



STRUKTURE PODATAKA

LETNJI SEMESTAR

BINARNA STABLA (BINARY TREES)

Prof. Dr Leonid Stoimenov
Katedra za računarstvo
Elektronski fakultet u Nišu

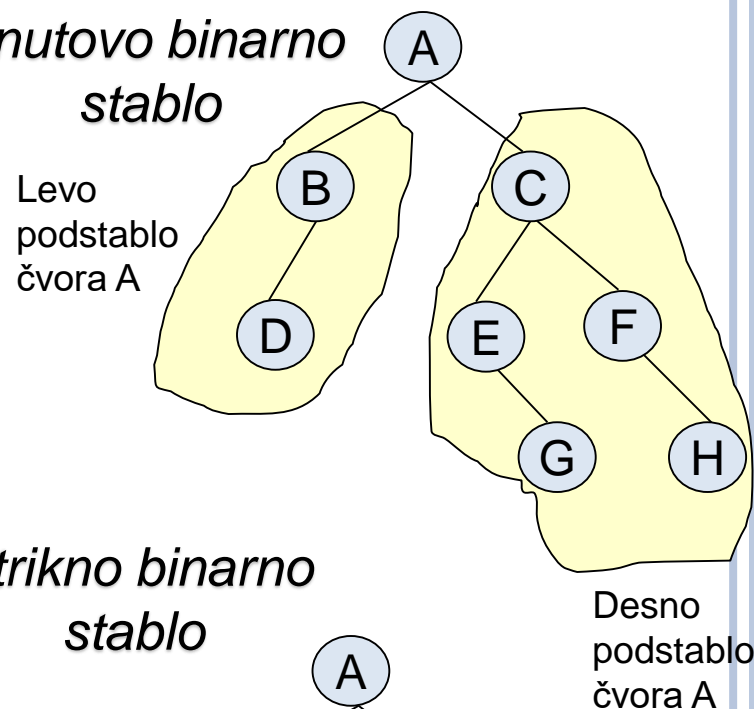
BINARNA STABLA - PREGLED

- Definicija
- Vrste binarnih stabala
- Primeri
- Memorijska reprezentacija
- Implementacija
- Operacije

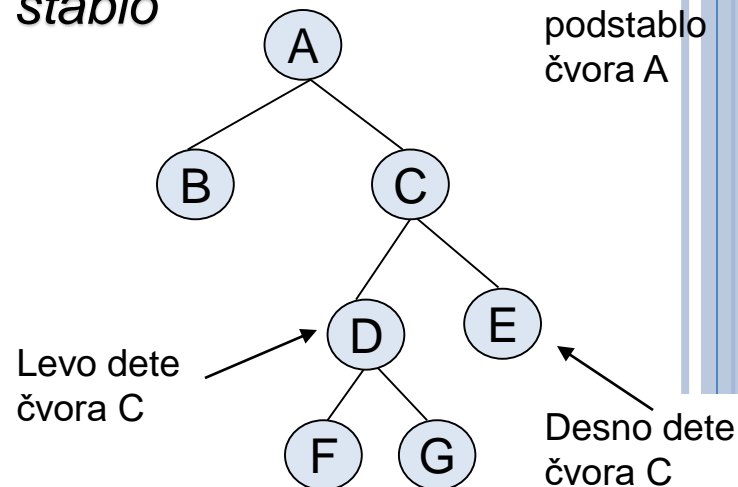
BINARNA STABLA - DEFINICIJA

- *Binarno stablo* je uređeno stablo gde svaki čvor ima **najviše dve dece**
 - levo dete i desno dete
- Podstabla S1 i S2 čvora u nazivaju se **levo** (S1) i **desno** (S2) podstablo, a u je njihov roditelj
- Ovakvo binarno stablo se takođe naziva *Knutovo binarno stablo*
- *Striktno binarno stablo* - u svakom čvoru ima 0 ili 2 podstabla
(2-stablo, pravo binarno stablo)

Knutovo binarno stablo



Striktno binarno stablo



KOMPLETNO BINARNO STABLO

- **Kompletno** ili **potpuno binarno stablo** visine h je striktno binarno stablo čiji su svi listovi na nivou h

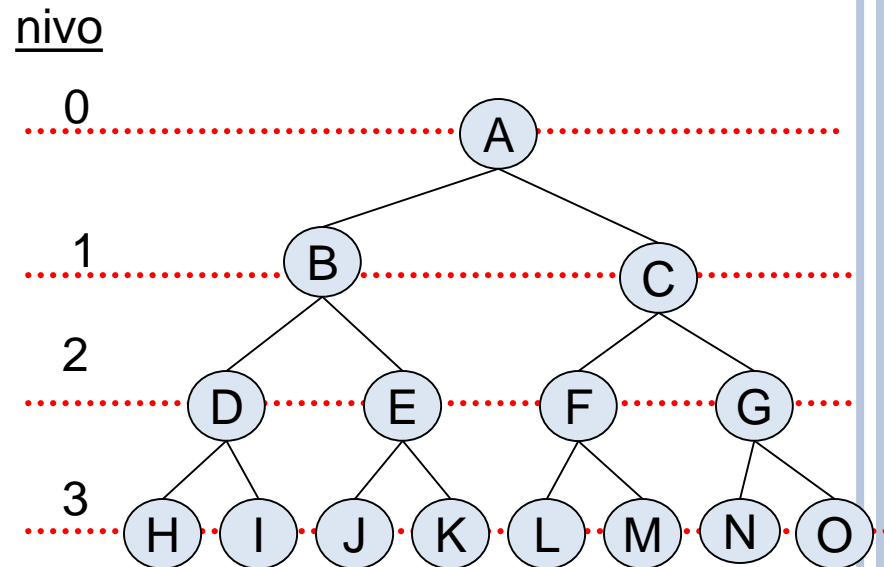
- **Ukupan broj čvorova** u kompletnom binarnom stablu visine h je

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h$$

$$n = \sum 2^j \text{ za } j=0, h$$

$$\mathbf{n = 2^{h+1} - 1}$$

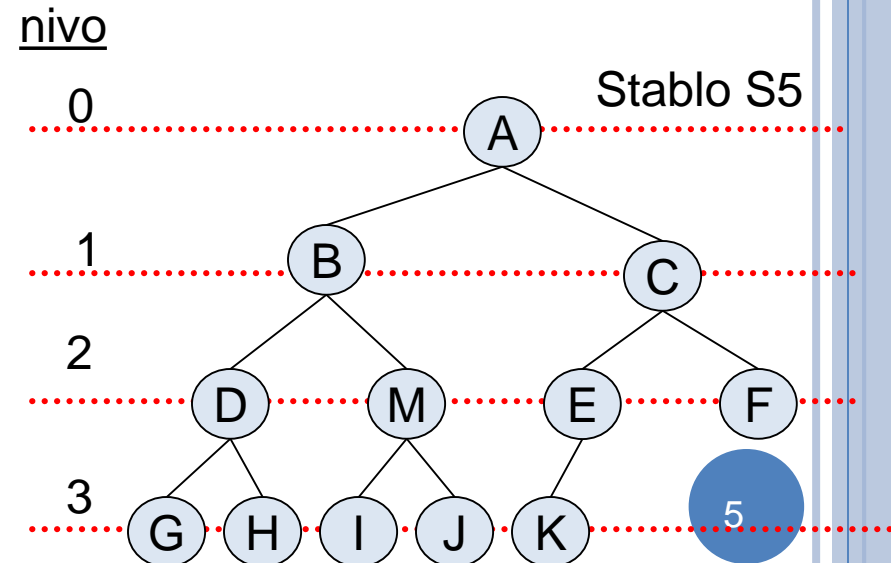
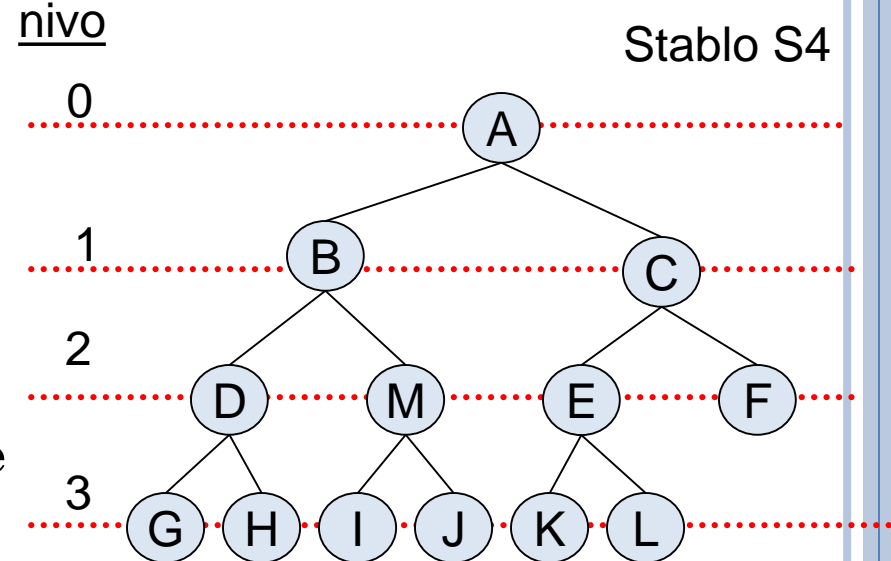
- **Broj internih čvorova:** $2^h - 1$
- **Broj eksternih čvorova:** 2^h
- **Visina stabla od n čvorova:**
 $\mathbf{h = \log_2(n+1) - 1}$



