МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ

НУМЕРИЧКИ МЕТОДИ У ЛИНЕАРНОЈ АЛГЕБРИ

Садржај

Увод

Нека је дат систем линеарних једначина

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}} \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}} \tag{2}$$

Увод

Теорема

Систем (1) односно (2) има јединствено решење $\mathbf{x}^* = [x_1^* \; x_2^* \; \dots \; x_n^*]^T$ *ако и само ако је матрица* A *регуларна (има инверзну матрицу), тј. ако је* $\det A \neq 0$.

$$A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b}$$

Методи за решавање:

- директни методи
  - Гаусов метод,
  - Гаус–Жорданов метод,
  - факторизациони методи;
- итеративни методи
  - метод просте итерације,
  - Јакобијев метод.

Директни методи

.

Директни методи:
после коначног броја корака се теоријски добија тачно решење.

Због грешке заокруживања међурезултата, добијени коначни резултат је ограничене тачности.

- Грешку је тешко контролисати.
- Грешка се повећава са порастом броја рачунских операција.
- Грешка се повећава са порастом димензије система.

Представници директних метода

- Гаусов метод,
- Гаус–Жорданов метод
- факторизациони методи.

Гаусов метод

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

јединствено решење $\quad \mathbf{x}^* = [x_1^* \; x_2^* \; \ldots \; x_n^*]^T \qquad (\det A \neq 0)$

проширена матрица система:

$$[A \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Гаусов метод

Елементарне трансформације

1. Множење елемената једне врсте (колоне) бројем различитим од 0.
2. Додавање елементима једне врсте (колоне) одговарајућих елемената неке друге врсте (колоне) претходно помножених неким бројем.
3. Замена места двема врстама (колонама).

Применом елементарних трансформација добија се еквивалентни систем једначина, тј. систем који има исто решење као полазни.

Гаусов метод

троугаони систем једначина

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \cdots + r_{1n}x_n &= c_1, \\ r_{22}x_2 + \cdots + r_{2n}x_n &= c_2, \\ &\vdots \\ r_{nn}x_n &= c_n, \end{aligned} \tag{3}$$

$$R\mathbf{x} = \mathbf{c}, \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

јединствено решење

$$\Rightarrow \quad \det R = r_{11}r_{22}\cdots r_{nn} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad r_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Гаусов метод

- $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}$, $b_i = b_i^{(1)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$
- $a_{11}^{(1)} \neq 0$:

Множењем прве једначине са $\boxed{m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$,

и одузимањем од i-те једначине, $\quad i = 2, 3, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}, \\
a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\
a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_3^{(2)}, \\
&\vdots \\
a_{n2}^{(2)} x_2 + a_{n3}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n &= b_n^{(2)},
\end{aligned}
$$

$\boxed{a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}}$, $\quad \boxed{b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}}$, $\qquad i, j = 2, 3, \ldots, n.$

Гаусов метод

- $a_{22}^{(2)} \neq 0$:

Понављањем поступка:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)},\\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)},\\
a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)},\\
&\vdots\\
a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(3)},
\end{aligned}$$

$$\boxed{m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}},$$

$$\boxed{a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}}, \qquad \boxed{b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)}}, \qquad i, j = 3, \ldots, n.$$

- $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + \quad a_{1k}^{(1)}x_k + \quad a_{1,k+1}^{(1)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + \quad a_{2k}^{(2)}x_k + \quad a_{2,k+1}^{(2)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
&\vdots \\
a_{kk}^{(k)}x_k + \quad a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{kn}^{(k)}x_n &= b_k^{(k)} \\
a_{k+1,k}^{(k)}x_k + a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n &= b_{k+1}^{(k)} \\
&\vdots \\
a_{nk}^{(k)}x_k + \quad a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{nn}^{(k)}x_n &= b_n^{(k)}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}}, \qquad i = k+1, k+2, \ldots, n,
$$

Гаусов метод

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + \quad a_{1k}^{(1)}x_k + \quad a_{1,k+1}^{(1)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\
a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + \quad a_{2k}^{(2)}x_k + \quad a_{2,k+1}^{(2)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\
&\vdots \\
a_{kk}^{(k)}x_k + \quad a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{kn}^{(k)}x_n &= b_k^{(k)}, \\
a_{k+1,k+1}^{(k+1)}x_{k+1} + \cdots + a_{k+1,n}^{(k+1)}x_n &= b_{k+1}^{(k+1)} \\
&\vdots \\
a_{n,k+1}^{(k+1)}x_{k+1} + \cdots + \quad a_{nn}^{(k+1)}x_n &= b_n^{(k+1)}
\end{aligned}
$$

