Integrálni hihetetlenül izgalmas elfoglaltság lesz, sokkal viccesebb, mint deriválni. A titok abban van, hogy amíg mondjuk egy szorzat deriválására volt egyetlen szabály, addig az integrálására lesz legalább öt, ráadásul ezek közül ki is kell tudni választani majd azt az egyet, ami éppen használható. Törtekkel ugyanez a helyzet, talán még picivel rosszabb.

Ahhoz, hogy sikerüljön felülkerekednünk ezeken a kis nehézségeken, az integrálási módszereket úgy csoportosítottuk, hogy a legegyszerűbbtől indulnak a bonyolultabbak felé, tehát ha van egy feladat – sajnos lesz – amit nem tudunk megoldani, akkor lépésről lépésre végig kell menni a módszereken (lásd. 2.oldal) egészen addig, amíg meg nem találjuk a megfelelőt. Ha törtet kell integrálni, akkor például nem hülyeség a törtre vonatkozó módszerekkel próbálkozni, ezek a **T1**, **T2**, **T3** és így tovább. Szorzatokra az **S1**, **S2**, stb. A módszerek rövid áttekintése a következő oldalon található, míg a további oldalakon ezen módszerek részletes leírása szerepel majd. Jó szórakozást!

ALAPINTEGRÁLOK

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ha \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int shx dx = chx + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = arshx + c$$

$$\int chx dx = shx + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = archx + c$$

$$\int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + c$$

$$\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + c$$

INTEGRÁLÁSI SZABÁLYOK

I. $\int c\cdot f = c\int f$

II. $\int f+g = \int f + \int g$

III. $\int \frac{f}{c} = \frac{\int f}{c}$

IV. $\int f\cdot g = nincs\ \ szabály$

AZ ALÁBBI MÓDSZEREKET ALKALMAZHATJUK SZORZAT INTEGRÁLÁSÁRA:

S1 Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.
S2 Ha egy függvény valamely hatványa meg van szorozva az eredeti függvény deriváltjával:

$$\int f^{\alpha}\cdot f' = \frac{f^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

S3 Parciális integrálás:

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

S4 Ha a szorzat egyik tényezője összetett függvény, a másik tényező pedig a belső függvény deriváltja: $\int f(g(x))\cdot g'(x) = F(g(x))$

V. $\int \frac{f}{g} = nincs\ \ szabály$

AZ ALÁBBI MÓDSZEREKET ALKALMAZHATJUK TÖRT INTEGRÁLÁSÁRA:

T1 Próbálkozzunk a tört földarabolásával.

T2 Ha a számlálóban a nevező deriváltja szerepel, akkor: $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

T3 Ha a nevező egy függvény valamely hatványa, a számláló pedig ezen függvény deriváltja:

$$\int \frac{f'}{f^{\alpha}} = \frac{f^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

T4 A törtből csináljunk szorzatot. Ezek után lásd. szorzat integrálása. $\int \frac{f}{g} = \int f\,\frac{1}{g}$

S4 Speciális esetei
T5 Racionális törtfüggvények integrálása
Helyettesítéses integrálás

VI. $\int f\circ g = nincs\ \ szabály$

AZ ALÁBBI MÓDSZEREKET ALKALMAZHATJUK ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEKRE:

S4 Ha a szorzat egyik tényezője összetett függvény, a másik tényező pedig a belső függvény deriváltja: $\int f(g(x))\cdot g'(x) = F(g(x))$

Helyettesítéses integrálás

NÉHÁNY HASZNOS TIPP A MÓDSZEREKHEZ

AZ INTEGRÁLÁSBAN SZEREPEL: gyökös izé

A gyök alatti kifejezés lineáris

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+7}}$$

Ebben az esetben érdemes helyettesítéssel próbálkozni:

$$\sqrt{valami\ kifejezés} = t$$

A gyök alatti kifejezés nem lineáris

$$\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+7x}} \quad \text{vagy} \quad \int \frac{e^x + \cos x}{\sqrt[3]{e^x + \sin x}}$$

Ilyenkor általában érdemes átírni a gyökös izét

$$\sqrt[n]{valami} = (valami)^{\frac{1}{n}}$$

és utána már vagy

$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{1+\alpha}}{1+\alpha} \ \textbf{S2} \ \text{vagy} \ \int \frac{f'}{f^\alpha} = \frac{f^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ \textbf{T3}$$

Kivételt jelentenek a

$\sqrt{1-f}$; $f=cos^2t$

$\sqrt{1+f}$; $f=sh^2t$

$\sqrt{f-1}$; $f=ch^2t$

helyettesítések

AZ INTEGRÁLÁSBAN SZEREPEL: $\ln x$ vagy $\log_a x$

$$\int \frac{\ln^\alpha x}{x} dx$$

A törtből csinálunk szorzatot:

$$\int \frac{\ln^\alpha x}{x} dx = \int \ln^\alpha x \cdot \frac{1}{x} dx$$

ami már megoldható, hiszen $\int f^\alpha f'$ **S2**

$$\int \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} dx$$

A törtből csinálunk szorzatot:

$$\int \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} dx = \int \ln^\alpha x \cdot x^{-\beta} dx$$

ami már parciális integrálás **S3**.

Minden $\int \ln^\alpha x \cdot x^\beta dx$ típusú integrálás parciális integrálás.

AZ INTEGRÁLÁSBAN SZEREPEL: e^{valami} a^{valami} $\cos valami$ $\sin valami$

A kitevő vagy az argumentum tehát a *valami* lineáris.

$\int x\cdot e^{2x}$ $\int (8x+5)\cdot e^{-4x}$ $\int x^2\cdot e^{3x+5}$

$\int x\cdot \sin(6x+7)$ $\int x\cdot \cos 2x$

$\int x\cdot \sin(-4x+3)$ $\int x\cdot \cos(-3x)$

$\int (x^3+x+1)\cdot e^{2x+4}$

Ilyenkor mindig parciális integrálással **S3** kell integrálni.

A kitevő vagy az argumentum tehát a *valami* nem lineáris.

$\int x\cdot e^{x^2}$ $\int 5x^2\cdot e^{-x^3}$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}$ $\int x^2\cdot e^{x^3+1}$

$\int (x+1)\cdot \cos(x^2+2x)$ $\int (x^2+2)\cdot \sin(x^3+6x)$

Ilyenkor ez biztosan nem parciális integrálás, hanem $\int f(g(x))\cdot g'(x)=F(g(x))$ vagyis **S4**.

speciális esetek: $\int e^f\cdot f'=e^f$ és $\int a^f\cdot f'=\frac{a^f}{\ln a}$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

típusú racionális törtfüggvény integrálása

Ha a nevezőt szorzattá lehet alakítani, akkor alakítsuk szorzattá, majd bontsuk föl parciális törtekre

$$\int \frac{2x+2}{x^2+6x+8}dx=\int \frac{2x+2}{(x+2)(x+4)}dx=$$

$$=\int \frac{3}{x+4}-\frac{1}{x+2}dx=3\ln|x+4|-\ln|x+2|$$

Ha a nevezőt nem lehet szorzattá alakítani, akkor alakítsuk ki a számlálóban a nevező deriváltját, aztán daraboljunk:

$$\frac{f'}{f}+arctg$$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+6x+10}dx=\int \frac{\mathbf{2x+6}-4}{x^2+6x+10}dx=$$

$$=\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx-\int \frac{4}{x^2+6x+10}dx=$$

$$=\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx-4\int \frac{1}{(x+3)^2+1}dx=$$

$$=\ln|x^2+6x+10|-4arctg(x+3)$$

A LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS

Ha $\int f(x)dx = F(x)+c$ akkor $\int f(ax+b)dx = F(ax+b)\frac{1}{a}+c$

Itt x helyére egy lineáris kifejezést helyettesítettünk, ezért hívják a tételt lineáris helyettesítésnek. De a módszer – ahogyan ez a nevében is benne van – csak lineáris helyettesítések esetén alkalmazható, tehát, ha a belső függvény $ax+b$ alakú.

PÉLDÁK:

PL.1. $\int \frac{1}{2x+3}dx = \ln|2x+3|\cdot\frac{1}{2}+c$ mert $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$

PL.2. $\int e^{3x+5}dx = e^{3x+5}\cdot\frac{1}{3}+c$ mert $\int e^{x}dx = e^{x}+c$

PL.3. $\int \cos(6x+5)dx = \sin(6x+5)\cdot\frac{1}{6}+c$ mert $\int \cos x dx = \sin x + c$

PL.4. $\int \frac{1}{\cos^2(5x+2)}dx = tg(5x+2)\cdot\frac{1}{5}+c$ mert $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx+c$

PL.5. $\int e^{-2x}dx = e^{-2x}\cdot\frac{-1}{2}+c$ mert $\int e^{x}dx = e^{x}+c$

PL.6. $\int (6x+5)^7 dx = \frac{(6x+5)^8}{8}\cdot\frac{1}{6}+c$ mert $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8}+c$

PL.7 $\int e^{\frac{x}{4}}dx = e^{\frac{x}{4}}\cdot 4+c$ mert $\int e^{x}dx = e^{x}+c$

PL.8 $\int e^{\frac{2x+5}{3}}dx = e^{\frac{2x+5}{3}}\cdot\frac{3}{2}+c$ mert $\int e^{x}dx = e^{x}+c$

PL.9. $\int \sqrt[3]{5x+1}dx = \int (5x+1)^{1/3}dx = \frac{(5x+1)^{4/3}}{4/3}\cdot\frac{1}{5}+c$ mert $\int x^{1/3}dx = \frac{x^{4/3}}{4/3}+c$

Ilyen esetekben amikor a belső függvény nem lineáris, általában az **S4** lesz reményteli módszer:

$\int e^{3x^2+5}dx = ?$

SZORZATOK INTEGRÁLÁSA

S1 Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk

PL.1. $\int (x^2+x)(x^3+x^2+1)dx = \int (x^5+2x^4+x^3+x^2+x)dx$

PL.2. $\int (x^2+1)(x^3+\frac{1}{x}+1)dx = \int (x^5+x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x})dx$

S2 Ha egy függvény meg van szorozva a saját deriváltjával, vagy a függvény valamely hatványa van megszorozva az eredeti függvény deriváltjával, akkor:

$$\int f^{\alpha}\cdot f' = \frac{f^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

Vannak olyan esetek, amikor ez ránézésre látszik.

