Numeričko diferenciranje i numerička integracija

I Trotačkaste formule za numeričko diferenciranje

Prvi izvod na krajevima intervala:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{f'''(\xi_0)}{3}h^2.$$

Prvi izvod u sredini intervala:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right) - \frac{f'''(\xi_0)}{6}h^2.$$

Drugi izvod u sredini intervala:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right) - \frac{f^{(4)}(\xi_0)}{12}h^2.$$

Optimalna vrednost za h, pri čemu je greška zaokruživanja jednaka ε:

za prvi izvod u sredini intervala

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}, \qquad M_3 = \max_{x_0-h\le x\le x_0+h} |f'''(x)|,$$

za prvi izvod na krajevima intervala

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}}, \qquad M_3 = \max_{x_0-h\le x\le x_0+h} |f'''(x)|,$$

za drugi izvod

$$h = \sqrt[4]{\frac{48\varepsilon}{M_4}}, \qquad M_4 = \max_{x_0 - h \le x \le x_0 + h} |f^{(4)}(x)|.$$

II Numerička integracija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na diskretnom ili kontinualnom skupu tačaka $X \in [a,b]$. Kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$$

je formula kojom se približno izračunava određeni integral.

- $A_k,\ k = 1,2,\ldots,n -$ *težinski koeficijenti*
- $x_k,\ k = 1,2,\ldots,n -$ *čvorovi*
- $R_n -$ *ostatak u kvadraturnoj formuli*

Uopštenje:

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$$

- $p : [a,b] \to [0,+\infty) -$ *težinska funkcija*

Definicija: Kvadraturna formula $I(f) = K_n(f) + R_n(f)$ ima *algebarski stepen tačnosti* m ako je $R_n(f) = 0$ za svaki polinom f stepena m , a postoji bar jedan polinom g stepena $m+1$ takav da je $R_n(g) \neq 0$.

$$R_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!} R_n(x^{m+1})\, dx.$$

ZADACI

Zadatak 1. Data je funkcija $f(x)=\sqrt{x},\ x\geq 1.$
a) Ako se vrednosti funkcije $f(x)$ uzimaju sa 2 decimale, odrediti optimalan korak h u centralnoj trotačkastoj formuli za diferenciranje

$$f'(x_0)\approx \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h)-f(x_0-h)\right).$$

b) Koristeći prethodnu formulu odrediti približno $f'(4)$, proceniti grešku i uporediti sa tačnom vrednošću.

Rešenje:

a) Poznato je da je u datoj trotačkstoj centralnoj formuli optimalan korak h određen sa

$$h=\sqrt[3]{\frac{3\,\epsilon}{M_3}}, \qquad M_3=\max_{x\geq 1}\left|f'''(x)\right|, \qquad \epsilon\ -\ \text{greška zaokruživanja}$$

Odredimo najpre M_3.

$$f(x)=\sqrt{x}, \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \qquad f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{x^5}};$$

$$x_0\geq 1 \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\leq\frac{3}{8} \quad\Rightarrow\quad M_3=\max_{x_0\leq x\leq x_2}\left|f'''(x)\right|=\frac{3}{8}$$

Kako se vrednosti funkcije uzimaju sa 2 decimale, to znači da je greška zaokruživanja $\epsilon=5\cdot 10^{-3}$.
Zato je :

$$h=\sqrt[3]{\frac{3\,\epsilon}{M_3}}=\sqrt[3]{3\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt[3]{5\cdot 8}}{10}=\frac{\sqrt[3]{40}}{10}\approx 0.34$$

b) Trotačkasta centralna formula za f' (x) je

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6} h^2, \qquad x_0 = 4,$$

$$f'(4) \approx \frac{f(4+0.34) - f(4-0.34)}{0.68} = 0.2502, \qquad |R| \le \frac{M_3}{6} h^2 = \frac{3}{8 \cdot 6} 0.34^2 = 0.007$$

Tačna vrednost: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0.25.$

Zadatak 4. Funkcija $f(x) = \text{erf}\,(x)$ zadata je sledećim vrednostima na segmentu $[0, 2]$:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_k	0.	0.222703	0.428932	0.603856	0.742101	0.842701

,

k	6	7	8	9	10
x_k	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
f_k	0.910314	0.952285	0.976348	0.989091	0.995322

.

