Lógica e Sistemas Digitais

Álgebra de Boole

Simplificação algébrica

João Pedro Patriarca (jpatri@cc.isel.ipl.pt)

Slides inspirados nos slides do prof. Mário Véstias

ISEL

Álgebra de Boole

- Introduzida por George Boole em 1847

- A álgebra de Boole é um ramo da álgebra cujos valores das variáveis correspondem aos valores 1 e 0 (Verdadeiro e Falso, respetivamente)

- As operações principais entre variáveis na álgebra de Boole são a interceção, união e negação

- As variáveis numa função booleana denominam-se por variáveis booleanas

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são variáveis booleanas

Operações AND, OR e NOT

Operação	**AND**	**OR**	**NOT**
Símbolo algébrico	X . Y X and Y	X + Y X or Y	$\overline{X}$ Not X
Tabela de verdade	**X Y | F = X . Y** 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1	**X Y | F = X + Y** 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1	**X | F = $\overline{X}$** 0 | 1 1 | 0

Função booleana

- Uma função booleana descreve a relação entre variáveis binárias através dos operadores da álgebra booleana
- Exemplo do controlo automático de uma lâmpada de um quarto
  - Noção de presença (P), luz solar (S) e estore (E)
  - A lâmpada acende se existir presença no quarto e, ou não existe luz solar, ou existindo luz solar, o estore está corrido para baixo

$$L_{(P,S,E)} = P.(\overline{S} + E)$$

P	S	E	$L = P.(\overline{S} + E)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Qualquer função pode ser representada por uma tabela de verdade onde se indicam os valores da função para todas as combinações de entrada

Axiomas da Álgebra de Boole

- Comutatividade

  A . B = B . A

  A + B = B + A

- Identidade

  A . 1 = A (o valor 1 é o elemento neutro na operação AND)

  A + 0 = A (o valor 0 é o elemento neutro na operação OR)

- Distributividade

  A . (B + C) = A . B + A . C (o operador AND tem prioridade sobre o operador OR)

  A + B . C = (A + B) . (A + C)

Teoremas da Álgebra de Boole

- Idempotência

  $A \cdot A = A$

  $A + A = A$

- Complemento

  $A \cdot \overline{A} = 0$

  $A + \overline{A} = 1$

- Elemento absorvente

  $A \cdot 0 = 0$

  $A + 1 = 1$

- Involução

  $\overline{\overline{A}} = A$

- Associatividade

  $(A + B) + C = A + (B + C)$

  $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$

- Absorção

  $A + A\,B = A$

  $A\,(A + B) = A$

- Redundância

  $A + \overline{A}\,B = A + B$

  $\overline{A} + A\,B = \overline{A} + B$

  $A\,(\overline{A} + B) = A\,B$

  $\overline{A}\,(A + B) = \overline{A}\,B$

- Adjacência

  $A\,B + A\,\overline{B} = A$

  $(A + B)\,(A + \overline{B}) = A$

- Leis de De Morgan

  $\overline{A\,B} = \overline{A} + \overline{B}$

  $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

Demonstrações dos axiomas e dos teoremas (1 de 3)

Idempotência

A	A	A . A	A + A
0	0	0	0
1	1	1	1

Identidade

A		A . 1
0	1	0
1	1	1

A		A + 0
0	0	0
1	0	1

Elemento absorvente

A		A . 0
0	0	0
1	0	0

A		A + 1
0	1	1
1	1	1

Distributividade

A	B	C	A . (B + C)	A B + A C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Comutatividade

A	B	A . B	B . A	A + B	B + A
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Complemento

A	$\overline{A}$	A . $\overline{A}$	A + $\overline{A}$
0	1	0	1
1	0	0	1

Demonstrações dos axiomas e dos teoremas (2 de 3)

Involução

A	$\overline{\overline{A}}$
0	0
1	1

Absorção, redundância e adjacência

		Absorção		**Redundância**								**Adjacência**	
A	**B**	**A + AB**	**A(A + B)**	**A + $\overline{A}$B**	**A + B**	**$\overline{A}$ + AB**	**$\overline{A}$ + B**	**A($\overline{A}$ + B)**	**AB**	**$\overline{A}$(A + B)**	**$\overline{A}$B**	**AB + A$\overline{B}$**	**(A + B)(A + $\overline{B}$)**
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Demonstrações dos axiomas e dos teoremas (3 de 3)

