Lógica e Sistemas Digitais

Representação de funções

João Pedro Patriarca (jpatri@cc.isel.ipl.pt)

Slides inspirados nos slides do prof. Mário Véstias

Formas de representar uma função booleana

- Expressões lógicas

- Tabela de verdade

- Logigrama

Função booleana representada com expressões lógicas

- Uma função pode ser representada
  - Pela soma de termos produto

$$F_{(A,B,C)} = AB + \bar{A}C$$

  - Pelo produto de termos soma

$$F_{(A,B,C)} = (A + B).(\bar{A} + C)$$

  - Por um misto dos dois

$$F_{(A,B,C,D)} = AB + \bar{A}C.(B + D)$$

- A representação pela soma de termos produto pode ser convertida na representação pelo produto de termos soma e vice-versa por manipulação algébrica

$$F_{(A,B,C)} = AB + \bar{A}C = \overline{\overline{AB + \bar{A}C}} = \overline{\overline{AB}.\overline{\bar{A}C}} = \overline{(\bar{A} + \bar{B}).(A + \bar{C})} = \overline{A\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}}$$

$$= \overline{A\bar{B}}.\overline{\bar{A}\bar{C}}.\overline{\bar{B}\bar{C}} = (\bar{A} + B).(A + C).(B + C)$$

Função booleana representada com tabela de verdade

- Uma tabela de verdade indica o valor da função lógica para todas as combinações das variáveis de entrada ($F = A.(\bar{B} + C)$)

A	B	C	$F_{(A.B.C)}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Determinar tabela de verdade a partir de uma expressão algébrica (1 de 3)

- Para produzir o resultado final da função lógica pode-se calcular os termos individualmente
- Considerando a função $F_{(A,B,C)} = AB + \bar{A}\bar{B}C + (A \oplus C)$

A	B	C	$A.B$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$A \oplus C$	$F = A.B + \bar{A}.\bar{B}.C + A \oplus C$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Determinar tabela de verdade a partir de uma expressão algébrica (2 de 3)

- Para produzir o resultado final da função lógica pode-se calcular os termos individualmente
- Considerando a função $F_{(A,B,C)} = AB + \bar{A}\bar{B}C + (A \oplus C)$

A	B	C	$A.B$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$A \oplus C$	$F = A.B + \bar{A}.\bar{B}.C + A \oplus C$
0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	1	
0	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	
1	1	1	1	0	0	

Determinar tabela de verdade a partir de uma expressão algébrica (3 de 3)

- Para produzir o resultado final da função lógica pode-se calcular os termos individualmente
- Considerando a função $F_{(A,B,C)} = AB + \bar{A}\bar{B}C + (A \oplus C)$

A	B	C	$A.B$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$A \oplus C$	$F = A.B + \bar{A}.\bar{B}.C + A \oplus C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1

Extração de função booleana a partir de uma tabela de verdade

- Forma AND-OR
  - Soma de termos produto ou união de interceções
  - Obtida por extração dos 1s da tabela
  - Forma canónica: em todos os termos produto figuram as três variáveis (mintermos ou termos mínimos)

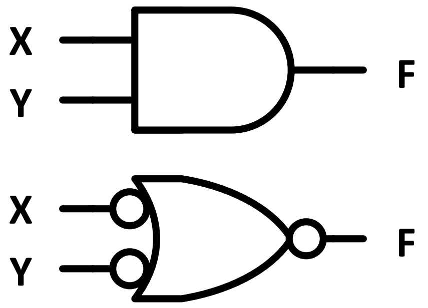
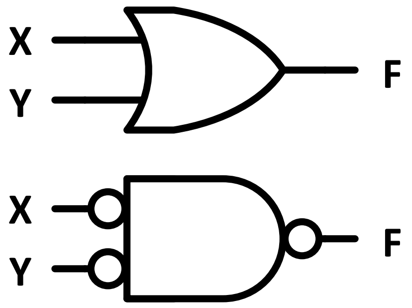
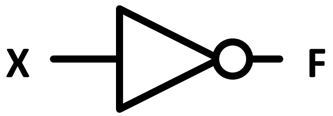
$$F_{(A,B,C)} = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

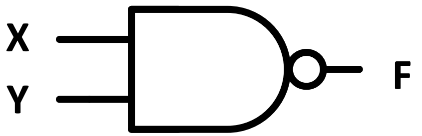
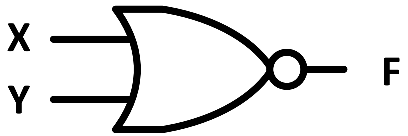
- Forma OR-AND
  - Produto de termos soma ou interceção de uniões
  - Obtida por extração dos 0s da tabela
  - Forma canónica: em todos os termos soma figuram as três variáveis (maxtermos ou termos máximos)

