Čas 09

1 Teorijski uvod

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Definicija 1. *Svaki graf koji ne sadrži nijedan ciklus naziva se aciklični graf ili šuma.*

Definicija 2. *Svaki povezan aciklični graf koji sadrži $n \geq 2$ čvorova naziva se stablo ili drvo.*

Na osnovu ove definicije lako je zaključiti da su komponente povezanosti svake šume stabla ili izolovani čvorovi.

Sledeća teorema je fundamentalna za stabla.

Teorema 1. *Neka je G dati graf koji sadrži $n \geq 2$ čvorova. Tada su sledeći iskazi međusobno ekvivalentni:*

1. *Graf G je povezan i ne sadrži nijedan ciklus;*
2. *Graf G ne sadrži nijedan ciklus i ima $n-1$ granu;*
3. *Graf G je povezan i sadrži $n-1$ granu;*
4. *Graf ne sadrži nijedan ciklus, ali dodavanjem nove grane između proizvoljna dva njegova čvora, obrazuje se ciklus;*
5. *Graf je povezan, ali udaljavanjem proizvoljne njegove grane on postaje nepovezan;*
6. *Svaka dva čvora u grafu G su spojena tačno jednim elementarnim putem.*

Čvor u stablu koji ima stepen 1 naziva se list.

Čvor u stablu čiji je stepen veći ili jednak 3 naziva se račvište (čvor u kome se stablo račva).

Put dužine n, u oznaci P_n, je jedino stablo koje sadrži dva i samo dva čvora stepena 1, a ostali su stepena 2.

Zvezda od n čvorova, u oznaci $K_{1,n-1}$, je jedino stablo koje sadrži jedan čvor stepena $n-1$, a ostali su stepena 1.

Definicija 3. *Broj nezavisnih prostih ciklusa u datom grafu (multigrafu) G, u oznaci $\gamma(G)$, naziva se ciklomatski broj.*

Ciklomatski broj grafa G jednak je broju grana koje treba odstraniti iz grafa da bi se formirala šuma (stablo).

Definicija 4. *Broj grana u jednoj šumi (stablu), u oznaci $r(G)$, naziva se rang šume (stabla).*

Teorema 2. *Neka graf (multigraf) G ima n čvorova, m grana i p komponenenata povezanosti. Tada važe jednakosti*

$$r(G) = n - p \qquad \text{i} \qquad \gamma(G) = m - n + p\,.$$

Teorema 3. *Svaki multigraf (graf) sadrži šumu (stablo) kao delimični graf (povezan delimični graf), tj. sprežnu šumu (sprežno stablo).*

Definicija 5. *Stablo u kome je jedan čvor posebno označen, najčešće punim kružićem, naziva se korensko stablo, a sam označeni čvor koren.*

Definicija 6. *Stablo u kome se svaki čvor račva u dva čvora (svaki čvor ima dva naslednika) naziva se binarno stablo.*

Definicija 7. *Neka je dat povezan graf $G = (V, E)$ sa $n \geq 2$ čvorova. Svaki delimični graf, grafa G, koji ima $n - 1$ grana, naziva se sprežnim stablom.*

Teorema 4. *Neka je G povezan graf sa $n \geq 2$ čvorova, m grana, čija je matrica susedstva A, D je dijagonalna matrica stepena čvorova i $L = D - A$ Laplasova matrica. Svi kofaktori matrice L, $\det L(i, j)$, su međusobno jednaki i određuju ukupan broj sprežnih stabala u grafu G.*

Proizvoljna dva sprežna stabla formirana na osnovu grafa $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$, mogu se transformisati jedan u drugi sukcesivnim formiranjem takozvanog monotonog niza sprežnih stabala.

Neka su T i T' dva sprežna stabla, formirana na osnovu datog povezanog grafa G. Želja nam je da sprežno stablo T transformišemo u sprežno stablo T'. U tom cilju formira se niz sprežnih stabala

$$T = T_1, T_2, \ldots, T_p = T', \quad 1 \leq p \leq n - 1,$$

na osnovu sledećih kriterijuma:

1. Stabla T_k i T_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, međusobno se razlikuju samo po jednoj grani.

2. Stablo T_{k+1}, za svako $k = 1, 2, \ldots, n-1$, ima za jednu više zajedničku granu sa stablom T' u odnosu na stablo T_k.

Ovako formirani niz sprežnih stabala, za dati povezani graf G, na osnovu koga se sprežno stablo T transformiše u sprežno stablo T', naziva se monotonim nizom stabala.

Sama transformacija sprežnog stabla T u T' može se opisati sledećom procedurom.

Procedura (transformacija sprežnih stabala)

Korak 1. Neka je e' proizvoljna grana stabla T' koja ne pripada stablu T. Tada u stablu T postoji jedinstveni elementarni put koji povezuje čvorove incidentne sa granom e'. Ovaj put sadrži bar jednu granu e koja ne pripada stablu T', jer bi u protivnom u stablu T' postojao ciklus, što je nemoguće. Sada u stablu T ($T = T_1$) udaljimo granu e i pridodamo granu e'. Time smo formirali stablo T_2.

