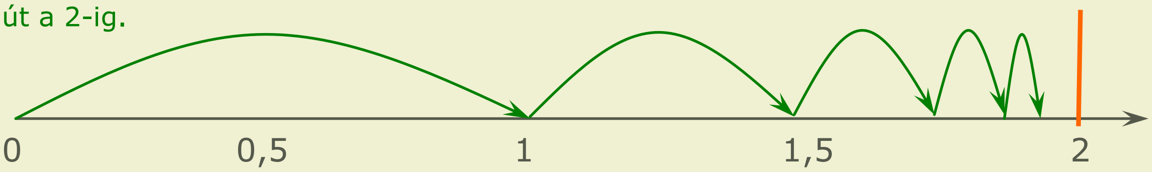
Végtelen sok valós számból álló összegeket soroknak nevezzük. A sorban szereplő tagokat képzeljük el úgy, mint egy bolha ugrásait a számegyenesen. A sor összege – ha létezik ilyen – az a szám ahova a bolha ugrásai során eljut. Nézzük például a következős sort:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Itt a bolha fáradékony, ezért ugrásai egyre rövidülnek minden ugrása az előző ugrásának a fele. Véges sok ugrással sosem érheti el a 2-t, mert mindig fele akkorát ugrik, mint ami még a hátralévő út a 2-ig.

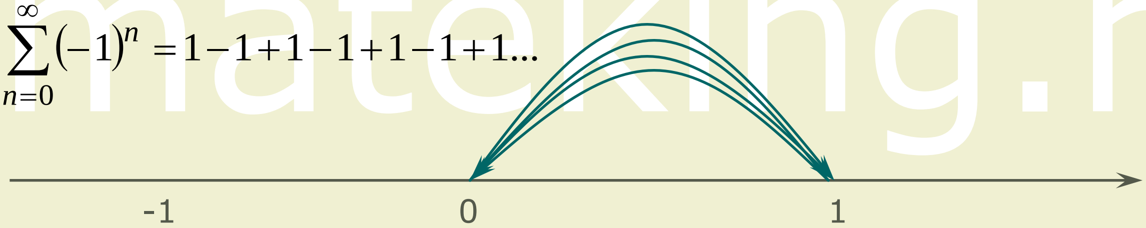


Ha viszont az ugrások száma végtelen, akkor a bolha éppen eljut a 2-be.

Egy másik bolha egyáltalán nem fáradékony, viszont meglehetősen zavarodottan ugrál.

Először ugrik 1-et, majd vissza ugrik 1-et. Utána megint ugrik 1-et, majd megint vissza.

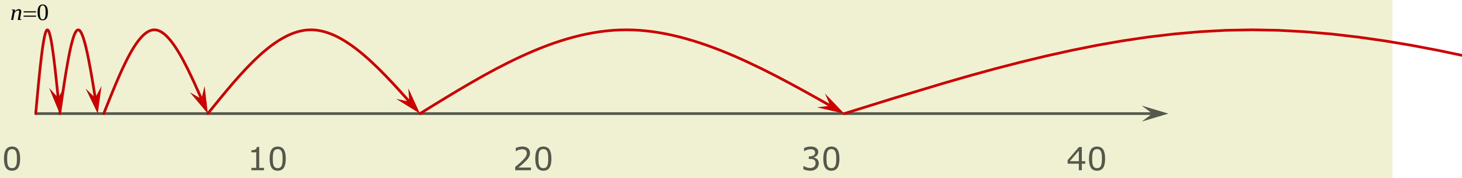
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+1\ldots$$



Ez a bolha az égvilágon sehova nem jut el, ha az ugrások száma végtelen.

Egy harmadik fajta bolha mindig előző ugrásának kétszeresét ugorja és így a végtelenbe jut el.

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n = 1+2+4+8+16+\ldots$$



Ebből a három esetből az első esetben nevezzük a sort konvergensnek, vagyis amikor a bolha az ugrásai során egy konkrét valós számhoz jut el, és ezt a valós számot nevezzük a sor összegének. Ha a bolha ugrásai során nem jut el sehova, vagy végtelenbe jut, akkor a sor divergens. A második és a harmadik sor tehát divergens, a másodiknak nincs összege, míg a harmadik sor összege végtelen.

SOROKKAL KAPCSOLATBAN KÉTFÉLE KÉRDÉS MERÜLHET FÖL

A SOR KONVERGENS VAGY DIVERGENS-E?

ez egy viszonylag könnyen megválaszolható kérdés

KONVERGENCIA-KRITÉRIUMOK

1. SZÜKSÉGES FELTÉTEL

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

2. LEIBNIZ-SOROK

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$

de nem biztos, hogy abszolút konvergens.

