# Diferencijabilnost

**Definicija 1.** Za funkciju $f(x)$ kažemo da je diferencijabilna u tački $a$ ako se njen priraštaj $f(x) - f(a)$ može predstaviti u obliku

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + o(x-a)$$

ili

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \omega(x)(x-a),$$

pri čemu $\lim\limits_{x\to a} \omega(x) = 0$ i $A$ je realna konstanta.

**Primer 1.** Pokazati da je funkcija $f(x) = x^2$ diferencijabilna.

**Rešenje:** $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) = (x-a)(x-a+2a) = 2a(x-a) + (x-a)^2$.

**Definicija 2.** Neka je funkcija $f$ neprekidna u tački $a$. Funkcija $f$ ima izvod u tački $a$ ako postoje konačni levi i desni izvod u tački $a$ i jednaki su.

**Teorema 1.** Funkcija $f$ je diferencijabilna u tački $a$ ako i samo ako $f$ ima konačan izvod u tački $a$.

$$f'_l(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad f'_d(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

$$f'_l(x) = \lim_{\triangle x\to 0-} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \qquad f'_d(x) = \lim_{\triangle x\to 0+} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}.$$

**Zadaci:**

**1.** Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije

$$f(x) = e^{|x|}.$$

**Rešenje:** Funkcija $f$ se može napisati u obliku

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ e^{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija $f(x) = e^{-x}$ je neprekidna kao elementarna, a takođe i na intervalu $(0, +\infty)$ gde je $f(x) = e^x$.

Uslov neprekidnosti u $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$

Računamo

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{-x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{x} = 1, \qquad f(0) = 1.$$

Funkcija je neprekidna za $x = 0$.

Za $x \neq 0$ funkcija $f$ je diferencijabilna

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0, \\ e^{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Uslov diferencijabilnosti u $x = 0$ je da postoji konačan izvod u $x = 0$, odnosno, konačan levi i desni izvod i da su jednaki.

Određujemo

$$f_l'(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-(e^{-x} - 1)}{-x} = -1,$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1.$$

Imamo $f_l'(0) = -1 \neq 1 = f_d'(0)$ pa funkcija nije diferencijabilna u nuli.

**2.** Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\arctan \dfrac{1}{x-2}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2, \end{cases}$$

za $x \in \mathbb{R}$.

**Rešenje:** Funkcija $f$ je neprekidna na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, kao elementarna.

Uslov neprekidnosti u $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2).$$

Važi

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2-} \arctan \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Tada je

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x-2)\arctan \frac{1}{x-2} = 0.$$

Slično,

$$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2+} \arctan \frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}.$$

Tada je

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x-2)\arctan \frac{1}{x-2} = 0.$$

Kako je i $f(2) = 0$, funkcija je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Funkcija je diferencijabilna za $x \neq 2$:

$$f'(x) = \arctan\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}.$$

Uslov diferencijabilnosti u tački $x = 2$ je da su levi i desni izvod funkcije jednaki i konačni:

$$f'_l(2) = \lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)\arctan\dfrac{1}{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\arctan\frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f'_d(2) = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)\arctan\dfrac{1}{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\arctan\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}.$$

Izvod $f'(2)$ ne postoji, funkcija nije diferencijabilna u tački $x = 2$.

**3.** Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & x < 1, \\ bx^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

bude neprekidna i diferencijabilna u tački $x = 1$.

**Rešenje:** Uslov neprekidnosti u $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$

Imamo

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(ax+1) = a+1,$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}(bx^2) = b = f(1),$$

pa je $a + 1 = b$.

Uslov diferencijabilnosti u tački $x = 1$ je da su levi i desni izvod funkcije u jedinici jednaki i konačni:

$$\begin{aligned} f'_l(1) &= \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{ax+1-b}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{ax+1-(a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)}{x-1} = a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_d(1) &= \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{bx^2-b}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{b(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1+} b(x+1) = 2b, \end{aligned}$$

odakle imamo $a = 2b$.

Iz uslova neprekidnosti, $a + 1 = b$, i uslova diferencijabilnosti, $a = 2b$, dobijamo $a = -2$, $b = -1$.

**4.** Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \le 1, \\ 3 - bx^2, & x > 1 \end{cases}$$

neprekidna i diferencijabilna u tački $x = 1$.

**Rezultat:** $a = 4,\;\; b = -2$.

**5.** Odrediti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha^2, & x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & x \ge 0 \end{cases}$$

bude diferencijabilna u tački $x = 0$.

**Rešenje:** Da bi funkcija bila diferencijabilna u nekoj tački ona pre svega mora biti neprekidna u toj tački.

Uslov neprekidnosti u $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$

Važi

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x + \alpha^2) = \alpha^2,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (\alpha \cos x + \beta \sin x) = \alpha = f(0),$$

pa je $\alpha^2 = \alpha$. Imamo da je

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\alpha - 1) = 0,$$

odakle je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$.

Uslov diferencijabilnosti u tački $x = 0$ je da su levi i desni izvod funkcije u nuli jednaki i konačni:

$$f_l'(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x + \alpha^2 - \alpha}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} f_d'(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\alpha \cos x + \beta \sin x - \alpha}{x} \\ &= \lim_{x\to 0+} \Big( \frac{-\alpha(1 - \cos x)}{x} + \beta \frac{\sin x}{x} \Big) = \lim_{x\to 0+} \Big( \frac{-2\alpha \sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \beta \frac{\sin x}{x} \Big) \\ &= \lim_{x\to 0+} \Big( -\alpha \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} + \beta \frac{\sin x}{x} \Big) = \beta. \end{aligned}$$

Dobijamo da je $\beta = 1$.

Iz uslova neprekidnosti i uslova diferencijabilnosti dobijamo dva rešenja $(a, b) = (0, 1)$ i $(a, b) = (1, 1)$.