Korak 2. Ako je $T_2 = T'$, postupak transformacije je završen i procedura se prekida. Ako to nije slučaj, ponavlja se Korak 1, pri čemu je $T := T_2$. Kako svako stablo grafa G sadrži $|E| = n - 1$ grana, procedura se završava za najviše $n - 1$ koraka.

Dekadno kodiranje stabla može da se opiše sledećim koracima i pravilima:

1. Svakom čvoru dodeliti jedinstvenu labelu (oznaku), tako da one budu međusobno uporedive. Najjednostavnije je da svakom čvoru dodelimo broj.

2. Kodiranje počinje i završava se u korenu stabla.

3. Prelazak svake grane od korena kodira se jednom jedinicom.

4. U svakoj tački račvanja krećemo ka čvoru sa manjom oznakom (brojem) ako ga nismo obišli.

5. Kada dođemo do lista, vraćamo se nazad, i svaku pređenu granu kodiramo nulom.

6. Pri kretanju nazad u svakoj tački računanja krećemo se ka čvoru kojeg nismo obišli sa manjom oznakom (brojem).

7. Kada se završi obilazak stabla, dobijeni broj prevodi se iz binarnog u dekadni i on predstavlja kod.

Dekadni kod ne nosi informaciju o korenu. Zbog toga se za koren bira proizvoljni čvor, koga, uobičajeno, označimo sa 1. Kod se iz dekadnog prevodi u binarni brojni sistem. Dobijeni binarni niz se analizira sleva udesno. Svaka jedinica označava kretanje od korena i novi čvor. Svaka nula označava kretanje ka korenu za jedno mesto, po starim čvorovima. Dekodiranje se završava u novom korenu, tj. čvoru 1.

Nalaženje Pruferovog koda stabla može se opisati sledećim koracima.

1. U početku je kod prazan.

2. U stablu se pronalazi list (čvor stepena 1) sa najmanjom oznakom. Oznaka (broj) njegovog suseda se upisuje u kod (tj. radi se konkatenacija – nadovezivanje), a sam list se odstranjuje iz stabla.

3. Proverava se da li novodobijeno stablo ima samo dva čvora. Ako je tako, kodiranje je završeno. Ako nije, prelazi se na Korak 2.

Za proizvoljan vektor $N = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ označimo njegovo "skraćivanje" za prvu komponentu sa $N^* = [a_2, a_3, \ldots, a_n]$. Neka je $P[v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}]$ kod Prufera i $N = [1, 2, \ldots, n]$ vektor oznaka čvorova stabla. Dekodiranje se može opisati sledećim koracima:

1. U vektoru N nalazimo najmanji broj v koji nije prisutan u P. Čvorove sa oznakom v i v_1 spojimo granom.

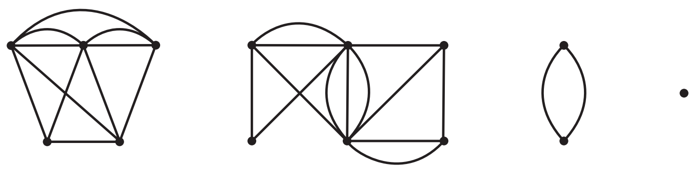
2. Iz N odstranimo broj v, $N := N - v$, a iz koda P prvu komponentu, v_1; $P^* = P - v_1 = [v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}]$, $P := P^*$.

3. Ako je $|N| = 2$, spajamo dva preostala čvora sa odgovarajućim oznakama i to je kraj. U protivnom prelazimo na Korak 1.

2 Zadaci

Zadatak 1.

Naći rang i ukupan broj nezavisnih ciklusa u multigrafu prikazanog na sledećoj slici.

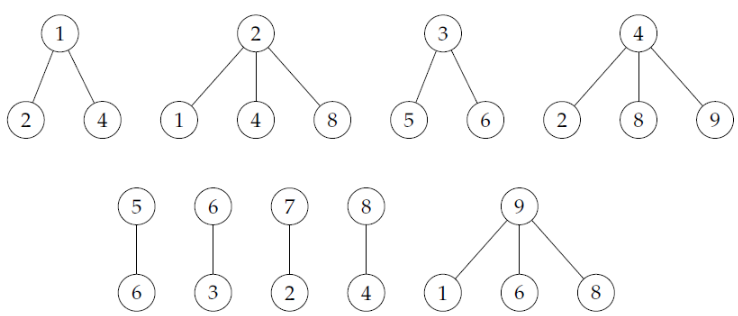


Rešenje. Dati multigraf sadrži $n = 14$ čvorova, $m = 26$ grana i ima $p = 4$ komponente povezanosti. Rang je $r(G) = n - p = 10$. Ciklomatski broj je $\gamma(G) = m - n + p = 16$, te multigraf ima 16 nezavisnih ciklusa.