PL.1. $\int \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

PL.2. $\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{\ln^4 x}{4} + c$

PL.3. $\int \left(x^3+x^2+1\right)^4 (3x^2+2x)dx = \frac{\left(x^3+x^2+1\right)^5}{5} + c$

Megeshet, hogy bele kell fektetnünk egy kis energiát, hogy a feladat $\int f^{\alpha}\cdot f' = \frac{f^{1+\alpha}}{1+\alpha}$ alakot öltsön. Ennek érdekében konstansokkal oszthatunk, vagy szorozhatunk. Itt van például ez:

$$\int \left(2x^3+3x^2\right)^4 (x^2+x)dx$$

Beazonosítjuk, hogy ki lehet az f^{α} tényező, megállapítjuk, hogy $f^{\alpha}=(2x^3+3x^2)^4$ így $f=2x^3+3x^2$ és $f'=6x^2+6x$ nagy kár, hogy a feladatban nem ezzel van szorozva, viszont ha fogjuk szépen és rakunk oda egy 6-os szorzót, akkor már jó is.

$$\int \left(2x^3+3x^2\right)^4 (x^2+x)dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\int \left(2x^3+3x^2\right)^4 (\mathbf{6}x^2+\mathbf{6}x)dx = \frac{1}{6}\frac{\left(2x^3+3x^2\right)^5}{5} + c$$

PÉLDÁK:

PL.1. $\int \left(4x^3+6x^2\right)^9 (x^2+x)dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\int \left(4x^3+6x^2\right)^9 (\mathbf{12}x^2+\mathbf{12}x)dx = \frac{1}{12}\frac{(4x^3+6x^2)^{10}}{10} + c$

PL.2. $\int \sqrt[5]{x^3+3e^x+10}\cdot(x^2+e^x)dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\int \left(x^3+3e^x+10\right)^{\frac{1}{5}} (\mathbf{3}x^2+\mathbf{3}e^x)dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+3e^x+10)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c$

PL.3. $\int \left(x^2-e^x+7\right)^7 (10x-5e^x)dx = 5\int \left(x^2-e^x+7\right)^7 (2x-e^x)dx = 5\frac{(x^2-e^x+7)^8}{8} + c$

S3 PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

Tipikusan parciális integrálással kiszámítható integrálok azok, ahol x hatvány van megszorozva egy „híres” függvénnyel, vagyis:

$\int x\cdot e^x$ $\int x^2\cdot e^x$ $\int x\cdot\sin x$ $\int x\cdot\cos x$ $\int x\cdot\ln x$ $\int (x^3+x+1)\cdot e^x$ $\int x\cdot 5^x$ $\int (x^2+x)\cdot 4^x$ $\int (x^7+x^6)\cdot\ln x$

Ezeken kívül tipikusan parciális integrálás az is, amikor a „híres függvény” egy lineáris helyettesítése van szorozva x hatvánnyal, vagyis:

$\int x\cdot e^{2x}$ $\int x\cdot e^{-4x}$ $\int x^2\cdot e^{3x+5}$ $\int x\cdot\sin(6x+7)$ $\int x\cdot\cos 2x$ $\int x\cdot\sin(-4x+3)$ $\int x\cdot\cos(-3x)$ $\int (x^3+x+1)\cdot e^{2x+4}$ $\int x\cdot 5^{-x}$ $\int x\cdot 3^{-2x}$ $\int x\cdot 7^{2x+3}$ $\int (x^2+x)\cdot 4^{3x}$

Ugyanakkor **tipikusan nem** parciális integrálások azok, ahol a helyettesítés nem lineáris, vagyis

$\int x\cdot e^{x^2}$ $\int (x+1)\cdot 5^{x^2+2x}$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}$ $\int x^2\cdot e^{x^3+1}$ $\int (x+1)\cdot\cos(x^2+2x)$ $\int x\cdot\sin(x^2)$

ezekben az integrálásokban a **belső függvény nem lineáris**. Ilyenkor ne próbálkozzunk a parciális integrálással, mert úgysem jön ki, általában az **S4** a célravezető.
Vagyis jegyezzük meg, hogy a

$\int (x\ hatvány)\cdot e^{valami}$ $\int (x\ hatvány)\cdot a^{valami}$ $\int (x\ hatvány)\cdot\cos(valami)$ stb. esetekben az dönti el, hogy parciálisan integrálunk-e vagy sem, hogy a kitevő, vagy az argumentum tehát a *valami* lineáris-e vagy sem. Ha lineáris, akkor parciálisan integrálunk, ha nem, akkor **S4**.

SZEREPOSZTÁS:

A parciális integrálásnál úgy kell kiosztani a szerepeket, hogy a szorzatban szereplő **x hatványt kell f-nek nevezni** és a másikat g'-nek. A parciális integrálás során így az x hatvány foka eggyel csökken. Emiatt van az, hogy a siker érdekében mindig annyiszor kell parciálisan integrálni egy kifejezést, amekkora abban az x hatványok közül a legnagyobbnak a kitevője.
Fontos kivétel azonban, ha a szorzatban $\ln x$, $\log_a x$ $\mathrm{arctg}x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ szerepel. Ilyenkor ugyanis az eddigiekkel ellentétben azt kell f-nek nevezni!

Példa parciális integrálásra

$$\int x\cdot e^x dx = e^x\cdot x - \int 1\cdot e^x dx = e^x\cdot x - \int e^x dx = e^x\cdot x - e^x + c$$

$f=x$	$g'=e^x$
$f'=1$	$g=e^x$

Ha persze a szorzatban például $\ln x$ szerepel, az kivétel:

$$\int x\cdot\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$f=\ln x$	$g'=x$
$f'=\frac{1}{x}$	$g=\frac{x^2}{2}$

A kivételben megemlített függvényeket szintén parciálisan lehet integrálni, méghozzá úgy, hogy

$\int 1 \cdot \ln x$ $\int 1 \cdot \log_a x$ $\int 1 \cdot arctgx$ $\int 1 \cdot \arcsin x$

példaként nézzünk meg egyet:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Hasonló a helyzet ezekkel is:

$\int \ln^2 x$ $\int \ln^3 x$ $\int arctg^2 x$ $\int \arcsin^4 x$

Ezeket is mind úgy kell felírni, hogy $\int 1 \cdot (a \quad függvény)$

A felsoroltakon kívül akkor érdemes még parciális integrálással próbálkozni, ha olyan szorzattal állunk szemben, aminek egy részét tudjuk integrálni.

S4 Ha a szorzat egyik tényezője összetett függvény, a másik tényező pedig a belső függvény deriváltja, az reményteli:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x))$$

Ez a tétel tulajdonképpen az összetett függvények integrálásáról szól, ám ez még sincs teljesen így. Az a helyzet, hogy pusztán maguknak az összetett függvényeknek az integrálása elég reménytelen vállalkozás. Nem rendelkezik például elemi primitívfüggvénnyel az alábbi integrálokban szereplő függvények közül egyik sem:

$\int e^{x^2}$ $\int 5^{x^2+2x}$ $\int e^{x^3+1}$ $\int \cos(x^2)$ $\int \sin(x^2)$ $\int \cos(x^2+2x)$

A helyzetünk akkor válik reménytelivé, ha ezek a függvények meg vannak szorozva a belső függvényeik deriváltjával, ekkor siet ugyanis segítségünkre **S4**.

PÉLDÁK:

PL.1. $\int (4x+3) \cdot e^{2x^2+3x} dx = e^{2x^2+3x} + C$

PL.2. $\int 3x^2 \cdot 7^{x^3+1} dx = \frac{7^{x^3+1}}{\ln 7} + C$

PL.3. $\int (2x+2) \cdot \sin(x^2+2x) dx = -\cos(x^2+2x) + C$

PL.4. $\int (3x^2+1) \cdot \cos(x^3+x) dx = \sin(x^3+x) + C$

S4 néhány speciális esete

$$\int e^f \cdot f' = e^f \qquad \int a^f \cdot f' = \frac{a^f}{\ln a}$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} = arctgf \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} = \arcsin f$$

PL.5. $\int (2x+3) e^{x^2+3x} dx = e^{x^2+3x} + C$

PL.6. $\int 3x^2 e^{7+x^3} dx = e^{7+x^3} + C$

PL.7. $\int (4x+1)\cdot 5^{2x^2+x} dx = \frac{5^{2x^2+x}}{\ln 5} + C$

PL.8. $\int \frac{2x}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2}\cdot 2x dx = arctg(x^2) + C$

PL.9. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+\left(x^3\right)^2} dx = \frac{1}{3} arctg(x^3) + C$

PL.10. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot \cos x = arctg(\sin x) + C$

PL.11. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\left(\sin^2 x\right)^2} = arctg(\sin^2 x) + C$

Itt is természetesen előfordulhat, hogy bele kell fektetnünk egy kis munkát az $\int f(g(x))\cdot g'(x) = F(g(x))$ alak eléréséhez. Általában két lehetőség van.