где је

$$
\boxed{a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}}, \qquad \boxed{b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}}, \qquad i, j = k+1, \ldots, n
$$

Гаусов метод

- $a_{kk}^{(k)} \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$

После $n-1$ корака:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots + \quad a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n)} x_n &= b_n^{(n)}, \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}},$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} \left(b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k)} x_i \right), \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$$

$\boxed{a_{kk}^{(k)}}$ — главни елементи или пивоти

Гаусов метод – пивотирање

Дијагонално–доминантна матрица

Матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ је дијагонално–доминантна ако важи

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при чему бар за једно $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи строга неједнакост.
Матрица A је строго дијагонално–доминантна ако важи

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако је матрица A строго дијагонално–доминантна, тада је

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

па је Гаусов метод применљив.

Гаусов метод – пивотирање

Пример

$$0.003x_1 + 60x_2 = 60.03,$$
$$5x_1 - 6x_2 = 44;$$

$x_1 = 10,$
$x_2 = 1,$
тачно

$x_1 = 50,$
$x_2 = 1,$
приближно

Модификација Гаусовог метода: Гаусов метод са парцијалним избором главног елемента

Пре $k-$тог корака:

- Одредити $r \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ тако да је $a_{rk}^{(k)} = \max\limits_{k \le i \le n} |a_{ik}|$.
- Заменити места $k-$тој и $r-$тој врсти.
- Наставити са Гаусовим алгоритмом.

Напомена. Ако се бира $a_{rs}^{(k)} = \max\limits_{k \le i,j \le n} |a_{ij}|$ и мењају места и врстама и колонама, добија се Гаусов метод са тоталним избором главног елемента.

Гаус–Жорданов метод

$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \to \qquad D\mathbf{x} = \mathbf{c},$

D — дијагонална матрица

У k-том кораку систем има облик

$$\begin{array}{rrrrrrl}
a_{11}^{(1)}x_1 & & + & a_{1k}^{(k)}x_k + & a_{1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + & a_{1n}^{(k)}x_n & = b_1^{(k)}, \\
& a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{2k}^{(k)}x_k + & a_{2,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + & a_{2n}^{(k)}x_n & = b_2^{(k)}, \\
& & & & & \vdots & \\
& & & a_{kk}^{(k)}x_k + & a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + & a_{kn}^{(k)}x_n & = b_k^{(k)}, \\
& & & a_{k+1,k}^{(k)}x_k + & a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + & a_{k+1,n}^{(k)}x_n & = b_{k+1}^{(k)}, \\
& & & & & \vdots & \\
& & & a_{nk}^{(k)}x_k + & a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \cdots + & a_{nn}^{(k)}x_n & = b_n^{(k)}.
\end{array}$$

Гаус–Жорданов метод

- $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

Множењем k-те једначине са $\boxed{m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}}$

и одузимањем од i-те једначине, , $\quad i = 1, 2, \ldots, n, \; i \neq k$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad & + a_{1,k+1}^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a_{1n}^{(k+1)} x_n = b_1^{(k+1)}, \\
a_{22}^{(2)} x_2 \qquad\qquad\qquad & + a_{2,k+1}^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a_{2n}^{(k+1)} x_n = b_2^{(k+1)}, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{kk}^{(k)} x_k & + a_{k,k+1}^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a_{kn}^{(k+1)} x_n = b_k^{(k+1)}, \\
& \quad a_{k+1,k+1}^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a_{k+1,n}^{(k+1)} x_n = b_{k+1}^{(k+1)}, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \quad a_{n,k+1}^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a_{nn}^{(k+1)} x_n = b_n^{(k+1)},
\end{aligned}
$$

Гаус–Жорданов метод

$\boxed{a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}}$, $\boxed{b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}}$,
$i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i, j \neq k.$

У n-том кораку:

$$a_{kk}^{(k)} x_k = b_k^{(n)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

дијагонални систем

$$x_k = \frac{b_k^{(n)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

Гаус–Жорданов метод

И код Гаус-Жордановог метода услов за реализацију је

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

што се увек може обезбедити пермутацијама једначина или промењљивих ако је $\det A \neq 0$.

Иако је добијени дијагонални систем једноставнији за решавање од троугаоног, ипак је за примену Гаус-Жордановог метода потребан већи број операција него за примену Гаусовог.

Факторизациони методи се заснивају на представљању матрице система у облику производа неких матрица погодног облика, а затим на сукцесивном решавању нових система једначина.

