{x+2}\right)$.

Da li je jednakost (1) tačna za svako x? (Ne).

2244. $\frac{y'}{y}=-\sin x\ln\sin x+\cos x\operatorname{ctg}x$; $y'=(\sin x)^{\cos x}\cdot[\cos x\operatorname{ctg}x-\sin x\ln\sin x]$.

2245. $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$. **2246.** $y'=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)$.

2247. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)$. **2248.** $\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3^{5/2})}$.

2249. $x^{x^x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$.

2250. $\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left(\frac{3x^2+2x-3}{x^2-1}\operatorname{tg}x+\frac{1}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\right)$.

2251. $\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. **2252.** $x^{x+1}(x+1)^x\frac{(x+1)^2+x^2}{(x+1)x}+\ln(x^2+x)$.

2253. $y_x'=e^x+1$; $x_y'=\frac{1}{y_x'}=\frac{1}{e^x+1}$. **2254.** $y_x'=\cos x$, $x_y'=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

2255. a) $\frac{x}{1+xe^x}$; b) $\frac{3\sqrt[3]{1+\sin 2x}}{\cos x-\sin x}$; c) $\cos y$. **2257.** $y_x'=\frac{y}{\dot{x}}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} x$.

2258. $y_x'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{e^t}{-e^{-t}}=-e^{2t}$. **2259.** $y_x'=-\frac{1+\cos x}{\sin t}$. **2260.** $y_x'=-\frac{b}{a}$.

2261. $y_y'=-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **2262.** $y_x'=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **2263.** $y_x'=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$.

2264. $y_x'=\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$. **2265.** $y_x'=\frac{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{1-\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}$.

2266. $y_x'=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0.\end{cases}$ **2267.** $y_x'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **2268.** $\frac{1}{2}$. **2269.** 0.

2270. 1. **2273.** $\alpha\approx 87°,10$. **2274.** $\alpha=90°$. **2275.** $\alpha=\operatorname{arc\,tg} 3$.

2276. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **2277.** $-\frac{2x+y}{x+2y}$. **2278.** $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **2279.** $\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

2280. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$, $y'(4)=-1$. **2281.** $-\frac{y}{x+e^y}$, $y'(0)=-e^{-1}$.

2282. $(x+y)^2$, $y'(0)=0$. **2283.** $\frac{x+y}{x-y}$, $y'(0)=1$.

2284. $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$, $y'=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. **2285.** $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\cdot\frac{y}{x}$. **2286.** $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$.

2287. $y'(0)=1-\frac{1}{e}$. **2288.** $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln y}$, $y'(1)=e^2-e$. **2289.** $-\frac{y}{x\ln x}$. **2290.** 0.

2293. 1° $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $y'=\frac{dy}{dx}$. Kako je ρ funkcija od θ, to je $dx=\cos\theta\,d\rho-\rho\sin\theta\,d\theta$,

$$dy=\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta\,d\theta \quad \text{i} \quad \frac{\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,d\rho-\rho\sin\theta\,d\theta}=\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}\left(\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}\right)\Rightarrow$$

$$u=\rho\cos\theta\,\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}-\rho\sin\theta; \qquad 2°\ y'=\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta},\ \frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}=$$

$=\frac{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta-\rho\sin\theta}$ ili posle uprošćavanja: $\rho'=\rho$.

2294. $\frac{3}{2}(6x-1)\sqrt{3x^2-x}\,dx$. **2295.** $\left(2^x\ln 2+3^{-x}\ln 3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

2296. $\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}+1\right)dx$. **2297.** $a^x\left[a^{a^x}\left(\ln x\ln a+\frac{1}{x}\right)-\ln a\right]dx$.

2298. $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$. **2299.** $\frac{dx}{\cos^3 x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in C\right)$.

2300. $dy=\frac{1}{t}\,dt$. **2303.** $\Delta y=0{,}05$. **2304.** $-0{,}0693$.

2305. $\Delta l = 2{,}04$ cm. Koristiti vezu $l = l_0(1+\alpha t)$.

2306. $\Delta U = 23\ W$. Koristiti vezu $p = \dfrac{U^2}{R}$. **2307.** 1° 0,0059; 2° 0,0086; 3° —0,0059.

2308. 0,3466.

2309. 1° $\Delta y = 0{,}21$, $dx = 0{,}20$, $\Delta y - dy = 0{,}01$, $\delta = 4{,}7\%$;
2° $\Delta y = 0{,}0201$, $dy = 0{,}0200$, $\Delta y - dy = 0{,}0001$, $\delta = 0{,}5\%$;
3° $\Delta y = 0{,}002001$, $dy = 0{,}002000$, $\Delta y - dy = 0{,}000001$, $\delta = 0{,}05\%$.

2310. 1° $\Delta y = 18$, $dy = 11$, $\Delta y - dy = 7$, $\delta = 0{,}39$;
2° $\Delta y = 1{,}161$, $dy = 1{,}1$, $\Delta y - dy = 0{,}061$, $\delta = 0{,}0526$;
3° $\Delta y = 0{,}110601$, $dy = 0{,}11$, $\Delta y - dy = 0{,}000601$, $\delta = 0{,}00055$.

2311. Neka je x približna vrednost a $\bar{x} = x + \Delta x$ tačna vrednost. Znajući da je $\Delta y \approx dy$, $dy\,|f'(x)|\,dx$, $y = \log_{(10)} x$, to je $dy = \dfrac{1}{x}\log_{(10)} e\,\Delta x$ ili $dy = \dfrac{M}{x}\Delta x$, gde je $M = 0{,}43429$ a Δx jedna polovina poslednjeg decimalnog mesta. Pošto se svaki n-tocifreni broj može uklopiti između dva broja $10^{n-1} < x < 10^n$, onda će najveća moguća greška biti približna $dy \approx \dfrac{1}{2}\,\dfrac{0{,}43429}{10^{n-1}} = \dfrac{2{,}17}{10^n} < \dfrac{2{,}2}{10^n}$. Ako je prva cifra približne vrednosti k, može se pisati: $k\,10^{n-1} < x < (k+1)\,10^{n-1}$, pa je $dy < \dfrac{2{,}2}{k\,10^n}$. Iz oblika greške sledi da je greška utoliko manja ukoliko je k veće (9, 8, 7, ...), a veća ukoliko je k manje (1, 2, 3, ...).

2312. 1° $\Delta y = 25$ m, $dy = 20$ m; 2° $\Delta y = 2{,}05$ m, $dy = 2$ m; 3° $\Delta y = 0{,}020005$ m, $dy = 0{,}02$ m.

2313. 1° $\Delta y = 18$, $dy = 17$, $\delta = 5{,}88\%$; 2° $\Delta y = 8{,}25$, $dy = 8$, $\delta = 3{,}03\%$;
3° $\Delta y = 1{,}61$, $dy = 1{,}6$, $\delta = 0{,}62\%$.

2314. 1° $\Delta v = 4{,}166\,[(r+0{,}5)^3 - r^3]$, $dv = 6{,}28\,r^2$; 2° $\Delta v = 4{,}166\,[(r+0{,}1)^3 - r^3]$, $dv = 1256\,r^2$;
3° $\Delta v = 4{,}166[(r-0{,}01)^3 - r^3]$, $dv = 0{,}176\,r^2$, $|\Delta v - dv|$.

2315. 1,6.

2316. Kako je $p = 8\sin\alpha$, to je $dp = 8\cos\alpha\,d\alpha$ ili $0{,}16 = 4\,d\alpha$. Odavde je konačno $d\alpha = 0{,}04$ ili $d\alpha = 2°17'30{,}6''$.

2317. $dp = -43{,}63$. **2318.** $dv = 0{,}75$; $\delta = 0{,}6\%$. **2319.** $dv = 3{,}525$.

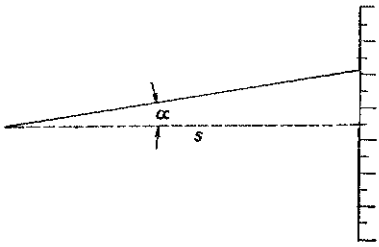
2320. $dv = \dfrac{0{,}4\sqrt{3}}{3}$.

2321. $\gamma = \dfrac{G}{V} = 7{,}616$ g/cm³,

$$|\Delta\gamma| \approx \frac{G}{V^2}\,dv = 0{,}018 \text{ g/cm}^3;$$

$$\frac{|\Delta\gamma|}{\gamma} = 0{,}0023 = 0{,}23\%.$$

2322. $df = \dfrac{3\,b\,ds}{8\,f}$.



Sl. 236

2323. Pošto je $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{s}$ (sl. 236), to je $d\alpha \frac{1}{1+\left(\frac{x}{s}\right)^2} \frac{dx}{s} = \frac{s\,dx}{s^2+x^2}$. Ako je npr. $s = 2$ m; $x = 250$ mm; $dx = 1$ mm, onda se dobija da je $d\alpha = \frac{2000 \cdot 1}{4062500} = 0{,}000492$ ili $d\alpha = \operatorname{arc} 1'42''$. Ako je $\alpha = 7°7{,}5'$, to je relativna greška $\delta = \frac{d\alpha}{\alpha} = 0{,}004 = 0{,}4\%$.

2328. 1° Neka je $y = \sqrt{x}$, onda je $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$ a $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, pa je $\sqrt{x+\Delta x} \approx \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. Ako je $x = 4$ a $\Delta x = 0{,}3$, biće $\sqrt{4{,}3} \approx 2 + \frac{0{,}3}{4} = 2{,}075$; 2° 0,782.

2329. $\ln 3 \approx 1{,}1$, $3^{\sqrt{4{,}3}} \approx 9{,}7176$. **2330.** 1° 1,008; 2° 0,990; 3° 1,030.

2331. 1° 1,003; 2° $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{3}{125}\right)} = 5\,(1+0{,}024)^{1/3} \approx 5 \cdot 1{,}008 = 5{,}040$; 3° 0,9997; 4° 2,006.

2332. 1° 1,04343; 2° 2,994.

2333. 1° Ako je $y = \sin x$, onda je $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$ i $dy = \cos x\,dx$. Kako je $\Delta y \approx dy$, to je $\sin(x = \Delta x) \approx \cos x\,dx + \sin x$. Za $x = \frac{\pi}{4}$ i $\Delta x = dx = \frac{1{,}3\,\pi}{180}$ dobija se $\sin 46°$, 3° $\approx \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{3{,}14 \cdot 1{,}3}{180} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}858$; 2° 0,796; 3° 0,0175.

2334. 1° 18°22''; 2° 0,8104. **2335.** 0,995. **2336.** -2.

2337. 4°. **2338.** $|dx| < \frac{x^2 \cdot 0{,}1}{4} < 0{,}006$.

2339. Poluprečnik je potrebno izmeriti sa greškom koja nije veća od $\frac{1}{3}\%$.

2340. $dl = -\frac{14}{\pi} = -4{,}46$ cm. **2341.** 0,006 ili 0,6%.

2342. $y' = \cos x$, $y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x$; $y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x$.

2343. $y' = \ln x + 1$, $y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$; $y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $y^{IV} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$.

2344. $y'' = 12x^2 - 4$. **2345.** $y'' = 2\cos 2x$. **2346.** $y'' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2347. $y'' = 4e^{2x} \cdot (x-1)$. **2348.** $y = 2 \operatorname{arc\,tg} x + \frac{2x}{1+x^2}$. **2349.** $y''' = \frac{2}{x}$.

2350. $y''' = -4 \sin 2x$. **2351.** $y''' = \frac{2a\,(3x^2 - a^2)}{(x^2+a^2)^3}$.

2352. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$; $f'''(0) = 2$. **2353.** $f'''(1) = -2$.

2355. $y^{(n)}=e^x$. **2356.** $y^{(n)}=n!$. **2357.** $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

2358. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{2^n}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$. **2359.** $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}\,n!}{(1+x)^{n+1}}$. **2360.** $y'=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

2361. $y^{(n)}=a_0\,n!$. **2362.** $y^{(n)}=a^x(\ln a)^r$. **2363.** $y^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$.

2364. Primenom Leibnitzove formule dobijamo da je $\left(x^2e^{-\frac{x}{a}}\right)^n=\binom{n}{n-2}u'v^{(n-2)}+\binom{n}{n-1}\times$ $\times u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$, jer je $(x^2)^{(k)}=0$ za $k>2$. U stvari je $f^{(n)}_{(0)}=\binom{n}{n-2}u''v^{(n-2)}$ za $x=0$ jer se poslednja dva člana anuliraju za $x=0$; $(x^2)''=2$; $\left(e^{-\frac{x}{a}}\right)^{n-2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}e^{-\frac{x}{a}}$, pa je $f^{(n)}_{(0)}=\binom{n}{n-2}\cdot 2\left(-\dfrac{1}{a}\right)^{n-2}=\dfrac{n(n-1)(n-1)^n}{a^{n-2}}$.

2367. $y^{(n)}_{(0)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. **2368.** $\dfrac{(-1)^n\,n!}{2ab}\left[\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}-\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}\right]$.

2369. $\dfrac{(-1)^n\,n!}{(x-1)^n}\left[-\dfrac{(x-1)^2}{n-2}-\dfrac{(x-1)(2x-1)}{n-1}-\dfrac{x^2-x-1}{n}\right]$.

2372. 1° $y=(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$. Primenom Leibnitzove formule dobijamo: $y^{(n)}=$ $=n!\,(x-1)^n+n^2(n-1)\ldots 2(x-1)(x+1)^{n-1}+\dfrac{[n(n-1)]^2}{2!}\,n(n-1)\ldots 3(x-1)^2(x+1)^{n-2}+$ $+\cdots+\dfrac{[n(n-1)\cdots(n-k+1)]}{k}\,n(n-1)\cdots(k+1)(k-1)^k(x+1)^{n-k}+\cdots+(x-1)^n\,n!$;

2° $y^{(n)}(1)=2^n\,n!$; $y^{(n)}(-1)=(-1)^n\,2^n\,n!$; 3° $y^{(n-1)}(1)=y^{(n-1)}(-1)=0$.

2374. $y''=\begin{cases}6x, & x>0\\ -6x, & x<0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **2375.** $v=7\,\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}$, $w=8\,\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$. **2376.** $w=-\dfrac{\pi^2}{18}\,\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$.

2377. Zakon kretanja tačke M_1 je $x=a\cos wt$, brzina $v=-aw\sin wt$, ubrzanje $w=-aw^2\cos wt$; početna brzina $v_0=0$, početno ubrzanje $w_0=-aw^2$; brzina za $x=0$, $v=-aw$, ubrzanje $w=0$; $\max|v|=aw$; $|w|=aw^2$.

2378. $y''=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$, $\dot{x}=\dfrac{1}{t}$, $\ddot{x}=-\dfrac{1}{t^2}$, $\dot{y}=3t^2$, $\ddot{y}=6t$, $y''=\dfrac{\dfrac{1}{t}\cdot 6t+\dfrac{1}{t^2}\cdot 3t^2}{\dfrac{1}{t^3}}=9t^3$.

2379. $\dot{x}=-a\sin t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$,

$y_x''=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{+a\sin t\cdot b\sin t+a\cos t\cdot b\cos t}{-a^3\sin^3 t}$; $y''=-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$.

2380. $y''=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$. **2381.** $y''=-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$. **2382.** $y''=-\sqrt{1-t^2}$.

2383. $y''=\sqrt{1+t^2}$. **2384.** $y''=-\dfrac{2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}$.

2385. $y'''=\dfrac{d(y'')}{dx}=\dfrac{\dfrac{d(y'')}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{d[3e^{-2t}(2t-t^2)]}{dt}}{e^t}=3e^{-3t}[2-5t-3t^2]$.

2386. $y'''=\dfrac{d^3y}{dx}=\dfrac{\cos^2 t-4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}$. **2387.** $y'''=\dfrac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$.

2388. $y'''=6e^{4at}$. **2389.** $\dfrac{d^ny}{dx^n}=(-1)^n n!\,e^{(n+1)at}$.

2390. Diferenciranjem jednačine $\ln xy=x$ dobija se $\dfrac{y+xy'}{xy}=1$, odakle je $y+xy'=xy$, tj. $y'=\dfrac{y(x-1)}{x}$. Diferenciranjem jednakosti $y'=\dfrac{(x-1)y}{x}$ dobija se $y''=\dfrac{[y+(x-1)y']x-(x-1)y}{x^2}$ ili $y''=\dfrac{y-x^2-xy'}{x^2}$. Kako je $y'=\dfrac{(x-1)y}{x}$, imamo konačno $y''=\dfrac{y-\dfrac{(x-1)^2xy}{x}}{x^2}=\dfrac{xy-x^3y+2x^2y-xy}{x^3}$, $y''=\dfrac{y(2-x)}{x}$.

2391. $-\dfrac{b^4}{a^2b^3}$. **2392.** $-\dfrac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

2393. a) $\dfrac{2-2y^2}{y^5}$; b) $\dfrac{y}{(1-y)^3}$, c) $\dfrac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}$.

2394. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$, $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$.

2396. $\dfrac{d^2x}{dy^2}=(1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}x$; $\dfrac{d^3x}{dy^3}=1+3\operatorname{tg}^2 x$.

2397. Diferenciranjem jednakosti tri puta uzastopno, dobijamo: $x+yy'=0$; $2y'y''+y'y''+yy'''=0$; $1+y'^2+yy''=0$, tj. $3y'y''+yy'''=0$, odakle je $y'''=-\dfrac{2yy''}{y}$. Kako je iz prve dve jednakosti $y'=-\dfrac{x}{y}$; $y''=-\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$, to je $y'''=-\dfrac{3a^2x}{y^5}$.

2398. $\dfrac{1}{3}$. **2400.** $\dfrac{dx}{dt}=t^2-3t-4$; $\dfrac{d^2x}{dt^2}=2t-3$; $t_1=-1$; $t_2=4$.

2401. $60{,}5\cdot10^3\,a$ erg.

2402. Iz jednačina $s=v_0 t+\frac{at^2}{2}$ i $\frac{ds}{dt}=v_0+at$ nalazimo za date podatke brzinu v i tangentno ubrzanje a: $v=\frac{253}{3}$ m/sec; $a=-\frac{17}{15}$ m/sec,

pa je totalno ubrzanje $w=\sqrt{a^2+\frac{v^2}{R^2}}=\sqrt{\left(\frac{17}{15}\right)^2+\frac{\left(\frac{253}{5}\right)^2}{1000}}$.

2404. Iz jednačine $x=a\sin kt$ dobija se diferenciranjem $v=x'=ak\cos kt$. Eliminacijom promenljive t iz tih dveju jednačina dobija se veza između položaja x i brzine $v=x'$ u obliku $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x'^2}{a^2k^2}=1$. Koristeći date podatke, mogu se napisati dve jednačine

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{v_1^2}{a^2k^2}=1 \quad \text{i} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{v_2^2}{a^2k^2}=1,$$

odakle se konačno dobija $a=\sqrt{\frac{v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2}{v_1^2-v_2^2}}$, $k=\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}$.

2405. $\omega=2\pi\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

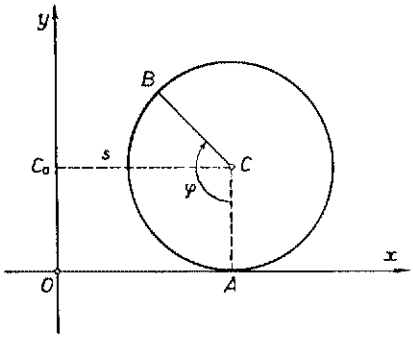
2406. Tačka A se kreće po zakonu puta $s=2t$ a tačka B po zakonu $S=\sqrt{100-s^2}=\sqrt{100-4t^2}$. Kako je $S''=-\frac{2t}{\sqrt{100-4t^2}}$ dobija se za $t=3$, $S=-\frac{2}{3}$ cm/sec.

2407. $v=-\frac{2\pi a}{T}\sin^2\frac{\pi}{T}t$, $\omega=-\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$. **2409.** 14,63 km/čas.

2410. Pređeni put prve kapi je $x_1=\frac{gt^2}{2}$ a brzina $\frac{dx_1}{dt}=gt$ (1). Pređeni put druge kapi je $x_2=\frac{g}{2}(t-0{,}1)^2$ a brzina $\frac{dx_2}{dt}=g(t-0{,}1)$ (2). Iz jednačina (1) i (2) se dobija za $t=1$, $v_1=g$ a $v_2=0{,}9g$, pa je $v_1=v_2=0{,}1g$ cm/sec.

2411. Neka je O dodirna tačka (sl. 237) točka i prave u trenutku $t_0=0$, a A u trenutku t, i neka je B tačka na obimu točka kojom je točak dodirivao pravu u trenutku $t_0=0$. Uslov kotrljanja bez klizanja je dat sa $\overline{OA}=\widehat{AB}$. Kako je put s koji je centar C točka prešao za vreme t jednak $\overline{OA}$ i kako je luk $\widehat{AB}$ jednak $a\varphi$ (φ je izraženo u radijanima), to je $s=a\left(t+\frac{t^2}{2}\right)$, pa je brzina v centra $Cv=s'=\frac{ds}{dt}=a(1+t)$ a njegovo ubrzanje

$$w=s''=\frac{d^2s}{dt^2}=a.$$



Sl. 237

2412. $v=\omega\sqrt{r^2-\frac{d^2}{4}}$.

2413. $x=v_0 t-\frac{gt^2}{2}$, $\frac{dx}{dt}=a-gt$, $\frac{d^2x}{dt^2}=-g$, $t=\frac{a}{g}$, $x=\frac{a^2}{2g}$.

2414. $x=v_0 t\cos\alpha$, $y=v_0 t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$; $v=\sqrt{v_0^2-2v_0 gt\sin\alpha+g^2t^2}$; $\omega=g$; $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

2415. $H=213$ m; $v=395$ m/sec. Koristeći jednačinu kosog hica $y=\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\operatorname{tg}\alpha$.

2416. $t=1$ sec.

2417. Zapremina kalote je $V=\pi H^3\left(R-\frac{h}{3}\right)$. Kako je $\frac{dV}{dt}=a$, biće $\frac{dh}{dt}=\frac{a}{\pi h(2R-h)}=\frac{a}{\pi r^2}$.

2418. $-\frac{p\ln 2}{5540}\approx-0{,}000125p$. **2419.** $\frac{dx}{dt}=k(A-x)$. **2420.** $I=85\,A$.

2421. Korišćenjem obrasca $E=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{dS}{dt}$, gde je S površina kružnog odsečka iznad provodnika l, biće $S=\frac{2a^2\alpha}{2}-\frac{2a^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{a^2}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)$, pa je $\frac{dS}{dt}=a^2(1-\cos 2\alpha)\frac{d\alpha}{dt}=2a^2\sin^2\alpha\frac{d\alpha}{dt}$. Pošto je $a-x=a\cos\alpha$, biće $\frac{dx}{dt}=a\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}$ ili $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{v}{a\sin\alpha}$, dobija se $\frac{dS}{dt}=2av\sin\alpha$. Kako je $l_1=a\sin\alpha$ ili $l_1=\sqrt{d(2a-d)}=a\sin\alpha_1$, konačno se dobija $E=-B\,2av\sin\alpha=-2Bv\sqrt{d(2a-d)}$.

2422. Funkcija $f(x)=x^4-2x^2$, je neprekidna i diferencijalna za svako x pa i za $x\in[0,2]$. Osim toga je $f(0)=f(\sqrt{2})=0$; ξ je rešenje jednačine, $f'(x)=0$, tj. $4x^3-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=\xi=1$, $x_3=-1$; $x_2\in(0,\sqrt{2})$. Na odsečku $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ postoje tri vrednosti ξ za koje je ispunjena Rolleova teorema.

2424. Funkcija je neprekidna za $x\in[-1,1]$ i ispunjava uslov $f(-1)=f(1)=0$, međutim kako je $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, funkcija nema izvod za $x=0\in(-1,1)$ pa ne ispunjava uslov Rolleove teoreme.

2425. Ne postoji $f'(x)$ za $x=0$.

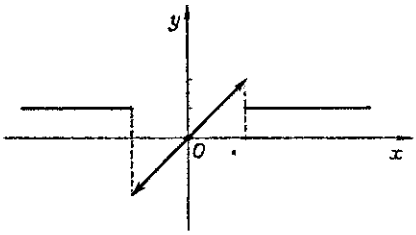
2426. Funkcija $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$ na odsečku $[0,x_0]$ ispunjava uslov Rolleove teoreme, što znači da jednačina $f'(x)=0$ mora imati bar jedno rešenje u intervalu $(0;x_0)$.

2427. $f(x)$ ispunjava uslove Rolleove teoreme na odsečcima $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, znači da jednačina $f'(x)=0$ mora imati korene u intervalima $(0,1)$, $(1,2)$, i $(2,3)$.

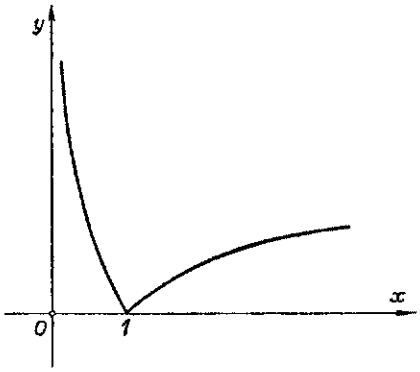
2428. U tački $\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$.

2429. Funkcija je prekidna u desnom kraju intervala [0; 2] (sl. 238).

2430. Funkcija nema izvod u tački $x=1\in\left(\frac{1}{e};\ e\right)$ (sl. 239).



Sl. 238



Sl. 239

2431. a) $\xi=\frac{1}{2}$; b) $\xi=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$; c) $\xi=e-1$.

2432. $P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MM'}}{2}$, $1=2\xi$, $\xi=\frac{1}{2}$; $M\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$, $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{MM'}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$, $P=\frac{1}{8}$ kv. jed.

2433. Pošto je $F(a)=F(b)=0$ (zašto?), to na funkciju $F(x)$ možemo primeniti Rolleovu teoremu: $F'(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}=0$, odakle se dobija $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(\xi)$. $F(x)$ je dvostruka površina trougla AMB, gde je M neka tačka na luku $\widehat{AB}$ krive $y=f(x)$.

2435. Da. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f(0)=0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\varphi(0)=1$, $f'(x)=\cos x$, $\varphi'(x)=-\sin x$,

$-1=\frac{\cos\xi}{-\sin\xi}$, $\operatorname{cotg}\xi=1$, $\xi=\frac{\pi}{4}$.

2436. Primenom Cauchyeve teoreme na funkciju $f(x)$ i x^n na odsečku $[0, x]$ dobijamo $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f'(\theta_1 x)}{n(\theta_1 x)^{n-1}}$, gde je $0<\theta_1<1$. Na istom odsečku primenimo Cauchyevu teoremu na funkcije $f'(\theta_1 x)$ i $n(\theta_1 x)^{n-1}$ imaćemo $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f''(\theta_2 x)}{n(n-1)(\theta_2 x)^{n-2}}$, itd.; posle n uzastopnih primena na n uzastopnih izvoda dobija se: $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$; $0<\theta<1$, $\theta x=\xi$.

2437. $y\log x$, $y'=\frac{\log e}{x}=\frac{0{,}43429}{x}$; $\frac{\log 1000-\log 999}{1000-999}=\frac{\log e}{\xi}$ $999<\xi<1000$; $\log 999=3-\frac{\log e}{\xi}$;

$3-\frac{\log e}{1000}<\log 999<3-\frac{\log e}{999}$; $2{,}99956537<\log 999<2{,}99956571$;

$0{,}99985512<\log\sqrt[3]{999}<0{,}99985523$; $\log\sqrt[3]{999}\approx 0{,}999855$.

2438. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$; $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 1{,}1-\operatorname{arc\,tg} 1}{1{,}1-1}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$; $1<\xi<1{,}1$;

$\operatorname{arc\,tg} 1{,}1=\dfrac{0{,}1}{1+\xi^2}+\dfrac{\pi}{4}$, pošto je $1<\xi<1{,}1$, to je $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg} 1{,}1<\dfrac{0{,}1}{2}+\dfrac{0{,}1}{2{,}21}$;

$\dfrac{\pi}{4}+0{,}05<\operatorname{arc\,tg} 1{,}1<\dfrac{\pi}{4}+0{,}045$; $\operatorname{arc\,tg} 1{,}1\approx\dfrac{\dfrac{\pi}{4}+0{,}05+\dfrac{\pi}{4}}{2}+0{,}045=\dfrac{\pi}{4}+0{,}0475$.

2442. $\theta=\dfrac{h+2\sqrt{x^2+hx}-2x}{4h}$, $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

2443. Oblik $\dfrac{0}{0}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\dfrac{1}{(x+1)}}=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)e^x=1$.

2444. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\operatorname{ch} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{-\operatorname{sh} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{-\operatorname{ch} x}=-1$.

2446. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x^4-2x^2+x-1}{x^7-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4-12x^2+4x+1}{7x^6-4}=-\dfrac{2}{3}$.

2447. ∞. **2448.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=\begin{cases}\infty, & a\leqslant 0\\ 0, & a>0.\end{cases}$ **2449.** 1.

2450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|\alpha x^\alpha|}=\begin{cases}0, & \alpha>0\\ \infty, & \alpha\leqslant 0.\end{cases}$ **2451.** 0. **2452.** 0.

2453. $a^a(\ln a-1)$. **2454.** $a-b$. **2455.** $\ln\dfrac{a}{b}$. **2456.** $\dfrac{\alpha}{\beta}$. **2457.** 0.

2458. $\dfrac{\ln\dfrac{a}{b}}{\ln\dfrac{c}{d}}$. **2459.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **2460.** 2.

2461. Tip $0\cdot\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$.

2462. 2. **2463.** 0. **2464.** 1. **2465.** ∞. **2466.** 1. **2467.** 0.

2468. 0.

2469. Tip $\infty-\infty$. Posle dovođenja na zajednički imenilac i sređivanja, dobija se tip $\dfrac{0}{0}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

2470. $\dfrac{1}{2}$. **2471.** $-\dfrac{1}{2}$. **2472.** $\dfrac{1}{2}$.

2473. Svođenjem na zajednički imenilac, dobija se tip $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{6}$.

2474. -1.

2475. Stavimo: $y=x^x$, odakle je $\ln y=x\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$.

Pošto je $\lim\limits_{x\to 0}y=0$, to mora $y\to 1$, tj. $x^x\to 1$. **2476.** a.

2477. $\frac{1}{e}$. **2478.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$ **2479.** $\frac{1}{e}$. **2480.** e^3. **2481.** 1.

2482. e. **2483.** $\frac{1}{e}$. **2484.** $\frac{1}{5}$.

2486. a) Presek je za $x=1$, $y'=\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}=\infty$.

(Primeniti L'Hospitalovo pravilo na izraz u imeniocu). $\lim\limits_{x\to\infty}y'=0$.

2487. Ne, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, međutim je: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{1+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$.

2488. Ne, 0. **2489.** Ekvivalentne su. **2490.** Drugi.

2492. Raste u intervalu $(-\infty;\ 0)$, opada u intervalu $(0;\ 1)$, raste u intervalu $(1,\ \infty)$.

2493. U intervalu $\left(\frac{k\pi}{2},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ funkcija monotono raste, a u intervalima

$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ monotono opada $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$.

2494. Opada za $x\in(-\infty;\ -1)$ i $x\in(0;\ 1)$, raste za $x\in(-1;\ 0)$ i $x\in(1,\ \infty)$.

2495. Raste u intervalima $\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi\right)$ i

$\left(2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, opada u intervalima $\left(2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$.

2496. Raste u intervalima $\left(2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi\right)$,

opada u intervalima $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$.

2497. Za negativne vrednosti promenljive je dvoznačna. Raste za $x\,(\in 0,\ e)$, opada za $x\in(e,\ \infty)$.

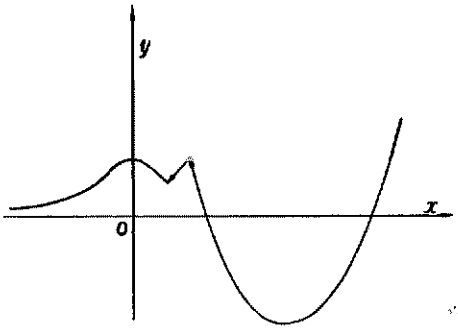
2498. 1° Funkcija je neprekidna i definisana za svako x.

$$2^\circ\ f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, & x<\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{5}, & \dfrac{1}{2}<x<1 \\ 2x-6 & x>1. \end{cases}$$

3° $f'(x)$ ne postoji za: $x_1=\frac{1}{2}$ i $x_2=1$. $f'(x)$ je neprekidna funkcija za: $x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x\in(1, \infty)$. Znak prvog izvoda dat je u sledećoj tablici:

x	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	3	↗
$f'(x)$	+	0	—	ne postoji	+	ne postoji	—	0	+
$f(x)$	↗	max 1	↘	min 4/5	↗	max 1	↘	min −3	↗

4° Za $x\in\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ $\max f(x)=-\frac{3}{4}$, $\min f(x)=-\frac{11}{4}$ (sl. 240).



Sl. 240

2499. $y'=\frac{1}{x}$. Za svako $x>0$ funkcija raste. Za $x\in[2; e]$ $y_{\max}=\ln e=1$.

2500. Da.

2501. $y'=3\sin^2 x\cos x$. Stacionarne tačke su rešenja jednačine $3\sin^2 x\cos x=0$, tj. $x=k\pi$ i $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x\in C$. Kako je $y''=6\sin\cos^2 x-3\sin^3 x$, to je $y''\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-3(-1)^k$, pa su tačke $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ tačke ekstremuma, i to: za k neparno tačke minimuma, a za k parno tačke maksimuma. Pošto je $y''(k\pi)=0$, moramo tražiti vrednost trećeg izvoda za te vrednosti x, $y'''(k\pi)=6(-1)^k$.

2502. $a=-\frac{2}{3}$ i $b=-\frac{1}{6}$.

2503. $m=4k$.

2504. Minimalna vrednost je — 10 a maksimalna 2.

2505. Za $x=\frac{1}{2}$, $y_{\min}=8$.

2506. $y_{\max}=\frac{1}{6}$ za $x=2$, $y_{\min}=-\frac{1}{2}$ za $x=2$.

2507. Maksimalna vrednost je $y_{\max}=\frac{3}{5}$ za $x=2$ a minimalna $y_{\min}=\frac{1}{2}$ za $x=1$.

2508. $y_{\max}=\frac{8a^2}{9}\sqrt{2a}$ za $x=\frac{4a}{3}$; $y_{\min}=0$ za $x=0$.

2509. $y_{\min}=a(1-\ln a)$ za $x=\ln a$. **2510.** $y_{\min}=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_0-a_i)$ za $x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$.

2511. $y_{\max}=\sqrt[4]{e}$ za $x=\sqrt{e}$.

2512. Najmanja vrednost je $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$ a najveća $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$.

2513. Za $x=\frac{1}{2}$ i $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ maksimum, za $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ minimum. Nema najmanje vrednosti.

2514. Za $x=0$ i $x=2\pi$ funkcija ima lokalni maksimum, za $x=\frac{\pi}{2}$ lokalni minimum. Funkcija nema niti najmanje, niti najveće vrednosti.

2515. Za $x=0$ i $x=2\pi$ ima lokalni minimum, za $x=\frac{\pi}{2}$ lokalni maksimum.

2516. Funkcija ima minimum $x=0$. **2517.** Gornja medja je 1 a donja 0.

2518. Treba pokazati da je $\ln x>2\frac{x-1}{x+1}$ za $x>1$.

2520. Iz intervala $\left(-\sqrt{2}-\frac{3}{2},\ \sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)$. **2523.** Posmatrajmo funkciju $f(x)=\sqrt[4]{x}-2x$.

2531. Pretpostavimo prvo da je $a>b$, tada nejednačina može da se napiše u obliku $a\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^{1/x}>a\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^y\right]^{1/y}$ odnosno $\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^{1/x}>\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^y\right]^{1/y}$, odakle se očigledno vidi da je tvrđenje tačno. Na isti se način može dokazati nejednakost za slučaj kada je $b>a$.

2532. $y''=60x-60x^4$; $y''=0$ za $x=0$ i $x=1$.

2533. Za $x=-\sqrt[3]{2}$. **2534.** $x=k\pi$; $k\in C$.

2535. Za $x=k\pi$, $k\in C$. **2536.** $\left(2,\ \frac{2}{e}\right)$. **2537.** Za $x=a$.

2538. Drugi izvod je pozitivan za $x\in(-\sqrt{3},\ 0)\cup(\sqrt{3},\ \infty)$, a negativan za $x\in(-\infty,\ -\sqrt{3})\cup(0,\ \sqrt{3})$. Za $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ i $x=\sqrt{3}$. Kriva ima prevojne tačke.

2539. Drugi izvod je pozitivan za $x\in(2,\ \infty)$ a negativan za $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,2)$. Prevojna tačka krive je $x=2$.

2540. Drugi izvod je pozitivan za $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ a negativan za sve ostale vrednosti promenljive. Prevojne tačke krive su $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$.

2541. Drugi izvod je negativan za $x\in(-\infty,\ 0)$, a pozitivan za $x\in(0,\ \infty)$. Prevojna tačka krive je $x=0$.

2542. Drugi izvod je negativan za $x\in(-\infty,\ 0)$, a pozitivan za $x\in(2,\ \infty)$.

2543. $a=-\frac{20}{3}$, $b=\frac{4}{3}$. Druge prevojne tačke su (0,0), (−2, −2,5).

2544. $a=-2$, $b=2$. **2545.** $a=1$, $b=-4$. **2546.** $y=\frac{3}{2}x$, u (0, −1).

2547. $y=\frac{1}{4}\,\frac{x^2+1}{x^2}$. **2548.** $y=2xe^{-x}-1$. **2549.** $y=-x^2$.

2551. $y^2(4-x^4)=4$. **2552.** $Y=2(x+1)X-x^2$, $Y-x^2-2x=-\frac{1}{2(x+1)}(X-x)$.

2553. 1° $y-x+5=0$; 2° $y=3x-4$; 3° $36y+24x+149=0$. **2554.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{17}{4}\right)$.

2555. 1° $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$; 2° $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$. **2556.** $k=1$, (1,2).

2557. $y=4x$, $y=-4x$, $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{8}{15}\right)$. **2558.** $y+x=0$, (1, −1).

2559. $y=x^2-2x+3$. **2560.** $a=\frac{1}{2}$. **2561.** $\left(-4x^3,\ \frac{6x^2+1}{2}\right)$.

2566. $(p/3)^3+(q/2)^2=0$.

2568. 1° $Xx+Yy=a^2$; 2° $Yy=p(X+x)$; 3° $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1$; 4° $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1$.

2569. $6\cdot d=\left|\frac{-2ax}{\sqrt{a^4+4x^2}}\right|$. **2571.** $y=x$. **2573.** $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$, $x-4y=0$.

2574. $n=9$, $n=1$. **2575.** $y=x$.

2577. Neka je t apscisa tačke A na krivoj (1) $y=\frac{x^2}{a}$, njena ordinata je onda $y=\frac{t^3}{a}$. Jednačina tangente je $y-\frac{t^3}{a}=3\frac{t^2}{a}(x-t)$ (2). Rešavanjem jednačina (1) i (2) dobiće se presečna tačka krive i tangente. Iz ove dve jednačine dobija se $\frac{x^3}{a}-\frac{t^3}{a}=3\frac{x^2}{a}(x-t)$, odakle je dalje $(x-t)(x-t)(x+2t)=0$, pa je apscisa presečne tačke $x=-2t$ a odgovarajuća ordinata $y=-\frac{8t^3}{a}$. Koordinate sredine duži su $u=\frac{t-2t}{2}=-\frac{t}{2}$, $v=\frac{\frac{t^3}{a}-\frac{8t^3}{a}}{2}=-\frac{7}{2a}t^3$. Eliminacijom parametra t iz zadnje dve jednačine dobija se jednačina skupa tačaka $y=\frac{28}{a}x^3$.

2578. Radeći slično kao u prethodnom zadatku, dobija se da je apscisa presečne tačke $x_s = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

2579. $\left(-\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\right)$. **2582.** $(a, \pm a\sqrt{2})$.

2583. $x-y=0$.

2584. 1° Ako je k koeficijenat pravca date prave, onda mora biti ispunjen uslov $\frac{2x-y}{x+2y}=k$. Koordinate traženih tačaka dobijaju se rešavanjem sistema jednačina $x^2-xy+y^2-1=0$ i $\frac{2x-y}{x+2y}=k$. Na taj način dolazi se do jednačine $x^2(7k^2-3k+3)=(2k+3)^2$. Kako je za svako k $7k^2-3k+3>0$, to zadnja jednačina ima za svako k dva različita realna korena. Otuda svaka prava može biti uzeta za datu pravu; 2° Jednačina normale je $x-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$. Pošto mora biti ispunjen uslov $X=Y=0$, jednačina normale dobija oblik $x+yy'=0$ ili $x+y\frac{2x-y}{x+2y}=0$, odakle je konačno $y^2-4xy-x^2=0$. Rešavanjem jednačina $x^2-xy+y^2-1=0$ i $y^2-4xy-x^2=0$ dobijaju se koordinate traženih tačaka

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{8+3\sqrt{5}}},\quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{8+3\sqrt{5}}},\quad x_3=\frac{1}{\sqrt{8-3\sqrt{5}}},\quad x_4=-\frac{1}{\sqrt{8-3\sqrt{5}}}.$$

2585. $y-\frac{\alpha-1}{\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}}x=e^{\frac{1}{\alpha}}$. Granični položaj tangente je $y-x=1$.

2588. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{|a|}$. **2590.** $\lambda\in(-\infty, -4)\cup(0, \infty)$. **2591.** $y+\frac{5}{2\sqrt{e^5}}=\frac{2}{3}(x-\sqrt{e^5})$.

2592. 1° $y=x$, $y=1$; 2° $y=1$, $y+x=\frac{\pi}{2}$.

2593. $y+x=1$. **2594.** Jednačina tangente je $y=0$, normale $x-2\pi=0$.

2595. $\frac{\pi}{2}$. **2596.** $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$.

2597. $y+4x-6=0$; $4y-x-7=0$. **2598.** $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$, $x=0$.

2599. Kako je $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}$, onda mora biti $t^2-3t+2=0$, odakle je $t_1=1$ i $t_2=2$. Tražene tačke su (4, 3) i (3, 7).

2602. Rešavanjem problem se svodi na jednačinu $u^4-8u^3+14u^2-40u+1=0$. Nije teško utvrditi da zadnja jednačina ima četiri realna rešenja po u, pa, prema tome, postoje četiri prave, koje su istovremeno tangente i normale date krive.

2603. $y=2,\ x=1.$ **2604.** $y=1+x\ln a.$ **2605.** 9.

2611. $d=\dfrac{a}{\sqrt{1+k^2}}e^{k\varphi}.$ **2612.** $d_1 d_2=b^2.$

2613. Dužina odsečka je $d=2ab(b^2\cos^2 t_1+a^2\sin^2 t_1)\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t_1+b^2\cos^2 t_1}$ odnosno $d=2ab(b^2\cos^2 t_1+a^2\sin^2 t_1)^{3/2}.$

2615. Ako tri tačke Dekartovog lista leže na jednoj pravoj, onda se može pokazati da važi jednakost $t_1 t_2 t_3=-1$. Koristiti ovu vezu pri izvođenju dokaza.

2617. $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(-3).$ **2619.** $a=\dfrac{1}{4}.$ **2621.** 1° $\alpha=45°$. 2° $\alpha=60°$. 3° $\alpha=30°$.

2622. $A=a.$ **2623.** 40° 54′ ili 139° 6′.

2624. 1° $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(2\sqrt{2})$. 2° $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(-2\sqrt{2})$.

2625. $a=e^{\frac{1}{e}}.$ **2626.** $a=\dfrac{1}{2e};\ \left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right).$

2628. Ako se krive $y=e^{kx}\sin mx$ i $y=e^{kx}$ dodiruju, onda moraju istovremeno biti ispunjeni uslovi $e^{kx}\sin mx=e^{kx}$ odnosno (1) $\sin mx=1$ i $k\sin mx+m\cos mx=k$ odnosno (2) $\cos mx=0$. Jednačine (1) i (2) su identične, a to je i trebalo dokazati. Na isti način se dokazuje da se krive $y=e^{kx}\sin mx$ i $y=-e^{kx}$ takođe dodiruju u zajedničkim tačkama.

2630. $n>57{,}3.$ **2631.** Krive se seku u dvema tačkama pod uglom $\alpha_1=\alpha_2=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{41}{2}\right).$

2632. Krive imaju tri zajedničke tačke. Seku se pod uglom $\alpha_1=\alpha_2=30°$ i $\alpha_3=0$.

2633. $\alpha=90°.$ **2635.** $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{3}bt^2=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{3}\varphi.$ **2637.** 1° 0; 2° 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.

2638. Koristeći obrazac $T=\left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$, gde je $y'=\dfrac{y_t'}{x_t'}$, dobija se $y_x'=\operatorname{tg} t$, ili konačno $T=a\cos t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=a$, što je i trebalo dokazati.

2648. Dužina tangente $T=\left|\dfrac{y}{\sin\frac{3}{3}t}\right|$; dužina normale $N=\left|\dfrac{y}{\cos\frac{3}{2}t}\right|$;

dužina subtangente $S_t=\left|y\operatorname{ctg}\dfrac{3}{4}t\right|$ i dužina subnormale $S_n=\left|y\operatorname{tg}\dfrac{3}{2}t\right|$.

2652. $\dfrac{\rho}{\ln a};\ \rho\ln a.$

2654. $x-\alpha y+k\alpha^2=0,\ x\alpha+y-2k\alpha-k\alpha^3=0;$ 2° $x-\dfrac{y}{m}=k(m+2)$, gde je $m=\alpha+\beta$.

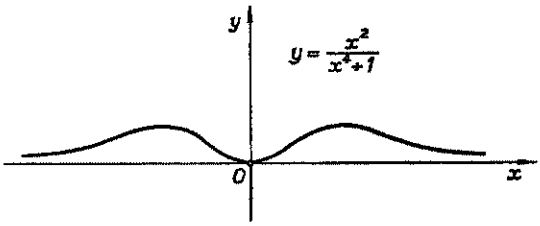
2655. 1° $y^2=\dfrac{1}{2}px;$ 2° $y\sqrt{a^2-x^2}+x^2=0.$ **2656.** $x=0$, tangenta u temenu parabole.

2657. Jednačina tangente krive je $Xx-Yy=a^2$ a jednačina normale povučene iz koordinatnog početka na tangentu je $Xx+Yy=0$. Eliminacijom parametara x i y iz ovih jednačina dobija se jednačina $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$, koja predstavlja jednačinu lemniskate.

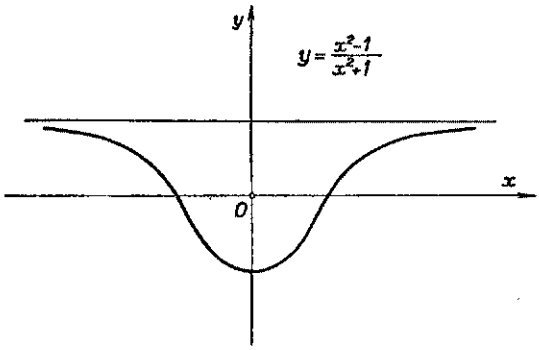
2658. Logaritamska spirala. **2659.** Arhimedova spirala.

2660. $x^2+y^2=a^2-b^2,\ a^2>b^2.$ **2661.** $2(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2.$

2730. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Pošto je funkcija parna, njen grafik je simetričan u odnosu na Oy osu. Nula funkcije je $x=0$. Ima maksimum u tačkama $x=1$ i $x=-1$. Asimptota je $y=0$ (sl. 256).