3. GYÖK KRITÉRIUM

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

4. HÁNYADOS KRITÉRIUM

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

5. ÖSSZEHASONLÍTÓ KRITÉRIUM

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok,

és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum b_n$ is divergens

6. HARMONIKUS SOROK

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ → konvergens ha $\alpha > 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ → divergens, ha $\alpha \leq 1$

HA A SOR KONVERGENS, MI A SOR ÖSSZEGE?

erre sokszor egyáltalán nem tudunk válaszolni és különböző trükkök kellenek

A SOR ÖSSZEGÉNEK KISZÁMOLÁSA

1. MÉRTANI SOR ÖSSZEGE

$ha \ |q| < 1$ akkor $\sum_0^\infty a_1 \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q}$

$ha \ |q| \geq 1$ akkor $\sum_0^\infty a_1 \cdot q^n = divergens$

2. A SOR ÖSSZEGÉNEK KISZÁMOLÁSA A RÉSZLETÖSSZEG SOROZAT HATÁRÉRTÉKÉVEL

$\sum a_n = \lim s_n$ ahol $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

LÁSSUNK EGY PÉLDÁT:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = ?$$

a részletösszeg sorozat

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

mivel pedig $\lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

$\sum a_n = \lim s_n = 1$ a sor összege.

mateking.hu

1. SZÜKSÉGES FELTÉTEL

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Nézzük meg, hogy konvergens-e például

$$\sum_1^\infty \frac{2n}{n+1}$$

A válasz az, hogy nem, mert $\lim \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$ és ezért a sor divergens.

Az állítás megfordítása viszont nem igaz, például hiába

$\lim \frac{1}{n} = 0$ ettől még $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergens.

2. LEIBNIZ-SOROK

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ de nem biztos, hogy abszolút konvergens.

Az a sor, hogy

$$\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

tehát Leibniz-sor vagyis konvergens. De nem abszolút konvergens.

A $\sum a_n$ sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ sor is konvergens.

$\sum_1^\infty \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ ami divergens, tehát az eredeti $\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ nem absz. konvergens

3. GYÖK KRITÉRIUM

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

Nézzük meg, hogy konvergens-e például

$$\sum \frac{5^n}{n^n}$$

Alkalmazzuk a gyök kritériumot:

$\lim \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}} = \lim \frac{5}{n} = 0 < 1$ és ezért a sor konvergens, sőt abszolút konvergens.

Itt van aztán ez, hogy

$$\sum \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2}$$

itt is alkalmazzuk a gyök kritériumot

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n} = \lim \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^2} = e > 1$$ a sor divergens

4. HÁNYADOS KRITÉRIUM

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

Nézzük meg, hogy konvergens-e például

$$\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

Alkalmazzuk a hányados kritériumot. Azért a hányadost, mert a faktoriális nem szereti a gyök kritériumot:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \lim \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim \frac{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} =$$

$$= \lim \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim 2 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

érdemes megjegyezni, hogy

$$(n+1)! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\cdot(n+1)$$

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1)$$

és ezért a sor konvergens, sőt abszolút konvergens.

Itt van aztán ez, hogy

$$\sum \frac{n^2+3}{n^5+5n}$$

A gyök kritérium csődöt mond, mert

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^5+5n}} = 1$$

Jegyezzük meg, hogy polinom/polinom esetben csak az összehasonlító kritérium nyerő!
felülről becsüljük a sort

$$\frac{n^2+3}{n^5+5n} \le \frac{n^2+3n^2}{n^5} = \frac{4n^2}{n^5} = \frac{4}{n^3}$$

és ekkor

$\sum \frac{n^2+3}{n^5+5n}$ konvergens, mert a nála nagyobb $\sum \frac{4}{n^5}$ sor konvergens.

SOROK ÖSSZEGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

MÉRTANI SOR ÖSSZEGKÉPLETE

Ha $|q|<1$ akkor $\displaystyle\sum_0^\infty a_1 \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q|\geq 1$ akkor $\displaystyle\sum_0^\infty a_1 \cdot q^n =$ divergens

ÍME EGY PÉLDA!

$$\sum_0^\infty 5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_0^\infty 5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = 5+5\cdot\frac{3}{4}+5\cdot\frac{9}{16}+\ldots$$

$$a_1 = 5 \qquad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$$

tehát

$$\sum_0^\infty 5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{3}{4}} = 20$$

AZTÁN MÉG EGY PÉLDA:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{3}{-2}\right)^n = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{3}{-2}\right)^n = \frac{3}{-2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{-8}\ldots$$

$$a_1 = \frac{3}{-2} \qquad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{-2}$$

sajna $|q| = \left|\frac{3}{-2}\right| \geq 1$ ezért a sor divergens!