LR-факторизација (или LU-факторизација) матрице : представљање матрице у облику производа једне доње-троугаоне (лево-троугаоне) и једне горње-троугаоне (десно-троугаоне) матрице.

$$A = LR, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

На тај начин, систем једначина постаје

$$LR\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

па се може решавати у два корака, решавањем два троугаона система

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \qquad R\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

најпре

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \qquad y_i = \frac{1}{l_{ii}}\Big(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k\Big), \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

а затим

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{r_{ii}}\Big(y_i - \sum_{i=i+1}^{n} r_{ik} x_k\Big), \quad i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$$

LR-факторизација

Теорема

Матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ има LR-факторизацију ако и само ако су све подматрице A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, матрице A, састављене од њених првих k врста и колона, регуларне.

Матрице L и R имају укупно $2n^2$ елемената. Приметимо да су познати:

- елементи матрице L изнад главне дијагонале ($l_{ij} = 0$ за $j > i$),
- елементи матрице R испод главне дијагонале ($r_{ij} = 0$ за $i > j$) редом.

LR-факторизација

Непознатих елемената

- $l_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, i,$ и
- $r_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = i, i+1, \ldots, n$

има по

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n(n+1)/2$$

у свакој од матрица L и R, дакле $n^2 + n$ укупно.

Они се могу одредити изједначавањем елемената производа LR са елементима матрице A, којих има n^2:

LR-факторизација

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}r_{11} & l_{11}r_{12} & \cdots & l_{11}r_{1n} \\ l_{21}r_{11} & l_{21}r_{12} + l_{22}r_{22} & & l_{21}r_{1n} + l_{22}r_{2n} \\ \vdots & & & \\ l_{n1}r_{11} & l_{n1}r_{12} + l_{n2}r_{22} & & l_{n1}r_{1n} + l_{n2}r_{2n} + \cdots + l_{nn}r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Према томе, када LR-факторизација матрице постоји, она није јединствена. Ако је, међутим, унапред задато n елемената, на пример $r_{ii} (\neq 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, остали елементи се могу одредити сукцесивно.

LR-факторизација

Из прве колоне: $\quad l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$

из прве врсте: $\quad r_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$

из друге колоне: $\quad l_{i2} = \dfrac{1}{r_{22}}\big(a_{i2} - l_{i1}r_{12}\big), \quad i = 2, 3, \ldots, n,$

из друге врсте: $\quad r_{2j} = \dfrac{1}{l_{22}}\big(a_{1j} - l_{21}r_{1j}\big), \quad j = 3, \ldots, n.$

Настављајући поступак, добијају се елементи j-те колоне матрице L

$$l_{ij} = \frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}r_{kj}\Big), \quad i = 2, \ldots, n,$$

а затим и елементи i-те врсте матрице R

$$r_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}r_{kj}\Big), \quad j = 3, \ldots, n.$$

LR-факторизација

Обједињујући претходно речено добијамо формуле за сукцесивно одређивање елемената у LR-факторизацији матрице A:

$$
\begin{aligned}
&l_{11} = \frac{a_{11}}{r_{11}}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad r_{1i} = \frac{a_{1i}}{l_{11}},\\
&l_{ii} = \frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{ki}\Big),\\
&l_{ji} = \frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} r_{ki}\Big), \quad r_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}\Big),\\
&\quad i = 2, 3 \ldots, n, \quad j = i+1, i+2, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

метод Челеског (Cholesky)

У пракси се најчешће узима $r_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, или $l_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

LR-факторизација

Метод чолеског посебно је погодан за решавање система чија је матрица симетрична и позитивно-дефинитна.

Тада је $L = R^T$, тј. користи се факторизација $A = R^T R$.

Како је $l_{ij} = r_{ji}$, формуле (5) добијају форму

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{1i} = \frac{a_{1i}}{r_{11}},$$

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}, \quad r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}\Big),$$

$$i = 2, 3 \ldots, n, \quad j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Ова варијанта метода Чолеског позната је и под именом *метод квадратног корена*.