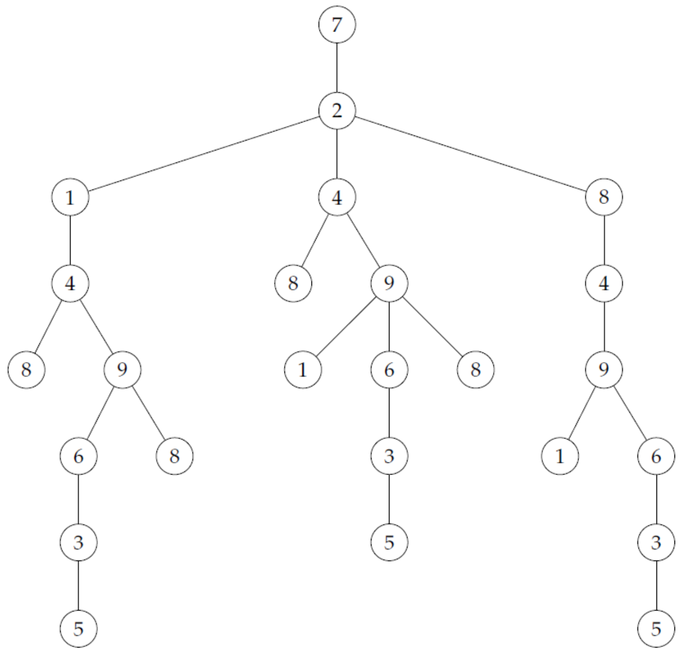
Zadatak 2.

Koristeći korensko stablo naći najveći broj $i_1 i_2 \ldots i_n$, $i_j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, čije su sve cifre međusobno različite, pri čemu je za svako k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, broj $i_k i_{k+1}$ deljiv brojevima 7 ili 12.

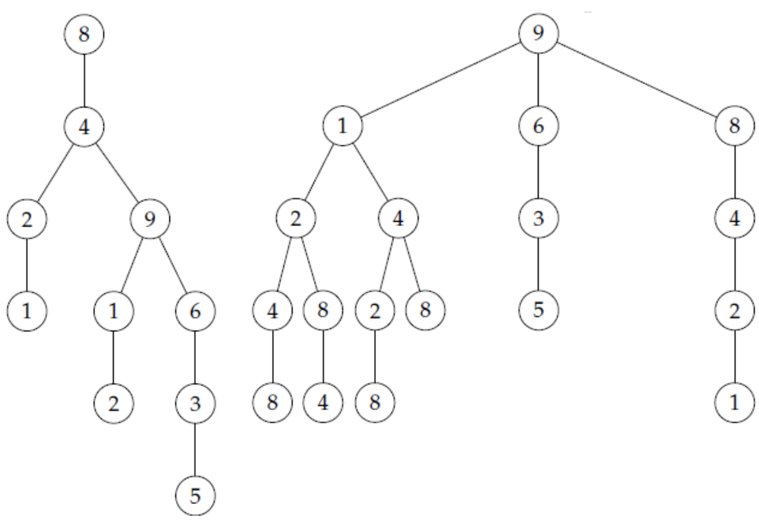
Rešenje. Formirajmo, najpre, koristeći stabla, sve dvocifrene brojeve koji su deljivi brojevima 7 ili 12.



Kako se nijedan od dvocifrenih brojeva ne završava brojem 7, devetocifreni broj, ako postoji, mora početi brojem 7. Tražimo broj, počev od broja 7, pomoću stabla, vodeći računa da se ni na jednom putu u njemu neki od brojeva ne javlja dva puta, vodeći računa da uslovi zadatka budu zadovoljeni.



Na osnovu ovog stabla zaključujemo da devetocifreni broj ne postoji i našli smo najveći osmocifreni broj koji počinje brojem 7. To je broj 72849635. Potrebno je proveriti da li postoji traženi broj veći od 72849635, što je jedino moguće ako postoji osmocifreni broj koji počinje ili cifrom 8 ili cifrom 9.



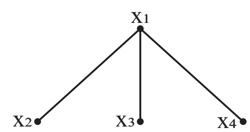
Kako ne postoji osmocifreni broj koji počinje cifrom 8 ili 9, najveći broj je

72849635.

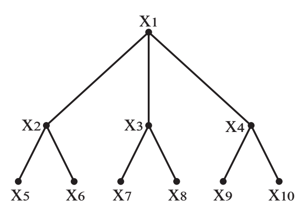
Zadatak 3.

U jednom gradu trafostanice su raspoređene tako da je svaka direktno povezana sa najviše tri, a inače je svaka povezana sa svakom od preostalih posredstvom najviše jedne trafostanice. Koliko najviše trafostanica može biti u gradu?

