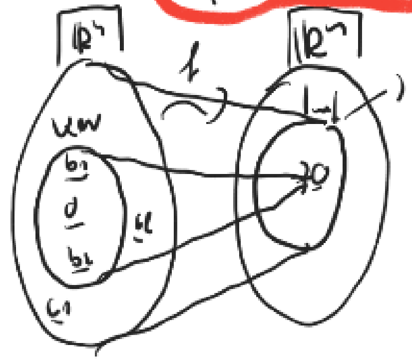
14. hét előadás

Dimenziótétel

$$\boxed{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \text{ lineáris leképezés} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n}$$



értékkészlet

Biz.: $b_1; b_2; \dots; b_k$ bázis Ker f-ben

$\Rightarrow b_1; b_2; \dots; b_k, c_1; \dots; c_l$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = k$

$\Downarrow$

$n = k + l$

kellene: $\dim \operatorname{Im} f = l$

$\hookrightarrow$ $f(c_1); f(c_2); \dots; f(c_l)$ bázis (?) Im f-ben

(1) $f(c_1); \dots; f(c_l)$ lin független

$$\alpha_1 f(c_1) + \alpha_2 f(c_2) + \dots + \alpha_l f(c_l) = 0 \quad (\alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0)$$

$$\Updownarrow$$

mivel lin leképezés

$$f(\alpha_1 c_1) + f(\alpha_2 c_2) + \dots + f(\alpha_l c_l) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_l c_l) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_l c_l \in \operatorname{Ker} f$$

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_l c_l = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k$$

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_l c_l - \beta_1 b_1 - \dots - \beta_k b_k = 0$$

$\Downarrow$ $b_1 \dots c_l$ lin ftlen

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0 = \beta_1 = \dots = \beta_k$$

lin ftlen ✓

(2) generátorrendszert alkotnak Im f-ben

$w \in \operatorname{Im} f$

$$\underline{w} = f(\underline{v}) \qquad \underline{v} \in \mathbb{R}^n$$

$\underline{b}_1 \ldots \underline{c}_l$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben

$\Rightarrow \underline{v} = \underbrace{\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_k \underline{b}_k + \alpha_1 \underline{c}_1 + \ldots + \alpha_l \underline{c}_l}$

$\underline{w} = f(\underline{v}) = f(\quad) = f(\beta_1 \underline{b}_1) + \ldots + f(\alpha_l \underline{c}_l) =$

$= \underbrace{\beta_1 \overset{\underline{0}}{\overset{\shortparallel}{f(\underline{b}_1)}} + \ldots + \beta_k \overset{\underline{0}}{\overset{\shortparallel}{(\underline{b}_k)}}}_{\underline{0}} + \alpha_1 f(\underline{c}_1) + \ldots + \alpha_l f(\underline{c}_l)$

$\Downarrow$

$\underline{w} = \alpha_1 f(\underline{c}_1) + \ldots + \alpha_l f(\underline{c}_l)$

$\Rightarrow$ generátorrendszer

(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ bázis

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} f = l \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$

Im f: oszlopok generált altere

A $n \times n$ mátrix

A-nak s.é.-e λ, ha $\exists$ olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, hogy $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

A-nak s.v.-a a $\underline{v}$, ha $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $\exists$ olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. trafó, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis

$[f]_B$ diagonális mx $\Leftrightarrow \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ s.v.-i $[f]_B$

$$\begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + (6-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\underline{x} \neq \underline{0}$

$\downarrow$ λ paraméter

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 6-\lambda & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{nem egyértelműen megoldható}$$

λ s.é.

$\Uparrow$

$\det(\ ) = 0 \Longleftarrow$

$$\boxed{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak} \iff \det(A-\lambda E) = 0}$$

$\longrightarrow$ karakterisztikus polinomjának gyökei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$

$A\underline{x} = \lambda(E\underline{x}) = (\lambda E)\underline{x}$

$(A-\lambda E)\underline{x} = \underline{0}$ van $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása

$\left(A-\lambda E \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$ lin egyenletrendszer nem egyértelműen megoldható

$\det(A-\lambda E) = 0$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A karakterisztikus polinomja $\det(A-\lambda E)$