

ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL E SIMULAÇÃO

Projeto 1: Geração de Números Pseudo Aleatórios

Ano letivo 2021/22

1. Pretende-se gerar valores do modelo contínuo X com f.d.p. dada por

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) I_{[0,+\infty)}(x),$$

usando o método da rejeição e o modelo com distribuição $\text{Exp}(1)$ ou outra que achar adequada, para a variável proponente Y .

- (a) Após determinar a constante c ótima para implementar o método da rejeição, implemente o algoritmo. Compare os NPA's gerados (em número n elevado) através de um histograma, sobrepondo ainda a f.d.p. alvo, $f_X(x)$. Comente a eficiência do método, analisando o número esperado de observações para as 1000 gerações e o que efetivamente foi necessário.
 - (b) Após verificar que a referida distribuição de X corresponde a distribuição normal $N(0,1)$ truncada, utilize outro método de geração e compare os resultados obtidos com os anteriores (com o mesmo n elevado), para analisar qual o mais eficiente.
2. A distribuição t-Student pode ser vista como a resultante da composta da distribuição Gaussiana $N(0, \frac{1}{\tau})$ quando τ , que representa a precisão, segue uma distribuição gama $Ga(\alpha, \alpha)$, i.e., com parâmetros de forma e de taxa coincidentes.

- (a) Mostre analiticamente essa propriedade, i.e.,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f_{N(0,1/\tau)}(x) f_{Ga(\alpha,\alpha)}(\tau) d\tau, x \in \mathbf{R}$$

onde $f(x)$ representa a função densidade de probabilidade da t-Student com $v = 2\alpha$ graus de liberdade.

- (b) Particularizando o valor de α , gere valores desta distribuição t-Student fazendo evoluir a dimensão da amostra,
 - i. usando a decomposição da Normal-Gama, anteriormente referida;
 - ii. usando a função implementada no R para a t-Student;
 - iii. compare os resultados obtidos anteriormente, analisando características sumárias amostrais e correspondentes teóricas.
 - iv. apresentando os histogramas obtidos e esboçando os graficos desta mistura.
3. O coeficiente de assimetria $\sqrt{b_1}$ de uma v.a. X é definido por $\sqrt{b_1} = \frac{E[(X-\mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$, com $\mu_X = E[X]$ e $\sigma_X = \text{Var}(X)$. O coeficiente de assimetria amostral, $\sqrt{b_1}$, é definido por

$$\sqrt{b_1} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{S^3}$$

com S a representar o desvio padrão amostral.

- (a) Simule 3 amostras, com dimensão $n = 5000$, de NPA's respetivamente $Beta(3, 3)$, $Beta(2, 3)$ e $Beta(3, 2)$ e represente os histogramas respetivos, sobrepondo a cada um as curvas das f.d.p. associadas.
- (b) Repita este processo de geração 50 vezes, calculando para cada caso (simulação e tipo de distribuição beta) o coeficiente de assimetria amostral. Analise as características sumárias das amostras constituídas para os valores de $\sqrt{b_1}$, para cada distribuição beta. Com base nelas comente se os resultados obtidos estão de acordo com os esperados em termos da assimetria/simetria.

Nota: Acompanhe a resolução dos seguintes exercícios com um *script*, em anexo.