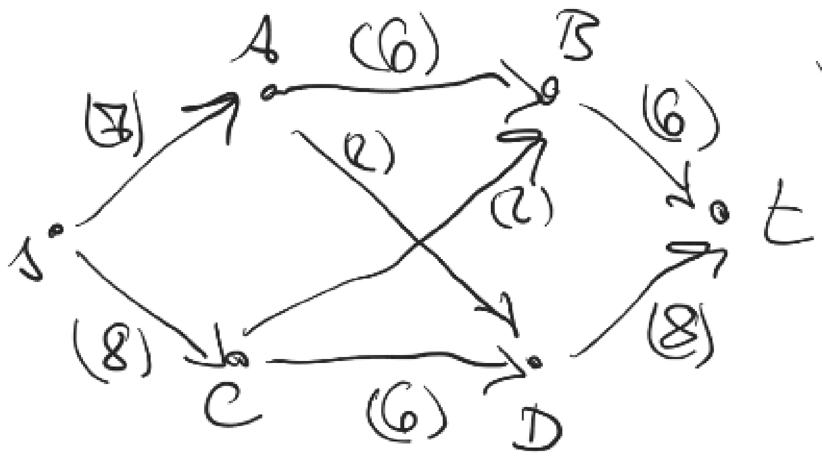
9. előadás

s-t vágás

X — vágás ponthalmaza: $s \in X$, $t \notin X$

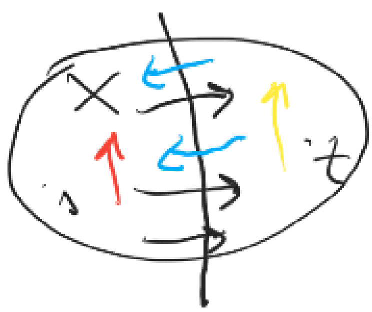
X kapacitása: X-ből kimenő élek összkapacitása



$X = \{s, B\}$

sA, sC, Bt
(7) (8) (6)

$c(X) = 21$



Lemma

$$\sum_{\substack{X\text{-ből ki} \\ \text{(fekete)}}} f(e) - \sum_{\substack{X\text{-be be} \\ \text{(kék)}}} f(e) = \sum_{s\text{-ből ki}} f(e) = m(f)$$

	kezdőpont	végpont	$m(f)$ Σ-ás felírásában
fekete	$\in X$	$\in X$	$\oplus$
kék	$\notin X$	$\in X$	$\ominus$

piros	$\notin X$	$\notin X$	ⓕ ⊖ : 0
sárga	$\notin X$	$\notin X$	nem jelenik meg

Biz.:

$v \in X$ $\quad \sum_{\substack{e\text{-ből}\\\text{kimegy}}} f(e) - \sum_{\substack{e\text{-be}\\\text{bemegy}}} f(e)$

ha $v \neq s \Rightarrow 0$

ha $v = s \Rightarrow m(f)$

$$m(f) = \sum_{v \in X} \Big(\sum_{\substack{e\ v\text{-ből}\\\text{ki}}} f(e) - \sum_{\substack{e\ v\text{-be}\\\text{be}}} f(e) \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{e \text{ fekete}\\(e\ x\text{-ből}\\\text{kimegy})}} f(e) - \sum_{\substack{e \text{ kék}\\(e\ x\text{-be}\\\text{bemegy})}} f(e)$$

$$m(f) = \sum_{\substack{(e\ x\text{-ből}\\\text{ki})}} f(e) - \sum_{\substack{(e\ x\text{-be}\\\text{be})}} f(e) \leq \underbrace{\sum_{\substack{e\ x\text{-ből}\\\text{ki}}} c(e)}_{= c(x)}$$