LR-факторизација

За LR-факторизацију матрице може да се користи и Гаусов алгоритам.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad R = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\ m_{ik} &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad i = k+1, \ldots, n, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad i, j = k+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

LR-факторизација

Покажимо да су елиминациони фактори m_{ik}, $i = 2, 3, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, i-1$, недијагонални елементи матрице L са јединичном дијагоналом, тј.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$LR = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

LR-факторизација

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ m_{21}a_{11}^{(1)} & m_{21}a_{12}^{(1)} + a_{22}^{(2)} & & m_{21}a_{1n}^{(1)} + a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ m_{n1}a_{11}^{(1)} & m_{n1}a_{12}^{(1)} + m_{n2}a_{22}^{(2)} & & m_{n1}a_{1n}^{(1)} + m_{n2}a_{2n}^{(2)} + \cdots + a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Како је

$$m_{ik}a_{kj}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad i, j = k+1, \ldots, n,$$

за елемент на месту (i, j) у матрици LR добијамо следеће:

LR-факторизација

за $\quad i \leq j:$

$$(LR)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} r_{kj} = \sum_{k=1}^{i} m_{ik} a_{kj}^{(k)} = \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} a_{kj}^{(k)} + a_{ij}^{(i)}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} \left(a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(k+1)}\right) + a_{ij}^{(i)}$$

$$= a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)} + a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(3)} + \cdots + a_{ij}^{(i-1)} - a_{ij}^{(i)} + a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} = a_{ij},$$

за $\quad i > j:$

$$(LR)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} r_{kj} = \sum_{k=1}^{j} m_{ik} a_{kj}^{(k)} = \sum_{k=1}^{j-1} \left(a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(k+1)}\right) + \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} a_{jj}^{(j)}$$

$$= a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)} + a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(3)} + \cdots + a_{ij}^{(j-1)} - a_{ij}^{(j)} + a_{ij}^{(j)} = a_{ij}^{(1)} = a_{ij}.$$

Израчунавање детерминанте

Применом LR-факторизације лако се израчунава детерминанта матрице.

$$A = LR, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \det(LR) = \det L \;\det R = l_{11} l_{22} \cdots l_{nn} \cdot r_{11} r_{22} \cdots r_{nn}.$$

Факторизациони методи

- Гаусов метод без избора главног елемента:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ LR\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ R\mathbf{x} = \mathbf{y}, &\quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

- Гаусов метод са избором главног елемента:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ PA\mathbf{x} &= P\mathbf{b}, \\ LR\mathbf{x} &= \mathbf{b}', \\ R\mathbf{x} = \mathbf{y}, &\quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

  P – пермутациона матрица, идентификује промену места врстама

Инверзна матрица

Ако је A регуларна матрица, њена инверзна матрица A^{-1} је она за коју важи

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

A^{-1} — решење матричне једначине

$$AX = I.$$

$$X = [\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \ldots \ \ \mathbf{x}_n], \quad I = [\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{e}_n],$$

$$A[\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{x}_n] = [\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{e}_n],$$
$$[A\mathbf{x}_1 \ \ A\mathbf{x}_2 \ \ \cdots \ \ A\mathbf{x}_n] = [\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{e}_n],$$

$$\mathbf{x}_j : \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Инверзија матрица, директни методи

Гаусов алгоритам – n троугаоних система

$$AX = I.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & & x_2^n \\ & \vdots & & \\ x_n^1 & x_n^2 & & x_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \to R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}:$$

$$R\mathbf{x}^j = \mathbf{e}_j', \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$\mathbf{e}_j'$ – трансформисан $\mathbf{e}_j$.

Инверзија матрица, директни методи

Гаус-Жорданов метод – без решавања система једначина

$$
[\,A \mid I\,] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & 0 & 0 & & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & e'_{11} & e'_{12} & \cdots & e'_{1n} \\
0 & a_{22}^{(2)} & & 0 & e'_{21} & e'_{22} & & e'_{2n} \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & & a_{nn}^{(n)} & e'_{n1} & e'_{n2} & & e'_{nn}
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
0 & 1 & & 0 & c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & & 1 & c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn}
\end{array}\right] = [\,I \mid A^{-1}\,].
$$

О матрицама

Скуп свих квадратних реалних матрица типа $n \times n$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$\mathcal{M}_{n\times n} = \left\{ [a_{ij}]_{n\times n} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R},\; i,j = 1,2,\ldots,n \right\}.$$

Сопствене вредности и сопствени вектори

Скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ и вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, су сопствена вредност и сопствени вектор матрице $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ако важи

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Спектар матрице, спектрални радијус

Скуп $Sp(A)$ свих сопствених вредности матрице A зове се спектар, а

$$\rho(A) = \max \left\{ |\lambda| \;\middle|\; \lambda \in Sp(A) \right\}$$

је спектрални радијус матрице A.

О матрицама

Карактеристични полином

Карактеристични полином матрице $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ је полином степена n дефинисан са $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Теорема

Сопствене вредности матрице A су нуле њеног карактеристичног полинома.

