1. Előadás

Differenciál egyenletek

egyenlet
- algebrai $f(x)=0;\ x=?$
- függvény egyenletek

Differenciál egyenlet: Keresett egy függvény, ha adott egy összefüggés a függvény és deriváltjai között.

→ közönséges diff. egyenlet: egyváltozós függvény a megoldás

D: n-edrendű implicit diff. egyenlet:

$$\Phi\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \quad (*)$$

Adott Φ esetén keressük azt az $y(x)$ n-szer deriválható függvényt, mely $(*)$-t kielégíti.

[illegible]

D: $f: I \to \mathbb{R}$ n-szer diffható függvény megoldása az I intervallumon $(*)$ egyenletnek, ha y helyére f, y deriváltjai helyére f deriváltjait írva a $(*)$ azonosságot teljesíti $\forall x \in I$-re

D: n-ed rendű explicit diff egyenlet

$$(**) \quad y^{(n)}(x) = \Upsilon(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

D: $(**)$ általános megoldása:

adott I intervallumon az összes megoldás paraméterek segítségével fölírva

partikuláris megoldása:

egy konkrét megoldás

Egy n-ed rendű differenciál egyenlet

általános megoldása, tipikusan n db valós paramétert tartalmaz.

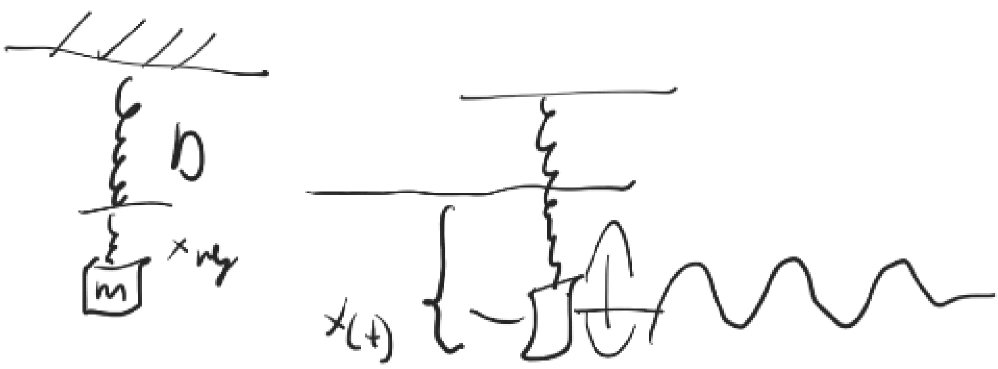
$$y'(x) = f(x, y(x))$$

a, $y'(x) = \sin x \Rightarrow y(x) = -\cos x + C$

b, $y'(x) = 2y(x) \Rightarrow y(x) = Ae^{2x}$

c, $y'(x) = 2x\,y(x) \Rightarrow y(x) = Ae^{x^2}$

általános megoldás



nyugalmi helyzet: $mg = D x_{ny} \Rightarrow x_{ny} = \frac{mg}{D}$

$$F_e = m\ddot{x}(t)$$

$$mg - D x(t) = m\ddot{x}(t)$$

→ Diff egyenlet

másodrendű

$$\ddot{x}(t) = g - \frac{D}{m}x(t)$$

lineáris

$$x_{ált}(t) = x_{ny} + A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Cauchy probléma

n-edfokú explicit diff egyenlet

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$$

n db kezdeti feltétel:

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{adott } x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}$$

Sok esetben a probléma egyértelműen megoldható

Szétválasztható változójú

(Szeparálható) diff egyenletek

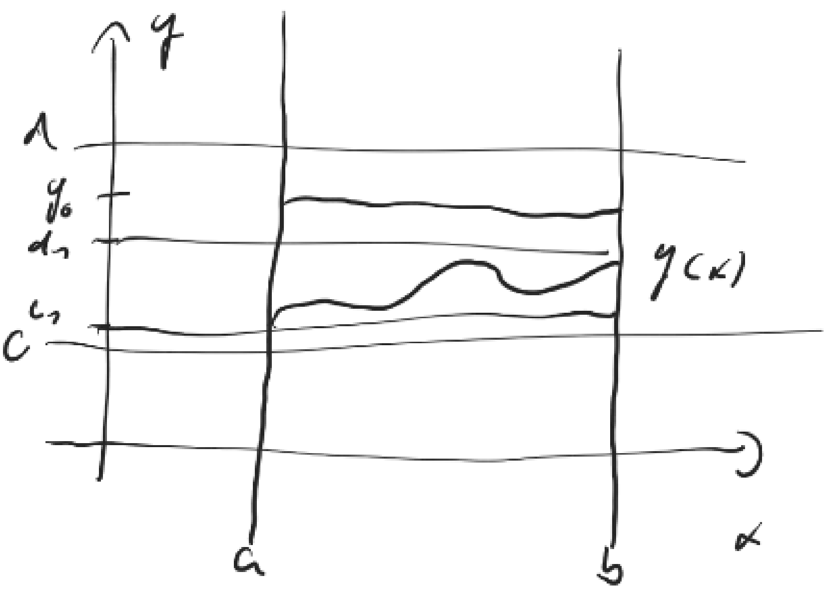
Elsőrendű explicit egyenletek

$$y'(x) = \overset{\text{adott}}{f}(x, \overset{\text{keresett}}{y(x)})$$

D: Szeparábilis (Szeparálható) egyenlet

$$y'(x) = \overset{\text{adott}}{f(x)} \cdot g(\overset{\text{keresett}}{y(x)}) \quad (*)$$

Tegyük fel, hogy $f \in C(a,b)$, $g \in C(c,d)$



1 Ha $\exists\, y_0 \in (c,d)$, $g(y_0) = 0$ akkor

$y(x) \equiv y_0$ konstans fg megoldása a diff egyenletnek

↳ Egyensúlyi helyzet

2. T.f.h. $y \in (c_1, d_1) \subset (c, d)$ esetén $g(y) \neq 0$

g folytonos $\Rightarrow$ $y \in (c_1, d_1)$ esetén $g(y)$ előjele nem változik

$$(*) \Rightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \quad \Big/ \int \; dx$$

$F' = f$

$H' = \frac{1}{g}$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x)\, dx$$

$$H(y(x)) + \cancel{c'} = F(x) + c$$

$$H(y(x)) = F(x) + c$$

$$\downarrow$$

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + c)$$

$y' = \frac{dy}{\ldots}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y(x))$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

$$H(y) = F(x) + C$$