A könnyebbik, amikor csak konstansban tér el az integrálandó függvény a reményteli állapottól, a másik, amikor már x-et tartalmazó tényezők is eltérnek.

Ha csak konstansbeli eltérés mutatkozik, az könnyen megoldható:
PÉLDÁK:

PL.1. $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x} dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int (\mathbf{2}x+\mathbf{2}) e^{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} e^{x^2+2x} + c$

PL.2. $\int x^3 \cdot 7^{x^4+1} dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\int \mathbf{4}x^3 7^{x^4+1} dx = \frac{1}{4}\frac{7^{x^4+1}}{\ln 7} + c$

PL.3. $\int x\cdot e^{-x^2} dx = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}\int -\mathbf{2}x\cdot e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + c$

A másik lehetőség, ha a belső függvény deriváltja nem csak konstansban tér el a várttól, hanem x-et tartalmazó tagban is. Ilyenkor alkalmazhatjuk a parciális integrálást – néha a helyettesítéses integrálást. Nézzünk egy példát!

$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$ esetében például a belső függvény deriváltja $2x$, ám sajnálatos módon a szorzó egyáltalán nem $2x$, hanem x^3. Alakítsuk hát úgy, hogy a szorzó valóban $2x$ legyen.

A maradékot természetesen nem vihetjük ki az integrál elé, hiszen az x-et is tartalmaz, de itt jön segítségünkre a parciális integrálás.

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \int \mathbf{2x}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2}\cdot \frac{x^2}{2} dx$$

A vastagított részt direkt úgy csináltuk, hogy alkalmazhassuk rá az **S4**-et, így a parciális integrálás során ez a rész lesz majd, amit integrálunk, míg a maradék az, amit deriválunk:

$f = \frac{x^2}{2}$	$g' = 2xe^{x^2}$
$f' = x$	$g = e^{x^2}$

$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \int \mathbf{2x}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2}\cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^{x^2} - \int x\cdot e^{x^2} dx$ a megmaradó integrálás szintén **S4**, ha x helyett $2x$ van:

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \int 2\mathrm{x}\cdot \mathrm{e}^{x^2}\cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^{x^2} - \int x\cdot e^{x^2} dx = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2}}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int \mathbf{2x}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2} \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2}}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2} + \mathbf{c}$$

Egy másik példa, amikor **S4** alkalmazásához előbb jelentős átalakításokat kell végezni

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

Itt a belső függvény $\sqrt{x}$ aminek a deriváltja $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ és ezzel kéne legyen megszorozva $e^{\sqrt{x}}$.

De mivel nincs, ezért gondoskodunk róla, hogy legyen:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}} \cdot \mathbf{e}^{\sqrt{\mathbf{x}}} \cdot 2\sqrt{x}dx$$

A kapott szorzatot parciálisan integráljuk. Az integrálás során a vastagított részt nevezzük *g'*-nek, hiszen ezt szeretnénk integrálni, míg a másikat *f*-nek. A szerepek:

$f = 2\sqrt{x}$	$g' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
$f' = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$g = e^{\sqrt{x}}$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}} \cdot \mathbf{e}^{\sqrt{\mathbf{x}}} \cdot 2\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}dx$$

ahol a maradék integrálás éppen **S4**:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + K$$

NÉHÁNY TRÜKKÖS ESET:

I. $\int \frac{1}{x\ln^2 x + x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x + 1}dx = arctg(\ln x) + c$

II. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = arctg(e^x) + c$

III. $\int \frac{2^x}{1+4^x}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x \ln 2}{1+(2^x)^2}dx = \frac{1}{\ln 2}arctg(2^x) + c$

IV. $\int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = \int \frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1}dx = \int \frac{2tgx \frac{1}{\cos^2 x}}{(tg^2 x)^2 + 1}dx = arctg(tg^2 x) + c$

V. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}dx = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + c$

VI. $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{1-tg^2 x}}dx = \arcsin(tgx) + c$

TÖRTEK INTEGRÁLÁSA

T1 Próbálkozzunk a tört földarabolásával.

A tört földarabolása általában akkor hasznos, ha a nevező egyetlen tagból (szorzat lehet, csak a tagok száma legyen egy) áll, de néha előfordulhat, hogy több tagból álló nevező esetén is működik a módszer.

PÉLDÁK:

PL.1. $\int \frac{x^3+x^2+1}{x}dx=\int(\frac{x^3}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x})dx=\int x^2+x+\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln|x|+c$

PL.2. $\int \frac{e^{-x}+x^3}{x^3\cdot e^{-x}}dx=\int \frac{e^{-x}}{x^3\cdot e^{-x}}+\frac{x^3}{x^3\cdot e^{-x}}dx=\int \frac{1}{x^3}+\frac{1}{e^{-x}}dx=\int x^{-3}+e^x dx=\frac{x^{-2}}{-2}+e^x+c$

PL.3. $\int \frac{x+\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx=\int \frac{x}{x\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}dx=tgx+\ln|x|+c$

Általánosítva:

$$\int \frac{a+b+c}{d}=\int \frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$$

NÉHÁNY TRÜKKÖS ESET:

I. $\int \frac{ax+b}{cx+d}$ típusú integrálok

I.A $\int \frac{x+6}{x+2}dx=\int \frac{\mathbf{x+2}+4}{\mathbf{x+2}}dx=\int \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{x+2}}+\frac{4}{x+2}dx=\int 1+4\frac{1}{x+2}dx=x+4\ln|x+2|+c$

I.B $\int \frac{4x+5}{2x+3}dx=\int \frac{2(\mathbf{2x+3})-1}{\mathbf{2x+3}}dx=\int \frac{2(\mathbf{2x+3})}{\mathbf{2x+3}}-\frac{1}{2x+3}dx=\int 2-\frac{1}{2x+3}dx=2x-\ln|2x+3|\frac{1}{2}+c$

I.C $\int \frac{4x+7}{3x+1}dx=\int \frac{\frac{4}{3}(\mathbf{3x+1})+\frac{17}{3}}{\mathbf{3x+1}}dx=\int \frac{\frac{4}{3}(\mathbf{3x+1})}{\mathbf{3x+1}}+\frac{\frac{17}{3}}{3x+1}dx=\int \frac{4}{3}+\frac{17}{3}\frac{1}{3x+1}dx=\frac{4}{3}x-\frac{17}{3}\ln|3x+1|\frac{1}{3}$

II. $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx=\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}dx=\int \frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1}dx=\int 1+\frac{2x}{x^2+1}dx=x+\ln|x^2+1|$

T2 Ha a számlálóban a nevező deriváltja szerepel, akkor: $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

PÉLDÁK:

PL.1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx = \ln|x^2+x+4|+c$

PL.2. $\int \frac{1+e^x}{x+e^x+6}dx = \ln|x+e^x+6|+c$

PL.3. $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x|+c$ vagy $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|+c$

Megeshet, hogy a számláló nem a nevező deriváltja, de majdnem. Ilyen esetekben, hogy ihletet merítsünk, deriváljuk le a nevezőt, és hasonlítsuk össze a számlálóval, hogy kiderüljön, mit kell tennünk az $\frac{f'}{f}$ alak eléréséhez.

PÉLDÁK:

PL.1. $\int \frac{x}{2x^2+5}dx$

Itt a nevező deriváltja $4x$, a számlálóban viszont sajna ennél kevesebb x van, így hát be kell szorozni 4-gyel, cserébe pedig az integráljel előtt osztani kell 4-gyel.

$$\int \frac{x}{2x^2+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2+5|+c$$

PL.2. $\int \frac{6x}{x^2+7}dx$

Itt viszont a nevező deriváltja $2x$, de a számlálóban $6x$ van, ami több, mint kéne, ezért kihozunk onnan egy 3-as szorzót.

$$\int \frac{6x}{x^2+7}dx = 3\int \frac{2x}{x^2+7}dx = 3\ln|x^2+7|+c$$

ÉRDEMES MEGJEGYEZNI NÉHÁNY TRÜKKÖS ESETET:

I. $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx \overset{\frac{f'}{f}}{=} \ln|\ln x|+c$

II. $\int \frac{1}{(1+x^2)arctgx}dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arctgx}dx \overset{\frac{f'}{f}}{=} \ln|arctgx|+c$

III. $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot tgx}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx}dx \overset{\frac{f'}{f}}{=} \ln|tgx|+c$

T3 Ha a nevező egy függvény valamely hatványa, a számláló pedig ezen függvény deriváltja:

$$\int \frac{f'}{f^{\alpha}} = \frac{f^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

PÉLDÁK:

PL.1. $\int \frac{2x+5}{\left(x^2+5x+4\right)^3}dx = \frac{\left(x^2+5x+4\right)^{-2}}{-2}+c$

