Čas 6

Zadatak 1. *Dat je graf G koji se sastoji od n čvorova i čiji su stepeni čvorova redom jednaki $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Ukoliko je*

$$\delta = \min_{1 \leq i \leq n} d_i$$

dokazati da graf ne može imati preko $\dfrac{n}{\delta+1}$ komponenti povezanosti.

Rešenje. Neka graf G ima $p \in \mathbb{N}$ komponenti povezanosti, tako da one redom imaju $n_1, n_2, \ldots, n_p$ čvorova. Znamo da važi $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$. Takođe, pošto je stepen svakog čvora jednak bar δ, svaka komponenta povezanosti mora da sadrži bar $\delta + 1$ čvorova. Odatle direktno slede nejednakosti $n_i \geq \delta + 1$ koje važe za svako $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Dobijamo:

$$n = \sum_{i=1}^{p} n_i \geq \sum_{i=1}^{p} (\delta + 1) = p(\delta + 1)$$

odakle direktno sledi $p \leq \dfrac{n}{\delta+1}$, što je i trebalo dobiti. Dakle, broj komponenti povezanosti zaista ne može biti veći od $\dfrac{n}{\delta+1}$. ■

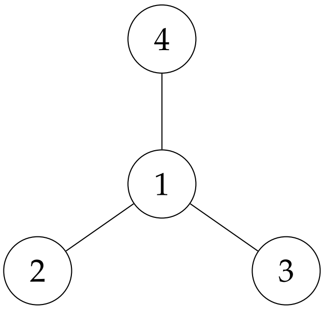
Zadatak 2. *Dati su grafovi G_1 i G_2 zajedno sa svojim line grafovima $L(G_1)$ i $L(G_2)$, respektivno. Da li je moguće da se desi*

- ***(a)*** *da grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni i da grafovi $L(G_1)$ i $L(G_2)$ nisu izomorfni?*
- ***(b)*** *da grafovi G_1 i G_2 jesu izomorfni, a da grafovi $L(G_1)$ i $L(G_2)$ nisu izomorfni?*
- ***(c)*** *da grafovi G_1 i G_2 jesu izomorfni i da grafovi $L(G_1)$ i $L(G_2)$ jesu izomorfni?*
- ***(d)*** *da grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni, a da grafovi $L(G_1)$ i $L(G_2)$ jesu izomorfni?*

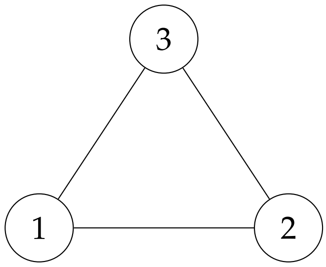
Rešenje.

- **(a)** Može da se desi i to je trivijalno pokazati. Neka recimo graf G_1 predstavlja kompletan graf sa 3 čvora, a graf G_2 kompletan graf sa 4 čvora. Ova dva grafa nisu izomorfna. Graf $L(G_1)$ imaće 6 čvorova, dok će graf $L(G_2)$ imati 10 čvorova. Ova dva grafa takođe nisu izomorfna.
- **(b)** Ova situacija ne može nikada da se desi. Naime, isti izomorfizam koji vrši preslikavanje grafa G_1 u G_2 može da se primeni da preslika graf $L(G_1)$ u graf $L(G_2)$. Ako ovaj izomorfizam označimo sa $f\colon V_1 \to V_2$, gde je $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, onda može da se definiše izomorfizam iz grafa u $L(G_1)$ u graf $L(G_2)$ koji će da preslikava čvor koji odgovara grani $\{a, b\}$ za neko $a, b \in V_1$ u čvor koji odgovara grani $\{f(a), f(b)\}$, koja obavezno postoji u grafu G_2. Dakle, ako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, onda moraju biti i grafovi $L(G_1)$ i $L(G_2)$.
- **(c)** Na osnovu prethodno urađenog dela zadatka, odgovor je pozitivan. Kao primer, dovoljno je uzeti bilo koja dva izomorfna grafa G_1 i G_2.