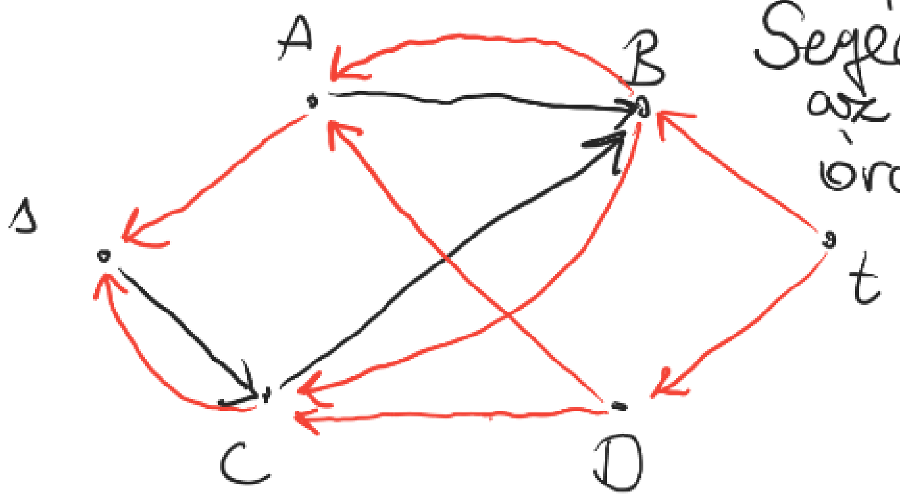
∀f folyamra, ∀X vágásra $m(f) \le c(X)$

⇒ ha ∃ k értékű folyam és k kapacitású vágás, akkor

⇒ a folyam max, a vágás min

Biz.:

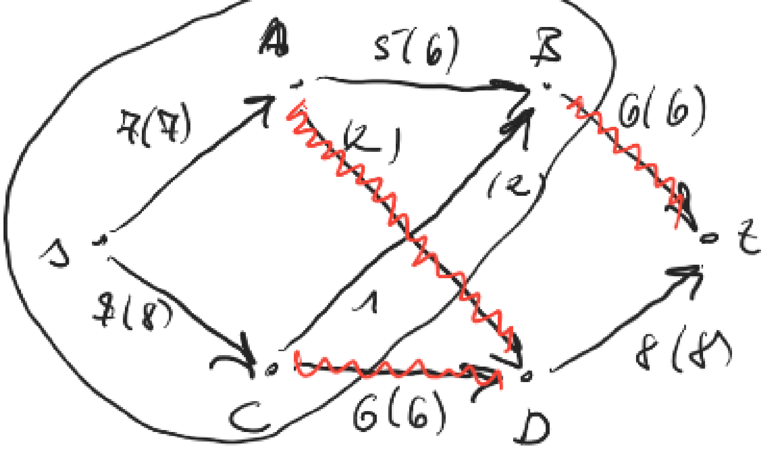
$$k \le \max_{f} m(f) \le \min_{X} c(X) \le k$$



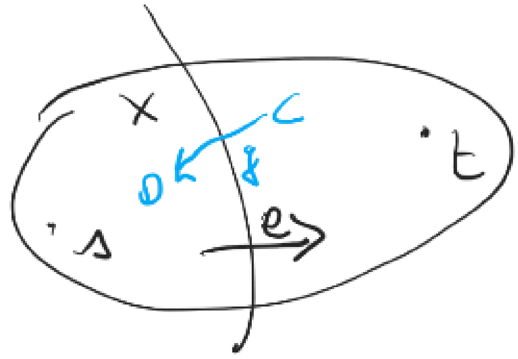
Segédgráf az előző órai folyamhoz

s, A, B, C érhetők el s-ből a segédgráfban

$\boxed{AD\ (2),\quad Bt\ (6),\quad CD\ (6)}$ $\quad (X = \{s, A, B, C\})$



X: utolsó segédgráfban s-ből elérhető csúcsok



$$m(f) = \sum_{\substack{x\text{-ből} \\ \text{ki}}} f(e) - \sum_{\substack{x\text{-be} \\ \text{be}}} f(e)$$