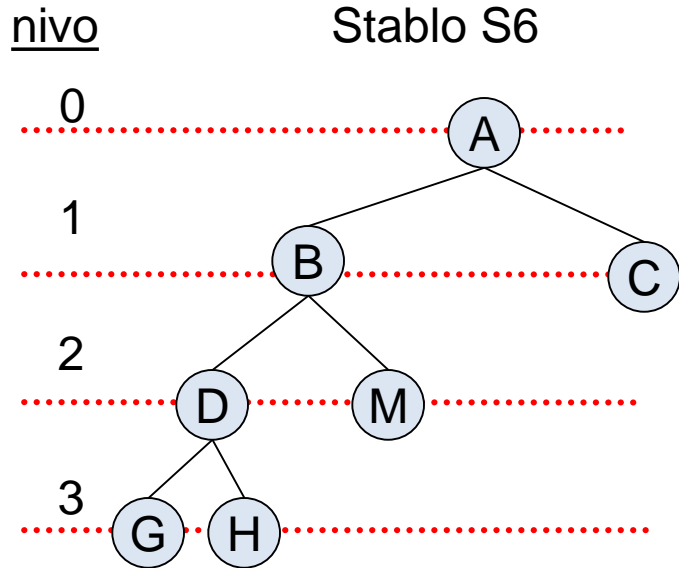
Nivo	Broj čvorova
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
$h=3$	$2^3 = 8$
n	15

GOTOVO KOMPLETNO BINARNO STABLO

- **Gotovo kompletno** ili **gotovo potpuno binarno stablo** dubine d je binarno stablo čiji svi čvorovi ispunjavaju sledeća dva uslova:
 1. Svaki čvor u na nivou manjem od $d-1$ ima dvoje dece
 2. Svaki čvor u koji ima desnog potomka na nivou d mora imati levo dete i sve leve potomke kao listove na nivou d ili mora imati dvoje dece
- **Primer 1:** S4 je gotovo kompletno binarno stablo i to striktno binarno stablo
- **Primer 2:** S5 je gotovo kompletno binarno stablo ali nije striktno binarno stablo



GOTOVO KOMPLETNO BINARNO STABLO

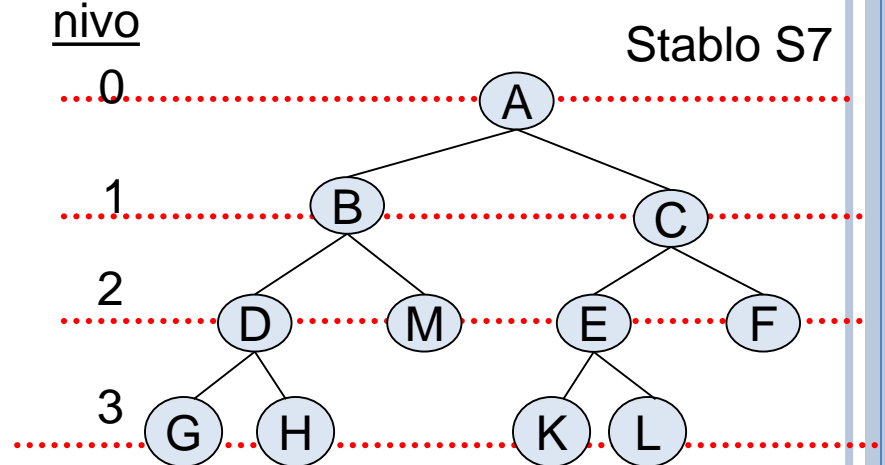


Nije gotovo kompletno binarno stablo

- Ne ispunjava uslov 1 (ima listove na nivoima 1,2 i 3)

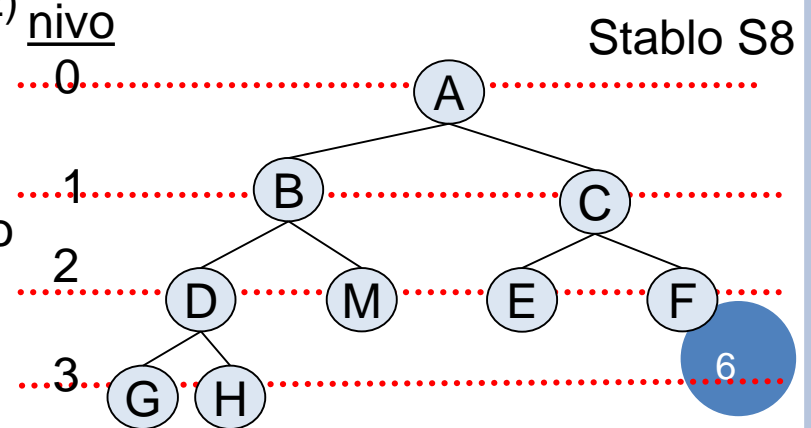
Gotovo kompletno binarno stablo

- Ispunjava oba uslova



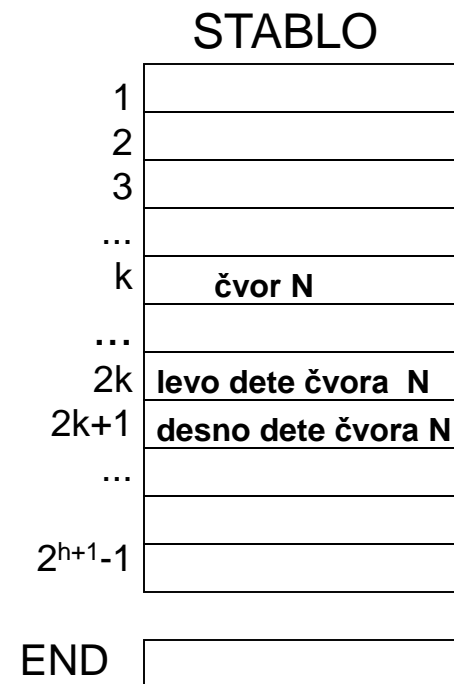
Nije gotovo kompletno binarno stablo

- Ispunjava uslov 1
- Ne ispunjava uslov 2 (K je desni potomak čvora A na nivou 3, a njegov levi potomak M je na nivou 2)



MEMORIJSKA REPREZENTACIJA BINARNOG STABLA - SEKVENCIJALNA

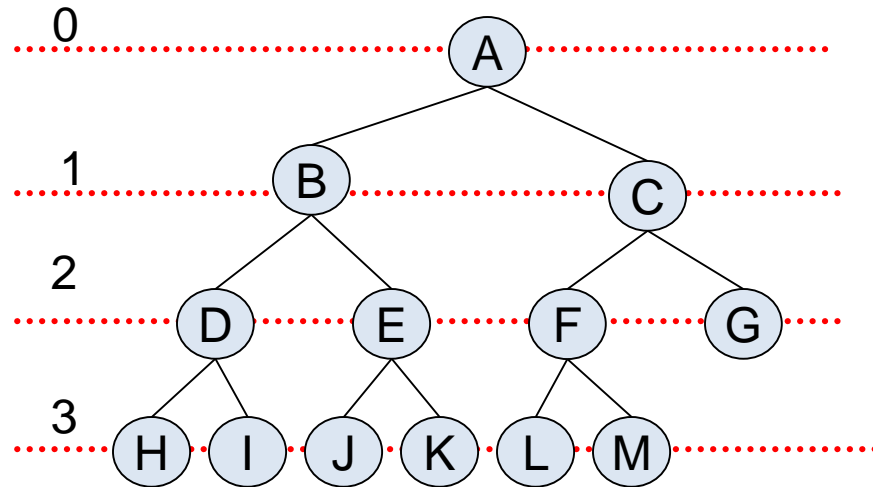
- Koristi se
 - **Jednodimenzionalno polje**
STABLO max dužine $2^{h+1}-1$
 - Promenljiva **END** koja pamti
lokaciju poslednjeg čvora stabla
 - STABLO[1] pamti **koren stabla**
 - Ako STABLO [k] pamti čvor N, tada
se levo dete čvora N nalazi u
STABLO [2k],
desno dete u **STABLO [2k+1]**



- Ova reprezentacija je pogodna za
kompletno ili gotovo kompletno
binarno stablo

PRIMER (1)

nivo



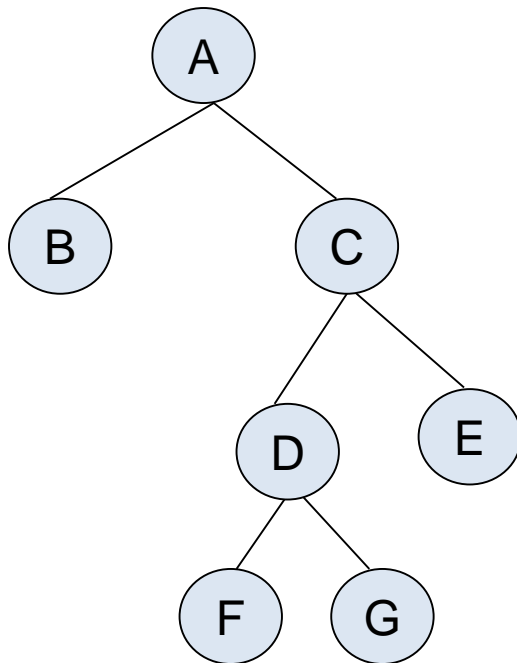
STABLO

1	A
2	B
3	C
4	D
5	E
6	F
7	G
8	H
9	I
10	J
11	K
12	L
13	M
14	
15	

END

13

PRIMER (2)