(d) Moguće je da se desi. Na primer, grafovi G_1 i G_2 dati na sledećim slikama:

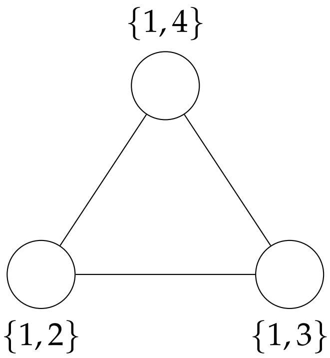


(a) G_1

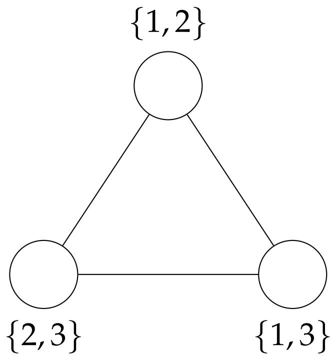


(b) G_2

očigledno nisu izomorfni, ali njihovi line grafovi jesu:



(a) $L(G_1)$



(b) $L(G_2)$

■

Zadatak 3. *Dat je neki graf G sa $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ čvorova. Ukoliko graf $\overline{G}$ predstavlja njegov komplement, da li može da se desi:*

(a) *da su i graf G i graf $\overline{G}$ povezani?*

(b) *da je graf G povezan, a da graf $\overline{G}$ nije povezan?*

(c) *da graf G nije povezan, a da graf $\overline{G}$ jeste povezan?*

(d) *da oba grafa nisu povezana?*

Rešenje.

(a) Može da se desi da su oba grafa povezana. Na primer, neka graf G predstavlja običan elementarni put dužine $n-1$:

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n$$

koji onda sadrži n čvorova. Tada je graf G povezan. Što se tiče grafa $\overline{G}$, ukoliko je $2 \mid n$, on poseduje naredni elementaran put dužine $n-1$:

$$v_{n-1} \to v_{n-3} \to \cdots \to v_3 \to v_1 \to v_n \to v_{n-2} \to \cdots \to v_4 \to v_2$$

Ako je $2 \nmid n$, onda je $n \geq 5$ i on ima elementaran put dužine $n-1$

$$v_n \to v_{n-2} \to \cdots \to v_3 \to v_1 \to v_{n-1} \to v_{n-3} \to \cdots \to v_4 \to v_2$$

U svakom slučaju, i graf $\overline{G}$ je očigledno povezan.

(b) Može da se desi da je graf G povezan, a da graf $\overline{G}$ nije. Neka je graf G kompletan graf. Tada G sigurno jeste povezan, a $\overline{G}$ sigurno nije.

(c) Može da se desi da graf G nije povezan, a da graf $\overline{G}$ jeste. Neka je graf G graf koji nema nijednu granu. Tada G zaista nije povezan, dok $\overline{G}$ čini kompletan graf, te mora biti povezan.

(d) Ne može da se desi da oba grafa nisu povezana. Za svaki odabrani graf G, bar jedan od grafova G i $\overline{G}$ mora biti povezan. Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom.

Ako graf G ima 1 ili 2 čvora, očigledno je da mora uvek on ili njegov komplement da budu povezani. Pretpostavimo da ovo tvrđenje važi za neki prirodan broj $k \geq 2$, tj. da bilo koji graf sa k čvorova uvek mora da bude povezan ili njegov komplement da bude povezan. Dokažimo da ovo tvrđenje onda mora da se odnosi i na proizvoljan graf sa $k+1$ čvorova.

Dakle, neka graf G ima $k+1$ čvorova. Odaberimo njegov proizvoljan čvor x. Ukoliko je čvor x povezan sa svim ostalim čvorovima, onda je graf G sigurno povezan. Ako čvor x nije povezan ni sa jednim drugim čvorom, tada je komplement grafa G sigurno povezan. U oba ova slučaja dokaz je gotov. Zato pretpostavimo da postoje čvorovi koji nisu povezani sa x, ali i oni koji jesu.