Напомена. Матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ може имати највише n различитих сопствених вредности.

Теорема

Ако је λ сопствена вредност матрице A, тада је λ^k $(k \in \mathbb{N})$ сопствена вредност матрице A^k. Ако је A регуларна, тада је $1/\lambda$ сопствена вредност матрице A^{-1}.

Норма у векторском простору

Норма

Нека је X векторски простор над пољем скалара $\mathbb{R}$. Функција $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ таква да за свако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и свако $\lambda \in \mathbb{R}$ важи

$$
\begin{array}{ll}
1^\circ & \|\mathbf{x}\| \geq 0, \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\
2^\circ & \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \\
3^\circ & \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,
\end{array}
$$

зове се норма, а $(X, \|\cdot\|)$, или само X, је *нормирани простор*.

Векторске норме

Норме вектора у $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}} \qquad (p \geq 1).$$

$$p = 1 : \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$ (Менхетн норма)

$$p = 2 : \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$ (Еуклидска норма)

$$p \to \infty : \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$ (максимум норма)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Матричне норме

Норме матрица у $\mathcal{M}_{n\times n}$:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \quad - \quad \text{Фробениусова норма}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{sp} = \sigma(A) = \sqrt{\max|\lambda(A^T A)|}, \quad \text{спектрална норма}$$

$\lambda(A^T A)$ сопствене вредности $A^T A$

Норме вектора и матрица

Однос норме вектора и матрица

Норма матрице $\|A\|$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, је сагласна са нормом вектора $\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ако за произвољне $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\| &\leq \|A\|\|\mathbf{x}\|, \\ \|AB\| &\leq \|A\|\|B|. \end{aligned}$$

Ако је норма $\|A\|$ сагласна са нормом $\|\mathbf{x}\|$ и ако за сваку матрицу $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ постоји вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, такав да је

$$\|A\mathbf{x}\| = \|A\|\|\mathbf{x}\|,$$

тада је норма матрице $\|A\|$ потчињена норми вектора (индукована нормом вектора) $\|\mathbf{x}\|$.

Норме вектора и матрица

Пример

$$\mathbf{x} = [1 \ -3 \ -5]^T, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 1 + |-3| + |-5| = 9,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35} \approx 5.92,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{1, |-3|, |-5|\} = 5.$$

$$\|A\|_1 = \max\{|1| + |-2| + 0, |-2| + |-1| + |3|, 0 + |3| + |-5|\} = 8,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-1|^2 + |-5|^2 + 2|-2|^2 + 2|3|^2} \approx 7.28,$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1| + |-2| + 0, |-2| + |-1| + |3|, 0 + |3| + |-5|\} = 8,$$

$$\|A\|_{sp} = \max\{|-6.73|, |2.63|, |-0.90|\} \approx 6.73.$$

Конвергенција векторских низова

Итеративни методи за решавање система $Ax = \mathbf{b}$ заснивају се на формирању низа вектора $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка тачном решењу $\mathbf{x}^*$.

Конвергенција низова вектора

Низ вектора $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}^{(k)} = [x_1^{(k)} \ \ x_2^{(k)} \ \ \dots \ \ x_n^{(k)}]^T \in \mathbb{R}^n$, конвергира ка вектору $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ \ x_2^* \ \ \dots \ \ x_n^*]^T \in \mathbb{R}^n$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*,$$

ако је $\lim_{n\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n.$

Низ вектора $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира ка вектору $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ \ x_2^* \ \ \dots \ \ x_n^*]^T \in \mathbb{R}^n$ ако је

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| = 0,$$

Конвергенција матричних низова

Конвергенција низова матрица

Низ матрица $\{A^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $A^{(k)} = \left[a_{ij}^{(k)}\right]_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, конвергира ка матрици $A^* = \left[a_{ij}^*\right]_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} A^{(k)} = A^*,$$

ако је $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^*, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$

Низ матрица $\{A^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира ка матрици $A^* = \left[a_{ij}^*\right]_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ако је

$$\lim_{n\to\infty} \|A^{(k)} - A^*\| = 0,$$

где је $\|\cdot\|$ произвољно изабрана норма у $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Конвергенција матричних редова

Теорема

Нека је $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. *Ако је* $\|A\| < 1$, *где је* $\|\cdot\|$ *произвољно изабрана норма у* $\mathcal{M}_{n\times n}$, *тада је* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$ $(O = [\,0\,]_{n\times n})$.

