Anal elméleti kérdések

1.

2.6. Az algebra alaptétele

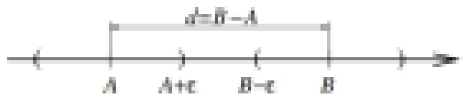
2.10. Tétel *A komplex számok körében minden n-edfokú ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$), $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ alakú egyenletnek ($a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$) pontosan n darab gyöke van, amennyiben az m-szeres gyököket multiplicitással (azaz m-szer) számoljuk.*

2.

1.3.1. A határérték egyértelműsége

Ⓣ *Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *és* $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, *akkor* $A = B$.

Ⓑ Indirekt módon bizonyítunk[3]. Tehát feltesszük, hogy $A \neq B$, például $A < B$.
Legyen $d = B - A > 0$ és $\varepsilon = \dfrac{d}{3} > 0$!



A számsorozat konvergenciája miatt létezik $N_1(\varepsilon)$ és $N_2(\varepsilon)$, hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon),$$
$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon).$$

De ekkor $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmodás, tehát nem igaz, hogy $A \neq B$, vagyis $A = B$. ■

3.

T₁ $\boxed{(a_n \to A) \ \wedge \ (b_n \to B) \quad \Longrightarrow \quad (a_n + b_n \to A + B)}$

B Tehát be kell látni, hogy

$$c_n = a_n + b_n \ \to C = A + B,$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|c_n - C| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Legyen $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2}$! Az a_n és b_n számsorozatok konvergenciája miatt
$\exists N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge N_2(\varepsilon^*) = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy

$$\left.\begin{array}{r} |a_n - A| < \varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1(\varepsilon^*) \\ \text{és} \ \ |b_n - B| < \varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2(\varepsilon^*) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{Ha } n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\},$$

akkor

$$|c_n - C| = |(a_n + b_n) - (A + B)| =$$
$$= |(a_n - A) + (b_n - B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon^* + \varepsilon^* = 2\varepsilon^* = \varepsilon$$

Tehát a keresett $N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$ ■

4.

D A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátját szuprémumnak (felső határnak) nevezzük.

Jele: $\sup H$.

D Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak (alsó határnak) nevezzük.

Jele: $\inf H$.

5.

Ⓓ (Torlódási pont (sűrűsödési pont, sűrűsödési érték):) $t \in \mathbb{R}$, ill. $t = \infty$, vagy $t = -\infty$ az (a_n) torlódási pontja, ha minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza
(Tehát létezik olyan (a_{n_r}) részsorozat, amely t-hez tart.)

($+\infty$ környezetei (P, ∞) alakúak, ahol $P \in \mathbb{R}$. $-\infty$ környezetei $(-\infty, M)$ alakúak, ahol $M \in \mathbb{R}$.)

6.

Átviteli elv:

Ⓣ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall\, x_n \to x_0\text{-ra } f(x_n) \to A \\ x_n \in D_f \\ x_n \neq x_0 \end{array}$$

(P állítás) *(Q állítás)*

7.

3.1.2. Végesben vett határértékek

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \\ 2.\ \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = A \\ 3.\ \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0: \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \quad (x \in \dot{K}_{x_0,\delta}) \\ 2.\ 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3.\ -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \\ 2.\ \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty \\ 3.\ \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) > \Omega, \text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \quad (x \in \dot{K}_{x_0,\delta}) \\ 2.\ 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3.\ -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \\ 2.\ \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty \\ 3.\ \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) < -\Omega, \text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \quad (x \in \dot{K}_{x_0,\delta}) \\ 2.\ 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3.\ -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array}\right.$$

3.1.3. Végtelenben vett határértékek

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists P(\varepsilon) > 0:$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$, ha $x > P(\varepsilon)$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists P(\varepsilon) > 0:$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$, ha $x < -P(\varepsilon)$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\forall \Omega > 0$-hoz $\exists P(\Omega) > 0:$	$f(x) > \Omega$, ha $x > P(\Omega)$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\forall \Omega > 0$-hoz $\exists P(\Omega) > 0:$	$f(x) < -\Omega$, ha $x > P(\Omega)$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall \Omega > 0$-hoz $\exists P(\Omega) > 0:$	$f(x) > \Omega$, ha $x < -P(\Omega)$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall \Omega > 0$-hoz $\exists P(\Omega) > 0:$	$f(x) < -\Omega$, ha $x < -P(\Omega)$

8.

---

ben, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c érté

9.

I. tétele

az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott

Ⓣ ***Weierstrass II. tétele:***

Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor ott felveszi az infimumát, ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \left(= \max_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = \max f([a,b])\right)$$

$$f(\beta) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \left(= \min_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = \min f([a,b])\right)$$

10.

Ⓓ Legyen $K_{x_0,\delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f deriválható (differenciálható) x_0-ban, ha a fenti határérték létezik és véges. Ekkor $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ az f függvény x_0 pontbeli deriváltja (differenciálhányadosa).

11.
Kérdés

12.

3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\underset{\substack{\downarrow\\ f'(x)}}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\;\underset{\substack{\downarrow\\ g(x)}}{g(x+h)} + \underset{\substack{\downarrow\\ f(x)}}{f(x)}\;\underset{\substack{\downarrow\\ g'(x)}}{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}\right)$$

$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ (határérték = helyettesítési érték) oka:

g deriválható x-ben $\Longrightarrow$ g folytonos x-ben

13.

14.

ma (minimuma) van az értelmezési

$\leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$, ha $x \in K$

15.

$\textcircled{\scriptsize T_2}$ *Ha f differenciálható I-n:*

1. *f' monoton nő $\iff$ f konvex*
2. *f' monoton csökken $\iff$ f konkáv*

16.

17.
Elégséges

---

orlátos és monoton $\Longrightarrow \quad f \in R_{[a,b]}$

$\in R_{[a,b]}$

---

pont kivételével folytonos $[a,b]$-*n* $\Longrightarrow$

18.

19.

20.

21.

Last modified: Dec 19, 2018