

Fritz Józsefné, Kónya Ilona,
Pataki Gergely és Tasnádi Tamás

MATEMATIKA 1.

2011.

[Ismertető](#)
[Tartalomjegyzék](#)
[Pályázati támogatás](#)
[Gondozó](#)

[Szakmai vezető](#)
[Lektor](#)
[Technikai szerkesztő](#)
[Copyright](#)

A „Matematika 1.” elektronikus oktatási segédanyag a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatika Karán a mérnök-informatikus szakos hallgatók „Analízis 1” tárgyához készült, de haszonnal forgathatják más szakok, karok vagy műszaki főiskolák, egyetemek hallgatói is, akik hasonló mélységen hasonló anyagot tanulnak matematikából.

Az anyag numerikus sorok, sorozatok elméletét, egy változós valós függvények határértékét, folytonosságát, differenciálását és integrálását tárgyalja. A definíciók, tételek, bizonyítások mellett kiemelt szerepet kapnak a példák, és a gyakran előforduló feladattípusok megoldásai.

A mintegy 260 oldalas elméleti anyagot kiegészíti egy több, mint 100 oldalas példatár, amely többségében megoldott, tematizált gyakorlófeladatokat tartalmaz. A két pdf állomány kölcsönösen hivatkozik egymásra. Az eligazodást tartalomjegyzék, valamint az elméleti anyagban található tárgymutató segíti. A megértést színes ábrák könnyítik, az érdeklődő olvasó pedig a *Thomas Calculus* illetve a *Calculusapplets* kapcsolódó weboldalaira is ellátogathat külső hivatkozásokon keresztül. A háttérszínezéssel tagolt elméleti anyag fekete-fehér változata is rendelkezésre áll, amely nyomtatásra javasolt formátum.

Kulcsszavak: sor, sorozat, folytonosság, kalkulus, differenciálás, integrálás.

Támogatás:

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

Készült:

A BME TTK Matematikai Intézet gondozásában.

Szakmai felelős vezető:

Ferenczi Miklós

Lektorálta:

Pröhle Péter

Az elektronikus kiadást előkészítette:

Győri Sándor¹, Fritz Ágnes, Kónya Ilona, Pataki Gergely, Tasnádi Tamás

Címlap grafikai terve:

Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN 978-963-279-445-7

Copyright: Fritz Ágnes (BME), Kónya Ilona (BME), Pataki Gergely (BME), Tasnádi Tamás (BME)

„A © terminusai: A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjeleníthető és előadható, de nem módosítható.”

¹Korábbi változatot szerkesztette.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	1
1. Valós számsorozatok	5
1.1. Bevezető	5
1.1.1. A valós számok (\mathbb{R}) axiómái	5
1.1.2. A rendezési axiómákból levezethető	7
1.1.3. Néhány fogalom	7
1.2. Számsorozatok és határérték	8
1.2.1. Számsorozat konvergenciája	9
1.2.2. Számsorozat divergenciája	11
1.3. További tételek a határértékről (1)	12
1.3.1. A határérték egyértelműsége	12
1.3.2. A konvergencia szükséges feltétele	12
1.4. Határérték és műveletek	13
1.4.1. Műveletek konvergens számsorozatokkal	13
1.4.2. Néhány jól használható egyszerűbb tétel	19
1.4.3. Feladatok	20
1.5. További tételek a határértékről (2)	22
1.6. Néhány példa az előző tételek alkalmazására	24
1.7. Monoton sorozatok	27
1.7.1. Példák rekurzív sorozatokra	28
1.8. Egy kitüntetett számsorozat	31
1.8.1. Néhány e -vel kapcsolatos példa	33
1.8.2. Feladatok	35
1.9. További tételek a határértékről (3)	36
1.10. Sorozat torlódási pontjai	39
2. Valós számsorok	43
2.1. Numerikus sorok konvergenciája	43
2.1.1. Geometriai (mórtani) sor	45
2.1.2. Konvergens sorok összege és konstansszorosa	47
2.1.3. A konvergencia szükséges feltétele	50
2.2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok	51