Теорема

Нека је $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. *Тада важи:* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O \quad \Leftrightarrow \quad \rho(A) < 1.$

Теорема

Нека је $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. *Матрични ред* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ *конвергира ако и само ако је* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$. *Тада важи*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots = (I - A)^{-1}.$$

Итеративни методи

За решавање система једначина

$$Ax = \mathbf{b} \tag{6}$$

формира се итеративни низ вектора $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка тачном решењу $\mathbf{x}^*$.

$$\mathbf{x}^{(k)} = F_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{x}^{(0)} - \text{ почетна вредност}$$

Заустављање процеса: приближно решење $\mathbf{x}^{(k)}$ ако је

$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < \varepsilon$,

$\varepsilon > 0$ унапред задата тачност

$\|\cdot\|$ изабрана норма у $\mathbb{R}^n$.

Ако итеративна функција F_k не зависи од k, метод је старционаран.

Метод просте итерације

Најједноставнији стационарни итеративни метод за решавање система линеарних једначина је метод просте итерације или општи итеративни метод.

Ако се полазни систем представи у облику

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \beta, \tag{7}$$

тада се низ формира рекурзивно као

$$\mathbf{x}^{(k)} = B\mathbf{x}^{(k-1)} + \beta, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где је $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ почетна вредност. У пракси се најче71е узима $\mathbf{x}^{(0)} = \beta$.

Напомена. Ако се успостави аналогија са решавањем обичних једначина $f(x) = 0$, тј. $x = \Phi(x)$, одговарају́а итеративна функција је $\Phi(x) = ax + b$. Услов конвергенције је $|\Phi'(x)| = |a| < 1$.

Метод просте итерације

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + \beta_1,\\
x_2^{(k)} &= b_{21}x_1^{(k-1)} + b_{22}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + \beta_2,\\
&\vdots\\
x_n^{(k)} &= b_{n1}x_1^{(k-1)} + b_{n2}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k-1)} + \beta_n,\\
k &= 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

$$
x_1^{(0)} = \beta_1,\ x_2^{(0)} = \beta_2,\ \ldots\ ,\ x_n^{(0)} = \beta_n.
$$

Теорема

Метод просте итерације конвергира ка тачном решењу система (7) ако је $\|B\| < 1$, где је $\|\cdot\|$ произвољно изабрана норма у $\mathcal{M}_{n\times n}$ сагласна са одговарајућом нормом вектора у $\mathbb{R}^n$.

Доказ. За произвољно изабрани почетни вектор $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ важи

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= B\mathbf{x}^{(0)} + \beta,\\
\mathbf{x}^{(2)} &= B\mathbf{x}^{(1)} + \beta = B\big(B\mathbf{x}^{(0)} + \beta\big) + \beta = B^2\mathbf{x}^{(0)} + (I + B)\beta,\\
&\ \vdots\\
\mathbf{x}^{(k)} &= B^k\mathbf{x}^{(0)} + (I + B + \cdots + B^{k-1})\beta, \quad k = 3, 4, \ldots .
\end{aligned}$$

С обзиром на услов $\|B\| < 1$, важи

$$\lim_{k\to\infty} B^k = O \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} B^k = I + B + B^2 + \cdots = (I - B)^{-1},$$

па се у граничном процесу добија

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} &= \lim_{k\to\infty} \Big(B^k\mathbf{x}^{(0)} + \big(I + B + \cdots + B^{k-1}\big)\beta\Big)\\
&= \lim_{k\to\infty} B^k\mathbf{x}^{(0)} + \big(I + B + B^2 + \cdots\big)\beta = (I - B)^{-1}\beta.
\end{aligned}$$

Добијени вектор $\mathbf{x}^*$ је тачно решење система, јер важи

$$\mathbf{x}^* = (I - B)^{-1}\beta \quad \Rightarrow \quad (I - B)\mathbf{x}^* = \beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^* = B\mathbf{x}^* + \beta. \quad \square$$

Метод просте итерације

Теорема

Ако је $\|B\| < 1$, *где је* $\|\cdot\|$ *произвољно изабрана норма у* $\mathcal{M}_{n\times n}$ *сагласна са одговарајућом нормом вектора у* $\mathbb{R}$, *за произвољно изабрани почетни вектор* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *и произвољно* $k \in \mathbb{N}$ *важи:*

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \|B\| \, \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^*\|,$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \|B\|^k \, \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|,$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \|B\|^k \, \|\mathbf{x}^{(0)}\| + \frac{\|B\|^k \, \|\beta\|}{1 - \|B\|}.$$

Специјално, ако је $\mathbf{x}^{(0)} = \beta$, *важи* $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \dfrac{\|B\|^{k+1} \, \|\beta\|}{1 - \|B\|}.$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|,$$

Метод просте итерације

Теорема

Метод просте итерације конвергира ка тачном решењу система (7) ако и само ако су све сопствене вредности матрице B по модулу мање од 1.

