ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL E SIMULAÇÃO

Folha prática 4: Estimação MV

Ano letivo 2021/22

1. Considere o modelo Pareto com os parâmetros de forma α e de escala β, definida pela função distribuição

$$F(x) = 1 - (\frac{\beta}{x})^{\alpha}, x \geq \beta (\alpha > 0, \beta > 0).$$

   (a) Considere $\beta = 1$. Usando as funções do R: *mle, optimize, uniroot*, que se encontram na package *stats4*, determine estimativas de máxima verosimilhança para α, gerando uma amostra de dimensão $n = 1000$ e supondo o modelo com parâmetro de forma $\alpha = 2$. Compare com o valor dado pela expressão do estimador.

   (b) Suponha ambos os parâmetros desconhecidos;

      i. Usando as funções do R e gerando uma amostra de dimensão $n = 1000$ de modelo Pa(2,5), determine estimativas de máxima verosimilhança para os parâmetros.

      ii. Resolva o problema anterior aplicando ao conjunto de dados:
      1.2, 1.8, 2.5, 3.2, 4.5, 5.9, 13.5, 22.3, 96.1.

2. Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma amostra observada proveniente da população $Beta(a, b)$, definida pela f.d.p.

$$f(x; \theta) = f(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1, (a, b > 0).$$

   Determine

   (a) expressões dos estimadores de m.v. para os parâmetros.

   (b) estimativas de m.v., usando a função *optim*, a partir de uma amostra gerada da Beta(3,2).

3. Considere o problema de estimar os parâmetros da forma quadrática de v.a.´s centradas gaussianas dada por

$$Y = \lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_k X_k^2,$$

   onde $X_j \sim N(0, 1), j = 1, \ldots, k$ e $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k > 0$.
   Uma vez que $Y_j = \lambda_j X_j^2 \sim Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\lambda_j}), j = 1, \ldots, k$, então

$$Y = \frac{1}{k} Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\lambda_1}) + \ldots + \frac{1}{k} Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\lambda_k}).$$

   Assuma $\sum \lambda_j = 1$,$k = 3$ e uma amostra aleatória $(y_1, \ldots, y_{200})$ do modelo com distribuição Ye parâmetros $\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.25, \lambda_3 = .15$.
   Determine estimativas de m.v. para $\lambda_j, j = 1, 2, 3$.