2.2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz	53
2.3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája	54
2.4. Pozitív tagú sorok	55
2.5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok	57
2.5.1. Majoráns kritérium	57
2.5.2. Minoráns kritérium	58
2.5.3. Hányados kritérium	61
2.5.4. Gyökkritérium	64
2.5.5. Integrálkritérium	68
2.5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorok esetén	70
2.6. Műveletek konvergens sorokkal	73
2.6.1. Végtelen sorok természetes szorzata	74
2.6.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata	75
2.6.3. Zárójelek elhelyezése, illetve elhagyása végtelen sor esetén	76
2.6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)	77
2.7. Feladatok sorokhoz	77
2.8. Számsorozatok nagyságrendje	80
2.8.1. Műveletek Θ -val	81
2.8.2. Aszimptotikus egyenlőség ($a_n \sim b_n$)	82
3. Függvények határértéke és folytonossága	88
3.1. Függvény határértéke	88
3.1.1. Szükséges és elégséges téTEL határérték létezésére	94
3.1.2. Végesben vett határértékek	96
3.1.3. Végtelenben vett határértékek	97
3.1.4. Feladatok	98
3.2. Folytonosság	99
3.2.1. Szakadási helyek osztályozása	99
3.3. Műveletek függvények körében	100
3.4. Racionális függvények	103
3.4.1. Polinomok (racionális egészfüggvények)	103
3.4.2. Racionális törtfüggvény	105
3.5. Példák és feladatok	105
3.6. Egy nevezetes határérték	107
3.7. Folytonos függvények tulajdonságai	110
3.7.1. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai	111
3.7.2. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai	113
3.7.3. Egyenletes folytonosság	115
4. Függvények differenciálása	119
4.1. Differenciálászámítás	119
4.1.1. Differenciál, érintő egyenes	122
4.1.2. Differenciálási szabályok	123

4.1.3. Magasabbrendű deriváltak	126
4.1.4. Inverz függvény	127
4.2. Elemi függvények	130
4.2.1. Hatványfüggvények	130
4.2.2. Exponenciális függvények	134
4.2.3. Logaritmusfüggvények	135
4.2.4. Exponenciális hatványfüggvények	137
4.2.5. Trigonometrikus függvények és inverzeik	138
4.2.6. Hiperbolikus függvények és inverzeik	149
4.2.7. Néhány összetett példa	157
4.3. A differenciálszámítás középértéktételei	162
4.3.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére	162
4.3.2. A differenciálszámítás középértéktételei	163
4.3.3. Feladatok	165
4.4. L'Hospital-szabály	166
4.5. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai	169
4.6. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai	174
4.7. Implicit megadású függvények deriválása	181
4.8. Egyenes aszimptota $\pm\infty$ -ben	184
4.9. Függvényvizsgálat	184
4.9.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei	185
4.10. Paraméteres megadású görbék	189
4.10.1. Görbek megadása síkbeli polárkoordinátákkal	193
4.11. Feladatok	194
4.12. Néhány kidolgozott feladat	200
5. Függvények integrálása	206
5.1. Primitív függvény, határozatlan integrál	206
5.1.1. Példák	208
5.2. Határozott integrál	212
5.2.1. Jelölések, definíciók	212
5.3. A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei	215
5.4. Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra	217
5.5. Newton–Leibniz-tétel	219
5.6. A Riemann-integrál tulajdonságai	221
5.7. Az integrálszámítás középértéktétele	223
5.7.1. Feladatok	225
5.8. Integrálfüggvény	226
5.8.1. Példák	228
5.8.2. Feladatok	230
5.9. Integrálás helyettesítéssel	231
5.10. Integrálási módszerek	232
5.10.1. sin és cos szorzata	232

5.10.2. sin és cos páratlan kitevőjű hatványai	232
5.10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai	233
5.10.4. sin és cos hatványainak szorzata	233
5.10.5. Parciális integrálás	234
5.10.6. Racionális törtfüggvények integrálása	236
5.10.7. Integrálás helyettesítéssel	238
5.11. Impropius integrál	242
5.11.1. Definíciók	242
5.11.2. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ impropius integráljai	245
5.11.3. Az impropius integrálok néhány tulajdonsága	247
5.11.4. Feladatok	249
5.12. Az integrálszámítás alkalmazása	251
5.12.1. Terület	251
5.12.2. Szektorterület	252
5.12.3. Forgástest térfogata	252
5.12.4. Forgástest felszíne	253
5.12.5. Ívhosszúság	254
Tárgymutató	255

1. fejezet

Valós számsorozatok

1.1. Bevezető

$\xrightarrow{\text{Thom}_1}$

1.1.1. A valós számok (\mathbb{R}) axiómái

Algebrai axiómák

\mathbb{R} -ben értelmezett két művelet: $+$ és \cdot .