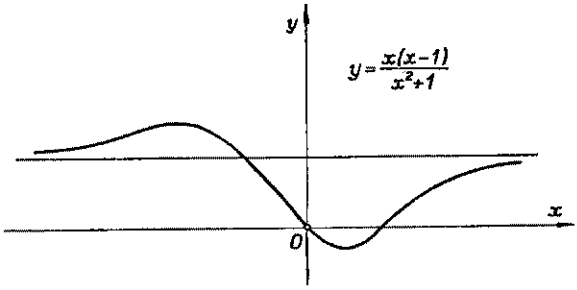
Sl. 256



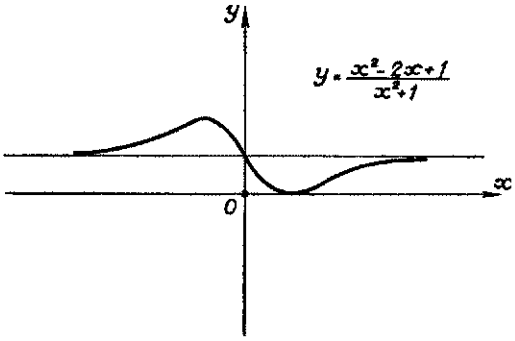
Sl. 257

2731. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nule su $x=\pm 1$. Funkcija je parna pa je grafik simetričan u odnosu na Oy osu. Ima minimum u tački $x=0$. Kriva ima dve prevojne tačke. Asimptota je $y=1$ (sl. 257).

2732. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nule funkcije su $x=0$ i $x=1$. Ima tri prevojne tačke. Ekstremne vrednosti dostiže za $x=-1+\sqrt{2}$ i $x=-1-\sqrt{2}$. Asimptota je prava $y=1$ (sl. 258).



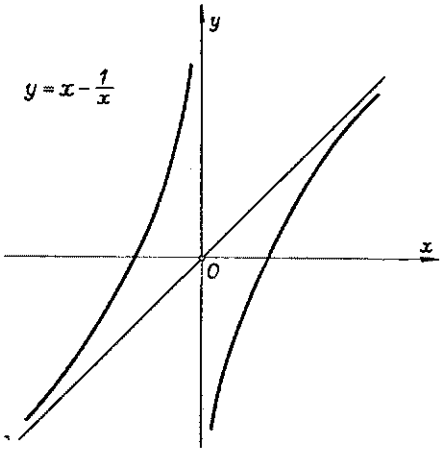
Sl. 258



Sl. 259

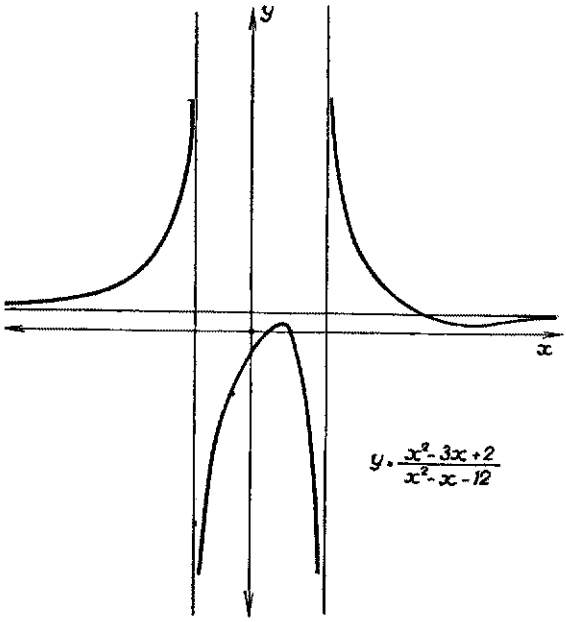
2733. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Ima nulu drugog reda $x_1=x_2=1$. Ima maksimum za $x=-1$ a minimum za $x=1$. Asimptota je $y=1$ (sl. 259).

2734. Nije definisana za $x=0$. Nule su $x=\pm 1$. Funkcija je monotono rastuća za sve vrednosti $x\neq 0$. Ekstremnih vrednosti nema. Asimptote krive su $y=x$ i $x=0$ (sl. 260).

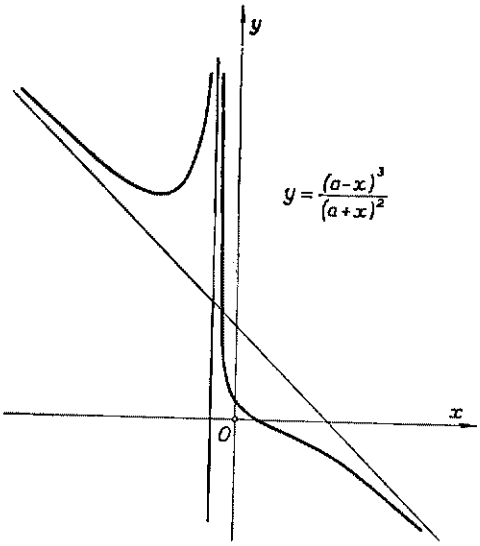


Sl. 260

2735. Nije definisana za $x=-3$ i $x=4$. Nule funkcije su $x_1=1$ i $x_2=2$. Ima ekstremne vrednosti za $x_1\approx 1{,}52$ i $x_2\approx 12{,}48$. Asimptote su: $x=-3$, $x=4$ i $y=1$ (sl. 261).



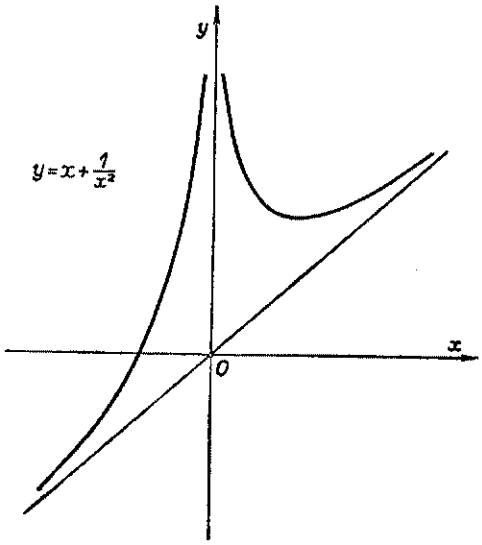
Sl. 261



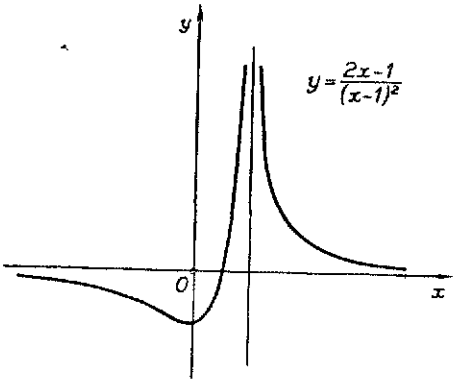
Sl. 262

2736. Nije definisana u tački $x=-a$. Nula funkcije je $x=a$. Ima jedan minimum za $x=-5a$. Prevojna tačka je $(a, 0)$. Asimptote su prave: $x=-a$ i $y=-x+5a$ (sl. 262).

2737. Definisana je za sve vrednosti promenljive, sem za $x=0$. Nula funkcije je $x=-1$. Ima minimum za $x=\sqrt[3]{2}$. Asimptote su: $x=0$ i $y=x$ (sl. 263).

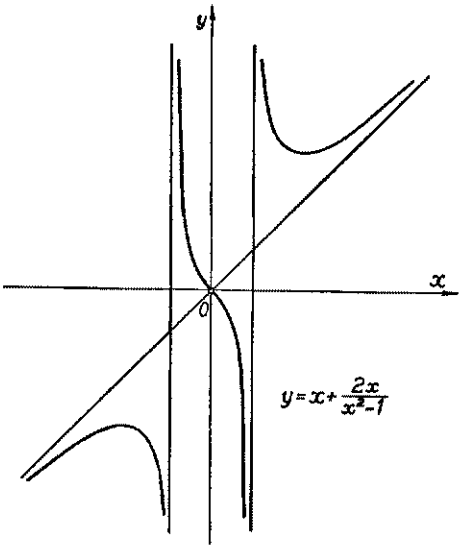


Sl. 263



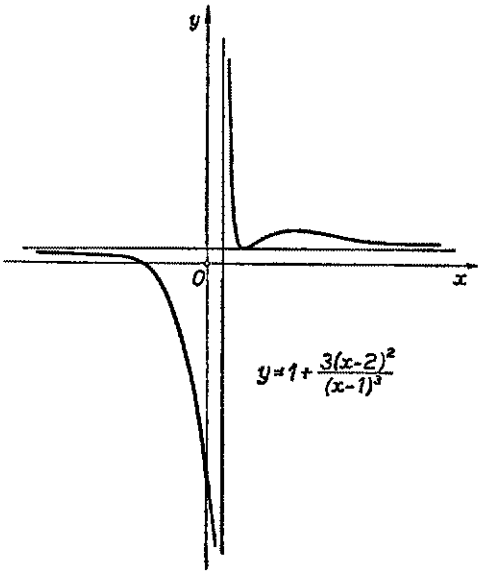
Sl. 264

2738. Definisana je za sve vrednosti promenljive sem za $x=1$. Grafik seče koordinatne ose u tačkama $(0, -1)$ i $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Ima ekstremnu vrednost za $x=0$. Prevojna tačka je $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$. Asimptote su $y=0$ i $x=1$ (sl. 264).



Sl. 265

2740. Definisana je za sve vrednosti promenljive, sem za $x=1$. Nule funkcije su $x=-1$ i $x=4$. Ekstremnih vrednosti nema. Funkcija je monotono rastuća za sve vrednosti promenljive. Asimptote su: $y=x-2$ i $x=1$ (sl. 266).

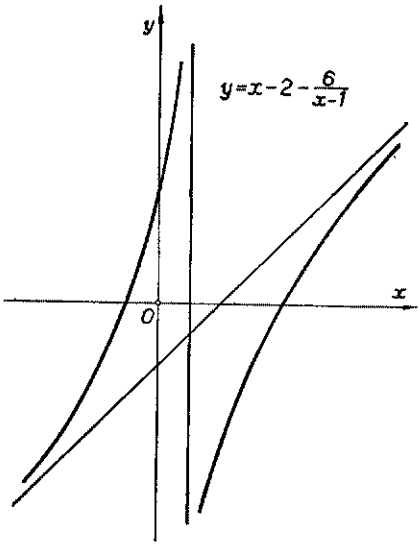


Sl. 267

2739. Nije definisana za $x=\pm 1$. Nula funkcije je $x=0$. Ekstremne vrednosti ima za

$$x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

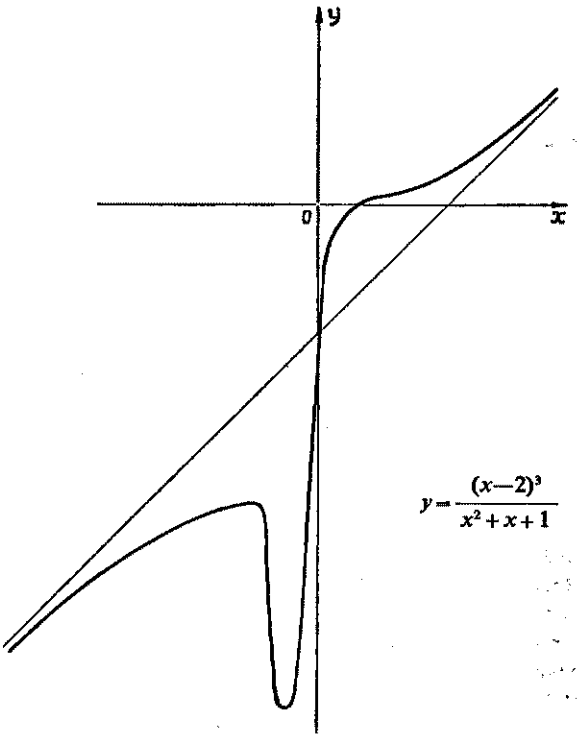
Asimptote su: $y=x$ i $x=\pm 1$ (sl. 265).



Sl. 266

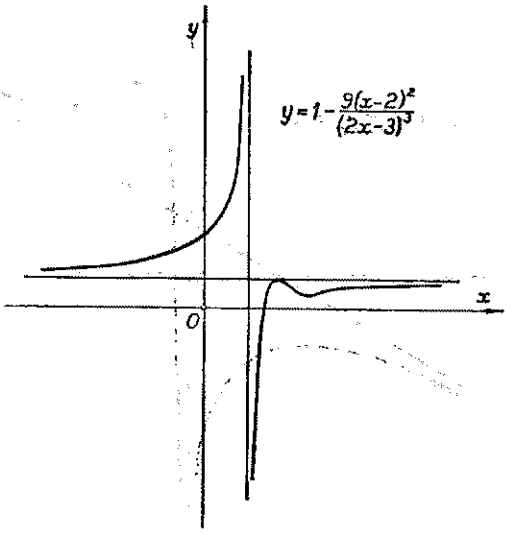
2741. Definisana je za sve vrednosti promenljive, sem za $x=1$. Kriva seče koordinatne ose u dvema tačkama. Za $x=2$ funkcija ima minimum, a za $x=4$ maksimum. Asimptote su $y=1$ i $x=1$ (sl. 267).

2742. Definisana je za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Ima nulu trećeg reda za $x=2$. Kriva seče y osu u tački $(0, -\infty)$. Asimptota je prava $y=x-7$. Ima ekstremne vrednosti za $x=-1$ i $x=-5$ (sl. 268).

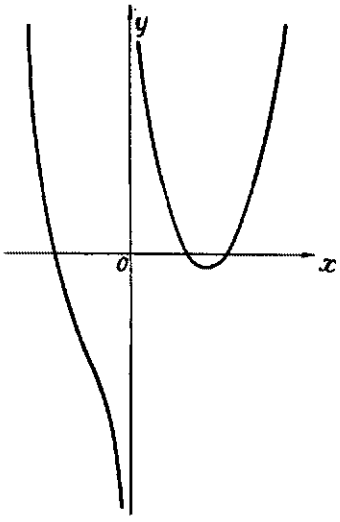


Sl. 268

2743. Definisana je za sve vrednosti promenljive, sem za $x=\frac{3}{2}$. Nula funkcije je $x_1 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Za $x=2$ ima maksimum a za $x=3$ minimum. Asimptote su $y=1$ i $x=\frac{3}{2}$ (sl. 269).



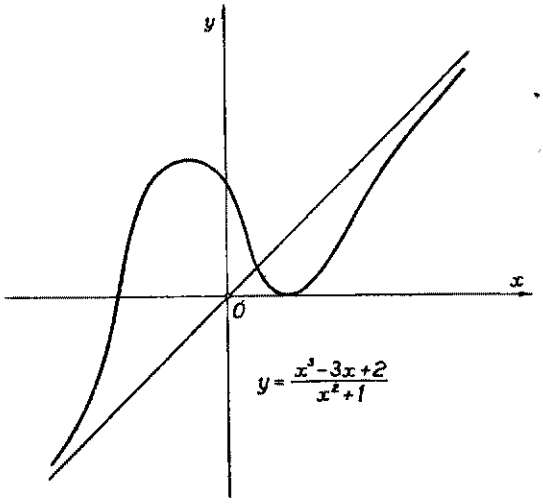
Sl. 269



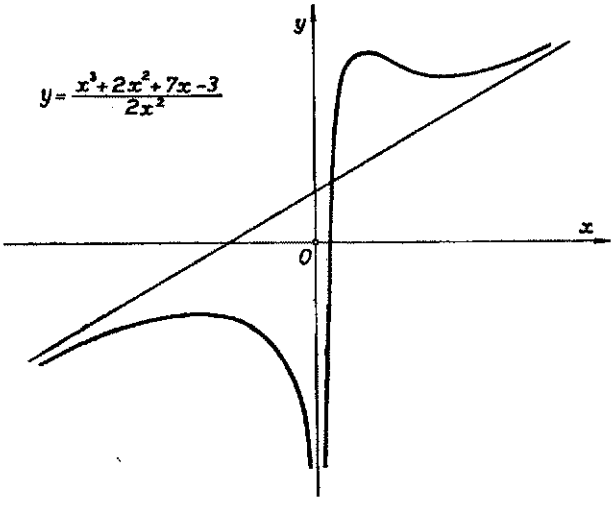
Sl. 270

2744. Definisana je za sve vrednosti $x \neq 0$. Nule funkcije su $x=1$ i $x=\pm\sqrt{2}$. Ima minimum za $x_1 \in (1, \sqrt{2})$. Ima jednu prevojnu tačku koja se može približno odrediti. Ima krivolinijsku asimptotu $y=x^2-x-2$ (sl. 270).

2745. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Ima dvostruku nulu $x=1$ i prostu nulu $x=-2$. Ima minimum za $x=1$, maksimum za $x_1 \in (-1, 0)$. Asimptota je $y=x$ (sl. 271).

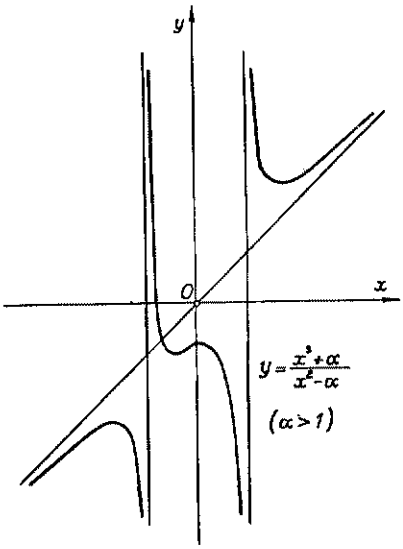


Sl. 271



Sl. 272

2746. Definisana je za $x \neq 0$. Položaj presečne tačke krive sa Ox osom može se približno odrediti. Ima maksimum u tačkama $x=-3$ i $x=1$ a minimum za $x=2$. Prevojna tačka je $x=\frac{9}{7}$. Asimptote su: $y=\frac{x}{2}+1$ i $x=0$ (sl. 272).



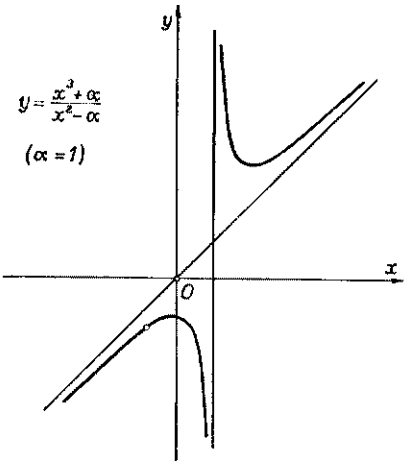
Sl. 273

2747. Definisana je za svako $x \neq \pm\sqrt{\alpha}$. Nula funkcije je $x=\sqrt[3]{\alpha}$. Asimptota je $y=x$. U zavisnosti od toga da li je $\alpha>1$, $\alpha=1$ ili $\alpha<1$, treba razlikovati sledeće slučajeve:

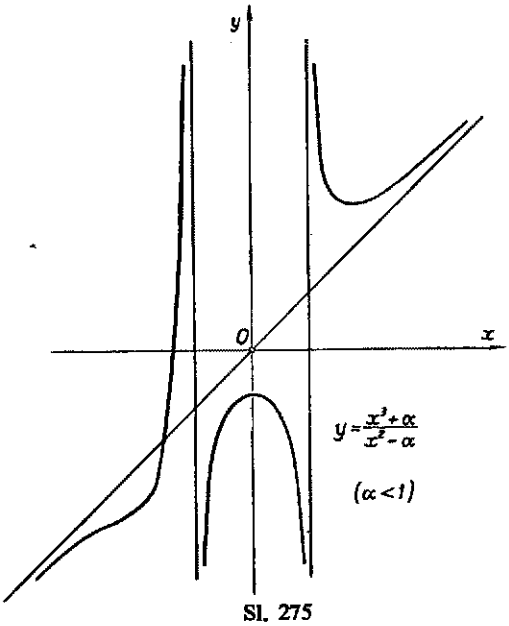
1° $\alpha>1$. Ima četiri ekstremuma, od kojih jedan za $x=0$ (sl. 273).

2° $\alpha=1$. Ima dve ekstremne vrednosti za $x=0$ i $x>1$ (sl. 274).

3° $\alpha<1$. Ima dve ekstremne vrednosti za $x=0$ i $x>1$ (275). Čitalac će ispitati funkciju za $\alpha<0$.



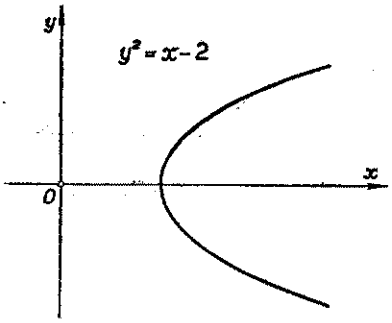
Sl. 274



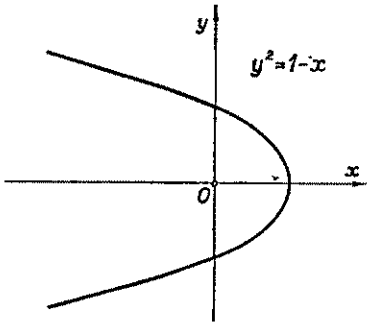
Sl. 275

2748. Definisana je u intervalu $[2,+\infty)$. Nema eksremnih vrednosti. Asimptota nema (sl. 276).

2749. Definisana je u intervalu $(-\infty, 1]$. Nema ekstremuma ni prevojnih tačaka (sl. 277).

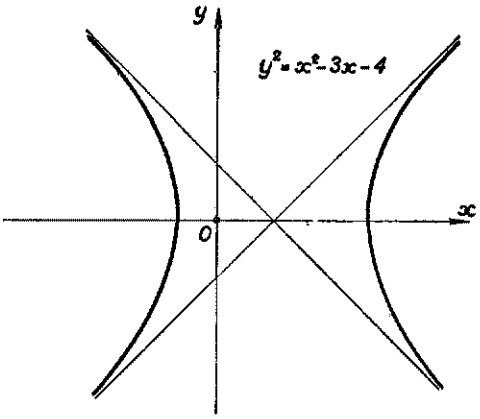


Sl. 276

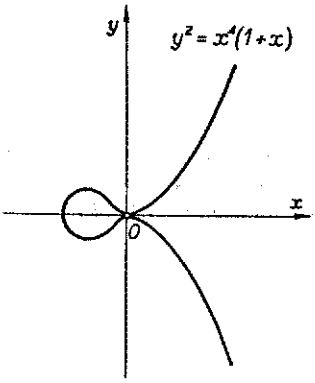


Sl. 277

2750. Nije definisana u intervalu $(-1, 4)$. Nema ekstremnih vrednosti niti prevojnih tačaka. Asimptote su $y = \pm x \pm \frac{3}{2}$ (sl. 278).



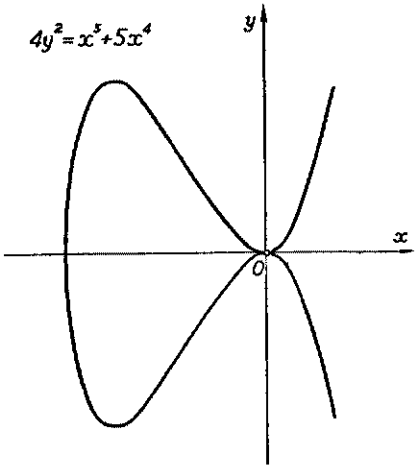
Sl. 278



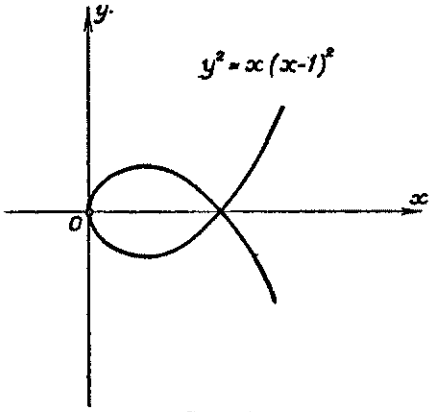
Sl. 279

2751. Definisana je za $x \geqslant -1$ i dvoznačna. Ima ekstremume u tačkama $x = -\frac{4}{5}$ i $x = 0$. Prevojne tačke su: $\left(-\frac{2}{5};\ \pm\frac{4}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. Asimptota nema (sl. 279).

2752. Definisana je za $x \in [-5, \infty)$. Dve grane krive dobijaju se u tački (0, 0). Ekstremne vrednosti su $y_{max} = 8$ za $x = -4$ i $y_{min} = 0$ za $x = 0$ (sl. 280).



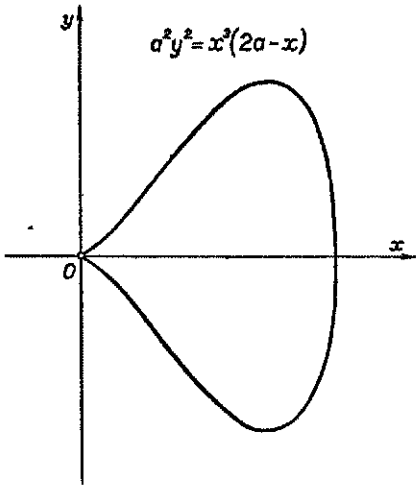
Sl. 280



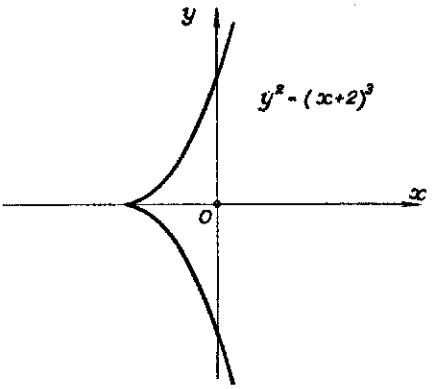
Sl. 281

2753. Definisana je za $x > 0$. Ima ekstremnu vrednost u tački $x = \frac{1}{3}$. Nema prevojnih tačaka. Asimptota nema (sl. 281).

2754. Definisana je za $x \in [0, 2a]$. Nule funkcije su $x = 0$ i $x = 2a$. Tačka (0, 0) je povratna tačka. Ekstremne vrednosti funkcije su $y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$ za $x = \frac{3a}{4}$ (sl. 282).



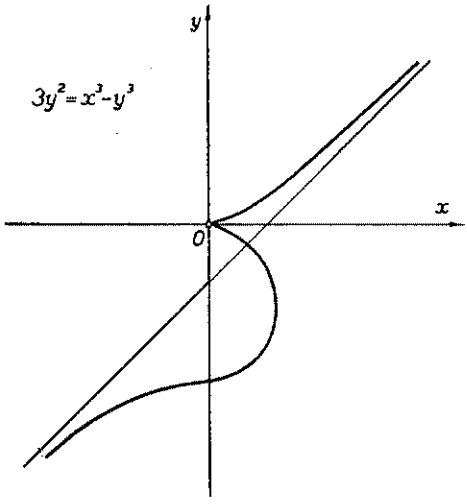
Sl. 282



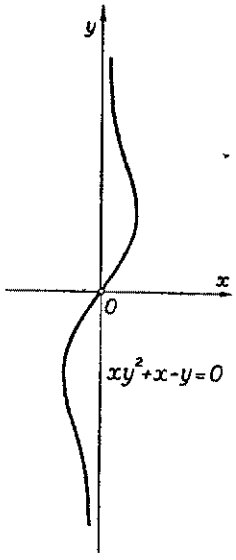
Sl. 283

2755. Definisana je za $x \in (-\infty, -2]$. Ima nulu $x = -2$. Nema ekstremuma. Povratna tačka je (−2, 0). Asimptota nema (sl. 283).

4756. Definisana je za $x \in (-\infty, 8)$. Kriva seče ose u tačkama (0, 0) i (0, −3). Tačka (0; 0) je povratna tačka. Ekstremna vrednost funkcije $x = \varphi(y)$ je $x = \sqrt[3]{4}$ za $y = -2$. Asimptota je prava $y = x - 1$ (sl. 284).



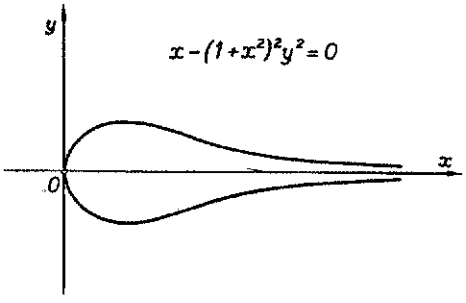
Sl. 284



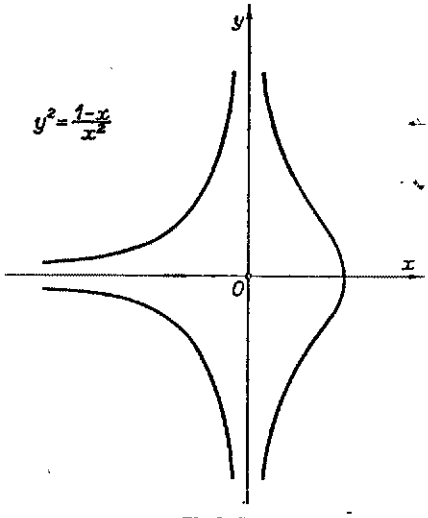
Sl. 285

4757. Definisana je u intervalu $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ako je $x = \varphi(y)$, onda funkcija ima ekstremume za $y = -1$ i $y = 1$. Kriva ima dve prevojne tačke za $y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Asimptota je $x = 0$ (sl. 285).

4758. Definisana je za svako $x \geqslant 0$. Nula funkcije je $x = 0$. Ima ekstremum za $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Prevojna tačka je $x = \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{24}}{15}}$. Asimptota je $y = 0$ (sl. 286).

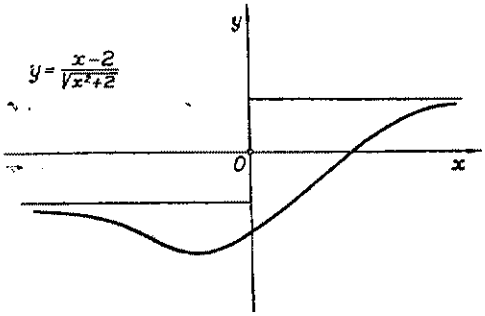


Sl. 286



Sl. 287

2759. Definisana je u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, 1]$. Nula funkcije je $x=0$. Ekstremnih vrednosti nema. Kriva ima prevojnu tačku za $x_1 \in (0, 1)$. Asimptote su $x=0$ i $y=0$ (sl. 287).



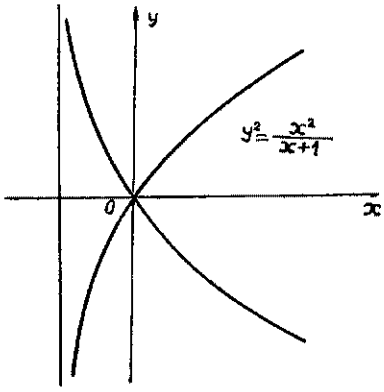
Sl. 288

2760. Definisana je za svako $x \in (-\infty; \infty)$. Presečne tačke grafika sa osama su $(2, 0)$ i $(0, -\sqrt{2})$. Ima minimum za $x=-1$. Prevojne tačke su:

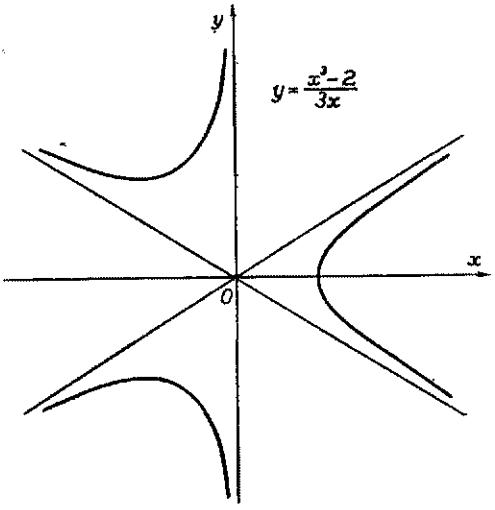
$$\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ i } \left(-2, -\frac{2}{3}\sqrt{6}\right).$$

Asimptote su $y=1$ i $y=-1$ (sl. 288).

2761. Definisana je u intervalu $(-1; \infty)$. Nula funkcije je $x=-0$. Ekstremuma nema. Dvoznačna je. Asimptota je $x=-1$ (sl. 289).



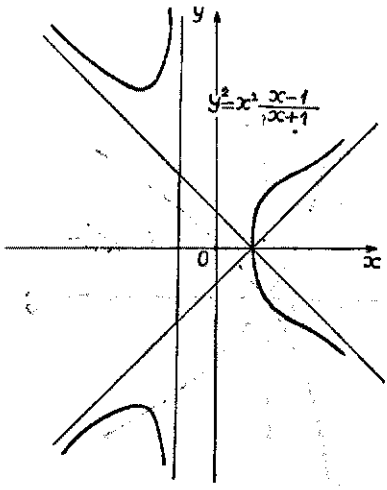
Sl. 289



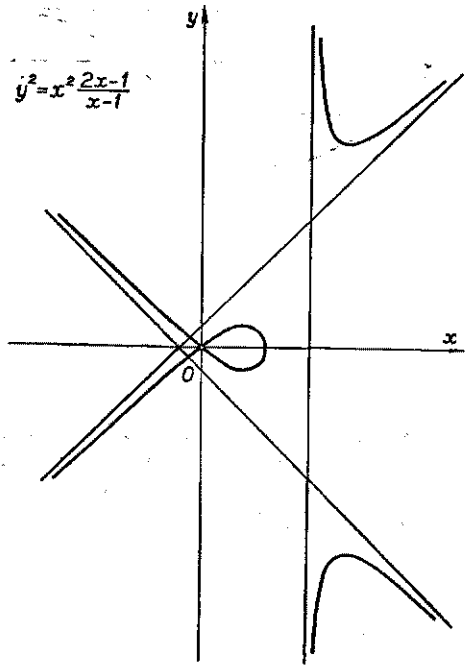
Sl. 290

2762. Definisana je za $x<0$ i $x>\sqrt[3]{2}$. Nula funkcije $x=\sqrt[3]{2}$. Ima ekstremum za $x=-1$. Dvoznačna je. Asimptote su $x=0$ i $y=\pm x\frac{\sqrt{2}}{2}$ (sl. 290).

2763. Definisana je za $x\in(-\infty, -1)$ i $x\in[1, \infty)$. Nule funkcije su $x=0$ i $x=1$. Ima ekstremne vrednosti za $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Prevojne tačke su $\left(2, +\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$. Funkcija je dvoznačna. Asimptote krive su $x=-1$ i $y=\pm x\pm 1$. Tačka (0, 0) je izolovana tačka (sl. 291).



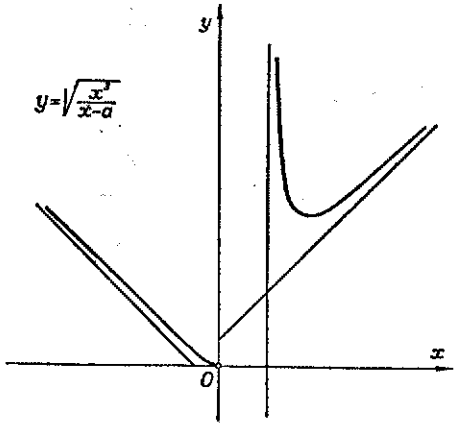
Sl. 291



Sl. 292

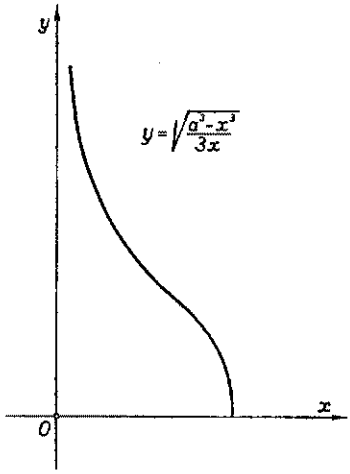
2764. Funkcija je definisana za $x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ i $x\in(1, \infty)$. Nule funkcije su $x=0$ i $x=\frac{1}{2}$. Ima ekstremume za $x=\frac{7-\sqrt{17}}{8}$ i $x=\frac{7+\sqrt{17}}{8}$. Dvoznačna je. Asimptote su $x=1$ i $y=\pm x\sqrt{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (sl. 292).

2765. Definisana je za $x\in(-\infty, 0]$ $x\in(a, \infty)$. Nula funkcije je $x=0$. Ima ekstremnu vrednost u tački $x=\frac{3a}{2}$. Prevojnih tačaka nema. Asimptote su $y=x+\frac{a}{2}$ i $y=-x-\frac{a}{2}$ (sl. 293).

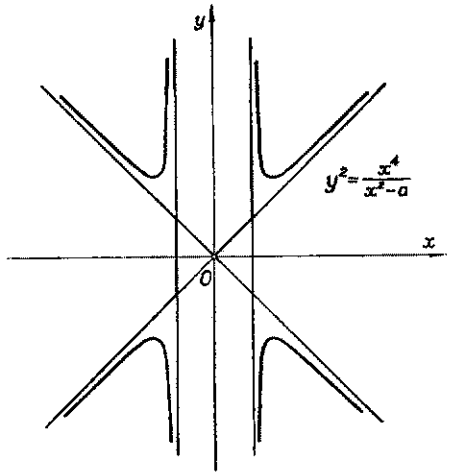


Sl. 293

2766. Definisana je za $x \in (0, a]$. Nula funkcije je $x = a$. Prevojna tačka je $y = x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$. Ima asimptotu $x = 0$ (sl. 294).

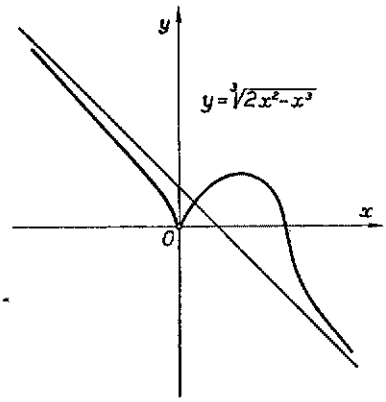


Sl. 294

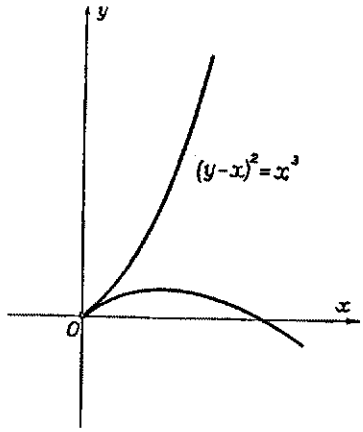


Sl. 295

2767. Definisana je za $|x| > a$. Tačka (0, 0) je izolovana tačka. Ima ekstremne vrednosti u tačkama $(\pm a\sqrt{2}, \pm 2a)$. Asimptote su $x = \pm a$ i $y = \pm x$ (sl. 295).



Sl. 296

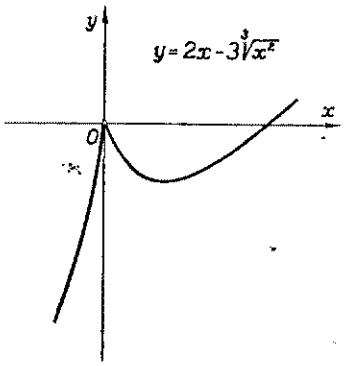


Sl. 297

2768. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Za $x = 0$ ima minimum, a za $x = \frac{4}{3}$ maksimum. Drugi izvod funkcije menja znak za $x = 2$. Asimptota je $y = -x + \frac{2}{3}$ (sl. 296).

2769. Definisana je za $x \in [0, \infty)$. Nule funkcije su $x = 0$ i $x = 1$. Ekstremna vrednost funkcije je $y = \frac{4}{27}$ za $x = \frac{4}{9}$. Povratna tačka prvog reda je (0; 0) u kojoj je tangenta $y = x$. Asimptota nema (sl. 297).

2770. Definisana je za $x \in (-\infty, \infty)$. Grafik funkcije seče koordinatne ose u tačkama $(0, 0)$ i $\left(\frac{27}{8}, 0\right)$. Povratna tačka je $(0, 0)$. Ima minimum u tački $x=1$. Asimptota nema (sl. 298).



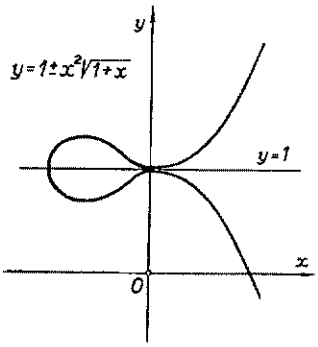
Sl. 298

2771. Definisana je za svako $x \geqslant -1$. Ima nulu prvog reda u intervalu $(0; 1)$. Funkcija ima ekstremne vrednosti za $x=0$ i $x=-\frac{4}{5}$. Dvoznačna je. Asimptota nema (sl. 299).

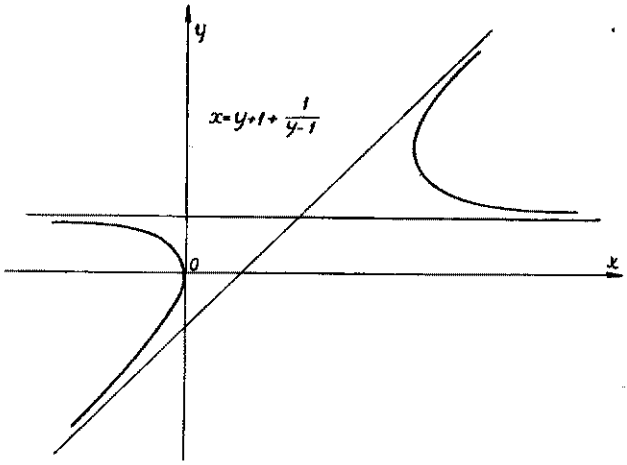
2772. Definisana je za $x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$. Kriva seče apscisnu osu u tački $x=0$. Asimptote su $y=1$ i $y=x-1$. Funkcija ima ekstremne vrednosti za $y=0$ i $y=2$ (sl. 300).

2773. Definisana je za sve vrednosti promenljive. Nule funkcije su $x=0$ i $x=1$. Ima maksimum za $x=\frac{1}{2}$.

Asimptota nema (sl. 301).



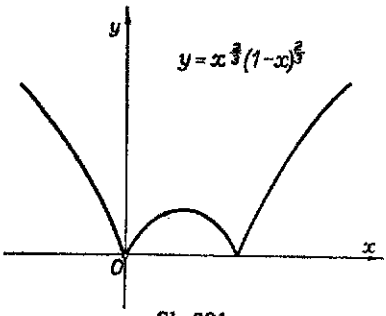
Sl. 299



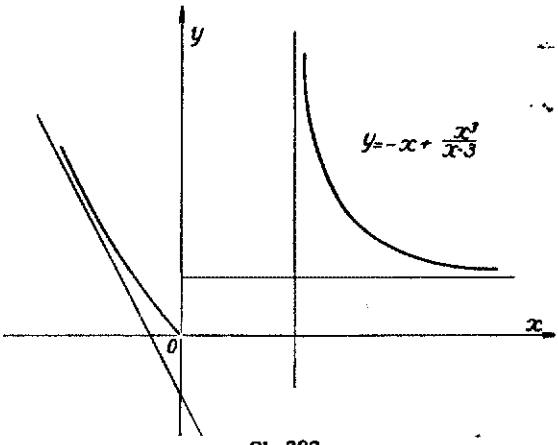
Sl. 300

2774. Definisana je za $x \in (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$. Ima prostu nulu $x=0$. Ima minimum za $x=0$.

Asimptote su $x=3$; $y=\frac{3}{2}$ i $y=-2x-\frac{3}{2}$ (sl. 302).



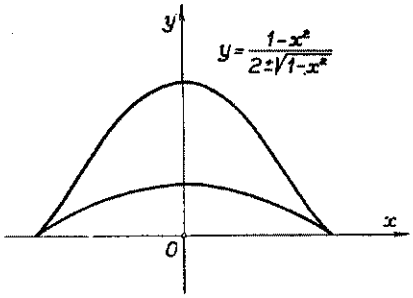
Sl. 301



Sl. 302

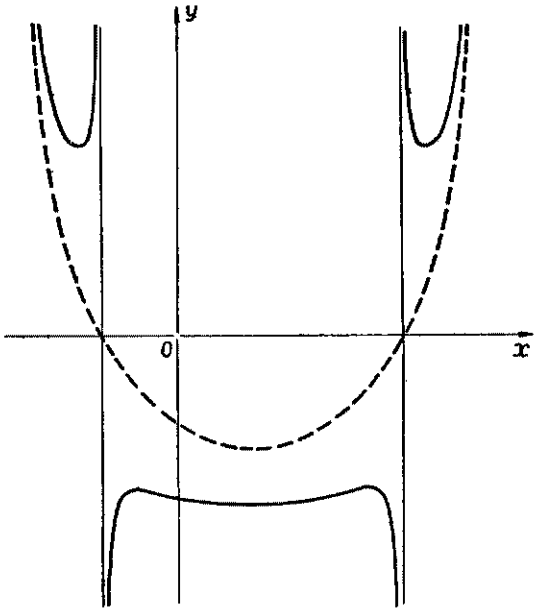
2775. Definisana je za $x \in [-1, 1]$, Dvoznačna je. Nule funkcije su $x=-1$ i $x=1$. Ima maksimum za $x=0$ (sl. 303).

2776. Definisana je za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,3) \cup (3, \infty)$. Ima ekstremne vrednosti za $x=1-\sqrt{5}$, $x=1-\sqrt{3}$, $x=1$, $x=1+\sqrt{3}$, $x=1+\sqrt{5}$. Kriva ima dve asimptote $x=-1$ i $x=3$ (sl. 304).



Sl. 303

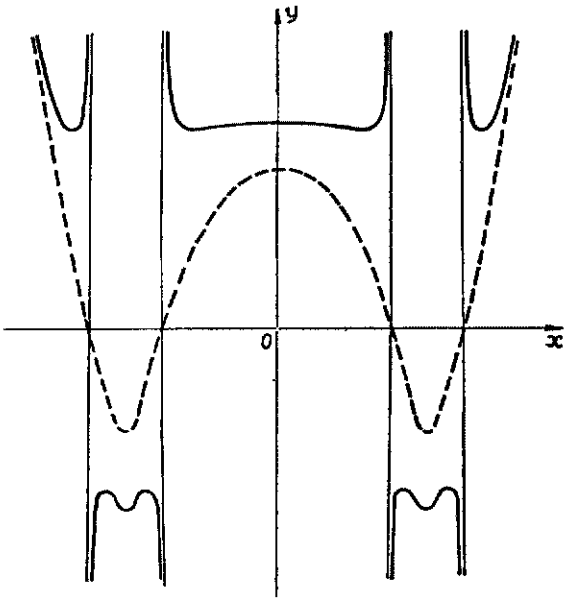
$$y=\sqrt[3]{x^2-2x-3}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x-3}}$$



Sl. 304

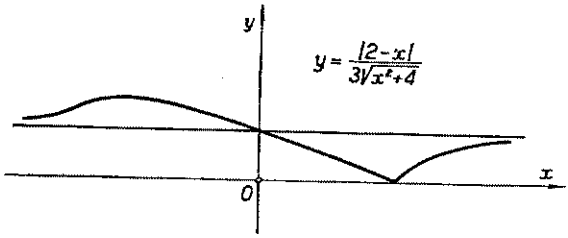
2777. Nije definisana za $x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ i $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ima ekstremne vrednosti za $x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm 2$. Kriva ima četiri asimptote (sl. 305).

$$y=\sqrt[3]{x^4-5x^2+5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4-5x^2+5}}$$



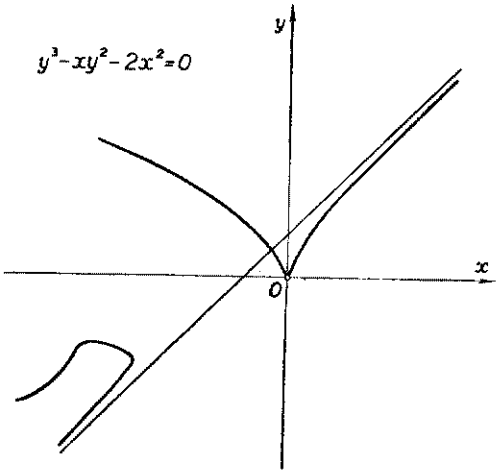
Sl. 305

2778. Definisana je za sve vrednosti promenljive. Nula funkcije je $x=2$. Ima maksimum za $x=-2$. Asimptota je $y=\frac{1}{3}$ (sl. 306).



