Задача 0.

Берсенева	N	=	9
Маргарита	M	=	9
Сергеевна	L	=	9

Задача 1.

a) Для одного кольца:

1. Переставляем кольцо с 1 стержня на 2.
2. Затем со 2 на 3 стержень.

b) Для двух колец:

1. Переставляем маленькое кольцо с 1 стержня на 2.
2. Затем его же со 2 на 3.
3. Переставляем большое кольцо с 1 на 2.
4. Переставляем маленькое кольцо с 3 на 2.
5. Затем его же со 2 на 1.
6. Переставляем большое кольцо со 2 на 3.
7. Переставляем маленькое кольцо с 1 на 2.
8. Затем его же со 2 на 3.

c) Для трех колец:

1. Переставляем маленькое кольцо с 1 стержня на 2.
2. Затем его же со 2 на 3.
3. Переставляем среднее кольцо с 1 на 2.
4. Переставляем маленькое кольцо с 3 на 2.
5. Затем его же со 2 на 1.
6. Переставляем среднее кольцо со 2 на 3.
7. Переставляем маленькое кольцо с 1 на 2.
8. Затем его же со 2 на 3.

   Заметим, что порядок шагов и сами шаги 1. - 8. оказались идентичны с пунктом b). Примем их за базу.
9. Переставляем большое кольцо с 1 стержня на 2.

10. - 17. – база (переставлем маленькое и среднее кольцо обратно с 3 стержня на 1 за 8 шагов)
18. Переставляем большое кольцо со 2 стержня на 3.
19. - 26. – база (переставлем маленькое и среднее кольцо с 1 стержня обратно на 3 за 8 шагов)

d)
1. Переставляем (n - 1) кольца с 1 стержня на 2.
2. Переставляем (n - 1) кольца со 2 стержня на 3.
3. Переставляем самое большое (n) кольцо на 2 стержень.
4. Переставляем (n - 1) кольца с 3 стержня на 2.
5. Переставялем (n - 1) кольца со 2 стержня на 1.
6. Переставляем самое большое (n) кольцо на 3 стержень.
7. Переставляем (n - 1) кольца с 1 стержня на 2.
8. Переставляем (n - 1) кольца со 2 стержня на 3.

e) $3^n - 1$, где

3	- количество стержней (не можем переставлять через один)
n	- количество дисков
(- 1)	- не считаем начальное положение за перестановку

f) Сведем проанализированные случаи в таблицу:

диски	1	2	3
ходы	1	8	26

На основе данных из этой таблицы выводится формула представленная выше.

Задача 2.

a) Так как на сверчок сидит на первой шпале, то начнем рассматривать ситуации с n = 2:
$F_2 = 1$ (только один вариант прыгнуть на соседнюю шпалу)
$F_3 = 2$ (два варианта, потому что сверчок может перепрыгнуть вторую шпалу, а может на нее прыгнуть тоже)
$F_4 = 3$ и так далее.

Нетрудно заметить, что сумма способов складывается из суммы двух предыдущих способов, т. е. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Посчитаем F_n при $n = 2L = 2 \cdot 9 = 18$:

$\dots F_5 = 5$
$F_6 = 8$
$F_7 = 13$
$F_8 = 21$
$F_9 = 34$
$F_{10} = 55$
$F_{11} = 89$
$F_{12} = 144$
$F_{13} = 233$
$F_{14} = 377$
$F_{15} = 610$
$F_{16} = 987$
$F_{17} = 1597$
$F_{18} = 2584$

Задача 3.

a) $5^n + 4n - 1 \vdots 8$

1. $n = 1, 5 + 4 - 1 = 8 \vdots 8$ - верно

2. $n = k$
   $5^k + 4k - 1 \vdots 8$ - верно

3. $5^{k+1} + 4(k+1) - 1 =$
   $= 5^k \cdot 5 + 4k + 4 - 1 =$
   $= 5^k \cdot 5 + 4k + 3 =$
   $= 5 \underbrace{(5^k + 4k - 1)}_{\vdots 8} - \underbrace{16k}_{\vdots 8} + \underbrace{8}_{\vdots 8}$ - верно, ч. т. д.

b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$

1. $n = 1, \frac{1}{\sqrt{1}} \geqslant \sqrt{1}$ - верно

2. $n = k$
   $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k}$ - верно

3. $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\geqslant \sqrt{k} \text{ по 2 пункту}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \sqrt{k+1}$

$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \sqrt{k+1}$

$\frac{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \sqrt{k+1} | \cdot \sqrt{k+1}$

$\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} + 1 \geqslant k+1$

$\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} \geqslant k$

$\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} \geqslant \sqrt{k} \cdot \sqrt{k}$

$\sqrt{k+1} \geqslant \sqrt{k}$ - верно, ч. т. д.

