Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Licenciatura em Engenharia Informática

Unidade Curricular de
Investigação Operacional

Ano Letivo de 2021/2022

Relatório Fase 2
Escalonamento de equipas

Grupo

Miguel Martins	a89584
Miguel Rodrigues	a89499
Guilherme Gonçalves	a88280
João Cardoso	a94595
Rita Gomes	a87960

3 de Maio de 2022

Índice

1 Introdução

O presente relatório serve de suporte ao trabalho prático 2 realizado no âmbito da Unidade Curricular de Investigação Operacional. Para a realização deste trabalho foi utilizado o software de otimização em rede Relax4.

De uma forma geral, este trabalho consistiu em resolver um problema de escalonamento de equipas, de modo a minimizar o custo total da operação, que inclui custos de deslocação e custos fixos de utilização de veículos. O cenário apresentado consiste em atribuir serviços a efetuar a clientes distribuídos geograficamente a equipas, sendo que cada cliente tem associada uma hora de início do serviço. É ainda necessário ter em conta que uma equipa pode efetuar o serviço do clietne se, após terminar o serviço de um cliente anterior, puder chegar ao cliente atual num instante igual ou anterior à hora do serviço do cliente atual. As horas de serviço dos clientes estão apresentadas a seguir. Note que o maior número de inscriçao do nosso grupo é 94595 e, portanto, segundo as normas do enunciado, a1 = 5, a8 = 6 e não removemos nenhum cliente, visto que os dois últimos números são ímpares.

j	cliente	a_j (¼hora)	a_j (hora do serviço)
1	Ana	5	10:15
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	6	10:30
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Figura 1.1: Horas de serviço dos clientes.

É fornecido aos alunos duas matrizes de adjacência: uma com os tempos de deslocação e outra com os custos de deslocação, que estão apresentadas a seguir. É de destacar que os tempos de deslocação entre clientes e entre clientes e a sede da empresa é representado em 1/4 de hora.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	4	1	2	2	3	2	1	0	3	1
B		3	5	3	3	2	3	4	2	5
C			3	2	3	2	0	1	1	2
D				1	3	3	3	2	3	1
E					2	1	2	2	2	2
F						2	3	3	3	4
G							2	2	2	3
H								1	1	1
I									3	2
J										4

tempos de deslocação

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	13	5	6	5	10	7	5	0	7	1
B		11	14	10	8	6	11	13	4	15
C			8	6	10	6	0	5	6	2
D				4	8	8	8	6	11	4
E					6	4	6	5	7	6
F						5	10	10	8	11
G							10	7	5	9
H								5	6	9
I									7	9
J										10

custos de deslocação

Figura 1.2: Matrizes de adjacência.

2 Definição do problema

Estamos perante um problema de fluxo de custo mínimo numa rede, uma vez que a solução consiste em decidir quais os clientes a atribuir a cada equipa de modo a minimizar o custo total. Trata-se de um problema de fixed scheduling visto que existe uma data de serviço associada ao serviço de um cliente. Desta forma, a cada serviço é associado um instante de execução aj. O serviço do cliente j pode ser executado no instante aj se, após terminar um serviço no cliente i, o veículo puder chegar ao cliente j num instante igual ou anterior a aj, i.e., ai + tij <= tj, em que ti j é o tempo de deslocação entre os clientes i e j,. É permitido chegar antes, mas é necessário esperar pelo instante de execução do serviço. Consideramos que a duração do serviço do cliente é desprezável, com valor nulo. A carga não constitui restrição, podendo uma equipa visitar um qualquer número de clientes.

2.1 Formulação do problema

Dado um conjunto de datas de serviço, é possível estabelecer quais os clientes j que é possível visitar depois de ter visitado o cliente i. Essa informação pode ser representada num grafo em que existe uma rco entre o vértice i e o vertíce j, se tal sequência for possível. Assim sendo, o grafo de compatibilidades que obtemos está apresentado a seguir. Note que como existe um tempo associado a cada serviço, o grafo é acíclico. O grafo podia ser completado adicionando dois vértices correspondentes à origem e ao destino, que neste contexto são ambos representados pela sede de Keleirós.

Para formular a solução do problema começamos por dividir cada vértice (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K) em 2 para representar o fluxo de entrada e saída de cada um dos vértices, ficando o problema com um total de 22 vértices. Quanto à oferta e procura de cada nó/vértice, cada vértice origem tem uma oferta de 1, exceto o K, que tem uma oferta de 10. Isto significa que 1 ou 10 equipas estão a deixar esse nó. Os destino têm procura de -1 ou -10, no caso do K, o que significa que apenas 1 equipa está a ir a um destino e todas estão a retornar ao vértice K.

