事前課題

北川梨津 *

2022 年 3 月 28 日

- 答えだけではなく，結果に至るまでの過程も示すこと．
- 手書きの答案は不可[1]．
- 締め切り：2022 年 4 月 10 日 22:00

問 1

以下の各文の正誤を理由も合わせて答えよ．

1. 2 つの事象 A と B を考える．これらの事象は独立であるとする．さらに，$\Pr(A) = 0.4$ であり，かつ，$\Pr(A \cap B) = 0.2$ であるとする．このとき，$\Pr(B) = 0.2$ である．
2. 2 つの事象 C と D は，排反事象である（i.e., $\Pr(C \cap D) = 0$）とする．このとき C と D は独立な事象である．
3. 2 つの事象 C と D は，独立な事象である（i.e., $\Pr(C \mid D) = \Pr(C)$）とする．このとき C と D は排反事象である．
4. 2 つの離散型確率変数 X と Y を考える．これらの同時確率が $p_{X,Y}(x, y)$ として与えられる．ただし，$X \perp\!\!\!\perp Y$ とする[2]．このとき，$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ である．

* 早稲田大学：ritsu.kitagawa@fuji.waseda.jp

1） Word の数式モードや LaTeX を使うこと．前者の使い方については，例えば「word で簡単に数式を書く」という記事（https://note.com/keisemi/n/na12bfeb77469）を参考にするとよい．後者については，Cloud LaTeX というサービス（https://cloudlatex.io/ja）を使うのが最も簡便である．

2） 2 つの確率変数 X と Y が独立であることを，$X \perp\!\!\!\perp Y$ と書く．

問 2

以下を計算せよ．ただし，$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}\} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ とする．

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_i.$

2. $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} x_i.$

3. $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{10} 3x_i.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} 2.$

5. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right).$

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_i^2.$

7. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2.$

8. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_{11-i}.$

9. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{10} x_{11-i}\right).$

10. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{10} x_i / x_{11-i}\right).$

問 3

1. 同様に確からしいコインを 1 枚トスして表が出れば 1，裏が出れば 0 となるような確率変数 X を考える．その期待値 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ．
2. 同様に確からしいコインを 2 枚トスして 1 枚でも表が出れば 1，そうでなければ 0 となるような確率変数 X を考える．その期待値 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ．
3. 確率変数 X を考える．その期待値が $\mathbf{E}[X] = 5$ であるとき，$Y = 5X + 2$ というふうに X を変換してできる確率変数 Y の期待値を求めよ．
4. 確率変数 X を考える．その期待値が $\mathbf{E}[X] = -3$ であり，$Y = X + b$ とする．このとき，$\mathbf{E}[Y] = 0$ となるような b の値を求めよ．
5. 2 つの確率変数 X_1 と X_2 を考える．それぞれの期待値が，$\mathbf{E}[X_1] = 4, \mathbf{E}[X_2] = 9$ であるとき，$Y = X_1 + X_2$ と定義される確率変数 Y の期待値 $\mathbf{E}[Y]$ を求めよ．ただし，このとき $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ とは限らない．
6. 確率変数とその期待値の差の期待値が必ずゼロになることを示せ．つまり，$\mathbf{E}[X - \mathbf{E}[X]] = 0$ であることを示せ．
7. 分散がゼロになるのはどのようなときか述べよ．
8. 確率変数 X を考える．その分散が $\mathbf{Var}[X] = 1$ であるとき，$Y = 5X + 2$ というふうに X を変換してできる確率変数 Y の分散を求めよ．
9. 2 つの確率変数 Y と D を考える．次を示せ．

$$Y \perp\!\!\!\perp D \Rightarrow \mathbf{E}[Y \mid D] = \mathbf{E}[Y].$$

   証明が難しければ，代わりに直観的な説明を与えよ．

10. 2 つの確率変数 Y と D を考える．次の等式が正しいことを示せ．

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[Y \mid D]] = \mathbf{E}[Y].$$

以上