Áll. $e \overset{AB}{=}$ telített $\to f(e) = c(e)$

Biz. különben $B \in X$ ↯

Áll. $g = CD$

$f(g) = 0$

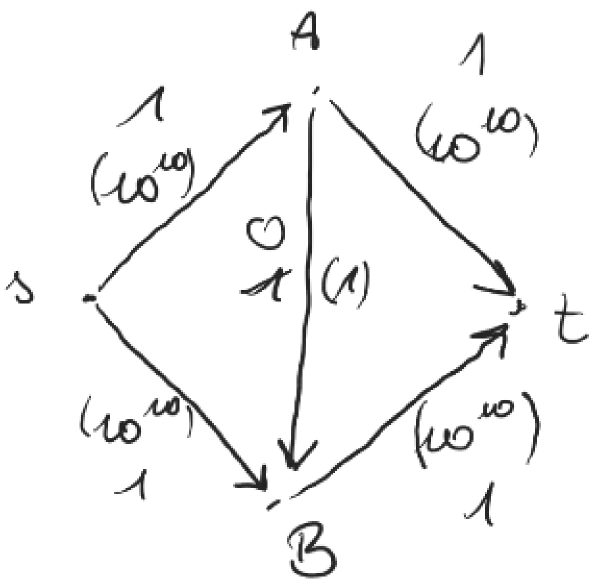
Biz. különben DC benne lenne a segédgráfban $\to C \in X$ ↯

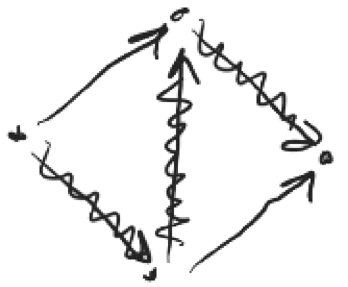
$$m(f) = \underbrace{\sum_{\substack{x\text{-ből} \\ \text{ki}}} f(e)}_{\overset{\text{"}}{\sum_{e\ x\text{-ből ki}} c(e)}} - \underbrace{\sum_{x\text{-be}} f(e)}_{\overset{\text{"}}{0}} = c(x)$$

folyam ir. gr. pontok kapacitás fv.

Ford-Fulkerson: $\langle G, s, t, c \rangle$ . . . .