PL.2. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{x^2-7x+9}}dx = \int \frac{2x-7}{\left(x^2-7x+9\right)^{1/2}}dx = \frac{\left(x^2-7x+9\right)^{1/2}}{1/2}+c$

PL.3. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx = \frac{\sin^{-3} x}{-3}+c$

PL.4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx = \int \frac{\cos x}{(\sin x)^{2/3}}dx = \frac{(\sin x)^{1-2/3}}{1-2/3}+c$

Itt is megeshet persze, hogy bizonyos konstansokkal alakítunk kicsit a számlálón.
PÉLDÁK:

PL.1. $\int \frac{x+3}{\left(x^2+6x+7\right)^5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\left(x^2+6x+7\right)^5}dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+6x+7\right)^{-4}}{-4}+c$

PL.2. $\int \frac{x^2+6x}{\sqrt[4]{x^3+9x^2+8}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^3+18x}{\left(x^3+9x^2+8\right)^{1/4}}dx = \frac{1}{3}\frac{\left(x^3+9x^2+8\right)^{1-\frac{1}{4}}}{1-\frac{1}{4}}+c$

Pl.3. $\int \frac{7x}{\sqrt[5]{x^2+9}}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+9\right)^{1/5}}dx = \frac{7}{2}\frac{\left(x^2+9\right)^{1-\frac{1}{5}}}{1-\frac{1}{5}}+c$

Pl.4. $\int \frac{x-e^{-2x}}{\left(x^2+e^{-2x}\right)^7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2e^{-2x}}{\left(x^2+e^{-2x}\right)^7}dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+e^{-2x}\right)^{-6}}{-6}+c$

Előfordulhat az is, hogy parciális integrálással kell kombinálni. Ilyen például a következő:

$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{3+x^2}}dx$ A számlálóba ugyanis x^3 helyett elegendő volna x is, pontosabban $2x$.

Felbontjuk hát az x^3-öt két részre:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{3+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 \cdot 2x}{\sqrt[4]{3+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt[4]{3+x^2}}dx$$

A kapott szorzatot parciálisan fogjuk integrálni. A szerepek világosak, $\frac{2x}{\sqrt[4]{3+x^2}}$ -et direkt úgy alakítottuk, hogy integrálhassuk, ezt nevezzük hát g'-nek, míg x^2-et f-nek.

$f=x^2$	$g'=\frac{2x}{\sqrt[4]{3+x^2}}$
$f'=2x$	$g=\int\frac{2x}{\sqrt[4]{3+x^2}}dx=\int\frac{2x}{(3+x^2)^{1/4}}dx=\frac{(3+x^2)^{3/4}}{3/4}$

$$\int x^2\cdot\frac{2x}{\sqrt[4]{3+x^2}}dx=x^2\cdot\frac{(3+x^2)^{3/4}}{3/4}-\int 2x\cdot\frac{(3+x^2)^{3/4}}{3/4}dx=x^2\cdot\frac{(3+x^2)^{3/4}}{3/4}-\frac{4}{3}\int 2x\cdot(3+x^2)^{3/4}dx$$

ahol a maradék integrálás már könnyű, hiszen **S2** szerint $\int 2x\cdot(3+x^2)^{3/4}dx=\frac{(3+x^2)^{3/4+1}}{3/4+1}+c$

NÉHÁNY TRÜKKÖS ESET:

I. $\int\frac{1}{x\ln^2x}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2x}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}+c$

II. $\int\frac{1}{x\ln^3x}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln^3x}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(\ln x)^{-2}}{-2}+c$

III. $\int\frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^{1/2}}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(\ln x)^{1-1/2}}{1-1/2}+c$

IV. $\int\frac{1}{x\cdot\sqrt[5]{\ln x}}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^{1/5}}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(\ln x)^{1-1/5}}{1-1/5}+c$

V. $\int\frac{1}{x\cdot\sqrt[4]{\ln^3x}}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^{3/4}}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(\ln x)^{1-3/4}}{1-3/4}+c$

VI. $\int\frac{1}{\cos^2x\cdot tg^3x}dx=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{tg^3x}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(tgx)^{-2}}{-2}+c$

VII. $\int\frac{1}{\cos^2x\cdot\sqrt[4]{tg^3x}}dx=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{(tgx)^{3/4}}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(tgx)^{1-3/4}}{1-3/4}+c$

VIII. $\int\frac{1}{\sin^2x\cdot\sqrt[3]{ctg^2x}}dx=\int\frac{\frac{-1}{\sin^2x}}{(ctgx)^{2/3}}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(ctgx)^{1-2/3}}{1-2/3}+c$

IX. $\int\frac{1}{(1+x^2)arctg^2x}dx=\int\frac{\frac{1}{1+x^2}}{arctg^2x}dx\overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=}\frac{(arctgx)^{-1}}{-1}+c$

X. $$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{(arctgx)^{1/2}}dx \overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=} \frac{(arctgx)^{1/2}}{1/2}+c$$

XI. $$\int \frac{1}{(1+x^2)\cdot\sqrt[3]{arctg^2 x}}dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{(arctgx)^{2/3}}dx \overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=} \frac{(arctgx)^{1/3}}{1/3}+c$$

XII. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[3]{\arcsin^2 x}}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^{2/3}}dx \overset{\frac{f'}{f^\alpha}}{=} \frac{(\arcsin x)^{1/3}}{1/3}+c$$

T4 A törtből csináljunk szorzatot. Ezek után lásd. szorzat integrálása. $\int \frac{f}{g} = \int f\,\frac{1}{g}$

PÉLDÁK:

$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \frac{1}{x}dx$ ami már **S2** vagy $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = \int \ln^4 x \frac{1}{x}dx$ ami szintén **S2**, de hasonlóan intézhetők el:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x+7}}{x}dx = \int \sqrt{\ln x+7}\cdot\frac{1}{x}dx = \int (\ln x+7)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx \overset{S2}{=} \frac{(\ln x+7)^{3/2}}{3/2}+c$$

vagy

$$\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx = \int (tgx)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \overset{S2}{=} \frac{(tgx)^{4/3}}{4/3}+c$$

Vagy

$$\int \frac{x}{e^{x^2}}dx = \int x\cdot\frac{1}{e^{x^2}}dx = \int x\cdot e^{-x^2}dx$$

ami már – némi átalakítás után – **S4** segítségével integrálható.

$$\int x\cdot e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2x\, e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2}+C$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést t-vel helyettesítünk annak reményében, hogy így majd meg tudjuk oldani a feladatot. Tipikusan helyettesítéses integrálás, ha a gyök alatt valamilyen lineáris kifejezés szerepel. Nézzünk erre egy példát!

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x+3}}dx = ?$$

Az ilyen esetekben az egész gyökös kifejezést érdemes elnevezni t-nek.
$\sqrt{x+3} = t$ Ebből kifejezzük x-et: $x+3 = t^2$ és így $x = t^2 - 3$ eddig minden rendben is van.
De sajna van itt még egy dolog. Az, hogy a dx-et is le kell cserélni, mégpedig a következőképpen. A kifejezett x-et deriváljuk t szerint:

$x = t^2 - 3$ tehát $x' = 2t$ amit azonban úgy írunk, hogy $\frac{dx}{dt} = 2t$

Réges-régen ugyanis az emberek még nem a jól ismert f' jelölést használták a deriválásra, hanem azt, hogy
$\frac{df}{dx}$

Később aztán egyszerűsítették a jelöléseket, de valamilyen rejtélyes okból itt a helyettesítéses integrálásnál mégis megmaradt az ősi módszer. Lehetne ezt picit másképp is csinálni, akit érdekel majd olvassa el, hamarosan lesz róla szó, de valamiért mindenütt ez a dx-es bűvészkedés maradt az általánosan elterjedt eljárás.
Szóval törődjünk bele, hogy a kifejezett x-nek a deriváltja $\frac{dx}{dt} = 2t$ amiből $dx = 2t\ dt$.

Most jön a helyettesítés, x helyére megy $x = t^2 - 3$ a gyök helyére $\sqrt{x+3} = t$ és a dx-et is le kell cserélni: $dx = 2t\ dt$.