Primenom odgovarajućih trotačkastih formula odrediti $f'(0.0)$, $f'(0.8)$, $f'(2.0)$ i $f''(1.4)$.

Napomena: Funkcija $f(x) = \text{erf}(x)$ definisana je na sledeći način:

$$f(x) = erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Zato je $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad f''(x) = \frac{-4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$ pa se rezultati mogu uporediti sa tačnim vrednostima.

Rešenje:

Trotačkaste formule za diferenciranje koje se koriste su :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f(x_0+h) - f(x_0-h)) - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2,$$

$\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$, za tačke u unutrašnjosti intervala,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)) + \frac{f'''(\xi)}{3}h^2, \quad \xi \in (x_0, x_0+2h),$$

za tačke na krajevima intervala,

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2,$$

$\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$, za tačke u unutrašnjosti intervala.

Funkcija je zadata u diskretnim tačkama na segmentu [0, 2] sa korakom $h = 0.2$, pa koristimo samo dostupne podatke.

Nemamo mogućnost za procenu greške.

$$f'(0.0) \approx \frac{1}{2\cdot 0.2}(-3f(0.0) + 4f(0.2) - f(0.4)) = \frac{1}{0.4}(-3\cdot 0. + 4\cdot\ 0.222703 - 0.428392) = 1.15605$$

$$f'(0.8) \approx \frac{1}{2\cdot 0.2}(f(1.0) - f(0.6)) = \frac{1}{0.4}(0.842701 - 0.603856) = 0.597113$$

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{2\cdot(-0.2)}(-3f(2.0) + 4f(1,8) - f(1,6)) =$$

$$-\frac{1}{0.4}(-3\cdot 0.995322 + 4\cdot\ 0.989091 - 0.976348) = 0.014875$$

$$f''(1.4) \approx \frac{1}{0.2^2}(f(1.2) - 2f(1.4) + f(1.6)) = \frac{1}{0.04}(0.910314 - 2\cdot 0.952285 + 0.976348) = -0.4477$$

Imajući u vidu prirodu funkcije $f(x)$, naglašenu u napomeni, tačne vrednosti traženih izvoda su :

$$f'(0.0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.2838,$$

$$f'(0.8) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0.8^2} = 0.594986$$

$$f'(2.0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2^2} = 0.020667$$

$$f''(1.4) = \frac{-4 \cdot 1.4}{\sqrt{\pi}} e^{-1.4^2} = -0.445037$$

Vidi se da je odstupanje najveće u rubnim tačkama segmenta,
gde nisu primenjivane centralne formule za diferenciranje.

Razlog se objašnjava izrazom za grešku u navedenim formulama :
iako je greška u oba slucaja $O\left(h^2\right)$,
ipak je dvostruko veća u formuli za diferenciranje na rubovima segmenta.

Numerička integracija

1. zadatak

Odrediti koeficijente u kvadraturnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f)$$

tako da ona ima maksimalni algebarski stepen tačnosti, ako su čvorovi:

a). $x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{3};$

b. $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}\,.$

Odrediti algebarski stepen tačnosti dobijene formule.
Primeniti kvadraturnu formulu za izračunavanje integrala

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + 2)\, dx, \qquad \int_{0}^{1} \arctan x\, dx.$$

Rešenje

a) U kvadraturnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = A_1 f(-1) + A_2 f\left(-\frac{1}{3}\right) + A_3 f\left(\frac{1}{3}\right) + R_3(f)$$

treba odrediti koeficijente tako da formula bude tačna za sve polinome što je moguće većeg stepena, tj. da bude zadovoljeno $R_3(f) = 0$ za $f(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$
Za 3 nepoznata koeficijenta potrebne su 3 jednačine.