Označimo sa G_1 graf koji se dobija kada se grafu G odstrani čvor x. Graf G_1 ima tačno k čvorova, pa po induktivnoj pretpostavci graf G_1 je povezan ili graf $\overline{G_1}$ je povezan. Ako je graf G_1 povezan, pošto znamo da je čvor x povezan u okviru grafa G sa bar nekim od preostalih čvorova, sledi da je i graf G povezan. Ukoliko je graf $\overline{G_1}$ povezan, pošto čvor x u okviru grafa $\overline{G}$ mora biti povezan sa bar nekim od ostalih čvorova, sledi da je i graf $\overline{G}$ povezan. U svakom slučaju, zaključujemo da bar jedan od grafova G i $\overline{G}$ mora biti povezan, te je dokaz gotov.

■

Zadatak 4. *Dat je povezan graf G takav da njegov line graf $L(G)$ predstavlja kompletan graf sa $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ čvorova. Dokazati da graf G mora da ima oblik zvezde sa $n+1$ čvorova, tj. mora da sadrži jedan čvor koji je u zvezdi sa n ostalih čvorova i bez dodatnih grana između tih ostalih čvorova.*

Da je bio zadat graf G koji nije nužno povezan, ali ponovo zadovoljava svojstvo da je graf $L(G)$ kompletan sa $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ čvorova, da li bi on nužno morao da ima oblik zvezde sa $n+1$ čvorova?

Rešenje. Graf G mora da ima tačno n grana. Uzmimo proizvoljnu granu iz grafa G i označimo je sa x. Pošto je graf $L(G)$ kompletan, to znači da svake dve grane u grafu G moraju da imaju zajednički čvor. Neka su A i B krajnji čvorovi grane x. Svaka druga grana koja nije x mora kao krajnji čvor da ima ili čvor A ili čvor B. Neka E_A predstavlja skup svih grana koje su incidentne sa A, bez x, i E_B skup grana koje su incidentne sa B, bez grane x. Tada je

$$|E_A| + |E_B| = n - 1$$

Bar jedan od skupova E_A i E_B mora da ima bar $\dfrac{n-1}{2}$ elemenata. Bez gubljenja opštosti, neka je to skup E_A (zadatak se identično rešava ako je u pitanju skup E_B). Dakle, $|E_A| \geq \dfrac{n-1}{2} \geq 2$, te E_A mora da sadrži bar dve različite grane. Označimo ih sa y i z.

Ukoliko pretpostavimo da skup E_B nije prazan, zaključujemo da on sadrži neku granu t. Međutim, grana t ne može istovremeno da bude susedna i sa granom y i sa granom z. Naime, grana t kao jedan od krajnjih čvorova ima B, koji nije krajnji čvor grana y i z. Zbog toga, grana t mora da ima isti drugi krajnji čvor kao i grane y i z, kako bi sa njima bila susedna. Neka je to čvor C. Odavde sledi da grane y i z moraju obe da imaju krajnje čvorove A i C, što nije moguće.

Dakle, važi $E_B = \varnothing$. Dobijamo da sve grane u grafu imaju čvor A kao krajnji čvor i ima ih ukupno n. Kako je graf povezan, on mora da ima samo jednu komponentu povezanosti, te ne postoje nikakvi dodatni izolovani čvorovi. Odavde zaključujemo da graf mora da ima oblik zvezde sa $n+1$ čvorova.

U slučaju da ne postoji uslov za povezanost grafa G, onda ovaj graf ne bi nužno morao da ima oblik zvezde sa $n+1$ čvorova, već bi mogao da ima jednu komponentu povezanosti koja ima ovaj oblik i proizvoljno mnogo dodatnih komponenti povezanosti u vidu izolovanih čvorova. ■

Zadatak 5. *Dat je kompletan graf K_{2n}, gde je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nevena i Nikola igraju igru tako što naizmenično obavljaju poteze koji se sastoje u modifikovanju izgleda grafa. Nevena u svom potezu ima pravo da obriše bilo koje dve grane ovog grafa koje želi, dok Nikola u svom potezu dodaje neku granu ovom grafu po svom izboru. Nevena prva igra svoj potez, a igra se završava nakong Neveninog poteza u trenutku kada graf postane bipartitan.*

Dokazati da Nevena ne može da završi igru pre svojih $n^2 - n - 1$ odigranih poteza. Dokazati da postoji strategija po kojoj Nevena može da zagarantuje da će igra da se završi posle tačno $n^2 - n - 1$ njenih poteza, bez obzira na to kako Nikola igra.