STABLO

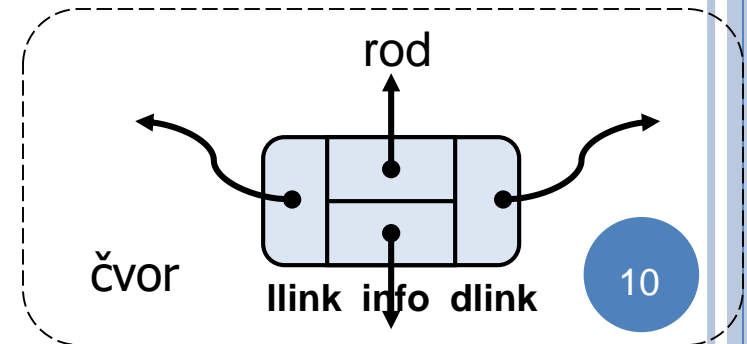
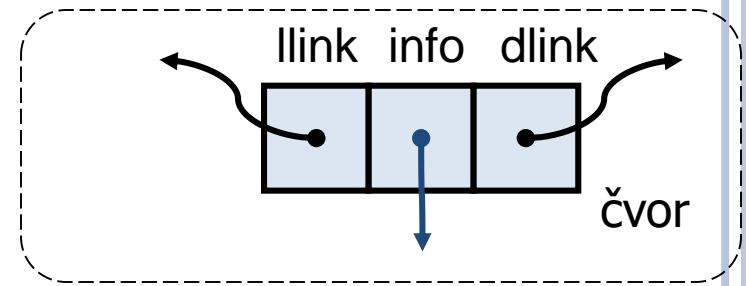
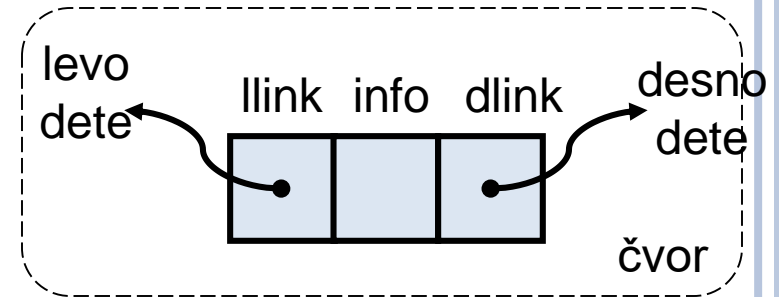
1	A
2	B
3	C
4	
5	
6	D
7	E
8	
9	
10	
11	
12	F
13	G
14	
15	

END

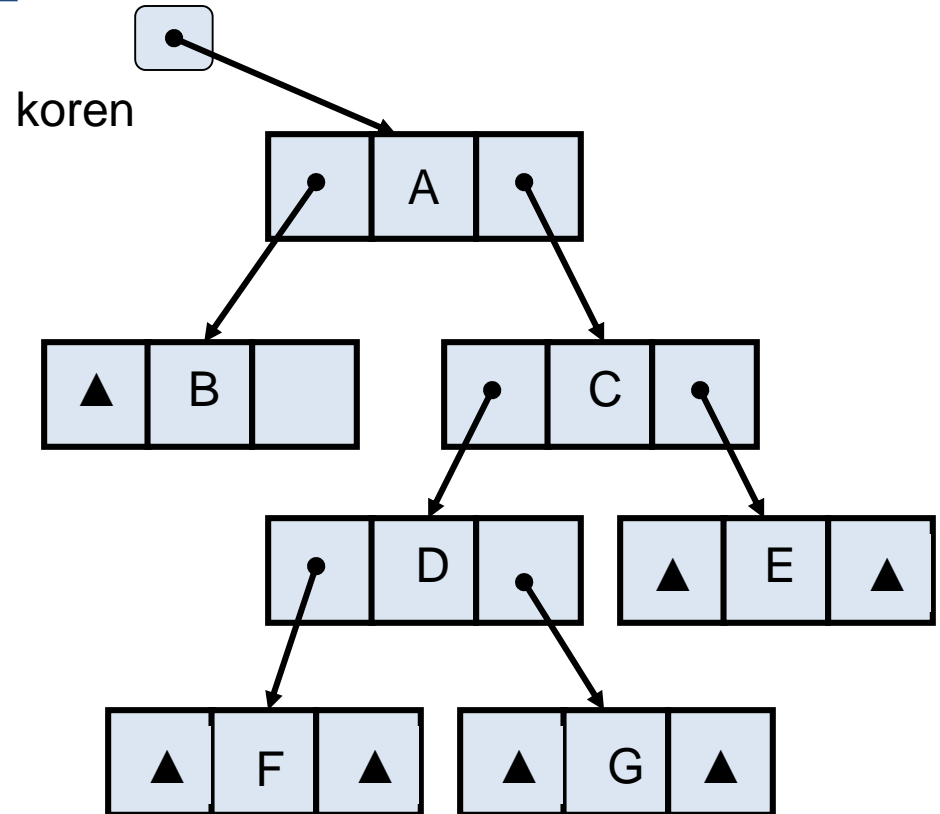
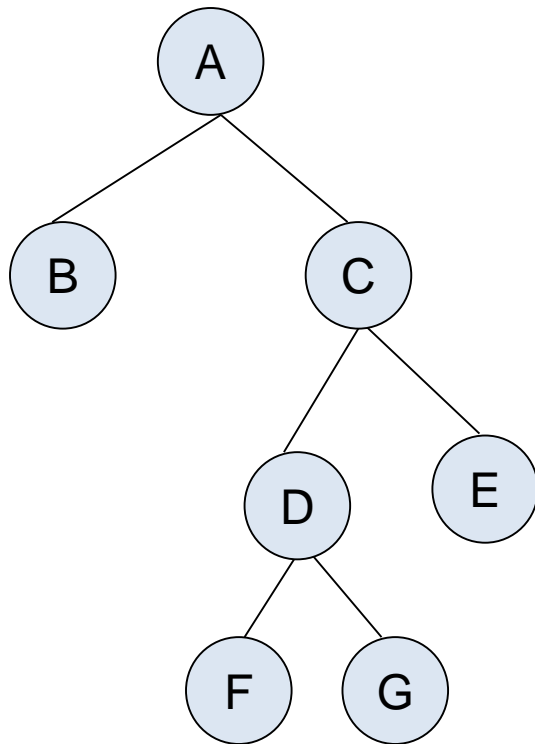
13

MEMORIJSKA REPREZENTACIJA BINARNOG STABLA - LANČANA

- Koristi se dvostrana lančana lista
- **Varijanta 1**
 - INFO – element koji se pamti u čvoru
 - LLINK – pokazivač na levo dete
 - DLINK – pokazivač na desno dete
- **Varijanta 2**
 - INFO – pokazivač na element koji se pamti u čvoru
 - LLINK – pokazivač na levo dete
 - DLINK – pokazivač na desno dete
- **Varijanta 3**
 - Varijanti 1 ili 2 dodat link na roditeljski čvor
- **Koristimo varijantu 1**



PRIMER LANČANE REPREZENTACIJE BINARNOG STABLA



PRIMITIVNE OPERACIJE

(p pokazivač na čvor nd)

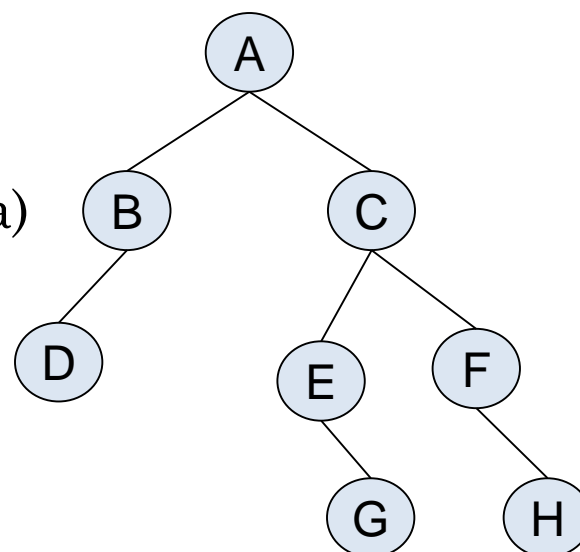
1. **info(p)** vraća sadržaj čvora nd
2. **left(p)** vraća levo dete čvora nd
3. **right(p)** vraća desno dete čvora nd
4. **parent(p)** vraća roditeljski čvor čvora nd
5. **sister(p)** vraća brata/sestru čvora nd
 - Funkcije 2-5 vraćaju null pokazivač ukoliko ne postoji levo dete, desno dete, roditelj ili sestra/brat čvora nd
6. **isleft(p)** vraća vrednost TRUE ako je nd levo dete, inače vraća vrednost FALSE
7. **isright(p)** vraća vrednost TRUE ako je nd desno dete, inače vraća vrednost FALSE

OPERACIJE SA BINARNIM STABLIMA - KOMPOZITNE

- Kompozitne operacije
 1. **Obilazak binarnog stabla**
 2. Formiranje binarnog stabla
 3. Umetanje elementa u binarno stablo
 4. Brisanje čvora iz binarnog stabla
 5. Traženje elementa u binarnom stablu
 6. Spajanje dva binarna stabla
 7.