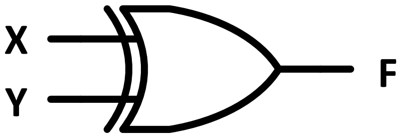
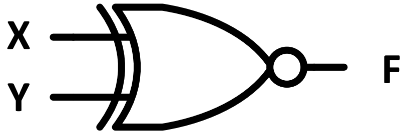
$$F_{(A,B,C)} = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C}} =$$
$$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}.\overline{\bar{A}B\bar{C}}.\overline{\bar{A}BC}.\overline{AB\bar{C}} = (A + B + C).(A + \bar{B} + C).(A + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B} + C)$$

A	B	C	$F_{(A.B.C)}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Portas lógicas

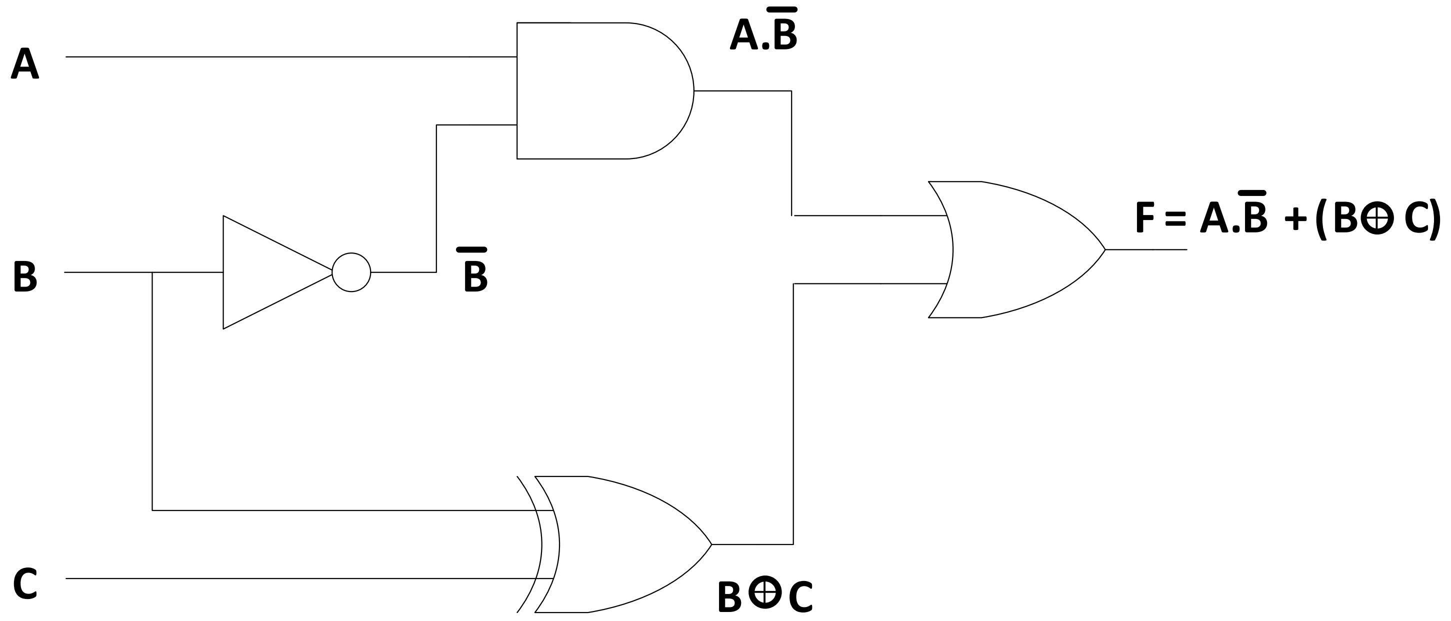
Operação	AND	OR	NOT
Símbolo porta lógica			

Operação	NAND	NOR
Símbolo porta lógica		

Operação	XOR	XNOR
Símbolo porta lógica		

Função booleana representada com logigrama

- Por exemplo, dada a função $F = A.\bar{B} + (B \oplus C)$, o esquema com portas lógicas correspondente é dado por