MÉG EGY PÉLDA:

$$\sum_1^\infty \frac{3}{(-2)^n} = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_1^\infty \frac{3}{(-2)^n} = \frac{3}{-2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{-8}\ldots$$

$$a_1 = \frac{3}{-2} \qquad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{-1}{2}$$

tehát

$$\sum_1^\infty \frac{3}{(-2)^n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{-2}}{1-\frac{-1}{2}} = -1$$

ÉS VÉGÜL MÉG EGY PÉLDA:

$$\sum_0^\infty 4\cdot\frac{3^n}{(-2)^{2n}} = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_0^\infty 4\cdot\frac{3^n}{(-2)^{2n}} == 4\cdot\frac{1}{1}+4\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{9}{16}\ldots$$

$$a_1 = 4 \qquad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$$

tehát

$$\sum_0^\infty 4\cdot\frac{3^n}{(-2)^{2n}} == \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{3}{4}} = 16$$

A GOND AKKOR VAN, HA NEM MÉRTANI SORRAL AKADUNK ÖSSZE. ILYENKOR A RÉSZLETÖSSZEG SOROZAT HATÁRÉRTÉKÉT KELL KISZÁMOLNUNK.

$\sum a_n = \lim s_n$ ahol $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

LÁSSUNK EGY PÉLDÁT:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1} = ?$$

A nevezőt szorzattá alakítjuk, aztán bűvészmutatványok következnek, felbontjuk a törtet két tag különbségére:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_1^\infty \frac{A}{2n-1} - \frac{B}{2n+1}$$

Kitaláljuk A-t és B-t.

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} - \frac{B}{2n+1}$$

beszorzunk, aztán egyszer a B-nek az együtthatóját nullázzuk le, utána meg A-nak az együtthatóját.

$$1 = A(2n+1) - B(2n-1)$$

először B-t nullázzuk ki:

$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = A\left(2\frac{1}{2}+1\right) - B\left(2\frac{1}{2}-1\right)$$

$1 = A \cdot 2 - B \cdot 0$ így $A = \frac{1}{2}$

aztán meg A-t nullázzuk ki:

$$n = \frac{-1}{2} \Rightarrow 1 = A\left(2\frac{-1}{2}+1\right) - B\left(2\frac{-1}{2}-1\right)$$

$1 = A \cdot 0 - B \cdot (-2)$ így $B = \frac{1}{2}$

a felbontás tehát

$$\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \sum_1^\infty \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

a részletösszeg sorozat ekkor

$$s_n = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1} =$$

$$= \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

mivel pedig $\lim s_n = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1/2}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad \sum a_n = \lim s_n = \frac{1}{2}$ a sor összege.

LÁSSUNK EGY MÁSIK PÉLDÁT!

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+3n+2}=?$$

Megint szorzattá alakítjuk a nevezőt, aztán jönnek a bűvészmutatványok. Parciális törtekre bontunk.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_1^\infty \frac{A}{n+1}-\frac{B}{n+2}$$

KITALÁLJUK *A*-T ÉS *B*-T:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}-\frac{B}{n+2}$$

BESZORZUNK

$$1=A(n+2)-B(n+1)$$

$n=-1 \Rightarrow 1=A(-1+2)-B(-1+1)$

$1=A\cdot 1-B\cdot 0$ így $A=1$

$n=-2 \Rightarrow 1=A(-2+2)-B(-2+1)$

$1=A\cdot 0-B\cdot(-1)$ így $B=1$

a felbontás tehát

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

a részletösszeg sorozat ekkor

$$s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

mivel pedig $\lim s_n=\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$ $\qquad \sum a_n=\lim s_n=\frac{1}{2}$ a sor összege.

LÁSSUNK AZTÁN EGY BONYOLULTABB PÉLDÁT:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=?$$

A bűvészmutatványok most még érdekesebbek. Jön a parciális törtekre bontás:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_1^\infty \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

Itt is ki kell találnunk A-t B-t és C-t.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

beszorzunk:

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

Aztán egyesével lenullázzuk a jobb oldal tagjait.