Ezek a műveletek nem vezetnek ki az adott halmazból, \mathbb{R} -ből, tehát $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re: $a + b \in \mathbb{R}$ és $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

+ művelet tulajdonságai (1–4.)

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ -re (az összeadás *asszociatív*).
2. Létezik egyetlen szám (ezt 0-val jelöljük), amelyre teljesül, hogy

$$0 + a = a + 0 = a, \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}.$$

3. minden $a \in \mathbb{R}$ számhoz létezik pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$x + a = a + x = 0.$$

Az így értelmezett x -et $(-a)$ -val jelöljük. (Neve: additív inverz.)

4. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re (az összeadás *kommutatív*)

\cdot művelet tulajdonságai (5–8.)

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (a szorzás *asszociatív*)

¹lásd Thomas 01-es bemutató 1. fejezet (3-10. oldal).

6. Létezik egyetlen szám, amelyet 1-gyel jelölünk ($1 \neq 0$), amelyre teljesül, hogy

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}$$

7. minden $a \neq 0$ -hoz létezik egyetlen $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$x \cdot a = a \cdot x = 1$$

Az így értelmezett x -et az $a \neq 0$ szám reciprokának nevezzük, és $\frac{1}{a}$ -val jelöljük.

8. $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (a szorzás *kommutatív*)

A két műveletre (+ és ·)-ra együttesen érvényes tulajdonság (9.)

9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (disztributivitás)

Rendezési axiómák (10–13.)

10. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számpárra az

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$

relációk közül pontosan egy teljesül (trichotom tulajdonság).

11. Ha $a < b$ és $b < c$ (röviden $a < b < c$), akkor $a < c$, $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$ (tranzitivitás)

12. Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$, $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$ (a rendezés monoton).

13. Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $a \cdot c < b \cdot c$, $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$.

Archimédesz-féle axióma (14.)

14. Tetszőleges $b > 0$ számhoz található b -nél nagyobb n természetes szám.

Cantor-féle axióma (15.)

15. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számunk megfeleltetünk egy $I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n, x \in \mathbb{R}\}$ halmazt (röviden $[a_n, b_n]$ zárt intervallumot) oly módon, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Vagyis: egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat elemeinek metszete nem üres. $(\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \xi \in \mathbb{R})$

- (M) Zártság fontos! ($I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ esetén $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$)

1.1.2. A rendezési axiómákból levezethető

A rendezésre vonatkozóan könnyű belátni, hogy igazak az alábbi állítások (szokás ezeket az „egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai”-nak is nevezni):

1. minden $a \in \mathbb{R}$ számra az

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

tulajdonságok közül pontosan egy teljesül. ($a > 0 \iff (-a) < 0$)

2. $(a < b) \wedge (c < d) \implies a + c < b + d$

Speciálisan: $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies a + b > 0$

3. $(0 \leq a < b) \wedge (0 \leq c < d) \implies ac < bd$

Speciálisan: $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies ab > 0$

4. $(a < b) \wedge (c < 0) \implies ac > bc$

Speciálisan: $a < b \implies -a > -b$

5. $0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$$a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$ab > 0 : \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$ab < 0 : \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{és}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

7. Ha n pozitív egész szám, és $0 < a < b$, akkor $a^n < b^n$.

Hasonlóan következnek az abszolútérték tulajdonságai.

1.1.3. Néhány fogalom

$$H \subset \mathbb{R}$$

- (D) H felülről korlátos, ha $\exists k_f \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in H : x \leq k_f$. $(k_f:$ felső korlát)

(D) H alulról korlátos, ha $\exists k_a \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in H : k_a \leq x$. (k_a : alsó korlát)

(D) H korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos, tehát $\exists k : |x| \leq k$.

(D) A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátját szupréumnak (felső határnak) nevezzük.

Jele: $\sup H$.

(D) Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak (alsó határnak) nevezzük.

Jele: $\inf H$.

(Pl.) $H = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots \right\}$ esetén:

Megoldás. Felső korlátok például: $1, 3, \pi, \dots$

Alsó korlátok például: $0, -2, -56, \dots$

$\sup H = 1$ (nincs a halmazban legnagyobb elem), $\inf H = 0$ (= legkisebb elem)

Dedekind folytonossági tétele:

(T) *Felülről korlátos nem üres számhalmaznak minden van szupréuma. ($\neg B$)*

Ebből következik:

(K) *Alulról korlátos nem üres számhalmaznak minden van infimuma.*

(M) A fenti axiómarendszerben a Cantor-féle és az Archimédesz-féle axióma lecserélhető ezzel az állítással.