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

1. $n = 1, 1^3 = 1^2$ - верно

2. $n = k$
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$ - верно

3.
$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1)^2 \\
(1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1)^2 \\
\left(\frac{(k+1) \cdot k}{2}\right)^2 + (k+1)^3 &= \left(\frac{(1 + (k+1))(k+1)}{2}\right)^2 \\
\frac{(k+k^2)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{((k+1) + (k+1)^2)^2}{4} \\
\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} | : (k+1)^2 \\
\frac{k^2}{4} + (k+1) &= \frac{(k+2)^2}{4} | \cdot 4 \\
k^2 + 4(k+1) &= (k+2)^2 \\
k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4 \text{ - верно, ч. т. д.}
\end{aligned}$$

Задача 4.

$N \cdot M \cdot L = 9^3 = 729$

Не будет нужды в перестановках, если мальчик или несколько мальчиков будут стоять в самом конце очереди, при том что все девочки стоят перед ними, потому что никого не надо будет пропускать.

Самое большое количество перестановок, а именно $(N \cdot M \cdot L - 1)$ будет в том случае, когда мальчик будет стоять в самом начале очереди, а за ним только девочки. С началом каждой минуты ему нужно будет пропускать по одной девочке вперед, пока не наступит последняя минута, когда он уже будет стоять в самом конце очереди. Все перестаноки совершатся за $(N \cdot M \cdot L - 1)$ минут, потому что мальчик будет пропускать $(N \cdot M \cdot L - 1)$ девочку вперед себя (мальчика из числа студентов в очереди уже вычли, ему не нужно пропускать себя).

Случай, когда мальчик стоит в начале очереди и где-то в недрах очереди есть еще один мальчик, не будет максимальным по количеству перестановок, потому что двум мальчикам придется пропустить $(N \cdot M \cdot L - 2)$ девочек (вычли 2 мальчиков из общего числа студентов в очереди, им не нужно себя пропускать), следовательно и время, за которое совершатся все перестаноки, будет равно $(N \cdot M \cdot L - 2)$.

Таким образом, случаи, когда в очереди более одного мальчика не будут максимальными по престановкам, так как чем больше число мальчиков в очереди, тем меньше число девечек, которое им нужно будет пропустить, а следовательно и время тоже затратится меньше, и они точно успеют до открытия буфета поменяться местами.

В итоге, не существует такого случая, когда перестановки в очереди не успеют закончиться до открытия буфета.

Задача 5.

a)
1. $A \implies C \equiv \bar{A} \lor C$
2. $A \lor \bar{B}$
3. $A \implies (B \land \bar{C}) \equiv \bar{A} \lor B \land \bar{C}$

b)
1. $\neg(A \implies C) \equiv A \land \bar{C}$

   Завтра будет солнечно, но Онегин не пойдет гулять по бульвару.

2. $\neg(A \lor \bar{B}) \equiv \bar{A} \land B$

   Завтра не будет солнечно, и Онегин наденет широкий боливар.

3. $\overline{\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}} \equiv A \wedge \overline{B \wedge \bar{C}} \equiv A \wedge (\bar{B} \vee C) \equiv A \wedge \bar{B} \vee A \wedge C$
   Или завтра будет солнечно и Онегин не наденет широкий боливар, или завтра будет солнечно и Онегин пойдет гулять на бульвар.

c) Таблица истинности для выражения $\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}$

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{C}$	$B \wedge \bar{C}$	$\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Задача 6.

1. $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \equiv (A \implies C)$

   Левая часть выражения:

A	B	C	$(A \implies B)$	$(B \implies C)$	$(A \implies B) \wedge (B \implies C)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

   Правая часть выражения:

A	B	C	$(A \implies C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула не верна, т. к. последние столбцы в таблицах истинности разных частей выражения не совпали.

2. $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies ((A \implies B)) \equiv$

   $(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee C) \implies (\bar{A} \vee C) \equiv$

   $\overline{(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee C)} \vee \bar{A} \vee C \equiv$

   $\overline{(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee C) \wedge A \wedge \bar{C}} \equiv$

   $\overline{(\bar{A} \wedge A \vee A \wedge B) \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C} \vee C \wedge \bar{C})} \equiv$

   $\overline{(0 \vee A \wedge B) \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C} \vee 0)} \equiv$

   $\overline{(A \wedge B) \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C})} \equiv \bar{0} \equiv 1$

3. Выражения отличаются, потому что, во-первых, первое неверно, а второе верно, во-вторых, в первом выражении доказывается эквивалентность высказываний в выражении, а во втором - истинность всего выражения.

Задача 7.

1. $\exists x \in X, \forall y \in Y : M(x) \wedge \overline{P(x,y)}$
2. $\exists x \in X : M(x) \wedge P(x,x)$
3. $\exists y \in Y, \forall x \in X : \overline{M(x)} \vee P(x,y)$
4. $\forall x \in X, \exists y \in Y : \overline{M(x)} \vee P(x,y)$

Задача 8.

1. Для любого предложения из множества всех предложений найдется слово из множества всех слов такое, что в любом предложении встречается это слово.

2. Существует слово из множества всех слов, что для любого предложения из множества всех предложений верно, что в любом предложении встречается это слово.

3. Существует такая часть речи из множества всех частей речи, что для любого предложения из множества всех предложений найдется слово из множества всех слов такое, что в любом предложении есть слово этой части речи.