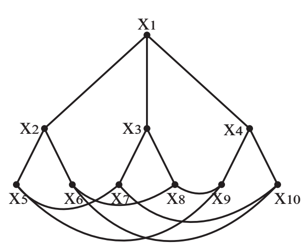
Rešenje. Označimo sa x_1, x_2, …, x_n, $n \in \mathbb{N}$, trafostanice u gradu. Uočimo trafostanicu x_1. Prema uslovu u zadatku, ona je direktno povezana sa najviše tri. Neka su to trafostanice x_2, x_3 i x_4, videti sledeću sliku.

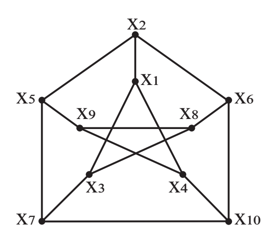


trafostanica x_1 sa preostalim trafostanicama je povezana preko trafostanica x_2, x_3 i x_4. Njihov broj direktno je uslovljen činjenicom da su trafo stanice x_2, x_3 i x_4 direktno povezane sa najviše tri trafostanice. Ovome odgovara stablo prikazano na sledećoj slici.



Na osnovu njega zaključujemo, kako je x_1 bila proizvoljna trafostanica, da je u gradu raspoređeno najviše 10 trafo stanica. Preostaje da se formira graf tako da uslovi iz zadatka budu zadovoljeni i za čvorove x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 i x_{10}. Takav graf, i njegov izomorfni oblik su prikazani na sledećoj slici.





Zadatak 4.

Naći ukupan broj sprežnih stabala kompletnog grafa K_n, $n \geq 3$.

Rešenje. Kompletnom grafu $K_n = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geq 3$, odgovara matrica susedstva A, reda $n \times n$, oblika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix} = J_n - I_n.$$

Kako je stepen svakog njegovog čvora $d(x_i) = n-1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, matrica $D - A$, gde je D dijagonalna matrica $D = (d_{ij})$, reda $n \times n$, pri čemu je $d_{ii} = d(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je definisana sa

$$D - A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

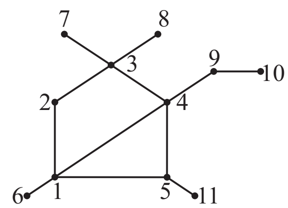
Njeni svi kofaktori su međusobno jednaki i reda su $(n-1) \times (n-1)$, te je

$$S(n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & n-1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = n^{n-2}.$$

To znači da graf K_n, $n \geq 3$, sadrži $S(n) = n^{n-2}$ sprežnih stabala.

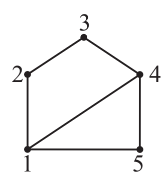
Zadatak 5.

Naći ukupan broj sprežnih stabala i sama sprežna stabla grafa prikazanog na sledećoj slici.



G

Rešenje. Broj sprežnih stabala grafa G jednak je broju sprežnih stabala grafa G_1.



G_1

Matrica susedstva A i matrica stepena čvorova D grafa G_1 su:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

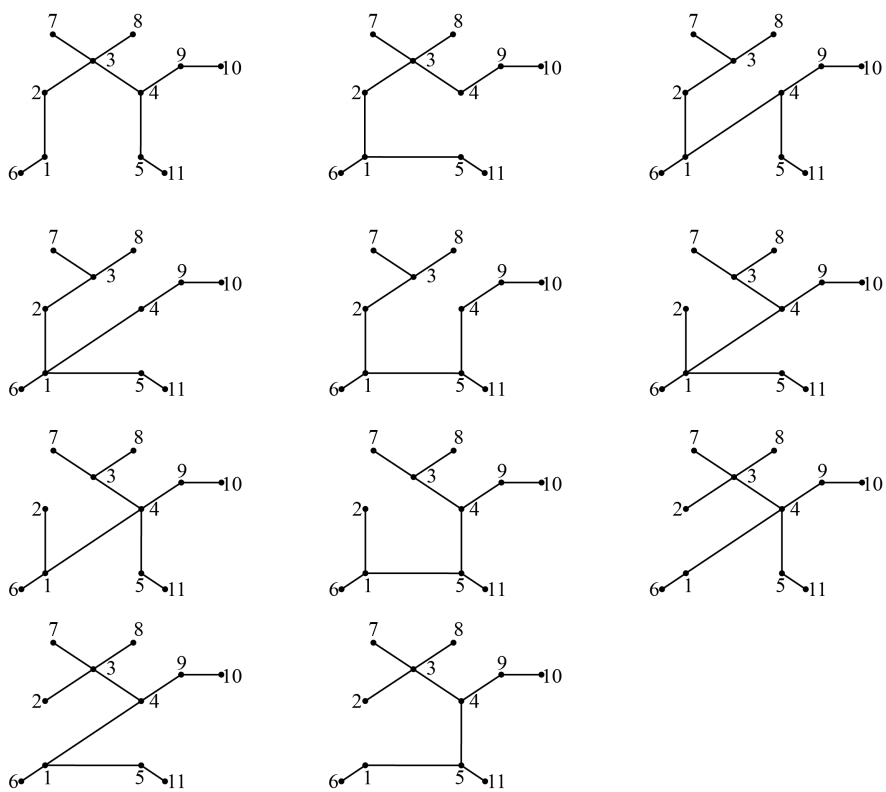
Izborom proizvoljnog kofaktora matrice $D - A$,

