1. előadás

Def:

Eseménytér: Ω halmaz

Kimenetel: Ω elemei

Esemény: $A \subseteq \Omega$

Valószínűség: $\mathbb{P}(A) \in [0;1]$

A akkor esemény, ha akarunk beszélni a valószínűségétől

Mikor kell, hogy nem minden R.M. esemény

→ geometriai valószínűség

→ megfigyelhető

→ folyamatok

$A \wedge B$ események

$A \cup B$

$A \cap B$

$A \setminus B$

$\bar{A}$

Ω biztos esemény

$\emptyset$ lehetetlen esemény

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \quad ; \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$$

σ - Algebra,

$\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$, ha:
1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $A_1, \dots, A_i \in \mathcal{F}$
$\Downarrow$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ σ-algebra $\Rightarrow$ a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B; A \cap B;$
$A \setminus B \in \mathcal{F}$

$\ldots A, B \in \mathcal{F}$

ⓒ $A_1, \ldots, A_i \in \mathcal{F}$
$\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Biz:

ⓐ $\emptyset = \overline{\Omega}$, $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$

ⓑ $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_i = \emptyset$
$\Longrightarrow A \cup B$

de Morgan

Ω halmaz, $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ σ-algebra

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1]$ valószínűségi mérték
$A \mapsto \mathbb{P}(A)$

ha $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ és

σ-additivitás: $A_1, \ldots, A_i \in \mathcal{F} \wedge A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$
$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Kolgomorov-féle valószínűségi mező
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra
- $\mathbb{P}$ valségi mérték $\mathcal{F}$-en

Áll: $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

biz.: $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_i = \emptyset$ $(i > 2)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \underbrace{\ldots}_{\emptyset}$$

Áll.: A, B esemény

① $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

② $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$

③ $B \subseteq A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$

Poincaré formula   nem kizáró események

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\underbrace{\{1, \dots, n\}}_{[n]} \supseteq \underbrace{\{i_1, \dots, i_k\}}_{I}$$

$$\sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = S_k$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

Bonferroni egyenlőtlenség

m_1 páratlan: $$\sum_{i=1}^{m_1} (-1)^{k+1} S_k \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

m_2 páros: $$\sum_{i=1}^{m_2} (-1)^{k+1} S_k \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

köv.: Boole egyenlőtlenség

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geq 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$