OBILAZAK STABLA

- Kod obilaska binarnog stabla, svaki element se **posećuje samo jednom**
- Pri poseti jednog elementa/čvora stabla izvršavaju se sve neophodne operacije (kopiranje sadržaja, prikaz, evaluacija operatora i sl).
- Vrste obilaska stabla
 - **Preorder**
 - **Inorder**
 - **Postorder**
 - **Level order** (Obilazak po nivoima)
- Implementacija
 - Rekurzivna
 - Nerekurzivna



OBILAZAK BINARNOG STABLA

○ Preorder

- Obraditi **koren**
- Obići **levo** podstablo korena u preorder redosledu
- Obići **desno** podstablo korena u preorder redosledu
- A B C

○ Inorder

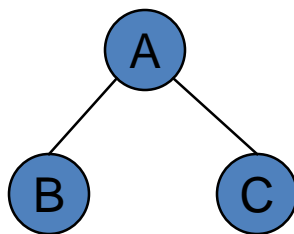
- Obići **levo** podstablo korena u inorder redosledu
- Obraditi **koren**
- Obići **desno** podstablo korena u inorder redosledu
- B A C

○ Postorder

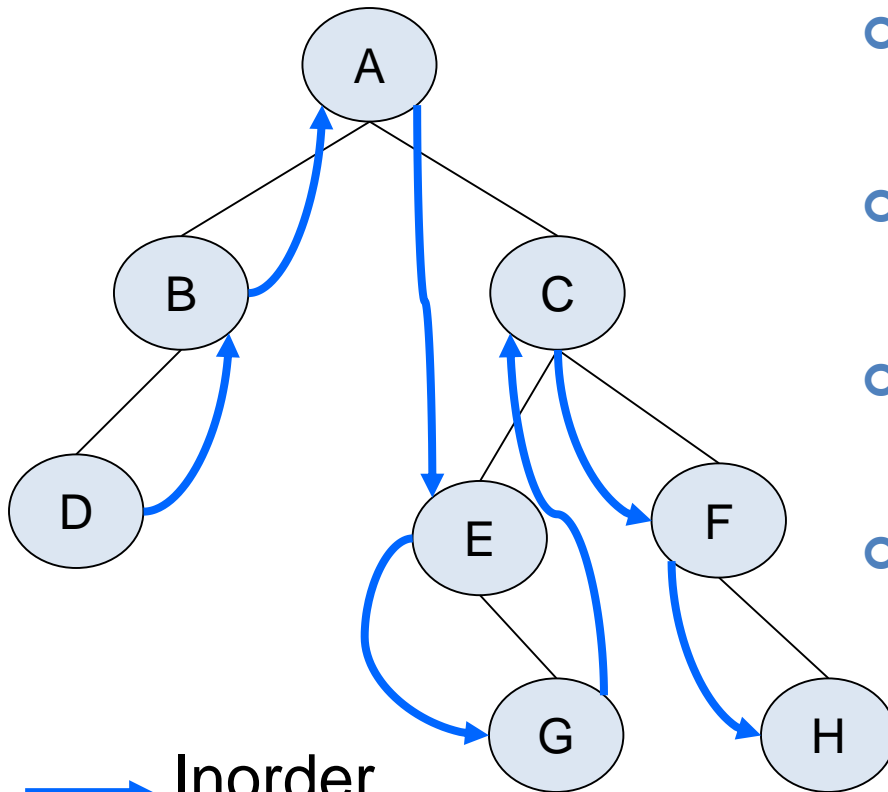
- Obići **levo** podstablo korena u postorder redosledu
- Obići **desno** podstablo korena u postorder redosledu
- Obraditi **koren**
- B C A

○ Obilazak po **nivoima**

- Obilaze se čvorovi po **nivoima**, počev od nivoa 0 tj. korena
- A B C



PRIMER OBILASKA BINARNOG STABLA



→ Inorder
Obilazak sleva udesno

- Preorder
 - ABDCEGFH
- Inorder
 - DBAEGCFH
- Postorder
 - DBGEHFCA
- Po nivoima
 - ABCDEFGH

PREORDER OBILAZAK STABLA

- Obilazak čvorova stabla na sistematski način
- Čvor se obilazi pre svih njegovih potomaka
- **Primena:** štampanje struktuiranog dokumenta

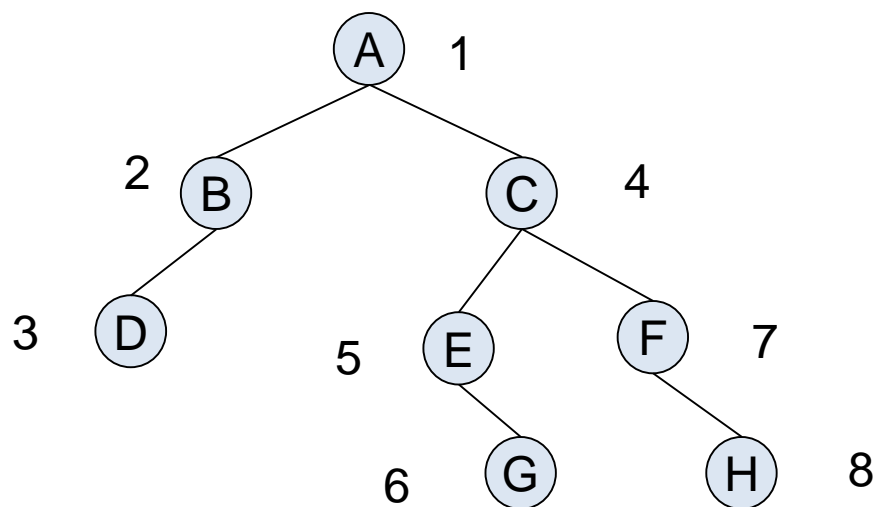
Algoritam S.1. Preorder obilazak

preOrder(v)

visit(v)

preorder(left(v))

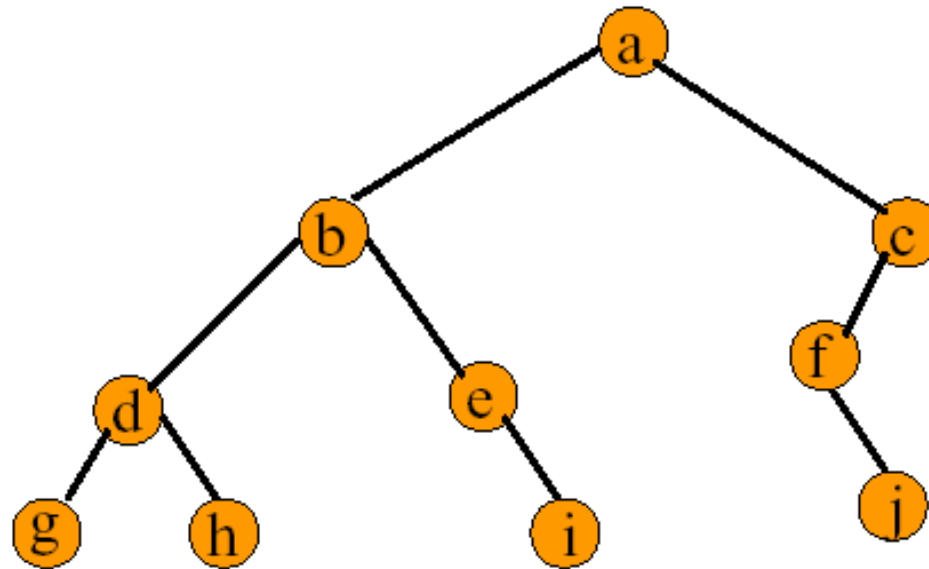
preorder(right(v))