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x+3}}dx = \int \frac{2(t^2-3)+5}{t}2t\ dt = \int \frac{2t^2-1}{t}2t\ dt = \int (2t^2-1)2dt = \int 4t^2 - 4dt = 4\frac{t^3}{3} - 4t$$

Az integrálás végén visszahelyettesítjük t helyére, hogy ki is valójában. Ekkor a megoldás:

$$4\frac{t^3}{3} - 4t = 4\frac{\sqrt{x+3}^3}{3} - 4\sqrt{x+3} + C$$

Nézzünk egy másik hasonlóan izgalmas esetet.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}dx = ?$$

Megint az egész gyökös kifejezést nevezzük t-nek:
$\sqrt{x+4} = t$ ekkor $x+4 = t^2$ vagyis $x = t^2 - 4$ tehát $x' = 2t$ amit úgy írunk, hogy $\frac{dx}{dt} = 2t$
Most jön a helyettesítés:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}dx = \int \frac{t^2-4}{t-2}2t\ dt = \int \frac{(t-2)(t+2)}{t-2}2t\ dt = \int (t+2)2t\ dt = \int 2t^2+4t\ dt = 2\frac{t^3}{3}+4\frac{t^2}{2}$$

Végül t helyére visszarakjuk a gyökös izét.

$$2\frac{t^3}{3}+4\frac{t^2}{2} = 2\frac{\sqrt{x+4}^3}{3}+4\frac{\sqrt{x+4}^2}{2}+C$$

Íme itt van most egy picit más megközelítése a helyettesítésnek.
Ha az integrálandó függvényben ugyanaz a kifejezés többször is előfordul, akkor próbálkozhatunk annak elnevezésével. Hagyományosan t szokott lenni az új változó. Fontos azonban látnunk, hogy a helyettesítés során az integrálandó kifejezés általában megváltozik. Ezt a változást írja le az úgynevezett integrál-transzformációs formula:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Az integrál-transzformációs formula azt mondja, hogy ha az integrálandó függvényben x helyére egy $\varphi(t)$ függvényt helyettesítünk, akkor az így kapott kifejezést még meg kell szorozni a $\varphi(t)$ helyettesítés deriváltjával, vagyis $\varphi'(t)$-vel. Nézzünk erre egy példát!

$$\int \frac{3e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x+1+e^{-x}}dx$$

Ésszerűnek tűnik az $e^x=t$ helyettesítés. Ekkor mi is az a bizonyos $\varphi(t)$ függvény? Mivel $e^x=t$ ezért ebből az x-et kifejezve $x=\ln t$. Vagyis ez van az x helyére helyettesítve, tehát $\varphi(t)=\ln t$ és így $\varphi'(t)=1/t$. Az integrál-transzformációs formula szerint

$$\int \frac{3e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x+1+e^{-x}}dx = \int \underbrace{\frac{3t^2+2t+1}{t^2+t+1+\frac{1}{t}}}_{f(\varphi(t))}\cdot\underbrace{\frac{1}{t}}_{\varphi'(t)}dt =$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Folytatva az integrálást:

$$= \int \frac{3t^2+2t+1}{t^2+t+1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{3t^2+2t+1}{t^3+t^2+t+1}dt \overset{f'/f}{=} \ln(t^3+t^2+t+1)+K = \ln(e^{3x}+e^{2x}+e^x+1)+K$$

A köztudatban furcsa módon nem a $\varphi(t)$ belső függvényes gondolatmenet van elterjedve, hanem a már korábban látott dx-es dt-s bűvészkedés, amely lényegét tekintve ugyanez, mindössze jelölésbeli különbségek vannak.

Nézzünk meg egy gyökös esetet is ebben a $\varphi(t)$ belső függvényes verzióban.

$$\int \frac{6x+5}{\sqrt{3x+1}}dx$$

Ilyenkor a nevezőben lévő gyökös kifejezést érdemes elnevezni *t*-nek,

tehát $t=\sqrt{3x+1}$ így $t^2=3x+1$ és $x=\frac{t^2-1}{3}$.

Ez utóbb lesz a $\varphi(t)$ függvény,

vagyis $\varphi(t)=\frac{t^2-1}{3}$ és $\varphi'(t)=\frac{2t}{3}$.

A helyettesítést elvégezve feladatunk a következőképpen alakul:

$$\int \frac{6x+5}{\sqrt{3x+1}}dx = \int \frac{6\frac{t^2-1}{3}+5}{t}\cdot\frac{2t}{3}dt = \int \frac{2t^2-2+5}{t}\cdot\frac{2t}{3}dt = \int \frac{4t^2+6}{3}dt = \frac{4\frac{t^3}{3}+6t}{3}+c$$

Itt még *t* helyére vissza kell helyettesíteni és kész is.

$$\frac{4\frac{t^3}{3}+6t}{3}+c = \frac{4\frac{\sqrt{3x+1}^3}{3}+6\sqrt{3x+1}}{3}+c = 4\frac{\sqrt{3x+1}^3}{9}+2\sqrt{3x+1}+C$$

1. GYÖKÖS KIFEJEZÉSEK HELYETTESÍTÉSE

$$\int \sqrt{ax+b}(cx+d)dx \qquad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}dx \qquad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}+ex+f}dx \qquad \int \frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}+ex+f}{cx+d}dx \qquad \int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx$$

$\sqrt{valami \;\; lineáris \;\; kifejezés}$ vagy $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ esetekben mindig az egész gyökös kifejezést kell elnevezni *t*-nek. Ha $\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[4]{\ }$ stb. van, akkor is mindig az egész gyökös kifejezést kell *t*-nek nevezni. Ha viszont a gyökjel alatt nem lineáris kifejezés van, akkor más módszer kell!

$\sqrt{1-f}$ *esetén f=cos²t*

$\sqrt{1+f}$ *esetén f=sh²t*

$\sqrt{f-1}$ *esetén f=ch²t*

2. ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA HELYETTESÍTÉSSEL (HA LEHET)

Vannak olyan összetett függvények, amelyek – mivel nincsenek megszorozva a belső függvény deriváltjával – **S4** segítségével nem integrálhatóak. Ilyenkor érdemes azzal próbálkozni, hogy a belső függvényt elnevezzük *t*-nek. Például az

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

esetében tehát a $t=\sqrt{x}$, vagyis $x=t^2$ így $\varphi(t)=t^2$ helyettesítést alkalmazzuk, $\varphi'(t)=2t$.
A helyettesítéssel integrálásunk a következőképpen alakul:

$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t\cdot 2tdt$ ami már egy egyszerű parciális integrálás.

Szintén érdemes helyettesítéssel próbálkozni ennél az összetett függvénynél, hogy

$$\int \sin\ln x dx$$

A helyettesítés legyen $t=\ln x$, vagyis $x=e^t$ így $\varphi(t)=e^t$ helyettesítést alkalmazzuk, ahol $\varphi'(t)=e^t$. A helyettesítést elvégezve a feladat a következőképpen alakul:

$$\int \sin\ln x dx=\int \sin t\cdot e^t dt$$

Ezt pedig parciálisan tudjuk integrálni, a megoldás a trigonometrikus függvények integrálása IV. pontjában található.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ racionális törtfüggvény integrál kiszámolását azzal kell kezdenünk, hogy ellenőrizzük, teljesül-e a $deg(p(x))<deg(q(x))$ feltétel. Ha ez nem teljesül, akkor polinom osztással el kell érnünk, hogy teljesüljön.

Ezek után a nevezőt föl kell bontani elsőfokú, vagy tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára. Az algebra alaptétele miatt ez – legalábbis elviekben – mindig lehetséges. Ha ez megtörtént, a racionális törtfüggvény felbontható elemi törtek összegére, a parciális törtekre bontás módszerével. Előbb azonban definiáljuk az elemi törteket. Kétféle elemi tört létezik:

I. $\frac{A}{ax+b}$ II. $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

A II. elemi törtnél azonban $a\neq 0$ és b^2-$4ac<0$ vagyis a nevezőben szereplő másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, így az nem alakítható elsőfokú tényezők szorzatára.

Most lássuk, az egyes elemi törtek miként integrálhatók.

I. $\int \frac{A}{ax+b}dx = A\int \frac{1}{ax+b}dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}+K$

II. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx =$ elsőként a számlálót úgy alakítjuk, hogy a tört $\frac{f'}{f}$ alakú legyen. Mivel a nevező deriváltja $2ax+b$, ezért ezt igyekszünk kialakítani a számlálóban.

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{\mathbf{2ax}+\mathbf{b}+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx =$$

Felbontjuk két integrál összegére, és $\frac{2aB}{A}-b$ helyett a jóval kellemesebb E-t írjuk.

$$\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+E}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}+\frac{E}{ax^2+bx+c}dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{E}{ax^2+bx+c}dx\right)$$

Látszik, hogy a két integrál közül az első éppen kívánalmunknak megfelelően $\frac{f'}{f}$ alakú, ezzel már sok gond nincs: $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln(ax^2+bx+c)+K$

A második integrállal kell hát még foglalkoznunk. $\int \frac{E}{ax^2+bx+c}dx$ mindig egy *arctgx*-re vezető integrál lesz. A mechanizmus pedig a következő:

$$\int \frac{E}{ax^2+bx+c}dx = E\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

A nevezőben teljes négyzetet alakítunk ki:

$$E\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{E}{a}\int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}dx=\frac{E}{a}\int \frac{1}{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}dx=$$

Itt a nevezőben megjelenik a teljes négyzet. A mögötte létrejövő tagot az egyszerűség kedvéért elnevezzük D-nek.

$$=\frac{E}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}dx=\frac{E}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+D}dx$$

Végső lépésként a D-t is kiemeljük a nevezőből:

$$\frac{E}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+D}dx=\frac{E}{aD}\int \frac{1}{\frac{1}{D}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1}dx=\frac{E}{aD}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x+\frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)^2+1}dx$$

Az így kapott integrál *arctgx*-nek egy lineáris helyettesítése:

$$\frac{E}{aD}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x+\frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)^2+1}dx=\frac{E}{aD}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x+\frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}+K$$

PÉLDÁK:

Oldjunk meg egy feladatot:

$$\int \frac{5x^2+14x+5}{x^3+4x^2+5x}dx$$

Elsőként ellenőrizzük, hogy a számláló foka kisebb-e mint a nevezőé. Esetünkben ez most teljesül. Utána a nevezőt elsőfokú és tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára kell bontanunk. Először is $x^3+4x^2+5x=x(x^2+4x+5)$ itt azonban a zárójelben lévő másodfokú már nem bontható tovább. Negatív ugyanis a diszkriminánsa. Kész van hát a szorzattá alakítás:

$$\int \frac{5x^2+14x+5}{x^3+4x^2+5x}dx=\int \frac{5x^2+14x+5}{x\left(x^2+4x+5\right)}dx$$