Sl. 306

2779. Definisana je za svako $x\in(-\infty, \infty)$. Povratna tačka je (0, 0). Ekstremna vrednost funkcije $y=f(x)$ je $y=-8$ za $x=-16$. Ekstremna vrednost funkcije $x=\varphi(y)$ je $x=-\frac{27}{2}$ za $y=-9$. Asimptota je $y=x+2$ (sl. 307).

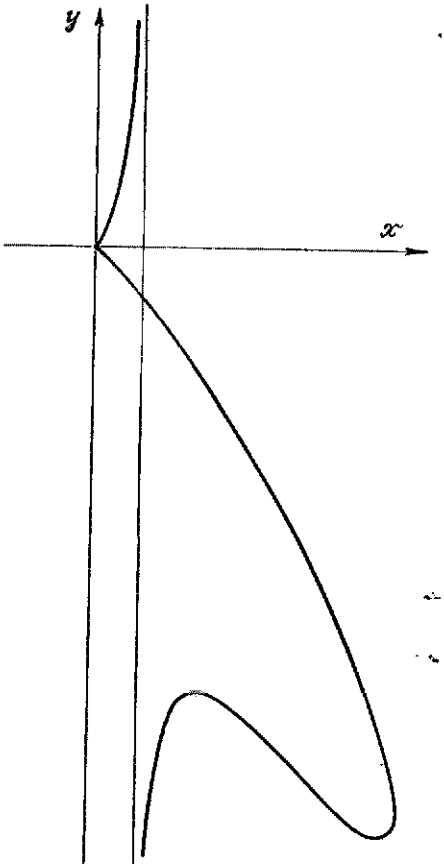


Sl. 307

2780. Definisana je za $x\in[0, 4]$ za $x=0$ i $y=0$. Asimptota je $x=\frac{1}{2}$. Ekstremne vrednosti dostiže u tačkama

$$\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, -\frac{14-\sqrt{7}}{2}\right) \text{ i } \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}, -\frac{14+\sqrt{7}}{2}\right)$$

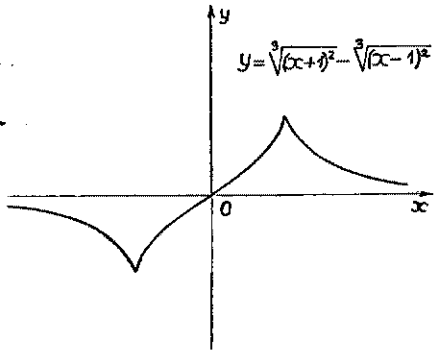
(sl. 308).



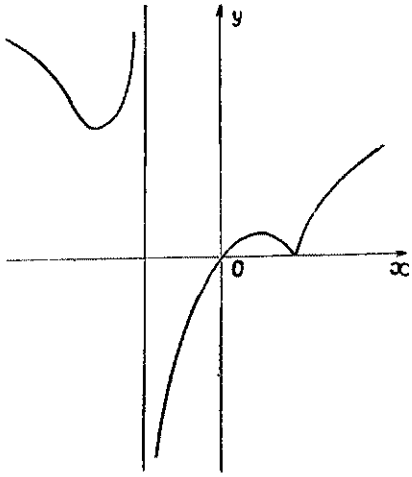
Sl. 308

2781. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Ima minimum za $x=-1$ koji iznosi $y=-\sqrt[3]{4}$ a maksimum za $x=1$ čija je vrednost $y=\sqrt[3]{4}$. Kriva ima asimptotu $y=0$ (sl. 309).

2782. Definisana je za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Ima minimum za $x = -3$ i $x = 1$ a maksimum za $x = -\frac{1}{2}$. Kriva ima jednu prevojnu tačku za $x < -3$ i asimptotu $x = -1$ (sl. 310).



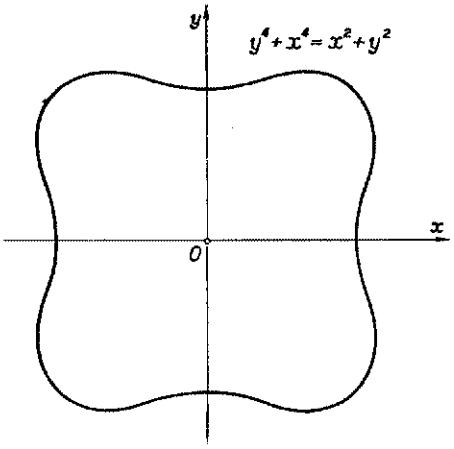
Sl. 309



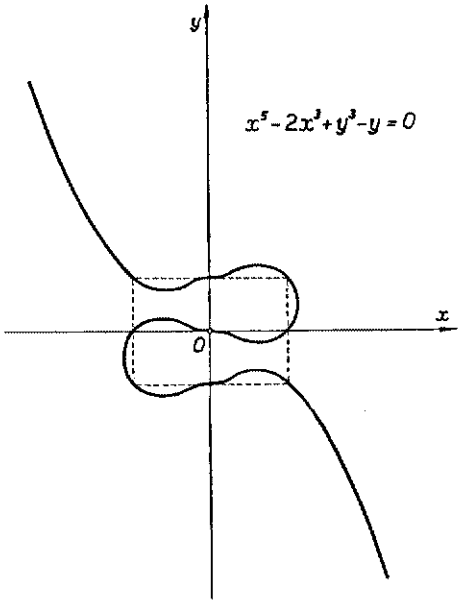
Sl. 310

2783. Definisana je za $x \in \left[-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}\right]$. Kriva je simetrična i zatvorena. Kriva seče koordinatne ose u tačkama (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1). Koordinatni početak je izolovana tačka. Ima ekstremne vrednosti u tačkama $x = 0$ i $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (sl. 311).

2784. Funkcija je definisana za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak, jer se jednačina ne menja kad se zameni x sa $-x$ i y sa $-y$. Kriva seče koordinatne ose u tačkama (0, 0), $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, 1) i (0, −1).
Iz grafika funkcije mogu se približno uočiti i druge osobine. Pri crtanju grafika funkcije najbolje je primeniti metodu oblasti (sl. 312).



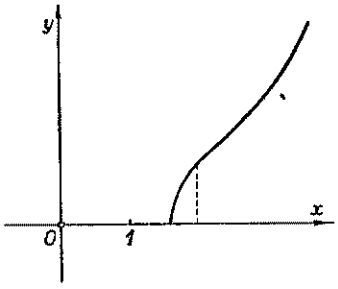
Sl. 311



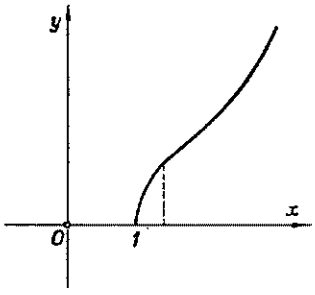
Sl. 312

2785. U zavisnosti od parametra α treba razlikovati slučajeve:

1° $\alpha>0$. Funkcija je definisana za $x\geqslant\frac{2}{\sqrt[3]{\alpha}}$. Nula funkcije je $x=\frac{2}{\sqrt[3]{\alpha}}$: Za $\alpha<8$, $\alpha=8$ i $\alpha>8$ videti: sl. 313, sl. 314, sl. 315.



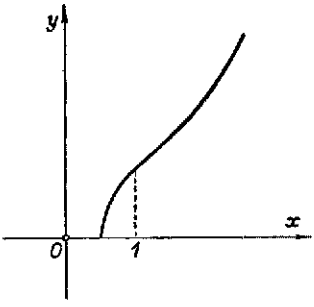
Sl. 313



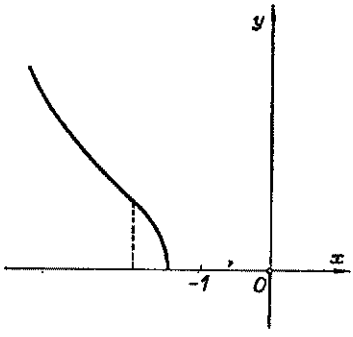
Sl. 314

2° $\alpha=0$. U ovom slučaju funkcija nema realnih vrednosti.

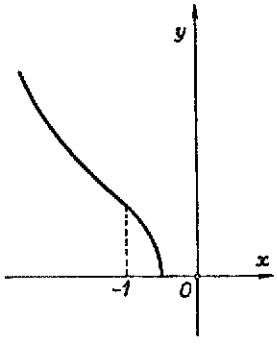
3° $\alpha<0$. Videti: sl. 316, sl. 317, sl. 318.



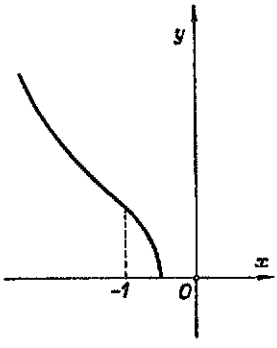
Sl. 315



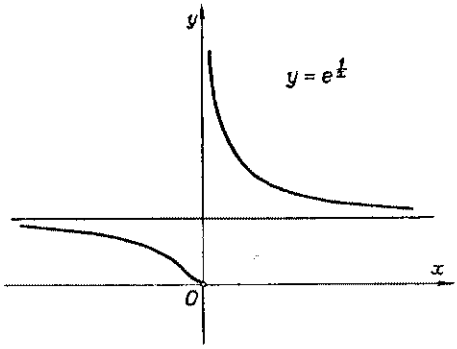
Sl. 316



Sl. 317



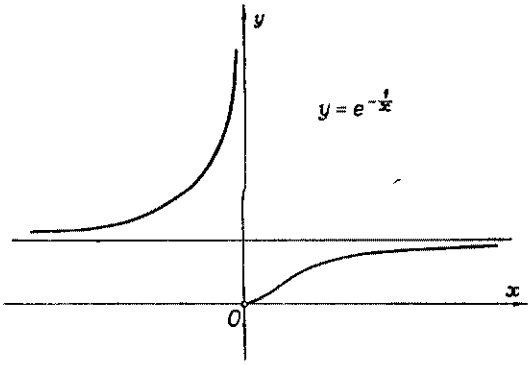
Sl. 318



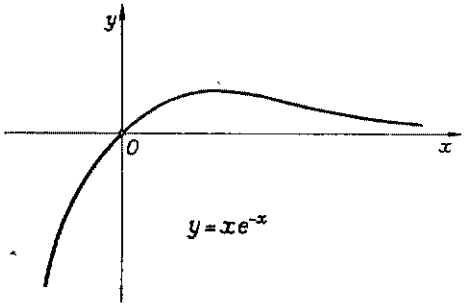
Sl. 319

2786. Nije definisana za $x=0$. Nema nula. Ekstremnih vrednosti nema. Prevojna tačka je $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$. Asimptote su: $y=1$ i $x=0$ (sl. 319).

2787. Nije definisana za $x=0$. Ekstremnih vrednosti nema. Kriva ima prevojnu tačku za $x=-\frac{1}{2}$. Asimptote su $y=1$ i $x=0$ (sl. 320).

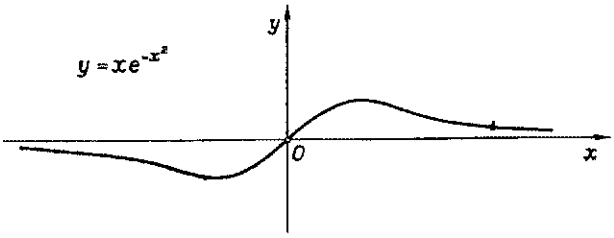


Sl. 320



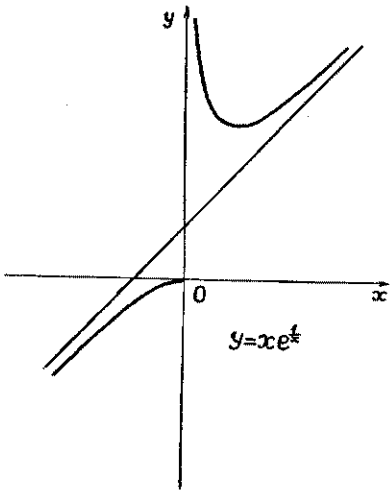
Sl. 321

2788. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Ima nulu $x=0$. Funkcija ima maksimum za $x=1$. Prevojna tačka je $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ (sl. 321).

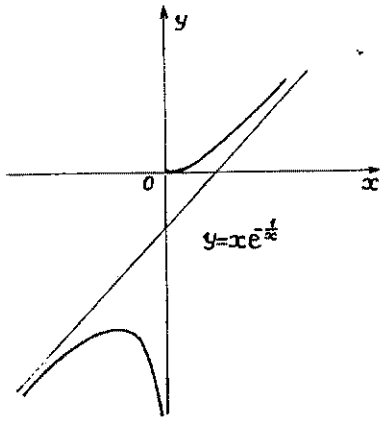


Sl. 322

2789. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nula funkcije je $x=0$. Ima ekstremume za $x=1$ i $x=-1$. Prevojne tačke su $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ i $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$. Asimptota je $y=0$ (sl. 322).



Sl. 323

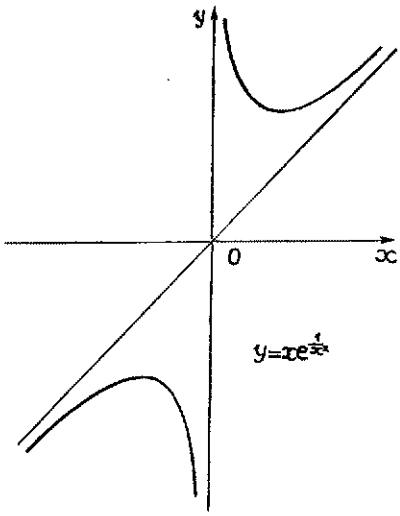


Sl. 324

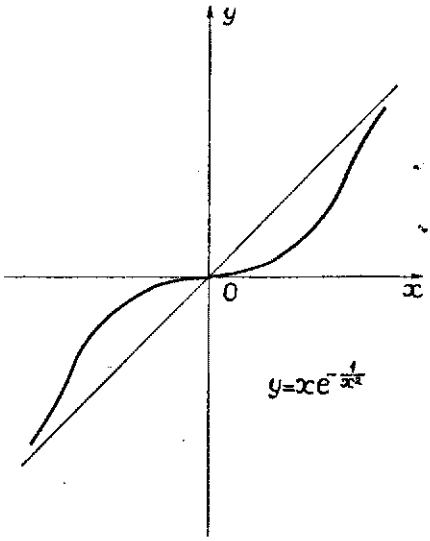
2790. Definisana je za svako $x\neq 0$. Nema nula. Ima minimum u tački $x=1$. Asimptote krive su $y=x+1$ i $x=0$ (sl. 323).

2791. Definisana je za svako $x\neq 0$. Nema nula. Ima minimum za $x=-1$. Asimptote krive su $y=x-1$ i $x=0$ (sl. 324).

2792. Definisana je za svako $x\neq 0$. Ima ekstremume u tačkama $x=\sqrt{2}$ i $x=-\sqrt{2}$. Asimptote su $y=x$ i $x=0$ (sl. 325).



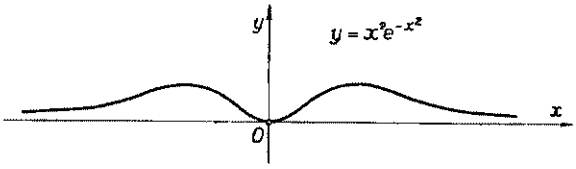
Sl. 325



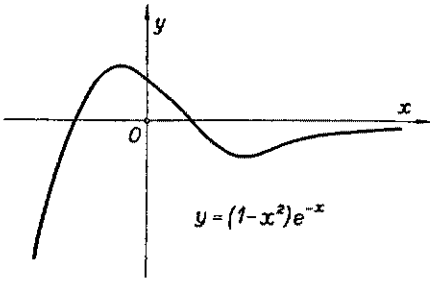
Sl. 326

2793. Definisana je za svako $x \neq 0$. Nema ekstremnih vrednosti. Kriva ima dve prevojne tačke za $x = \pm\sqrt{2}$. Asimptota krive je $y = x$ (sl. 326).

2794. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nula drugog reda funkcije je $x = 0$. Funkcija je parna. Ima ekstremne vrednosti za $x = 1$ i $x = 0$. Kriva ima četiri prevojne tačke. Asimptota je $y = 0$ (sl. 327).



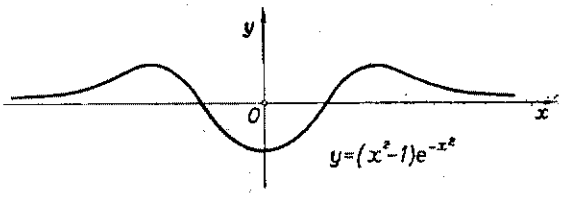
Sl. 327



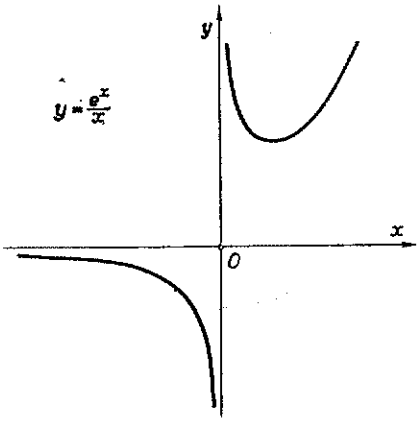
Sl. 328

2795. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nule funkcije su $x = \pm 1$. Ima ekstremne vrednosti za $x = 1 + \sqrt{2}$ i $x = 1 - \sqrt{2}$. Asimptota je $y = 0$ (sl. 328).

2796. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nule funkcije su $x = \pm 1$. Funkcija je parna. Ima ekstremne vrednosti za $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ i $x = 0$ (sl. 329).



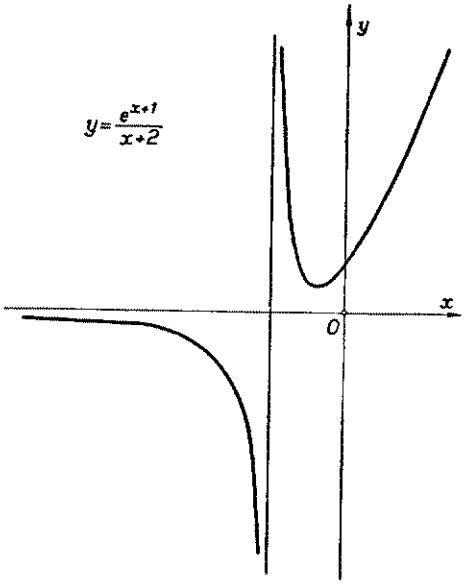
Sl. 329



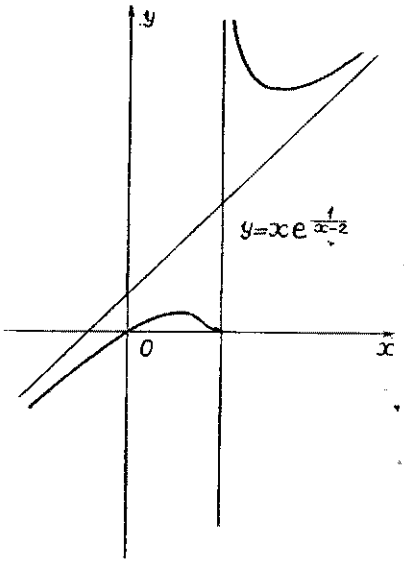
Sl. 330

2797. Nije definisana za $x = 0$. Nema nula. Ima minimum za $x = 1$. Asimptote su $y = 0$ i $x = 0$ (sl. 330).

2798. Definisana je za sve vrednosti promenljive sem za $x = -2$. Grafik seče Oy osu u tački $\left(0, \frac{2}{e}\right)$. Ima minimum u tački $x = -1$. Vertikalna asimptota je prava $x = -2$ a horizontalna $y = 0$ (sl. 331).



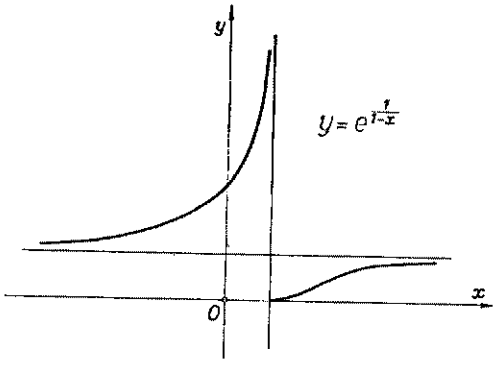
Sl. 331



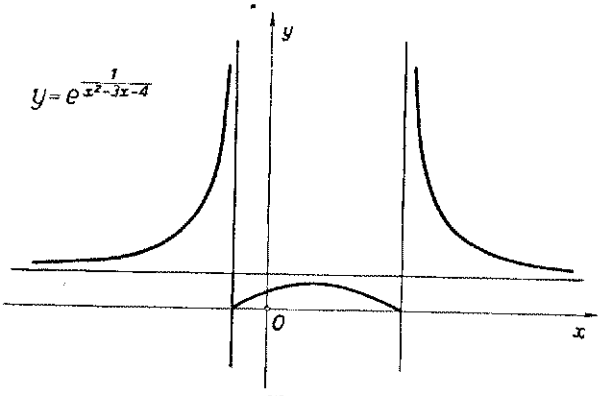
Sl. 332

2799. Definisana je za $x \in (-\infty, 2) \vee (2, \infty)$. Nula funkcije je $x=0$. Ima ekstremne vrednosti za $x=1$ i $x=4$. Asimptote su $y=x+1$ i $x=2$ (sl. 332).

2800. Nije definisana za $x=1$. Nula nema. Ekstremnih vrednosti nema. Prevojna tačka je $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$. Asimptote su $x=1$ i $y=1$ (sl. 333).



Sl. 333



Sl. 334

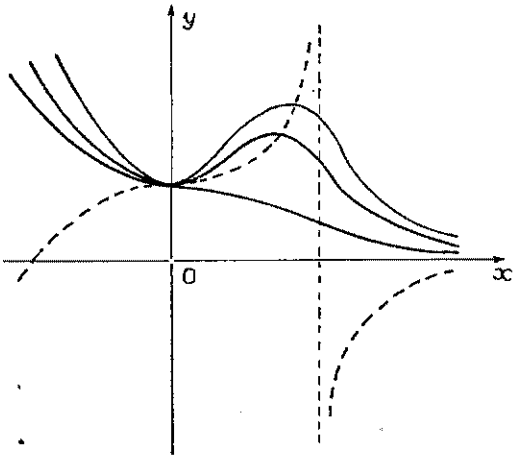
2801. Nije definisana za $x=-1$ i $x=4$. Nula nema. Ima maksimum za $x=\frac{3}{2}$. Prevojnih tačaka nema. Asimptote krive su: $x=-1$, $x=4$ i $y=1$ (sl. 334).

2802. Definisana je za $x\in(-\infty, \infty)$. Funkcija ima minimum za $x=1$ a maksimum za $x=\frac{2}{2n+1}$. Asimptota je prava $y=0$. Funkcija je uvek pozitivna. Na sl. 335 dat je i grafik granične vrednosti funkcije kad $n\to\infty$

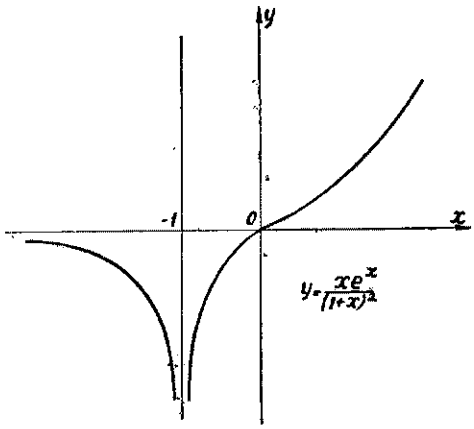
$$y=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}.$$

Tačke ekstremuma svih funkcija leže na krivoj

$$y=\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}e^{-x}.$$



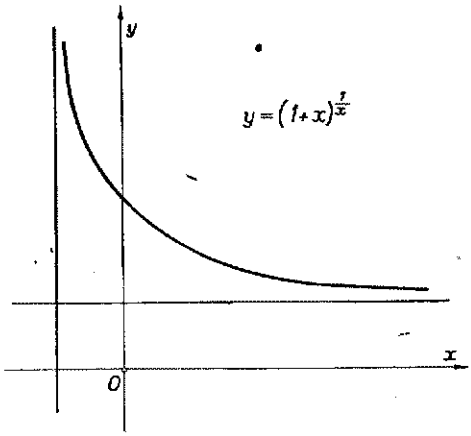
Sl. 335



Sl. 336

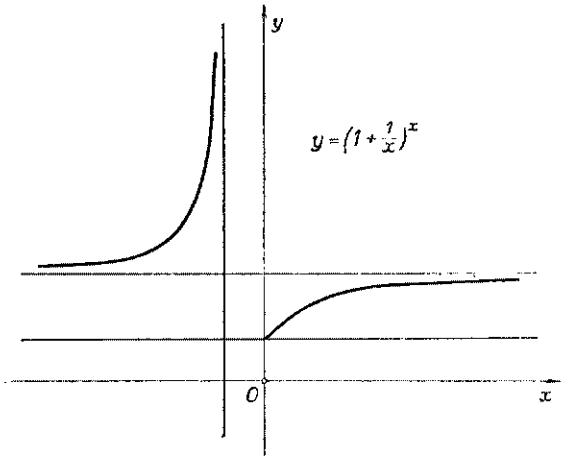
2803. Definisana je za $\forall x$ sem $x=-1$. Nula funkcije je $x=0$. Kriva ima prevojnu tačku za $x=0$. Asimptote su $y=0$ i $x=-1$ (sl. 336).

2804. Definisana je za $x>-1$ i $x\neq 0$. Nula nema. Granična vrednost kada x teži nuli je e. Ekstremnih vrednosti nema. Vertikalna asimptota je $x=-1$ a horizontalna $y=1$ (sl. 337).



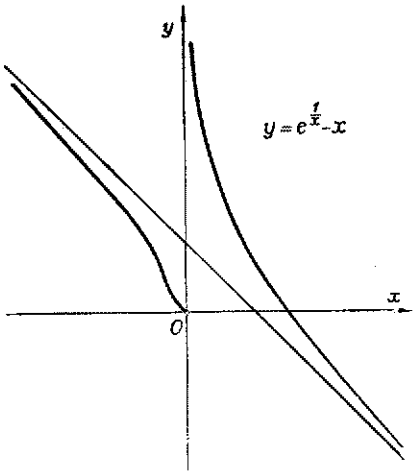
Sl. 337

2805. Definisana je za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. U intervalu $(-\infty, -1)$ raste od e do ∞; a u intervalu $(0, \infty)$ raste od 1 do e. Asimptote krive su $x = -1$ i $y = 1$ (sl. 338)

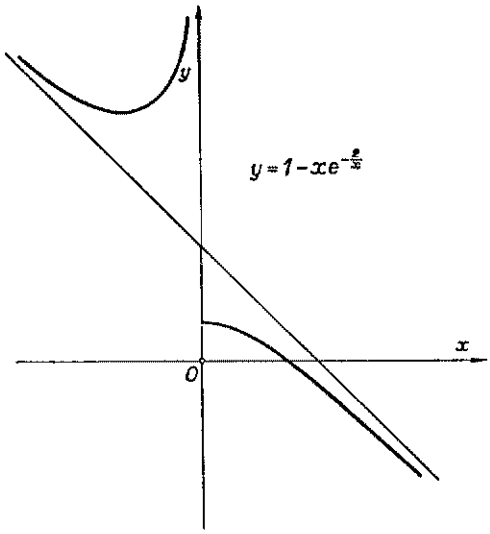


Si. 338

2806. Nije definisana za $x = 0$. Ima jednu nulu. Nema ekstremnih vrednosti. Kriva ima prevojnu tačku za $x = -\frac{1}{2}$. Asimptota je $y = -x + 1$ (sl. 339).



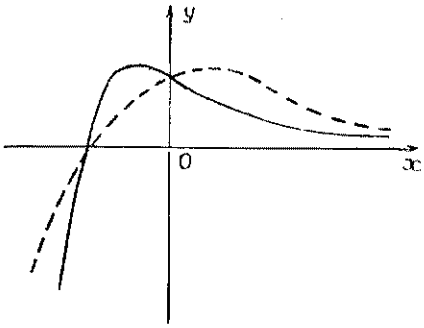
Sl. 339



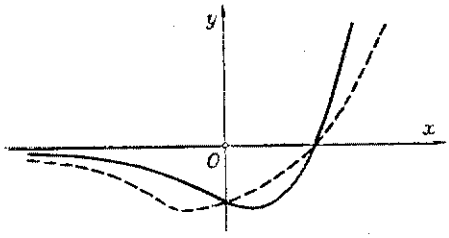
Sl. 340

2807. Definisana je za sve vrednosti promenljive sem za $x=0$. Ima jednu nulu za $x\in(2, 3)$. Desna granična vrednost funkcije u tački $x=0$ je 1. Funkcija ima minimum za $x=-2$. Kriva nema prevojnih tačaka. Asimptote krive su: $y=-x+3$ i $x=0$ (sl. 340).

2808. Definisana je za sve vrednosti promenljive x. Nula funkcije $x=-\lambda$. Ima ekstremum za $x=\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$. Prevojna tačka krive je $x=\frac{2-\lambda^2}{\lambda}$. Asimptota je $y=0$. Razlikovati slučajeve $\lambda>0$ i $\lambda<0$ (sl. 341 i 342). Specijalni slučajevi nisu uzimani u obzir.

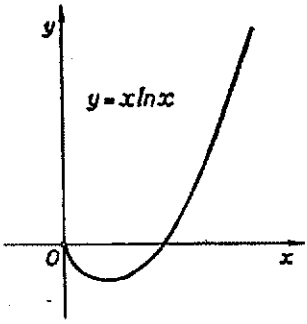


Sl. 341



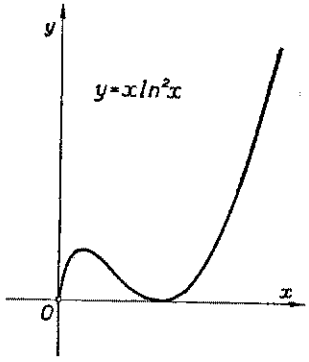
Sl. 342

2809. Definisana je za svako $x>0$. Nula funkcije je $x=1$. Ima minimum u tački $x=\frac{1}{e}$. Prevojnih tačaka nema. Asimptota nema (sl. 343).

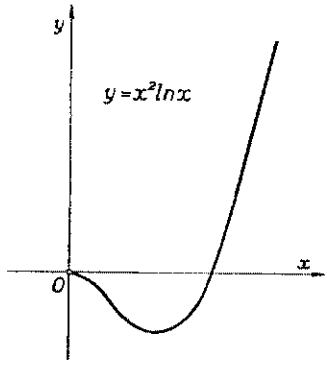


Sl. 343

2810. Definisana je za svako $x>0$. Ima nulu drugog reda $x=1$. Maksimalna vrednost je $\left(\frac{2}{e}\right)^2$ za $x=e^{-2}$, a minimalna 0 za $x=1$. Prevojna tačka je $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Asimptota nema (sl. 344).



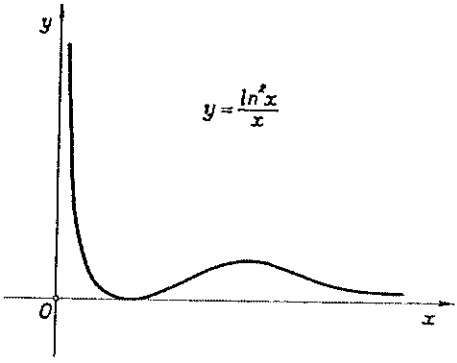
Sl. 344



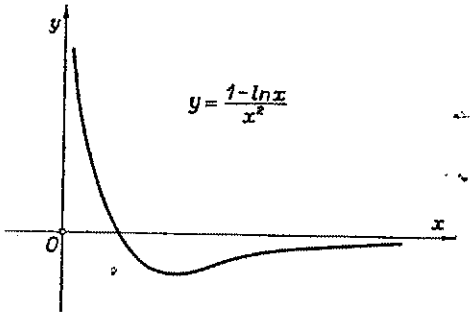
Sl. 345

2811. Nije definisana za $x\leqslant 0$. Ima nulu prvog reda $x=1$. Ima minimum za $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Prevojna tačka je $x=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$. Asimptota nema (sl. 345).

2812. Definisana je samo za pozitivne vrednosti promenljive x. Ima nulu drugog reda $x=1$. Ima ekstremume za $x=1$ i $x=e^2$. Prevojne tačke krive su $x=e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$. Asimptote su: $x=0$ i $y=0$ (sl. 346).



Sl. 346

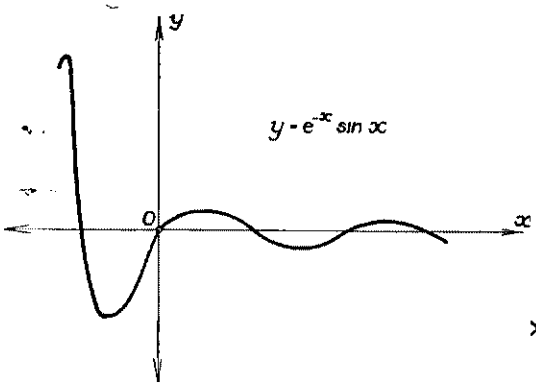


Sl. 347

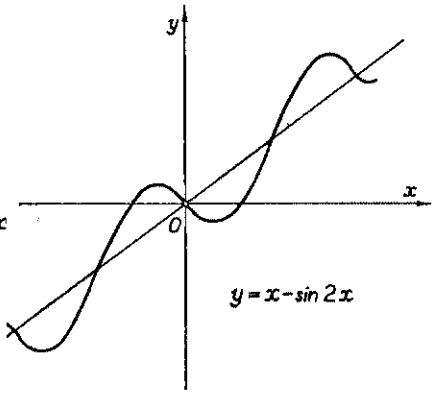
2813. Definisana je za $x>0$. Ima nulu $x=e$. Ima minimum za $x=\sqrt{e^3}$. Prevojna tačka je $x=\sqrt[6]{e^5}$. Asimptote su $x=0$ i $y=0$ (sl. 347).

2814. Definisana je za $x>0$. Ima nulu trećeg reda $x=1$. Ima maksimum u tački $\left(e^{3/2}, \frac{27}{8}e^{-3}\right)$. Prevojne tačke su: $x=1$, $x=\sqrt{e}$ i $x=e^2$. Asimptote su $x=0$ i $y=0$ (sl. 348).

2827. Definisana je za $x \in (-\infty, \infty)$. Nule su $x = k\pi$. Ima ekstremne vrednosti za $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Asimptota krive je $y = 0$ (sl. 366).



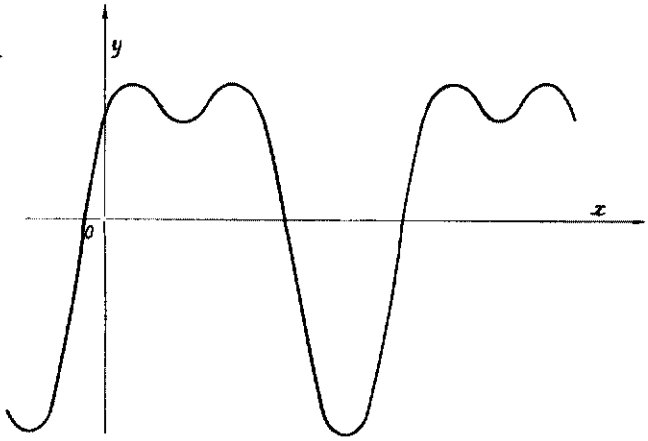
Sl. 366



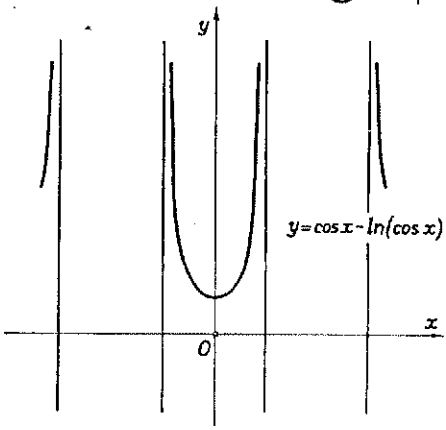
Sl. 367

2828. Definisana je za $x \in (-\infty, \infty)$. Jedna nula je $x = 0$. Ima ekstremne vrednosti za $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ i $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Prevojne tačke su $x = \frac{k\pi}{2}$ (sl. 367).

2829. Pošto je perioda funkcije 2π, dovoljno je ispitati funkciju za $x \in [0, 2\pi]$. Ima minimume za $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{3\pi}{2}$ a maksimume za $x = \frac{\pi}{6}$ i $x = \frac{5\pi}{6}$ (sl. 368).

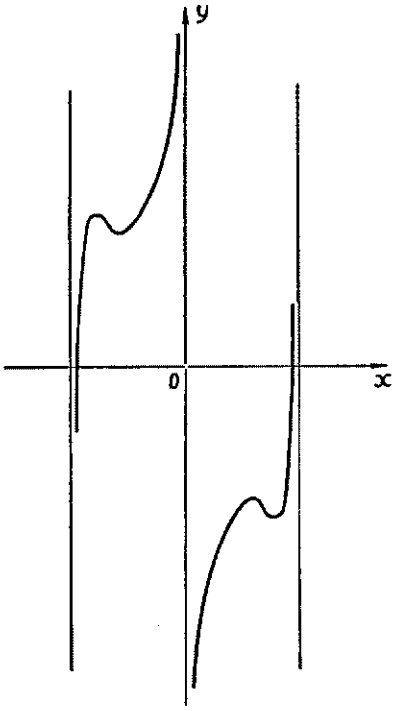


Sl. 368



Sl. 369

2830. Definisana je za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gde je k ceo broj. Ima periodu 2π. Nula nema. Za $x = \pm 2k\pi$ funkcija ima minimume. Prevojnih tačaka nema. Asimptote krive su $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Grafik je simetričan u odnosu na koordinatnu osu (sl. 369).

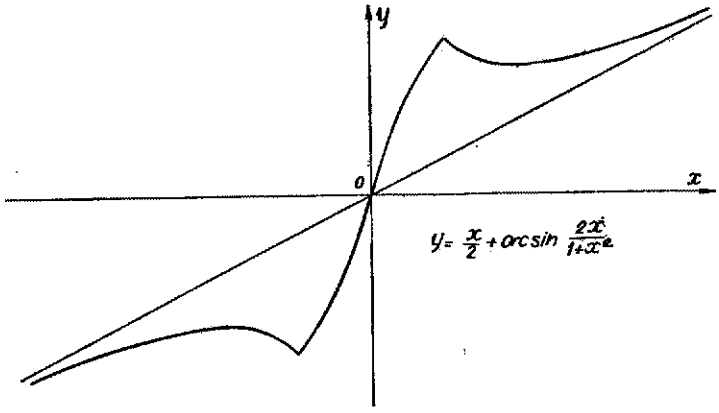


Sl. 370

2831. Funkcija je definisana za $x \in (-1, 1)$. Kriva seče x osu u dvema tačkama. Funkcija je neparna. Ima ekstremne vrednosti za $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Asimptote krive su $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$, (sl. 370).

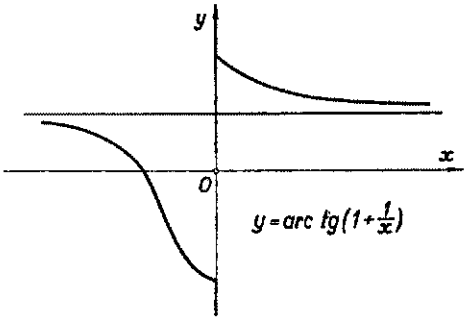
$$y = \frac{4x^2-3}{8x\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$$

2832. Definisana je za $x \in (-\infty, +\infty)$. Ima prostu nulu $x = 0$. Funkcija ima minimum u tačkama $\left(-1, -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ i $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, a maksimum u tačkama $\left(1, \frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ i $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$. Prevojne tačke krive su $\left(-1, -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$, $(0, 0)$, $\left(1, \frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$. Asimptota je $y = \frac{x}{2}$ (sl. 371).

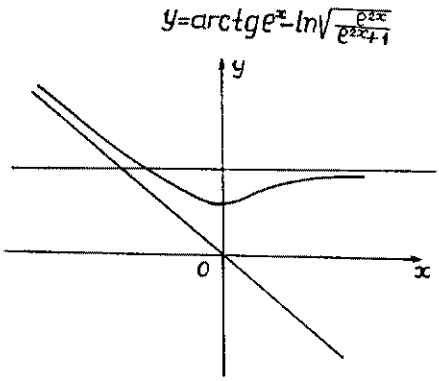


Sl. 371

2833. Nije definisana za $x=0$. Granična vrednost kad $x \to 0$ je $\pm\frac{\pi}{2}$. Ima nulu $x = -1$. Nema ekstremnih vrednosti. Kriva ima prevojnu tačku za $x=-\frac{1}{2}$. Asimptota krive je $y=\frac{\pi}{4}$ (sl. 372).



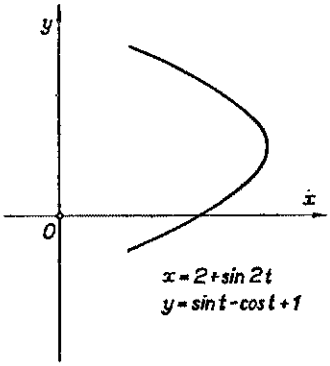
Sl. 372



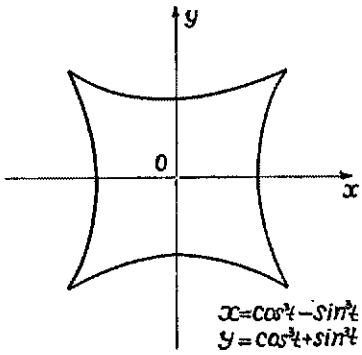
Sl. 373

2834. Definisana je za $x \in (-\infty, \infty)$. Ima minimum za $x=0$ i prevojnu tačku za $y=\ln(1+\sqrt{2})$. Asimptote su za $x>0$ $y=\frac{\pi}{2}$ i za $x<0$ $y=-x$ (sl. 373).

2835. Ako je $y=f(x)$, onda je funkcija definisana za $x \in [1, 3]$. Najveća vrednost je $\sqrt{2}+1$ za $x=1$. Grafik je deo parabole prikazan na sl. 374.



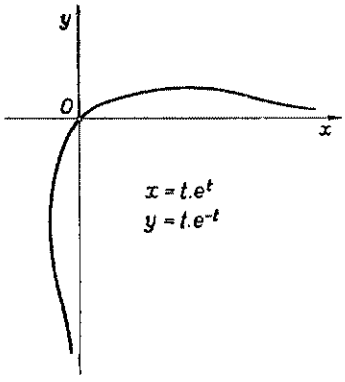
Sl. 374



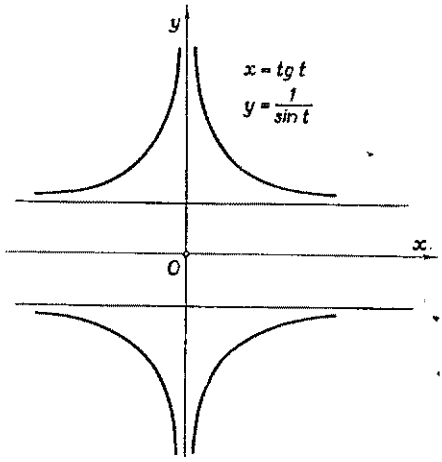
Sl. 375

2836. Definisano je za svako $x \in [-1, 1]$. Dostiže ekstremne vrednosti u tačkama $\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(-1, \pm 1)$ i $(1, \pm 1)$. Kriva je simetričnog oblika i zatvorena (sl. 375).

2837. Definisana je za $x \in \left(-\frac{1}{e}, \infty\right)$. Dvoznačna je za $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$. Kriva je simetrična u odnosu na pravu $x+y=0$. Ima maksimum u tački $x=e$. Ima dve prevojne tačke $\left(\pm\sqrt{2}e^{\pm\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2}e^{\pm\sqrt{2}}\right)$. Asimptote krive su $y=0$ i $x=0$ (sl. 376).



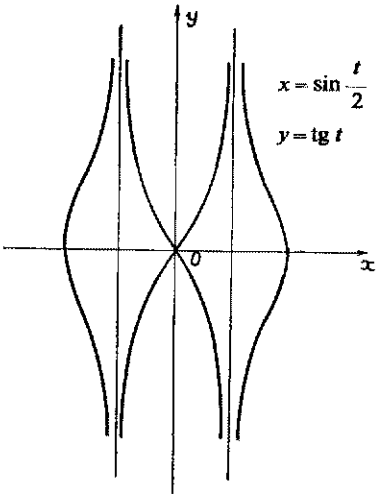
Sl. 376



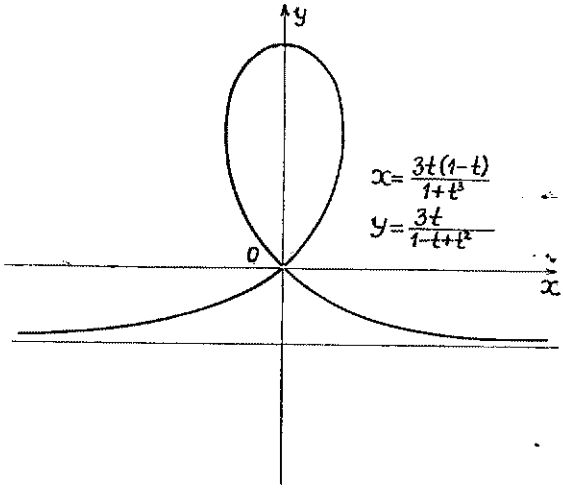
Sl. 377

2838. Dovoljno je uzeti da se t menja u intervalu dužine 2π, npr. $t \in (-\pi, \pi)$. Kriva je simetrična u odnosu na koordinatni početak. Preseka sa osom nema. Nema maksimuma ni minimuma. Asimptote krive su $y=1$ i $y=-1$ (sl. 377).

2839. Definisana je za $x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Nule funkcije su $x_{1,2} = \pm 1$ i $x=0$. Asimptote krive su $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (sl. 378).



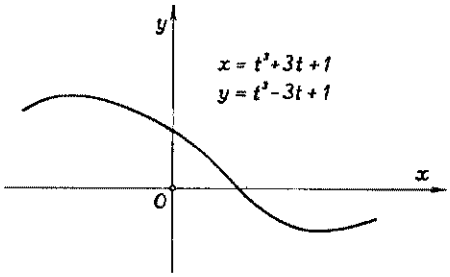
Sl. 378



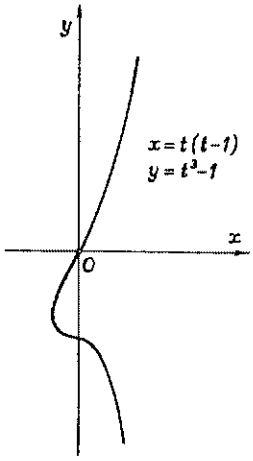
Sl. 379

2840. Definisana je za svako $t \neq -1$. Dostiže maksimum u tački (0, 3). Simetrična je u odnosu na y osu. Ima asimptotu $y=-1$ (sl. 379).

2841. Definisana je za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Ima maksimum u tački $x = -3$ a minimum u tački $x = +5$. Tačka (1, 1) je prevojna tačka. Nema asimptota. Nagibni ugao krive kada $x \to \infty$ teži 45° (sl. 380).

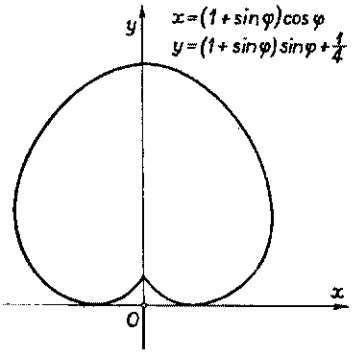


Sl. 380



Sl. 381

2842. Definisana je za svako $t \in (-\infty, \infty)$. Grafik seče Ox osu u tački (0, 0) a Oy osu u tački (0, −1). U tački $t = \frac{1}{2}$ odnosno $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$, x dostiže minimalnu vrednost. Prevojne tačke krive su (0, 0) i (0, −1). Nema pravolinijskih asimptota (sl. 381).