Portas lógicas com mais de duas entradas

- Os operadores lógicos podem ter mais do que duas entradas

$$F_{AND(X,Y,\ldots,K)} = X.Y.\ldots.K$$

$$F_{OR(X,Y,\ldots,K)} = X + Y + \cdots + K$$

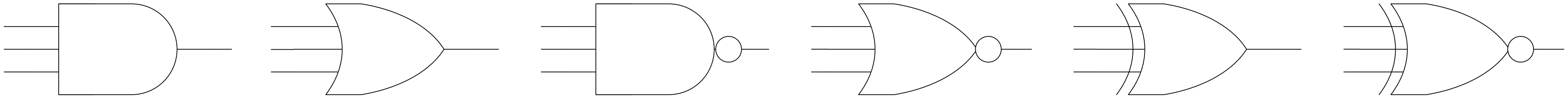
$$F_{NAND(X,Y,\ldots,K)} = \overline{X.Y.\ldots.K}$$

$$F_{NOR(X,Y,\ldots,K)} = \overline{X + Y + \cdots + K}$$

$$F_{XOR(X,Y,\ldots,K)} = X \oplus Y \oplus \ldots \oplus K$$

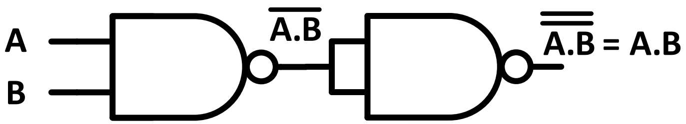
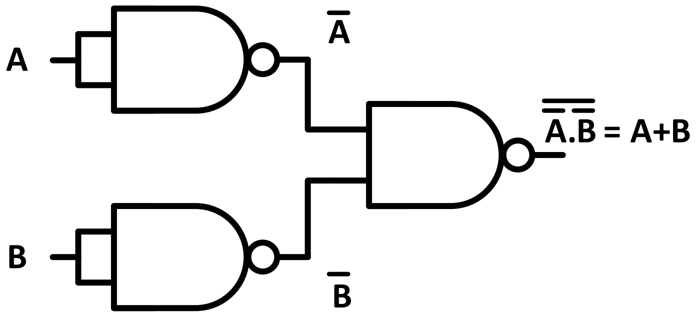
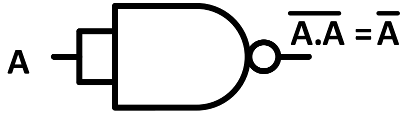
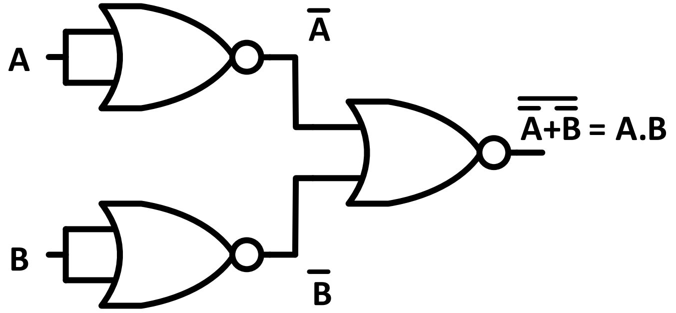
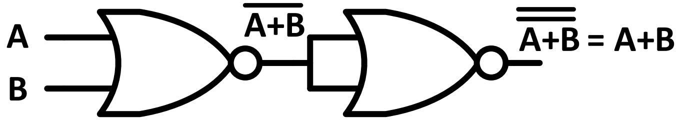
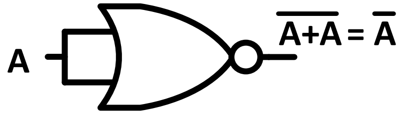
$$F_{XNOR(X,Y,\ldots,K)} = \overline{X \oplus Y \oplus \ldots \oplus K}$$