Теорема

Метод просте итерације конвергира ка тачном решењу система (7) ако и само ако за све нуле $\lambda_i(B)$ полинома

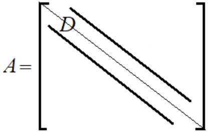
$$P(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

важи $|\lambda_i(B)| < 1.$

Јакобијев метод

Јакобијев метод је специјалан случај метода просте итерације.

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \big(D + (A - D)\big)\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\Leftrightarrow \quad D\mathbf{x} = (D - A)\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \underbrace{D^{-1}(D - A)}_{B}\mathbf{x} + \underbrace{D^{-1}\mathbf{b}}_{\beta}.
\end{aligned}
$$



Изражавањем непознате x_i из i–те једначине:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \qquad\qquad - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k-1)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}}, \\
x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{11}} x_1^{(k-1)} \qquad\qquad - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}}, \\
&\ \vdots \\
x_n^{(k)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k-1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k-1)} - \cdots \qquad\qquad + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}
$$

Јакобијев метод

Теорема

Јакобијев метод конвергира ка тачном решењу система (6) ако и само ако за све нуле λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, *једначине*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

важи $|\lambda_i| < 1$.

Доказ: Карактеристични полином итеративне матрице је

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\big(D^{-1}(D - A) - \lambda D^{-1} D\big) \\ &= \det\left(D^{-1}\big((D - A) - \lambda D\big)\right) = -\det D^{-1} \det\big((A - D) + \lambda D\big), \end{aligned}$$

а његове нуле су решења једначине $\det\big((A - D) + \lambda D\big) = 0$ □

Гаус–Зајделов метод

Од метода просте итерације

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + \beta_1,\\
x_2^{(k)} &= b_{21}x_1^{(k-1)} + b_{22}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + \beta_2,\\
&\ \vdots\\
x_n^{(k)} &= b_{n1}x_1^{(k-1)} + b_{n2}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k-1)} + \beta_n,
\end{aligned}$$

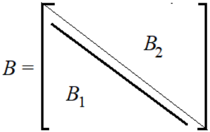
кори71ењем подацима израчунатим у текућој итерацији добија се Гаус–Зајделов метод:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + \beta_1,\\
x_2^{(k)} &= b_{21}\boxed{x_1^{(k)}} + b_{22}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + \beta_2,\\
&\ \vdots\\
x_n^{(k)} &= b_{n1}\boxed{x_1^{(k)}} + b_{n2}\boxed{x_2^{(k)}} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k-1)} + \beta_n.
\end{aligned}$$

Гаус–Зајделов метод

Матрично-векторски запис:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= B_1\mathbf{x}^{(k)} + B_2\mathbf{x}^{(k-1)} + \beta,\\
(I - B_1)\mathbf{x}^{(k)} &= B_2\mathbf{x}^{(k-1)} + \beta,\\
\mathbf{x}^{(k)} &= \underbrace{(I - B_1)^{-1}B_2}_{B'}\,\mathbf{x}^{(k-1)} + \underbrace{(I - B_1)^{-1}\beta}_{\beta'},
\end{aligned}$$



Теорема

Гаус-Зајделов метод конвергира ка тачном решењу система (7) ако и само ако за све нуле λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, једначине

$$\begin{vmatrix}
b_{11} - \lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\
\lambda b_{21} & b_{22} - \lambda & & b_{2n}\\
\vdots & & & \\
\lambda b_{n1} & \lambda b_{n2} & & b_{nn} - \lambda
\end{vmatrix} = 0$$

важи $|\lambda_i| < 1$.

Гаус–Зајделов метод, варијанта Некрасова

Гаус–Зајделовим приступом Јакобијевом методу кори71ењем подацима израчунатим у текућој итерацији добија се Гаус–Зајделов метод, варијанта Некрасова:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \phantom{-\frac{a_{21}}{a_{11}}\boxed{x_1^{(k)}}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k-1)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}}, \\
x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{11}} \boxed{x_1^{(k)}} \phantom{- \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k-1)}} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}}, \\
&\vdots \\
x_n^{(k)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} \boxed{x_1^{(k)}} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \boxed{x_2^{(k)}} - \cdots + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}
$$

Гаус–Зајделов метод, варијанта Некрасова

Теорема

Гаус-Зајделов метод, варијанта Некрасова, конвергира ка тачном решењу система (6) ако и само ако за све нуле λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *једначине*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

важи $|\lambda_i| < 1$.