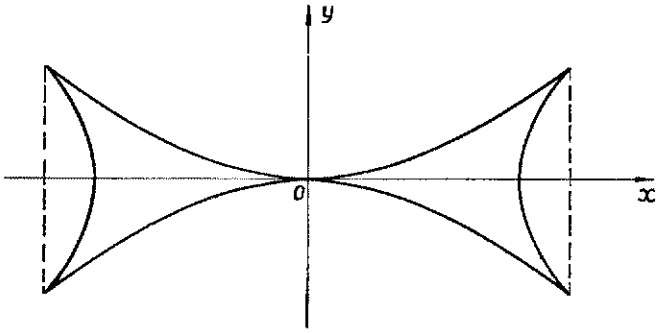


Sl. 382

2843. Definisana je za $x \in \left[-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$. Dvoznačna je. Ima maksimum u tačkama $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ i $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ a minimum u tačkama $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ (sl. 382).

$x = a(1 + \cos^2 t)\sin t$

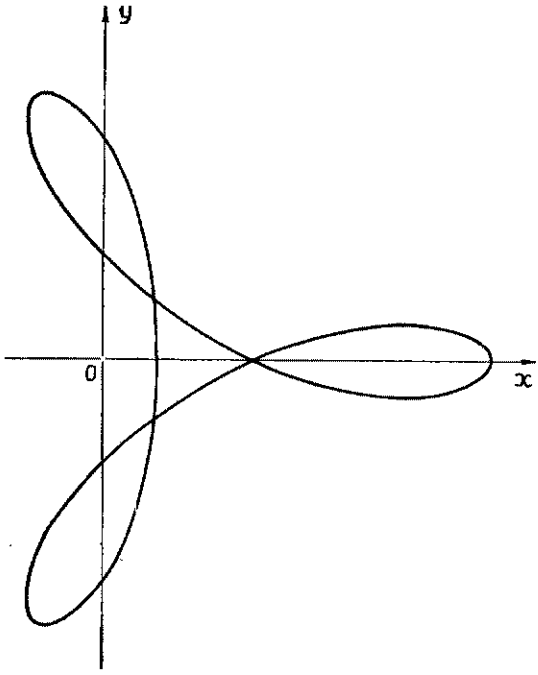
$y = a \sin^2 t \cos t$



Sl. 383

2844. Definisana je za $x \in \left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}a, \frac{4\sqrt{6}}{9}a\right]$. Ima ekstremne vrednosti u tačkama (0, 0) i $(a, 0)$ (sl. 383).

2845. Definisana je za $x \in [-0{,}17;\ 1+\sqrt{2}]$. Funkcija ima ekstremume u tačkama $(-0{,}17;\ -1{,}4)$, $(-0{,}11;\ -1{,}424)$, $(1+\sqrt{2},\ 0)$ (sl. 384).

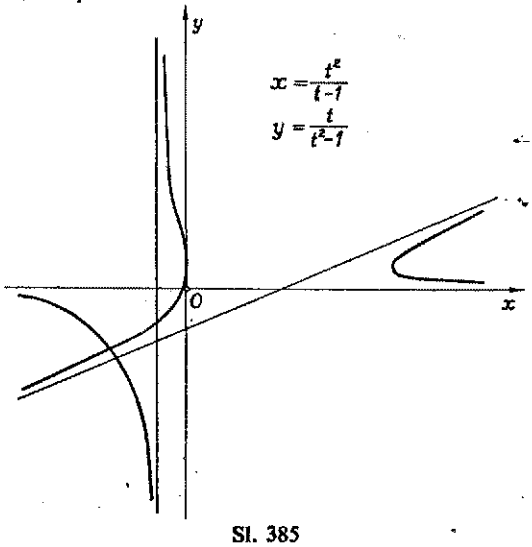


$x = \cos t\,(\sqrt{2}\cos t + 1)$,

$y = \sin t\,(\sqrt{2}\cos t - 1)$.

Sl. 384

2846. Definisana je za svako $t\,(-\infty,\ \infty)$. Grafik seče Ox osu u tački $(0,\ 0)$. U tačkama $t=0$ odnosno $(0, 0)$ i $t=2$ odnosno $\left(4,\ \frac{2}{3}\right)$, x uzima ekstremne vrednosti. Ima jednu dvostruku tačku za $t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $t_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Asimptote krive su: $x = -\frac{1}{2}$, $y=0$ i $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ (sl. 385).

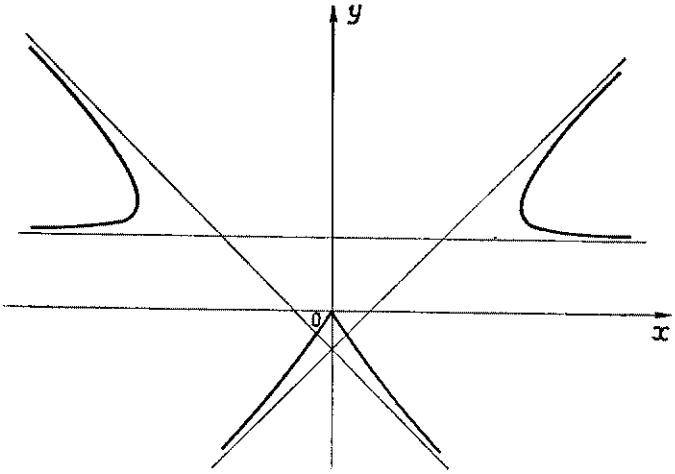


Sl. 385

2847. Definisana je za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Kriva ima tri asimptote: $y = x - \frac{a}{4}$, $y = -x - \frac{a}{4}$ i $y = \frac{a}{2}$. Funkcija ima ekstremne vrednosti za $x = 0$, $y = \frac{3a}{4}$ (sl. 386).

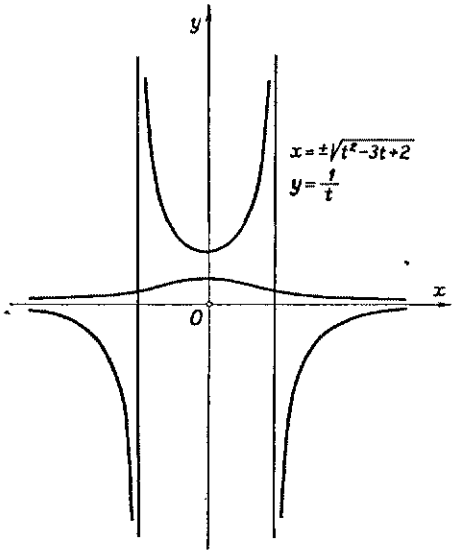
$$x = \frac{a}{2t(1-t^2)}$$

$$y = \frac{a}{2(1-t^2)}$$

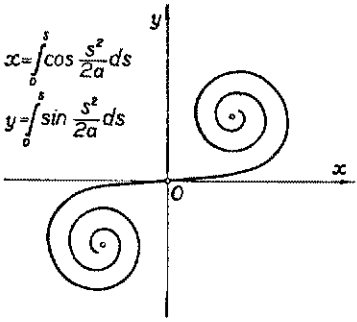


Sl. 386

2848. Definisana je za svako t sem za $t \in (1, 2)$. Grafik seče Oy osu za $t = 1$ i $t = \frac{1}{2}$. Ima ekstremne vrednosti u tačkama $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ i $(0, 1)$ za $t = \frac{1}{2}$ i $t = 1$. Vrednost $t = \frac{3}{2}$ za koju je $y_x' = \infty$ ne dolazi u obzir, jer funkcija nije definisana za tu vrednost od t. Asimptote krive su bez dve tačke $x = \pm\sqrt{2}$ i $y = 0$ (sl. 387).



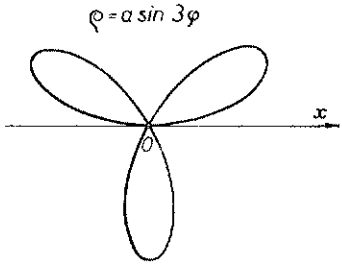
Sl. 387



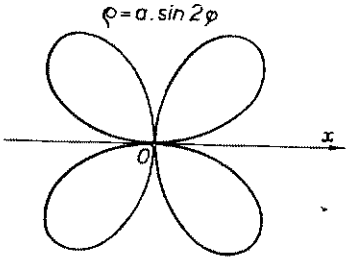
Sl. 388

2849. Osa Ox je tangenta krive. Tačke $\left(\frac{\sqrt{\pi a}}{2}, \frac{\sqrt{\pi a}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{\pi a}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi a}}{2}\right)$ su asimptotske tačke krive (sl. 388).

2850. Grafik se sastoji iz tri jednaka lista (sl. 389).



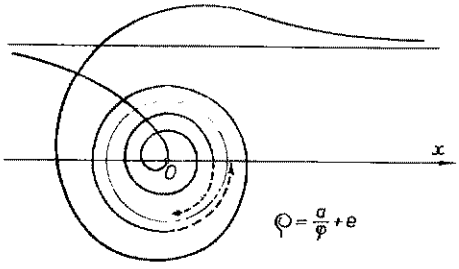
Sl. 389



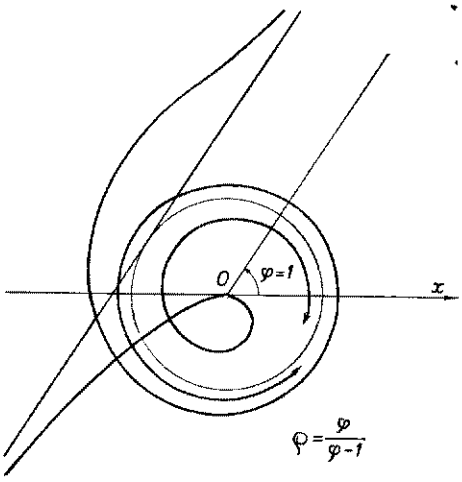
Sl. 390

2851. Grafik se sastoji iz četiri jednaka simetrično raspoređena lista (sl. 390).

2852. Definisana je za svako $\varphi = 0$. Dve grane krive asimptotski se približavaju, jedna sa unutrašnje, a jedna sa spoljašnje strane krugu čiji je centar u polu a poluprečnik $r = 1$. Ima prevojnu tačku $\varphi = \varphi_1$, gde je $0 < \varphi_1 < 1$. Asimptota je data jednačinom $\rho \sin \varphi = a$. (sl. 391).



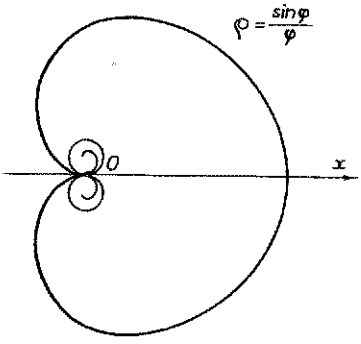
Sl. 391



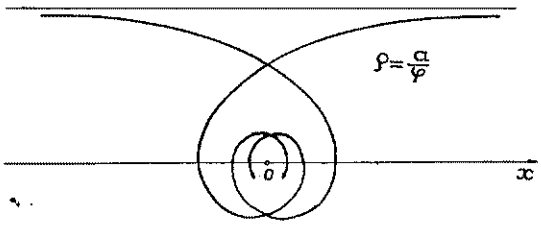
Sl. 392

2853. Definisana je za svako $\varphi \neq 1$. Jedna od grana krive dodiruje polarnu osu pola. Dve grane krive se beskonačno mnogo puta obrću oko pola i asimptotski se približavaju sa spoljašnje i sa unutrašnje strane krugu čiji je centar u polu, a poluprečnik $r = 1$. Asimptota je $\varphi = 1$, $d = 1$ (sl. 392).

2854. Definisano je za sve vrednosti sem za $\varphi = 0$. Za $\varphi = k\pi$ biće $\rho = 0$, što znači da grana krive neograničen broj puta prolazi kroz koordinatni početak. Pošto je funkcija parna, grafik je simetričan u odnosu na polarnu osu (sl. 393).



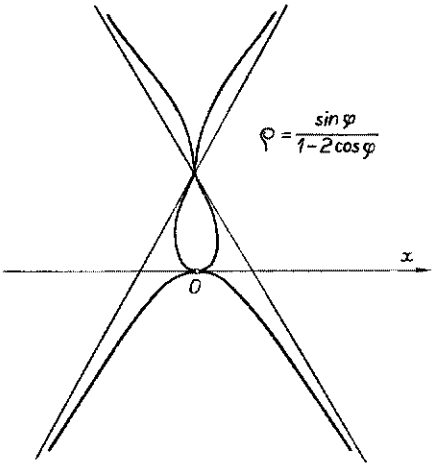
Sl. 393



Sl. 394

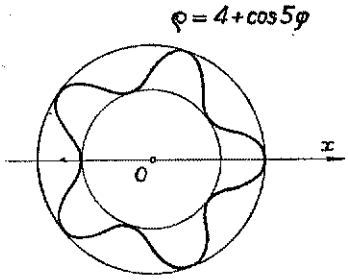
2855. Definisana je za sve vrednosti sem za $\varphi=0$. Kriva ima asimptotu $\rho\sin\varphi=a$ (sl. 394).

2856. Dovoljno je uzeti da se φ menja u intervalu dužine 2π. Nije definisana za $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Asimptota je $\pi\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ (sl. 395).

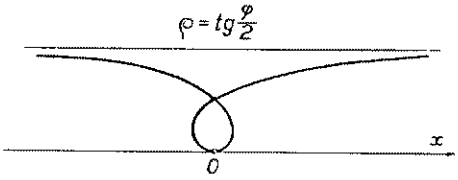


Sl. 395

2857. Dovoljno je uzeti φ iz intervala $[0, 2\pi]$. Funkcija je definisana za sve vrednosti ugla φ. Asimptota nema. Grafik funkcije je uklopljen između krugova poluprečnika 3 i 5 (sl. 396).



Sl. 396



Sl. 397

2858. Dovoljno je ispitati funkciju za vrednost ugla iz intervala $[0, 4\pi]$. Asimptota je data jednačinom $\rho\sin(\varphi-\pi)=-2$ (sl. 397).

2859. $x=y=5$. **2860.** $a=\frac{s}{2}$ i $b=\frac{s}{2}$. **2861.** $r=\frac{l}{4}$. **2862.** $r=\frac{s}{2\pi}$, $x=\frac{s}{2}$.

2863. $x=\sqrt{\frac{s}{\pi+4}}$, $y=2\sqrt{\frac{s}{\pi+4}}$. **2864.** $\alpha=\beta=\frac{\pi-\gamma}{2}$. **2865.** $r=\frac{4s}{(2+\sqrt{2})^2}$.

2866. Kako je $p=\frac{a\cdot b}{3}$ $a+b+c=2s$ i $c=\sqrt{a^2+b^2}$, to iz ovih jednačina sleduje $p=\frac{as(s-a)}{2s-a}$, odakle je $p'=\frac{a^2-4as+2s^2}{(2s-a)^2}$. Iz jednačine $a^2-4as+2s^2=0$, vodeći računa o karakteru zadatka, dobijamo $a=\frac{2s}{2+\sqrt{2}}$. Ostale dve strane su $b=\frac{2s}{2+\sqrt{2}}$ i $c=\frac{2\sqrt{2}s}{2+\sqrt{2}}$. Ako površinu trougla izrazimo u funkciji od hipotenuze, onda je $p=s(s-c)$, što znači da je površina linearna funkcija u odnosu na c, pa, prema tome, nema ekstremnih vrednosti. Kako se objašnjava ovaj slučaj?

2867. $x=\frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$. **2868.** $i=(b+\sqrt[3]{a^2b})\sqrt{1+\frac{a}{\sqrt[3]{ab^2}}}$. **2869.** $x=\sqrt[3]{4V}$.

2870. $a=3$, $b=6$, $c=4$.

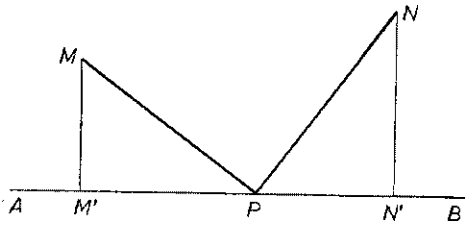
2871. $c=\frac{8}{3}$, $c=\frac{3}{2}$. Na osnovu ovog rezultata mogu se odrediti ostale dimenzije.

2872. $H=\sqrt{\frac{V}{2R\pi}}$. **2873.** $r=\sqrt{\frac{3}{5\pi}V}$ **2874.** $r=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$.

2875. Za $x=\frac{ac}{a+b}$ zbir rastojanja je minimalan gde je: $a=MM'$, $b=NN'$ i $c=M'N'$ (sl. 398).

2876. Površina je minimalna za $AB=x=2a$.

2877. $AD=x=\frac{b}{\sqrt{2}}$. **2878.** $h=r\frac{\sqrt{2}}{2}$.



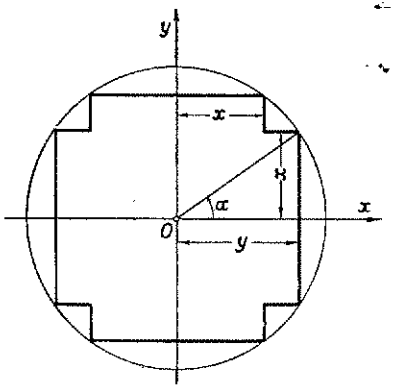
Sl. 398

2879. Jačina osvetljenja u proizvoljnoj tački data je obrascem $I=\frac{I_1}{x^2}+\frac{I_2}{(a-x)^2}$, gde je x razdaljina od svetlosnog izvora I_1 do te tačke. Koristeći ovaj obrazac, dobija se da rastojanje od svetlosnog izvora I_1 do najslabije osvetljene tačke iznosi $\frac{a\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$ a od svetlosnog izvora I_2, $\frac{a\sqrt[3]{I_2}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$; drugim rečima, rastojanje a između svetlosnih izvora podeljeno je tom tačkom u odnosu $\sqrt[3]{I_1}:\sqrt[3]{I_2}=$ $=x:(a-x)=\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$.

2880. Visina kutije je $h=\frac{a}{6}$.

2881. $x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

2882. Usled simetričnosti figure (sl. 399) njena površina iznosi $P=4[xy+x(y-x)]=4(2xy-x^2)$ ili $P=4r^2(\sin 2\alpha-\sin^2\alpha)$ gde je $0<\alpha<90°$. Kako je $P'=4r^2(2\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)$ i $P''(x)=$ $=-8r^2(2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$, funkcija dostiže ekstremnu vrednost za $\operatorname{tg}\alpha=2$. Odavde je $\alpha=31°43'$. Dimenzije kutije su tada $x\approx 0{,}526r$ i $y\approx 0{,}851r$.



Sl. 399

2883. $x=\frac{8}{3}$, $y=\frac{40}{3}$, $V=\frac{370}{27}$. **2884.** $P=\frac{ah}{4}$. **2885.** $x=4$, $y=\sqrt{3}$.

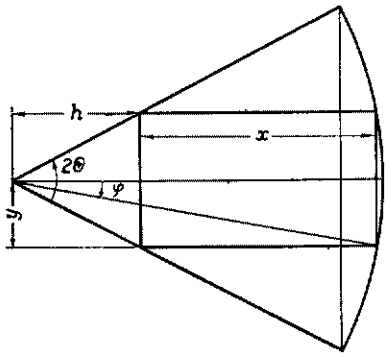
2886. $s=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **2887.** $x=R\sqrt{2}$, $y=R\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2888.** $\alpha=60°$.

2889. 1° Kako je $p=2xy$ (sl. 400) ili $p=2r\sin\varphi\,(r\cos\varphi-h)$, gde je $h=r\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta$, to je konačno $p=2r^2(\sin\varphi\cos\varphi-\operatorname{ctg}\theta\sin^2\varphi)$. Odavde je $p'=2r^2(\cos 2\varphi-\operatorname{ctg}\theta\sin 2\varphi)$. Iz jednačine $\cos 2\varphi-\operatorname{ctg}\theta\sin 2\varphi=0$ dobija se

$\operatorname{ctg} 2\varphi=\operatorname{ctg}\theta$ odnosno $\varphi=\frac{\theta}{2}$;

2° Budući da je $y=r\sin\varphi$ i $x_1=r\cos\varphi-h_1$, onda je $p=2r(r\cos\varphi-h_1)\sin\varphi$ odnosno $p'=2r(r\cos^2\varphi-r\sin^2\varphi-h_1\cos\varphi)$. Iz jednačine $2r\cos^2\varphi-h_1\cos\varphi-r=0$ sledi odgovarajuće rešenje

$\cos\varphi=\frac{h_1+\sqrt{h_1^2+8r^2}}{4r}$ ili $x=\frac{\sqrt{h_1^2+8r^2}-3h_1}{4}$.



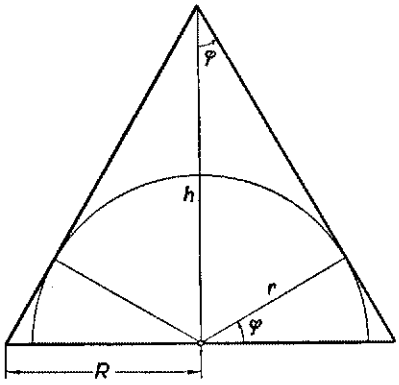
Sl. 400

2890. $R=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}r^3$.

2891. Zapremina će biti maksimalna ako je $x=\frac{r}{3}$, gde je x rastojanje baze od centra lopte.

2892. $V=\frac{32}{81}\pi R^3$.

2893. Ako se kao promenljiva uzme ugao φ (sl. 401), onda je $R=\frac{r}{\cos\varphi}$, $h=\frac{r}{\sin\varphi}$, pa je zapremina $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{\cos^2\varphi\sin\varphi}$. Očigledno je da će zapremina biti najmanja kad izraz $y=\cos^2\varphi\sin\varphi$ ima najveću vrednost, pri promeni ugla φ u intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; iz jednačine $y_\varphi'=-2\cos\varphi\sin^2\varphi+$ $+\cos^3\varphi=2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg}^2\varphi\right)=0$ sledi odgovarajuće rešenje $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ odnosno $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Sl. 401

2894. $r=\frac{1}{2}\frac{HR}{H-R}$, kada je $H\neq R$; $r=\frac{H}{2}$, kada je $H=R$.

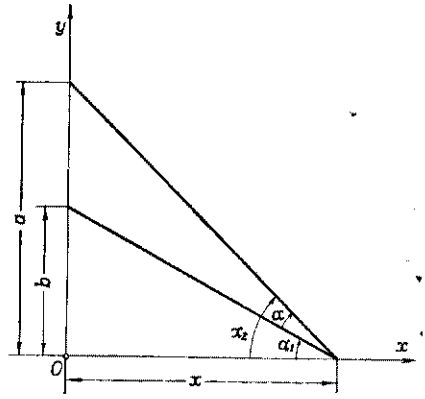
2895. $r=\frac{2}{3}R$, $h=\frac{H}{3}$. **2896.** $r=\frac{d}{3}$, $h=\frac{d}{3}$, gde je d dijagonala kocke.

2897. $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2898. Kako je $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{a}{x}$, $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{b}{x}$ i $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$ (sl. 402), onda je $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x}$, odakle je $\alpha'=\frac{ab}{x^2+a^2}-\frac{ba}{x^2+b^2}$. Iz jednačine $\alpha'=0$ dobija se da je $x=\sqrt{ab}$.

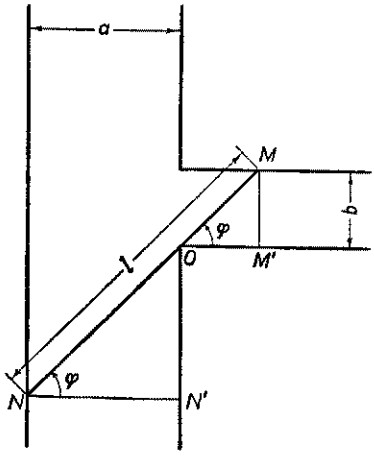
2899. $y_{\max}$ za $\cos\varphi=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

2900. Kako je $l=MN=OM+ON$ (sl. 403), $OM=\frac{b}{\sin\varphi}$ i $ON=\frac{a}{\cos\varphi}$, to je $l=\frac{b}{\sin\varphi}+\frac{a}{\cos\varphi}$, (1), odakle je $l'_\varphi=\frac{a\sin^3\varphi-b\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$. Iz jednačine $a\sin^3\varphi-b\cos^3\varphi=0$ dobija se $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.



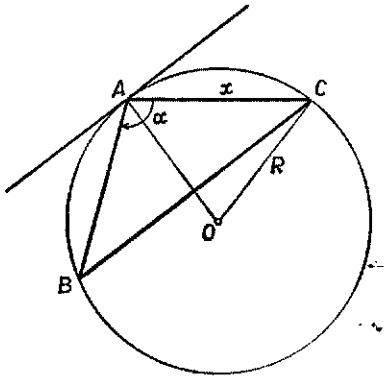
Sl. 402

Zamenom ove vrednosti u jednačini (1) dobija se konačno $l=(a^{2/3}+b^{2/3})^{\frac{3}{2}}$.



Sl. 403

2901. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$.



Sl. 404

2902. Površina trougla je $P=\frac{1}{2}x^2\sin\alpha$ (sl. 404) ili $P=2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$, pošto je $x=2R\cos\frac{\alpha}{2}$. Kako je $P'=2R\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha-2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$, dobija se da je $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, pa je $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ili $x=R\sqrt{3}$.

2903. 1° $y=1$; 2° $x=\frac{4}{3}$.

2904. $x=a-p$; $x\neq 0$ ako je $a\neq p$, $x=0$, ako je $a=p$.

2905. $d=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\dfrac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$ **2906.** (1, 1). **2907.** $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2908. $(p,\ \pm p\sqrt{2})$.

2909. $d=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$, ako je $a>b\sqrt{2}$; $d=2b$, ako je $a<b\sqrt{2}$.

2910. $t=\dfrac{\pi}{4}$; $P=2ab$. Koristiti parametarske jednačine elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

2911. $P=\dfrac{2m^3}{3P\sqrt{3}}$. **2912.** $x=\dfrac{a}{3}$.

2913. Druga dva temena nalaze se na preseku pravih $x=\pm 2\sqrt{3}$ i parabole.

2914. 1° Tražena parabola je $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$. Koordinate temena parabole su $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$;

2° Kako je $P=\dfrac{2+2(1-x)}{2}y=(2-x)\left(-\dfrac{1}{2}x^2+x\right)$, to je $P_x'=\dfrac{3}{2}x^2-4x+2$. Iz jednačine $3x^2-8x+4=0$ dobija se $x_1=2$, $x_2=\dfrac{2}{3}$. Otuda se dobijaju temena trapeza $B\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)$, $C\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)$.

2915. $(-1,\ 3)$ $(-3,\ 3)$, $(-1,\ 7)$, $(-3,\ 7)$. **2916.** $x=\dfrac{1}{3}$; $P=\dfrac{2}{9}$.

2917. (3, 3), (1, 3), (3, 6), (1, 6). **2918.** $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$. $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

2919. $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$. **2920.** $M(a,\ 2a)$.

2921. $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 2)$, $C\left(7,\ \dfrac{5}{2}\right)$. **2922.** $\left[a\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \dfrac{3a}{2}\right]$, $P=\dfrac{3a}{8}$.

2923. $\left(an^{\frac{3}{2(n+1)}},\ \dfrac{x}{n\sqrt{n}}\right)$. **2924.** $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, $d=\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. **2925.** $x=\dfrac{a}{2}$.

2926. $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$. **2927.** $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$; $y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

2929. Jednačina normale je $y-b\sin t=\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}t\,(x-a\cos t)$ ili $xa\sin t-yb\cos t+\dfrac{b^2-a^2}{2}\sin 2t=0$. Odstojanje normale od centra je $d=\dfrac{k}{2}\,\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$, gde je $k=b^2-a^2$. Iz zadnje jednačine se dobija $d_t'=k\,\dfrac{b^2\cos^4 t-a^2\sin^4 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$, odnosno $b^2\cos^4 t-a^2\sin^4 t=0$ ili $\operatorname{tg}^2\varphi=\dfrac{b}{a}$. Konačno je $x=\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$, $y=\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$, $d=\sqrt{\dfrac{a^3+b^3}{a+b}}$.

2930. $t=\frac{\pi}{2}$, $x=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $y=a$. **2931.** $p=\frac{r}{4}$.

2932. Za $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$ min, za $r=\sqrt[3]{\frac{15V}{2\pi}}$ max. **2933.** Njegovi kraci su $AB=CD=a\sec^2\frac{a}{2}$.

2934. $x=\frac{a+b}{2}$.

2935. Površina tako dobijenog paraboličnog segmenta iznosi $\frac{2}{3}ah$, gde je a osnovica segmenta a h njegova visina. $d=\frac{\sqrt{3}}{2}lR$, gde je l dužina izvodnice.

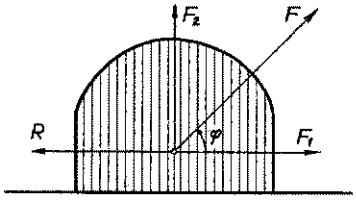
2936. 1 km ispred mesta A.

2937. $x=\frac{v_1 h}{\sqrt{v^2-v_1^2}}$. U slučaju kada je $d\leqslant\frac{v_1 h}{\sqrt{v^2-v_1^2}}$, tj. kada se stanica B nalazi između D i C, železničku prugu treba postaviti neposredno iz tačke B.

2938. $x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$. **2939.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Koristiti obrazac $T=2\sqrt{\frac{a}{g\sin^2\varphi}}$.

2940. $x=\sqrt{\frac{2pd}{k}}$. Koristiti vezu $F=\frac{pd}{x}+\frac{kx}{2}$.

2941. $a=\frac{d\sqrt{3}}{3}$ i $h=\frac{d\sqrt{b}}{3}$.



Sl. 405

2943. Trenje je proporcionalno sili kojom telo deluje na podlogu a ima pravac suprotan kretanju tela. Faktor proporcionalnosti naziva se koeficijent trenja. Neka je φ (sl. 405) traženi ugao koji zaklapa sila sa horizontalnom podlogom. Vertikalna i horizontalna komponenta sile F su respektivno $F\sin\varphi$ i $F\cos\varphi$. Sila kojom telo potiskuje podlogu je $G-F\sin\varphi$ a trenje prema Kulonovom zakonu iznosi $R=k(G-F\sin\varphi)$. Pošto horizontalna komponenta sile F mora zadovoljavati jednačinu $F\cos\varphi=k(G-F\sin\varphi)$, onda je $F=\frac{kG}{\cos\varphi+k\sin\varphi}$. Najmanja vrednost ove funkcije je najveća vrednost funkcije $y=\cos\varphi+k\sin\varphi$, pri promeni ugla φ u intervalu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Izvod $y'=k\cos\varphi-\sin\varphi$ je jednak nuli kada je $\operatorname{tg}\varphi=k$, odnosno $\varphi=\operatorname{arc\,tg}k$. Tako dobijeni ugao φ naziva se „ugao trenja".

2944. Otvor mora biti na polovini visine suda.

2945. Korišćenjem kosinusne teoreme dobija se $t=\frac{l_1v_1+l_2v_2-(l_2v_1+l_1v_2)\cos\alpha}{v_1^2+v_2^2-v_1v_2\cos\alpha}$.

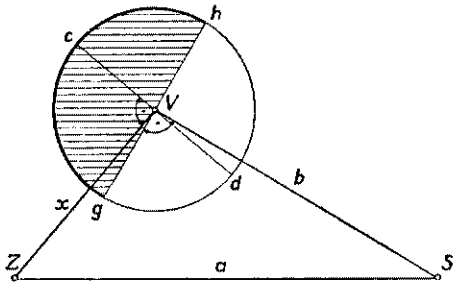
2946. Svetlosni izvor se mora nalaziti u tački čija se rastojanja od centra sfere odnose kao treći stepeni poluprečnika sfera, tj. mora biti $m:n=R_1^3:R_2^3$.

2948. Iz jednačine $\frac{dE}{d\lambda}=0$ dobija se jednačina $e^{-\frac{c}{\lambda T}}=1-\frac{c}{\lambda T}$. Osim korena $\frac{c}{\lambda T}=0$, ova jednačina ima još jedan koren $\frac{c}{\lambda T}\approx4{,}965$, čija se vrednost može približno odrediti jednom od metoda za približno određivanje korena jednačina. Pošto je za tu vrednost $\frac{d^2E}{d\lambda^2}<0$, time je ispunjen uslov za maksimum.

2950. Koristiti vezu $I=\dfrac{NE}{nr+\dfrac{N}{n}R}$.

2951. Koristiti vezu $a=0{,}24\,(r_1+r_2)\,x^2-0{,}48\,r_1\,Ix+0{,}24\,r_2\,I^2$, gde je I ukupna jačina struje u oba provodnika a x jačina struje u r_1.

2952. Neka je sunce S, Zemlja Z, Venera V a poluprečnik Venere r (sl. 406). Vidljivi deo Venerine površine sa Zemlje je $\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{1}{2}\pi r^2\cos(gVd)=\frac{1}{2}\pi r^2[1+\cos(ZVS)]$, jer je $\sphericalangle gVd=180^\circ-\sphericalangle ZVS$. Svetlost Venere je direktno proporcionalna kvadratu udaljenosti od Zemlje x. Kako je: $a^2=x^2+b^2-2bx\cos(ZVS)$, to je $1+\cos(ZVS)=\dfrac{x^2+b^2+2bx\cos-a^2}{2bx}$, pa je svetlost proporcionalna sa $\dfrac{(x+b^2)-a^2}{x^3}$. Ova funkcija ima maksimum za $x_0=-2b+\sqrt{b^2+3a^2}$. U astronomskim jedinicama je: $a=1$, $b=0{,}723$, pa je $x_0=0{,}43$, čemu odgovaraju uglovi: $\sphericalangle gVd=62^\circ$, $\sphericalangle SZV=39{,}7^\circ$ (elongacija Venere), $\sphericalangle ZSV=22{,}5^\circ$. Na osnovu dobijenih rezultata vidi se da će Venera biti najsvetlija za posmatrača sa Zemlje 36 dana pre i posle donje konjukcije sa Suncem.



Sl. 406

2953. $k=-3$, $l=3$, $y=3\,(1-x)$.

2954. $a=\frac{1}{2}e^{x_0}$.

2955. 1° Prvog reda; 2° drugog reda; 3° drugog reda.

2956. Imaju dodir drugog reda u tački (1, 2).

2957. Koeficijenti moraju zadovoljavati uslove: $f(2)=\varphi(2)$, $f'(2)=\varphi'(2)$, $f''(2)=\varphi''(2)$ tj. $4a+2b+c=8$, $4a+b=2$ i $a=18 \Rightarrow a=18$, $b=-52$ i $c=40$.
Kako je $f'''(2)\neq\varphi'''(2)$, to krive imaju u tački $x=2$ dodir drugog reda.

2959. $a=1$ ili $a=32$, dodir prvog reda.

2960. U tački $x=\frac{\pi}{2}$ imaju dodir prvog reda.

2961. $n=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $n=0$, $n=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2962. Imaju dodir trećeg reda.

2965. 1° $R=p\,(1+2x/p)^{3/2}$, $K=\dfrac{1}{p\,(1+2x/p)^{3/2}}$; 2° $R=\dfrac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{3/2}}{ab}$, $K=\dfrac{ab}{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{3/2}}$, gde je $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; 3° $R=\dfrac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{3/2}}{ab}$, $K=ab/(\varepsilon^2x^2-a)^{3/2}$, gde je $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

2966. 1° $K=0{,}128$; 2° $K=-36$; 3° $K=\dfrac{3}{5\sqrt{10}}$.

2967. $K=-2$ za $x=1$.

2968. $\dfrac{\sqrt{2}}{a}$.

2969. $u=\dfrac{a\,(2a^3-x^3)}{(2a+x)\,(a-x)^2}$, $v=\dfrac{2a\,(a+x)^{3/2}}{(2a+x)\sqrt{a-x}}$.

2970. $u=\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}(3y+a)$, $v=\frac{9y^2+2ay}{2a}$. **2971.** $(e^{-1}, 0)$.

2972. $(a/4.\ a/4)$. **2973.** $\left(x+\frac{7}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}a\right)=\frac{125}{9}a^2$.

2974. 1° $R=\frac{a\sqrt{2}}{n-1}$; 2° $\frac{a}{\cos\frac{x}{a}}$.

2975. 1° $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$; 2° $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

2976. 1° $\frac{2}{a}$ u tački $(0; 0)$; 2° $\frac{1}{a}$ u tački $(0, a)$; 3° a/b^2 na kraju velike poluose.

2977. $R=\sqrt{2}$. **2978.** $(1, 0)$, $k=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2979. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(x-2\sqrt{2})^2+\left(y-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

2980. Kako je $y'=\frac{mx}{2}-\frac{1}{2mx}$ i $y''=\frac{m}{2}+\frac{1}{2mx^2}$, to je $R=\frac{\left[1+\left(\frac{mx}{2}-\frac{1}{2mx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{m}{x}+\frac{1}{2mx^2}}$ ili, posle sređivanja, $R=\frac{(m^2x^2+1)^2}{4m^2x^2}$, odakle se za $x=1$ dobija $R=\frac{(m^2+1)^2}{4m^2}$. Odavde je dalje $R'=\frac{m^4-1}{2m^3}$, pa je $R'=0$ kad je $m^4-1=0$ ili $m=\pm 1$.

2981. $y\ln y=\frac{x}{2}\sqrt{2}$. **2982.** 1° $\frac{13}{6}\sqrt{13}$; 2° $2a$.

2983. 1° $4a\sin\frac{t}{2}$; 2° $4a\cos\frac{t}{2}+b$; 3° $2ae^{-t}$.

2984. $R=\rho\left(1+\frac{1}{\varphi}\right)^{3/2}$. **2985.** 1° $\frac{(a^2+\rho^2)^{3/2}}{2a^2+\rho^2}$; 2° $\sqrt{1+m^2}$; 3° $\sqrt{2a\rho}$; 4° $\frac{a^2}{3\rho}$.

2986. $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$. **2987.** $a=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

2988. Opšti oblik jednačine parabole je $y=ax^2+bx+c$. Pošto krive imaju isti krug krivine u tački $x=\frac{\pi}{2}$, onda moraju imati jednake ordinate i zajedničku tangentu u toj tački. Prema tome, moraju postojati jednačine: $a\pi^2+2b\pi+c=1$, $a\pi+b=0$, $a=\pm\frac{1}{2}$. Iz ovih jednačina, uzimajući $a=-\frac{1}{2}$, dobija se $b=\frac{\pi}{2}$ i $c=\frac{8-\pi^2}{8}$. Prema tome, jednačina parabole glasi: $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{2}x+\frac{8-\pi^2}{8}$.

2989. $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{8}\pi^2-\frac{1}{4}\pi+2$. **2990.** $R=\left|\frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{2ab\sqrt{2}}\right|$.

2993. $a-b$. **2996.** $27py^2=8(x-p)^3$.

2997. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c^{4/3}$, gde je $c^2=a^2-b^2$. **2998.** $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=\sqrt[3]{16a^2}$.

2999. $\left(\frac{3y}{8}\right)^4+6a^2\left(\frac{3y}{8}\right)^2+3a^3x=0$. **3000.** $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}$.

3001. $x=\pi a+a(u-\sin u)$, $y=-2a+a(1-\cos u)$, gde je $u=\pi-t$; opet cikloida.

3002. $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. **3003.** $x=a(\arccos u-u^{-1}\sqrt{1-u^2})$, $a\ln u=a+y$.

3004. Kardioida. **3005.** $\rho=mae^{m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$. **3006.** $(x-2)(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)$.

3007. $x^4-5x^3+10x^2-10x+4$.

3008. Pošto je jedna nula $a+2ai$, onda druga mora biti $a-2ai$. Treća nula je $x=-2a$.

3009. 1° Rezultat deobe je $2x^2+3x+11$, ostatak $25x-5$.

2° Rezultat deobe je $\frac{3x-7}{9}$, ostatak $\frac{-26x-2}{9}$.

3010. $(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}$. **3011.** 1° 136; 2° $-1-44i$.

3012. 1° $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;

2° $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$;

3° $(x-2)^4=18(x-2)+38$;

4° $(x+i)^4-2i(x+1)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$;

5° $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$.

3013. 1° $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$;

2° $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$.

3014. $m=14$, $n=-12$. **3015.** x^3-2x^2-5x+6. **3016.** $x^4+2x^3-13x^2-14x+24$.

3017. $x^3-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$. **3018.** $q=-1$, $p=\pm\sqrt{2}i$.

3019. $p=q=-\frac{13}{4}$. **3020.** $A=n$, $B=-(n+1)$. **3021.** $(x^n-a^ne^{\theta i})(x^n-a^ne^{-\theta i})$.

3022. Nule polinoma $2x^3-3x^2+x$ su $x=0$, $x=1$ i $x=\frac{1}{2}$. Za te iste vrednosti se anulira i polinom $(x-1)^{2n}+2x-1$, pa je prema Bezuovom stavu tvrđenje tačno.

3028. Dokaz se može dati metodom matematičke indukcije. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n=k$. Zaista, tvrđenje je tačno za $n=2$. Treba dokazati da je tačno i za $n=k+1$. Radi toga posmatrajmo razliku $P_{k+1}(x)-P_k(x)=x^{k+2}\cos k\alpha-2x\cos k\alpha\cos\alpha+$ $+x^k\cos k\alpha$. Kako je $(x^{k+2}\cos k\alpha-2x\cos k\alpha\cos\alpha+x^k\cos k\alpha):(x^2-2x\cos\alpha+1)=$ $=x^k\cos\alpha$, time je tvrđenje dokazano.

3031. x^c-1, gde je c — najveći zajednički delitelj brojeva m i n.

3032. x^c+a^c, ako su brojevi $\frac{m}{c}$ i $\frac{n}{c}$ neparni;

1 ako je bilo koji od njih paran; c označava najveći zajednički delitelj za m i n.

3033. Ako su brojevi m, p i $n+1$ istovremeno parni ili neparni.

3034. Za svako neparno n. Koristiti identitete $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ i $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^{n-1}-1}{x-1}$. **3035.** Mora biti deljivo sa p.

3036. $\frac{A-B}{a-b}x+\frac{aB-bA}{a-b}$. **3037.** $A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

3038. $5P(x)=4x^2+3x-2$. **3039.** $P(x)=-1+\frac{1}{8}(x-1)^4\left[1+2(x+1)+\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{5}{2}(x+1)^3\right]$.

3040. $P(x)=-1+(-1)^n2^{1-n}(x-1)^n\left[1+\frac{nu}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\frac{u^2}{4}+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!\,2^{n-1}}u^{n-1}\right]$, gde je $u=x+1$. **3041.** $27ad^2-9bcd+2c^3=0$.

3042. $A_l=l+1$ za $l\leqslant n$, $A_l=2n+1-l$ za $n<l\leqslant 2n$. Poći od identiteta $\sum_{s=0}^{n}x^s\sum_{l=0}^{n}x^l=\sum_{l=0}^{n}A_l x^l$.

3043. 1° $x=1-\rho$, $0<\rho<\frac{1}{8}$;

2° $x=1+\rho i$, $\rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x=1+\rho\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)$, $\rho<\sqrt[4]{8}$.

3044. Za $\lambda\in(-\infty,-32)$ polinom ima jedan realan koren; za $\lambda=-18$ tri realna korena, od kojih je jedan dvostruk; za $\lambda\in(-32,0)$ tri realna i različita korena; za $\lambda=0$ tri realna korena, od kojih su dva $x_1=x_2=0$; za $\lambda>0$ jedan realan koren.

3045. Za $\lambda\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$ nema realnih rešenja; za $\lambda=-\frac{5}{4}$ ima dva realna i jednaka rešenja $x_1=x_2=\frac{1}{2}$; za $|\lambda|<\frac{5}{4}$ četiri realna i različita rešenja; za $\lambda=\frac{5}{4}$ dva realna jednaka rešenja $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$; za $\lambda\in\left(\frac{5}{4},\infty\right)$ nema realnih rešenja.

3046. 1° Zajedničke nule su rešenja jednačine $x^2-3x+2=0$; 2° zajedničke nule se dobijaju iz jednačine $x^2+x-6=0$.

3047. $1-i$, $\frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{13})$.

3049. 1° $M_2(x)=x$, $M_1(x)=-3x^2-x+1$;

2° $M_2(x)=\frac{2x^3+3x}{6}$, $M_1(x)=\frac{2x^3+5x^2-6}{6}$;

3° $M_2(x)=-x^3-3x^2-4x-2$, $M_1(x)+x^4+6x^3+14x^2+15x+7$.

3050. 1° $M_1(x)=9x^2-26x-21$,
$M_2(x)=-9x^3+44x^2-39x-7$;
2° $M_1(x)=3x^3+3x^2-7x+2$,
$M_2(x)=-3x^3-6x^2+x+2$.

3051. $f(x)=1+\frac{(a-1)x}{1}+\frac{(a-1)^2x(x-1)}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{(a-1)^nx(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

3052. 1° $x=2$; 2° $-1,-2,-3,4$; 3° $1,-2,3$.

3053. 1° $0<x_i<3$; 2° $0<x_i>1$; 3° $-11<x_i<11$.

3054. $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{6}{5}$.

3055. Na osnovu Sturmovog niza sleduje: za $m^5-n^3>0$ svi koreni polinoma su realni, za $m^5-n^2<0$ polinom ima jedan realan koren.

3056. $a=3$. Primetiti da se koreni mogu pisati u obliku: $z_1=\rho_1 e(\theta_1)$, $z_2=\rho_1 e(\overline{\theta}_1)$, $z_3=\rho_2 e(\theta_1)$, $z_4=\rho_2 e(\overline{\theta}_2)$, a zatim koristiti vezu između korena i koeficijenata jednačine.

3057. Jednačina ima dva realna i jednaka korena za $\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, dva realna i različita korena za $\lambda\in\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$, tri realna korena za $\lambda=0$, dva realna i različita korena za $\lambda\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ i dva realna i jednaka korena za $\lambda=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3058. $\lambda\in[0, 5]$.

3059. 1° $f=x^3-3x-1$, $f_1=x^2-1$, $f_2=2x+1$, $f_3=1$.
Ima tri realna korena u intervalima $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.
2° $f=x^3+x^2-2x-1$, $f_1=3x^2+2x-2$, $f_2=2x+1$, $f_3=1$. Tri realna korena u intervalima $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.
3° $f=x^3-7x+7$, $f_1=3x^2-7$, $f_2=2x-3$, $f_3=1$.
Tri realna korena u intervalima $(-4, -3)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.
4° $f=x^3-x+5$, $f_1=3x^2-1$, $f_2=2x-15$, $f_3=-1$.
Jedan realan koren u intervalu $(-2, -1)$.
5° $f=x^3+3x-5$, $f_1=x^2+1$. Jedan realan koren u intervalu $(1, 2)$.

3060. $f=x^4-12x^2-16x-4$, $f_1=x^3-6x-4$, $f_2=3x^2+6x+2$, $f_3=x+1$, $f_4=1$.
2° $f=x^4-x-1$, $f_1=4x^3-1$, $f_2=2x^2-4x+1$, $f_3=x-1$, $f_4=1$.
Četiri realna korena u intervalima $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.
3° $f=x^4-2x^3-4x^2+5x+5$, $f_1=4x^3-6x^2-8x+5$, $f_2=22x^2-22x-45$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Četiri realna korena u intervalima $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$, $(-2, -1)$.
4° $f=x^4-2x^3+x^2-2x+1$, $f_1=2x^3-3x^2+x-1$, $f_2=x^2+5x-3$, $f_3=-9x-5$, $f_4=-1$. Dva realna korena u intervalima $(0, 1)$, $(1, 2)$.

3061. 1° $f=2x^5-10x^3-10x-3$, $f_1=x^4-3x^2+1$, $f_2=4x^3-8x+3$, $f_3=4x^2+3x-4$, $f_4=x$, $f_5=1$. Pet realnih korena u intervalima $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$.
2° $f=x^5-5x^3-10x^2+2$, $f_1=x^4-3x^2-4x$, $f_2=x^3+3x^2-1$, $f_3=-2x^2+x+1$, $f_4=-3x-1$, $f_5=-1$. Tri realna korena u intervalima $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.
3° $f=x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$, $f_1=2x^5-5x^4-4x^3+11x^2-2x+1$, $f_2=3x^4-6x^3-x^2+4x-1$, $f_3=4x^3-6x^2+1$, $f_4=26x^2-26x+5$, $f_5=2x-1$, $f_6=1$.
Šest realnih korena u intervalima $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

3062. Sturmov red obrazuju polinomi $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0=1$. Svi koreni polinoma su realni.