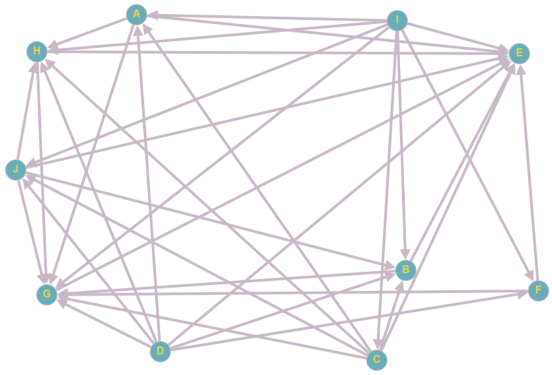

Figura 2.1: Grafo de compatibilidades.

2.2 Ficheiro de Input

Para construir o ficheiro de input do Relax4 usamos a seguinte numeração de vértices:

Nome	Vértice	Origem	Destino	Número
Keleirós	K	✓		1
Ana	A		✓	2
Ana	A	✓		3
Beatriz	B		✓	4
Beatriz	B	✓		5
Carlos	C		✓	6
Carlos	C	✓		7
Diogo	D		✓	8
Diogo	D	✓		9
Eduardo	E		✓	10
Eduardo	E	✓		11
Francisca	F		✓	12
Francisca	F	✓		13
Gonçalo	G		✓	14
Gonçalo	G	✓		15
Helena	H		✓	16
Helena	H	✓		17
Inês	I		✓	18
Inês	I	✓		19
José	J		✓	20
José	J	✓		21
Keleirós	K		✓	22

O ficheiro de input do Relax4 pode ser visualizado a seguir:

```
22
56
1 2 1 1
1 4 15 1
1 6 2 1
1 8 4 1
1 10 6 1
1 12 11 1
1 14 9 1
1 16 9 1
1 18 9 1
1 20 10 1
1 22 0 1000
3 10 5 1
3 14 7 1
3 16 5 1
3 22 1 1
5 10 10 1
5 14 6 1
5 22 1 1
7 2 5 1
7 4 11 1
7 10 6 1
7 14 6 1
7 16 0 1
7 20 6 1
7 22 1 1
9 2 6 1
9 4 14 1
9 10 4 1
9 12 8 1
9 14 8 1
9 16 8 1
9 20 11 1
9 22 1 1
11 22 1 1
13 10 6 1
13 14 5 1
13 22 1 1
15 10 4 1
15 22 1 1
17 10 6 1
17 14 10 1
```

```
17 22 1 1
19 2 0 1
19 4 13 1
19 6 5 1
19 10 5 1
19 12 10 1
19 14 7 1
19 16 5 1
19 20 7 1
19 22 1 1
21 4 4 1
21 10 7 1
21 14 5 1
21 16 6 1
21 22 1 1
10
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-1
1
-10
```

Figura 2.2: Valores de input do Relax4

2.3 Ficheiro de Output

O ficheiro de output do Relax4 é o seguinte:

```
s 48.
f 1 2 1
f 1 4 0
f 1 6 1
f 1 8 1
f 1 10 0
f 1 12 0
f 1 14 0
f 1 16 0
f 1 18 1
f 1 20 0
f 1 22 6
f 3 10 0
f 3 14 0
f 3 16 0
f 3 22 1
f 5 10 0
f 5 14 0
f 5 22 1
f 7 2 0
f 7 4 0
f 7 10 0
f 7 14 0
f 7 16 1
f 7 20 0
f 7 22 0
f 9 2 0
f 9 4 0
f 9 10 0
f 9 12 1
f 9 14 0
f 9 16 0
f 9 20 0
f 9 22 0
```

```
f 11 22 1
f 13 10 0
f 13 14 1
f 13 22 0
f 15 10 1
f 15 22 0
f 17 10 0
f 17 14 0
f 17 22 1
f 19 2 0
f 19 4 0
f 19 6 0
f 19 10 0
f 19 12 0
f 19 14 0
f 19 16 0
f 19 20 1
f 19 22 0
f 21 4 1
f 21 10 0
f 21 14 0
f 21 16 0
f 21 22 0
```

Figura 2.3: Valores de output do Relax4

3 Interpretação dos resultados

O custo ótimo obtido no problema tem o valor de 48. Posteriormente a partir do output do Relax4 foi possível construir o escalonamento das equipas de forma a obter o menor custo possível. A atribuição dos clientes a cada equipa é representada a seguir:

- 1ª equipa: K -> A -> K
- 2ª equipa: K -> C -> H -> K
- 3ª equipa: K -> D -> F -> G -> E -> K
- 4ª equipa: K -> I -> J -> B -> K