A nevezőben lévő tényezők lesznek a parciális törtek nevezői. Most még csak a nevezőket ismerjük. A felbontás valahogy így néz tehát ki:

$$\int \frac{5x^2+14x+5}{x^3+4x^2+5x}dx=\int \frac{5x^2+14x+5}{x\left(x^2+4x+5\right)}dx=\int \frac{}{x}+\frac{}{x^2+4x+5}dx$$

Most ki kell találnunk a számlálókat. Egyelőre nem a konkrét számlálókat, csak a paraméteres alakjukat. Mit is jelent ez? Azt, hogy törtünket a már korábban definiált elemi törtekre szándékozunk felbontani. Elemi törtből márpedig kétféle van. Az I. típusú elemi tört olyan, hogy nevezője elsőfokú, míg a II. típusú elemi tört olyan, hogy a nevezője másodfokú, és nem bontható elsőfokú tényezők szorzatára. A felbontás során tehát **mindig a nevezőkből indulunk ki!** Az első tört nevezője szemmel láthatóan elsőfokú, így ez minden bizonnyal csak egy I. típusú elemi tört lehet. A számláló tehát valami A. Második törtünk nevezője viszont x^2+4x+5 ami egy másodfokú kifejezés, így hát ez a tört szükségképpen II. típusú, ekként számlálója $AX+B$ alakú, ám A már foglalt, tehát legjobb lesz, ha $Bx+C$ lesz a számláló. Innen kapjuk, hogy

$$\int \frac{5x^2+14x+5}{x^3+4x^2+5x}dx=\int \frac{5x^2+14x+5}{x\left(x^2+4x+5\right)}dx=\int \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}dx$$

Világos, hogy ekkor

$$\frac{5x^2+14x+5}{x\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

Amiből keresztbeszorzással: $5x^2+14x+5=A(x^2+4x+5)+x(Bx+C)$
Vagyis összevonva a jobb oldalt: $5x^2+14x+5=(A+B)x^2+(4A+C)x+5A$
A különböző x hatványok együtthatói a két oldalon meg kell, hogy egyezzenek, ezért hát

$5=A+B$
$14=4A+C$
$5=5A$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $A=1;\ B=4;\ C=10$. Ekkor:

$$\int\frac{5x^2+14x+5}{x^3+4x^2+5x}dx=\int\frac{5x^2+14x+5}{x\left(x^2+4x+5\right)}dx=\int\frac{1}{x}+\frac{4x+10}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{4x+10}{x^2+4x+5}dx$$

Az első tag nyilvánvalóan $\ln x$ lesz, míg a második tag esetében először f'/f alakot kell kihozni, majd a maradékból arcustangens lesz:

$$\int\frac{4x+10}{x^2+4x+5}dx=2\int\frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx=2\int\frac{\mathbf{2x+4}+1}{\mathbf{x^2+4x+5}}dx=2\int\frac{\mathbf{2x+4}}{\mathbf{x^2+4x+5}}+\frac{1}{x^2+4x+5}dx=$$
$$=2\left(\int\frac{\mathbf{2x+4}}{\mathbf{x^2+4x+5}}dx+\int\frac{1}{x^2+4x+5}dx\right)$$

Az első tag célunknak megfelelően f'/f, míg a második tag arcustangensre vezet.

$$\int\frac{\mathbf{2x+4}}{\mathbf{x^2+4x+5}}\mathbf{dx}=\mathbf{ln}(\mathbf{x^2+4x+5})+K$$
$$\int\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=arctg(x+2)+K$$

Nézzünk egy másik példát is:

$$\int\frac{14x^2+12x+2}{6x^3+8x^2+2x}dx$$

A nevezőt szorzattá alakítjuk. Elsőként kiemelünk x-et: $6x^3+8x^2+2x=x(6x^2+8x+2)$. Most megvizsgáljuk, a másodfokú tényező tovább bontható-e. a másodfokú egyenlet megoldó képlete alapján vannak gyökei, vagyis igen: $6x^3+8x^2+2x=x(6x^2+8x+2)=x(2x+2)(3x+1)$.
Ekkor:

$$\int\frac{14x^2+12x+2}{6x^3+8x^2+2x}dx=\int\frac{14x^2+12x+2}{x(2x+2)(3x+1)}dx=\int\frac{\ }{x}+\frac{\ }{2x+2}+\frac{\ }{3x+1}dx$$

A számlálókat most is a nevezőkből következtetjük ki. Mivel mindhárom nevező elsőfokú, mindhárom tört I. típusú elemi tört, így a számlálók A, B, C lesz.

$$\int\frac{14x^2+12x+2}{6x^3+8x^2+2x}dx=\int\frac{14x^2+12x+2}{x(2x+2)(3x+1)}dx=\int\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+2}+\frac{C}{3x+1}dx$$

Az előző példában látott módon, keresztbeszorzással kapjuk A, B, C értékét, ezúttal $A=1$, $B=2$ $C=1$, tehát

$$\int\frac{14x^2+12x+2}{6x^3+8x^2+2x}dx=\int\frac{14x^2+12x+2}{x(2x+2)(3x+1)}dx=\int\frac{1}{x}+\frac{2}{2x+2}+\frac{1}{3x+1}dx=\ln|x|+2\ln|2x+2|\frac{1}{2}+\ln|3x+1|\frac{1}{3}+K$$

Itt egy harmadik példa:

$$\int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x^2+15x+7)}dx$$

A nevezőt ezúttal is elsőfokú és tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára kell bontani. Mivel $2x^2+15x+7$ tovább bontható, hiszen $2x^2+15x+7=(2x+1)(x+7)$ ezért a nevező szorzattá bontása a következő:

$$\int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x^2+15x+7)}dx = \int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x+1)(x+7)}dx$$

Most jön az elemi törtekre bontás. Mint látjuk, a nevezőben az egyik elsőfokú tényező kétszer is szerepel. Ilyenkor úgy bontunk elemi törtekre, hogy az egyik elemi tört nevezője $(2x+1)$, a másiké $(2x+1)^2$, míg a harmadiké $(x+7)$. Ha egy adott tényező háromszor fordulna elő a nevezőben, akkor az elemi törtekre bontásnál analóg módon lenne egy első egy második és egy harmadik hatványa, és így tovább.

$$\int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x^2+15x+7)}dx = \int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x+1)(x+7)}dx = \int \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{x+7}dx$$

A, B, C értékét a szokott módon találjuk ki:

$$\frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x+1)(x+7)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{x+7}$$

amiből keresztbeszorzással

$6x^2+20x+15=A(2x+1)(x+7)+B(x+7)+C(2x+1)^2$

és fölbontva a zárójeleket:

$6x^2+20x+15=(2A+4C)x^2+(15A+B+4C)x+7A+7B+C$

és így

$6=2A+4C$
$20=15A+B+4C$
$15=7A+7B+C$

Megoldjuk az egyenletrendszert
$A=1;\ B=1;\ C=1$ és így

$$\int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x^2+15x+7)}dx = \int \frac{6x^2+20x+15}{(2x+1)(2x+1)(x+7)}dx = \int \frac{1}{(2x+1)} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x+7}dx =$$

$$= \int \frac{1}{(2x+1)} + (2x+1)^{-2} + \frac{1}{x+7}dx = \ln|2x+1| \cdot \frac{1}{2} + \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} + \ln|x+7| + K$$

Íme itt egy összefoglaló példa, amin minden fontos lépést megnézhetünk:

$$\int \frac{x^5-3x^4+9x^3+7x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx$$

Elsőként polinom osztásra lesz szükség, mivel a számlálónak kisebb fokúnak kell lennie, mint a nevezőnek.

$$x^5-3x^4+9x^3+7x^2+5x+9:\left(x^4-4x^3+9x^2\right)=x+1$$
$$0+1x^4+0x^3+7x^2+5x+9$$
$$0+\ \ 0+\ \ 4x^3-2x^2+5x+9$$

A polinom osztás eredménye:

$$\int \frac{x^5-3x^4+9x^3+7x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx=\int x+1+\frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx$$

Az első két tagot integráljuk, aztán rátérünk a törtre, ahol a számláló már kisebb fokú, mint a nevező.

$$\int x+1+\frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx$$

A nevezőt ezúttal is elsőfokú és tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára kell bontani. Először kiemelünk x^2-et:

$$\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx=\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^2\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx$$

Aztán megnézzük, hogy a maradék másodfokú rész szorzattá alakítható-e. Kiderül, hogy nem. Az x^2 viszont felírható úgy, hogy $x\cdot x$, sőt fel is kell így írni:

$$\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^2\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx=\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x\cdot x\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx$$

Most jön az elemi törtekre bontás. Mint látjuk, a nevezőben az egyik elsőfokú tényező kétszer is szerepel. Ilyenkor úgy bontunk elemi törtekre, hogy az egyik elemi tört nevezője x, a másiké x^2, míg a harmadiké ugye x^2-4x+9. Ha egy adott tényező háromszor fordulna elő a nevezőben, mondjuk $x\cdot x\cdot x$, akkor az elemi törtekre bontásnál analóg módon lenne egy első egy második és egy harmadik hatványa, és így tovább.