Brojevi 1,2,... označavaju
redosled obilaska
čvorova

PRIMER PREORDER OBILASKA

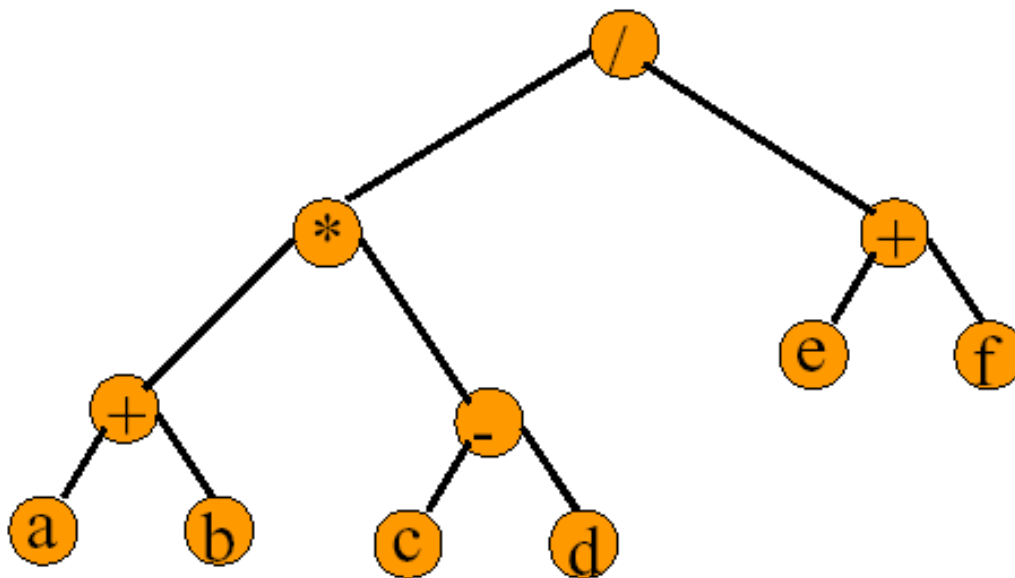
- Visit = print



a b d g h e i c f j

PREORDER I ARTIMETIČKI IZRAZI

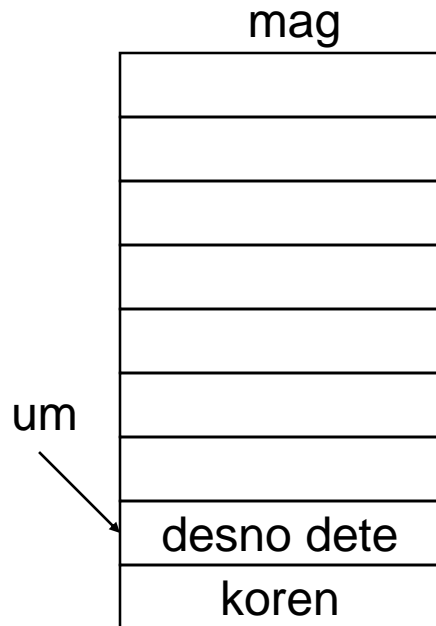
- Prefiks notacija izraza $((a+b)*(c-d))/(e+f)$



/ * + a b - c d + e f

NEREKURZIVNI PREORDER

- Korišćenje magacina kao pomoćne strukture



pok - lokacija čvora koji se trenutno obrađuje

mag – pamti čvorove koje treba kasnije obrađivati (desnu decu)

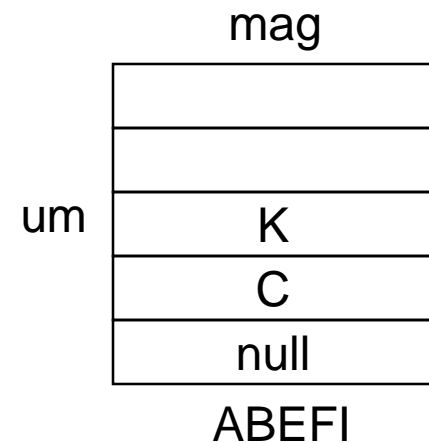
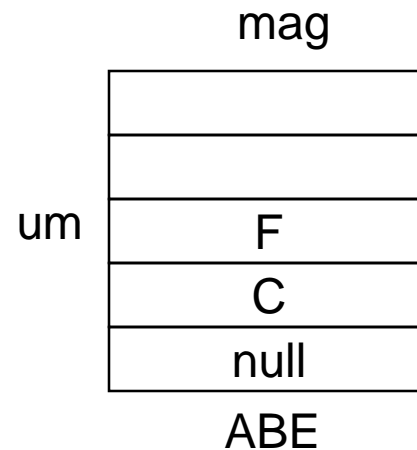
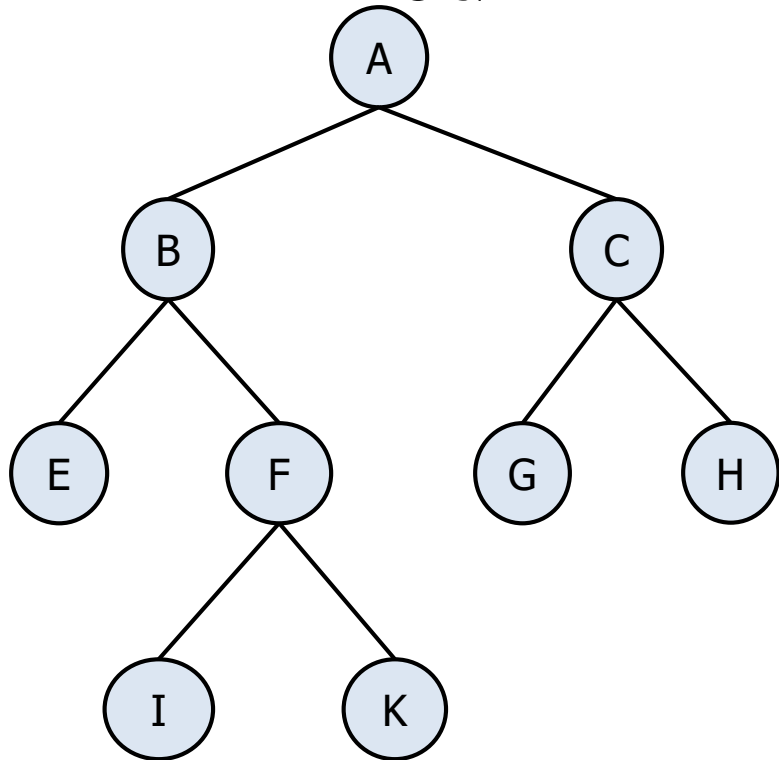
um – vrh (ukazatelj) magacina

Algoritam S.2. Nerekurzivni preorder **preOrderN(koren)**

```
1.  um ← 1, mag[um] ← null, pok ← koren  
    //Inicijalizacija  
2.  repeat while (pok < > null)  
3.    visit (pok)  
4.    //da li postoji desno podstablo  
5.    if (right(pok) < > null)  
6.      then { //upis u mag  
7.        um ← um+1, mag[um] ← right(pok) }  
8.    //da li postoji levo podstablo  
9.    if (left(pok) < > null )  
10.     then pok ← left(pok)  
11.     else { //čitanje iz magacina  
12.       pok ← mag[um], um ← um-1 }  
13.  endrepeat  
14.  end
```

ILUSTRACIJA RADA NEREKURZIVNOG PREORDER OBILASKA

○ ABEFIKCGH



POSTORDER OBILAZAK

- Čvor se obilazi nakon obilaska njegovih potomaka
- **Primena:** izračunavanje prostora koji se koristi za fajlove u direktorijumu i njegovim pod direktorijumima

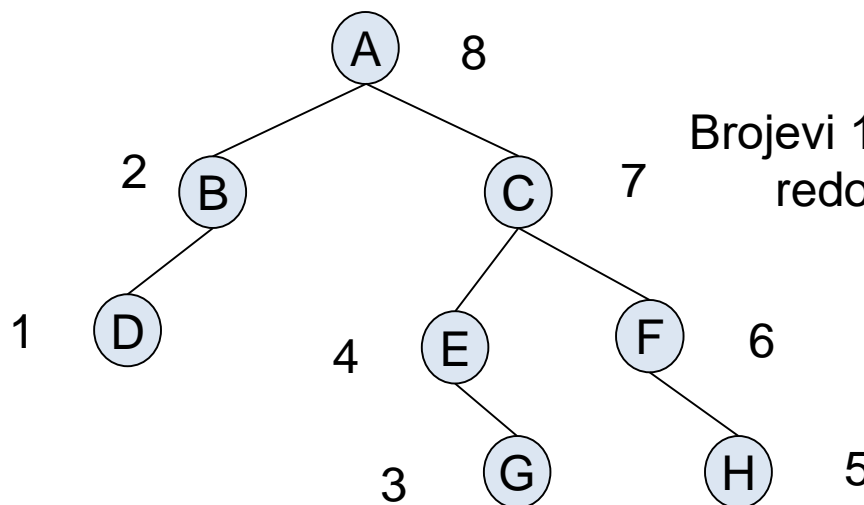
Algoritam S.3: Postorder obilazak

postOrder(v)

postOrder(left(v))

postOrder(right(v))