Rešenje. Neka je dat neki bipartitni graf koji je podgraf početnog grafa, što je zapravo bilo koji bipartitni graf sa $2n$ čvorova. Pošto je on bipartitan, to znači da njegov skup čvorova može da se razbije na neprazne disjunktne podskupove koji imaju $x \in \mathbb{N}$ i $y \in \mathbb{N}$ čvorova redom, gde je $x + y = 2n$, tako da grane postoje samo izmečvorova iz različitih podskupova. Ukoliko sa m označimo broj grana ovog grafa, tada sigurno važi $m \leq xy$, odakle nadalje iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine sledi

$$m \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2n}{2}\right)^2 = n^2$$

Bipartitan graf sa $2n$ čvorova ne može da ima preko n^2 grana.

Analizirajući promenu broja grana datog grafa kako igra teče, možemo da zaključimo da će nakon k-tog ($k \in \mathbb{N}$) Neveninog poteza graf imati tačno

$$2 - 1 + 2 - 1 + \cdots + 2 - 1 + 2 = 2k - (k-1) = k + 1$$

grana manje od kompletnog grafa, koji ih ima $\dfrac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$. Dakle, ako Nevena odigra manje od $n^2 - n - 1$ poteza, novodobijeni grafovi nakon njenih poteza će u svakom trenutku imati broj grana koji je strogo veći od

$$(2n^2 - n) - (n^2 - n - 1 + 1) = (2n^2 - n) - (n^2 - n) = n^2$$

tako da Nevena sigurno neće moći da dođe do bipartitnog grafa, pošto smo dokazali da bipartitni graf ne može da ima preko n^2 grana. Ovim je urađen prvi deo zadatka.

Nevena može da osmisli strategiju tako da posle njenog $(n^2 - n - 1)$-tog poteza, dobijeni graf mora biti bipartitan. Ideja iza njene strategije jeste da neposredno nakon svakog Nikolinog poteza, ona u svom sledećem potezu obriše upravo tu granu koju je Nikola dodao, plus još neku dodatnu koja ona želi. Na ovaj način, posle k poteza, Nevena ima mogućnost da dobije proizvoljan graf koji ima nekih $k + 1$ grana obrisanih u odnosu na početni kompletan graf.

Ukoliko Nevena briše grane na takav način da juri da dobije kompletan bipartitan graf $K_{n,n}$, koji ima tačno n^2 grana, ona može posle $n^2 - n - 1$ svojih poteza da dobije ovaj graf, uzevši u obzir da važi

$$(2n^2 - n) - n^2 = n^2 - n$$

a znamo da posle $n^2 - n - 1$ svojih poteza, ona može da dobije bilo koji graf koji ima $n^2 - n$ grana manje od početnog. ∎

Zadatak 6. *Dat je graf $G = (V, E)$ čiji je skup čvorova jednak $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 63\}$. Dva njegova čvora $a, b \in V$ su povezana ako i samo ako se binarne reprezentacije nenegativnih celih brojeva a i b razlikuju na tačno jednoj bit poziciji. Koliko je najmanja čvorova neophodno odstraniti ovom grafu tako da novodobijeni graf G_1 nema nijednu granu?*