3063. $P_n(x)$ ima n realnih korena.

3067. Za $\lambda=-\frac{1}{1}$ i $\lambda=\frac{1}{2}$ jednačina ima dva realna i jednaka rešenja; za $|\lambda|<\frac{1}{2}$ po dva realna i različita rešenja; za $\lambda>\frac{1}{1}$ i $\lambda<-\frac{1}{2}$ jednačina nema realnih rešenja.

3068. Za $a\in(-\infty, -16)$ jedan realan koren; za $a=\pm 16$ tri realna korena od kojih su dva jednaka; za $a\in(-16, 16)$ tri realna i različita korena; za $a>16$ jedan realan koren.

3069. Za $p\in(-\infty, 0)$ ima dva realna i različita rešenja koja pripadaju intervalima $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$; za $p=0$ dva rešenja $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$: za $p\in(0, \infty)$ dva realna i različita rešenja koja pripadaju intervalima $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3070. Za $a=\pm\frac{16}{25\sqrt{5}}$ ima tri realna korena od kojih su dva jednaka; za $|a|<\frac{16}{25\sqrt{5}}$ tri realna i različita rešenja, pri čemu za $a=0$ ima jedan dvostruki koren; za $a>\frac{16}{25\sqrt{5}}$ i $a<-\frac{66}{25\sqrt{5}}$ ima jedan realan koren.

3071. Za $a\in(-\infty, 0]$ jednačina ima jedan realan koren u intervalu $[-2, -1)$; za $a\in\left(0, \frac{1}{28}\right)$ tri realna i različita korena, dva pripadaju intervalu $(-\infty, -2)$ a treći $(-1, \infty)$; za $a=\frac{1}{28}$ ima tri realna korena od kojih su dva jednaka $x_1=x_2=-3$ a treći je $x_3=6$; za $a\in\left(\frac{1}{28}, \infty\right)$ ima jedan realan koren u intervalu $(-1, 6)$.

3072. Za $a\in(-\infty, 0)$ jednačina ima dva realna korena koji pripadaju intervalu $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{6}, \frac{1+\sqrt{10}}{6}\right)$; za $a=0$ ima dva realna korena $x_1=\frac{1-\sqrt{10}}{2}$ i $x_2=\frac{1+\sqrt{10}}{6}$; za $a\in(0, 5)$ ima četiri realna korena koji pripadaju intervalima $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{6}\right)$ i $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{6}, \infty\right)$, za $a=5$ ima četiri realna korena od kojih su dva jednaka $x_1=x_2=1$ a druga dva su $x_3=-1-\frac{\sqrt{10}}{5}$ i $x_4=-1+\frac{\sqrt{10}}{5}$; za $a\in(5, 32)$ ima dva realna i različita korena koji pripadaju intervalima $\left(-1-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{1}{2}\right)$ i $\left(-\frac{1}{2}, -1+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$; za $a=32$ ima dva realna i jednaka korena $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$; za $a>32$ nema realnih korena.

3073. $\lambda=e$.

3074. Za $a\in(-\infty, 0)$; jednačina ima jedan realan koren u intervalu $(0, 1)$; za $a=0$ samo jedan koren $x=1$, za $a\in\left(0; \frac{1}{2e}\right)$ dva realna i različita korena koji pripadaju intervalima $(1, \sqrt{e})$ i $(\sqrt{e}, \infty)$; za $a=\frac{1}{2e}$ ima dva realna i jednaka korena $x_1=x_2=\sqrt{e}$: za $a\in\left(\frac{1}{2e}, \infty\right)$ jednačina nema rešenja.

3075. $\alpha=\left(\frac{3}{2e}\right)^3$.

3076. Za $b\in\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right)$ nema realnih korena; za $b=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ ima dva realna i jednaka korena; za $b\in\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right]$ dva realna i različita korena; za $b\in(1, \infty)$ jedan realan koren. Za $b=1$ ima jedan realan koren $x=0$.

3079. Za $a<-\frac{1}{e}$ nema realnih rešenja; za $a=-\frac{1}{e}$ ima dva realna i jednaka rešenja $x_1=x_2=\frac{1}{e}$; za $a\in\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ dva realna i različita rešenja; za $a\in(0, \infty)$ jedno realno rešenje.

3080. Posmatraćemo samo interval $[0, 2\pi]$. Za $n\in\left(-\infty, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ nema realnih rešenja; za $n=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ima jedno dvostruko rešenje $x_2=x_2=\frac{11\pi}{6}$; za $n\in\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -2\right)$ ima realna i različita rešenja; za $n=-2$ tri realna rešenja, od kojih su dva $x_1=0$ i $x_2=2\pi$; za $n\in(-2, 0)$ ima dva realna i različita rešenja; za $n=0$ tri rešenja, od kojih su dva jednaka $x_1=x_2=\frac{\pi}{2}$; za $n\in\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ dva realna i različita rešenja; za $n=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ dva realna i jednaka rešenja $x_1=x_2=\frac{7\pi}{6}$; za $n\in\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$ nema realnih rešenja.

3081. Za $a\in\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right)$ nema realnih rešenja; za $a\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ jedno realno rešenje; za $a\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ jedno realno rešenje; za $a\in\left(\frac{\pi}{2}, \infty\right)$ nema realnih rešenja.

3082. Razlikovaćemo dva slučaja: I) $n=2k$: 1° $b<0$, ima dva realna i različita rešenja; 2° $b=0$, ima dva realna i jednaka rešenja $z_1=z_2=0$; 3° $b>0$, nema realnih rešenja. II) $n=2k+1$: 1° $b<0$ jedno ili tri realna rešenja, od kojih dva mogu biti i jednaka; 2° $b=0$, tri realna rešenja, od kojih su dva $z_1=z_2=0$; 3° $b>0$, ima jedno realno rešenje $x_1\in(-\infty, 0)$.

3083. Za $\lambda\in(-\infty, 2)$ jednačina nema rešenja; za $\lambda=2$ ima dva realna rešenja $x_1=-1$ i $x_2=1$: za $\lambda\in(2, 4)$ četiri realna i različita rešenja; za $\lambda=4$ četiri realna rešenja, od kojih su dva jednaka, $x_1=x_2=0$, $x_3=-2$ i $x_4=2$; za $\lambda\in(4, \infty)$ dva realna i različita rešenja.

3084. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **3085.** $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3086. 1° $b=c=0$, dok a može biti proizvoljno;

2° $a=-1$, $b=-1$, $c=1$.

3087. 1) $a=b=c=0$; 2) $a=1$, $b=-2$, $c=0$; 3) $a=1$, $b=-1$, $c=-1$;

4) $b=\lambda$, $a=-\frac{1}{\lambda}$, $c=\frac{2-\lambda^2}{1}$, gde je $\lambda^3-2\lambda+2=0$.

3088. $\lambda=-3$.

3089. 1) $ca^3=b^3$; 2) $a=b=c=0$; $a=1$, $b=-2$, $c=0$; $a=1$,

$b=-1$, $c=-1$; $b=\lambda$; $a=-\frac{1}{\lambda}$, $c=\frac{2-\lambda^2}{\lambda}$, gde je $\lambda^3-2\lambda+2=0$.

3090. $y^3-2y^2-1=0$.

3091. Potrebni i dovoljni uslovi su

$1-a+b-c>0$; $1+a+b+c>0$; $3-a-b+3c>0$; $1-b+ac-c>0$.

3092. $x_1=-2{,}602$ $x_2=0{,}340$, $x_3=2{,}265$. **3093.** $x_1=1{,}675$, $x_2=0{,}539$, $x_3=-2{,}214$.

3094. $x=-1{,}894$, $|\delta_x|=0{,}001$. **3095.** 1,198.

3096. $x_1=-1{,}9509$, $x_2=0{,}7555$, $x_3=1{,}694$. **3097.** $x_1=-10{,}261$, $x_2=9{,}886$.

3098. $x_1=-0{,}724$, $x_2=1{,}221$. **3099.** $x_1=0{,}472$, $x_2=9{,}999$.

3100. $0{,}38<x_1<0{,}33$, $1{,}24<x_2<1{,}25$. **3101.** $x=1{,}045$.

3102. $0{,}724\pm i\,0{,}430$, $-0{,}727\pm i\,0{,}934$. **3103.** $x=-0{,}56715$.

3104. $0{,}84<x<0{,}85$. **3105.** 3,5974 **3106.** 2,05865. **3107.** $0{,}5110<x<0{,}5111$.

3108. $x=2{,}087$. **3109.** 0,452. **3110.** 0,824. **3111.** $x=0{,}74084$.

3112. $x_1=4{,}730$, $x_2=7{,}853$. **3113.** $x_1=4{,}493$, $x_2=7{,}725$, $x_3=10{,}904$.

3114. $x_1=2{,}081$, $x_2=5{,}940$.

3115. Za $a=\pm 28$ i $a=\pm 26$ ima po četiri realna rešenja, od kojih su po dva jednaka. U svim ostalim slučajevima ima po dva realna rešenja; za $a=-1$ ima rešenja $x_1=4$ i $x_2\approx-3{,}9$.

3116. $0{,}826<x<0{,}827$. **3117.** $1{,}096<x<1{,}097$. **3118.** $\alpha=1{,}85$ ($\pm 0{,}005$).

3119. $H=1{,}553$ ($\pm 0{,}005$). Jednačina na koju se svodi problem ima još dva korena. Zbog čega se ta dva korena odbacuju?

3120. $x=1{,}275$ ($\pm 0{,}005$).

3121. Kako je $\Delta^n y_i=\text{const}$, to je $\Delta^{n+1}y_i=0$. Znači da je formula (1) tačna za $f(x)=P_n(x)$.

3122. Za $h=1$, $q=x$ dobija se tablica br. 1.

Tablica br. 1

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	4	3	−1
1	7	2	
2	9		

3123. $4+\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}$.

3124. $\sin 26°15'=0{,}44299$. Videti tablicu br 2.

Tablica br. 2

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
26°	0,43837	1562	—14
27°	0,45399	1548	
28°	0,46947		

3125. Odgovarajuće vrednosti ordinata su: $y_0=0$, $y_1=1$, $y_2=0$, $y_3=-1$, $y_4=0$, pa je otuda:

$$y=\frac{8}{3\pi^3}x(x^2-3\pi x+2\pi^2).$$

3126. $y=1+x+x^2+x^3$.

3127. $P_3=\frac{2}{15}(3x^3-8x^2-12x+32)$.

3128. $P_4(x)=3x^4-4x^2+7x+6$.

3129. $f(0)\approx\frac{2}{15}\cdot 32=\frac{64}{15}$; $R_3\leqslant\frac{2}{3!}\cdot 12=6$.

3130. Napišimo Lagrangeov polinom drugog stepena pomoću vrednosti: $d_0=8$, $P_0=400$; $d_1=16$, $P_1=1600$, $d_2=20$, $P_2=2500$. Tako se dobija da je $P=\frac{25}{4}d^2$. Posle zamene odgovarajućih vrednosti za d dobija se tablica br. 3.

Tablica br. 3

d mm	6	8	11	13	16	18	20	25	30
P kg	225	400	756	1056	1600	2025	2500	3906	5625

Za $d=6$ mm i $d=30$ mm vršena je ekstrapolacija, jer se ta vrednost nalazi van intervala (8; 20).

3131. $y=x^2-10x+1$ za $x=0$, $y=1$.

3132. 0,211; 0,389; 0,490.

Glava VII

3133. $\frac{x^6}{6}$.

3134. $\frac{x^3}{3}+x^2-3x$.

3135. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

3136. $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}$.

3137. $\frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}$.

3138. $\frac{1}{2x^2}$.

3139. $\frac{3}{2}x^{2/3}$.

3140. $-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

3141. $\frac{x^7}{7}+\frac{6}{5}x^5+4x^3+8x$.

3142. $\frac{x^7}{7}-2x^6+\frac{54}{5}x^5-27x^4+27x^3$.

3143. $\frac{1}{7}(1+x)^7$.

3144. $\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{7}x^{7/3}-\frac{1}{x}$.

3145. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$.

3146. $\frac{x^3}{3}-2x+\ln x$.

3147. $\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{3}x+2\right)\sqrt{x}$.

3148. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$.

3149. $x+\ln x, \quad (x>-1)$.

3150. $\ln x-\frac{1}{4x^4}$.

3151. $x-\operatorname{arc\,tg} x$.

3152. $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

3153. $x+\operatorname{arc\,tg} x$.

3154. $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

3155. $\frac{x^2}{2}-2\operatorname{arc\,tg} x$.

3156. $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

3157. $\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{4^x}{\ln 4}$.

3158. $\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}}$.

3159. $\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{10^x}{\ln 10}+\frac{25^x}{\ln 25}$.

3160. $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3161. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$.

3162. $x^2+3\cos x+\sin x$.

3163. $(\cos x+\sin x)\cdot\operatorname{sig}(\cos x-\sin x)$.

3164. $-x+\operatorname{tg} x$.

3165. $-x-\operatorname{ctg} x$.

3166. $m\operatorname{ch} x+n\operatorname{sh} x$.

3167. $x-\operatorname{th} x$.

3168. $x-\operatorname{cth} x$.

3170. $-\frac{1}{20}(5-2x)^{10}$. **3171.** $-\frac{1}{2(x-2)^2}$. **3172.** $\frac{1}{3}(2x-3)^{3/2}$.

3173. $-\frac{5}{6}(1-x)^{6/5}$. **3174.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. **3175.** $\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}}$.

3176. $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$. **3177.** $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+5)^3}-\frac{5}{2}\sqrt{2x+5}$.

3178. $\frac{3}{7}(x-2)^{7/3}+\frac{3}{2}(x-2)^{4/3}$. **3179.** $-\frac{55}{16}\sqrt[5]{(1-2x)^4}+\frac{5}{36}\sqrt[5]{(1-2x)^9}$.

3180. $\frac{4}{11}\sqrt[4]{(x+5)^{11}}-\frac{40}{7}\sqrt[4]{(x+5)^7}+48\sqrt[4]{(x+5)^3}$. **3181.** $\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$.

3182. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}-6\sqrt[3]{x-1}+12\ln|\sqrt[3]{x-1}+2|$. **3183.** $x-5\ln|x+3|$.

3184. $-2x+\ln|1-x|$. **3185.** $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$. **3186.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}x\sqrt{2}$.

3187. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}$. **3188.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **3189.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3190. $-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}\right|$. **3191.** $\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. **3192.** $\ln|x+\sqrt{x^2+7}|$.

3193. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|$. **3194.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}$. **3195.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}$.

3196. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **3197.** $-\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}x}$ **3198.** $-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$.

3199. $-\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x$. **3200.** $-x\sin 5\alpha-\frac{1}{5}\cos 5x$. **3201.** $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$.

3202. $-\frac{1}{3}\sin(1-3x)$. **3203.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+2)$. **3204.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

3205. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **3206.** $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **3207.** $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. **3208.** $\frac{1}{48}(x^2-13)^{24}$.

3209. $\frac{1}{8}(x^3-x^2+x-9)^8$. **3210.** $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. **3211.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}$.

3212. $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3-9)^3}$. **3213.** $\frac{3}{14}(1+x^2)^{7/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{4/3}$ **3214.** $-\sqrt{1-x^2}$.

3215. $\ln|x-2|+\ln|x+5|$. **3216.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+6x-5|$. **3217.** $\sqrt{x^2+2x-9}$.

3218. $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **3219.** $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3-9x)^6}$. **3220.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$.

3221. $\frac{\sqrt{5}}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{\sqrt{5}}$. **3222.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$. **3223.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$.

3224. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **3225.** $-e^{\frac{1}{x}}$. **3226.** $\ln(e^x+2)$. **3227.** $\ln(e^x+x)$.

3228. $\operatorname{arc\,tg} e^x$. **3229.** $2\sqrt{e^x+1}$. **3230.** $\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$.

3231. $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})$. **3232.** $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})$. **3233.** $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

3234. $\frac{1}{4}(\ln x)^4$. **3235.** $-\frac{1}{4}\frac{1}{\ln^4 x}$. **3236.** $\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}$. **3237.** $\ln|\ln(\ln x)|$.

3238. $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})$. **3239.** $\cos\frac{1}{x}$. **3240.** $\frac{1}{6}\sin^6 x$.

3241. $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{1}{6}\sin^6 x$. **3242.** $-\ln|\cos x|$. **3243.** $\ln|\sin x|$.

3244. $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x$. **3245.** $\ln|\sin x+x|$. **3246.** $\ln(\sin^2 x+3)$.

3247. $\ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}$. **3248.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}$. **3249.** $-\operatorname{arc\,tg}(\cos 2x)$.

3250. $-2\sqrt{2+\cos x}$. **3251.** $2\sqrt[3]{\sin x}$. **3252.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. **3253.** $\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

3254. $-\frac{4}{3}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}$. **3255.** $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}$.

3256. $\ln|\arcsin x|$. **3257.** $\ln|\operatorname{arc\,tg} x|$. **3258.** $\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^4}{4}$.

3259. $(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^2$. **3260.** $-\frac{1}{4}\frac{1}{\arcsin^4 x}$. **3261.** $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$.

3262. $-\arcsin\frac{1}{|x|}$. **3263.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **3264.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

3265. $9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-27\ln|x+3|$. **3266.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+2\ln|2-x^2|-x$.

3267. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$. **3268.** $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$. **3269.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$.

3270. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}$. **3271.** $x-\ln(1+e^x)$. **3272.** $x+2\operatorname{arc\,tg}e^x$.

3273. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **3274.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. **3275.** $-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x$.

3276. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$. **3277.** $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{14}\sin 7x$.

3278. $-\frac{6}{5}\cos\frac{5}{12}x-\frac{6}{7}\cos\frac{7}{12}x$. **3279.** $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$.

3280. $\frac{x}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}\sin(2x+\theta)$. **3281.** $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$.

3282. $-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x$. **3283.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$.

3284. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. **3285.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$.

3286. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **3287.** $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)$.

3288. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|$. **3289.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}+\sin^2 x-3\ln(\sin x)$.

3290. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **3291.** $-\frac{1}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **3292.** $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

3293. $-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x$. **3294.** $x(\ln x-1)$.

3295. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$. **3296.** $\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)$.

3297. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$, $(n\neq-1)$.

3298. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}x^2$.

3299. $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x$.

3300. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

3301. $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$.

3302. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$.

3303. $\frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right)$.

3304. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$.

3305. $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

3306. $e^x(x-1)$.

3307. $-(x^2+2x+2)e^{-x}$.

3308. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$.

3309. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$.

3310. $\sin x-x\cos x$.

3311. $x\sin x+\cos x$.

3312. $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$.

3313. $x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x$.

3314. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

3315. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

3316. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$.

3317. $\sin x(x^4-12x^2+24)+\cos x(4x^3-24x)$.

3318. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$.

3319. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)$.

3320. $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)$.

3321. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

3322. $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

3323. $\frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\sin^2 x-2a\sin x\cos x+2)$.

3324. $\frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\cos^2 x+2a\sin x\cos x+2)$.

3325. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

3326. $x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

3327. $-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

3328. $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x$.

3329. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

3330. $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arc\,tg}e^x$.

3331. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$.

3332. $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arc\,tg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

3333. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

3297. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$, $(n\neq -1)$.

3298. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}x^2$.

3299. $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x$.

3300. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

3301. $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$.

3302. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$.

3303. $\frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right)$.

3304. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$.

3305. $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

3306. $e^x(x-1)$.

3307. $-(x^2+2x+2)e^{-x}$.

3308. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$.

3309. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$.

3310. $\sin x-x\cos x$.

3311. $x\sin x+\cos x$.

3312. $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$.

3313. $x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x$.

3314. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

3315. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

3316. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$.

3317. $\sin x(x^4-12x^2+24)+\cos x(4x^3-24x)$.

3318. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$.

3319. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)$.

3320. $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)$.

3321. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

3322. $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

3323. $\frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\sin^2 x-2a\sin x\cos x+2)$.

3324. $\frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\cos^2 x+2a\sin x\cos x+2)$.

3325. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

3326. $x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

3327. $-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

3328. $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x$.

3329. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

3330. $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arc\,tg}e^x$.

3331. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$.

3332. $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arc\,tg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

3333. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

3334. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|$.

3335. $\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$.

3336. $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

3337. $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

3338. $-\frac{x^2}{4}\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{4}\arcsin x^2$.

3339. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$.

3340. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|$.

3341. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

3342. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$.

3343. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$.

3344. $\frac{\sqrt{13}}{13}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{13}-1}{2x+\sqrt{13}+1}\right|$.

3345. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$.

3346. $\arcsin\frac{x-a}{a}$.

3347. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right)$.

3348. $\arcsin\frac{x-2}{2}$.

3349. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}|$.

3350. $\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-\frac{3}{4}}\right|$.

3351. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right|$.

3352. $-2\operatorname{arc\,tg}\frac{2+\sqrt{4+2x-x^2}}{x}$.

3353. $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}}$.

3354. $-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$.

3355. $-\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-2x^2+5x-2}{2(x-2)}}$.

3356. $\frac{2+x}{2}\sqrt{4x+x^2}-2\ln|x+2+\sqrt{4x+x^2}|$.

3357. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+1}+\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$.

3358. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{2}\ln\left|\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right|$.

3359. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

3360. $\frac{4x-1}{4}\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}+\frac{3}{16}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}\right|$.

3361. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

3362. $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|$.

3363. $\ln|(x-1)\sqrt{2x+3}|$.

3364. $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{3}$.

3365. $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}$.

3366. $-\frac{5}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x-2|$.

3367. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)+\operatorname{ctg}\theta\operatorname{arc\,tg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$; $(\theta\neq k\pi)$.

3368. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$.

3369. $-\sqrt{5+x+x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$.

3370. $-\sqrt{3-2x-x^2}-\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

3371. $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x+1}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\ln\frac{|4x-1+\sqrt{8}\sqrt{2x^2-x+1}|}{\sqrt{7}}$.

3372. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{|x^2-\sqrt{2}-1}{x^2+\sqrt{2}+1}$.

3373. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$.

3374. $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$.

3375. $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$.

3376. $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{3x^2-1}{\sqrt{5}}$.

3377. $\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}$.

3378. $\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}|$.

3379. $\operatorname{arc\,tg}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}{2}$.

3380. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|$.

3381. $x+\ln\frac{(x-2)^4}{|x-1|}$.

3382. $2\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}$.

3383. $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

3384. $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

3385. $\frac{x^2}{2}+3x+9\ln|x-2|-2\ln|x-1|$.

3386. $\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}$.

3387. $\frac{x^2}{2}+4x+5\ln(x^2-3x+2)+19\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.

3388. $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

3389. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{3}$.

3390. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3391. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$

3392. $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln|x^3-1|.$

3393. $-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}.$

3394. $-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{1}{6}\ln(x+2).$

3395. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}.$

3396. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$

3397. $2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$

3398. $\frac{7}{(4-x)^2}-\frac{3}{4-x}.$

3399. $\frac{1}{2}(x+1)(x-7)+\frac{8x+7}{2(x+1)^2}+6\ln|x+1|.$

3400. $\frac{1}{2(x^2-1)}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|.$

3401. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

3402. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3403. $\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3404. $\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}.$

3405. $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

3406. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3407. $\frac{1}{12}\ln\frac{x^3}{x^3+4}.$

3408. $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg} x.$

3409. $-\frac{1}{x-2}\operatorname{arc\,tg}(x-2).$

3410. $\frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2|x-2|}{|x-1|(x+2)^2}.$

3411. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x.$

3412. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{2(x^2+1)}.$

3413. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+x}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x^2.$

3414. $\frac{3}{8}\ln|x^2-8|-\frac{1}{8}\ln|x|.$

3415. $\frac{1}{4}\ln(x^8+1)-\ln|x|.$

3416. $2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1}{x-2}.$

3417. $\frac{x^2}{2}+x-\frac{2\sqrt{2}+1}{4(x-\sqrt{2})}+\frac{2\sqrt{2}-1}{4(x+\sqrt{2})}+\frac{16+7\sqrt{2}}{8}\ln|x-\sqrt{2}|+\frac{16-7\sqrt{2}}{8}\ln|x+\sqrt{2}|.$

3418. $\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3.$

3419. $\frac{3x^3+2x^2+2x+1}{2x^2(x^2+1)}+\ln\frac{x^2+1}{x^2}-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3420. $-\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{8}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$

3421. $\frac{2(1-x)}{3(x^2+x+1)}+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

3422. $\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

3423. $\frac{8x^4+8x^2+4x-1}{28(x^3+x+1)^2}.$

3424. $-\frac{x^5}{6(x^2-5)^3}-\frac{5x^3}{24(x^2-5)^2}-\frac{5x}{16(x^2-5)}+\frac{\sqrt{5}}{32}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|.$

3425. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|.$

3426. $$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}\ln\left(1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^3\right)+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right].$$

3427. $$\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\ln\left(x^2+2x\cos\frac{2\nu+1}{2k}\pi+1\right)\cos\frac{\nu}{k}\pi+$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sin\frac{2\nu+1}{2k}\pi}{1+x\cos\frac{2\nu+1}{2k}\pi}\right)\sin\frac{\nu}{k}\pi.$$

3428. $$\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2\nu-1}{2k}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2k}\pi}\cos\frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k}\pi-$$
$$-\frac{1}{2k}\sum_{\nu=1}^{k}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2\nu-1}{2k}\pi+1\right)\cos\frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k}\pi.$$

3429. $\frac{x-1}{7}\sqrt[3]{(4+3x)^4}.$

3430. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x}).$

3431. $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x}).$

3432. $2\sqrt{x-1}+2\ln(\sqrt{x-1}+1).$

3433. $x+4\sqrt{x}+4\ln|1-\sqrt{x}|.$

3434. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

3435. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$.

3436. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|$.

3437. $\dfrac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{2}+\sqrt[3]{3x+1}+\ln|\sqrt[3]{3x+1}-1|$.

3438. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}\right|$.

3439. $4\sqrt{\sqrt{x+2}-1}-2\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{2}}$.

3440. $\ln\dfrac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\dfrac{2}{3}\ln(2t+1+2\sqrt{t^2+t+1})$, gde je $t^2=x+1$.

3441. $-6\sqrt[6]{x}-2\sqrt{x}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\,\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-3\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[6]{x+1}}\right|$.

3442. $\dfrac{3u}{u^2+1}+3\operatorname{arc\,tg}u,\quad u^6=x$.

3443. $6\left(\dfrac{u^7}{7}-\dfrac{3u^5}{5}+u^3-u\right),\quad u^2=1+\sqrt[3]{x}$.

3444. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)$.

3445. $6t-3t^2-2t^3+\dfrac{3}{2}t^4+\dfrac{6}{5}t^5-\dfrac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arc\,tg}t,\quad t=\sqrt[6]{x+1}$.

3446. $\ln|3\sqrt[3]{x}+1|$.

3447. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\dfrac{(1+x)^2}{16}-\dfrac{1+x}{5}\,\dfrac{\sqrt{1+x}}{7}+\dfrac{1}{4}\right]$.

3448. $\dfrac{x}{2}+\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}+\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$, staviti $x=\left(\dfrac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

3449. $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3450. $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\dfrac{x^2+1-x\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5}}{x^2+1-x\sqrt{x^2-4}-\sqrt{5}}$.

3451. $\sqrt{x^2-1}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right|$.

3452. $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}}-\sqrt{2x-x^2}$.

3453. $\sqrt{(a-x)(x-b)}+\dfrac{a-b}{2}\arcsin\dfrac{2x-a-b}{a-b}$.

3454. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}$.

3455. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}+1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1}+\dfrac{(x-2)(x+1)}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

3456. $-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-x^4}+\dfrac{1}{4}\arcsin x^2$.

3457. $\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

3458. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}$.

3459. $\frac{x}{2}(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

3460. $\ln\left|\frac{x+3-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$.

3461. $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.

3462. $-\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

3463. $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$.

3464. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2}$.

3465. $\left(\frac{x^5}{5}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$.

3466. $\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x+2}{(\sqrt{x^2-x+1}-x)^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}\right|$.

3467. $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}$.

3468. $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

3469. $\frac{2x+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

3470. $\frac{2}{3}\frac{1-x}{\sqrt{1+x+x^2}}+\ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$.

3471. $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$.

3472. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$.

3473. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x^4}{2x^2}}$.

3474. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{12}\ln\frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, $u^3=\frac{1-x^2}{x^2}$.

3475. $\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+u$, $u=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

3476. $\frac{1}{3}\ln(x^3+\sqrt{x^6-1})$.

3477. $\frac{u^9}{9}-\frac{3}{7}u^7+\frac{3}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3$, $u^2=1+x^2$.

3478. $-\frac{3}{2}t^2-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t^2+t+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t^3=\frac{x+1}{x-1}$.

3479. $-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$.

3480. $\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}}$.

3481. $-\frac{3}{2}\ln|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}|+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}.$

3482. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{4(1-x^2)}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{4(1-x^2)}+\sqrt{1-x}}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[4]{4(1-x^2)}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}.$

3483. $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$

3484. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|.$

3485. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

3486. $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|.$

3487. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{|x-2|},\quad (x<1 \text{ ili } x>3).$

3488. $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}.$

3489. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|.$

3490. $\frac{2}{3}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

3491. $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right|.$

3492. $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|.$

3493. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3},\quad z=x+\sqrt{x^2+x+1}.$

3494. $\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arc\,tg}z,\quad z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$

3495. $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|,\quad z=-x+\sqrt{x(1+x)}.$

3496. $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^2+(z-1)^{-2}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|,$

$z=x+\sqrt{x^2-2x+2}.$

3497. $\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|,\quad z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}.$

3498. $\frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$.

3499. $\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}+x^{3/2}\right]-\frac{2}{5}\left[(x+1)^{5/2}-x^{5/2}\right]$.

3500. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2\left(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1}\right)}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

3501. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$.

3502. $-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}-\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

3503. $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$.

3504. $\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$. $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

3505. $\frac{xu^5}{6}-\frac{5xu^3}{24}+\frac{15xu}{16}-\frac{5}{10}\ln|x+u|$, $u=\sqrt{x^2+1}$.

3506. $12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)$. $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}$.

3507. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t$, $t=\frac{\sqrt[6]{1+x^4}}{x}$.

3508. $\left(\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{3}x\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{5}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

3509. $\frac{6}{5}x^{5/6}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}-21\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}$.

3510. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3511. $\frac{3z}{2(z^2+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$. $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

3512. $\frac{(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}}{6}$.

3513. $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

3514. $\frac{\sqrt{(2-x^3)^2}}{4x^2}$.

3515. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{1+x^3}-1}{\sqrt[6]{1+x^3}+1}\right|+\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{1+x^3}$.

3516. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}$, $z=\sqrt[6]{1+x^6}$.

3517. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

3518. $\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3}$.

3519. $\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$.

3520. $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

3521. $\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

3522. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x)$.

3523. $\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

3524. $\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}x)+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)$.

3525. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg}x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|$.

3526. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

3527. $\ln\frac{|\sqrt[6]{\operatorname{tg}x-1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}$.

3528. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|$.

3529. $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{7}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

3530. $\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\operatorname{tg}x\right)-x$.

3531. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

3532. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+\operatorname{tg}x$.

3533. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|-x$.

3534. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|$.

3535. $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}$.

3536. a) $\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}-\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, ako je $0<\alpha<1$;

b) $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\ln\frac{\alpha+\cos x+\sqrt{\alpha^2-1}\sin x}{1+\alpha\cos x}$, ako je $\alpha>1$.

3537. $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|$.

3538. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|$.

3539. $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$, $(\cos a\neq 0)$.

3540. $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$, $(\sin a\neq 0)$.

3541. $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$, ako je $\sin(a-b)\neq 0$.

3542. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$.

3543. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)-\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\right]$.

3544. $\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln(a\cos x+b\sin x)]$.

3545. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)$. **3546.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}$. **3547.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}^2 x+1)$.

3548. $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x\right)$. **3549.** $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right|$.

3550. $-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}$, ako je $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geqslant 0$.

3551. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}$. **3552.** $\arccos\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$.

3553. $\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}|-\frac{1}{2}\arcsin(\cos x-\sin x)$.

3554. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1}$, $t=\sqrt{\operatorname{tg}x}$.

3555. $\frac{1}{4}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}$. **3556.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$.

3557. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$. **3558.** $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$.

3559. $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **3560.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

3561. $-\left(\operatorname{ctg}x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x\right)$. **3562.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$.

3563. $\frac{\sin^5 x}{5}-2\frac{\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$. **3564.** $-\frac{\cos 2x}{64}+\frac{\cos^3 2x}{96}-\frac{\cos^5 2x}{320}$. **3565.** $-\frac{1}{12}\cos^6 2x$.

3566. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x-\frac{1}{64}\sin 8x$. **3567.** $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|$.

3568. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$. **3569.** $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

3570. $-\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}$. **3571.** $-\frac{\cos^7 x}{\sin x}-\frac{7}{6}\sin x\cos^5 x-\frac{35}{24}\sin x\cos^3 x-\frac{35}{16}\sin x\cos x-\frac{35}{16}$.

3572. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|$. **3573.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$.

3574. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. **3575.** $-x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg}x$.

3576. $\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$. **3577.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg}x|$.

3578. $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x.$

3579. $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x.$

3580. $\frac{x}{4}-\frac{\sin 2px}{8p}+\frac{\sin qx}{8q}+\frac{\sin 2(p-q)}{16(p-q)}x+\frac{\sin 2(p+q)}{16(p+q)}x.$

3581. $-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x.$

3582. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}.$

3583. $\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{36}\sin 9x.$

3584. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}.$

3585. $16e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+3x-6\right).$

3586. $2e^u(u^5-5u^4+20u^3-60u^2+120u-120),\ u=\sqrt{x}.$

3587. $e^x-\ln(1+e^x).$

3588. $\frac{e^x}{x+1}.$

3589. $\frac{e^x}{1+x^2}.$

3590. $\frac{x}{2(e^x-1)^2}-\frac{1}{2(e^x-1)}-\frac{1}{2}\ln(1-e^{-x}).$

3591. $\ln(e^x+\sqrt{e^2x-1}+\arcsin e^{-x}).$

3592. $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}.$

3593. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$

3594. $-\frac{1}{x\ln|x|}.$

3595. $\frac{1}{20(2x+5)}+\frac{1}{100}\ln x-\frac{1}{100}\ln|2x+5|-\frac{\ln x}{4(2x+5)}.$

3596. $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+2x.$

3597. $-\frac{x}{2}+x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x.$

3598. $\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\ln\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{|x|}.$

3599. $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x.$

3600. $\frac{e^x}{2}[x(\sin x+\cos x)-\sin x].$

3601. $e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right].$

3602. $\frac{x^3}{10}(3\cos\ln x+\sin\ln x)$. **3603.** $\operatorname{tg} x\ln|\cos x|+\operatorname{tg} x-x$. **3604.** $2(\sin x-1)e^{\sin x}$.

3605. $(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$. **3606.** $(\arcsin^2 x+\arcsin x-2)x+\sqrt{1-x^2}(1+2\arcsin x)$.

3607. $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$ **3608.** $-\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}$.

3609. $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **3610.** $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x\cos x+\operatorname{sh} x\sin x)$.

3611. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x\sin x+\operatorname{ch} x\cos x)$. **3612.** $\frac{1}{4}(\operatorname{sh} 2x-2x)$. **3613.** $\frac{1}{4}(\operatorname{sh} 2x+2x)$.

3614. $\frac{\operatorname{sh} 2x+2x}{4}+\frac{\operatorname{ch}^2 x}{2}$. **3615.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch} x$.

3616. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$. **3617.** $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$.

3618. $\frac{1}{2}[\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\arcsin(e^{-2x})]$. **3619.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$. **3620.** $\ln|\operatorname{th} x|$.

3621. $-\frac{1}{\operatorname{th} x}-\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{th} x-1}{\operatorname{th} x+1}$. **3622.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

3623. $x\operatorname{th} x-\ln\operatorname{ch} x$. **3624.** $-\frac{2}{\operatorname{th}\frac{x}{2}+3}$.

3625. $\sqrt{\frac{1}{2}(e^{2x}+1)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})$. **3626.** $\operatorname{sh} x+\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x+\frac{1}{5}(\operatorname{sh}^5 x+\operatorname{ch}^5 x)$.

3627. $-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x+1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x+1)^{11}}$. **3628.** $\frac{1}{8}\frac{x+x^3}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

3629. $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arc\,tg} x$. **3630.** $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|$.

3631. $\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|$. **3632.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$.

3633. $\frac{(1+x)|1+x|}{2}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$. **3634.** $2xe^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+4e^{\sqrt{x}}$. **3635.** $\frac{x^2}{2}$.

3636. $x^x\ (x>0)$. **3637.** $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$, $(|x|>1)$.

3638. $\dfrac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **3639.** $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$.

3640. $\dfrac{1}{12}x^2(\cos 3x-9\cos x)-\dfrac{1}{18}(\sin 3x-27\sin x)-\dfrac{1}{54}(\cos 3x-81\cos x)$.

3641. $e^x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **3642.** $x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}$. **3643.** $-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}x}+\sqrt{\operatorname{ctg}x}}{2}$.

3644. $\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x\right)\ln\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{9}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x$. **3645.** $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}}\right|-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\sin x}$.

3646. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}[\sin\ln x-(\sqrt{2}-1)\cos\ln x]\,x^{\sqrt{2}+1}$.

3647. $-\varphi-[1+\ln(\cos\varphi)+\sqrt{\cos 2\varphi}]\operatorname{ctg}\varphi+\dfrac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin\varphi}$.

3648. $x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$, $(x<0)$.

3649. $-\dfrac{6x+x^3}{9}-\dfrac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x$. **3650.** $-\dfrac{1}{e^x\sqrt{1\pm e^x}}\pm\dfrac{3}{\sqrt{1\pm e^x}}-\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1\pm e^x}-1}{\sqrt{1\pm e^x}+1}\right|$.

3651. $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^\nu b^\nu-1}{(n-\nu)a^\nu x^{n-\nu}}+\frac{(-1)^{n-1}b^{n-1}}{a^n}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|$, $n\geqslant 2$.

3652. $-\dfrac{\ln(a+bx)}{(n-1)x^{n-1}}+\dfrac{b}{n-1}\displaystyle\int\frac{dx}{x^{n-1}(a+bx)}$ (vidi zadatak 3651).

3653. $-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}\right)\ln^2(a+bx)+\dfrac{2}{a}\displaystyle\int\frac{\ln(a+bx)}{x}dx$. **3654.** $y=\dfrac{x^4}{3}-2x^2+3x+\dfrac{14}{3}$.

3655. $F(x)=\dfrac{2}{9}\sqrt{9x^2-4}-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{3x+\sqrt{9x^2-4}}{2}\right|$. **3656.** $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$.

3657. $a=-4$; $b=3$. **3658.** $-\dfrac{2}{n\cos a}\left(\sin\dfrac{x+a}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{x-a}{3}\right)^{-n}$. $(\cos a\neq 0)$.

3659. $\alpha=0$; β može biti proizvoljno. **3660.** $\alpha c+\gamma a=2\beta b$.

3662. $p=\dfrac{2}{k}$ gde je $k=\pm 1;\ \pm 2;\ldots$ **3663.** $a_1+\dfrac{a_2}{1!}+\dfrac{a_3}{2!}+\cdots+\dfrac{a_n}{(n-1)!}=0$.

Glava VIII

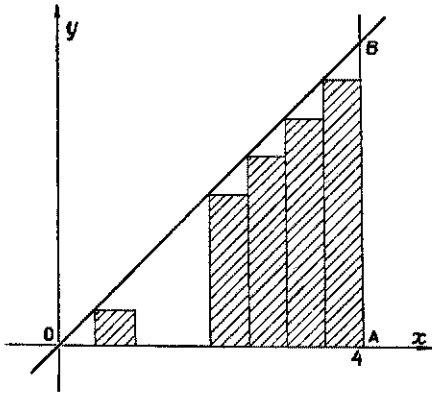
3664. $f(x)=x$ je neprekidna na $[0;\ 4]$

$$\int_0^4 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i,\ \Delta x_i=\frac{4}{n},$$

$$x_i=\xi_i=\frac{4i}{n},\ \int_0^4 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n}\,\frac{4}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^2}(1+2+\cdots+n)=8.$$

Broj $\int_0^4 x\,dx$ predstavlja merni broj površine trougla OAB (sl. 407).



Sl. 407

3665. $$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^0+e^{\frac{1}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}=$$

$$=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=e-1 \text{ (vidi zadatak 1955).}$$

3666. $$\int_0^\pi \sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=2 \text{ (vidi zadatak 798).}$$

3667. $\dfrac{a^{10}-1}{\ln a}$. **3668.** a) $\ln b-\ln a=\ln\dfrac{b}{a}$; b) $\sin b-\sin a$.

3669. $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

3670. Podintegralne funkcije su neparne. **3671.** $\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}\ (n\neq-1)$. **3672.** $\frac{\pi}{2}$.

3673. $\frac{\pi}{2}$. **3674.** $\frac{\pi}{4}$. **3675.** $\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $\alpha\neq1$; $\ln 2$, $\alpha=1$. **3676.** $\operatorname{ch} 1-1$.

3677. Suma $S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$ može da se smatra kao integralna suma za funkciju

$f(x)=\frac{1}{1+x}$ na odsečku [0, 1], gde su deone tačke $x_i=\frac{i}{n}$;

prema tome je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

3678. $S_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{2n-1}{n}\right)$. Ovo je integralna suma funkcije

$f(x)=x$ na odsečku [0, 2] pa je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int\limits_0^2 x\,dx=2$. **3679.** $\frac{1}{p+1}$.

3680. $\frac{124}{3}$. **3681.** $\frac{\pi^3}{64}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}$. **3682.** 2. **3683.** $2\ln 2+\frac{3}{4}$. **3684.** 2π.

3685. 0. (Podintegralna funkcija je neparna). **3686.** $\frac{7}{4}$ **3687.** $\frac{m}{m+n}$.

3688. $1-\cos 1$. **3689.** $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. **3690.** $\frac{\pi}{2}$. **3691.** $\ln 3$. **3692.** $\operatorname{arc\,tg} e-\frac{\pi}{4}$.

3693. $2-\frac{\pi}{2}$. **3694.** $\frac{1}{4}(e^{a^4}-a^4)$, gde je $a=e^e$. **3695.** $\frac{4}{3}$. **3696.** $\frac{1}{3}$.

3697. Smena $x=R\sin t$. Za $x=0\Rightarrow R\sin t=0\Rightarrow t=0$; za $x=R\Rightarrow R\sin t=R\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$;

$$dx=R\cos t\,dt;\ \int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,dt=R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{R^2\pi}{4}.$$

3698. $\frac{R^4\pi}{16}$ $(x=R\sin t)$. **3699.** $\frac{98}{3}$, $(x^2+9=t^2)$.

3700. $\frac{1412}{5}$. **3701.** $4-\frac{\pi}{4}$. **3702.** $-\frac{1}{5}\ln 112$. **3703.** 1.

3704. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{9}\ln 2-\frac{1}{6}$.

3705. $3\ln(1+\sqrt{2})-\frac{7}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3}$.

3706. $t=mx+n$, $dx=\frac{dt}{m}$, $ma+n=\alpha$, $mb+n=\beta$, odakle je: $m=\frac{\alpha-\beta}{a-b}$, $n=\frac{a\beta-b\alpha}{a-b}$.

pa je: $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{b-a}{\alpha-\beta}t+\frac{a\beta-\alpha b}{\beta-\alpha}\right)dt.$

3707. $a+b-x=t$, $dx=-dt$. Za $x=a \Rightarrow t=b$, za $x=b \Rightarrow t=a$,

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx=-\int_b^a f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx.$$

3709. 1° Smenom $x=\frac{\pi}{2}+t$ dobijamo $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)f(\cos t)\,dt=$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t f(\cos t)\,dt=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx;\ 2°\ \frac{\pi^2}{4}.$$

3710. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$; $(\operatorname{tg} x=t)$.

3711. 0 za $|a|<1$; $\frac{\pi}{2}$ za $|a|=1$; $\frac{2\pi}{a}$ za $|a|>1$.

3712. 1° $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$. Drugi integral smenom $\frac{\pi}{2}-x=t$ svodi se na

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n t\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt.$$

3713. $x=2$.

3715. $\frac{\pi}{2}-1$.

3716. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$.

3717. $\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\pi}{2}$.

3718. a) Vidi zadatak (3717).

3720. $\arcsin\frac{a\sqrt{2}}{1+a^2}-\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{1+b^2}$.

3722. $\frac{1}{e}(1+n+n(n-1)+\cdots+n!)+n!$.

3723. $\dfrac{e^{m+1}}{m+1}\left[1-\dfrac{n}{m+1}+\dfrac{n(n-1)}{(m+1)^2}+\cdots+(-1)^n\dfrac{n!}{(m+1)^n}\right]+(-1)^{m+1}\dfrac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$

3724. $\dfrac{3a\pi\sqrt{a}}{16}.$ **3725.** Podintegralna funkcija je prekidna za $x=2\in[0,3]$ pa se ne sme primeniti Newton-Leibnitzova formula.

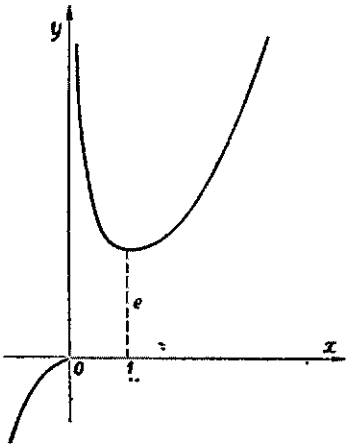
3726. Pogrešna je jednakost $\int\limits_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int\limits_0^\pi \cos x\,dx$, jer je $\sqrt{\cos^2 x}=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ -\cos x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}.$

3727. $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ je prekidna za $x=\pi\in[0;\ 2\pi]$.

3728. $\int\limits_0^1 xe^{\frac{x}{t}}\,dx=te^{\frac{1}{t}}-t^2e^{\frac{1}{t}}+t^2,$

pa je: $I(t)=te^{\frac{1}{t}}$ $I'(t)=e^{\frac{1}{t}}\dfrac{t-1}{t}$,

$I''(t)=\dfrac{1}{t^3}e^{\frac{1}{t}}$ $\min I=e$ za $t=1$ (sl. 408).



Sl. 408

3730. $y=\int\limits_0^x \cos t\,dt=\sin x$, $y'=\cos x$, $y'=0$ za $x=\dfrac{\pi}{2}+$ $+k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, $\max y=1$, $\min y=-1$.

3731. $f(x)=\int\limits_0^x \dfrac{2x+x}{x^2-2x+2}\,dx=\ln(x^2-2x+2)+$ $+3\operatorname{arc\,tg}(x-1)+\dfrac{3\pi}{4}-\ln 2$, $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+2}$.

$f'(x)=0$ za $x=-\dfrac{1}{2}$. Pošto $-\dfrac{1}{2}\notin[1\sqrt{3}+1]\Rightarrow f(x)\nearrow x\in[1,\sqrt{3}+1]$, pa je

$M=f(\sqrt{3}+1)=\ln 4+3\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}-\ln 2+\dfrac{3\pi}{4}\approx 5{,}498.$ $m=f(1)=\dfrac{3\pi}{4}-\ln 2=0{,}095.$

3732. Najveća vrednost za $x=0$ i $x=1$: $y=0$. Najmanja za $x=\dfrac{1}{2}$: $y=\ln\dfrac{3}{4}$.

3733. $f(0)=\int\limits_0^0 \dfrac{x}{1+x^4}\,dx=0$; $f'(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$; $f'(0)=0$; $f''(x)=\dfrac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$, $f''(0)=1$; $f'''(x)=$

$=\dfrac{12x^7-20x^3}{(1+x^4)^3}\Rightarrow f(x)\approx\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\approx\dfrac{1}{20}$, $R<\dfrac{1}{3!\,10^3}\left(12\cdot\dfrac{1}{10^2}+20\right)<0{,}00336.$

3734. 1. **3735.** $y' = \operatorname{sh} x,\ y'' = \operatorname{ch} x,\ K(x) = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{(1+\operatorname{sh}^2 x)^{3/2}}\ K(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

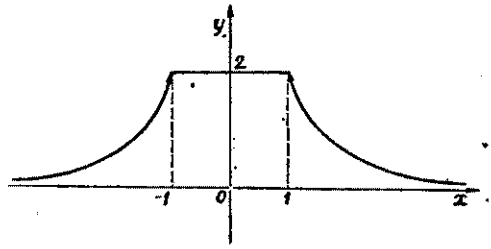
$\max K = 1$ za $x = 0$.