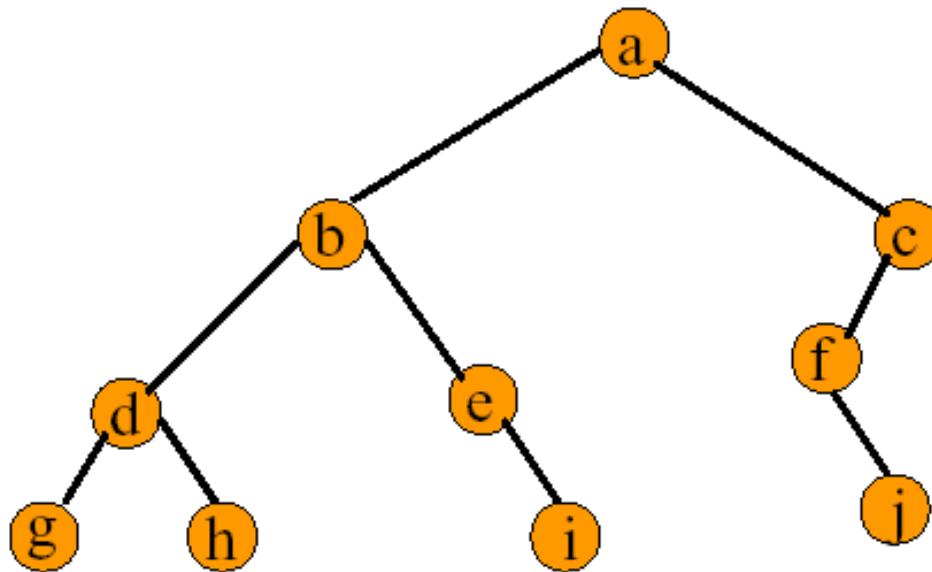
visit(v)



Brojevi 1,2,... označavaju redosled obilaska čvorova

PRIMER POSTORDER OBILASKA

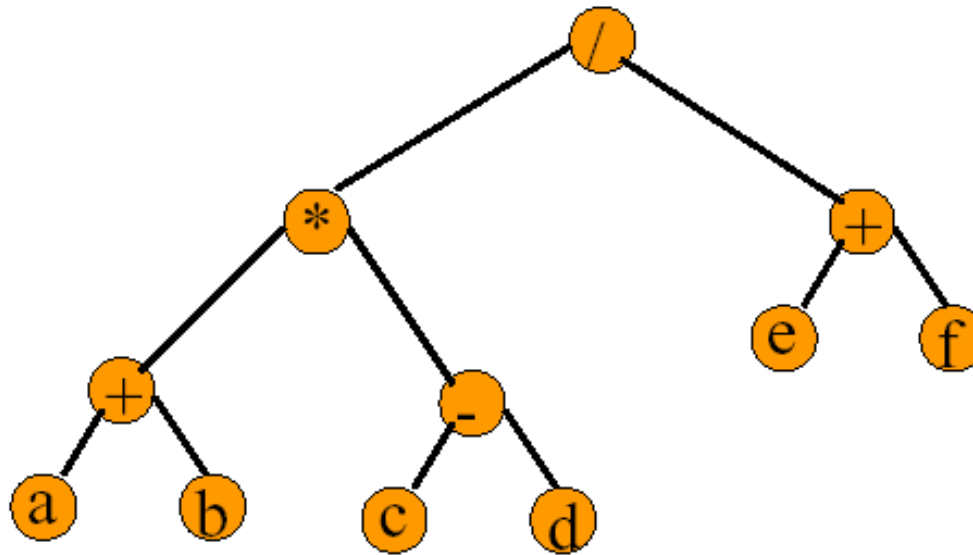
- Visit = print



g h d i e b j f c a

POSTORDER I ARITMETIČKI IZRAZI

- Postfiks notacija izraza $((a+b)*(c-d))/(e+f)$



$a\ b\ +\ c\ d\ -\ *\ e\ f\ +\ /$

NEREKURZIVNI POSTORDER

- Korišćenje **magacina** kao pomoćne strukture

A) Stablo se obilazi krajnjim levim putem i u magacin upisuju svi čvorovi;

Ako čvor ima desno dete u magacin se upisuje sa predznakom -

B) Povratak uz stablo;

Iz magacina se čita čvor;

Ako je pozitivan obrađuje se

Ako je negativan, povratak na A)

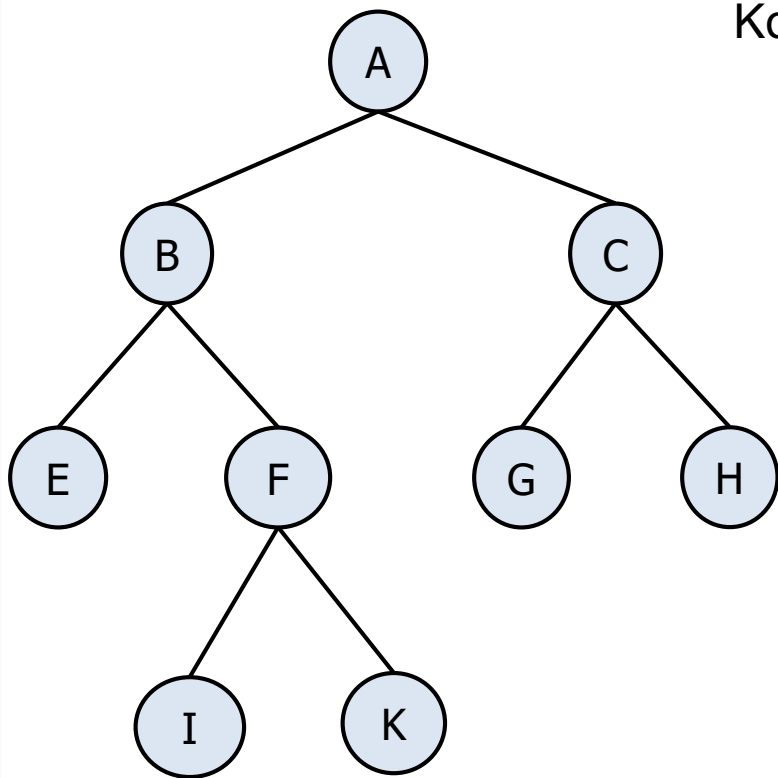
Algoritam S.5. Nerekurzivni postorder **postOrderN(koren)**

```
1.  um ← 1, mag[um] ← null, pok ← koren //Inicijalizacija
2.  repeat while (pok < > null)
3.    um ← um+1, mag[um] ← pok
4.    if (right(pok) < > null)
5.      then { um ← um+1, mag[um] ← - right(pok) } } A)
6.    endif
7.    pok ← left(pok)
8.  endrepeat
9.  pok ← mag[um], um ← um-1 //čitanje iz mag.
10. repeat while (pok > 0)
11.   visit (pok)
12.   pok ← mag[um], um ← um-1
13. endrepeat
14. if (pok < 0)
15.   then { pok ← -pok, go to 2 }
16. endif
17. end
```

B)

ILUSTRACIJA RADA NEREKURZIVNOG POSTORDER OBILASKA

□ EIKFBGHCA



Korak A)

um

E
-F
B
-C
A
null

um

I
-K
+F
B
-C
A
null

E

um

+K
F
B
-C
A
null

EI

G
-H
+C
A
null

EIKFB

INORDER OBILAZAK STABLA

- Čvor se obilazi nakon obilaska njegovog levog podstabla i pre obilaska desnog podstabla
- **Primena:** Crtanje binarnog stabla
 - $x(v)$ = inorder rang za v
 - $y(v)$ = dubina za v

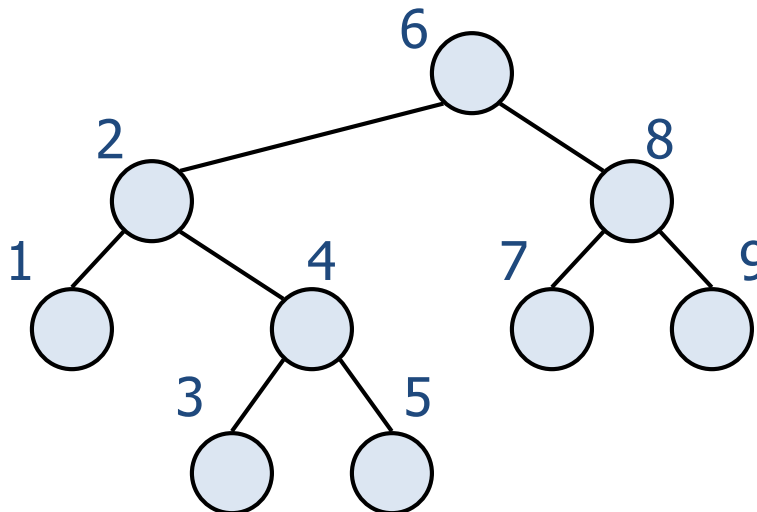
Algoritam S.6. Inorder obilazak

inOrder(v)

inOrder (*left* (v))

visit(v)