- Portas lógicas com 3 entradas



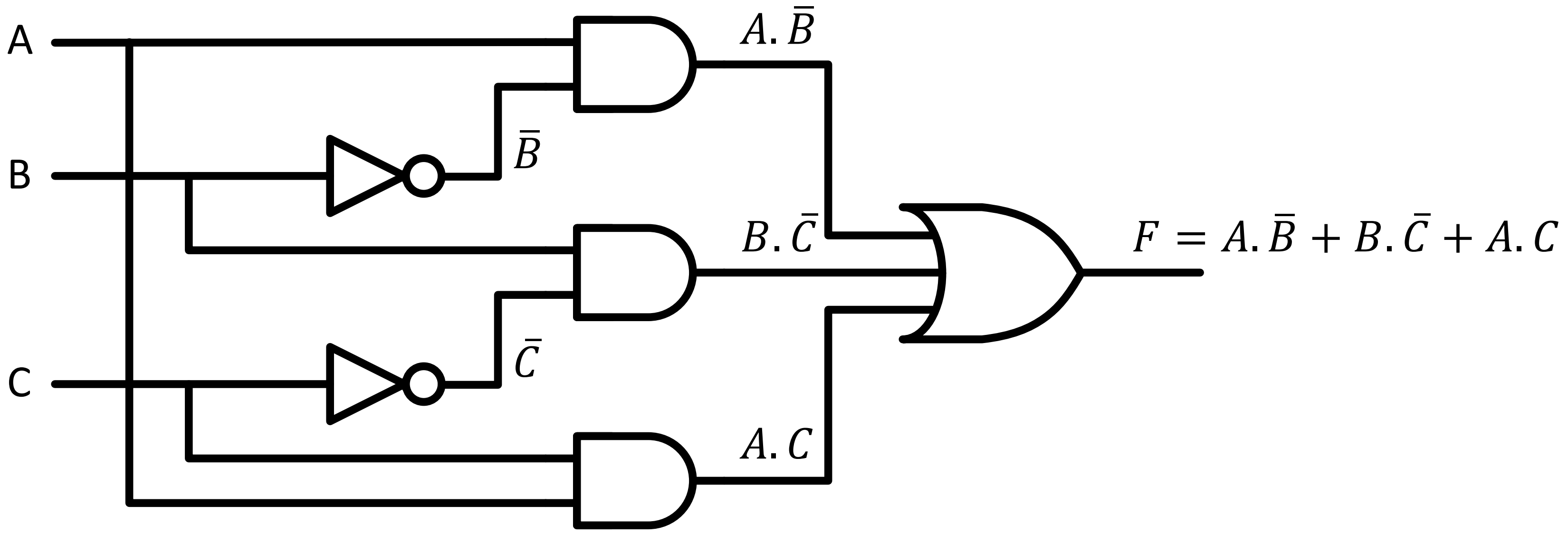
Operadores NAND e NOR funcionalmente completos

- Os operadores AND, OR e NOT permitem implementar qualquer função booleana
- Os operadores NAND e NOR permitem implementar qualquer operador lógico

Operação	**AND**	**OR**	**NOT**
Com NANDs			
Com NORs			

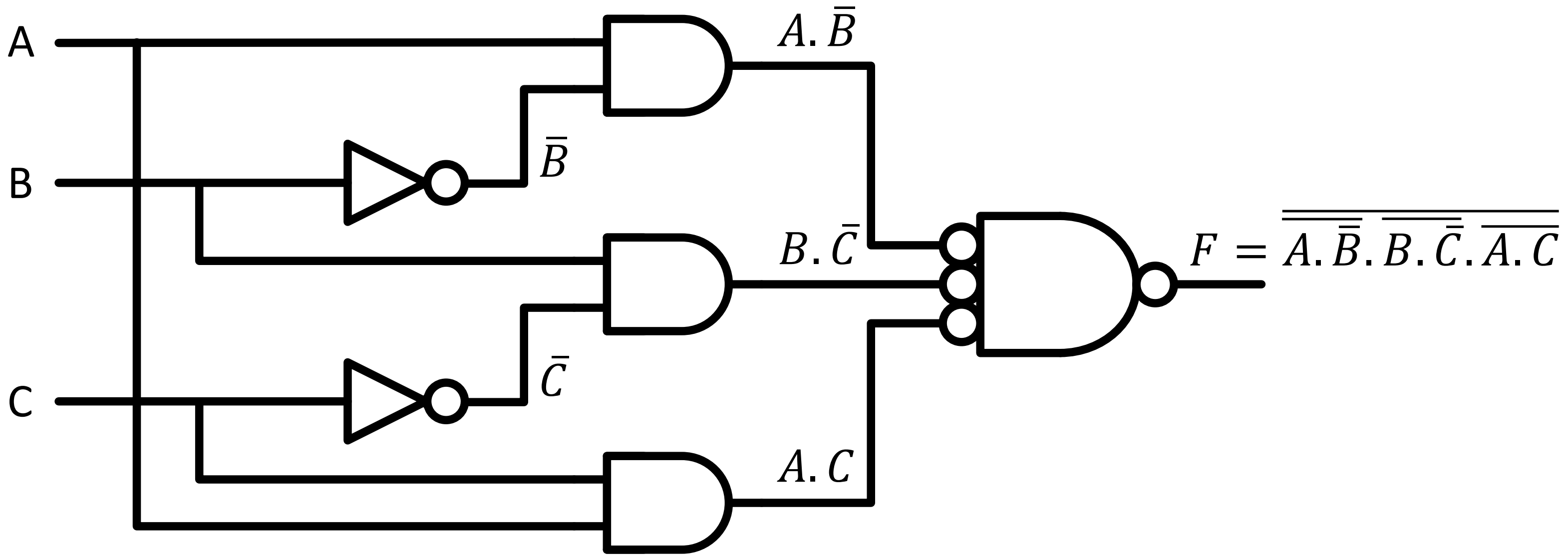
Exemplo de passagem a NANDs (1 de 4)