$$D - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

dobijamo da je

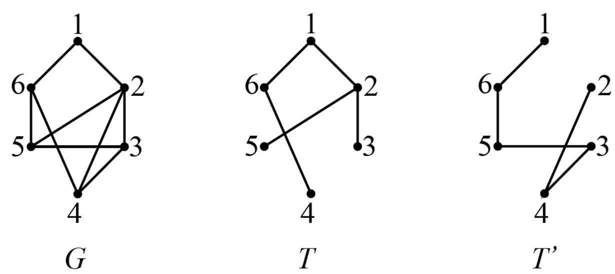
$$S = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Graf G_1, pa i graf G, ima 11 sprežnih stabala, koja su prikazana na sledećoj slici.

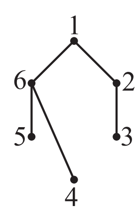


Zadatak 6.

Na sledećoj slici dat je povezan graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i dva njegova sprežna stabla T i T'. Formiranjem monotonog niza sprežnih stabala transformisati T u T'.

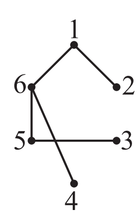


Rešenje. Grana $\{5, 6\}$ sadržana je u sprežnom stablu T', a nije u sprežnom stablu T. U sprežnom stablu T postoji prost put $5 - 2 - 1 - 6$ koji povezuje čvorove 5 i 6. On sadrži granu $\{2, 5\}$, koja nije sadržana u T'. Na osnovu sprežnog stabla $T = T_1$, formira se sprežno stablo T_2, tako što se izostavlja grana $\{2, 5\}$, a dodaje se grana $\{5, 6\}$ (sledeća slika).



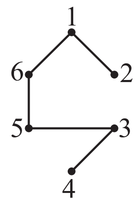
T_2

Grana $\{3, 5\}$ sadržana je u sprežnom stablu T', a nije u T_2. U T_2 postoji prost put $3 - 2 - 1 - 6 - 5$ koji povezuje čvorove 3 i 5. On sadrži granu $\{2, 3\}$, koja ne pripada sprežnom stablu T'. Na osnovu T_2 formiramo novo sprežno stablo T_3, dato na sledećoj slici, izostavljanjem grane $\{2, 3\}$ i dodavanjem grane $\{3, 5\}$.



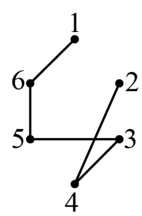
T_3

Grana $\{3,4\}$ sadržana je u sprežnom stablu T', a nije u T_3. U T_3 postoji prost put $3-5-6-4$ koji povezuje čvorove 3 i 4. On sadrži granu $\{4,6\}$, koja ne pripada sprežnom stablu T'. Na osnovu T_3 formiramo sprežno stablo T_4, prikazano na sledećoj slici, izostavljanjem grane $\{4,6\}$, a dodavanjem grane $\{3,4\}$.



T₄

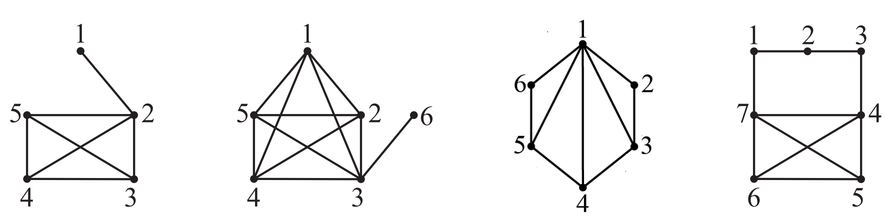
Grana $\{2,4\}$ pripada sprežnom stablu T', ali ne i sprežnom stablu T_4. U T_4 postoji prost put $2-1-6-5-3-4$ koji povezuje čvorove 2 i 4. On sadrži granu $\{1,2\}$, koja ne pripada sprežnom stablu T'. Na osnovu sprežnog stabla T_4 formiramo novo sprežno stablo T_5 (sledeća slika) izostavljanjem grane $\{1,2\}$ i dodavanjem grane $\{2,4\}$. Nije teško uočiti da je $T_5 = T'$.



T_5=T'

Zadatak 7.