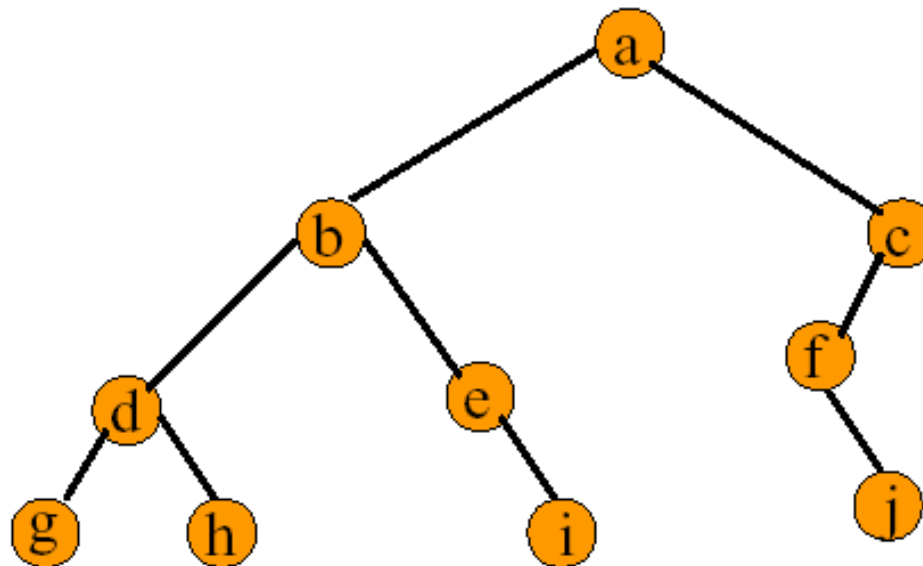
inOrder (*right* (v))



Brojevi 1,2,... označavaju redosled obilaska čvorova

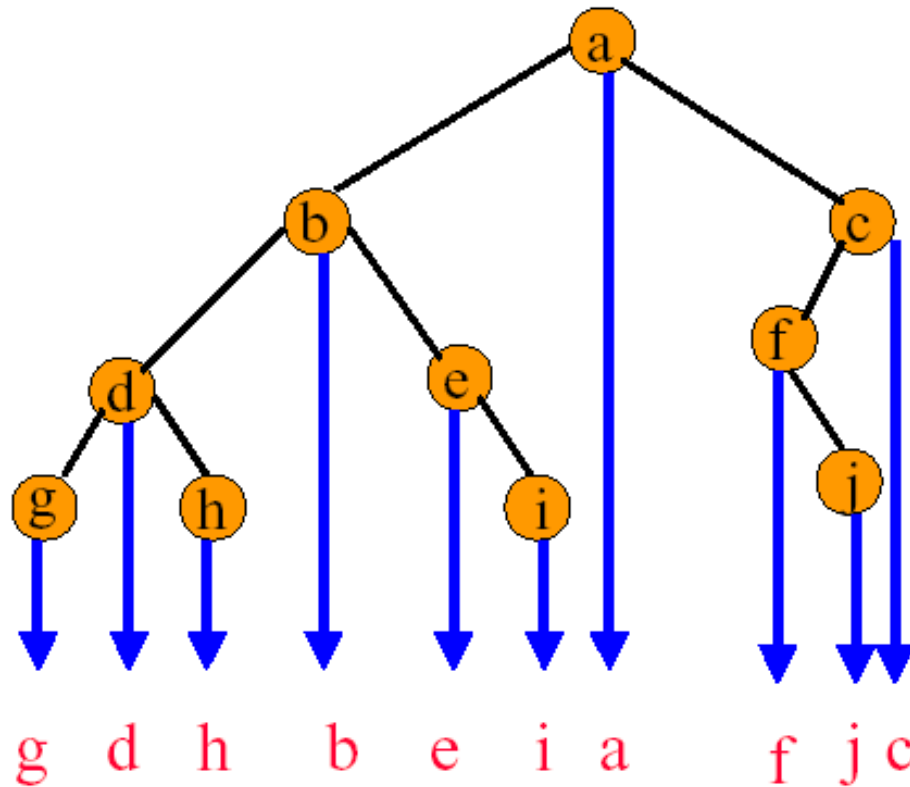
PRIMER INORDER OBILASKA

- Visit = print



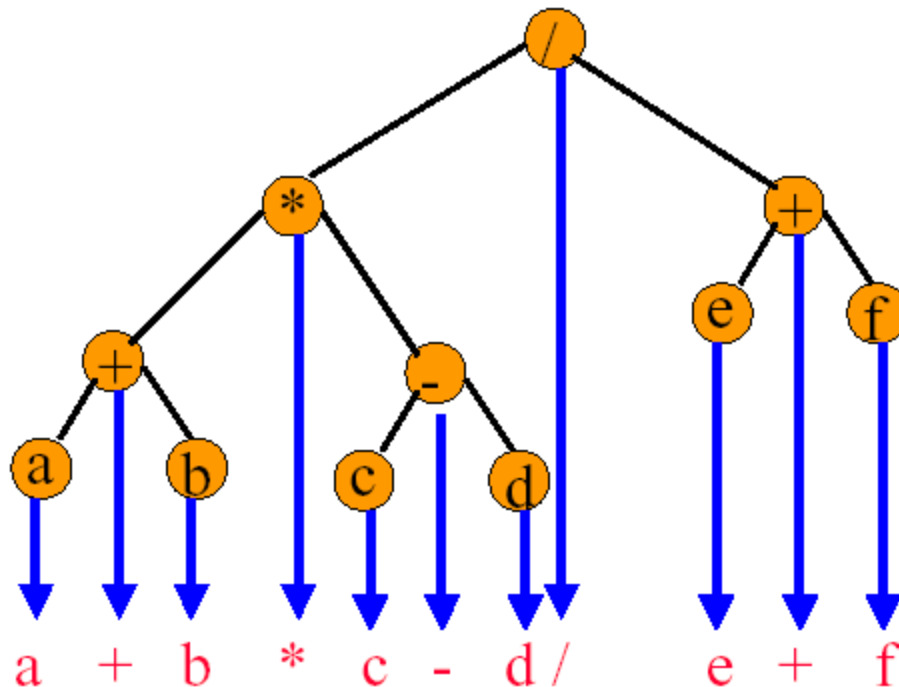
g d h b e i a f j c

INORDER PO PROJEKCIJI (SQUISHING)



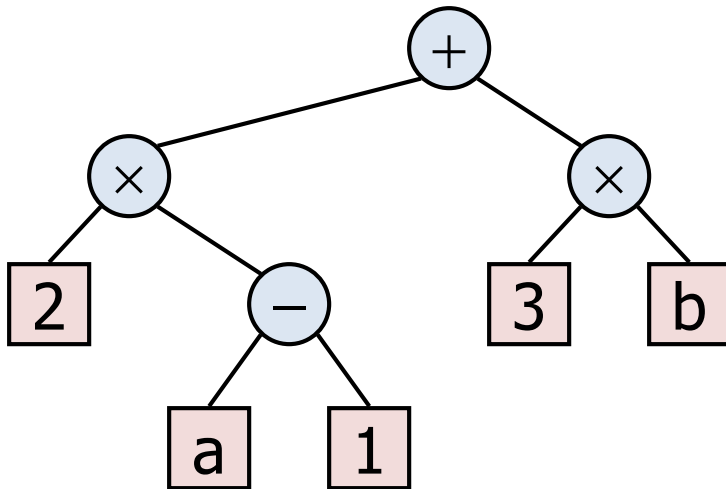
INORDER I ARTIMETIČKI IZRAZI

- Infiksna notacija izraza $((a+b)*(c-d))/(e+f)$
- Da li su neophodne zagrade?



PRIMENA INORDER OBILASKA – PRIKAZ ARITMETIČKIH IZRAZA

- Specijalizacija inorder obilaska
 - Štampa operand ili operator kod obilaska čvora
 - štampa “(“ pre obilaska levog podstabla
 - štampa “)” posle obilaska desnog podstabla



Algoritam S.7. Prikaz izraza

printExpression(v)

if isInternal (v)

print("(")

inOrder (left(v))

print(info(v))

if isInternal (v)

inOrder (right(v))

print (")")

$((2 \times (a - 1)) + (3 \times b))$

NEREKURZIVNI INORDER

Korišćenje **magacina** kao pomoćne strukture

Algoritam u dva “koraka”:

A) Obilazak stabla krajnje levom putanjom, uz upis svakog čvora na koji se naiđe u magacin, sve dok se ne dođe do čvora koji nema levo podstablo

B) Kretanje unazad, uz stablo: čitanje elementa iz magacina i **obrada** sve dok u magacinu postoje elementi.