- Por exemplo, dada a função $F = A.\bar{B} + B.\bar{C} + A.C$

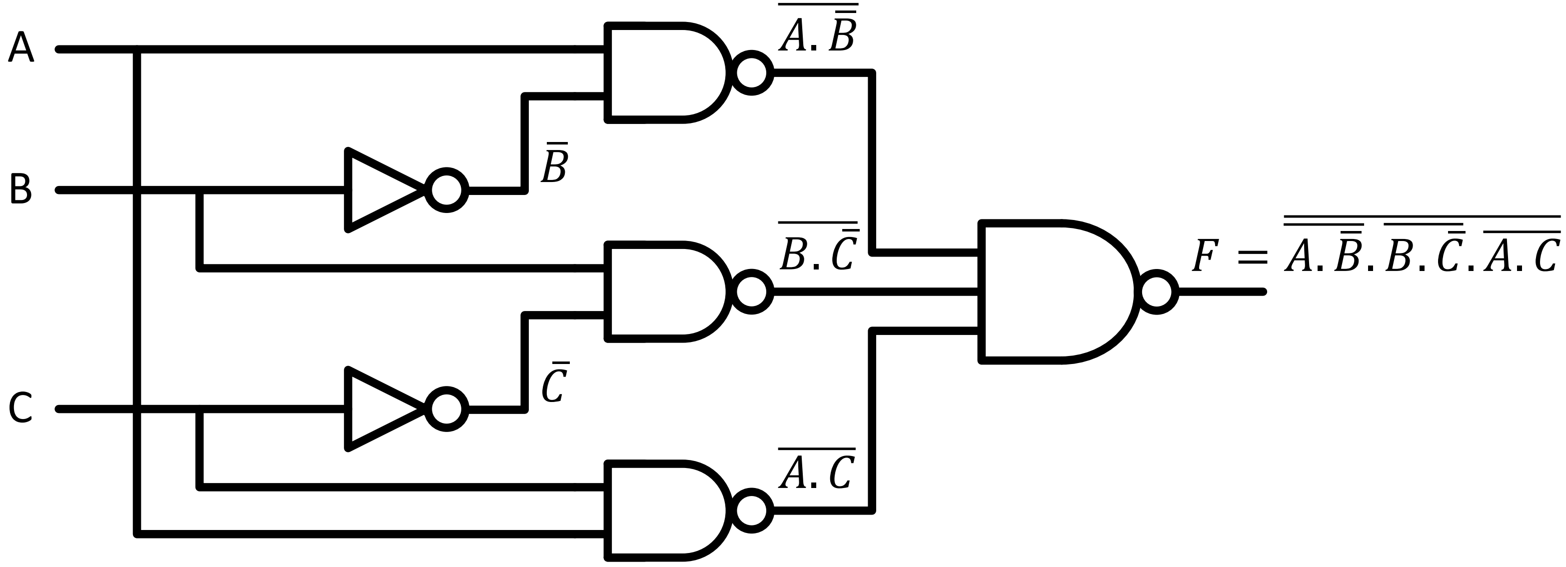


Exemplo de passagem a NANDs (2 de 4)

