Operacije sa grafovima (unarne operacije)

13. april, 2020

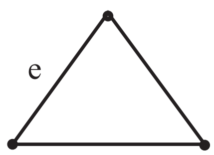
Napomena

Uradjene domaće zadatke je neophodno dostaviti u **rukopisu** na usmenom delu ispita.

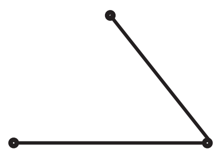
Lekcija 6

Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Definicija 1. *Grana e, $e \in E$, se odstranjuje iz grafa G, što se označava sa $G - e$, tako što se ona ukloni iz grafa a incidentni čvorovi se ne diraju.*

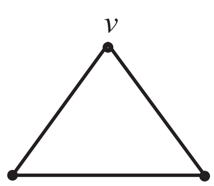


G



G-e

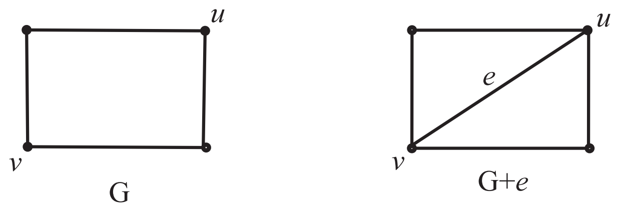
Definicija 2. *Čvor v, $v \in V$, se odstranjuje iz grafa G, što se označava sa $G - \{v\}$, tako što se on ukloni iz grafa zajedno sa svim svojim incidentnim granama.*



G

G-{v}

Definicija 3. *Grana e, $e \notin E$, se dodeljuje grafu G, u oznaci $G+e$, tako što se dva nesusedba čvora u i v, ako postoje, spoje novom granom e.*



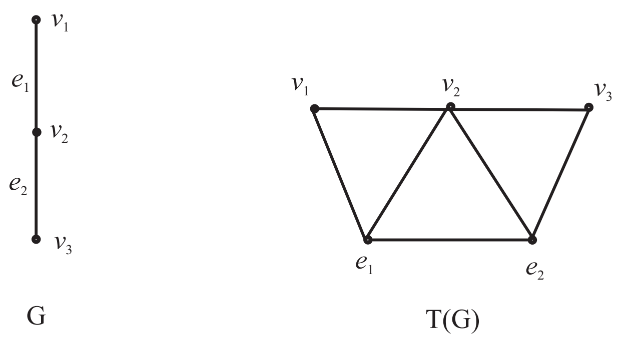
Pitanje: Zbog čega se u ovoj definiciji kaže "ako postoje"?

Definicija 4. *Čvor v, $v \notin V$, se dodeljuje grafu G, u oznaci $G+\{v\}$, tako što se spoji sa jednim (proizvoljnim) čvorom grafa G.*

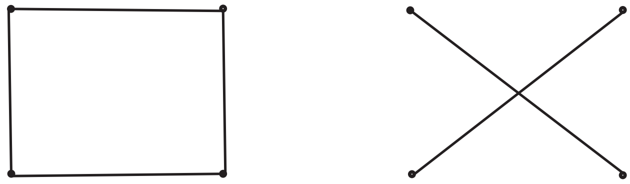
Pitanja:

- Da li je operacija $G+\{v\}$ jedinstvena? Ako nije, kada je jedinstvena?
- Da li operacija $G+\{v\}$ može da se tretira kao binarna operacija?

Definicija 5. *Totalni graf grafa G, je graf $T = T(G) = (V_1, E_1)$ definisan skupom čvorova $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, e_1, e_2, \dots, e_m\}$, pri čemu su dva čvora iz skupa V_1 susedna u grafu $T(G)$ ako i samo ako su odgovarajuća dva čvora susedna u grafu G, dve grane susedne u grafu G, ili su čvor i grana incidentni u grafu G.*



Definicija 6. *Graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, je komplement grafa G pri čemu su dva čvora u i v, iz V, susedna u grafu $\bar{G}$, $\{u, v\} \in \bar{E}$, ako i samo ako nisu susedna u grafu G, $\{u, v\} \notin E$.*



G $\qquad\qquad\qquad$ $\bar{G}$

Definicija 7. *Graf G je samokomplementirajući ako i samo ako je izomorfan svom komplementu $\bar{G}$.*