$$R_3(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx - \left(A_1 f(-1) + A_2 f\left(-\frac{1}{3}\right) + A_3 f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$f(x) = x^0 = 1: \quad I_0 = \int_{-1}^{1} dx = 2, \qquad A_1 + A_2 + A_3 = 2;$

$f(x) = x^1 = x: \quad I_1 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0, \qquad A_1(-1) + A_2\left(-\frac{1}{3}\right) + A_3\frac{1}{3} = 0;$

$f(x) = x^2: \quad I_2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}, \quad A_1(-1)^2 + A_2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + A_3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}.$

Sistem linearnih jednačina :

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + A_3 = 2; \\ &-A_1 - \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 = 0; \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{3}{2} \\ &A_1 + \frac{1}{9}A_2 + \frac{1}{9}A_3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Formula :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{1}{2} f(-1) + \frac{3}{2} f\left(\frac{1}{3}\right) + R_3(f)$$

Algebarski stepen tačnosti je najmanje 2. Ispitujemo da li je formula tačna i za polinome većeg stepena.

$f(x) = x^3:$

$$R_3\left(x^3\right) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx - \frac{1}{2}(-1)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{27} = \frac{8}{18} \neq 0,$$

pa je algebarski stepen tacnosti 2.

Primena formule :

$$f(x) = x^4 + 2, \quad \int_{-1}^{1}\left(x^4 + 2\right) dx \approx \frac{1}{2}\left((-1)^4 + 2\right) + \frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 2\right) = \frac{122}{27} = 4.51852$$

Tačna vrednost integrala : $\int_{-1}^{1}\left(x^4 + 2\right) dx = \frac{22}{5} = 4.4.$

Na drugi integral formula ne može da se primeni direktno zbog intervala integracije.
Kako je funkcija

$$f(x) = \arctan|x| = \begin{cases} -\arctan x, & x < 0, \\ \arctan x, & x \geq 0, \end{cases}$$

parna, to je

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} \arctan x\, dx,$$

pa važi :

$$\int_{0}^{1} \arctan x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arctan\left|-1\right| + \frac{3}{2}\arctan\frac{1}{3}\right) = 0.437662$$

Tačna vrednost integrala : $\int_{0}^{1} \arctan x\, dx = \frac{22}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = 0.438824.$

b) Za određivanje koeficijenata u formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = A_1 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + A_2 f(0) + A_3 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + R_3(f)$$

koristimo

$$f(x) = x^0 = 1: \quad I_0 = \int_{-1}^{1} dx = 2, \quad A_1 + A_2 + A_3 = 2;$$

$$f(x) = x^1 = x: \quad I_1 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0, \quad A_1\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + A_2(0) + A_3\sqrt{\frac{3}{5}} = 0;$$

$$f(x) = x^2: \quad I_2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}, \quad A_1\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + A_2(0)^2 + A_3\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

Rešavanjem sistema jednačina :

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2;$$

$$-\sqrt{\frac{3}{5}}\, A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\, A_3 = 0; \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = \frac{5}{9}, \quad A_2 = \frac{8}{9}, \quad A_3 = \frac{5}{9}$$

$$\frac{3}{5} A_1 + \frac{3}{5} A_3 = \frac{2}{3}$$

pa je odgovarajuća kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + R_3(f)$$

Algebarski stepen tačnosti :

$$R_3(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx - \left(\frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9}\cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3\right) = 0,$$

$$R_3(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4\, dx - \left(\frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \frac{8}{9}\cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4\right) = \frac{2}{5} - 2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{25} = 0,$$

$$R_3(x^5) = \int_{-1}^{1} x^5\, dx - \left(\frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + \frac{8}{9}\cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5\right) = 0,$$

$$R_3(x^6) = \int_{-1}^{1} x^6\, dx - \left(\frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + \frac{8}{9}\cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6\right) = \frac{2}{7} - 2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{27}{125} \neq 0,$$

Algebarski stepen tačnosti dobijene formule je 5.