- Um OR é uma NAND de entradas negadas

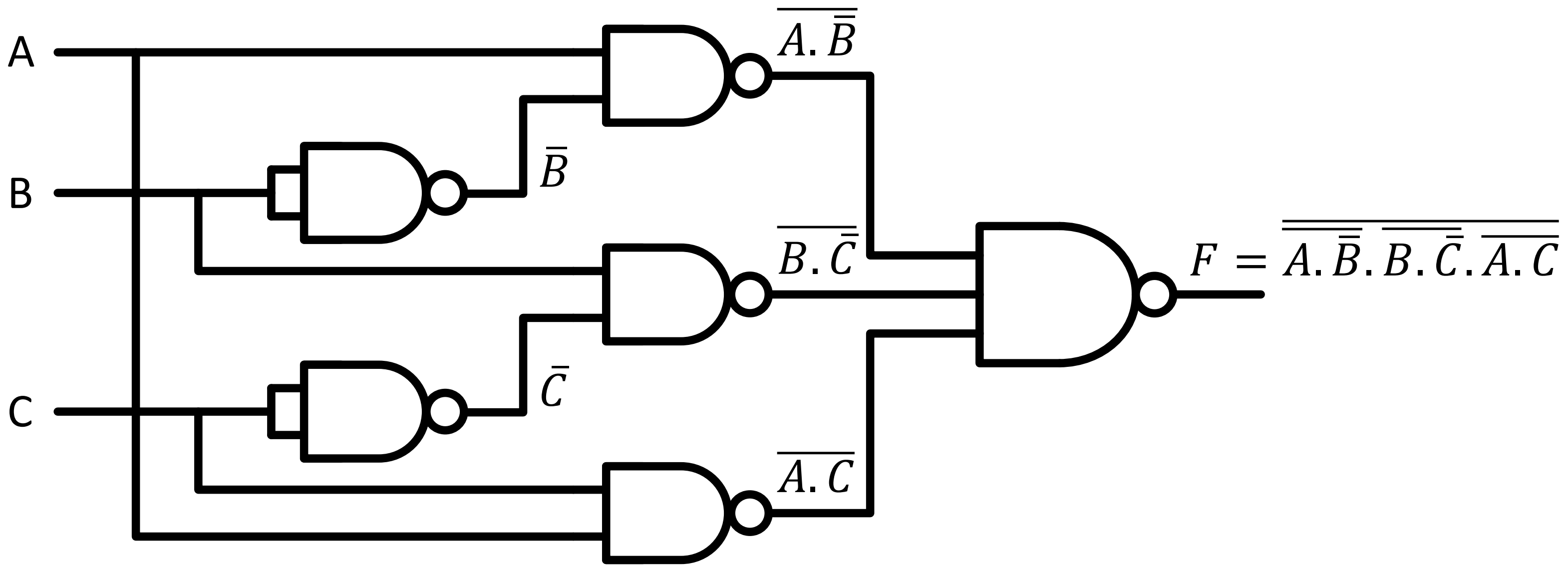


Exemplo de passagem a NANDs (3 de 4)



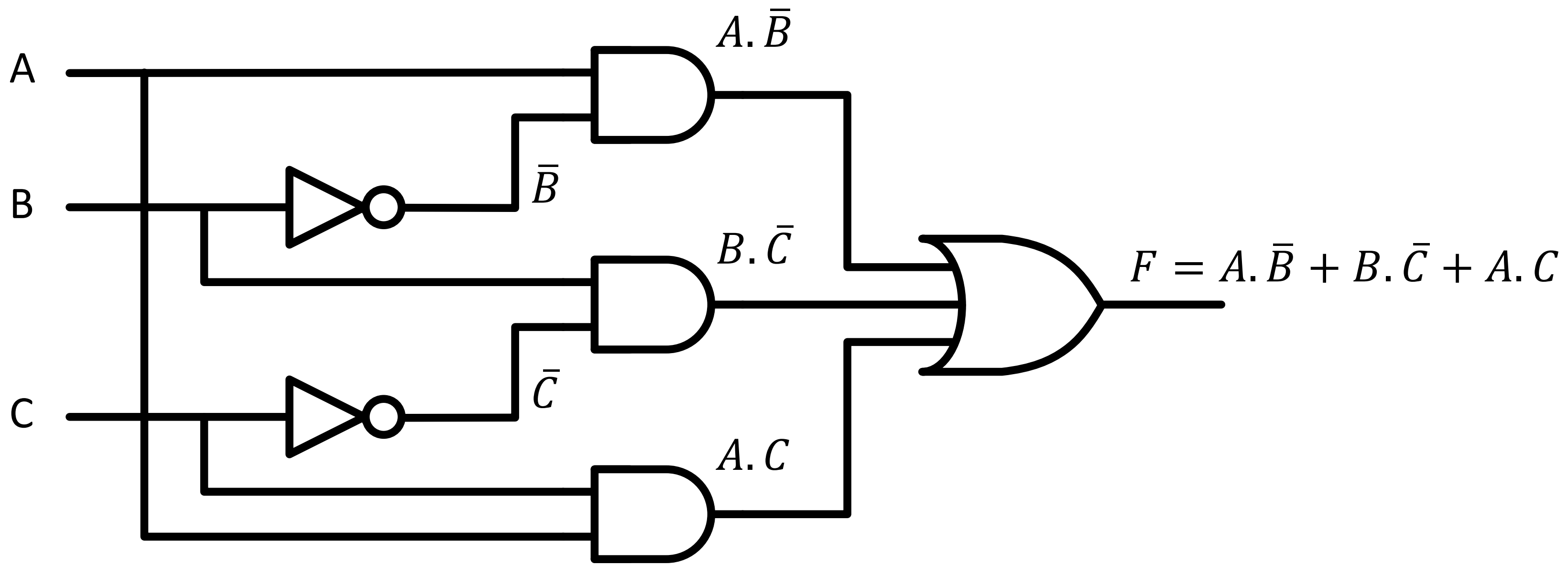
Exemplo de passagem a NANDs (3 de 4)