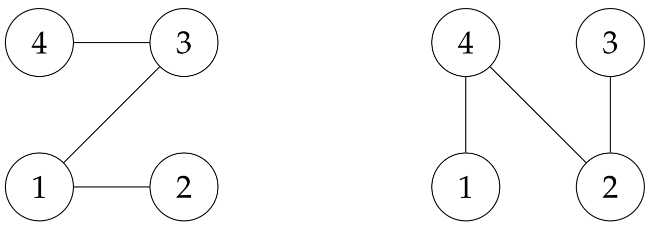
Rešenje. Čvorove možemo da podelimo u parove $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots, \{62, 63\}$. Ovakvih parova onda ima ukupno 32. Ukoliko kojim slučajem iz grafa G ne odstranimo bar jedan čvor iz svakog od ovih parova, novodobijeni graf G_1 će sigurno sadržati oba čvora iz nekog od ovih parova. Pošto su čvorovi oblika $2k$ i $2k + 1$ obavezno u vezi u grafu G, za svako $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 31\}$, graf G_1 u spomenutom slučaju ne bi bio bez grana. Zbog toga, kako bismo dobili graf G_1 koji nema nijednu granu, grafu G moramo da odstranimo bar 32 čvora.

Očigledno je da graf G ima 32 čvora koja imaju paran broj jedinica u svojoj binarnoj reprezentaciji i 32 čvora koja imaju neparan broj jedinica. Ukoliko odstranimo sve čvorove koji u svojoj binarnoj reprezentaciji imaju paran broj jedinica, novodobijeni graf G_1 će sadržati samo čvorove koji u binarnoj reprezentaciji imaju neparan broj jedinica. Međutim, nikoja dva različita ovakva čvora ne mogu da se razlikuju na tačno jednoj bit poziciji, pošto bi to onda značilo da jedan od njih mora da ima paran, a drugi neparan, broj jedinica u binarnoj reprezentaciji. Dakle, ovakav graf G_1 zaista ima 0 grana.

Zaključujemo da odgovor na pitanje iznosi 32, odnosno, minimalno je neophodno odstraniti 32 čvora početnom grafu G kako bi se dobio graf G_1 koji nema nijednu granu. ∎

Zadatak 7. *Pokazati da postoji samokomplementirajući graf koji ima* 2020 *čvorova.*

Rešenje. Ovakav graf se može konstruisati na relativno sličan sličan način kao što se konstruiše poznati samokomplementirajući graf sa 4 čvora, koji je dat na sledećoj slici zajedno sa svojim komplementom:



(c) (d)

Neka je dat graf $G = (V, E)$ čiji je skup čvorova jednak $V = A \cup B \cup C \cup D$, gde je:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{505}\}$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{505}\}$$
$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_{505}\}$$
$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_{505}\}$$

Neka su dva različita čvora u vezi u okviru grafa G ako i samo ako je ispunjen neki od navedenih uslova:

- oba čvora se nalaze u skupu A
- jedan čvor je iz skupa A, a drugi iz skupa B
- jedan čvor je iz skupa B, a drugi iz skupa C
- jedan čvor je iz skupa C, a drugi iz skupa D
- oba čvora se nalaze u skupu D

Tabelarno, ovi uslovi mogu da se predstave na sledeći način:

	A	B	C	D
A	✓	✓		
B	✓		✓	
C		✓		✓
D			✓	✓

Ukoliko posmatramo komplement grafa G, graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kod njega će dva različita čvora biti u vezi ako i samo ako važi jedan od uslova:

- oba čvora se nalaze u skupu B
- jedan čvor je iz skupa B, a drugi iz skupa D
- jedan čvor je iz skupa D, a drugi iz skupa A
- jedan čvor je iz skupa A, a drugi iz skupa C
- oba čvora se nalaze u skupu C

što tabelarno takođe može koncizno da se zapiše:

	A	B	C	D
A			✓	✓
B		✓		✓
C	✓		✓	
D	✓	✓		

Kako sva 4 skupa A, B, C i D imaju podjednak broj elemenata, nije teško zaključiti da su grafovi G i $\overline{G}$ izomorfni. Odavde sledi da je graf G samokomplementirajući, što znači da postoji samokomplementirajući graf koji ima 2020 čvorova. ■