Da li grafovi prikazani na sledećoj slici imaju po par sprežnih stabala koja nemaju zajedničkih grana, tj. disjunktne skupove grana?



a) b) c) d)

Rešenje.

a) Ne. Čvor 1 ima stepen $d(1) = 1$. To znači da svako sprežno stablo ovog grafa sadrži granu $\{1, 2\}$.

b) Ne.

c) Svako sprežno stablo datog grafa sadrži po 5 grana. Da bi dati graf sadržao dva sprežna stabla, sa disjunktnim granama, on bi morao da ima najmanje 10 grana. Ovo naravno nije i dovoljan uslov. Dati graf ima 9 grana, te je odgovor na postavljeno pitanje ne.

d) Ne. Pretpostavimo suprotno, da takva dva sprežna stabla, T_1 i T_2, postoje. Međutim, ako grana $\{3, 4\}$ pripada stablu T_1, grane $\{3, 2\}$ i $\{2, 1\}$ pripadaju sprežnom stablu T_2. Ali tada čvor 2 ne može pripadati sprežnom stablu T_1, što je suprotno pretpostavci da je ono sprežno stablo.

Zadatak 8.

Da li povezan dati graf $G = (V, E)$ sadrži dva sprežna stabla koja imaju disjunktne skupove grana:

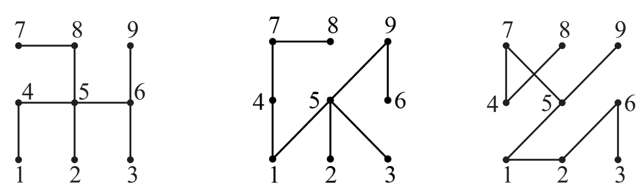
a) ako sadrži most,

b) ako je $|V| = n > 1$ i $|E| = m \leq 2n - 3$,

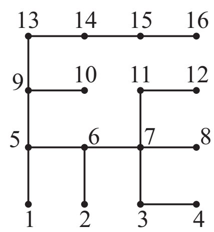
c) sadrži povezan podgraf oblika P_3?

Zadatak 9.

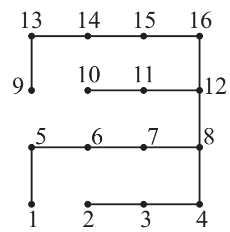
Kodirati stabla, prikazana na sledećoj slici, u dekadnom kodu, pri čemu je koren u čvoru 7.



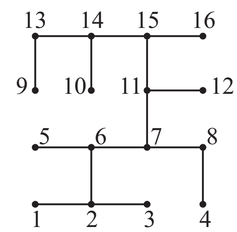
a) b) c)



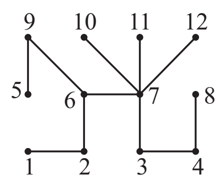
d)



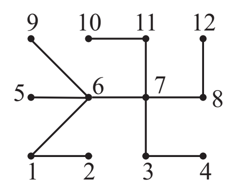
e)



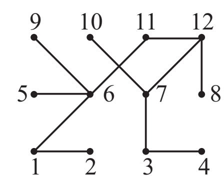
f)



g)



h)



i)

Rešenje.

a) $(1110110011010000)_2 = 60624$,

b) $(1111010110000010)_2 = 62850$,

c) $(1100111110000100)_2 = 53124$,

d) $(110011011011011110000000101100)_2 = 862838828$,

e) $(111000111100011100111110000000)_2 = 955371392$,

f) $(111010010011001101110110001000)_2 = 978115976$,

g) $(1110001110011000101010)_2 = 3728938$,

h) $(1100111001010011001100)_2 = 3380428$,

i) $(1100101101111001010000)_2 = 3333712$.

Zadatak 10.

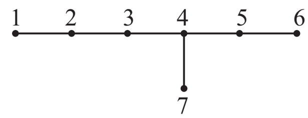
Naći stablo čiji je dekadni kod $D = 1044987026$.

Rešenje. Dekadni broj D u binarnom sistemu glasi

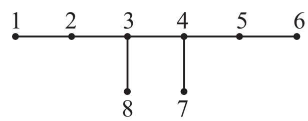
$$D = (111110010010010011110010010010)_2.$$

Izaberimo proizvoljni čvor i označimo ga sa 1. Kako u kodu D na početku stoji 5 jedinica, od čvora 1 do lista, kojega ćemo označiti sa 6, stiglo se preko 5 grana i 4 čvora koje ćemo označiti redom sa 2, 3, 4 i 5.

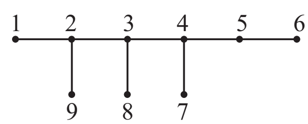
Iz čvora 6, pošto slede dve nule, vraćamo se u čvor 4. Kako sledi samo jedna jedinica, čvor 4 je povezan sa novim čvorom, kojega označimo sa 7.



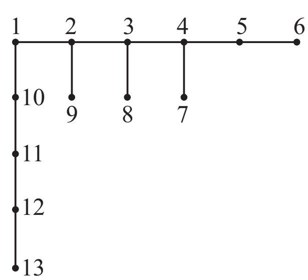
Slede dve nule, te se iz čvora 7 vraćamo u čvor 3. Iza ovih nula dolazi jedna jedinica, te je čvor 3 povezan sa jednim novim čvorom, kojega označimo sa 8.



Iz čvora 8 vraćamo se u čvor 2. Sledi jedna jedinica, te je čvor 2 povezan sa jednim novim čvorom, kojega ćemo označiti sa 9.