- Um NOT é uma NAND com entradas ligadas entre si



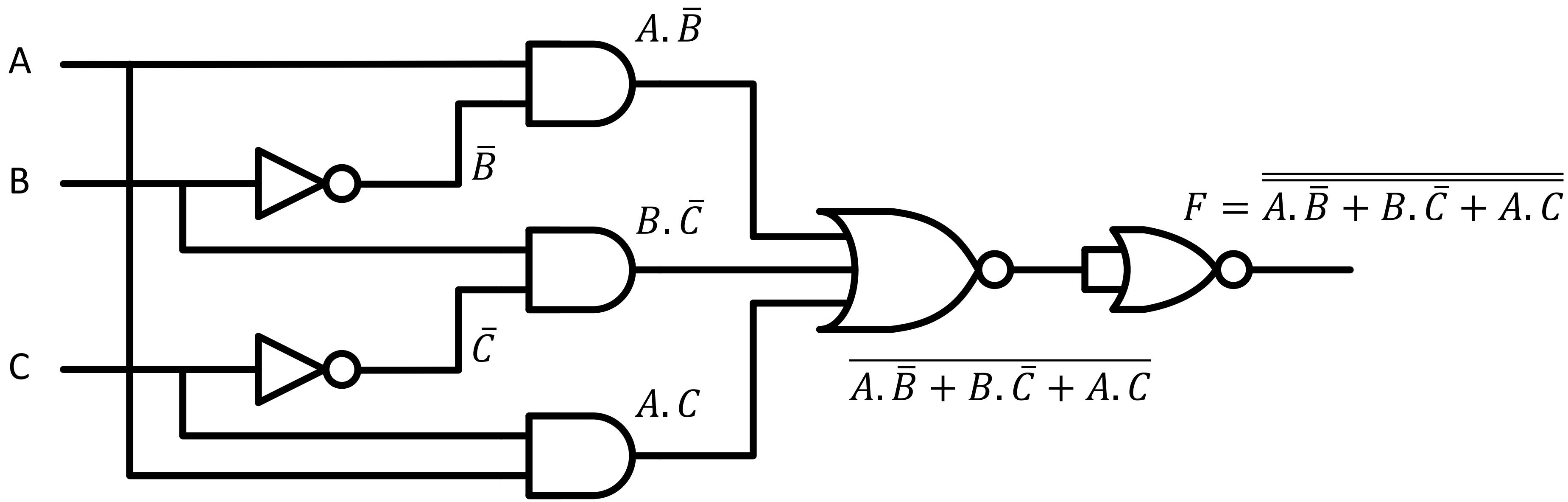
Exemplo de passagem a NORs (1 de 4)

- Por exemplo, dada a função $F = A.\bar{B} + B.\bar{C} + A.C$



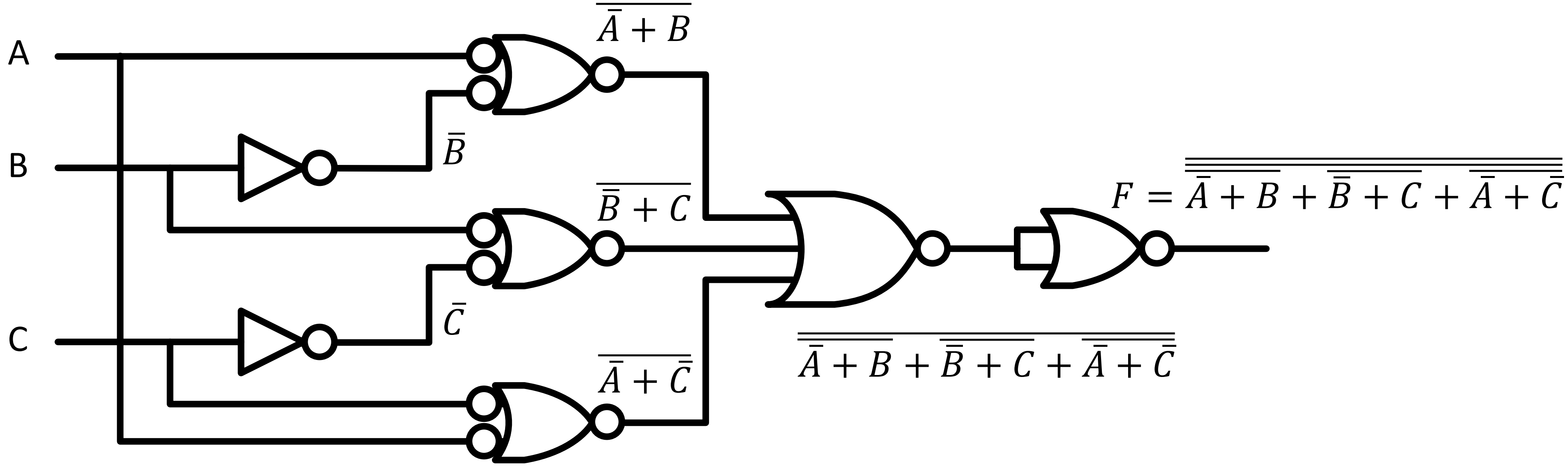
Exemplo de passagem a NORs (2 de 4)