Дијагонално–доминантне матрице и конвергенција метода

Дијагонално–доминантна матрица

Матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ је дијагонално–доминантна ако важи

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при чему бар за једно $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи строга неједнакост.
Матрица A је строго дијагонално–доминантна ако важи

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

Теорема

Ако је матрица система једначина (6) строго дијагонално–доминантна, тада Јакобијев метод и Гаус–Зајделов метод, варијанта Некрасова, конвергирају ка тачном решењу система

Итеративни методи за инверзија матрица

X_0 — почетна апроксимација за матрицу A_{-1}

$F_0 = I - AX_0$ — "одступање" од тачне матрице

$\boxed{\|F_0\| < 1}$:

$$AX_0 = I - F_0,$$
$$X_0 = A^{-1}(I - F_0),$$
$$A^{-1} = X_0(I - F_0)^{-1}.$$

$$(I - F_0)^{-1} = I + F_0 + F_0^2 + \cdots + F_0^{r-1} + F_0^r + \cdots ,$$

$$A^{-1} \approx X_1 = X_0(I + F_0 + F_0^2 + F_0^3 + \cdots + F_0^{r-1}).$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k(I + F_k + F_k^2 + \cdots + F_k^{r-1}), \\ F_k &= I - AX_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ X_0 &\in \mathcal{M}_{n\times n} : \quad \|I - AX_0\| < 1 \end{aligned}}$$

ред конвергенције

r

$r = 2:$

$$X_{k+1} = X_k(I + F_k) = X_k(I + I - AX_k) = X_k(2I - AX_k).$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), & & k = 0, 1, 2, \ldots \\ X_0 & - & \text{почетна вредност} \end{array}}$$

шулцов метод

Теорема

Нека је X_0 матрица таква да је $\|I - AX_0\| \leq q < 1$. Тада низ матрица $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира и важи

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1},$$

$$\|X_k - A^{-1}\| \leq \|I - AX_0\|^{2^k} \frac{\|X_0\|}{1 - \|I - AX_0\|}.$$

Стабилност система линеарних једначина

Линеарни систем је стабилан уколико малим променама улазних параметара (елементи матрице система и вектора слободних чланова) одговарају мале промене решења.

Пример

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4, \\ 2x + 4.01y &= 8.01 \end{aligned} \qquad (x, y) = (2, 1)$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4, \\ 2x + 4.01y &= 8.1 \end{aligned} \qquad (x, y) = (-16, 10)$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix} = 0.01$$

Стабилност система линеарних једначина

Слабо условљени системи

Системи чија су решења нестабилна у односу на мале промене коефицијената зову се слабо условљени системи
($\mathrm{ill-conditioned\ systems}$).

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ако је матрица A сингуларна, тада за неке векторе $\mathbf{b}$ решење система не постоји, а за друге постоји али није јединствено. Уколико је матрица система "ближа" сингуларној, због малих промена улазних параметара она може постати сингуларна.

Детерминанта матрице система није поуздана мера стабилности система једначина, али је први знак његове слабе условљености.

Фактор условљености система

$\mathbf{x}^*$ — тачно решење система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
$\mathbf{x}'$ — приближно решење

Приближно решење $\mathbf{x}'$ је уствари тачно решење неког другог система

$$A\mathbf{x}' = \mathbf{b}', \qquad \mathbf{b}' \neq \mathbf{b}.$$

Одузимањем:

$$A(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \mathbf{b}' - \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} \leq A^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| = \|A^{-1}\| \, \|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\|,$$

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{x}\|,$$

па важи

$$\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{\|A\| \, \|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \, \frac{\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \, \frac{\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Фактор условљености система

Фактор условљености система

Мера стабилности система једначина је фактор условљености система (цондитион нумбер):

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

где је A матрица система.

Фактор условљености зависи од избора норме, али је увек $k(A) \geq 1$.

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = k(A).$$

Уколико је $k(A)$ много већи од 1, систем је слабо условљен.

Фактор условљености система

Пример

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4, \\ 2x + 4.01y &= 8.01 \end{aligned} \qquad (x, y) = (2, 1)$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| :$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix}, \qquad \|A\|_\infty = \max\{1 + 2, 2 + 4.01\} = 6.01,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 401 & -200 \\ -200 & 100 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_\infty = \max\{401 + 200, 200 + 100\} = 601,$$

$$k(A) = 3612 \gg 1.$$