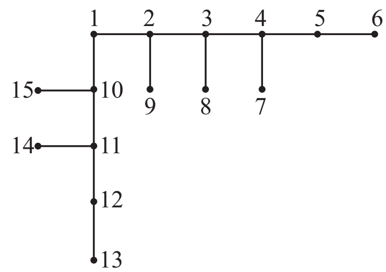


Slede dve nule u kodu, te se iz čvora 9 vraćamo u čvor 1. Iza ovih nula dolaze četiri jedinice. To znači da je čvor 1 povezan sa novim listom, preko četiri grane. Tom prilikom prolazi se kroz tri nova čvora. Označimo ove čvorove brojevima 10, 11 i 12, a novi list brojem 13.

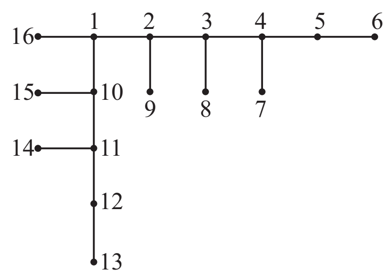


U kodu slede dve nule, te se iz čvora 13 vraćamo u čvor 11. Kako je iza ovih nula samo jedna jedinica, čvor 11 je povezan sa jednim novim čvorom, kojega ćemo označiti brojem 14.

Iz čvora 14 vraćamo se u čvor 10, kojega povezujemo sa novim čvorom, označenim sa 15.

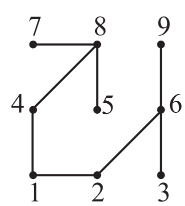


Konačno, iz čvora 15, vraćamo se u čvor 1, kojega povezujemo sa novim čvorom, 16.

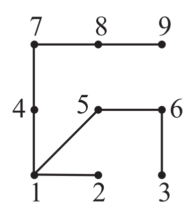


Zadatak 11.

Stabla, prikazana na sledećoj slici, kodirati kodom Prufera.



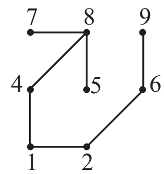
a)



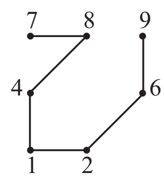
b)

Rešenje.

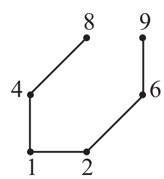
a) List sa najmanjim brojem je 3. U kod upisujemo broj 6, a čvor 3 odstranjujemo iz stabla: $P = [6]$.



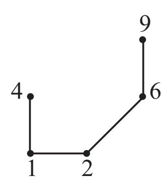
List sa najmanjim brojem je čvor 5. U kod upisujemo broj 8, a čvor sa brojem 5 odstranjujemo iz stabla: $P = [6,\ 8]$.



List sa najmanjim brojem je čvor 7. Odstranjujemo ga iz stabla, a u kod upisujemo broj 8: $P = [6,\ 8,\ 8]$.



U ovom koraku iz stabla odstranjujemo čvor 8, a u kod upisujemo broj 4: $P = [6,\ 8,\ 8,\ 4]$.



Sada redom odstranjujemo čvorove 4, 1 i 2, a u kod upisujemo brojeve 1, 2 i 6, što je ujedno i kraj kodiranja: $P = [6,\ 8,\ 8,\ 4,\ 1,\ 2,\ 6]$.

b) $P = [1,\ 6,\ 5,\ 1,\ 4,\ 7,\ 8]$.

Zadatak 12.

Formirati stabla na osnovu sledećih kodova Prufera:

a) $P = [2, 3, 6, 4, 5, 5, 6]$, b) $P = [1, 4, 6, 5, 4, 7, 8]$, c) $P = [5, 5, 5]$.

Rešenje. a) Pored koda P, koji je dužine 7, posmatramo i vektor $A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$. U prvom koraku na osnovu vektora

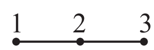
$$P = [2, 3, 6, 4, 5, 5, 6] \quad \text{i} \quad A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

izdvajamo granu $\{1, 2\}$.

Broj 1 odstranjujemo iz A, a broj 2 iz P. Na osnovu koda P^* i vektora A^*,

$$P^* = [3, 6, 4, 5, 5, 6] \quad \text{i} \quad A^* = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

izdvajamo granu $\{2, 3\}$.



U sledećem koraku na osnovu vektora

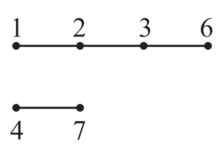
$$P^* = [6, 4, 5, 5, 6] \quad \text{i} \quad A^* = [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

izdvajamo granu $\{3, 6\}$.

Na osnovu vektora

$$P^* = [4, 5, 5, 6] \quad \text{i} \quad A^* = [4, 5, 6, 7, 8, 9],$$

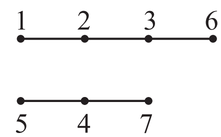
kako je 7 najmanji broj u A^* koji nije sadržan u P^*, izdvajamo granu $\{4, 7\}$.