Obrada: prikaz, ili ako čvor ima desnog potomka *pok* se postavlja da ukazuje na njega, i obrada vraća na korak A)

Algoritam S.8. Nerekurzivni inorder **inOrderN(info, llink, dlink, koren)**

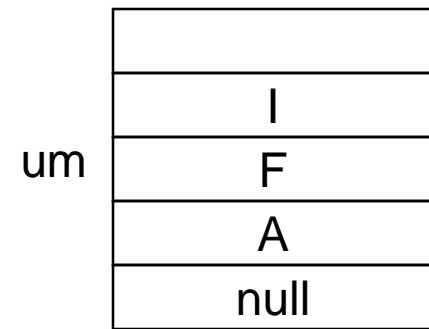
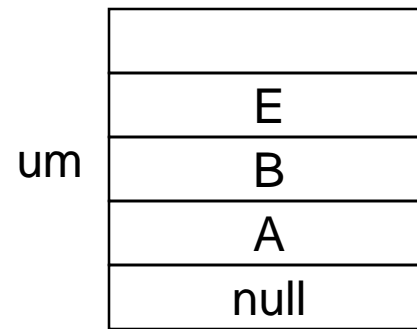
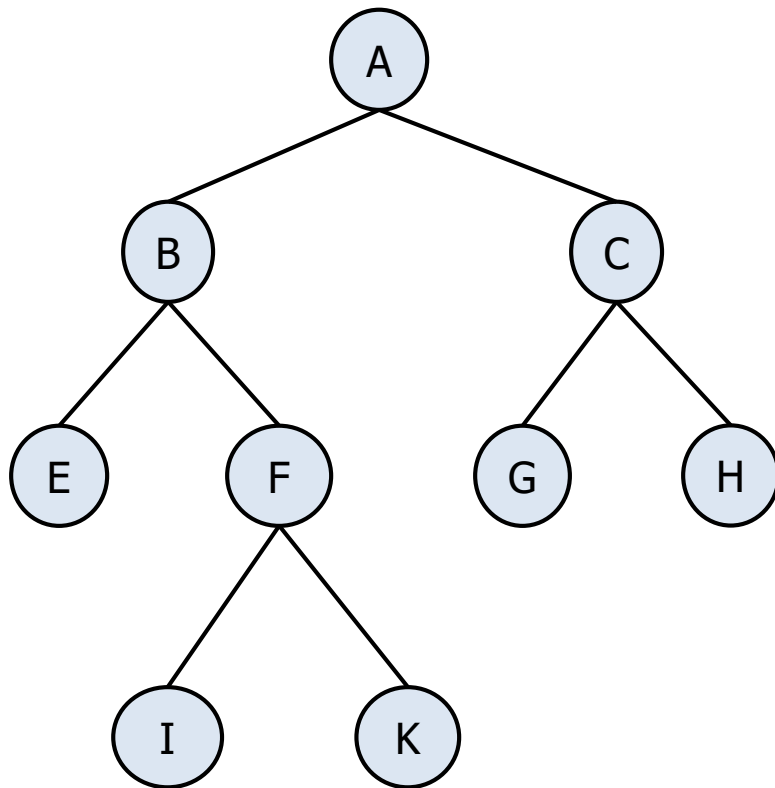
```
1.  um ← 1, mag[um] ← null, pok ← koren // Inicijaliz.
2.  repeat while (pok <> null) //po levom podstablu
3.      um ← um+1, mag[um] ← pok
4.      pok ← left(pok)
5.  endrepeat
6.  pok ← mag[um], um ← um-1
7.  repeat while (pok <> null) { //povratak uz stablo
8.      visit (pok)
9.      if (right(pok) <> null) //postoji desno
10.         podstablo?
11.         then { pok ← right(pok), go to 2 }
12.         endif
13.         pok ← mag[um], um ← um-1
14.     endrepeat
15. end
```

A)

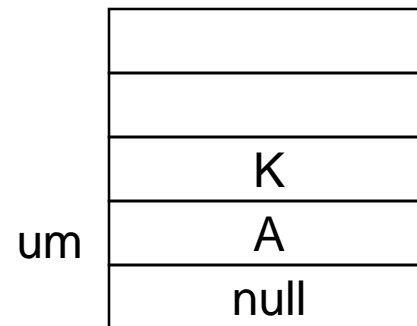
B)

ILUSTRACIJA RADA NEREKURZIVNOG INORDER OBILASKA

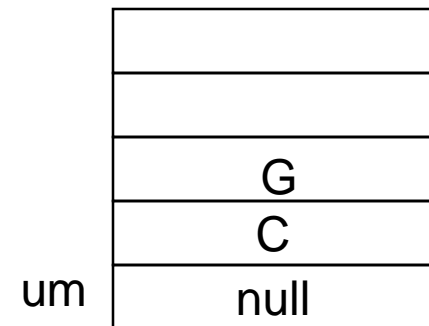
□ EBIFKAGCH



EB



EBIF



EBIFKA

OBILAZAK PO NIVOIMA

- Obilazi stablo po nivoima, počev od 0-tog, tj od korena stabla
- Koristi pomoćnu strukturu **red** (FIFO)

Algoritam S.9. Obilazak po nivoima

levelOrderN(info, llink, dlink, koren)

pok ← koren

while (**pok** <> **null**)

visit(**pok**)

//dodaj u FIFO red sve potomke čvora

red_enqueue(left(**pok**))

red_enqueue(right(**pok**))

//pročitaj iz reda

pok ← red_dequeue()

//dequeue treba da vraća null

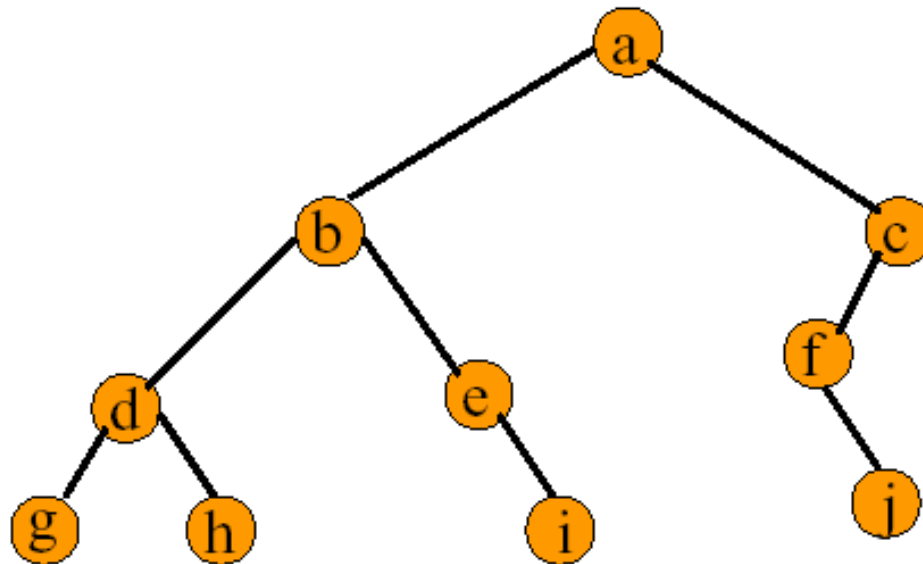
// kada je red prazan

endwhile

end

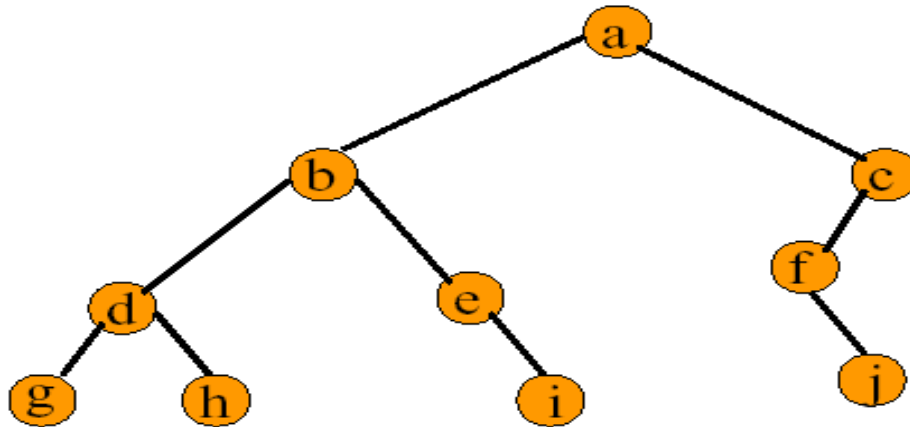
ILUSTRACIJA RADA OBILASKA PO NIVOIMA

○ visit = print



a b c d e f g h i j

OBILAZAK STABLA - PREGLED



- **postorder**: **ghdiebjfca** ► deca pa koren
- **preorder**: **abdgheicfj** ► koren pa deca
- **inorder**: **gdhbeiafjc** ► levo dete, koren, desno dete
 - Ovaj obilazak ima smisla samo za binarno stablo
- **po nivoima**: **abcdefghij** ► nivo 0,1,2,...

REKONSTRUKCIJA BINARNOG STABLA – ZA SAMOSTALNI RAD

- Da li se može rekonstruisati binarno stablo na osnovu dve sekvence dobijene algoritmima za obilazak??
- Da li rekonstrukcija zavisi od datih sekvenci?
- Pokazati na primeru da *preorder* i *postorder* ne definišu na jedinstven način binarno stablo
- Pokazati na istom primeru rekonstrukciju za *inorder* i *preorder*
- Pokazati na istom primeru šta se dešava za *preorder* i *level order*
- Pokazati na istom primeru za *postorder* i *level order*

PRIMER ZA VEŽBU

- *Inorder* i *Preorder* obilazak istog stabla
 $Inorder = g\ d\ h\ b\ e\ i\ \mathbf{a}\ f\ j\ c$
 $Preorder = \mathbf{a}\ b\ d\ g\ h\ e\ i\ c\ f\ j$
- Koristite kao osnovu *Preorder*, tako što pretražujete s leva u desno; korišćenjem *Inorder* pronalazite u nizu koren (pod)stabla i razdvajate čvorove na levo i desno podstablo
- Primer:
 - **a** je prvi čvor u *Preorder*, odnosno koren stabla;
 - u *Inorder*, **gdhbei** je levo podstablo, a **fjc** desno podstablo

PITANJA, IDEJE, KOMENTARI

