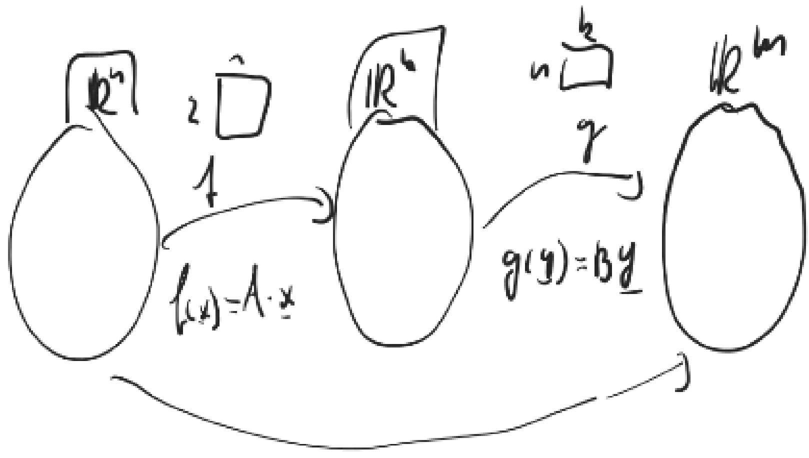
13. hét előadás



$$g\circ f(\underline{x}) = B(A\underline{x}) = (B\cdot A)\underline{x}$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
$g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ lin leképezés, Ekkor $g\circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is lin leképezés

és $[g\circ f] = [g]\cdot[f]$

$f_\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ α szöggel forgatás origó körül

$f_\beta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ β — " —

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = [f_\alpha]$$

$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$

$$[f_\beta] = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = [f_\alpha\circ f_\beta]$$

addíciós tételek

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. lek.: lineáris transzformáció

kölcsönösen egyértelmű

$[f] = A$

$\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = A\cdot\underline{x} = \underline{y}$ $/ \cdot A^{-1}$ balról

$$A^{-1}(A\cdot \underline{x}) = A^{-1}\underline{y}$$
$$\underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{y}$$

T: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. transzf.

(1) f invertálható $\Leftrightarrow$ $\det[f] \neq 0$

(2) Ha $\det[f] \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ is lin. transzf. és $[f^{-1}] = [f]^{-1}$

Bázistranszformáció

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bázis

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. transzf.

$[\underline{x}]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{x} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{[f]} f(x) \in \mathbb{R}^n$

$[\underline{x}]_B \longrightarrow [f(x)]_B$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow b_1, b_2 \dots b_n$ lin ftlen $\Rightarrow \det B \neq 0$

$h: [\underline{x}]_B \to \underline{x}$

$$B \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n \end{pmatrix} = \underline{x}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = [\underline{x}]_B$$

$B \cdot [\underline{x}]_B$

Lemma: $h: [\underline{x}]_B \to \underline{x}$ $\quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ lin. transzf.

és $[h] = B$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "\cdot [f]"] & f(x) \arrow[d, "B^{-1}"] \\
{[x]_B} \arrow[u, "B"] \arrow[r, "g"'] & {[f(x)]_B}
\end{tikzcd}$$

$g: [x]_B \to [f(x)]_B$

$B^{-1} \cdot [f] \cdot B$

$x \xmapsto{\cdot B^{-1}} [x]_B$

Tétel: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. trafó

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq 0$, (B oszlopai bázis $\mathbb{R}^n$-ben)

Ekkor a $g: [x]_B \to [f(x)]_B$ is lin. trafó

és $[g] = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$

Def: A $g: [x]_B \to [f(x)]_B$ lin. trafó mx-át

az f B szerinti mx-ának nevezzük $[f]_B$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. trafó, $\det B \neq 0$

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $[f]_B [x]_B = [f(x)]_B$

(2) $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$

(3) $[f]_B$ i. oszlopa: $[f(b_i)]_B$ $\forall\, i = 1 \ldots n$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- A-nak sajátvektora a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, ha $A \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$

valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$-re és $\underline{v} \neq \underline{0}$

- A-nak sajátértéke a $\lambda \in \mathbb{R}$, ha van olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$, amire $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$