4 Validação do modelo

De forma a validar o nosso modelo decidimos resolver o problema com recurso a programação linear utilizando o lpSolve. O input utilizado pode ser observado a seguir:

```
min: 1xKA + 15xKB + 2xKC + 4xKD + 6xKE + 11xKF + 9xKG + 9xKH + 9xKI + 10xKJ + 0xKK + 5xAE + 7xAG + 5xAH
+ 1xAK + 10xBE + 6xBG + 1xBK + 5xCA + 11xCB + 6xCE + 6xCG + 0xCH + 6xCJ + 1xCK + 6xDA + 14xDB + 4xDE + 8xDF
+ 8xDG + 8xDH + 6xDI + 11xDJ + 1xDK + 1xEK + 6xFE + 5xFG + 1xFK + 4xGE + 1xGK + 6xHE + 10xHG + 1xHK + 0xIA
+ 13xIB + 5xIC + 5xIE + 10xIF + 7xIG + 5xIH + 7xIJ + 1xIK + 4xJB + 7xJE + 5xJG + 6xJH + 1xJK;

//restri oes:
xKA + xKB + xKC + xKD + xKE + xKF + xKG + xKH + xKI + xKJ + xKK = 10;
xAK + xBK + xCK + xDK + xEK + xFK + xGK + xHK + xIK + xJK + xKK = 10;
xAE + xAG + xAH + xAK = 1;
xKA + xCA + xDA + xIA = 1;
xBE + xBG + xBK = 1;
xKB + xCB + xDB + xIB + xJB = 1;
xCA + xCB + xCE + xCG + xCH + xCJ + xCK = 1;
xKC + xIC = 1;
xDA + xDB + xDE + xDF + xDG + xDH + xDI + xDJ + xDK = 1;
xKD = 1;
xEK = 1;
xKE + xAE + xBE + xCE + xDE + xFE + xGE + xHE + xIE + xJE = 1;
xFE + xFG + xFK = 1;
xKF + xDF + xIF = 1;
xGE + xGK = 1;
xKG + xAG + xBG + xCG + xDG + xFG + xHG + xIH + xJH = 1;
xHE + xHG + xHK = 1;
xKH + xAH + xCH + xDH + xIH + xJH = 1;
xIA + xIB + xIC + xIE + xIF + xIG + xIH + xIJ + xIK = 1;
xKI + xDI = 1;
xJB + xJE + xJG + xJH + xJK = 1;
xKJ + xCJ + xDJ + xIJ = 1;

bin xKA xKB xKC xKE xKF xKG xKH xKI xKJ xAE xAG xAH xAK xBE xBG xBK xCA xCB xCE xCG xCH xCJ xCK xDA xDB xDE
xDF xDG xDH xDI xDJ xDK xFE xFG xFK xGE xGK xHE xHG xHK xIA xIB xIC xIE xIF xIG xIH xIJ xIK xJB xJE xJG xJH xJK;
```

Figura 4.1: Input do lpSolve.

O output obtido foi o seguinte:

```
Model name:  'LPSolver' - run #1
Objective:   Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:       20 constraints,      57 variables,          112 non-z
Sets:                                   0 GUB,                  0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Relaxed solution                  48 after         22 iter is B&B base.

Feasible solution                 48 after         22 iter,         0 n

Optimal solution                  48 after         22 iter,         0 n
Relative numeric accuracy ||*|| = 3.33067e-016

MEMO: lp_solve version 5.5.2.11 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variabl
In the total iteration count 22, 2 (9.1%) were bound flips.
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 20.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 21 NZ entries, 1.0x largest ba
The maximum B&B level was 1, 0.0x MIP order, 1 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 1, with a dynamic range of 1.
Time to load data was 0.011 seconds, presolve used 0.006 seconds,
... 0.013 seconds in simplex solver, in total 0.030 seconds.
```

Variables	MILP Feasible	result
	48	48
xKK	6	6
xKA	1	1
xKC	1	1
xKI	1	1
xAK	1	1
xBK	1	1
xCH	1	1
xDF	1	1
xEK	1	1
xFG	1	1
xGE	1	1
xHK	1	1
xIJ	1	1
xJB	1	1
xKD	1	1
xKB	0	0
xKE	0	0
xKF	0	0

Figura 4.2: Output obtido com o lpSolve.

Podemos ver que o valor ótimo da nossa função objetivo é 48, ou seja é o menor custo total de operação possível neste contexto. Adicionalmente confirmámos que obtemos o mesmo valor no Relax4 e os arcos selecionados coincidem também com os obtidos na solução proveniente do Relax4, o que permite validar a solução.

5 Conclusão

Com a realização deste projeto foi possível consolidar diversos conceitos lecionados nas aulas da UC de Investigação Operacional, nomeadamente a modelação de fluxos em rede.

Para solucionar o problema em questão resolveu-se um problema de fluxo de custo mínimo com o auxílio do Relax4 determinando como ficariam distribuídos os clientes pelas diferentes equipas.

Desta forma, o grupo considera que realizou este trabalho com sucesso visto que, com o auxílio do processo de validação do modelo concluímos que a solução apresentada é a solução ótima.