•••

1.2. Számsorozatok és határérték

Thom₂
App

A valós számsorozat a természetes számokon értelmezett valós értékű függvény:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

az n helyen felvett értéke $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$.

²lásd Thomas 11-es bemutató 1. fejezet (3-20. oldal).

A számsorozat jelölése:

$$(a_n), \quad \text{vagy } \langle a_n \rangle, \quad \text{vagy } a_n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

- (D) (a_n) felülről korlátos, ha $\exists k_f: \forall n\text{-re: } a_n \leq k_f$.
- (D) (a_n) alulról korlátos, ha $\exists k_a: \forall n\text{-re: } k_a \leq a_n$.
- (D) (a_n) korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos, tehát $\exists k: |a_n| \leq k$ ($k = \max\{|k_a|, |k_f|\}$).

Vagyis a fenti definíciók szerint ilyenkor $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékkészlete korlátos.

1.2.1. Számsorozat konvergenciája

- (D) Azt mondjuk, hogy (a_n) konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, jelenben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

$N(\varepsilon)$ neve: küszöbindex, küszöbszám

- (M) A definícióval ekvivalens:

$\forall \varepsilon > 0$ -ra az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak véges sok eleme van.
(Az intervallumon belül pedig végtelen sok eleme van.)

•••

Az alábbi példáknál a definíció segítségével bizonyítsuk be, hogy a megadott A a számsorozat határértéke!

(Pl.)

$A = 0$, ha	a) $a_n = \frac{1}{n}$	b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
--------------	------------------------	-----------------------------

Megoldás. Mindkét esetben:

$$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$$

Például $\varepsilon = 0,001$ esetén $N = 1000$ választás megfelelő.

Pl.
$$a_n = \frac{6+n}{5,1-n}, \quad A = -1$$

Megoldás.

$$|a_n - A| = \left| \frac{6+n}{5,1-n} - (-1) \right| = \left| \frac{11,1}{5,1-n} \right| \underset{n>5}{=} \frac{11,1}{n-5,1} < \varepsilon \implies n > 5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon}$$

Ezért $N(\varepsilon) \geq \left[5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon} \right].$

Pl.
$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8}, \quad A = 0$$

Megoldás. $|a_n - A| = \left| \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} \right| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \varepsilon$

Ezt az egyenlőtlenséget nem tudjuk megoldani n -re. Azonban nem szükséges a lehető legkisebb küszöbindex előállítása. Elegendő megmutatnunk, hogy létezik küszöbindex. Ezért a megoldáshoz felhasználhatjuk az egyenlőtlenségek tranzitív tulajdonságát, például az alábbi módon:

$$|a_n - A| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \frac{n^2 - 0}{2n^5 + 0 + 0} = \frac{1}{2n^3} < \varepsilon \implies n > \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

Ezért $N(\varepsilon) \geq \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon}} \right].$

Pl.
$$a_n = \frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5}, \quad A = 4$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} |a_n - A| &= \left| \frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5} - 4 \right| = \left| \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} \right| = \\ &= \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} < \frac{4n^2 + 3n^2}{2n^4 - n^4 + 0} = \frac{7}{n^2} < \varepsilon \implies \frac{7}{\varepsilon} < n^2 \\ \text{Innen } N(\varepsilon) &\geq \left[\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

1.2.2. Számsorozat divergenciája

A nem konvergens számsorozatokat divergens számsorozatnak nevezzük.

Például: $a_n = (-1)^n$ divergens.

Ugyanis a sorozat elemei: $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

Határértékként csak a -1 vagy az 1 jöhetne szóba. De például $\varepsilon = 1$ választással kiderül, hogy egyik sem lehet a határérték, mert bár pl. a -1 pont 1 sugarú környezete végtelen sok elemet tartalmaz (az a_{2n-1} elemeket), de rajta kívül is végtelen sok van (az a_{2n} elemek). Így nem található hozzá $N(\varepsilon)$, tehát -1 nem lehet a határérték. Ugyanígy belátható, hogy 1 sem jöhet szóba határértékként. Tehát a sorozat nem konvergens, így divergens.