$$\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^2\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx=\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x\cdot x\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx=\int \frac{}{x}+\frac{}{x^2}+\frac{}{x^2-4x+9}dx$$

Most ki kell találnunk a számlálókat. Az első tört nevezője szemmel láthatóan elsőfokú, így a számláló valami A. A második tört nevezője elsőfokú kifejezés négyzete ezért itt a számláló szintén valami A, de mivel A már foglalt, legyen B. Végül a harmadik törtünk nevezője x^2-4x+9 ami egy másodfokú kifejezés, így hát ennek a számlálója valami $Ax+B$ alakú kell, hogy legyen, ám A és B már foglalt, tehát legjobb lesz a $Cx+D$.

$$\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^2\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx=\int \frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x\cdot x\cdot\left(x^2-4x+9\right)}dx=\int \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+9}dx$$

A, B, C, D értékét a szokott módon találjuk ki:

$$\frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^2\left(x^2-4x+9\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+9}$$

amiből keresztbeszorzással

$$4x^3-2x^2+5x+9=Ax\left(x^2-4x+9\right)+B\left(x^2-4x+9\right)+(Cx+D)x^2$$

és fölbontva a zárójeleket:

$$4x^3-2x^2+5x+9=Ax^3-4Ax^2+9Ax+Bx^2-4Bx+9B+Cx^3+Dx^2$$

Nézzük meg hány x^3, hány x^2, hány x van a jobb oldalon.

$$4x^3-2x^2+5x+9=(A+C)x^3+(-4A+B+D)x^2+(9A-4B)x+9B$$

Jön az egyenletrendszer:

4=A+C
-2=-4A+B+D
5=9A-4B
9=9B

Amiből *A=1; B=1; C=3; D=1* és így a felbontás:

$$\int\frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^2\left(x^2-4x+9\right)}dx=\int\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3x+1}{x^2-4x+9}dx=$$

Az első két tag már kész is:

$$\int\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}+x^{-2}dx=\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}$$

A harmadik tagból először *f'/f* alakot kell kihozni, majd a maradékból arcustangens lesz:

$$\int\frac{3x+1}{x^2-4x+9}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(\mathbf{2x-4})+7}{\mathbf{x^2-4x+9}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(\mathbf{2x-4})}{\mathbf{x^2-4x+9}}+\frac{7}{x^2-4x+9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{x^2-4x+9}}dx+\int\frac{7}{x^2-4x+9}dx=$$

Az első tag célunknak megfelelően *f'/f*, míg a második tag arcustangensre vezet.

$$\frac{3}{2}\int\frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{x^2-4x+9}}dx=\frac{3}{2}\ln\left|\mathbf{x^2-4x+9}\right|$$

$$\int\frac{7}{x^2-4x+9}dx=\int\frac{7}{(x-2)^2+5}dx=\frac{7}{5}\int\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}dx=\frac{7}{5}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{5}$$

Végül összerakjuk a megoldást. Volt ugye a polinom osztásból kapott két tag, aztán a parciális törtekre bontásnál a két elsőfokú nevezőjű tag és végül az amelyik *f'/f*, majd arcustangens-es integrálásra vezetett, plusz borravaló, az annyi mint :

$$\int \frac{x^5-3x^4+9x^3+7x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx = \int x+1+\frac{4x^3-2x^2+5x+9}{x^4-4x^3+9x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\ln\left|\boldsymbol{x^2-4x+9}\right|+\frac{7}{5}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{5}+K$$

Végezetül még egy példa:

$$\int \frac{2x}{1+x^4}dx$$

Mindenekelőtt a nevezőt elsőfokú vagy tovább már nem bontható másodfokú tényezők szorzatára kell bontani. A felbontás egyáltalán nem triviális, ugyanis a nevezőnek valós gyöke nincsen. A szorzat alak:

$$1+x^4=(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)$$

Ekkor:

$$\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \int \frac{2x}{(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)}dx$$

A nevezőben lévő tényezők lesznek a parciális törtek nevezői. Mivel mindkét tényező tovább nem bontható másodfokú kifejezés, a jelek szerint két II. típusú elemi tört összegét kapjuk:

$$\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \int \frac{2x}{(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}dx$$

Rátérünk A, B, C, D meghatározására.

$$\frac{2x}{(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}$$

Beszorzunk:

$$2x(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1) = (Ax+B)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)$$

majd átalakítunk

$$\mathbf{2}x=(A+C)x^3+(B+D-A\sqrt{2}+C\sqrt{2})x^2+(\mathbf{A+C-B\sqrt{2}+D\sqrt{2}})x+B+D$$

végül jön a szokásos egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 0&=A+C \\ 0&=B+D-A\sqrt{2}+C\sqrt{2} \\ 2&=A+C-B\sqrt{2}+D\sqrt{2} \\ 0&=B+D \end{aligned}$$

A megoldások: $A=0, B=-\frac{1}{\sqrt{2}}, C=0, D=\frac{1}{\sqrt{2}}$, így

$$\int \frac{2x}{(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)}dx = \int \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{-1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}dx$$

A két törtet külön-külön fogjuk integrálni.
Az első tört:

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}dx$$

Ebből $arctgx$-nek egy lineáris helyettesítése lesz:

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx=2\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}dx=\sqrt{2}arctg\left(\sqrt{2}x+1\right)+K$$

A második tört szimmetriai okok miatt:

$$\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}dx=\sqrt{2}arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)+L$$

A feladat megoldása az előbbiekben kapott kifejezések összege:

$$\int \frac{2x}{x^4+1}dx=-arctg\left(\sqrt{2}x+1\right)+arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)+M$$

Ne feledjük azonban, a racionális törtfüggvények integrálásának módszerét csak akkor érdemes alkalmazni, ha már semmilyen más módszer nem bizonyul használhatónak. Ezt az iménti feladatot némileg gyorsabban **S4** segítségével már korában megoldottuk!

$$\int \frac{2x}{1+x^4}dx=\int \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2}\cdot 2xdx\overset{S4}{=}arctg(x^2)+c$$

TRIGONOMETRIKUS KIFEJEZÉSEK INTEGRÁLÁSA

A trigonometrikus kifejezések integrálásának áttekintése nem könnyű.
Közel sem törekszünk teljes áttekintésre, csupán néhány fontosabb esetet említünk meg.

I. A tangens ikszfeles helyettesítés

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x + c}{A\sin x + B\cos x + C}dx$$

Ha a törtben *sinx* és *cosx* egyaránt csak első fokon szerepel, akkor alkalmazzuk az úgynevezett tangens ikszfeles helyettesítést.

$tg\,\frac{x}{2} = t$ helyettesítésnél $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ és $\varphi(t) = 2arctgt$ amiből $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$.

A tangens ikszfeles helyettesítés egyszerű racionális törtfüggvényeket csinál a trigonometrikus kifejezésekből. Például:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2t}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + K = \ln(tg\,\frac{x}{2}) + K$$

A módszer bonyolultabb kifejezéseknél is jól beválik:

$$\int \frac{\cos x}{-\sin x + \cos x + 1}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{-\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{-2t + 1 - t^2 + 1 + t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{2-2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{(1-t)(1+t^2)}dt = \int \frac{1+t}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + K$$

Ha a törtben *sinx* vagy *cosx* magasabb fokon is szerepel, akkor a módszer egyre kevésbé vezet sikerre.

II. $\int \sin^{\alpha} x \cdot \cos^{\beta} x dx$

Ha α és β közül van amelyik páratlan, akkor visszavezethető $f^{\alpha}\cdot f'$ alakú integrálásra. Az általános eljárás helyett nézzünk egy konkrét példát:

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx$$

A megoldás során a páratlan kitevős tényezőt fogjuk felbontani másodfokú, és egy darab elsőfokú tényezők szorzatára.

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^6 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x dx$$

Elvégezve a beszorzást már csak $\int \sin^n x \cdot \cos x dx$ alakú kifejezések adódnak, amik mind $f^{\alpha}\cdot f'$ alakúak.

Ha *cosx* kitevője magasabb fokú, az sem jelent problémát:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^7 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^6 x \cdot (1-\sin^2 x)^3 \cdot \cos x dx$$

Elvégezve a beszorzást itt is csak $\int \sin^n x \cdot \cos x dx$ alakú kifejezések adódnak, amik mind $f^{\alpha} \cdot f'$ alakúak.

Ha α és β közül mindkettő páros, akkor ez a módszer nem működik. Ilyenkor linearizáljunk.