Teorema 1. *Ako je graf $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 1$, samokomplementirajući, tada je*

$$n \equiv 0(\bmod 4) \quad \textit{ili} \quad n \equiv 1(\bmod 4).$$

Dokaz. Fizičkim preklapanjem grafova $G = (V, E)$, $|V| = n$, i njegovog komplementa $\bar{G} = (V, \bar{E})$, po čvorovima koji su isto označeni, dobija se graf $\hat{G} = (V, \hat{G})$. Ovaj graf ima $|\hat{E}| = \binom{n}{2}$ grana. Kako je graf $G = (V, E)$ samokomplementirajući, važi jednakost $|E| = |\bar{E}| = \frac{1}{2}|\hat{E}|$, tj. $|E| = \frac{n(n-1)}{4}$. To znači da n mora biti oblika

$$n = 4k \quad \text{ili} \quad n = 4k + 1,$$

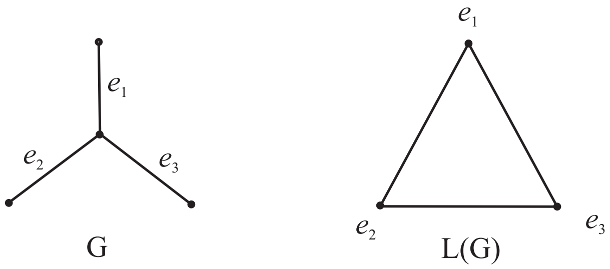
za svako $k \in N$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 2. *Dokazati da za svaki prirodan broj sa osobinom $n \equiv 0(\bmod 4)$ ili $n \equiv 1(\bmod 4)$ postoji samokomplementirajući graf $G = (V, E)$, pri čemu je $|V| = n$.*

Domaći zadatak:

- Naći samokomplementirajući graf $G = (V, E)$, $|V| = n = 4$. Da li je on jedinstven?
- Naći dva samokomplementirajuća grafa $G = (V, E)$ sa osobinom $|V| = 5$.

Definicija 8. *Neka je dat graf $G = (V, E)$. Graf $L(G) = (V_1, E_1)$, $V_1 = E$, pri čemu su dva čvora susedna u $L(G)$ ako i samo ako su odgovarajuće grane susedne u grafu G, naziva se graf grana ili line graf grafa G.*



Postupak za formiranje grafa $L(G)$ za dati graf G, može se opisati pomoću sledećih koraka:

Korak 1. U sredinu svake grane grafa G ucrta se čvor grafa $L(G)$.

Korak 2. Dobijene čvorove spojimo (novim) granama ako leže na susednim granama u grafu G.

Domaći zadatak: Dokazati da su grafovi:

a) $L(K_3)$ i $L(K_{1,3})$

b) K_3 i $L(K_3)$

c) C_n i $L(C_n)$,

d) P_{n-1} i $L(P_n)$

izomorfni.

Teorema 3. *Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $|E| = m \neq 0$. Dokazati da za line graf $L(G) = (V', E')$ važe jednakosti*

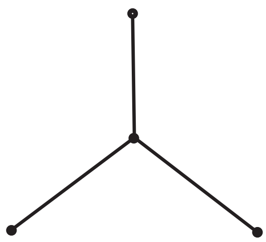
$$|V'| = m \quad i \quad |E'| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i)^2 - m\,.$$

Dokaz. Po samoj definiciji line grafa važi jednakost $|V'| = m$. Neka je v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, proizvoljan čvor grafa G. On je incidentan sa $d(v_i)$ grana u ovom grafu. Na osnovu njih, kada se proglase čvorovima u grafu $L(G)$ formira se tačka $\binom{d(v_i}{2}$ susednih grana u grafu $L(G)$. Ukupan broj grana u grafu $L(G)$ je

$$\begin{aligned}
|E'| &= \sum_{i=1}^{n} \binom{d(v_i)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(v_i)(d(v_i)-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i)^2 - m\,,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Zadatak. Dokazati da ne postoji graf G za koga bi graf $L(G)$, prikazan na slici, bio line graf, $L(G)$.



Kakav se zaključak može izvesti na osnovu ovoga?

Domaći zadatak: Neka je dat graf $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, koji je r-regularan. Dokazati:

a) da je $L(G)$ $2(r-1)$-regularan, da ima $\frac{nr}{2}$ čvorova i $\dfrac{nr(r-1)}{2}$ grana;

b) da je graf $L^2(G) = L(L(G))$ $(2r-3)$-regularan, da ima $\dfrac{nr(r-1)}{2}$ čvorova i $\dfrac{nr(r-1)(2r-3)}{2}$ grana;

c) Analizirati slučaj $r = 2$, i posebno slučaj $r = 2$ i $n = 6$.