A divergentsorozatoknak két fontos speciális esete a $+\infty$ -hez és a $-\infty$ -hez divergáló számsorozat.

A megfelelő definíciók:

$$\text{(D)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \\ \text{ha } \forall P > 0 \text{-hoz } (P \in \mathbb{R}) \exists N(P) \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ a_n > P, \quad \text{ha } n > N(P)$$

$$\text{(D)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \\ \text{ha } \forall M < 0 \text{-hoz } (M \in \mathbb{R}) \exists N(M) \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ a_n < M, \quad \text{ha } n > N(M)$$

Ez a definíció megfogalmazható $M > 0$ feltételkel is:

$$\forall M > 0 \text{-hoz } \exists N(M) \in \mathbb{N}: a_n < -M, \text{ ha } n > N(M)$$

Gy

$$\text{Pl. } a_n = 2n^3 + 3n + 5 \quad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty!$$

Megoldás.

$$a_n = 2n^3 + 3n + 5 > 2n^3 > P \implies n > \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \implies N(P) \geq \left\lceil \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \right\rceil$$

(Pl.)

$$a_n = \frac{6 - n^2}{2 + n} \quad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty !$$

Megoldás. Teljesítendő, hogy $a_n = \frac{6 - n^2}{2 + n} < M$ (< 0), ha $n > N(M)$.

Ez egyenértékű a következő feltétellel:

$(-a_n =) \frac{n^2 - 6}{2 + n} > -M$ (> 0), ha $n > N(M)$. A feladatot egyszerűsítjük, hiszen most sem a legkisebb küszöbindextet keressük:

$$\frac{n^2 - 6}{2 + n} \underset{n \geq 4 \text{ esetén } \frac{n^2}{2} > 6}{>} \frac{n^2 - \frac{n^2}{2}}{2n + n} = \frac{n}{6} > -M \implies n > -6M$$

Ezért $N(M) \geq \max\{4, [-6M]\}$.

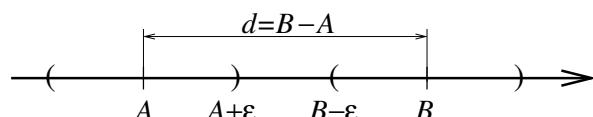
1.3. További tételek a határértékről (1)

1.3.1. A határérték egyértelműsége

(T) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$, akkor $A = B$.

(B) Indirekt módon bizonyítunk³. Tehát feltesszük, hogy $A \neq B$, például $A < B$.

Legyen $d = B - A > 0$ és $\varepsilon = \frac{d}{3} > 0$!



A számsorozat konvergenciája miatt létezik $N_1(\varepsilon)$ és $N_2(\varepsilon)$, hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon),$$

$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon).$$

De ekkor $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmondás, tehát nem igaz, hogy $A \neq B$, vagyis $A = B$. ■

1.3.2. A konvergencia szükséges feltétele

P \implies Q, a P állításból következik a Q állítás. Ezt kétféleképpen is megfogalmazhatjuk:

1. P elégséges feltétele Q-nak,
2. Q szükséges feltétele P-nek. (Hiszen, ha Q nem teljesül, akkor már P nem teljesülhet, mert P teljesüléséből már következne Q teljesülése.)

(T) (a_n) konvergens $\implies (a_n)$ korlátos
(Tehát a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.)

- (B)** $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists N(\varepsilon)$:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) = N$$

Tehát $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ -on kívül legfeljebb csak az a_1, a_2, \dots, a_N elemek eshetnek.



$$\implies \begin{cases} \exists k_a : \forall n\text{-re } k_a \leq a_n & k_a = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N, A - \varepsilon\} \\ \exists k_f : \forall n\text{-re } a_n \leq k_f & k_f = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, A + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Így $\exists K : |a_n| \leq K$, tehát korlátos. ■

(M) \Leftarrow nem igaz. (Az állítás nem megfordítható.)
Példa: $a_n = (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens.

(Pl.) Konvergens-e az alábbi sorozat: $a_n = \begin{cases} 2n+1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{3n^2+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

Megoldás. Nem konvergens, mert nem korlátos. ($a_{2m} = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1 \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}$ -re ellenmond az Archimédesz-féle axiómának.)