3736. Za $x \neq 1$: $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = -\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2-2xt}\,\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{x}(|x-1|-|x+1|) =$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & x<-1 \\ 2, & -1<x<1 \\ \dfrac{2}{x}, & x>1. \end{cases}$$

$\Big($Za $x = 1$:

$f(1) = \displaystyle\lim_{b\to 1}\int_{-1}^{b} \frac{dt}{\sqrt{2-2t}} = 2\Big)$ (sl. 409).



Sl. 409

3737. 1° $T_4(x) = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2}$, $R_4(x) = \dfrac{x^5}{5!}(120\,\xi + 160\,\xi^3 + 32\,\xi^5)\,e\,\xi^2$, $-\dfrac{1}{4} < \xi < \dfrac{1}{4}$.

$|R_4(x)| < 0{,}0005$. 2° $\displaystyle\int_0^{1/4} \left| e^{x^2} - T_4(x) \right| dx < \frac{1}{4}\cdot 0{,}0005 = 0{,}0002.$

3738. $x = -7$. **3739.** $x = 0$. **3740.** $x = 1$. **3741.** $x = \ln 8$. **3742.** -1.

3743. 1. **3746.** $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_0^A x^n e^{-x}\,dx = n!$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$

3748. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ je neograničena za $x = 0$, pa je $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}[2\sqrt{x}]\right|_\varepsilon^1 = 2.$

3749. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\lim_{b\to\infty}[\operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} 0] = \pi.$

3750. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \\ \infty, & \alpha\geq 1. \end{cases}$

$\Big($Za $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = \infty\Big)$. Integral konvergira za $\alpha < 1$.

3751. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha<1.\end{cases}$ **3752.** Divergira za $\alpha>1$. **3753.** Divergira.

3754. $\frac{1}{2}+\frac{e^2}{4}$. **3755.** $\frac{\pi}{2}$. **3756.** $\frac{21}{4}$. **3757.** Divergira. **3758.** 6.

3759. 0. **3760.** $\frac{1}{\ln 2}$. **3761.** $\frac{1}{\ln a}$ za $a>1$; divergira za $a<1$. **3762.** Divergira.

3763. $\frac{e^k}{k}$ za $k>0$; ∞ za $k<0$. **3764.** $\frac{a}{a^2+b^2}$, $a>0$. **3765.** $\frac{b}{a^2+b^2}$, $a>0$.

3766. $\ln\sqrt[4]{2}$. **3767.** $\frac{1}{a}\ln(a+\sqrt{a^2+1})$. **3768.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}[\pi-2\ln(\sqrt{2}+1)]$.

3769. $\left|\frac{\sin x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\right|<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ a $\int\limits_0^\infty \frac{\pi}{2(1+x^2)}dx$ konvergira,

prema tome $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$ konvergira. **3770.** Konvergira. **3771.** Konvergira.

3772. Konvergira $\left(\text{za } x>1\text{: } \frac{1}{xe^x}<\frac{1}{e^x}\right)$. **3773.** Konvergira za $a>-2$ i $a-b<-1$.

3779. $a^2 I_1+I_2=\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$, $b^2 I_1+I_2=\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$,

pa je $I_1(a^2-b^2)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$, $I_1=\frac{\pi}{2ab(a+b)}$, $I_2=\frac{\pi}{2(a+b)}$.

3781. $2\operatorname{sh}(a\ln a)$, $(a>0)$. Smena $|x|^x=t$ daje $\int |x|^x(\ln|x|+1)\,dx=|x|^x$,

pa je $\int\limits_{-a}^{a}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|x|^x\Big|_{-a}^{\varepsilon}+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}|x|^x\Big|_{\varepsilon}^{a}=1-a^{-a}+a^a-1=2\operatorname{sh}(a\ln a)$.

3782. $\sqrt{3}<\sqrt{3+x^2}<2$ za $x\in[0,\ 1]$, pa je $\int\limits_0^1 \sqrt{3}\,dx<\int\limits_0^1 \sqrt{3+x^2}\,dx<\int\limits_0^1 2\,dx$,

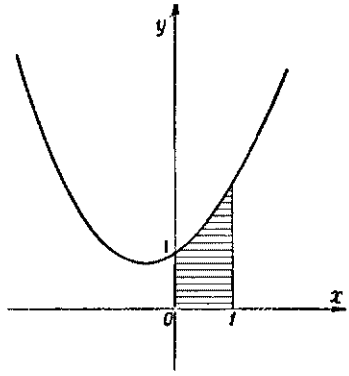
tj. $\sqrt{3}<\int\limits_0^1 \sqrt{3+x^2}\,dx<2$.

3783. $\frac{-1}{4+x^2}<\frac{\cos ax}{4+x^2}<\frac{1}{4-x^2}$, pa je $\int_0^\infty \frac{-dx}{4+x^2}<\int_0^\infty \frac{\cos ax}{4+x^2}dx<\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$, odnosno

$-\frac{\pi}{4}<\int_0^\infty \frac{\cos ax}{4+x^2}dx<\frac{\pi}{4}$. **3784.** $\frac{1}{\sqrt{2}}<\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}<\frac{2}{3}$, $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}=$

$=2\arcsin\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}<\arcsin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$.

3785. $f(x)=e^{x^2-x}$ je neprekidna i ima u [0, 2] najveću vrednost $M=e^2$ za $x=2$, i najmanju vrednost $m=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ za $x=\frac{1}{2}$, odakle sledi tvrđenje.



Sl. 410

3786. $\frac{\pi}{9}<I<\frac{2\pi}{3}$, $I=\frac{5\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **3787.** Drugi.

3788. Za $a>e$ veći je prvi, za $0<a<e$ veći je drugi.

3789. U [1, 2] je $3^{x^3}>3^{x^2}$ pa je $\int_1^2 3^{x^3}dx>\int_1^2 3^{x^2}dx$.

3790. Prvi. **3791.** $\frac{1}{e-1}$. **3792.** $\frac{3}{8}$. **3793.** $\frac{\pi}{2}$. **3794.** $\int_1^e \frac{\operatorname{arc\,tg}(\ln x)}{x}dx>0$.

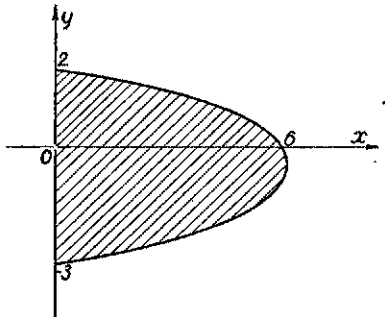
3795. $0{,}005<I<0{,}01$. **3796.** $0<I<\frac{1}{50\pi}$.

3797. $P=\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+$

$+1=\frac{11}{6}$ (sl. 410). **3798.** U ovom slučaju je zgodnije vršiti integraciju duž y ose, pa je

$P=\int_{-3}^2 (6-y-y^2)\,dx=\left[6y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-3}^2=$

$=\frac{125}{6}$ (sl. 411).

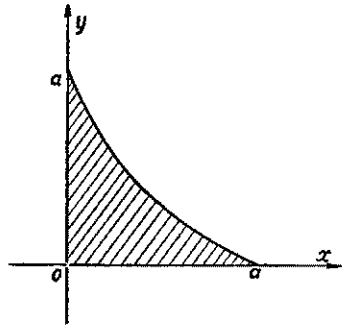


Sl. 411

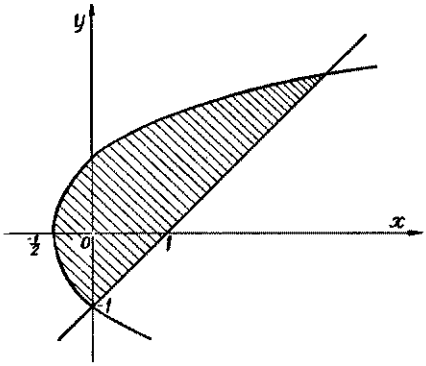
3799. $P=\ln a$ za $a>1$; za <1, $P=\int_a^1 \frac{1}{x}dx=-\ln a$, $\lim_{a\to 0}\ln a=+\infty$.

3800. $\ln\sqrt{2}$. **3801.** $\frac{32}{3}$. **3802.** $P=\int_0^a (a+x-2\sqrt{ax})\,dx=\frac{a^2}{6}$ (sl. 412).

3804. $\frac{\pi}{2}$. **3805.** $ab\pi$. (Napisati jednačinu elipse u parametarskom obliku $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t. \end{cases}$)



Sl. 412



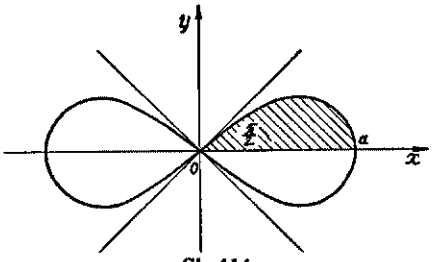
Sl. 413

3806. $2-\sqrt{2}$. **3807.** $\frac{8a^2(3\sqrt{3}-1)}{3}-2a^2\pi$.

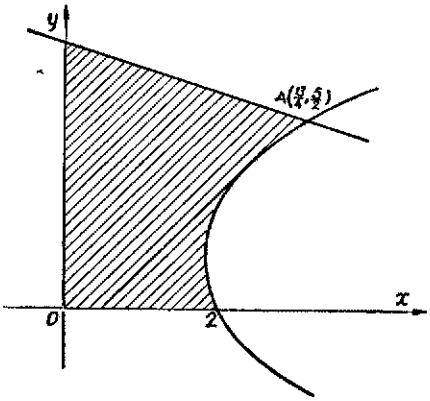
3808. $P=\int_{-1}^{3}\left[(y+1)-\frac{y^2-1}{2}\right]dy=\frac{16}{3}$ (sl. 413).

3809. $P=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=$

$=2a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$ (sl. 414).



Sl. 414



Sl. 415

3810. Jednačine astroide u parametarskom obliku glase: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$,

$$P=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\quad dt=\frac{3}{8}a^2\pi.$$

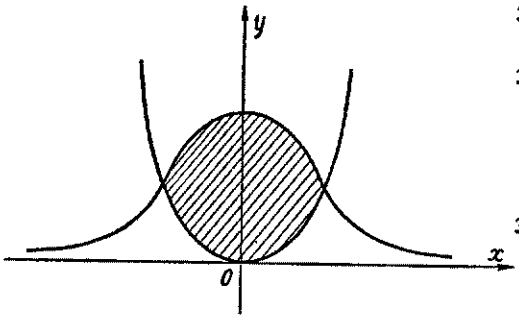
3811. Presečne tačke: $A(4, 5)$, $B(1, 2)$, $P=\frac{31}{4}$.

3812. $\frac{32}{5}$. **3813.** (sl. 415):

$$P=\int_0^{\frac{|5|}{2}}(y^2-2y+2)\,dy+\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{|9|}{2}}\frac{9-y}{2}\,dy=\frac{697}{48}.$$

3814. $\frac{4}{3}p^2$.

3815. $a=c=1,\ d=-2,\ b=0,\ P=4\sqrt{2}+2\ln(3-\sqrt{2})$.



Sl. 416

3816. $\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{a}{b}}-e^{-\frac{b}{a}}\right)$.

3817. $P=2-2\sqrt{2}-2\ln(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \ln(\sqrt{2}-1)<$ $<1-\sqrt{2}$. **3818.** $a^2\left(2\pi-\frac{4}{3}\right)$ (sl. 416).

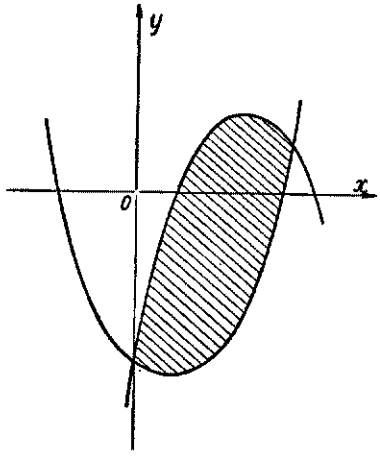
3819. $P=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\int\limits_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx=$ $=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

3820. $\frac{2}{3}$. **3821.** $\frac{2167}{375}$ (sl. 417).

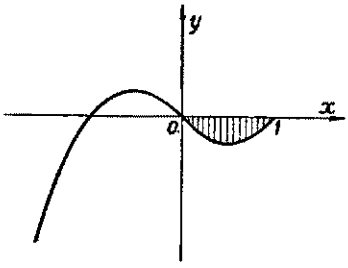
3822. $\ln 3-\frac{8}{9}$. **3823.** $3a^2\pi$.

3824. $\frac{3}{2}a^2$. **3825.** $\frac{3}{2}a^2\pi$.

3826. $P=-\int\limits_0^1 (1-x^2)\ln(1-x)\,dx=\frac{1}{2}$ (sl. 418).



Sl. 417

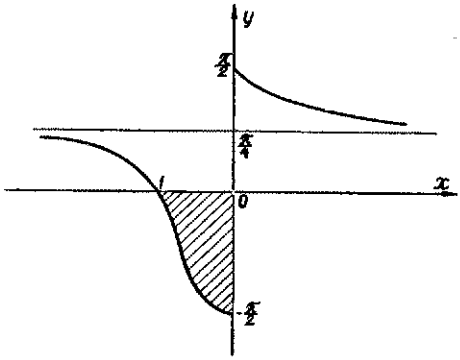


Sl. 418

3827. $P=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1/e}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx=1$.

3828. π. **3829.** $P=4\int\limits_0^3 \frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}\,dx=8$.

3830. $P=-\int\limits_{-1}^0 \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{\pi}{4}$ (sl. 419).



Sl. 419

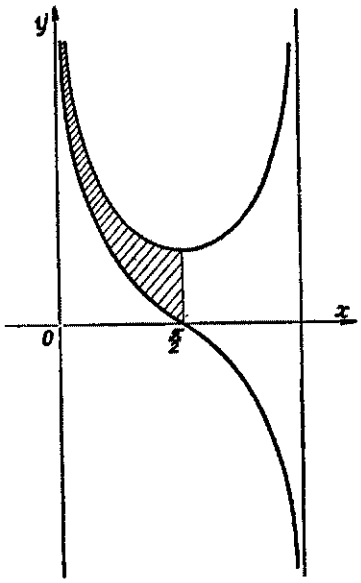
3831. $P=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\operatorname{cotg} x\right)dx=\ln 2$ (sl. 420). **3832.** $5\arcsin\frac{3}{5}-4\ln 2$.

3833. 1° $\frac{a\pi}{4}$; 2° $\frac{a^2\pi}{8}$ (jedna petlja); 3° $\frac{a^2\pi}{12}$ (jedna petlja).

3834. $\frac{a^2}{4}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\pi\right)$ (deo izvan kruga). **3835.** 2.

3836. $m=2e,\ P=\frac{2\sqrt{e}}{3}$.

3837. $P=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^2}{4}}\frac{\ln 2+\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=1.$



Sl. 420

3838. $\frac{e}{2}$. **3839.** $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$.

3840. $\frac{\pi-2}{8}$. **3841.** $P=2\int\limits_0^{\infty}x^3e^{-x^2}ax=1.$

3842. $\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=1.$ **3843.** $P=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x-2x^2)\,dx=2(1+\ln 2).$ **3844.** $\frac{2597}{20}$.

3845. $4\pi\sqrt{3}$. **3846.** $P=2\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^3}dx=\frac{1}{2}$. **3847.** $\frac{r}{4}$. **3848.** $y=\frac{2}{3}x$.

3849. $V=2\pi\int\limits_0^R y^2\,dx=2\pi\int\limits_0^R(R^2-x^2)\,dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)_0^R=\frac{4}{3}R^3\pi.$ **3850.** $\frac{\pi(R^2h-h^3)}{3}$.

3851. 1° $V_x=\pi\int\limits_0^1x^4\,dx=\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$; 2° $V_y=2\pi\int\limits_0^1x\cdot x^2\,dx=2\pi\int\limits_0^1x^3\,dx=\frac{\pi}{2}$.

3852. 1° $\frac{4}{3}ab^2\pi$; 2° $\frac{4}{3}a^2b\pi$. **3853.** π. **3854.** $\frac{32a^3\pi}{105}$. **3855.** $v=v_1-v_2=$

$$=\pi\int\limits_{-a}^{a}(y_2^2-y_1^2)\,dx=2\pi\int\limits_0^a[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2]\,dx=8b\pi\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2a^2b\pi^2.$$

3856. a) $\frac{(\pi+2)\pi}{4}$; b) $\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

3857. $\frac{76\pi}{15}$. **3858.** $g(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2$, $V=\frac{\pi}{4}\ln 2$. **3859.** $\frac{572\pi}{105}$. **3860.** $\frac{\pi^2}{2}$.

3861. a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π. **3862.** $V=4\pi\int_0^1 x^4(1-x^2)^2\,dx=\frac{32\pi}{315}$. **3863.** $\frac{\pi}{30}$.

3864. $\frac{a^3\pi}{4}(e^2+4+e^{-2})$. **3865.** a) $\frac{3\pi}{10}$, b) $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$. **3866.** $\frac{e^2\pi}{8}$. **3867.** $\left(7-\frac{15}{4\ln 2}\right)\frac{\pi}{2}$.

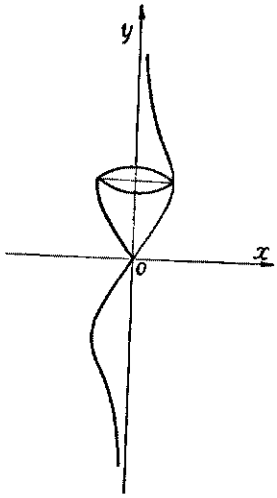
3868. $2a^3\pi^2$. Uputstvo: preći na paràmetarski oblik: $x=2a\sin^2 t$, $y=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t}$.

3869. $V=\int_2^{e^3+e} x^2\,dy=\pi\int_0^1 x^2(3e^{3x}+e^x)\,dx=\frac{2}{3}e^3+e-\frac{7}{3}$.

3870. $\frac{\pi}{2}$. **3871.** $x=\frac{y}{1+y^2}$, $x'=\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$,

$x_{\max}=\frac{1}{2}$ za $y=1$, $x''=\frac{6y^3-10y}{(1+y^2)^2}$; $x''=0$ za $y=\pm$

$\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. $V=\pi\int_0^1\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\,dy=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$ (sl. 421).



Sl. 421

3872. Telo opisuje gornji luk kardioide: $0<\varphi<\pi$.

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\alpha \rho^3\sin\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\,d(1\cos\varphi)=-\frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi=\frac{8\pi a^3}{3}.$$

3873. $\frac{a^3\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{3}\right]$. Uputstvo: Uvesti polarne koordinate.

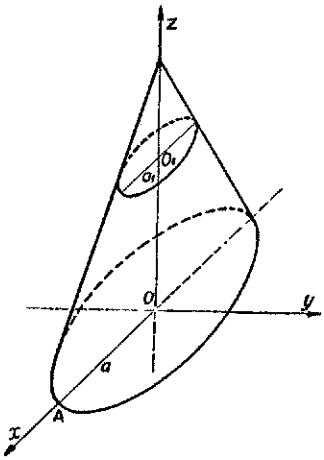
3874. Izvršimo translaciju koordinatnog sistema: $x=X$, $y=Y-1$; tada je; $Y=\cos X+1$ i tražimo

$$V_x=\pi\int_{-\pi}^{\pi}Y^2\,dx=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 x+2\cos x+1)\,dx=3\pi^2.$$

3875. 1° $5\pi^2a^3$; 2° $6\pi^3a^3$; 3° $\frac{1}{6}\pi a^3(9\pi^2-16)$.

3876. $\frac{a_1}{a}=\frac{h-z}{h}$, $a_1=\frac{a}{h}(h-z)$. Analogno je

$b_1=\frac{b}{h}(h-z)$ pa je površina poprečnog preseka na visini z: $P(z)=a_1b_1\pi$, tj. $P(z)=\frac{ab}{h^2}(h-z)^2\pi$.



Sl. 422

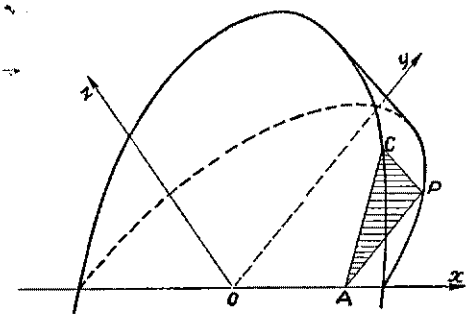
Zapremina će biti:

$$V=\int_{z_1}^{z_2} P(z)\,dz=\int_0^h \frac{ab\pi}{h^2}(h-z)^2\,dz=\frac{ab\pi}{h^2}\cdot\frac{(h-z)^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{abh\pi}{3}\ \text{(sl. 422).}$$

3877. Površina preseka ravni koja je normalna na x je $P(x)=P_\Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\frac{y^2}{2}\cdot V=$

$$=2\int_0^a P(x)\,dx=\int_0^a (a^2-x)\,dx=\frac{2}{3}a^3$$

(sl. 423).



Sl. 423

3878. $P(x)=(2x)\pi,\quad v=\int_0^a P(x)\,dx=$

$$=2\pi\int_0^a x\,dx=a^2\pi.$$

3879. $\frac{\pi}{32}$. **3880.** $\frac{16}{3}$.

3881. $\frac{1}{3}r^3\operatorname{cotg}\alpha\,[(2+\cos^2\varphi)\sin\varphi-3\varphi\cos\varphi]$. (Videti zadatak 3877).

3882. Ako hiperboloid presecamo ravnima paralelnim xOy, dobijaju se preseci elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},$$

poluose su joj: $a_1=a\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)}$ i $b_1=b\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}$,

pa je $P(z)=ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\pi$ i $v=\int_0^h ab\left(1+\frac{s^2}{c^2}\right)\pi\,dz=abh\pi\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$.

3883. $\frac{4}{3}abc\pi$. (Videti prethodni zadatak). **3884.** $133\frac{1}{3}\,\text{cm}^3$. **3885.** $\frac{8}{3}a^3$.

3886. $y=\sqrt{a^2-x^2},\ y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}};\ S=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=4a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2a\pi.$

3887. $x=0$ za $t=0$; $y=0$ za $t=\sqrt[4]{8}$; $S=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}}\,dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{1+t^4}\,dt=\frac{13}{3}$.

3888. $s=2\int_0^\pi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=4a\int_0^\pi\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a.$

3889. $y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},\ s=4\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx$, pa je $s=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\,dx=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx=6a.$

3890. $y=0$ za $1-\cos t=0$, tj. $t=0$ i $t=2\pi$. $S=8a$. **3891.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$. **3892.** $\frac{\pi^3}{3}$. **3893.** $\frac{112}{27}$.

3894. $s=\int\limits_{-1}^{3}\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int\limits_{-1}^{3}\sqrt{1+y^2}\,dy=\frac{1}{2}\left[y\sqrt{1+y^2}+\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]\Big|_{-1}^{3}=$

$=\frac{1}{2}\left[3\sqrt{10}+\sqrt{2}+\ln\frac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}\right]$. **3895.** $a\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right)$.

3896. $y'_1=f(x)$, $y'_2 f'(x)$. Luk druge krive dobija se translacijom luka prve duž prave paralelne y osi.

3897. $\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$. **3898.** $\ln 3$.

3899. $s_1=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$, $s_2=\int\limits_{a+h}^{b+h}\sqrt{1+f'^2(x-h)}\,dx$. Drugi integral (smena: $x-h=t$) svodi se na prvi. Luk druge krive dobija se translacijom luka prve krive paralelno x osi.

3900. $1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$. **3901.** $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. **3902.** $a\cdot\operatorname{sh}\frac{t}{2}$.

3903. Jednačina elipse: $x=\sqrt{2}\sin t$, $y=\cos t$, pa je $S_1=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$. Luk sinusoide je $S_2=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$. Primedba: dobijeni integrali su eliptički i ne mogu se elementarno izračunati. **3904.** $M\left[a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \frac{3a}{2}\right]$.

3905. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+e^4}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sqrt{2})\,(1-\sqrt{1+e^4})}{(1-\sqrt{2})\,(1+\sqrt{1+e^4})}\right]$.

3906. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **3907.** $\frac{28}{3}$. **3908.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

3909. Za $\alpha>0$: $S=\int\limits_{-\infty}^{\theta}\sqrt{e^{2\alpha\theta}+\alpha^2 e^{2\alpha\theta}}\,d\theta=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\theta}$. Za $\alpha<0$: $S=\int\limits_{\infty}^{\theta}\sqrt{e^{2\alpha\theta}+\alpha^2 e^{2\alpha\theta}}\,d\theta=$

$=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\theta}$. **3910.** 8. **3911.** $S\approx 46{,}60$.

3912. $\int\limits_0^x\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx=\int\limits_0^x\sqrt{1+\frac{1}{1-x^2}}\,dx\Rightarrow y'=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y=\pm\arcsin x+c$.

3913. 8. **3914.** $\frac{s_1}{s_2}=\frac{2}{3}$, $s_1=\int\limits_0^\theta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=4a-4\cos\frac{\theta}{2}$,

$s_2=\int\limits_\theta^\pi \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=4a\cos\frac{\theta}{2}$, pa je $\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{3}$, odakle je: $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{7}{25}$,

$\rho=2a\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{32a}{25}$, pa je: $x=-\frac{224a}{625}$, $y=\frac{768a}{625}$.

3915. Sferu opisuje gornji polukrug kruga $x^2+y^2=R^2$ rotiranjem oko x ose.

$$P=2\cdot 2\pi\int\limits_0^R y\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\pi\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R^2\pi.$$ **3916.** $2R\pi h$.

3917. $P=2\pi\int\limits_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=-2\pi\int\limits_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,d(\cos x)=2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

3918. $P=2\pi\int\limits_0^3 \frac{3-x}{3}\sqrt{x}\cdot\frac{x+x}{2\sqrt{x}}\,dx=3\pi$. **3919.** $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=a\,2\sin\frac{t}{2}\,dt$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(a) $P=2\pi\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{64a^2\pi}{3}$;

(b) prava $x=\pi a$ je osa simetrije pomenutog luka, pa traženu površinu opisuje polaluk. Posle translacije koordinatnog sistema imamo:

$$P=2\pi\int\limits_0^\pi(\pi a-x)\,dx=2\pi\int\limits_0^\pi(\pi a-at+$$

$$+a\sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=4\pi a^2\int\limits_0^\pi\left(\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2.$$

3920. U parametarskom obliku jednačine astroide glase: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$,

pa je $P=2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\frac{12}{5}\pi a^2$. **3921.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2+4-e^{-2})$.

3922. $4\pi^2$. **3923.** a) $2\pi\left[b^2+ab\frac{\arcsin e}{e}\right]$, gde je $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; b) $2\pi\left[a^2+\frac{b^2}{3e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right]$.

3924. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **3925.** $2ah\pi\left[\sqrt{1+u^2}+\frac{\ln(u+\sqrt{1+u^2})}{u}\right]$, $u=\frac{h\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}$.

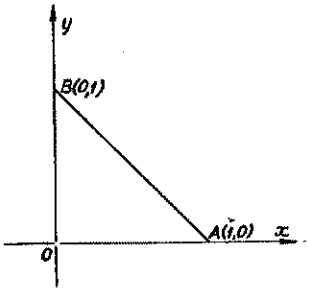
3926. $\frac{32a^2\pi}{5}$. **3927.** $2a^2\pi(2-\sqrt{2})$ (preći u polarne koordinate).

3928. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{5}}\left[\dfrac{7\sqrt{2}-8}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$ (izvršiti rotaciju osa). **3929.** $\dfrac{8\pi}{3}(3\pi-4)$.

3930. $29{,}6\pi$. **3931.** Kako je $y=1-x$ (sl. 424), to je: $M_x=\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dy=$

$$=\int\limits_0^1 (1-x)\sqrt{1+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

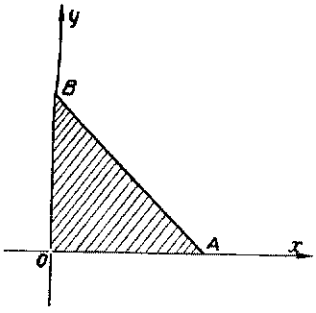
$$M_y=\int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{2}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Sl. 424

3932. $M_x=\int\limits_a^b y\,|y|\,dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2\,dx=\dfrac{1}{6}$,

$M_y=\int\limits_a^b x\,|y|\,dx=\int\limits_0^1 x(1-x)\,dx=\dfrac{1}{6}$ (sl. 425).



Sl. 425

3933. $M_x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

3934. $M_x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt=\dfrac{3a^2}{5}$; $M_y=\dfrac{3a^2}{5}$. (Koristiti parametarske jednačine astroide).

3935. $X_T=\dfrac{\int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx}{a\pi}=0$, $Y_T=\dfrac{2a}{\pi}$. **3936.** $X_T=0$, $Y_T=\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$.

3937. $X_T=Y_T=\dfrac{2a}{5}$. **3938.** $X_T=\dfrac{\int\limits_0^a x\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{\dfrac{ab\pi}{4}}=\dfrac{4a}{3\pi}$. Slično je: $Y_T=\dfrac{4b}{3\pi}$.

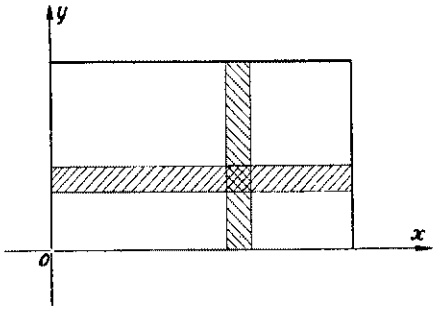
3939. $\left(0,\dfrac{2b}{\pi}\right)$. **3940.** $X_T=\dfrac{a\sin\alpha}{\alpha}$, $Y_T=0$.

3941. Pravougaonik podelimo paralelama duž x ose na niz pravougaonika (sl. 426). Elemenat površine (površina malog pravougaonika) je $dp = a\,dy$, pa je

$$I_x = \int_0^b y^2\,dp = a\int_0^b y^2\,dy = \frac{ab^3}{3}.$$

Slično je za momenat u odnosu na y osu. Sada je $dp = b,\ dx$ pa je

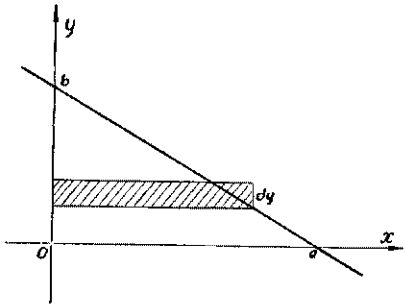
$$I_y = \int_0^a x^2\,dp = b\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3 b}{3}.$$



Sl. 426

3942. $I_x = \int_0^b \frac{a}{b}(b-y)\,y^2\,dy = \frac{ab^3}{12}$,

$dp = \frac{a}{b}(b-y)\,dy$; $I_y = \frac{a^2 b}{12}$ (sl. 427).



Sl. 427

3943. πa^3. **3944.** $\frac{1}{8}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\,r^4$.

3945. $\frac{1}{4}\pi ab^3$.

3946. Podelimo površinu kruga na elementarne površine koncentričnim krugovima. Elementarna površina biće: $dp = \pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2$ i (posle zanemarivanja beskonačno malih višeg reda u odnosu na $d\rho$)

$$I_p = \int_0^R \rho^2\,2\pi\rho\,d\rho = 2\pi\int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

3947. $I_x + I_y = I_p$; osim toga je $I_x = I_y$, znači da je $2I_x = I_p$, $I_x = \frac{1}{4}\pi R^4$.

3948. $\frac{\pi}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right)$. **3949.** Ako sečemo konus ravnima paralelnim osnovi, dobićemo elementarnu zapreminu $dv = 2\pi rh$, gde je r poluprečnik malog, nepravilnog cilindra koji tako nastaje, a $h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Tada je $I = \int_0^R 2\pi H\left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 dr = \frac{\pi R^4 H}{10}$.

3950. $M\cdot\frac{h^2}{10}$. **3951.** $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{5}$. **3953.** $\left(\pi a\frac{5a}{6}\right)$. **3954.** $\left(\frac{5a}{7}, 0\right)$.

3955. $y = \frac{r}{h}x$; $0 \leqslant x \leqslant h$; $x_T = \dfrac{\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,x\cdot dx}{\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx} = \frac{3h}{4}$; $y_T = 0$; $z_T = 0$. **3956.** $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$.

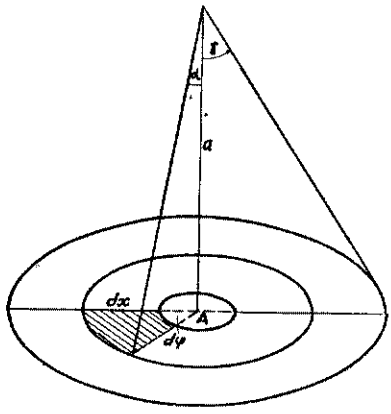
3957. $\left(0, \frac{9}{16} b, 0\right)$. **3958.** $x_T = \dfrac{\int_0^a x\,(\mathrm{ch}\,x)^2\,dx}{\int_0^a (\mathrm{ch}\,x)^2\,dx} = \dfrac{2a\,\mathrm{sh}\,2a + 2a^2 - \mathrm{ch}\,2a + 1}{2\,\mathrm{sh}\,2a + 4a}$, $y_T = 0$, $z_T = 0$.

3959. $s = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (v_0 - gt)\,dt = v_0 t - \frac{dt^2}{2}$. **3960.** $h(t) = \int_0^t \mathrm{cotg}\left(-\frac{gt}{c} + \mathrm{arc\,tg}\frac{v_0}{c}\right) dt = c$.

3961. $x \int \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) dt = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) + c$;

$c = x_1 - \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) \Rightarrow x_2 = x_1 +$

$+ \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_2 + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1 + \varphi_0\right)$.



Sl. 428

3962. Po Newtonovom zakonu: $F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ (k konstanta proporcionalnosti). Elemenat mase $\mu\,dx \cdot x d\varphi$ (na sl. 428 šrafiran) i materijalna tačka mase m privlače se silom: $km \cdot \mu \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} d\varphi$. Veličina komponente te sile u smeru AB je $km\mu \frac{x^2\,dx}{a^2 + x^2} \cos\alpha\,d\varphi =$

$= km\mu \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{a^2 + x^2}} d\varphi$. Komponente vertikalne na AB se međusobno poništavaju zbog simetrije ploče, pa je sila privlačenja kružnog prstena i tačke:

$d_F = km\mu a \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi km\mu a \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$, odakle je sila privlačenja ploče i

tačke: $F = 2\pi km\mu a \int_0^R \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + x^3)}} = 2\pi km\mu (1 - \cos\gamma)$, gde je γ ugao pod kojim se kružna ploča vidi iz tačke B. Ako $R \to \infty$, onda je $F = 2\pi km\mu$.

3963. $km \frac{M^3}{b^2}$, gde je $M = \frac{4}{3}\pi R^3$ (videti prethodni zadatak).

3964. Neka je: R—poluprečnik Zemlje, a—daljina tačke iz koje telo počinje da pada do centra Zemlje; x—pređeni put u vremenu t; g—gravitacija tela na površinu Zemlje; $G(a-x)$—ubrzanje Zemljine teže na udaljenosti $a-x$ od centra Zemlje. Prema Newtonovom zakonu ubrzanja se odnose kao sile: $\frac{G(a-x)}{g} = \frac{F(a-x)}{F(R)}$. Za $0 < x < a - R$,

je $\frac{G(a-x)}{g}=\frac{R}{(a-x)^2}$ ili $G(a-x)=g\frac{R^2}{(a-x)^2}$. Iz $\frac{dx}{dt}=v$, $\frac{dv}{dt}=G(a-x)$ dobijamo:

$v\,dv=G(a-x)\,dx=g\frac{R^2\,dx}{(a-x)^2}$. Kako je za $x=0$, $v=0$, to je $\int_0^v v\,dv=gR^2\int_0^x\frac{dx}{(a-x)^2}$

ili $\frac{v^2}{2}=gR^2\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a}\right)$ odnosno $V=R\sqrt{\frac{2ga}{a(a-x)}}$. Ako je $a=R$, a x dovoljno malo tako da se može zanemariti, dobijamo brzinu slobodnog padanja na Zemlji: $v=\sqrt{2gh}\cdot dt=\frac{dx}{v}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$, pa je $\int_0^t dt=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^x\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$, odakle je

$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{a-x}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$. Za $a=R$ i x zanemarljivo malo u odnosu na R imamo da je: $\sqrt{x(a-x)}\approx\sqrt{Rx}$, $\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}=\sqrt{\frac{x}{a}}$, pa je $t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\sqrt{Rx}+R\sqrt{\frac{x}{R}}\right)=$

$=\sqrt{\frac{2x}{g}}$ ili: $x=\frac{gt^2}{2}$. **3965.** $S=\int_0^\infty te^{-\frac{t}{100}}dt=10^4\,m.$

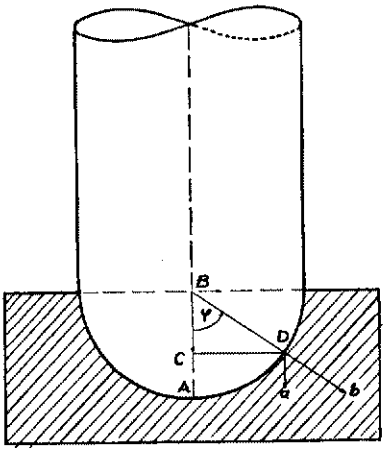
3966. Elemenat sile teže jednak je proizvodu elementa zapremine i specifične težine, tj. $dF=\gamma\pi R^2\,dx$, gde je dx debljina elementarnog sloja vode, γ specifična težina jedinice zapremine. Zato je elemenat rada: $dA=\gamma\pi R^2(H-x)\,dx$, gde je x dubina vodene površine u bačvi. $A=\int_0^H\gamma\pi R^2(H-x)\,dx=$

$=\gamma\pi R^2\left(Hx-\frac{x^2}{2}\right)_0^H=\frac{\gamma\pi R^2H^2}{2}.$

3967. $250\,\pi R^4$ kgm. **3968.** $\frac{4}{3}\pi R^4.$

3969. Sila F Zemljine teže nekog tela na rastojanju od centra Zemlje, dobija se iz proporcije: $F:mg=R^2:x^2$, gde je R poluprečnik Zemlje, odakle je $F=\frac{mgR^2}{x^2}$, pa je $A=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}dx=$

$=-\frac{mgR^2}{x}\Big|_R^{R+h}=\frac{mgRh}{R+h}$; $A_\infty=mgR.$



Sl. 429

3970. $\frac{1000\,\pi R^2H^2}{6}$ kgm.

3971. Neka je: B—centar polulopte, r—poluprečnik lopte, P—pritisak u smeru BA na jedinici horizontalne projekcije površine ležaja, f—koeficijent trenja, i $\varphi=\sphericalangle ABD$ (sl. 429). Elemenat luka $rd\varphi$ pređe pri jednom okretanju osovine elementarnu površinu $2\pi r\sin\varphi\,rd\varphi$. Horizontalna projekcija tog elementa površine je: $2\pi r^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$ a pritisak na njega u smeru BA je $a=2\pi r^2P\sin\varphi\cos\varphi\cdot d\varphi$. Komponenta tog pritiska, normalna na površinu polulopte je: $b=2\pi r^2P\sin\varphi\,d\varphi$. Druga, horizontalna komponenta tog pritiska jednaka je nuli zbog simetrije tog elementa površine.

Trenje usled pritiska b biće: $bf = dR = 2\pi r^2 Pf \sin\varphi\, d\varphi$, pa će trenje usled pritiska na čitavoj površini polulopte biti: $R = 2\pi r^2 Pf \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = 2\pi r^2 Pf$. Elemenat rada koji nastaje od elementa sile trenja bf biće: $dA = 4\pi^2 r^3 Pf \sin^2\varphi\, d\varphi$ a ukupan rad trenja pri jednom okretanju osovine je: $A = 4\pi^2 r^3 Pf \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi^3 r^3 Pf$.

3972. 240π kgm. **3973.** Otpor, na koji nailazi ekser prilikom ukucavanja, sastoji se iz otpora koji deluje na vrh eksera i možemo ga smatrati konstantnim (a), i otpora trenja površine eksera i mase u koju se ekser ukucava, koji je proporcionalan dubini x do koje je ekser ukucan (bx). Rad na putu dx, biće: $dA = (a + bx)\, dx$. Ako je l dužina eksera, onda je celokupni rad: $A = \int_0^h (a + bx)\, dx = al + \frac{bl^2}{2}$. **3974.** $\frac{ab^2L}{6}(3\pi + 4)$.

3975. Sila rastezanja F je data obrascem: $F = E \cdot \frac{s \cdot x}{l}$, gde je E moduo rastegljivosti. Za bakar: $F \approx 12000$ kg/mm² pa je: $A = 0{,}024$ kgm.

3976. Brzina isticanja tečnosti čiji je nivo na visini x određuje se po obrascu $v = \mu\sqrt{2gh}$, gde je μ koeficijent koji zavisi od vrste tečnosti i oblika suda. Za naš slučaj je:

$$\mu \approx 0{,}6;\quad t = \int_0^H \frac{s\, dx}{0{,}65\sqrt{2gx}} = 100 \text{ sec.}$$

3977. Koristiti zakon: $pv = p_0 v_0$; $p = \frac{p_0 v_0}{v}$; $A = \int_{v_1}^{v_2} \frac{p_0 v_0}{v}\, dv = p_0 v_0 \ln v \Big|_{0{,}1}^{0{,}03} = 1241$ kgm.

3978. Sila privlačenja naboja je: $F = \frac{l_0 l_1}{x^2}$ din, pa je $A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{l_0 l_1}{x^2}\, dx = 1{,}8 \cdot 10^4$ erg.

3979. Električni naboji se odbijaju silom $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$, gde je r međusobno rastojanje, pa je $A = \frac{e_1}{R}$ odgovarajućih jedinica.

3980. Polazimo od obrasca $dB = \mu \frac{I\, d\alpha}{4\pi r}$, gde je μ magnetni permeabilitet. Kako je $r\cos\alpha = a\sin\varphi \Rightarrow r = \frac{a\sin\varphi}{\cos\alpha}$, to je $dB_1 = \mu_0 \frac{I\, d\alpha}{4\pi r} = \mu_0 \frac{I\cos\alpha\, d\alpha}{4\pi a \sin\varphi}$ ili

$B_1 = \mu_0 \frac{I}{4\pi a \sin\varphi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \text{cas}\,\alpha\, d\alpha$. No, kako je $\alpha_1 = \pi/2 - \varphi$, imaćemo dalje

$B_1 = \mu_0 \frac{I}{4\pi a \sin\varphi} \int_{\pi/2-\varphi}^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{4\pi a \sin\varphi} \Big|_{\pi/2-\varphi}^{\pi/2} \Rightarrow B_1 = \mu_0 \frac{I}{4\pi a} \text{tg}\frac{\varphi}{2}$. Pošto su B_1 i B_2 istog smera, ukupna indukcija B biće $B = 2B_1$ ili $B = \mu_0 \frac{I}{2a\pi} \text{tg}\frac{\varphi}{2}$.

3981. Koristimo $d\Phi = (\vec{B}\cdot d\vec{S})$. Kako je $dB = BS\cos(\vec{B}, \vec{N})$ i $B_x = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}$ (1), to je $d\Phi = B_x a\,dx \cos\theta = B_x a\,dx\,(\cos\theta = 1)$, (2), gde je $S = a\,dx$ površina šrafiranog pravougaonika (sl. 38). Dalje se dobija iz jednačina (1) i (2)

$$d\Phi = \mu_0 \frac{Ia}{2r}\cdot\frac{dx}{x} \Rightarrow \Phi = \mu_0 \frac{Ia}{2\pi}\int_c^{c+b}\frac{dx}{x} = \mu_0\frac{Ia}{2\pi}\ln\frac{c+b}{c}.$$

Ako se uzme npr. $I = 20\,A$; $a = 50$ cm; $b = 9$ cm i $c = 1$ cm, onda se, posle zamene tih vrednosti u zadnju jednačinu, dobija $\Phi = 4\pi 10^{-7}\frac{20\cdot 0{,}5}{2\pi}\ln\frac{0{,}1}{0{,}01} = 4{,}6\cdot 10^{-6}$ (Wb).

3982. Radeći kao u prethodnom zadatku, dobija se: $S = 2\left(\frac{x^2}{2} - dx\right)\operatorname{tg}\alpha$.

3983. Poslužimo se Poissonovim zakonom: $p_0 v_0^k = pv^k$,

gde je $k = 1{,}4$, $A = \int_{v_0}^{v_1}\frac{p_0 v_0^k}{v^k}dv = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right]$.

3984. $\frac{g^2 m^2}{6 n^2}$ erga.

3986. Kinetička energija čestice diska: $d_E = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho r^2\omega^2}{2}d\sigma$, gde je $d\sigma$ element površine, r rastojanje tog elementa od ose rotacije, ρ površinska gustina; $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Znači da je

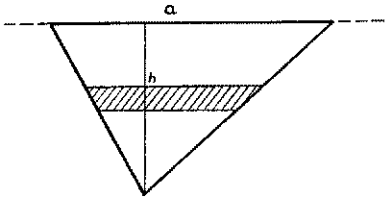
$d_E = \frac{M\omega^2 r^2}{2\pi R^2}d\sigma$, odnosno: $E = \frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}$. **3987.** $\frac{ab^3\omega^2}{3}$.

3988. $\frac{Sl^3\omega^2\gamma}{6} \approx 4{,}1\cdot 10^8$ erg. **3989.** $\frac{a^3 hd\omega^2\gamma}{60} \approx 0{,}016$ kgm. **3990.** $\frac{3}{20}MR^2\omega^2$.

3991. Element površine vrata je

$ds = 20\,dx$, pa je $dp = \gamma\cdot x\,ds = 20\gamma x\,dx$ i $P = \int_0^{16} 20\gamma x\,dx = 2560$ $(\gamma = 1)$.

3992. $p = \frac{ah^2}{2}$ (sl. 430).



Sl. 430

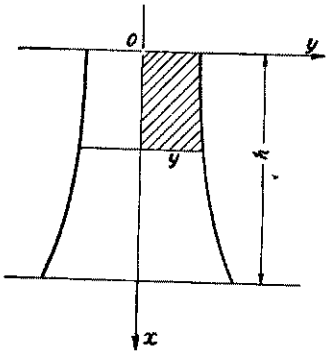
3993. $p = \frac{(a+2b)h^2}{6} \approx 1{,}3\cdot 10^3\,T$. **3994.** $\frac{2}{3}a^3$.

3995. $\frac{\pi R^2 H}{3}$. **3996.** 2,4 kg/m^2. **3997.** $\frac{hb^2 p}{2}$ gcm.

3998. Neka je: količina svetlosti pri ulazu u medijum jednaka jedinici, $m=m(x)$ količina svetlosti koja je prodrla u medijum do dubine x. Gubitak količine svetlosti—am, proporcionalan je dužini puta dx i količini svetlosti $m(x)$ na dubini x, pa je:

$-dm=\frac{m}{a}dx$, gde je a faktor proporcionalnosti.

Zato je $\int_1^m \frac{dm}{m}=-\int_0^x \frac{dx}{a}$, tj. $m=e^{-\frac{x}{a}}$



Sl. 431

3999. $y^2\pi=k\gamma\pi\int_0^x y^2dx+kQ,$

$y=\sqrt{\frac{KQ}{\pi}}\cdot e^{\frac{k\gamma}{2}x}$ (sl. 431).