Na osnovu vektora

$$P^* = [5, 5, 6] \quad \text{i} \quad A^* = [4, 5, 6, 8, 9]$$

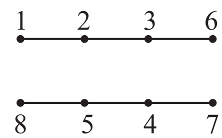
izdvajamo granu $\{4, 5\}$.



Na osnovu vektora

$$P^* = [5, 6] \quad \text{i} \quad A^* = [5, 6, 8, 9]$$

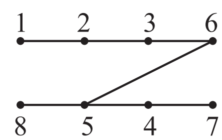
izdvajamo granu $\{5, 8\}$.



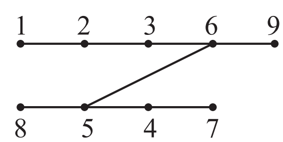
Na osnovu vektora

$$P^* = [6] \quad \text{i} \quad A^* = [5, 6, 9]$$

izdvajamo granu $\{5, 6\}$.



U vektoru $A^* = [6, 9]$ ostala su samo dva broja, te granu $\{6, 9\}$ pridodajemo stablu.

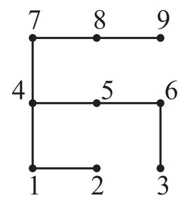


b) Najmanji broj u vektoru $A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$, koji nije sadržan u kodu $P = [1, 4, 6, 5, 4, 7, 8]$ je 2, te izdvajamo granu $\{1, 2\}$. Iz vektora A odstranjujemo broj 2, a iz koda P broj 1.

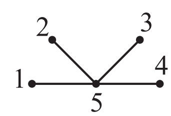
Najmanji broj u vektoru $A^* = [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ koji nije sadržan u kodu $P^* = [4, 6, 5, 4, 7, 8]$ je broj 1, te izdvajamo granu $\{1, 4\}$.

Na osnovu vektora $A^* = [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ i koda $P^* = [6, 5, 4, 7, 8]$ izdvajamo granu $\{3, 6\}$.

Na osnovu vektora $A^* = [4, 5, 6, 7, 8, 9]$ i koda $P^* = [5, 4, 7, 8]$ izdvajamo granu $\{5, 6\}$, a na osnovu vektora $A^* = [4, 5, 7, 8, 9]$ i $P^* = [4, 7, 8]$ granu $\{4, 5\}$. Dalje, na osnovu vektora $A^* = [4, 7, 8, 9]$ i $P^* = [7, 8]$ izdvajamo granu $\{4, 7\}$, a na osnovu $A^* = [7,8,9]$ i $P^* = [8]$ granu $\{7,8\}$. Kako se vektor $A^* = [8,9]$ sastoji od dva broja, stablu pridružujemo i granu $\{8,9\}$. Traženo stablo je prikazano na sledećoj slici.



c) Na osnovu vektora $A = [1,2,3,4,5]$ i koda $P = [5,5,5]$ izdvajamo granu $\{1,5\}$. Dalje, na osnovu vektora $A^* = [2,3,4,5]$ i koda $P^* = [5,5]$ izdvajamo granu $\{2,5\}$, a na osnovu $A^* = [3,4,5]$ i $P^* = [5]$ granu $\{3,5\}$. Kako vektor $A^* = [4,5]$ ostaje sa dva broja, stablu pridružujemo i granu $\{4,5\}$. Odgovarajuće stablo je prikazano na sledećoj slici.



Zadatak 13.

Na osnovu kodova Prufera:

a) $P = [1,4,11,1,1,4,2,2,11]$, b) $P = [1,4,1,4,6,6,6,6]$,

c) $P = [5,6,5,4,3,8]$, d) $P = [5,8,6,6,3,5,3,3]$,

odrediti stepen svakog čvora u odgovarajućem stablu.

Rešenje. a) Stablo ima 11 čvorova. Čvorovi sa oznakama 3, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 su stepena 1, $d(3) = d(5) = d(6) = d(7) = d(8) = d(9) = d(10) = 1$. Čvor 1 je stepena 4, $d(1) = 4$, čvorovi 2, 4 i 11 su stepena 3, $d(2) = d(4) = d(11) = 3$.

b) Stablo ima 10 čvorova, $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Raspodela po stepenima je $d(2) = d(3) = d(5) = d(7) = d(8) = d(9) = d(10) = 1$, $d(1) = d(4) = 3$, $d(6) = 5$.

c) Stablo ima 8 čvorova, $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Raspored po stepenima je $d(1) = d(2) = d(7) = 1$, $d(3) = d(4) = d(6) = d(8) = 2$ i $d(5) = 3$.

d) Stablo ima 10 čvorova, $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Raspored po stepenima je $d(1) = d(2) = d(4) = d(7) = d(9) = d(10) = 1$, $d(8) = 2$, $d(5) = d(6) = 3$ i $d(3) = 4$.