- Um OR é um NOR com a saída negada



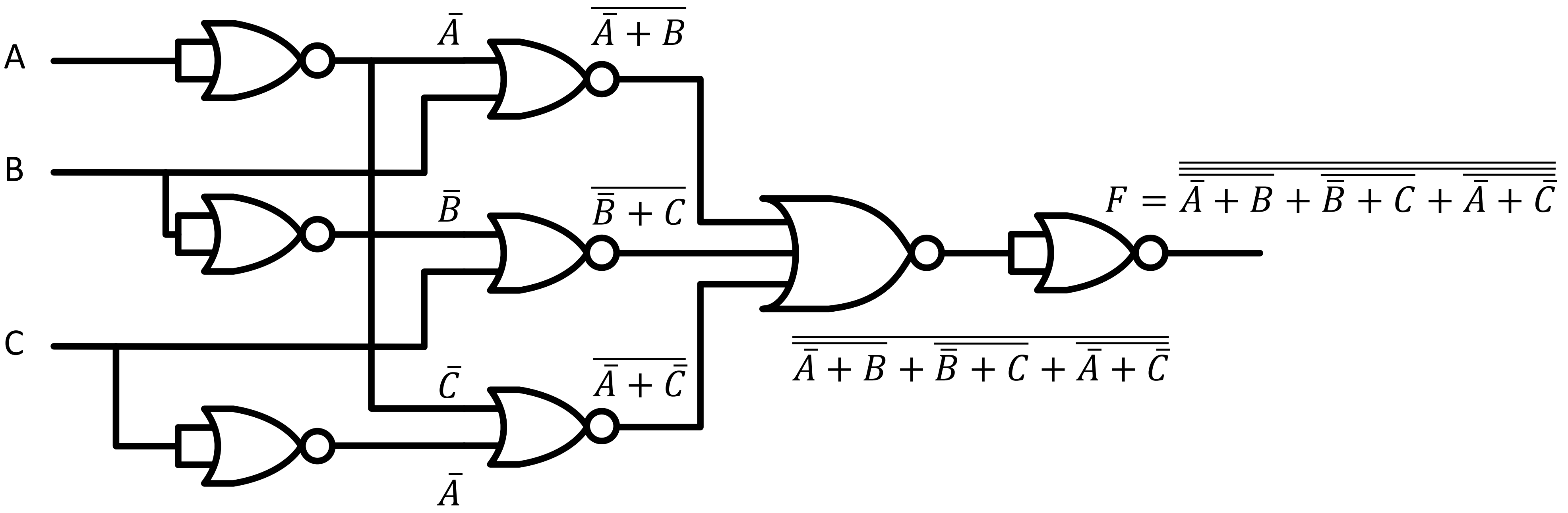
Exemplo de passagem a NORs (3 de 4)

- Um AND é um NOR de entradas negadas



Exemplo de passagem a NORs (4 de 4)

- Um NOT é um NOR com entradas ligadas entre si



Exercícios

Determinar as tabelas de verdade das funções

$$F1_{(A,B,C)} = \bar{A}(B + C) \oplus AB$$

$$F2_{(A,B,C)} = \overline{A + BC} + \bar{A}BC$$

Extrair função booleana F na forma canónica AND-OR

A	B	C	$F_{(A.B.C)}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Extrair função booleana F na forma canónica OR-AND

A	B	C	$F_{(A.B.C)}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Implementar com portas lógicas a função

$$F_{(A,B,C)} = \overline{\overline{A + B} \oplus ABC} + B\bar{C}$$

Extrair função booleana $F_{(A,B,C)}$ do logigrama