4000. 2° $\max y''=0$, pa je $\varepsilon(h)=0$; 2° $\varepsilon(h)=0$.

4001. $\varepsilon(h)=0$.

4002. a) Prvo nađemo vrednosti ordinata u sredinama odsečka x_i-x_{i-1}.

Uzimajući da je $h=\frac{1}{10}$, dobija se:

$$\sum_{i=0}^{9} y_i=7{,}8562\cdot\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx h\sum_{i=0}^{9}h_i=0{,}78562.$$

$$\varepsilon(h)<\frac{(b-a)h^2}{24}|y''|_{\max}\qquad y''=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^2}.$$

Za $x\in[0,1]$ $|y''|<2 \Rightarrow \varepsilon(h)<0{,}85\cdot10^{-3}$.

x_i	y_i
0,05	0,9975
0,15	0,9780
0,25	0,9412
0,35	0,8909
0,45	0,8316
0,55	0,7678
0,65	0,7030
0,75	0,6400
0,85	0,5806
0,95	0,5256

x_i	y_i
0,1	0,9901
0,2	0,9615
0,3	0,9174
0,4	0,8621
0,5	0,8000
0,6	0,7353
0,7	0,6711
0,8	0,6098
0,9	0,5525
$\Sigma=7{,}0998$	

b) $x_0=0{,}0$ $y_0=1{,}0000$

$x_{10}=1{,}0$ $y_{10}=0{,}5000$

$y_0+y_{10}=1{,}5000;$ $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2}+7{,}0998\right)=0{,}78498$

$$\varepsilon(h)<\frac{(b-a)h^2}{12}|y''|_{\max}<\frac{1}{120}\cdot2=\frac{1}{60}.$$

c) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{12}(1+3{,}76471+1{,}6+2{,}56+0{,}5)=0{,}78539$

$$|y^{IV}|_{\max}<24 \Rightarrow \varepsilon(h)<\frac{1}{920}<0{,}0006.$$

4003. $\frac{9}{4}$; $\varepsilon(h)=0$. **4004.** $\ln 2 \approx 0{,}6932$, $\varepsilon(h) \leqslant \frac{2\cdot 10^{-4}}{15} < 0{,}0001$.

4005. a) 0,66; b) 0,694; c) 0,6931476. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln\cdot 2 \approx 0{,}693147$.

4006. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Primenom Simpsonovog pravila je: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}79$ sa tačnošću 0,01. Prema tome je $\pi \approx 4\cdot 0{,}79$.

4007. Uzevši $n=4$, dobija se da je $s=\int_0^8 \frac{\sqrt{10000-64x^2}}{100(100-x^2)}dx \approx 8{,}502572$. **4008.** $8{,}16\,\pi$.

4009. a) $y=\frac{1}{x}$, $y''=\frac{2}{x^3}$. Za $x\in[1,2] \Rightarrow |y''|\leqslant 2$, pa je $\varepsilon(x)<\frac{1}{12n^2}$. Odavde se vidi da se tražena tačnost postiže za $n=10$. Osim toga, dovoljno je vrednosti ordinata funkcije $\frac{1}{x}$ izračunavati sa četiri tačna decimalna mesta, pa je:

x_i	y_i
1,05	0,9524
1,15	0,8693
1,25	0,8000
1,35	0,7407
1,45	0,6897
1,55	0,6452
1,65	0,6061
1,75	0,5714
1,85	0,5405
1,95	0,5128
	0,9284

$$\frac{6{,}9284}{10}=0{,}69284.$$

b) Kako je $\varepsilon(h)<\frac{1}{6n^2}$, i ovde je dovoljno uzeti $n=10$;

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2}+6{,}1877\right)=0{,}69377.$$

c) $y^{IV}=\frac{24}{x^5}$, $\varepsilon(h)<\frac{24}{180(2n)^4}$. Tačnost je zagarantovana za $n=5$. vrednosti ordinate je dovoljno izračunati sa pet tačnih cifara,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}693152.$$

4010. 0,10. **4011.** $n=5$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}7468$.

4012. $G \approx 0{,}915965$. **4013.** 1,61. **4014.** $\varepsilon(h)<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(2n)^4}$, $n=3$; 1,3506.

4015. $\pi=3{,}14159975$, relativna greška je 0,00000226.

DODATAK

4016. $dz = 2\,xy\,dx + x^2\,dy.$ **4017.** $\frac{1}{(x-y)^2}(x^2\,dy - y^2\,dx).$ **4019.** $\frac{y^2+x^2}{yx^2}(dy-dx).$

4020. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy).$ **4021.** $\frac{e^{s/t}}{t^2}(t\,ds - s\,dt).$ **4022.** $e^{xy}(y\,dx + x\,dy).$

4023. $\ln t\,dx + \frac{x}{t}\,dt.$ **4024.** $x^{y-1}(y\,dx + x\ln x\,dy).$ **4025.** $(y\,dx + x\,dy)\cos xy.$

4026. $\frac{1}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx).$ **4033.** $\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$

4034. 1° $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + yz^2}{e^z + 3z^2 + 2xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2+1}{e^z+3z^2+2xy}$;

2° $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u^2+v}(2\,uye^{x+y^2}+1).$

4035. 1° $\Delta z - dz = 8$; 2° $\Delta z - dz = 0{,}062.$

4036. $\Delta z = 0{,}0281$; $dz = 0{,}0278$; $|\Delta z - dz| = 0{,}0003$; $\frac{|\Delta z - dz|}{dz} = 0{,}04.$ **4037.** $dz = 7{,}5.$

4038. $dz = \frac{1}{36}.$ **4039.** $dz = 0{,}08.$ **4040.** 1° $dz = -0{,}6$; 2° $dz \approx -0{,}739.$

4041. $-0{,}1.$ **4042.** 0,15. **4043.** 108,972. **4044.** 1,00. **4045.** 2,95.

4046. 4,998. **4047.** 1,055. **4048.** 0,005. **4049.** 0,97. **4050.** 0,273.

4051. 0,502. **4052.** 0,13 cm. **4053.** $\varepsilon_0 \leqslant 0{,}78$, $\varepsilon_p \leqslant 0{,}24.$

4054. $\varepsilon_\alpha < 0{,}0061$ cm ili $\varepsilon_\alpha < 21'59''.$ **4055.** $\Delta_\alpha < 0{,}003.$ **4056.** Sa tačnošću 4,25 m.

4057. $dp = 444$ cm². **4058.** $dp = 0{,}179 \approx 0{,}2$; $p \approx 495$ cm². **4059.** $1{,}2\,\pi$ dm³.

4060. $-30\,\pi$ cm³. **4061.** $\varepsilon_v \leqslant 0{,}004.$ **4062.** $dV < 56{,}4$, $\delta_v < 13\%.$

4063. $dV \approx 2575$ mm³. **4064.** $s \approx 1{,}8 \pm 2$, $\varepsilon_s < 0{,}2.$ **4065.** $\varepsilon_s \leqslant 1{,}8$ g/cm³.

4066. $\varepsilon_s \leqslant 0{,}001.$ **4067.** $\Delta V \approx 6{,}28$ m³, $V = 4{,}29 \cdot 10^3$ m³.

4068. $dr \leqslant 0{,}22743 < 0{,}3$, $\delta_r \leqslant 1{,}53\%.$ **4069.** $\delta_c \leqslant 0{,}77\%.$

4070. r treba meriti sa tačnošću od 0,7%. **4071.** $\sqrt{2}/2.$ **4072.** $\pi a^3/2.$

4073. $\frac{26}{3}$. **4074.** $4a\pi\sqrt{a}$ **4075.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}$. **4076.** $\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

4077. 24. **4078.** $1+\sqrt{2}$. **4079.** $\frac{19}{3}$. **4080.** $\frac{256}{15}a^3$. **4081.** $2\pi^2 a^3(1+2\pi^2)$.

4082. $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. **4083.** $\frac{16\sqrt{2}}{143}$. **4084.** $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi b^2)\sqrt{a^2+b^2}$.

4085. $\frac{2}{3}\pi a^3$. **4086.** 5. **4087.** $\sqrt{3}$. **4088.** $\frac{4}{3}+\ln 5-4\operatorname{arc\,tg} 2$.

4089. 8. **4090.** $3\pi R^2$. **4091.** $6\left(3+\frac{5}{4}\ln 5\right)$. **4092.** $\frac{98}{81}p^2$. **4093.** $\frac{4}{3}$.

4094. 1. **4095.** $\frac{3}{2}r^4\pi$. **4096.** $\pi/2$. **4097.** 4. **4098.** $\frac{1}{12}$.

4099. 1° $-\frac{2}{3}$; 2° $-\frac{4}{3}$. **4100.** $\frac{4}{5}$. **4101.** 1084. **4102.** 1. **4103.** 24π.

4104. $\frac{3}{2}a^2$. **4105.** $J=3a^{4/3}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}\pi a^{4/3}$. **4106.** $-\frac{87}{4}$.

4107. $a^2\pi$. **4108.** $-(bc+ca+ab)$. **4109.** r^3.

4110. 1° Koordinate tačke M su $(0, -1, 3)$ a koordinate tačke P su $(1, -3, 5)$;

2° Krivolinijski integral uzet duž odsečka MP iznosi $\frac{74}{3}$. **4111.** $mg(c_1-c_2)$.

4112. $8a^2$. **4113.** $y=\frac{kmM}{a^2\sqrt{2}}$. **4114.** Komponente sile su: $x=0$ i $y=\frac{2kmM}{\pi a^2}$.

4115. $u(x, y)=\frac{x^2}{2}+xe^y-y^2+c$. **4116.** $u(x, y, z)=x\ln y+x^2yz-z^2+c$.

4117. 1. **4118.** $\frac{\pi a^4}{2}$.

4119. Korišćenjem parametarskih jednačina $x=a\cos t$ i $y=b\sin t$ dobija se: $-2\pi ab$.

4120. $\frac{\pi ma^2}{8}$.

4121. Uslov da je podintegralna funkcija totalni diferencijal u oblasti ograničenoj konturom integracije nije ispunjen za $x=y=0$.

4122. $y'=\frac{xy}{\sqrt{x^2-1}}$. **4123.** $y=\pm\sqrt{x^2+c}$.

4124. $y=1+\frac{(x+c)^2}{4}$, singularan integral je $y=1$. **4125.** $\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$.

4126. $y=\sin(c\pm x)$, singularan integral je $y=\pm 1$. **4127.** $y+x=\ln c(1+y)(1+x)$.

4128. $\arcsin y + \arcsin x = c.$ **4129.** $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = c.$ **4130.** $s^2 = \frac{t + ct - 1}{t}.$

4131. $y = (x-c)^2$, $(x < c)$ za $y \geqslant 0$,

$y = -(x-c)^2$, $(x \geqslant c)$ za $y \leqslant 0$, $y = 0$.

4132. Opšte rešenje je $y = ce^{\sqrt{x}}$ a partikularno $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

4133. Opšti integral je $e^y - 1 = ce^{-x}$ a partikularni $e^y - 1 = e^{-x}$.

4134. Opšti integral je $\ln y = c \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a partikularni $y = 1$. **4135.** $y - a = \frac{(1-a^2)x}{ax+1}.$

4136. Koeficijenat pravca tangente je y' a koeficijenat pravca radijus vektora je $\frac{y}{x}$, pa je, prema uslovu zadataka, $y' = 3\frac{y}{x}$ $\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$ odnosno $\ln y = 3 \ln x + \ln c$ ili $y = cx^3$. Iz početnih uslova se dobija da je $c = \frac{1}{3}$ i $y = \frac{x^3}{3}$.

4137. Treba rešiti jednačinu $\frac{dm}{dt} = -km$, gde je m masa a $k > 0$ koeficijenat proporcionalnosti; dobija se $m = m_0 e^{-kt}$.

4138. $y = ce^{\frac{x}{a}}.$ **4139.** $y = cx^{\frac{1-k}{k}}.$ **4140.** $xy = z$

4141. $y^2 = xz.$ **4142.** $y = xz$, $z' = x^{\alpha-1} f(z).$

4143. $\frac{y-b}{x-a} = z$, $(x-a)\, z' = f(x)\, y(x).$

4144. Na osnovu Newtonovog zakona brzina hlađenja tela proporcionalna je razlici temperature tela i sredine koja ga okružuje. Taj proces nije ravnomeran. Sa promenom razlike temperature u toku procesa menja se takođe i hlađenje tela. Diferencijalna jednačina hlađenja tela biće:

$$\frac{dT}{d\tau} = k(T - t),$$

gde je T temperatura tela; t — temperatura okoline (u našem slučaju 25°);

k — koeficijenat proporcionalnosti;

$\frac{dT}{d\tau}$ — brzina hlađenja tela;

τ — traženo vreme hlađenja.

Integracijom gornje jednačine dobija se da je

$$T - 25 = ce^{k\tau}. \tag{1}$$

Proizvoljna konstanta c određuje se iz početnih uslova: za $\tau = 0$ min, $T = 100°$.

Otuda je

$$100 - 25 = ce^{k \cdot 0} = c, \text{ ili } c = 75.$$

Veličinu e^k određujemo iz datog dopunskog uslova: za $\tau = 20$ min, $T = 60°$. Tako dobijamo

$$60 - 25 = 75\,(e^k)^{20} \Rightarrow$$

$$e^k = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Na taj način jednačina hlađenja tela pod uslovima datim u postavci zadatka uzima oblik

$$T = 75\left(\frac{7}{25}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25. \tag{2}$$

Iz jednačine (2) lako je odrediti traženo vreme τ kada je temperatura tela $T = 30°$:

$$5 = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}, \text{ ili } \frac{1}{15} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}.$$

Konačno se dobija

$$\tau = \frac{-20 \ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx \frac{-20 \cdot 2{,}7081}{-0{,}7622} \approx 71 \text{ min}.$$

Znači, nakon 1 čas i 11 min telo će se ohladiti do temperature od 30°.

4145. Pri adiabatskoj promeni stanja gasa njegov pritisak i zapremina vezani su Poissonovom jednačinom

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^k,$$

gde je k konstantna veličina za dati gas. Za vazduh je $k \approx 1{,}4$. Atmosferski pritisak je $p_0 = 10\,330$ kg/m².

Beskonačno mali pad pri pomeranju klipa je

$$dw = -pS\,dx,$$

gde je S površina klipa a dx beskonačno malo pomeranje klipa pri sabijanju.

No kako je

$$S\,dx = dv,$$

to je

$$dw = -p\,dv. \tag{1}$$

Iz Poisonove jednačine dobija se

$$p = p_0\left(\frac{v_0}{v}\right)^k = \frac{p_0 v_0^k}{v^k}. \tag{2}$$

Zamenom izraza (2) u jednačinu (1) dobijamo diferencijalnu jednačinu procesa

$$dw = -p_0 v_0^k \frac{dv}{v^k}.$$

Integracijom dobijamo opšte rešenje

$$w = -p_0 v_0^k \int v^{-k}\,dv = -\frac{p_0 v_0^k v^{1-k}}{1-k} + c = \frac{p_0 v^k}{k-1} v^{-(k-1)} + c = \frac{p_0 v_0^k}{(k-1)\,v^{k-1}} + c.$$

Kao što se vidi iz početnih uslova je za $v=v_0$ i $w=0$. Otuda je

$$0=\frac{p_0 v_0^k}{(k-1)\, v_0^{k-1}}+c \Rightarrow c=\frac{p_0 v_0}{k-1}.$$

Na taj način rad adiabatskog sabijanja biće:

$$w=\frac{p_0 v_0}{k-1}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1}-1\right].$$

Zamenjujući date brojne vrednosti dobijamo traženu vrednost rada:

$$w=\frac{10330\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\,0{,}1\ \mathrm{m}^3}{0{,}4}\,(10^{0{,}4}-1)=2582{,}5\,(10^{0{,}4}-1)\ \mathrm{kgm}\approx 3904{,}4\ \mathrm{kgm}.$$

4146. Analogno kao u zadatku (4145) dobija se diferencijalna jednačina

$$dw=p\,dv.$$

No pošto se u datom slučaju gas širi izotermički i radi toga nije podčinjen Poissonovom već Boyle-Mariotteovom zakonu:

$$pv=p_0 v_0 \Rightarrow p=\frac{p_0 v_0}{v}.$$

Tada diferencijalna jednačina procesa dobija oblik:

$$dw=p_0 v_0\cdot\frac{dv}{v}. \tag{1}$$

Integraleći jednačinu (1) dobija se opšte rešenje:

$$w=p_0 v_0 \ln v+c.$$

Iz početnih uslova sledi, da je za $v=v_0$ i $w=0$. Otuda je

$$o=p_0 v_0 \ln v_0+c \Rightarrow c=-p_0 v_0 \ln v_0.$$

Prema tome, rad utrošen na širenje iznosi

$$w=p_0 v_0 \ln\frac{v}{v_0}.$$

4147. Problem se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine

$$R^2\,dr=r^2\,dR,$$

pri čemu su r i R respektivno rastojanja tačaka A i B od proizvoljne tačke proizvoljne ekvipotencijalne linije. Nakon integracije dobija se opšte rešenje

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{r}=c,$$

ili prelaskom na pravougle koordinate, dobija se jednačina tražene familije krivih u obliku

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c.$$

4148. Problem se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine

$$\frac{dv}{dt} = -(g + k v^2).$$

Nakon integracije dobija se opšte rešenje

$$\operatorname{arc\,tg}\left(v\sqrt{\frac{k}{g}}\right) = \operatorname{arc\,tg} 100\sqrt{\frac{k}{g}},$$

a partikularno rešenje ima oblik

$$\operatorname{arc\,tg} v\sqrt{\frac{k}{g}} - \operatorname{arc\,tg} 100\sqrt{\frac{k}{g}} = -\sqrt{gk}\,t. \tag{1}$$

U momentu $t = T$ kada raketa dostigne maksimalni položaj trenutna brzina rakete v je jednaka nuli. Zamenjujući u formulu (1) $t = T$, $v = 0$ i uzimajući da je $g = 10$ m/sec², dobija se:

$$T = \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(100\sqrt{\frac{k}{g}}\right)}{\sqrt{gk}} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(31{,}62\sqrt{k})}{3{,}162\sqrt{k}}.$$

4149. U datom trenutku t u sudu se nalazi neki nepoznati broj x kg soli; otuda u svakom litru rastvora sadrži se $\frac{x}{a}$ kg soli; a u b litara $\frac{bx}{a}$ kg.

Ako bi u toku jedinice vremena počinjući u momentu t, koncentracija rastvora ostala neizmenjena, tj. takva kakva je bila u momentu t, onda bi se količina soli u sudu za tu vremensku jedinicu umanjila za $\frac{bx}{a}$ kg; takva je brzina smanjivanja količine soli u sudu u momentu t.

S druge strane, izvod:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

jednak je brzini prirasta količine soli u momentu t; otuda brzina smanjivanja količine soli u momentu t biće jednaka $-\frac{dx}{dt}$.

Tako se dobija

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{bx}{a}. \tag{1}$$

Nakon integracije biće

$$x = c_1 e^{-\frac{b}{a}t}, \tag{2}$$

gde je c_1 proizvoljna konstanta.

Pretpostavimo određenosti radi da je u nekom početnom trenutku $t = 0$ količina soli u sudu bila jednaka c kg.

Stavljajući u formuli (2) $t = 0$, nalazi se da je

$$c_1 = c,$$

i konačno dobijamo

$$x = ce^{-\frac{b}{a}t},$$

tj. količina soli opada eksponencijalnom brzinom u toku vremena.

4150. Na osnovu uslova zadatka diferencijalna jednačina procesa je

$$\frac{dx}{dt}=kx,$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti. Njen opšti integral je

$$x=ce^{kt}.$$

Iz početnih uslova $t=0$ i $x=a$ sledi $a=ce^{k\cdot 0}$ ili $c=a$.
Tako se dobija da je

$$x=ae^{kt}. \tag{1}$$

Koeficijent proporcionalnosti određuje se iz datih dopunskih uslova: $t=1$ čas $\Rightarrow$ $x=2a$. Otuda je $2a=ae^{k\cdot 1}$ ili $e^k=2$. Zamenom u partikularno rešenje (1) dobija se zakon razmatranog procesa:

$$x=a\,2^t.$$

Za $t=3$ časa $\Rightarrow$ $x=8a$. Znači da se u toku tri časa količina fermenta poveća osam puta

4151. $y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2.$ **4152.** $s^2=2t^2\ln\frac{c}{t}.$ **4153.** $x^2-y^2=cx.$

4154. $y=\pm x\sqrt{2\ln|cx|}.$ **4155.** $\ln|cx|=-e^{-\frac{y}{x}}.$ **4156.** $y=xe^{1+cx}.$

4157. $x+ye^{x/y}=c.$ **4158.** $\ln\frac{x+y}{x}=cx.$

4159. Staviti $x=X+1$ i $y=Y+2\cdot x^2+2xy-y^2+2x+6y=c.$

4160. $(y-2x)^3=c(y-x-1)^2;\quad y=x+1.$

4161. $2x+y-1=ce^{2y-x}.$ **4162.** $(y-x+2)^2+2x=c.$

4163. $y+2=ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}.$ **4164.** $\ln\frac{y+x}{x+3}=1+\frac{c}{x+y}.$ **4165.** $x^2+y^2=cx.$

4166. Opšti integral je $y=\pm x\sqrt{\ln\frac{c}{x^2}}$ a partikularni $y=x\sqrt{\ln\frac{4}{x^2}}.$

4167. $y=ce^{-x}-x+1.$ **4168.** $y=(x+c)e^x.$ **4169.** $y=\dfrac{c-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4}{1+x}.$

4170. $x=y\ln y+\frac{c}{y}.$ **4171.** $y=ce^{-\sin x}+\sin x-1.$ **4172.** $y=\frac{(x+1)^4}{2}+c(x+1).$

4173. $s=t(\ln t-1)+ct^2.$ **4174.** $y+xe^{-y}=c.$

4175. $x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}[c-\ln(y+\sqrt{1+y^2})].$ **4176.** $y=x+\sqrt{1+x^2}.$

4177. $y=\frac{x}{x+1}(x+\ln x-3).$ **4178.** $y=\frac{e^{kx}}{e^{-k\omega}-1}\int\limits_x^{x+\omega}f(t)\,e^{-kt}dt.$

4180. $t=\int p(x)\,dx,\ \frac{dy}{dx}+y=0,\ y=ce^{-\int p(x)d}$

4184. $\varphi(y)=z,\ A(x)z^{\nu}+\beta(x)z+c(x)=0.$ **4185.** $y^{m}=z,\ z^{\nu}+mp(x)z=mq(x).$

4188. $y_1=\varphi(x)-1,\ y=\varphi(x)-1+ce^{-\varphi(x)}.$ **4190.** $x=y\ln cy.$ **4191.** $y=cx^2+\frac{2a^2}{3x};$

$y=\frac{1}{3a}x^2+\frac{2a^2}{3x}.$ **4192.** $i=\frac{U}{R}+i_0+\left(i_0-\frac{U}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$ **4193.** $2=y^2(ce^{2x^3}+2x^2+1).$

4194. $y=\frac{1}{(1+x)[c+\ln|1+x|]}.$ **4195.** $ny^n=ce^{-\frac{n}{a}x}+nx-a.$ **4196.** $x^2=y^2(c-y^2).$

4197. $y(1+\ln x+cx)=1.$ **4198.** $y(x+c)=\frac{1}{\cos x}.$

4199. $y=\left(\frac{c+\ln|\cos x|}{x}+\operatorname{tg}x\right)^2.$ **4200.** $y=\frac{x^4}{4}\ln|cx|.$ **4201.** $y^2=ce^{-\frac{2a}{x}}-\frac{b}{a}.$

4202. $x^2=ce^{\sin y}-2a(\sin y+1).$ **4203.** $y=\frac{\varphi(x)}{x+c}.$ **4204.** $y-\varphi(x)=z.$

4205. $y^2-2cx^2-2ax+a^2=0.$ **4206.** 1° $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1;$ 2° $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1.$

4207. $y^2=1+ce^{-x};\ y^2=1-e^{-x}.$ **4208.** $\frac{\rho-k}{\rho}=\frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}.$ **4209.** $4x+\frac{y^2}{x}=c.$

4210. $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=c.$ **4211.** $x\sin y=c.$ **4212.** $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c.$

4213. $x^4-x^2y^2+y^4=c.$ **4214.** $x+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=c.$ **4215.** $xe^{y}-y^2=c.$

4216. $x^{y}=c.$ **4217.** $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=c.$ **4218.** $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y=c.$

4219. $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=c.$ **4220.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{6}.$

4221. Opšte rešenje je $x^2y+x-\frac{y^2}{2}=c.$ Integralne krive su $x^2y+x-\frac{y^2}{2}=-3$ i

$x^2y+x-\frac{y^2}{2}=-17.$ **4222.** 1° $y_1=x,\ y_2=\frac{cx-1}{c-x^2};$ 2° $y=\frac{1-4x}{x^2-4}.$

4224. $y_1=-1;\ x(x-y)=c(y+1);\ A(0,\ -1),\ B(-1,\ -1).$

4226. Smenom $y=zx$ dobija se jednačina koja razdvaja promenljive

$$(z^3+z^2+z+1)\,dx+(z^2+2z-1)\,x\,dz=0\ \Rightarrow\ \frac{x(z^2+1)}{z+1}=c,$$

ili nakon zamene z sa $\frac{y}{x}$ dobija se

$$x^2+y^2=c(x+y)\ (c\neq\infty)\ \Rightarrow\ \left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{2}.$$

1° $x^2+y^2=2(x+y)$ ili $(x-1)^2+(y-1)^2=2;$

2° $y=-x\ (0<x<\infty);$

3° Rešenje nije jedinstveno.

4227. 1° $x=-1$; 2° $x^2-y^2+6x+1=0$.

4228. $2yy''=y'^2$. **4229.** $k_1=\frac{2}{3}$, $k_2=-\frac{1}{2}$. **4230.** $y=(x-2)e^x+c_1x+c_2$.

4231. $y=\cos x+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$. **4232.** $y=2x-\sin 2x$. **4233.** $y=\ln\frac{c_2}{x+c_1}$.

4234. $y=(\arcsin x)^2+c_1\arcsin x+c_2$. **4235.** $y=c_1\sin x-x-\frac{\sin 2x}{2}+c_2$.

4236. $y=-c_1e^{-x}-\frac{x^2}{2}+x+c_2$. **4237.** $y=c_2-c_1x+(c_1^2+1)\ln(x+c_1)$.

4238. $\ln y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. **4239.** $y^3+c_1y+c_2=3x$. **4240.** $y=\operatorname{arc\,ctg}(c_1x+c_2)$.

4241. $\ln y=\frac{x+c_1}{x+c_2}$. **4242.** $c_1y=1+\operatorname{tg}^2(x+c_2)$. **4243.** $y^2=(c_1x+c_2)^{-3}$.

4244. Opšti integral je $y=\pm\sqrt{c_1x+c_2}$. Jednačina tražene krive je $y=\pm\sqrt{x}$.

4245. $y=c_1e^{2x}+c_2e^x$. **4246.** $y=c_1xe^x+c_2e^x=(c_1x+c_2)e^x$.

4247. $y=e^x(A\cos x+B\sin x)$. **4248.** $y=e^{-x}(A\cos x\sqrt{2}+B\sin x\sqrt{2})$.

4249. $y=A\cos 2x+B\sin 2x$. **4250.** $y=ce^{2x}+e^{-x}(A\cos x\sqrt{3}+B\sin x\sqrt{3})$.

4251. $y=ce^{-x}+e^{x/2}\left(A\cos\frac{x}{2}\sqrt{3}+B\sin x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4252. $y=\frac{b[(\operatorname{ch}al+\cos al)(\operatorname{sh}al-\sin al)-(\operatorname{sh}al+\sin al)(\operatorname{ch}ax-\cos ax)]}{2a^3(1+\operatorname{ch}al\cos al)}$.

4253. $\lambda=\frac{3}{2}$, $y=ce^{-x}\sin\frac{3}{2}x$.

4254. $x=e^{\lambda t}$. Karakteristična jednačina glasi: $m\lambda^2+r\lambda+k=0$; njeni koreni su

$\lambda_1=-\frac{r}{2m}+\frac{1}{2m}\sqrt{r^2-4mk}$, $\lambda_2=-\frac{r}{2m}-\frac{1}{2m}\sqrt{r^2-4mk}$. Potrebno je razlikovati tri slučaja:

1° $r^2-4mk>0$, koreni su λ_1 i λ_2 realni, različiti, pa je $x=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$ opšte rešenje. 2° $r^2-4mk=0$, koreni su realni, jednaki, pa su partikularna rešenja $x_1=e^{\lambda_1t}$ i $x_2=te^{\lambda_2t}$, a opšte rešenje: $x=c_1e^{\lambda_1t}+c_2te^{\lambda_2t}$. 3° $r^2-4mk<0$, koreni su konjugovano kompleksni. Opšte rešenje je: $x=(c_1\cos\nu t+c_2\sin\nu t)e^{-\frac{rt}{2m}}$, gde je $\nu=\frac{\sqrt{4mk-r^2}}{2m}$. Ove oscilacije zovu se prigušene harmonijske oscilacije.

4255. Treba rešiti jednačinu $\ddot{x}+\omega x=0$. Opšte rešenje je $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$;

za $t=0\Rightarrow A=1$, $B=0$, pa je $x=\cos\omega t$. **4256.** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}$.

4257. $y=c_1\cos x\sqrt{2}+c_2\sin x\sqrt{2}+\frac{1}{2}(x^2+1)$.

4258. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-x^2-3$.

4259. $s=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)+(t-1)^3$.

4260. $y=c_1+c_2\sin x+c_3\cos x+\frac{x^5}{5}-4x^3+24x$.

4261. $y=(c_1x+c_2)e^x+e^{2x}$.

4262. Za $b\neq a \Rightarrow y=c_1e^{-ax}+c_2e^{ax}+\frac{1}{b^2-a^2}e^{bx}$; za $b=a \Rightarrow y=c_1e^{-ax}+c_2e^{ax}+\frac{x}{2a}e^{ax}$.

4263. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$.

4264. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$.

4265. $y=A\cos x+B\sin x+\frac{1}{2}e^{-x}+2$.

4266. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+e^{2x}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{13}{32}\right)$.

4267. $y=\frac{1}{2}e^{3x}(x^2-2x+2)+c_1e^x+c_2e^{2x}$.

4268. $y=c_1+c_2x+c_3e^x+e^x\left(\frac{x^2}{2}-2x+3\right)$.

4269. $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}e^x$.

4270. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x$.

4271. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x$.

4272. $y=A\sin x+B\cos x+y_1+y_2$, gde je $y_1=\left[\frac{x}{2(1+2i)}-\frac{1+i}{(1+2i)^2}\right]e^{(1+i)x}$

i $y_2=\left[\frac{x}{2(1-2i)}-\frac{1-i}{(1-2i)^2}\right]e^{(1-i)x}$.

4273. Za $2-3\lambda>0$ rešenje ima oblik $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+y_p$;

za $2-3\lambda=0$ rešenje je $y=c_1e^{1/3x}+c_2xe^{1/3x}$;

za $2-3\lambda<0$ rešenje ima oblik $y=e^{(1-\lambda)x}(A\cos x\sqrt{2-3\lambda}+B\sin x\sqrt{2-3\lambda})+y_p$.

4274. $x=A\sin k(t-t_0)-t\cos kt$.

4275. $x=a(e^{-t}+t-1)$.

4276. $y=\frac{1}{x}(c_1\sin x+c_2\cos x)$.

4277. $y=c_1x+c_2\ln x$.

4278. $y=A\sin x+B\sin^2 x$.

4279. $xy=c_1e^{-x}+c_2e^x$.

4280. $y^2=c_1x^2+c_2$; $y=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$; $P=2\pi$.

4281. $c_1y=\frac{(c_1x+c_2)^2}{4}+1$.

4282. $y=-\ln(\cos x)$.

4283. 1° $A\subset BC$, tj. BC se dešava svaki put kada se dešava A;
2° $B\subset A$ i $C\subset A$, tj. A se realizuje uvek kada se realizuje ili B ili C.

4284. Događaj AB znači nastupanje događaja A i B, tj. od dva ispisana broja jedan je prost a drugi paran. Događaj $A+B$ znači nastupanje koga bilo događaja A ili B, tj. između dva napisana broja jedan je prost ili je drugi paran ili mogu biti istovremeno jedan prost a drugi paran.

4285. Ako se stavi $C=\overline{A}$ i $D=\overline{B}$ onda se druga jednakost može napisati u obliku $\overline{A+B}=\overline{AB}$, tj. $A+B=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$. Prema tome dovoljno je dokazati ispravnost samo prve jednakosti. Neka događaj A znači pripadanje oblasti S_A, događaj B pripadanje oblasti S_B. Na

osnovu usvojene konvencije pisanja događaja jasan je onda smisao događaja $\overline{A}$ i $\overline{B}$, kao i događaja $\overline{A}\overline{B}$ i $\overline{\overline{A}\overline{B}}$. Otuda je očigledno $\overline{\overline{A}\overline{B}}=A+B$.

Zadatak može da se reši i na drugi način. Događaj $\overline{A}\overline{B}$ znači nepojavljivanje događaja A i B. Suprotan događaj $\overline{\overline{A}\overline{B}}$ znači realizaciju događaja A ili događaja B, a to je u stvari događaj $A+B$. Otuda je $\overline{\overline{A}\overline{B}}=A+B$.

4286. $X=AB+\overline{A}D$, gde je D proizvoljan događaj. **4287.** Po definiciji je $A+A=A$ i $AA=A$. **4288.** $B=A_6$, $C=A_5$. **4289.** Ne ako je $S_1\neq S_2$.

4290. $A+B=U$; $AB=V$. **4291.** Izabrani broj se završava cifrom 5.

4292. Događaj $\overline{A}$ znači da su svi proizvodi ispravni a događaj $\overline{B}$ da su svi proizvodi ispravni ili da je jedan od njih neispravan.

4293. 1° $(A+B)(B+C)=AB+AC+BB+BC=(A+B+C)B+AC=B+AC$;

2° $(A+B)(A+\overline{B})=AA+AB+\overline{A}\overline{B}+B\overline{B}=A$ pošto je $B\overline{B}=V$ nemoguć događaj,

$AA=A$, $AB=\overline{A}\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$, $A+V=A$;

3° $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A(\overline{A}+B)=AB$.

4294. 1° Neka A znači pripadanje oblasti S_A. Tada je $A+B=U$, tj. mora biti $A=V$, $B=U$; 2° neka AB znači pripadanje oblasti S_{AB} koja je zajednička i za S_A i za S_B. Tada je $AB=V$, tj. mora biti $A=U$, $B=V$; 3° mora biti $A=B$.

4295. $X=\overline{B}$. **4296.** Koristiti jednakost $\overline{A}=\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}$.

4297. Ne jer je $\overline{A+B+C}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. **4299.** C — nerešen rezultat.

4300. 1° $X=\overline{A}B+AD$; 2° koristiti jednakost $(A+C)(B+C)-AB+C$. Rešenje $X=\overline{A}\overline{B}C+$ $+ABD$, gde je D proizvoljan događaj.

4301. 1° Izabran je student koji ne stanuje u domu i ne puši. 2° Kada svi studenti stanuju u domu i ne puše. 3° Kada svi koji puše stanuju u domu. 4° Kada nijedna devojka ne puši a svi mladići puše. Pretpostavlja se da mogu pušiti i devojke.

4305. 1° $AB=B$; 2° $A+B=AB=BA=B$; 3° $ABC=BC$; 4° $A+B+C=B+C$.

4308. 1° $B=A_1A_2A_3\ldots A_n$. Ostali slučajevi prepuštaju se čitaocu.

4309. 1° $p=\frac{3}{10}$; 2° $p=\frac{7}{10}$. **4310.** Ukupan broj dobijenih kockica je $n=1000$. Pošto kocka ima dvanaest ivica dobija se za svaku od njih po osam kockica sa po dve obojene strane. Otuda je ukupan broj takvih kockica $m=12{,}8=96$, pa je verovatnoća $p=\frac{m}{n}=0{,}096$.

4311. Pretpostavimo broj N u obliku $N=a+10b+\cdots$, gde su a, b, ..., proizvoljni brojevi od 0 do 9 zaključno. Tada je $N^3=a^3+30a^2b+\cdots$. Otuda je jasno da na dve poslednje cifre mogu uticati samo a i b. Tako je broj mogućih vrednosti $n=100$. Kako je zadnja cifra broja N^3 jednaka jedan, to imamo jednu povoljnu vrednost $a=1$. Sem toga mora biti jedinica i zadnja cifra broja $\frac{N^3-1}{10}$, tj. mora se završavati jedinicom proizvod $3b$. To će biti samo onda kada je $b=7$. Na taj način povoljna je jedna jedina vrednost $(a=1,\ b=7)$, pa je otuda $p=0{,}01$.

4312. Broj mogućih načina da se uzme m primeraka od mogućih n iznosi C_n^m. Povoljni slučajevi su kada je od ukupnog broja k neispravnih proizvoda uzeto l (to se može učiniti na C_k^l načina), a ostalih $m-l$ proizvoda su ispravni, tj. oni su uzeti od ukupnog broja $n-k$ (broj mogućnosti je C_{n-k}^{m-l}). Prema tome broj povoljnih slučajeva je $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Tražena verovatnoća je

$$p=\frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}.$$

4313. U ovom primeru zgodno je naći suprotnu verovatnoću q. Verovatnoća da svih šest komada ne sadrže šesticu iznosi $q=\frac{C_7^5 C_{21}^5}{C_{28}^5}$. Pa pošto je $p+q=1$, biće $p=1-\frac{C_{21}^5}{C_{28}^5}=0{,}793$.

4314. $p=\frac{rm}{n}$. **4315.** $p=\frac{n-k}{n+m-k}$. **4316.** 1° 0,2; 2° 0,4; 3° 0,04. Mogu se posmatrati samo jednocifreni brojevi.

4317. $\frac{8\cdot 3!}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{1}{15}$. **4318.** 0,3. **4319.** $p=\frac{C_m^s C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}$. **4320.** 1° Verovatnoća suprotnog događaja iznosi $q=\frac{C_3^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3}$, pa je $p=1-q=1-\frac{C_3^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3}$;

2° $p=\frac{C_3^1 C_2^1+C_3^2 C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$.

4321. Broj mogućih slučajeva je $C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^n=2^n-1$. Broj povoljnih slučajeva je

$$m=C_n^2+C_n^4+\cdots=\frac{1}{2}[(1+1)^n+(1-1)^n-2]=2^{n-1}-1;\quad p=\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}.$$

4322. $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$ **4323.** $p=\frac{C_4^1 C_{32}^2}{C_{36}^3}=\frac{\frac{4}{1}\cdot\frac{32}{1}\cdot\frac{31}{1}}{\frac{36\cdot 35\cdot 34}{1\cdot 2\cdot 3}}=\frac{31\cdot 16}{35\cdot 3\cdot 17}=\frac{496}{1785}=0{,}2778.$

4324. $q=\frac{C_{32}^3}{C_{36}^3}=0{,}6947 \Rightarrow p\approx 0{,}3053.$ **4325.** $p=\frac{C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{32}^3}=0{,}0029.$

4326. $p=\frac{C_{18}^9 C_{18}^9}{C_{36}^{18}}=\frac{(18!)^4}{36!\,(9!)^4}$. Kako je na osnovu Stirlingove formule $n!\sim\sqrt{2n\pi}\,n^n e^{-n}$, imaćemo da je

$$18!\approx 18^{18}e^{-18}\sqrt{2\pi\cdot 18},$$

$$9!\approx 9^9 e^{-9}\sqrt{2\pi\cdot 9},$$

$$36!\approx 36^{36}e^{-36}\sqrt{2\pi\cdot 36},$$

pa je $p=\dfrac{(2\pi\sqrt{18}\cdot 18^{18}e^{-18})^4}{\sqrt{2\pi 36}\cdot 36^{36}e^{-36}(\sqrt{2\pi 9}\cdot 9^9\cdot e^{-9})^4}$. Nakon jednostavnih transformacija nalazimo $p\approx\dfrac{2}{\sqrt{18\pi}}\approx\dfrac{4}{15}=0{,}26$.

4327. 1° $\dfrac{C_{51}^5}{C_{52}^6}$; 2° $\dfrac{C_4^1(C_{13}^1)\,C_{13}^3+C_4^2(C_{13}^1\,C_{13}^2)^2}{C_{52}^6}$; 3° da bi našli broj n treba rešiti nejednačinu $1-\dfrac{(C_4^1)^n C_{13}^n}{C_{52}^n}>\dfrac{1}{2}$.

4328. Tražena verovatnoća jednaka je verovatnoći da ne ispadnu iz stroja sva tri elementa. Neka događaj Ak znači da k-ti elemenat neće ispasti iz stroja ($k=1, 2, 3$). Tada je $p=P(A_1\,A_2\,A_3)$. Pošto su događaji nezavisni, biće

$$p=P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)=0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}168.$$

Ako nedostaje prvi elemenat, onda je $p=P(A_2\,A_3)=0{,}24$.

4329. Neka događaj A znači da je izabrani proizvod ispravan, a događaj B da je izabrani proizvod prvoklasan. Otuda je $P(A)=1-0{,}04=0{,}96$, $p(B/A)=0{,}75$. Tražena verovatnoća je $p=P(AB)=0{,}96\cdot 0{,}75=0{,}72$.

4330. Nađimo verovatnoću suprotnog događaja A, koji znači da je partija proizvoda upotrebljiva. Dati događaj je proizvod pet događaja $A=A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5$, gde Ak ($k=1, 2, 3, 4, 5$) znači da je k-ti provereni proizvod ispravan. Verovatnoća događaja A_1 je $P(A_1)=\dfrac{95}{100}$, pošto je 95 proizvoda ispravno a svega ih ima 100. Nakon realizacije događaja A_1 ostaje 99 proizvoda od kojih su 94 ispravna, pa je otuda $P(A_2/A_1)=\dfrac{94}{95}$. Analogno je $P(A_3/A_1\,A_2)=\dfrac{93}{98}$, $P(A_4/A_1\,A_2\,A_3)=\dfrac{92}{97}$ i $P(A_5/A_1\,A_2\,A_3\,A_4)=\dfrac{91}{96}$. Po opštoj formuli nalazimo

$$q=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}=0{,}77.$$

Konačno, tražena verovatnoća je $p=1-q=0{,}23$.

4331. Razmotrimo događaje:

A_0 — dobija najmanje 20 hiljada;
A_1 — dobija 20 hiljada;
A_2 — dobija 100 hiljada;
A_3 — dobija 500 hiljada.

Očigledno je $A=A_1+A_2+A_3$. Na osnovu teoreme o zbiru verovatnoća dobijamo

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}050+0{,}010+0{,}001=0{,}061.$$

4332. $p=1-(1-0{,}7)(1-0{,}8)=0{,}94$. **4333.** $p=1-\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$.

4334. $1-0{,}5^n>0{,}9\ n\geqslant 4$. **4335.** $p=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{7^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{11^2}\right)\cdots=\dfrac{6}{\pi^2}$.

4336. Neka A znači događaj da su izvučene dve bele kuglice. Događaj A je proizvod dva događaja $A = A_1 A_2$ gde događaj A_1 znači pojavu bele kuglice pri prvom vučenju, događaj A_2 pojavu bele kuglice u drugom vučenju. Na osnovu teoreme množenja verovatnoća biće $P(A) = P(A_1) = P(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$.

4337. U datom slučaju događaji A_1 i A_2 su nezavisni pa je $p(A) = P(A_1)\,P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}16$.

4338. Razmotrimo sledeće događaje:

A — pribor neće otkazati;
A_1 — prvi deo će funkcionisati;
A_2 — drugi deo će funkcionisati;
A_3 — treći deo će funkcionisati.

Tada je $A = A_1 A_2 A_3$, odakle je na osnovu teoreme o množenju nezavisnih događaja $P(A) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}504$.

4339. Iz nespojivosti događaja sledi da je $p(A/B) = 0$ i $p(B/A) = 0$, što znači da su događaji zavisni.

4341. $\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23}$. **4342.** $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$. **4343.** $\frac{C_5^2}{C_8^3}$.

4345. $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{360}$.

4346. Poći ćemo od suprotnog događaja $\overline{A}$, koji znači da su sve bombe upotrebljene. Da bi se to desilo mora drugi avion upotrebiti i zadnju bombu, tj. prvih pet bačenih bombi nisu pogodile cilj; $P(\overline{A}) = 0{,}7^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}123$ odakle je $P(A) = 1 - 0{,}123 = 0{,}877$.

4347. Nije. **4348.** $p = 2 \cdot \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \cdot \frac{n-1}{2n-3} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2\,(n!)^2}{(2n)!}$.

4349. $p = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{[n-(k-1)]} = \frac{(n-k)!}{n!}$. **4350.** $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9}{100} = \frac{100!}{2^{100}(50!)^2} \approx 0{,}08$.

4351. Prva izvučena ceduljica mora biti data za prvog kandidata. Verovatnoća toga događaja je $\frac{n}{m+n}$. Dalje, izvlačenje ceduljica mora ići takvim redom da izvučenih ceduljica datih za prvog kandidata ne bude manje od izvučenih ceduljica za drugog kandidata. Verovatnoća toga događaja iznosi $\frac{n-m}{n}$. Konačno je $p = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-m}{n} = \frac{n-m}{n+m}$.

4352. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kupci koji imaju petodinarke, a $b_1, b_2, \ldots, b_m$, kupci koji imaju po deset dinara, pri čemu indeksi znače i njihov redosled u redu za karte. Događaj A_k znači uzimanje karte samo iza kupaca b_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$;

$$p = \bigcap_{k=1}^{m} P(\overline{A_k}) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-m+1}{n-m+2} = \frac{n-m+1}{n+1}.$$

4355. Obeležimo sa A događaj koji znači da u pedeset uzetih primeraka neće biti nijedan neispravan, a sa B događaj koji znači da među njima postoji samo jedan neispravan primerak. Tražena verovatnoća je $P = P(A+B)$. Pošto su događaji A i B nespojivi biće $P = P(A) + P(B)$. Iz njih sto možemo uzeti pedeset na C_{100}^{50} načina. Iz 95 isprav-

nih proizvoda 50 možemo izabrati na C_{95}^{50} načina. Tako je $P(A)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{95}}$. Analogno je $P(B)=\frac{C_5^1 C_{59}^{50}}{C_{1t}^{50}}$. Konačno je $p=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1 C_{65}^{50}}{C_{100}^{50}}=\frac{47\cdot 37}{99\cdot 97}=0{,}181.$

4356. Razmotrimo događaje:

A — razorena skladišta;

A_1 — pogodak u prvo skladište;

A_2 — pogodak u drugo skladište;

A_3 — pogodak u treće skladište.

Očigledno je, $A=A_1+A_2+A_3$. Pošto su u slučaju bacanja jedne bombe događaji A_1, A_2, A_3 nespojivi, to je $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}01+0{,}008+0{,}025=0{,}043$.

4357. Verovatnoća p pojave događaja za vreme T jednaka je verovatnoći $\frac{t}{T}p$ realizacije datog događaja za vreme t plus proizvod verovatnoće $\left(1-\frac{t}{T}p\right)$ da se događaj nije desio za vreme t i uslovne verovatnoće P pojave događaja u ostatku vremena, ako se ranije nije desio. Otuda važi jednakost $p=\frac{t}{T}p+\left(1-\frac{t}{T}p\right)P$. Tako nalazimo $P=\frac{p\left(1-\frac{t}{T}\right)}{1-\frac{t}{T}p}$.

4358. Razmotrimo događaj A koji označava da je meta samo jedanput pogođena. Taj događaj može se realizovati na nekoliko načina, tj. raspada se na nekoliko nezavisnih varijanti; pogodak može biti ostvaren prvim gađanjem, pod uslovom da se pri drugom i trećem gađanju promaši; ili pogodak u drugom a promašaj u prvom i trećem gađanju; ili pogodak u trećem a promašaj u prvom i drugom gađanju. Otuda je $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, gde su A_1, A_2, A_3 — pogoci pri prvom, drugom i trećem gađanju. Primenjujući teoreme o zbiru i množenju verovatnoća i koristeći svojstvo suprotnih događaja nalazimo:

$$P(A)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+$$
$$+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36.$$

4359. Razmotrimo događaj B koji znači da je meta makar jedanput pogođena. Koristeći isti postupak kao u prethodnom zadatku, i iste oznake, možemo predstaviti događaj B u obliku zbira nespojivih varijanti:

$$B=A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Zatim, naći verovatnoću svih tih varijanti, na osnovu teoreme o množenju verovatnoća, pa sve te verovatnoće sabrati. Međutim, takav način rešavanja je isuviše složen radi čega je podesnije mesto događaja B tražiti suprotan događaj $\overline{B}$, koji znači da meta ne bude ni jedanput pogođena. Očigledno je $\overline{B}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Na osnovu teoreme množenja biće $P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09$, odakle je $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}09=0{,}91$.