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ és $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

III. $\int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\beta} x} dx$ vagy $\int \frac{\cos^{\alpha} x}{\sin^{\beta} x} dx$

Elegendő szimmetriai okokból csak az egyik esettel foglalkoznunk, legyen ez mondjuk az első. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\beta=\alpha+2$. Ilyenkor:

$$\int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\alpha+2} x} dx = \int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\alpha} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\alpha} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int tg^{\alpha} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{tg^{\alpha+1} x}{\alpha+1} + K$$

Ha nincs ilyen szerencsénk, akkor az alábbi mechanizmussal érhetünk célt:

$$\int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\beta} x} dx = \int \sin^{\alpha-1} x \frac{\sin x}{\cos^{\beta} x} dx$$

Itt a második tényezőt tudjuk **T3** alapján integrálni, az első tényezőt meg tudjuk deriválni, vagyis parciális integrálás kell.

$$f = \sin^{\alpha-1} x \qquad g' = \frac{\sin x}{\cos^{\beta} x}$$

$$f' = (\alpha-1)\sin^{\alpha-2} x \cdot \cos x \qquad g = \int \frac{\sin x}{\cos^{\beta} x} dx = \frac{\cos^{1-\beta} x}{\beta-1}$$

$$\int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\beta} x} dx = \int \sin^{\alpha-1} x \frac{\sin x}{\cos^{\beta} x} dx \overset{parciális}{=} \sin^{\alpha-1} x \cdot \frac{\cos^{1-\beta} x}{\beta-1} - \int (\alpha-1)\sin^{\alpha-2} x \cdot \cos x \cdot \frac{\cos^{1-\beta} x}{\beta-1} dx$$

Itt a maradvány integrállal kell tovább foglalkoznunk.

$$\int (\alpha-1)\sin^{\alpha-2} x \cdot \cos x \cdot \frac{\cos^{1-\beta} x}{\beta-1} dx = \frac{\alpha-1}{\beta-1} \int \sin^{\alpha-2} x \cdot \cos^{2-\beta} x dx = \frac{\alpha-1}{\beta-1} \int \frac{\sin^{\alpha-2} x}{\cos^{\beta-2} x} dx$$

Az eljárás során tehát mindkét kifejezés kitevője *kettővel* csökkent.
Ugyanezt ismételgetve előbb-utóbb valamelyik kitevő el fogja érni a *nullát*, vagy az *egyet*.
Összesen négy lehetőség van:

a) $\int \frac{\sin^{\gamma} x}{\cos^0 x} dx = \int \sin^{\gamma} x dx$ ez már könnyen integrálható, lásd **II.**

b) $\int \frac{\sin^{\gamma} x}{\cos^1 x} dx$ itt a számlálóban lévő kifejezésből $\gamma \geq 2$ esetén leválasztunk egy másodfokú tényezőt:

$$\int \frac{\sin^{\gamma} x}{\cos^1 x} dx = \int \frac{\sin^{\gamma-2} x \cdot \sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^{\gamma-2} x \cdot (1-\cos^2 x)}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^{\gamma-2} x - \sin^{\gamma-2} x \cdot \cos^2 x}{\cos x} dx =$$

$$=\int\frac{\sin^{\gamma-2}x}{\cos x}-\frac{\sin^{\gamma-2}x\cdot\cos^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^{\gamma-2}x}{\cos x}dx-\int\frac{\sin^{\gamma-2}x\cdot\cos^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^{\gamma-2}x}{\cos x}dx-\int\sin^{\gamma-2}x\cdot\cos xdx$$

itt az első integrálás szintén b), míg a második $f^{\alpha}\cdot f'$ ami integrálható. Ha $\gamma<2$, akkor $\gamma=1$ esetén lásd **T2**, ha $\gamma=0$ akkor lásd tangens ikszfeles helyettesítés.

c) $\int\frac{\sin^1 x}{\cos^{\gamma}x}dx\overset{T3}{=}\frac{\cos^{1-\gamma}x}{\gamma-1}+K$

d)

$$\int\frac{\sin^0 x}{\cos^{\gamma}x}dx=\int\frac{1}{\cos^{\gamma}x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^{\gamma}x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^{\gamma}x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^{\gamma}x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^{\gamma}x}dx+\int\frac{1}{\cos^{\gamma-2}x}dx$$

itt az első integrálás **III.** a második újból d).

IV. A saját farkába harapó kígyó esete

Az $\int e^x\cdot\cos xdx$ és $\int e^x\cdot\sin xdx$, valamint ezek lineáris helyettesítéseinek integrálására alkalmazható az alábbi módszer, amit egy konkrét példán nézünk meg. Legyen ez, mondjuk $\int e^x\cdot\cos xdx$. Integráljunk parciálisan, a szerepek kiosztása tetszőleges.

$f=e^x$	$g'=\cos x$
$f'=e^x$	$g=\sin x$

$$\int e^x\cdot\cos xdx=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$$

A maradék integrálást szintén a parciális integrálás segítségével számoljuk ki. Itt azonban fontos, hogy ugyanúgy osszuk ki a szerepeket, mint az előzőben. Ha ott e^x volt f, akkor itt is e^x kell, legyen az f.

$f=e^x$	$g'=\sin x$
$f'=e^x$	$g=-\cos x$

$$\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x-\int -e^x\cos xdx=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx$$

Itt a maradék integrálás nem más, mint az eredeti feladat. Ez az a pont, amikor a kígyó a farkába harapott. Ha most ezt is integráljuk parciálisan, akkor két lépésen belül megint elérkezünk ugyanide. Az ötlet azonban a következő. Írjuk föl eddigi eredményünket.

$$\int e^x\cdot\cos xdx=e^x\sin x-\int \mathbf{e^x\sin xdx}=e^x\sin x-\left(-\mathbf{e^x\cos x}+\int\mathbf{e^x\cos xdx}\right)$$

vagyis

$$\int e^x\cdot\cos xdx=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos xdx$$

Ezt tekinthetjük úgy, mint egy egyenletet $\int e^x\cdot\cos xdx$ -re. Ha rendezzük, akkor kapjuk, hogy:

$$2\int e^x\cdot\cos xdx=e^x\sin x+e^x\cos x$$

és így

$$\int e^x\cdot\cos xdx=\frac{e^x\sin x+e^x\cos x}{2}$$

Newton-Leibniz formula

Ha *f(x)* integrálható az *[a,b]* intervallumon, és létezik primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

A $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots x_n(t))$ paraméteres görbe derivált-vektora, vagy sebességvektora $\gamma'(t) = v(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t), \ldots x_n'(t))$.

A $\gamma(t)$ görbe ívhossza a paramétertartomány *[a,b]* intervallumán

$$\int_a^b \gamma(t) = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + (x_3'(t))^2 + \ldots + (x_n'(t))^2}\, dt$$

Ha az *f(x)* függvényt, mint *(x,f(x))* paraméteres görbét tekintjük, akkor az *a* és *b* helyek közt a grafikonjának ívhossza:

$$\int_a^b graf(f(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Az $f\ R^n \to R^k$ függvény $\gamma(t)$ $[a,b] \to R^n$ görbén vett vonalintegrálja

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

ha létezik *f*-nek primitívfüggvénye, akkor

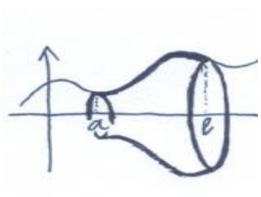
$$\int_\gamma f = \left[F(\gamma(t))\right]_a^b$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA ÉS FELSZÍNE

Az *f* függvény *x* tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata és felszíne:

$$V_a^b = \pi \int_a^b f^2$$

$$A_a^b = 2\pi \int_a^b f \cdot \sqrt{1 + f'^2}$$



Integrál-transzformációs formula:

$$\int f = \int f(\varphi) \cdot \det(\varphi')$$

POLÁRKOORDINÁTÁS HELYETTESÍTÉS

Ha $f\ R^2 \to R$ függvény, akkor

$x_1 = r \cdot \cos\omega$
$x_2 = r \cdot \sin\omega$

a helyettesítő függvény $\varphi(r,\omega) = (r \cdot \cos\omega,\ r \cdot \sin\omega)$ így
$det(\varphi') = r$

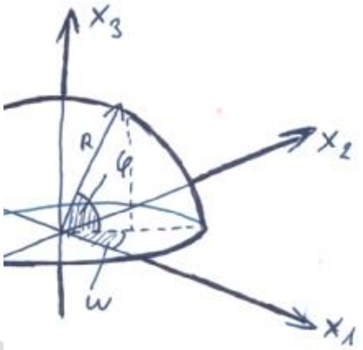
$$\iint f(x_1, x_2) = \iint f(r\cos\omega, r\sin\omega) \cdot r$$

Ha $f\ R^3 \to R$ függvény, akkor

$x_1 = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\omega$
$x_2 = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\omega$
$x_3 = r\sin\theta$
a helyettesítő függvény
$\varphi(r,\omega,\ \theta) = (\ r \cdot \cos\theta \cdot \cos\omega,\ r \cdot \cos\theta \cdot \sin\omega,\ r\sin\theta)$ így $det(\varphi') = -r^2 \cdot \cos\theta$

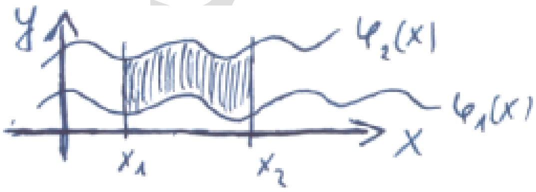
$$\int\iint f(x_1, x_2, x_3) = \int\iint f(r\cos\theta\cos\omega, r\cos\theta\sin\omega, r\sin\theta) \cdot (-r^2\cos\theta)$$

mm



NORMÁLTARTOMÁNYON VETT INTEGRÁL

$$\iint_D f = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$



SZEKTOR SZERŰ TARTOMÁNYON VETT INTEGRÁL

$$\iint_D f = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^{r(\omega)} f(r\cos\omega, r\sin\omega) \cdot \mathbf{r} drd\omega$$