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

$$n=0 \Rightarrow 1=A(0+1)(0+2)+B\cdot 0+C\cdot 0 \Rightarrow 1=A\cdot 2 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$n=-1 \Rightarrow 1=A\cdot 0+B\cdot(-1)\cdot(-1+2)+C\cdot 0 \Rightarrow 1=B\cdot(-1) \Rightarrow B=-1$$

$$n=-2 \Rightarrow 1=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot(-2)(-2+1) \Rightarrow 1=C\cdot 2 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

A felbontás tehát megvolna:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_1^\infty \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

Végül még egy trükk. A középső tagot kettébontjuk és nem is véletlenül. Azért bontjuk ketté, hogy neki is 1/2 legyen a számlálója és így jobban szeressék őt a többiek:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_1^\infty \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} = \sum_1^\infty \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

No lássuk a részletösszeg sorozatot!

$$s_n = \boxed{\frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{2} + \frac{-1/2}{2} + \frac{1/2}{3}} + \boxed{\frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{3} + \frac{-1/2}{3} + \frac{1/2}{4}} + \boxed{\frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{4} + \frac{-1/2}{4} + \frac{1/2}{5}} + \dots$$

$$\dots + \boxed{\frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}}$$

Ki kéne deríteni, hogy kik esnek itt ki. Ha kicsit nézegetjük, arra jutunk, hogy minden blokk két középső tagját az előtte és utána lévő blokk szélső tagjai ejtik ki. Vagyis azok a tagok maradnak meg, akik vagy a legelső blokkban vagy a legutolsóban vannak. Mégpedig:

$$s_n = \boxed{\frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{2}} + \boxed{\frac{-1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}}$$

A részletösszeg sorozat határértéke

$$\lim s_n = \lim\left(\frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{2} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}\right) = \frac{1}{4}$$ és így $$\sum a_n = \lim s_n = \frac{1}{4}$$

LÁSSUNK EGY MÁSIK ÉRDEKES PÉLDÁT:

$$\sum_0^\infty \frac{n+1}{2^n} = ?$$

Itt is a parciális törtekre bontás módszerét használjuk, mégpedig a következő módon. A különbség első tagjában n helyett n-1 van a második tagban n van. Erre azért van szükség, hogy a felbontás során teleszkopikus összeget kapjunk.

$$\sum_0^\infty \frac{n+1}{2^n} = \sum_0^\infty \frac{A(n-1)+B}{2^{n-1}} - \frac{An+B}{2^n}$$

Lássuk mennyi A és B!

$$\frac{n+1}{2^n} = \frac{A(n-1)+B}{2^{n-1}} - \frac{An+B}{2^n}$$

Beszorzunk 2^n-el.

$$n+1 = 2\cdot(A(n-1)+B) - (An+B)$$

Felbontjuk a zárójeleket:

$$n+1 = 2An - 2A + 2B - An - B$$

Aztán jobb oldalon rendet rakunk:

$$n+1=An\underbrace{-2A+B}$$

$$1=-2A+B$$

$$1=A$$

A bal oldalon 1db n van, tehát a jobb oldalon is 1db kell, legyen: $1=A$
A bal oldalon a konstans 1, tehát a jobb oldalon is 1 kell, legyen: $1=-2A+B$

Ekkor $A=1$ és $B=3$

A felbontás:

$$\sum_0^\infty \frac{n+1}{2^n}=\sum_0^\infty \frac{1\cdot(n-1)+3}{2^{n-1}}-\frac{1\cdot n+3}{2^n}=\sum_0^\infty \frac{n+2}{2^{n-1}}-\frac{n+3}{2^n}$$

A részletösszeg sorozat

$$s_n=\frac{0+2}{2^{-1}}-\frac{0+3}{2^1}+\frac{1+2}{2^0}-\frac{1+3}{2^1}+\frac{2+2}{2^1}-\frac{2+3}{2^2}+\ldots+\frac{n+2}{2^{n-1}}-\frac{n+3}{2^n}=$$

$$=\frac{2}{2^{-1}}-\frac{3}{2^1}+\frac{3}{2^0}-\frac{4}{2^1}+\frac{4}{2^1}-\frac{5}{2^2}+\ldots+\frac{n+2}{2^{n-1}}-\frac{n+3}{2^n}=\frac{2}{2^{-1}}-\frac{n+3}{2^n}$$

A sor összege pedig a részletösszeg sorozat határértéke:

$$\lim s_n=\lim\left(\frac{2}{2^{-1}}-\frac{n+3}{2^n}\right)=4-0=4$$

és így

$$\sum a_n=\lim s_n=4$$