Primena formule :

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + 2)\, dx \approx \frac{5}{9}\left(\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + 2\right) + \frac{8}{9}\cdot(0+2) + \frac{5}{9}\left(\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + 2\right) = 4.4$$

$$\int_{0}^{1} \arctan x\, dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9} \arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \arctan 0 + \frac{5}{9} \arctan \sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0.366143$$

2. zadatak

Odrediti koeficijente u kvadraturnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_1 f(-1) + A_2 f(1) + A_3 f'(-1) + A_4 f'(1) + R(f)$$

tako da ona ima maksimalni algebarski stepen tačnosti.
Odrediti algebarski stepen tačnosti dobijene formule.
Primeniti kvadraturnu formulu za izračunavanje integrala

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx.$$

Rešenje

Koeficijente određujemo iz uslova : $R(f) = 0$ za $f(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, 3$.

$$R(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - (A_1 f(-1) + A_2 f(1) + A_3 f'(-1) + A_4 f'(1));$$

$f(x) = x^0 = 1$, $f'(x) = 0$,

$$I_0 = \int_{-1}^{1} dx = 2, \qquad A_1 + A_2 + A_3 \cdot 0 + A_4 \cdot 0 = 2;$$

$f(x) = x^1 = x$, $f'(x) = 1$,

$$I_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \qquad A_1(-1) + A_2 + A_3 + A_4 = 0;$$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$,

$$I_2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}, \quad A_1(-1)^2 + A_2 \cdot 1^2 + A_3 \cdot 2(-1) + A_4 \cdot 2 = \frac{2}{3};$$

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$,

$$I_3 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0, \quad A_1(-1)^3 + A_2 \cdot 1^3 + A_3 \cdot 3(-1)^2 + A_4 \cdot 3 \cdot 1^2 = 0.$$

Rešavanjem sistema jednačina :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \qquad\qquad &= 2, \\ -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0, \\ A_1 + A_2 - 2A_3 + 2A_4 &= \frac{2}{3}, \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = \frac{1}{3}, \quad A_4 = -\frac{1}{3}, \\ -A_1 + A_2 - 3A_3 + 3A_4 &= 0, \end{aligned}$$

pa je odgovarajuća kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1)) + R(f)$$

Algebarski stepen tačnosti :

$$R(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \left((-1)^4 + 1^4 + \frac{1}{3}\left(4(-1)^3 - 4 \cdot 3\right)\right) = \frac{2}{5} - \left(2 - \frac{4}{3} \cdot 2\right) = \frac{16}{15} \neq 0,$$

pa j e algebarski stepen tačnosti dobijene formule jednak 3.

D a bi se formula primenila za izracunavanje datog integrala, moraju da se usklade oblasti integracije, Potrazimo linearnu smenu oblika $x = at + b$ takvu da segment $[0, \pi]$ prevodi u segment [-1, 1].

$$x = at + b, \quad [0, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad -a + b = 0,$$
$$x = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = \pi/2,$$

$$\Rightarrow \quad a = b = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{dx} = \frac{\pi}{4} \mathrm{dt},$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{4}\right) dt$$

Formulu primenjujemo za izracunavanje poslednjeg integrala.

$$f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{4}\right), \quad f'(t) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(-1) = \frac{\pi}{4}, \quad f'(1) = 0,$$

$$\int_{-1}^1 f(t) \, dt \approx f(-1) + f(1) + \frac{1}{3} (f'(-1) - f'(1))$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{12},$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx \approx \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\pi}{12}\right) = 0.991015$$

3. zadatak

a) Odrediti koeficijente u kvadraturnoj formuli

$$\int_0^1 f(x) \, dx = A (f(0) + f(1)) + B (f'(0) + f'(1)) + C (f''(0) + f''(1)) + R(f)$$

tako da ona ima maksimalni algebarski stepen tačnosti.

b) Odrediti algebarski stepen tačnosti dobijene kvadraturne formule.

