5. előadás

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet

$\lambda_1 = 1$ $\qquad$ $\lambda_2 = 1$

e^{1x} $\qquad$ e^{1x} belsőrezonancia

xe^x $\qquad$ linftlen

$\Uparrow$

$$|W(x)| = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0$$

$\Downarrow$

e^x és xe^x bázis a megoldások terében (alaprendszer)

$y_{há} = c_1 e^x + c_2 x e^x$ $\qquad$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Karakterisztikus egyenlet

mo.: 1 $\qquad$ $1+\varepsilon$

mo $\leftarrow$ $e^{(1+\varepsilon)x} - e^{x}$ $\rightarrow$ mo megoldás = $\dfrac{\quad\smile\qquad\qquad\sim\quad}{\varepsilon}$

$$L'H \quad \frac{e^{(1+\varepsilon)x}\cdot x}{1} \to xe^x$$

Pl.: $y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ kar. egy.

$\lambda = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

$e^{(1+i)x} \qquad e^{(1-i)x}$

$e^x(\cos x + i\sin x) \qquad e^x\cdot(\cos(-x) + i\sin(-x))$

$e^x(\cos x - i\sin x)$

$e^x\cdot\cos x \qquad e^x\sin x$

$$|W(x)| = \begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ -e^x\sin x + e^x\cos x & e^x\cos x + e^x\sin x \end{vmatrix} = e^{2x}\cos^2 x + e^{2x}\cdot\cancel{\sin x\cos x} - e^{2x}\cancel{\sin x\cos x} + e^{2x}\sin^2 x =$$

$= e^{2x} \neq 0$

hom. lin. állandó együtthatós n.-edrendű dif egy.:

$$A = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

úgy oldjuk meg, hogy megkeressük az alaprendszerét (mo.-k vektorterének egy bázisát): $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Ehhez megoldjuk az

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenletet.

- ha $\lambda \in \mathbb{R}$ k-szoros zérushely, akkor
  $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ —
  → alaprendszer
  ($k \geq 2$: belső rezonancia, $k=1$: $e^{\lambda x}$ → alaprend)
- ha $\lambda = \alpha \pm \beta i$ $(\beta \neq 0)$ k-szoros zérushely

$$\left.\begin{array}{ll}
e^{\alpha x}\cos\beta x, & e^{\alpha x}\sin\beta x \\
x e^{\alpha x}\cos\beta x, & x e^{\alpha x}\sin\beta x \\
x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x \\
\vdots & \\
x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{array}\right\} \rightarrow \text{alaprendszer}$$

($k \geq 2$ belső rezonancia, k_1: első sor [illegible])

A megoldás az alaprendszer lineáris kombinációjaként áll fenn

Inhomogén egyenletek megoldása:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip}$$

próbafüggvény módszer $\left(a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y = f(x)\right)$

$f(x)$	y_{ip} lehetséges alakja
(m-edfokú polinom) $\cdot e^{\alpha x}$	(m-edfokú polinom) $e^{\alpha x}$
(m-edfokú polinom) $\cdot \sin\alpha x / \cos\alpha x$	(m-edfokú polinom) $\cos\alpha x$ + (m-edfokú polinom) $\sin\alpha x$