$$\max_{f \text{ folyam}} m(f) = \min_{x \text{ vágás}} c(x)$$



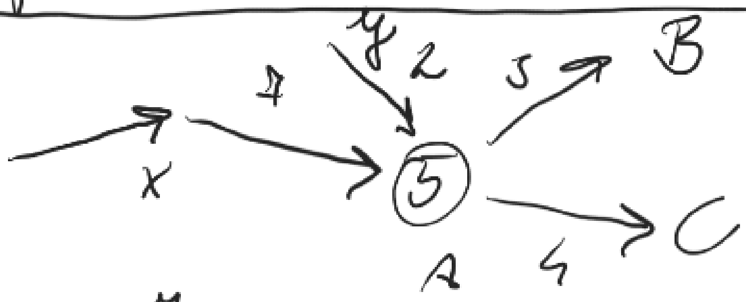


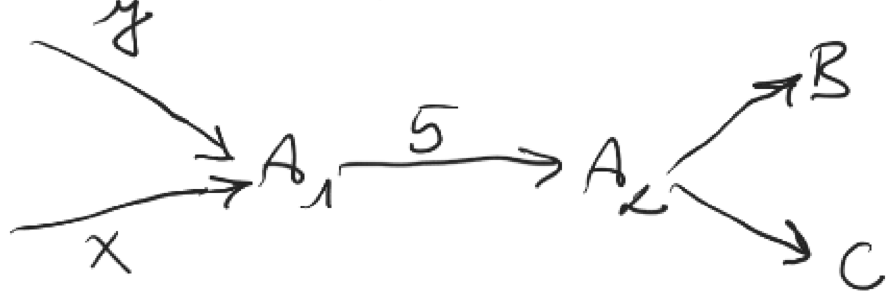
1. segédgráf

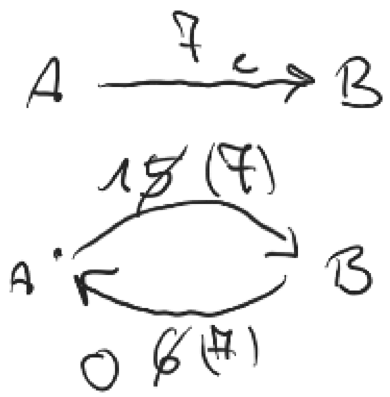
2. segédgráf

EDMONDS-KARP: Ha minden a

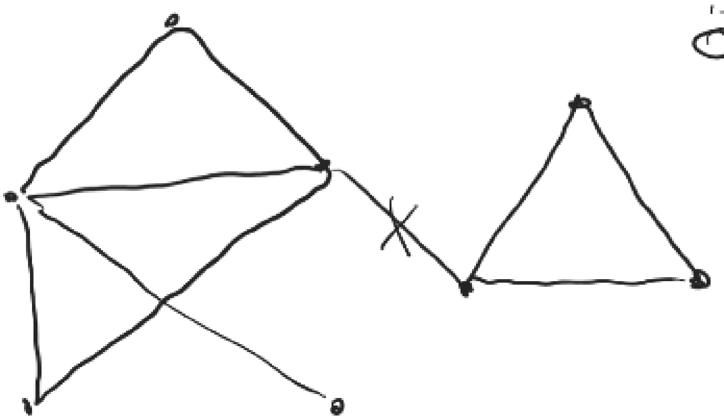
Edmonds Karp: ha mindig a legrövidebb $s \to t$ út mentén javítunk, akkor az algoritmus polinomiális



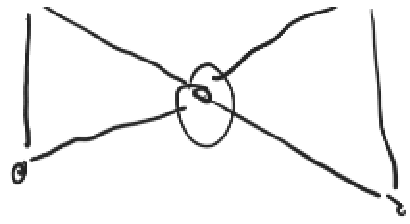




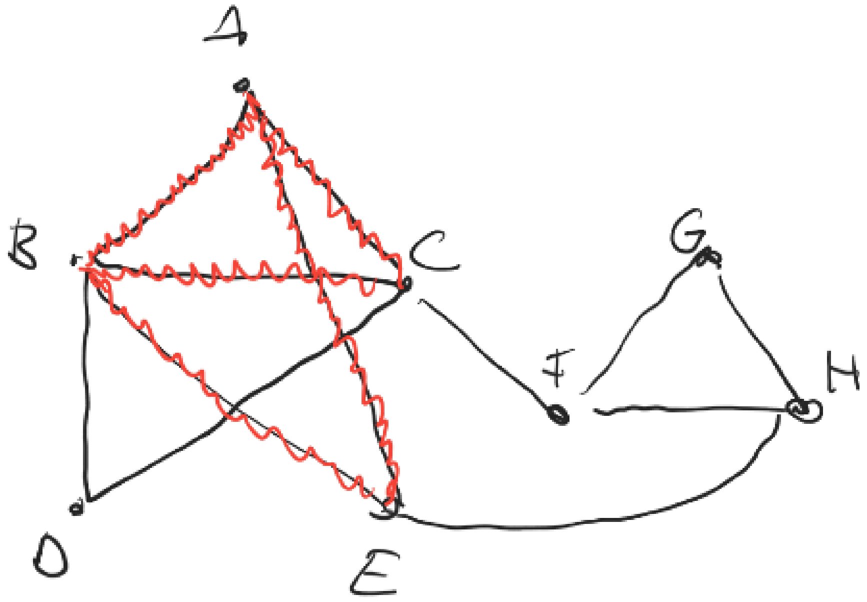
Hálózat



összefüggő, de csak egy él "tartja össze"



— n —
— u — egy csúcs tartja össze



Éldiszjunkt utak: nincs közös élük

$\lambda(u,v)$: u-ból v-be menő éldiszjunkt utak max. száma
↓
lambda

$\lambda(A,B)=3$ (AB, ACB, AEB)

$\lambda'(u,v)$: az $u \to v$ utakat lefogó élhalmazok min. száma

$u \to v$ utakat lefogó

élhalmaz: ha elhagyjuk a gráfból, $\nexists$ $u \to v$ út

$\lambda'(A,B) = ?$ $3 \leq 3$

$\lambda'(u,v) \geq \lambda(u,v)$

<u>Menger tételei</u>: (1) $\lambda'(u,v) = \lambda(u,v)$ $\forall$ ir. gráfban