c) Primeniti kvadraturnu formulu za izračunavanje integrala

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos x \, dx.$$

Rešenje

a) U kvadraturnoj formuli

$$\int_0^1 f(x) \, dx = A (f(0) + f(1)) + B (f'(0) + f'(1)) + C (f''(0) + f''(1)) + R(f)$$

treba odrediti koeficijente tako da formula bude tačna za sve polinome što je moguće većeg stepena, tj. da bude zadovoljeno $R(\mathrm{f}) = 0$ za $f(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Za 3 nepoznata koeficijenta potrebne su 3 jednačine.

$$R(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - (A(f(0)+f(1)) + B(f'(0)+f'(1)) + C(f''(0)+f''(1)))$$

$f(x) = x^0 = 1,\quad f'(x) = 0,\quad f''(x) = 0,\qquad I_0 = \int_0^1 dx = 1:$

$$A(f(0)+f(1)) + B(f'(0)+f'(1)) + C(f''(0)+f''(1))$$
$$= A(1+1) + B(0+0) + C(0+0) = 2A = 1;$$

$f(x) = x^1 = x,\quad f'(x) = 1,\quad f''(x) = 0,\qquad I_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}:$

$$A(f(0)+f(1)) + B(f'(0)+f'(1)) + C(f''(0)+f''(1))$$
$$= A(0+1) + B(1+1) + C(0+0) = A + 2B = \frac{1}{2};$$

$f(x) = x^2,\quad f'(x) = 2x,\quad f''(x) = 2,\qquad I_2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}:$

$$A(f(0)+f(1)) + B(f'(0)+f'(1)) + C(f''(0)+f''(1))$$
$$= A(0+1) + B(0+2) + C(2+2) = A + 2B + 4C = \frac{1}{3}.$$

Sistem linearnih jednačina :

$$\begin{aligned} &2A = 1 \\ &A + 2B = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{2},\quad B = 0,\quad C = -\frac{1}{24} \\ &A + 2B + 4C = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Formula :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{24}(f''(0)+f''(1)) + R(f)$$

b) Algebarski stepen tačnosti je najmanje 2. Ispitujemo da li je formula tačna i za polinome većeg stepena.

$f(x) = x^3,\quad f'(x) = 3x^2,\quad f''(x) = 6x:$

$$R(x^3) = \int_0^1 x^3\,dx - \left(\frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{24}(f''(0)+f''(1))\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}(0+1) - \frac{1}{24}(0+6)\right) = 0,$$

pa je algebarski stepen tacnosti najmanje 3.

$f(x) = x^4,\quad f'(x) = 4x^3,\quad f''(x) = 12x^2:$

$$R(x^4) = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{24}(f''(0)+f''(1))\right)$$
$$= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}(0+1) - \frac{1}{24}(0+12)\right) = \frac{1}{5} \neq 0,$$

pa je algebarski stepen tacnosti tacno 3.

c) Primena formule :

Treba najpre uskladiti intervale integracije.

Uvedimo u trazeni integral smenu oblika $x = a\,t + b$, koja ce interval $[-\pi/3, \pi/3]$ da prevede u interval [0, 1].

$x = a\,t + b$,

$x = -\pi/3,\ t=0 \;\Rightarrow\; a\cdot 0 + b = -\pi/3 \;\Rightarrow\; b = -\pi/3$,

$x = \pi/3,\ t=1 \;\Rightarrow\; a\cdot 1 + b = \pi/3 \;\Rightarrow\; a = 2\pi/3$.

Smena je : $x = \frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{3},\quad dx = \frac{2\pi}{3} dt$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{3}\right) dt = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$f'(t) = -\frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{3}\right),\quad f''(t) = -\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{3}\right),$$

pa važi :

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos x\, dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 f(t)\, dt \approx \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{24}(f''(0) + f''(1))\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{54}\right) = 1.429991$$

Tačna vrednost integrala : $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos x\, dx = \sqrt{3} = 1.732051$