4360. Razmotrimo događaje: A — oboren bombarder, B — oboren lovac. Očigledno je $A=A_1+A_2$, gde A_1 znači da je bombarder oboren u prvom naletu lovca, a A_2 — oboren bombarder u drugom naletu lovca. Na osnovu uslova je $P(A_1)=0{,}2$. Događaj A_2 je složen događaj. Da bi bombarder bio oboren tek u drugom naletu lovca, neophodna je realizacija tri događaja: da lovac ne obori bombardera u prvom naletu, da bombarder ne obori lovca i da lovac obori bombardera pri drugom naletu. Na

osnovu teoreme o množenju verovatnoća dobija se $p(A_2)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}224$; otuda je $p(A)=p(A_1)+p(A_2)=0{,}424$. Da bi se desio događaj B treba da se dese dva događaja: da lovac ne obori bombardera u prvom napadu i da bombarder obori lovca uzvraćajući vatrom. Na osnovu teoreme o množenju verovatnoća biće $P(B)=0{,}8\cdot 0{,}3=$ $=0{,}24$.

4361. Neka A znači uništenje aviona; $P(A/2)$ — verovatnoću da je avion uništen pod uslovom da su ga pogodile dve granate. Dve granate koje pogode avion mogu da ga obore na sledeći način: ako ga jedna pogodi u prvi deo, ili da ga obadve pogode u drugi deo. Verovatnoća da će makar jedna od dve granate pasti na prvi deo može biti izračunata pomoću verovatnoće suprotnog događaja (da nijedna granata ne padne na prvi deo), koja iznosi $1-0{,}9^2$. Verovatnoća da će obe granate pasti na prvi deo iznosi $0{,}2^2$. Otuda je $P(A/2)=1-0{,}9^2+0{,}2^2=0{,}23$.

4362. U dotičnom slučaju prostije je preći na suprotan događaj — da avion ne bude uništen sa tri pogotka. Taj događaj se može desiti samo u slučaju kada dve, od tri granate, padnu na treći deo, a jedna na drugi deo. Takvih mogućnosti ima tri (onoliko na koliko načina možemo između tri granate, koje padnu na avion, izabrati dve koje su ga pogodile u treći deo). Prema tome je $P(\overline{A}/3)=3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}2=0{,}294$, odakle je $P(A/3)=1-0{,}294=0{,}706$.

4363. Označimo sa C izbacivanja aviona iz stroja. Očigledno je $C=M+L$, gde M znači uništenje oba motora a L uništenje pilota. Dalje je $M=M_1M_2$ gde M_1 znači uništenje prvog motora a M_2 — uništenje drugog motora. Pošto su događaji M i L spojivi to je izračunavanje verovatnoće događaja C neposredno, po teoremi o zbiru verovatnoća, nemoguće. Radi toga prelazimo na suprotan događaj $\overline{C}$ — da avion nije uništen. Očigledno je $\overline{C}=\overline{M}\,\overline{L}$. Ako pretpostavimo da, pri datoj tački eksplozije, motori bivaju uništeni nezavisno jedan od drugog, onda je $P(\overline{C})=P(\overline{M})\,P(\overline{L})$. Tako imamo $P(\overline{M})=1-P(M)=1-P(M_1)\,P(M_2)$, odakle je $P(\overline{C})=[1-P(M_1)\,P(M_2)]\,P(\overline{L})$. Saglasno uslovima zadataka dobija se $P(M_1)=P(M_2)=0{,}2$; $P(\overline{L})=1-P(L)=0{,}7$, odakle je $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}672=0{,}328$.

4364. Ako sa A obeležimo promašaj, onda $\overline{A}$ znači pogodak. Tada je $\overline{A}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$, gde su $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, pogoci respektivno u prvu, drugu i treću zonu. $P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_2)+$ $+P(\overline{A}_3)=0{,}15+0{,}23+0{,}17=0{,}55$, odakle je $P(A)=1-P(\overline{A})=0{,}45$.

4365. $p=0{,}991$.

4366. Neka je P_1 verovatnoća da će bela kuglica biti izvučena pre crne, a P_2 verovatnoća da će crna kuglica biti izvučena ranije od bele. Verovatnoća P_1 jednaka je zbiru verovatnoća izvlačenja bele kuglice odmah iza jedne crvene, dve crvene itd. Na taj način, možemo pisati, za slučaj kada se kuglice ne vraćaju,

$$P_1=\frac{n}{n+m+l}+\frac{l}{n+m+l}\cdot\frac{n}{n+m+l-1}+\frac{l}{n+m+l}\cdot\frac{l-1}{n+m+l-1}\cdot\frac{n}{n+m+l-2}+\cdots,$$

a u slučaju vraćanja kuglica

$$P_1=\frac{n}{n+m+l}+\frac{ln}{(n+m+l)^2}+\frac{l^2n}{(n+m+l)^3}+\cdots=\frac{n}{n+m}.$$

Analogna jednakost važi i za verovatnoću P_2, koja se, što nije teško videti, dobija iz P_1 množenjem sa $\frac{m}{n}$. Otuda je $P_2=\frac{m}{n}P_1$. Kako je sem toga $P_1+P_2=1$ to je tražena verovatnoća $P_1=\frac{n}{m+n}$.

4367. Neka A_k znači da je na k-tom pismu ispisana tačna adresa ($k=1, 2, \ldots, n$). Tražena verovatnoća je $p=P\sum_{k=1}^{n}(A_k)$. Pošto su događaji A_k spojivi to za proizvoljne k, j, i ..., važe jednakosti $P(A_k)=\frac{1}{n}$,

$$P(A_k A_j)=P(A_k)\,P(A_j/A_k)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{(n-2)!}{n!},$$

$$P(A_k A_j A_i)=\frac{(n-3)!}{n!} \text{ itd. } P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\right)=\frac{1}{n!}.$$

Nakon uprošćavanja formule za verovatnoću zbira događaja dobijamo

$$P=C_n^1 n-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

ili

$$p=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Za veliko n biće $p\approx 1-e^{-1}$.

4369. $p_k=\sum_{j=1}^{n}p_{kj}$. **4370.** $\frac{11}{26}$. **4371.** $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

4372. $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=[P(A)+P(\overline{A})]\,P(B/A)=P(B/A)$.

4374. 1° $\frac{1}{3}$; 2° $\frac{5}{6}$.

4375. Neka A označava da je izvučena ceduljica sa jednakim zbirom, B — druga. 1° $P(A+B)=2P(A)=0{,}1105$; 2° $P(A+B)=2P(A)-P^2(A)=0{,}1075$.

4376. $p=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

4377. Neka događaj A znači izvlačenje obeležene kuglice. Hipoteze su: H_1 da se kuglica nalazi u prvoj kutiji, H_2 da se nalazi u drugoj kutiji. Po uslovu je $P(H_1)=p$, $P(H_2)=1-p$. Pretpostavimo da je iz prve kutije izvučeno m a iz druge $n-n$ kuglica. Uslovne verovatnoće izvlačenja obeležene kuglice biće

$$P(A/H_1)=1-(1-P)^m,\quad P(A/H_2)=1-(1-P)^{n-m}.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobija se

$$P(A)=p\,[1-(1-p)^m]+(1-p)\,[1-(1-p)^{n-m}.$$

Sada je potrebno odrediti m tako da verovatnoća $P(A)$ bude najveća. Diferencirajući $P(A)$ po m dobijamo

$$\frac{dP(A)}{dm}=-p\,(1-P)^m\ln(1-p)+(1-P)\,(1-p)^{n-m}\ln(1-P).$$

Iz jednačine $\frac{dP(A)}{dm}=0 \Rightarrow (1-p)^{2m-n}=\frac{1-p}{p}$. Prema tome mora biti $m=\frac{n}{2}+$

$$+\frac{\ln\frac{1-p}{p}}{2\ln(1-p)}.$$

4378. Razmotrimo četiri hipoteze:

H_0 — avion nije pogodio nijedan hitac;
H_1 — avion je pogodio jedan hitac;
H_2 — avion su pogodila dva hica;
H_3 — avion su pogodila tri hica.

Koristeći teoreme sabiranja i množenja, nalazimo verovatnoće tih hipoteza:

$$P(H_0)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09;$$
$$P(H_1)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36$$
$$P(H_2)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}41$$
$$P(H_3)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}14.$$

Uslovna verovatnoća događaja A (uništenje aviona) pri tim hipotezama je $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1)=0{,}2$; $P(A/H_2)=0{,}6$; $P(A/H_3)=1{,}0$.

Primenjujući formulu totalne verovatnoće dobijamo:

$$P(A)=P(H_0)\,P(A/H_0)+P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)\,P(A/H_3)=$$
$$=0{,}36\cdot 0{,}2+0{,}41\cdot 0{,}6+0{,}14\cdot 1{,}0=0{,}458.$$

4379. Razmotrimo hipoteze:

H_1 — na cilj je dospeo samo vodeći avion (druga dva su oborena);
H_2 — na cilj je dospeo vodeći i jedan od vođenih;
H_3 — na cilj su dospela sva tri aviona,

i događaj A koji znači da je objekat uništen. Verovatnoće hipoteza su:

$$P(H_1)=0{,}8\cdot 0{,}2^2=0{,}032$$
$$P(H_2)=2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2=0{,}256$$
$$P(H_3)=0{,}8^3=0{,}512.$$

Uslovne verovatnoće događaja A pri ovim pretpostavkama su

$$P(A/H_1)=0{,}3$$
$$P(A/H_2)=1-0{,}7^2=0{,}51$$
$$P(A/H_3)=1-0{,}7^3=0{,}657.$$

Na osnovu formule za totalnu verovatnoću dobija se

$$P(A)=0{,}032\cdot 0{,}3+0{,}256\cdot 0{,}51+0{,}512\cdot 0{,}657=0{,}476.$$

4380. $p=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{13}{132}.$

4381. $p=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{18}.$

4382. Neka H_{j1} znači da je iz j-te kutije izvučena bela kuglica; H_{j2} da je iz te iste kutije izvučena crna kuglica.

Smatramo da je $P(H_{j1})=\frac{m}{m+k}$, $P(H_{j2})=\frac{k}{m+k}$. Tada je $P(H_{j+1,1})=\frac{m}{m+k}$.

Otuda je $p=\frac{m}{m+k}$.

4383. 1° 0,533; 2° $p=\frac{1}{3}\cdot 0{,}8^2+\frac{2}{3}\cdot 0{,}4^2=0{,}32.$

4384. Neka hipoteza H_k $(k=0,1,\ldots,s)$ znači da je u prvom vremenskom intervalu prispelo k poziva. Tako imamo $P(H_k)=P_t(k)$. Neka A znači da je za vreme $2t$ prispelo s poziva. Verovatnoća da u toku drugog vremenskog intervala prispe $s-k$ poziva iznosi

$$P(A/H_k)=P_t(s-k)\,P_{2t}(s)=\sum_{k=0}^{s}P_t(k)\,P_t(s-k).$$

4385. $p=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}+\left(\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}\right)\frac{24}{28}=\frac{190}{203}.$

4386. Jednakost važi samo u sledećim specijalnim slučajevima: 1° $A=V$; 2° $B=U$; 3° $B=A$; 4° $B=\bar{A}$; 5° $B=V$.

4387. Na osnovu formule iz zd. 65 $\Rightarrow$ $m\approx 13$, $p\approx 0{,}67$.

4388. Neka događaj A znači prijem signala „tačka" a događaj B prijem signala „crtica". Možemo učiniti dve pretpostavke: H_1 — da je predeti signal „tačka", i H_2 — da je predati signal „crtica". Po uslovu zadatka je $P(H_1):P(H_2)=5:3$. Sem toga je $P(H_1)+P(H_2)=1$. Otuda je $P(H_1)=\frac{5}{8}$ a $P(H_2)=\frac{3}{8}$. Poznato je da je $P(A/H_1)=\frac{3}{8}$ $P(A/H_2)=\frac{1}{3}$, $P(B/H_1)=\frac{2}{5}$, $P(B/H_2)=\frac{2}{3}$. Verovatnoće događaja A i B nalazimo po formuli totalne verovatnoće

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

Tražena verovatnoća se dobija korišćenjem Bayesove formule:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4},$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\,P(B/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

4389. Moguće su dve hipoteze:

H_1 — pribor je komponovan od visokokvalitetnih delova.
H_2 — pribor je sastavljen od delova prosečnog kvaliteta.

Verovatnoće tih hipoteza pre opita su: $P(H_1)=0{,}4$; $P(H_2)=0{,}6$. Kao rezultat opita konstatovano je da je pribor ispravno funkcionisao u toku vremena t, i neka je to događaj A. Uslovne verovatnoće tih događaja pri hipotezama H_1 i H_2 su:

$$P(A/H_1)=0{,}95;\quad P(A/H_2)=0{,}7.$$

Na osnovu Bayesove formule nalazimo verovatnoću hipoteze H_1 nakon opita:

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}4\cdot 0{,}95+0{,}6\cdot 0{,}7}=0{,}475.$$

4390. Pre opita su moguće sledeće hipoteze:

H_1 — ni prvi ni drugi strelac nisu pogodili;
H_2 — oba strelca su pogodila;
H_3 — prvi strelac je pogodio a drugi nije;
H_4 — prvi strelac nije pogodio a drugi je pogodio.

Verovatnoće tih hipoteza su:

$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12$$
$$P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32$$
$$P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48$$
$$P(H_4)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08.$$

Uslovne verovatnoće konstatovanog događaja A, pri ovim hipotezama, su:

$$P(A/H_1)=0;\quad P(A/H_2)=0;\quad P(A/H_3)=1;\quad P(A/H_4)=1.$$

Nakon opita dolazi se do zaključka da su hipoteze H_1 i H_2 nemoguće, a verovatnoće hipoteza H_3 i H_4 iznose:

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{6}{7}$$

$$P(H_4/A)=\frac{0{,}08\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{1}{7}.$$

Prema tome verovatnoća da pogodak pripada prvom strelcu iznosi $p=\frac{6}{7}$.

4391. Pre opita moguće su sledeće hipoteze:

H_1 — da je oklop probijen krupnim parčetom;

H_2 — da je probijen srednjim parčetom;

H_3 — da je probijen malim parčetom,

sa verovatnoćama $P(H_1)=0{,}1$; $P(H_2)=0{,}3$; $P(H_3)=0{,}6$. Neka je rezultat opita događaj A koji znači da je oklop probijen. Uslovne verovatnoće toga događaja uz hipoteze H_1, H_2 i H_3 iznose:

$$P(A/H_1)=0{,}9;\quad P(A/H_2)=0{,}2;\quad P(A/H_3)=0{,}05.$$

Na osnovu Bayesove formule imamo:

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}05}=0{,}500$$

$$P(H_2/A)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}05}=0{,}333$$

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}05}=0{,}167.$$

4392. Pretpostavke:

H_1 — uzeta je partija koja sadrži neispravne proizvode.

H_2 — uzeta je partija koja sadrži kvalitetne proizvode.

Prema uslovu zadatka je $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$, $P(A/H_1)=\frac{3}{4}$, $P(A/H_2)=1$. Otuda formula za totalnu verovatnoću događaja A biće $P(A)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+1\right)=\frac{7}{8}$. Nakon prvog opita verovatnoća da partija sadrži neispravne proizvode iznosi:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{718}=\frac{3}{7}.$$

Sa P je obeležen događaj da je prvi uzeti artikal bio ispravan. Verovatnoća da partija sadrži samo ispravne proizvode iznosi $P(H_2/A)=\frac{4}{7}$. Neka događaj A znači da je prilikom drugog opita proizvod bio neispravan. Verovatnoća toga događaja takođe se nalazi po formuli totalne verovatnoće. Ako su H_1' i H_2' nove hipoteze, onda je saglasno prethodnim izračunavanjima $P(H_1')=\frac{3}{7}$, $P(H_2')=\frac{4}{7}$. Sem toga je $P(B/H_1')=\frac{1}{4}$, $P(B/H_2')=0$. Prema tome je tražena verovatnoća $P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{28}$.

4393. Neka događaj A znači da je vepar ubijen jednim metkom $P(A)=\sum_{k=1}^{3} P(H_k)$. Neka, dalje, hipoteza H_k pretpostavlja da je pogodio k-ti lovac ($k=1, 2, 3$). $P(H_1)=0{,}048$, $P(H_2)=0{,}128$, $P(H_3)=0{,}288$, $P(H_1/A)=0{,}103$, $P(H_2/A)=0{,}277$, $P(H_3/A)=0{,}620$.

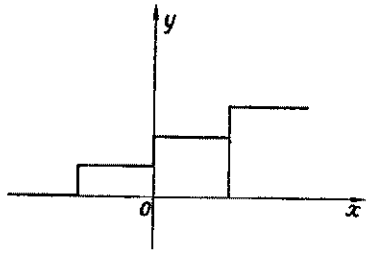
4394. Neka događaj A znači da su izvučene crna i crvena kuglica; hipoteza H_k ($k=1, 2$) da je izvučena iz k-te kutije.

$$P(H_k)=\frac{}{2};\quad P(A/H_1)=\frac{300}{625};\quad P(A/H_2)=\frac{6}{625};\quad P=P(H_1/A)=\frac{50}{51}.$$

4395. Neka događaj M_1 znači da je prvi blizanac dečak; događaj M_2 — da je i drugi takođe dečak. Hipoteze: H_1 — oba dečaka; H_2 — dečak i devojčica.

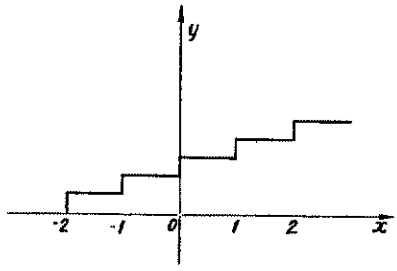
$$P(M_1)=a+\frac{}{2}[1-(a+b)],\quad P=P(M_2/M_1)=\frac{2a}{1+a-b}.$$

4396. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x\leqslant -1,\\ \frac{1}{4} & \text{za } -1<x\leqslant 0,\\ \frac{3}{4} & \text{za } 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{za } x>1.\end{cases}$$



Sl. 432

4397. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x\leqslant -2,\\ 0{,}1 & \text{za } -2<x\leqslant -1,\\ 0{,}3 & \text{za } -1<x\leqslant 1,\\ 0{,}5 & \text{za } 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}9 & \text{za } 1<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{za } x>2.\end{cases}$$



Sl. 433

4398. $$1^\circ\ \begin{cases} 0 \text{ za } x\leqslant 0\\ \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{x-1} C_n^m, \text{ ako je } 0<x\leqslant n \text{ i } x\in C,\\ \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{[x]} C_n^m, \quad \text{,,} \quad 0<x\leqslant n \text{ i } x\notin C.\end{cases}$$

2° Odnos broja pojavljivanja grba prema broju pojavljivanja pisma je slučajna veličina μ sa raspodelom:

$$0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-2},\ \dots,\ \frac{n-1}{n},\ \infty,$$

$$P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(2),\ \dots,\ P_n(n-1),\ P_n(n),$$

te je otuda njena funkcija raspodele

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} C_n^m, & \text{ako je } 0<x \text{ i } x=\dfrac{k}{n-k}, \\ & \text{, gde } k\in C \\ \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{m=1}^{[k]} C_n^m, & \text{ako je } x=\dfrac{k}{n-k},\ k>0;\ k\notin C\left(k=\dfrac{nx}{1+x}\right) \end{cases}$$

4399.
$$\begin{cases} 0 & \text{za } x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{6^n}\displaystyle\sum_{m=0}^{x-1} C_n^m 5^{n-m}, & \text{ako je } 0<x\leqslant n \text{ i } x\in C, \\ \dfrac{1}{6^n}\displaystyle\sum_{m=0}^{[x]} C_n^m 5^{n-m}, & \text{ako je } 0<x\leqslant n \text{ i } x\notin C, \\ 1 & \text{za } x>n \end{cases}$$

4400.
$$0 \text{ za } x\leqslant 0,$$
$$1-p^x \text{ za } x\in N,$$
$$1-p^{[x]+1} \text{ za } x>0 \text{ i } x\notin c.$$

4401. Neka μ znači broj pojavljivanja grba. Neka je dalje $x\in N$, tada je

$$F(x)=p(\mu<x)=\sum_{m=0}^{x-1}\frac{1}{2^{m+1}}=1-\frac{1}{2^x}$$

$$\text{ako } x\notin C,\ F(x)=1-\frac{1}{2^{[x]+1}}.$$

4402. 1° $M\xi=0{,}442$; $M\xi^2=0{,}4684$; $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=0{,}273$

2° $p(-0{,}5<\xi<0{,}5)=0{,}738$.

4403. $M\xi^4=0{,}7$; $M\xi^8=0{,}7$; $D\xi^4=0{,}21$.

4404. Srednji broj impulsa smetnje, koji padaju u vremenski interval od 10 mksec $\lambda=0{,}1$. Neka je ξ broj impulsa smetnji koji padaju u radni interval stanice, padala je

$$P(\xi=m)=\frac{(0{,}1)^m}{m!}e^{-0{,}1},\quad m=0,1,2,\dots$$

Verovatnoća da će biti onemogućena predaja je

$$P(\xi>0)=1-P(\xi=0)=1-e^{-0{,}1}=0{,}09516.$$

4405. Neka je z_1 broj belih kuglica prebačenih prvi put a z_2 prebačenih drugi put, tada je $MZ_1=3\cdot\frac{2}{6}=1$. Broj kuglica u drugoj kutiji nakon prvog prebacivanja je 8, $MZ_2=4\cdot\frac{6}{8}=3$, tj.

$$Mx_1=2\cdot 1+3=4;\quad Mx_2=6-3=3.$$

4406. Kako je

$$\sin\frac{\pi}{2}n=\begin{cases}0 \text{ za } n \text{ parno}\\ 1 \text{ za } n=4k+1\\ -1 \text{ za } n=4k+3\end{cases}$$

to će tablica raspodele funkcije $\sin\frac{\pi}{2}\xi$ biti

$\sin\frac{\pi}{2}\xi$	0	1	-1
	p_0	p_1	p_{-1}

gde je

$$p_0=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{3};$$

$$p_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{16}\right)}=\frac{8}{15};$$

$$p_{-1}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots=\frac{1}{8\left(1-\frac{1}{16}\right)}=\frac{2}{15}.$$

4407. Obeležimo sa ξ slučajan broj defektnih artikala sadržanih u izboru. Slučajna veličina ξ uzima sledeće posebne vrednosti: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$; $x_5=4$; $x_6=5$. Verovatnoća $p_i=P(\xi=x_i)$, da će ξ uzeti (datu) određenu vrednost x_i, iznosi:

$$P_i=\frac{C_{10}^{i-1}\,C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Traženo matematičko očekivanje je

$$M\xi=\sum_{i=1}^{6}(i-1)\frac{C_{10}^{i-1}\cdot C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5}=\frac{1}{C_{100}^5}\sum_{j=0}^{5}C_{10}^{j}\,C_{90}^{5-j}\,j.$$

Pošto je $\sum\limits_{j=0}^{5}C_{10}^{j}\,C_{90}^{5-j}$ koeficijenat uz x^5 u proizvodu

$$(1+x)^{10}(1+x)^{90},\ \text{to je}\ \sum_{j=0}^{5}j\,C_{10}^{j}\,C_{90}^{5-j}$$

koeficijenat uz x^5 u izrazu

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{10}(1+x)^{90}\,|_{t=1}=10x\,(1+x)^{99}.$$

Otuda je $\sum\limits_{j=0}^{5}j\,C_{10}^{j}\,C_{90}^{5-j}=10\,C_{99}^4$ a $\bar{x}=\frac{10\cdot C_{99}^4}{C_{100}^5}=0{,}5.$

4408. $M\xi=-2$; $D\xi=-1{,}1.$ **4409.** $\frac{2}{N}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i k_i.$

4410. Za prvoga $\frac{7}{11}$, za drugoga $\frac{7}{11}$ novčića, tj. igra je izgubljena za drugoga igrača.

4411. $M\xi = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{1}{p}$.

4412. $M\xi = \omega$; $D\xi = \omega(\omega-1)$, gde je $\omega = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$. Sumiranje reda izvodi se po formulama

$$\sum_{m=1}^{\infty} me^{-\alpha m} = -\frac{d}{d\alpha}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha m} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-\alpha m} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha m} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right).$$

4413. $M\xi_p = 1\cdot\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)} + 2\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{m}{n+m-2} + \cdots +$

$$+ n\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n+m)(n+m-1)\cdots(m+1)}\cdot\frac{m}{n}.$$

4414. 2. **4415.** Ako je l_1 put koji pređe radnik duž redova a l_2 poprečno preko redova, tada je

$$Ml = Ml_1 + Ml_2 = \frac{n^2-1}{3n}a + \frac{m^2-1}{3m}b.$$

4416. Na osnovu definicije matematičko očekivanje slučajne veličine je

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k.$$

S druge strane, vrednost izvoda funkcije generatrise, izračunatog za $u=1$, iznosi

$$S'(1) = \frac{dS(u)}{du}\bigg|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k u^{k-1}\bigg|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k.$$

Otuda je $M\xi = S'(1)$.

4417. Razmotriti disperziju kao funkciju verovatnoće pojave događaja. **4418.** Dva dinara.

4419. $q = 0{,}9$; $P_{10} = 1 - q^{10} \approx 0{,}651$. **4420.** $M\xi = \frac{3}{2}$.

4421. $M\xi = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. **4422.** $p = C_m^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$; $M\xi = \frac{m}{n}$; $D\xi = \frac{m(n-1)}{n^2}$

4423. $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$; razmotrimo identitet $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(a+1)^{k+1}} = \frac{1}{1+a-x}$, diferencirajmo ga po x, stavljajući $x=a$ i množeći član po član sa a, nalazimo $M\xi = a$; $D\xi = a(a+1)$.

4424. Neka je μ_i broj pojavljivanja događaja A u i-tom opitu, tada je $M\mu_i = pi$; $D\mu i = pi q_i$; $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ pri čemu su sabirci nezavisni, pa je

$$M\mu = \sum_{i=1}^{n} pi; \quad D\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

4425. Očigledno je

$$P(\xi=k)=p_k=\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_n^m}\ ;\ M\xi=\sum_{k=1}^{n} kp_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_n^m}=m\frac{n}{N};$$

$$M\xi(\xi-1)=\frac{1}{C_N^m}\sum_{k=2} k(k-1)C_n^k C_{N-n}^{m-k}=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}m(m-1)=M\xi^2-M\xi,$$

odakle nalazimo

$$M\xi^2=\frac{n(n-1)m(m-1)}{N(N-1)}+\frac{nm}{N},$$

pa je otuda

$$D\xi=m\frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N}\,\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}.$$

4426. Obeležimo sa $P_n(A)$ verovatnoću dostizanja naznačenog rezultata za n opita. Ako sa $P_{n,m}$ obeležimo tačno m uspešnih opita od ukupnog broja n opita, onda saglasno formuli totalne verovatnoće biće

$$P_n(A)=\sum_{m=0}^{n} P_{n,m}G(m).$$

Pošto su opiti nezavisni a verovatnoća uspešnog ishoda u svakom od njih iznosi p, to je

$$P_{m,n}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

Sastavljajući u formulu za $P_n(A)$ vrednosti $P_{n,m}$ i $G(m)$ dobijamo

$$P_n(A)=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m(1-p)^{nm}\left\{1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^m\right\}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m(1-p)^{n-m}-$$

$$-\sum_{m=0}^{n} C_n^m\left[p\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\right]^m(1-p)^{n-m}=1-\left[p\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+(1-p)\right]^n=1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^n.$$

Da bi bio postignut naznačeni rezultat potrebno je tačno n opita, ako pri n-tom opitu on bude postignut. Verovatnoća zadnjeg događaja iznosi $P_n(A)-P_{n-1}(A)$. Otuda je $M\xi$ matematičko očekivanje slučajnog broja opita, potrebnih radi postizanja naznačenog rezultata.

$$M\xi=\sum_{n-1}^{\infty} n[P_n(A)-P_{n-1}(A)]=\sum_{n-1}^{\infty} n\left\{\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^n\right\}=\frac{p}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Da bi smo izračunali zadnji zbir koristimo poznatu jednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad \text{za}\quad |x|<1$$

koja se dobija diferenciranjem beskonačne geometrijske progresije

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Kao rezultat dobijamo

$$M\xi=\frac{p}{\omega}\,\frac{1}{\left[1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)\right]^2}=\frac{\omega}{p}.$$

4427. $\bar{x}=\frac{q}{p}$; $D[\xi]=\frac{q^2}{p^2}+\frac{q}{p}$ gde je $q=1-p$.

4428. $M\xi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2np_n=\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)]^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\infty,$

jer je $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$

4429. Ako je m broj izvučenih belih kuglica, onda je

$$M_m=\sum_{m=0}^{n}\frac{m\cdot C_M^m\,C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=n\frac{M}{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{C_{M-1}^{m-1}\,C_{N-M}^{n-m-1}}{C_{N-1}^{n-1}}=n\frac{M}{N}.$$

1° $M_m=Np=n\frac{M}{N}$; $D_m=npq=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$.

U slučaju 2° stavljamo $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$, gde je m_i broj belih kuglica, izvučenih iz kutije u i -tom izvlačenju, tj. $m_i=1$, ili 0 respektivno sa verovatnoćama $\frac{M}{N}$ i $1-\frac{M}{N}$; tada je $M(mi,\ mj)=1+\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}$ pa je tako $Mm^2=M\left(\sum\limits_{i=1}^{n}mi\right)^2=$

$$=\sum_{i=1}^{n}Mmi^2+\sum_{i,j=1}^{n}M(m_i,\ m_j)=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

pa pošto je u drugom slučaju disperzija manja, nego u prvom, to je odstupanje od srednjeg manje pri uzimanju bez vraćanja.

4430. Broj izvučenih belih kuglica u prvom opitu obeležimo sa ξ, a u drugom sa η. U prvom opitu je $\xi=\xi_1+\xi_2$, gde je ξ_i broj belih kuglica izvučenih iz i-te kutije; kako su ξ_1 i ξ_2 nezavisni, to je $M\xi=M\xi_1+M\xi_2$ i $D\xi=D\xi_1+D\xi_2$; $M\xi_1=\frac{Na}{a+b}$; $M\xi_2=\frac{Nb}{a+b}$; $N\eta=2N\cdot\frac{1}{2}=N$; $D\eta=\frac{N}{2}$, tada je $M\xi=N$; $D\xi=2N\frac{ab}{(a+b)^2}$; kako je $a\neq b\Rightarrow\frac{2ab}{(a+b)^2}<$ $<\frac{1}{2}$, to je s obzirom na manje rasipanje u prvom opitu verovatnije, da broj izvučenih belih kuglica leži u intervalu $(N-k,\ N+k)$ sa centrom u matematičkom očekivanju.

4431. 1° $M\xi=p_1+2p_2+3p_3+\cdots=\sum\limits_{i\geqslant1}p_i+\sum\limits_{i\geqslant2}p_i+\cdots+=\sum\limits_{m\geqslant1}p_m$; $\sum\limits_{i\geqslant1}p_i+3\sum\limits_{i\geqslant2}p_i+$

$+5\sum\limits_{i\geqslant3}p_i+\cdots=P_1+3P_2+5P_3+\cdots=2(P_1+2P_2+3P_3+\cdots)-\sum\limits_{m\geqslant1}P_m=$

$=2\sum\limits_{m\geqslant1}mP_m-M\xi$; tada je $D\xi=2\sum\limits_{m\geqslant1}P_m-M\xi(M\xi+1)$.

4432. 1° $p_{-2}=p_2=\frac{1}{24}$, $p_{-1}=p_1=\frac{1}{3}$, $p_0=\frac{1}{4}$,

2° $p_{-2}=p_2=\frac{1}{6}$, $p_{-1}=p_1=\frac{1}{3}$, $p_0=0$,

3° $p_{-2}=p_2=\frac{b-a}{24}$, $p_{-1}=p_1=\frac{4a-b}{b}$, $p_0=1-\frac{5a-b}{4}$;

potrebni uslovi su $4\geqslant 5a-b\geqslant 0$ i $4a\geqslant b\geqslant a\geqslant 0$ tj. $4a\geqslant b\geqslant a$, $0\leqslant a\leqslant 4$.

4433. Pošto niz $\{x_n\}$ konvergira, onda je on ograničen: $|x_n|<M$, $n=1, 2, \ldots$ za proizvoljno $\varepsilon>0$ može se naći $N=N(\varepsilon)$ tako da je $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ za $n>N$. Ako izaberemo toliko veliko da je

$$P_{n_1}<\frac{\varepsilon}{4MN},\quad P_{n_2}<\frac{\varepsilon}{4MN},\quad \ldots,\quad P_{n_N}<\frac{\varepsilon}{4MN},$$

onda je

$$|M\xi-a|=\left|\sum_{i=1}^{n} P_{n_i}(x_i-a)\right|<\frac{\varepsilon}{4MN}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N+1}^{n} P_{n_i},$$

odakle n sledi potrebnost uslova.

4434. Očigledno je

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{za} \quad x\leqslant -1 \\ x+1 & \text{za} \quad -1<x\leqslant 0 \\ 1-x & \text{za} \quad 0<x\leqslant 1 \\ 0 & \text{za} \quad x>1 \end{cases}.$$

Tada je

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x\leqslant -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{za } -1<x\leqslant 0 \\ 1-\frac{(1-x)^2}{2} & \text{za } 0<x\leqslant 1 \\ 1 & \text{za } x>1 \end{cases}$$

$$M\xi=\int_{-1}^{0}(x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^2)\,dx=0;$$

$$D\xi=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-x^3)\,dx=\frac{1}{6}.$$

4435. 1° Da bi funkcija $F(x)$ bila neprekidna, potrebno je da bude $F(-a)=0$ i $F(a)=1$. Iz tih uslova dobijaju se dve jednačine za nalaženje nepoznatih A i B

$$A+B\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right)=A-\frac{\pi}{2}B=0,$$

$$A+B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right)=A+\frac{\pi}{2}B=1.$$

Otuda je $A=\frac{1}{2}$ i $B=\frac{1}{\pi}$.

Prema tome je funkcija raspodele slučajne veličine ξ jednaka

$$F(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } x\geqslant a, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} & \text{za } -a\leqslant x\leqslant a, \\ 0 & \text{za } x\leqslant -a. \end{cases}$$

2° Verovatnoća $P\left(-\frac{a}{2}<\xi<\frac{a}{2}\right)$ da će slučajna veličina ξ biti u intervalu $\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ iznosi:

$$P\left(-\frac{a}{2}<\xi<\frac{a}{2}\right)=F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{2a}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{a}{2a}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}.$$

3° Gustina verovatnoće $f(x)$ slučajne veličine ξ iznosi:

1) za svako $x\in(-a, a)$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}};$$

2) nula za sve ostale vrednosti x. Dobijena gustina verovatnoće

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{za } |x|\leqslant a$$

naziva se zakon Arkussinusa.

4436. 1° Koeficijent A određuje se pomoću jednačine

$$\int_0^\infty Ax^2e^{-kx}\,dx=1.$$

Otuda je

$$A=\frac{1}{\int_5^\infty x^2e^{-kx}\,dx}.$$

Nakon dvostruke primene parcijalne integracije dobijamo

$$\int_0^\infty x^2e^{-kx}\,dx=\frac{2}{k^3}.$$

Otuda je, $A=\frac{k^3}{2}$ pa gustina verovatnoće ima oblik

$$f(x)=\frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}.$$

2° Verovatnoća $P\left(0<\xi<\frac{1}{k}\right)$ da slučajna veličina ξ bude u zadatom intervalu izračunava se po formuli

$$P\left(0<\xi<\frac{1}{k}\right)=\frac{k^3}{2}\int_0^{1/k}x^2e^{-kx}\,dx=\frac{k^3}{2}\left(-\frac{x^2}{k}e^{-kx}-\frac{2}{k^2}xe^{-kx}-\frac{2}{k^3}e^{-kx}\right)\Bigg|_0^{1/k}=\frac{2e-5}{2e}.$$

3° Funkcija raspodele $F(x)$ slučajne veličine ξ definiše se formulom

$$F(x)=\int_0^x \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}dx=1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}.$$

4437. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1=A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi,$ tj.

$$A=\frac{1}{\pi};\quad F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x;$$

$$P(-1<\xi<1)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Matematičko očekivanje ne postoji. Moduo i medijana su jednaki nuli.

4438. $M\xi=\frac{a+b}{2}=4;\quad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}=3,$ odakle nalazimo $a=1,\ b=7,$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b} & \text{za } 1<x\leqslant 7\\ 0 & \text{van tog intervala.}\end{cases}$$

4439. $M\xi=0;\quad D\xi=\frac{1}{2}.$

4440. $M\xi=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\cos^2x\,dx=0.\qquad D\xi=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}.$

4441. $M\xi=\frac{E}{\rho\sqrt{\pi}};\qquad D\xi=\frac{E^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right).$

4442. $D\xi=\frac{a^2}{2};\qquad E=\frac{a}{\sqrt{2}}.$ **4443.** $P(a<\bar{a})=1-e^{-\frac{\pi}{4}};\qquad P(a>\bar{a})=e^{-\frac{\pi}{4}};$

$$\frac{P(a<\bar{a})}{P(a>\bar{a})}=\frac{0{,}544}{0{,}456}=1{,}19.$$ **4444.** $M\xi=D\xi=m+1.$

4445. $M\xi=\frac{3}{2}x_0;\qquad D\xi=\frac{3}{4}x_0^2.$

4446. $A=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)};\qquad M\xi=(\alpha+1)\beta;\qquad D\xi=\beta^2(\alpha+1).$

4447. $A=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};\qquad M\xi=\frac{a}{a+b};\qquad D\xi=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$

4448. $A=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$; $\quad M\xi=0$; $\quad D\xi=\dfrac{1}{n-2}$.

Radi izračunavanja integrala $\int\limits_0^\infty (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\,dx$ koristiti smenu $x=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$, koja dovodi do beta-funkcije, a nju zatim izraziti pomoću gama funkcije.

4449. $A=\dfrac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$; $\quad M\xi=\dfrac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$; $\quad D\xi=n-1-\overline{x}^2$.

4450. 1° $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{Za } 0<x\leqslant 2,\\ 0 & \text{van tog intervala.}\end{cases}$

2° Moduo $x=2$; $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^a x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_a^2 x\,dx$, $\quad a=\sqrt{2}$ medijana.

$M\xi=\dfrac{4}{3}$; $\qquad P(0{,}5<\xi<1{,}5)=\dfrac{1}{2}$. $\qquad$ (sl. 2).

4451. Pri rešavanju zadatka nameće se potreba da se izračunaju integrali oblika

$$I_n=\int\limits_0^\infty t^n e^{-t^2}dt \quad (n\in N),$$

koji se smenom $t^2=u$ na poznati Eulerov integral

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty u^{p-1}e^{-u}du \qquad (p>0),$$

koji definiše gama-funkciju, tj.

$$I_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}}e^{-u}du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Na osnovu svojstva gama-funkcije $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$ za $p\in C$ je $\Gamma(p+1)=p!$ a,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Otuda, ako je k ceo broj biće

$$I_{2k}=\frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}.$$

gde je

$$(2k-1)!! = (2k-1)\,(2k-3)\,(2k-5)\ldots 7.\,5.\,3.\,1;$$

$$I_{2k+1} = \frac{1}{2}\,\Gamma\,(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

Zadnje dve formule mogu biti dobijene i neposredno ponovljenom parcijalnom integracijom polazne formule I_n, ne koristeći svojstva gama-funkcije.

1° Matematičko očekivanje slučajne amplitude bočne strane iznosi

$$M\xi = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Uvođenjem smene $\frac{x}{2\sqrt{\sigma}} = t$,

dobijamo

$$M\xi = 2\sqrt{2}\,\sigma \int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,dt = 2\sqrt{2}\,\sigma\, I_2 = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\sigma = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

I tako je

$$M\xi = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2° Kako je $D\xi = M\xi^2 - \overline{x}^2$, to je dovoljno izračunati drugi moment

$$M\xi^2 = \int_0^\infty x^2\,\frac{x}{\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Nakon zamene promenljivih, dobijamo

$$M\xi^2 = 4\sigma^2 \int_0^\infty t^3 e^{-t^2}\,dt = 4\sigma^2 I_3 = 4\sigma^2\,\frac{1}{2} = 2\sigma^2.$$

Otuda je

$$D\xi = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \sigma^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Srednje kvadratno odstupanje σ_x slučajne veličine ξ je

$$\sigma_x = \sigma\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

3° Pri izračunavanju centralnog momenta trećeg reda zgodno je da se on izrazi pomoću momenta

$$M_3 = M[(\xi - \overline{x})^3] = \int_0^\infty (\xi - \overline{x})^3\,\frac{x}{\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = m_3 - 3\,\overline{x}m_2 + 2\,\overline{x}^3.$$

Kako je $\overline{x}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot m_2=2\sigma^2$, to izračunavajući

$$m_3=\int_0^\infty x^3\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx,$$

ili

$$m_3=4\sqrt{2}\sigma^3\int_0^\infty t^4e^{-t^2}dt=4\sqrt{2}\sigma^3 I_4=4\sqrt{2}\sigma^3\frac{3}{8}\sqrt{\pi}=$$

$$=3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Stavljajući vrednosti $\overline{x}$, m_2 i m_3 u formulu za μ_3 dobijamo

$$\mu_3=3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}-3\sqrt{\frac{\pi}{2}}2\sigma^3+2\left(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3=\sigma^3(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Analogno za centralni moment četvrtog reda dobijamo

$$\mu_4=M[(X-\overline{x})^4]=\int_0^\infty(x-\overline{x})^4\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=m_4-4\overline{x}m_3+6\overline{x}^2m_2-3\overline{x}^4.$$

Moment četvrtog reda je

$$\alpha_4=\int_0^\infty x^4\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=8\sigma^4\int_0^\infty t^5e^{-t^2}dt=8\sigma^4 I_5=8\sigma_4.$$

Stavljajući $\overline{x}$, m_2, m_3, m_4 u formulu za μ_4, dobijamo

$$\mu_4=\sigma^4\left(8-\frac{3}{4}\pi^2\right).$$

4452. $M\xi=a$; $D\xi=2a^2$. **4453.** $M|\xi-M\xi|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\frac{2D\xi}{\pi}}$.

4454. $M\xi=\frac{4R}{\pi}$. **4455.** $F(d)=\begin{cases}0 & \text{za } d\leqslant 0,\\ \left(\frac{d}{r}\right)^2 & \text{za } 0<d\leqslant r,\\ 1 & \text{za } d>r.\end{cases}$

4456. Slučajna veličina ξ, tj. broj defektnih proizvoda koji su se pojavili pri proveri, može se uzimati sve cele vrednosti u intervalu $[0, m]$. Obeležimo sa $p_k=p(\xi=k)$, gde je $k=0, 1, 2, \ldots, m$. Polazeći od definicije verovatnoće, dobijamo

$$p_k=\frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}.$$

Prema tome karakteristična funkcija biće

$$E(u)=\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^k\,C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}\,e^{iku}.$$

4457. Pošto je karakteristična funkcija

$$E(u)=M[e^{iux}]$$

to je

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux-|x|}\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos u\,x\,dx$$

s obzirom da je $e^{iux}=\cos ux+i\sin ux$, a

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_{-|x|}\sin ux\,dx=0.$$

Primenom postupka parcijalne integracije dobijamo

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos ux\,dx=\left[\frac{u\sin ux-\cos ux}{1+u^2}e_{-x}\right]\Bigg|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{1+u^2}\ \text{tj.}\ \ E(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

4458. Ako momenti postoje, u što se lako može uveriti znajući gustinu verovatnoće, dobijenu u prethodnom primeru, onda se oni izračunavaju po formuli

$$m_k=\frac{1}{i^k}\,\frac{d^kE(u)}{du^k}\bigg|_{u=0}.$$

Radi nalaženja izvoda $\frac{d^kE(u)}{du^k}\Big|_{u=0}$ koristi se činjenica da su ti izvodi koeficijenti uz $\frac{u^k}{k!}$ razvoja u MacLaurinov red funkcije $\frac{1}{1+u^2}$, tj.

$$\frac{1}{1+u^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^kE(0)}{du^k}\,\frac{n^k}{k!}.$$

Radi dobijanja toga reda primetimo da je funkcija $\frac{1}{1+u^2}$ za $|u|<1$ geometrijska progresija

$$\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{1-(iu)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}.$$

Koristeći identične transformacije zadati red može biti preobražen u MacLaurinov red

$$\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}i^{2m}(2m)!\,\frac{u^{2m}}{(2m)!}$$

Otuda Mac-Laurinov red za funkciju $\frac{1}{1+u^2}$

$$\frac{1}{1+u^2}=\sum_{m=0}^{\infty} i^{2m}(2m)!\,\frac{u^{2m}}{(2m)!}$$

Sadrži samo parne stepene od u. Tako će biti

$$\left.\frac{d^k E(u)}{dx^k}\right|_{u=0}=\begin{cases} i^k k! \text{ za } k \text{ parno,} \\ 0 \text{ za } k \text{ neparno,}\end{cases}$$

a polarni momenti

$$m_k=\begin{cases} k! \text{ za } k \text{ parno,} \\ 0 \text{ za } k \text{ neparno.}\end{cases}$$

4459. $E(u)=q+pe^{tu}$ gde je $q=1-p$.

4460. $E(u)=(q_k+pe^{tu})^u$; $M\xi=np$; $D\xi=npq$.

4461. $E(u)=e^{a(e^{iu}-1)}$; $M\xi=D\xi=a$.

PRILOG

Važnije konstante

$\pi = 3{,}1415929536$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098862$

$\pi^2 = 9{,}8696044011$

$\sqrt{\pi} = 1{,}7724538509$

$e = 2{,}7182818285$

$\frac{1}{e} = 0{,}3678794412$

$e^2 = 7{,}3890560989$

$\sqrt{e} = 1{,}6487212707$

$M = \log e = 0{,}4342944819$

$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}3025850930$

1 radijan $= 57° 17' 44{,}806''$

arc $1° = 0{,}0174532925$

Tablica I

n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	e^n	$e^{\frac{n}{10}}$	$e^{-\frac{n}{10}}$	e^{-n}
1	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	2,718	1,105	0,905	0,368
2	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	7,839	1,221	0,819	0,135
3	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	20,09	1,350	0,741	0,0498
4	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	54,60	1,492	0,670	0,0183
5	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	148,41	1,649	0,607	0,00674
6	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	403,4	1,822	0,549	$2{,}48 \cdot 10^{-3}$
7	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	1 096,6	2,014	0,497	$9{,}12 \cdot 10^{-4}$
8	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	2 981	2,226	0,449	$3{,}35 \cdot 10^{-4}$
9	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	8 103	2,460	0,407	$1{,}23 \cdot 10^{-4}$
10	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	22 026	2,718	0,368	$4{,}54 \cdot 10^{-5}$

Tablica II

Trigonometrijske funkcije

α°	α (radijani)	sin α	tg α	ctg α	cos α		
0	0	0	0	∞	1	1,571	**90**
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	**85**
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	**80**
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0.231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	**75**
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0 326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	**70**
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	**65**
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	**60**
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	**55**
36	0,628	0,588	0,727	1,376	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	**50**
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0.838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,769	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	**45**
		cos α	ctg α	tg α	sin α	α (radijani)	α°

Tablica III

Tablica integrala verovatnoće

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	$0,4986_5$
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	$0,4993_1$
0,57	0,2157	1,22	0,3888	1,87	0,4693	3,40	$0,4996_6$
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	$0,4998_{41}$
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	$0,4999_{28}$
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732		
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		