Associatividade

A	B	C	B + C	A + B	A + (B + C)	(A + B) + C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Leis de De Morgan

A	B	$\overline{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}$	$\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$	$\overline{\mathbf{A} + \boldsymbol{B}}$	$\overline{\mathbf{A}}\,.\,\overline{\mathbf{B}}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Operadores NAND e NOR

Operação	**NAND**	**NOR**
Símbolo algébrico	$\overline{X . Y}$ X nand Y	$\overline{X + Y}$ X nor Y
Tabela de verdade	<table><tr><th>X</th><th>Y</th><th>F = $\overline{X . Y}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	<table><tr><th>X</th><th>Y</th><th>F = $\overline{X + Y}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>

Operadores XOR e XNOR

<table>
<tr><th>Operação</th><th>XOR</th><th>XNOR</th></tr>
<tr><td>Símbolo algébrico</td><td>$X \oplus Y$
X xor Y</td><td>$\overline{X \oplus Y}$
X xnor Y</td></tr>
<tr><td>Tabela de verdade</td><td>
<table>
<tr><th>X</th><th>Y</th><th>$F = X \oplus Y$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>X</th><th>Y</th><th>$F = \overline{X \oplus Y}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

- Definição

$$X \oplus Y = \overline{X}\,Y + X\,\overline{Y}$$

$$\overline{X \oplus Y} = \overline{X}\,\overline{Y} + X\,Y$$

- Propriedades

$$X \oplus 0 = X$$

$$X \oplus 1 = \overline{X}$$

$$X \oplus X = 0$$

$$X \oplus \overline{X} = 1$$

$$\overline{X \oplus Y} = \overline{X} \oplus Y = X \oplus \overline{Y}$$

Simplificação algébrica

Minimização lógica

- Uma função booleana pode ser simplificada aplicando os teoremas de álgebra de Boole
- A simplificação é relevante na implementação da função em lógica discreta com portas lógicas
- O processo de simplificação corresponde à aplicação sucessiva de propriedades e teoremas até obter a função na sua forma mais simples

Exemplo 1

- Lâmpada acesa função de presença, luz solar e estore (slide 4)

$$L_{(P,S,E)} = P\bar{S}\bar{E} + P\bar{S}E + PSE$$

Distributiva

$$= P\bar{S}(\bar{E} + E) + PSE$$

Complemento

$$= P\bar{S}(1) + PSE$$

Identidade

$$= P\bar{S} + PSE$$

Distributiva

$$= P(\bar{S} + SE)$$

Redundância

$$= P(\bar{S} + E)$$

Exemplo 2

$$F_{(A,B,C,D)} = (A + AB).(C + \bar{C}D) + \bar{A}D$$

Absorção

$$= (A).(C + \bar{C}D) + \bar{A}D$$

Redundância

$$= (A).(C + D) + \bar{A}D$$

Distributiva

$$= AC + AD + \bar{A}D$$

Adjacência

$$= AC + D$$

Exemplo 3 – De Morgan

$$F_{(A,B,C)} = \overline{AB + C}$$

A operação OR passa a AND

$$= \overline{AB}.\bar{C}$$

A operação AND passa a OR. Relevante a introdução de parêntesis para manter a ordem das operações

$$= (\bar{A} + \bar{B}).\bar{C}$$

$$F_{(A,B,C,D)} = \overline{\overline{A + B} + \overline{C + D}}$$

$$= \overline{\overline{A + B}}.\overline{\overline{C + D}}$$

Involução (mantendo a ordem das operações)

$$= (A + B).(C + D)$$

Exercícios

Simplificação de funções aplicando propriedades e teoremas

$$F1_{(A,B,C,D)} = \bar{A}\bar{C} + \bar{A}D + \bar{A}B + A\bar{D} + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{B} = \bar{A} + \bar{D}$$

$$F2_{(A,B,C,D)} = (A + \bar{B} + C).(\bar{A} + \bar{B} + C).(B + C + \bar{D}) = C + \bar{B}.\bar{D}$$

$$F3_{(A,B,C)} = \overline{B.\overline{A.B} + \overline{A + B.\bar{C}}} = A$$