1.4. Határérték és műveletek

1.4.1. Műveletek konvergens számsorozatokkal

(T₁) $(a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies (a_n + b_n \rightarrow A + B)$

- (B)** Tehát be kell látni, hogy

$$c_n = a_n + b_n \rightarrow C = A + B,$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|c_n - C| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Legyen $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}$! Az a_n és b_n számsorozatok konvergenciája miatt

$$\exists N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge N_2(\varepsilon^*) = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ hogy}$$

$$\left. \begin{array}{l} |a_n - A| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1(\varepsilon^*) \\ \text{és } |b_n - B| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2(\varepsilon^*) \end{array} \right\} \implies \text{Ha } n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\},$$

akkor

$$\begin{aligned} |c_n - C| &= |(a_n + b_n) - (A + B)| = \\ &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon^* + \varepsilon^* = 2\varepsilon^* = \varepsilon \\ \text{Tehát a keresett } N(\varepsilon) &= \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

(M) A bizonyításnál felhasználtuk a háromszög egyenlőtlenséget. ($|a + b| \leq |a| + |b|$)

(T₂) $(a_n \rightarrow A) \implies (c a_n \rightarrow c A)$

(B) (i) $c = 0$ esetén az állítás triviálisan igaz.

(ii) $c \neq 0$ esetén:

Legyen $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{|c|}$!

a_n konvergenciája miatt $\exists N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon^* \quad \forall n > N_1(\varepsilon^*)$$

$$\implies |c a_n - c A| = |c(a_n - A)| = |c| |a_n - A| < |c| \varepsilon^* = |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) = N(\varepsilon) \quad \blacksquare$$

(M) A bizonyításnál felhasználtuk, hogy $|a b| = |a| |b|$.

(K) (i) $(a_n \rightarrow A) \implies (-a_n \rightarrow -A) \quad (\text{Most } c = -1)$

$$(ii) \ (a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies a_n - b_n = a_n + (-b_n) \rightarrow A + (-B) = A - B$$

(T₁, T₂-ből következik)

(T₃)

$$(i) \ (a_n \rightarrow 0) \wedge (b_n \rightarrow 0) \implies a_n b_n \rightarrow 0$$

$$(ii) \ (a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies a_n b_n \rightarrow AB$$

(B) (i) $\exists N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ és $N_2(2)$, hogy

$$\left. \begin{array}{l} |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N_1 \\ |b_n - 0| < 2 \quad \forall n > N_2(2) = N_2 \quad (\varepsilon = 2 \text{ most}) \end{array} \right\} \implies$$

Ha $n > \max \{N_1, N_2\}$, akkor $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$.

(ii) Mivel a $c_n \equiv A \ \forall n$ -re (stagnáló sorozat) $\rightarrow A$, ezért

$$(a_n - A \rightarrow A - A = 0) \wedge (b_n - B \rightarrow B - B = 0).$$

T₃ (i)-et alkalmazva kapjuk: $(a_n - A) \cdot (b_n - B) \rightarrow 0$, vagyis

$$a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB \rightarrow 0.$$

Ekkor

$$a_n b_n = \underbrace{(a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB)}_{\downarrow 0} + \underbrace{(Ab_n + Ba_n - AB)}_{\downarrow AB + AB - AB} \rightarrow AB$$

■

(M) Nyilván három konvergens sorozat szorzata az egyes határértékek szorzatához konvergál. Teljes indukcióval belátható, hogy véges sok konvergens sorozat szorzata is az egyes sorozatok határértékének szorzatához konvergál. Hasonlóan általánosítható T₂ véges sok konvergens sorozat összegére.

(Pl.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} = 1^{10} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 1^k = 1 \quad (k \in \mathbb{N}^+ \text{ adott konstans, független } n\text{-től})$$

De vigyázat!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq 1^n = 1$$

Az utolsó példában alkalmazott módszer ún. „letakarás” lenne. Eddig megismert tételeinkben nem véletlenül nem volt erről szó, mert alkalmazása rossz eredményhez vezethet. Később látni fogjuk, hogy a 3. sorozat határértéke a matematikában jól ismert $e \neq 1$ szám.

(T₃^{*})

$$(a_n \rightarrow 0) \wedge (b_n \text{ korlátos}) \implies a_n b_n \rightarrow 0$$

(B) A feltételek miatt:

$$\forall \varepsilon^* > 0 \text{-hoz } \exists N_a(\varepsilon^*) : |a_n - A| < \varepsilon^*, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^*), \\ \text{másrészt } |b_n| \leq K.$$

Ekkor

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| \leq |a_n| K < \varepsilon^* K = \varepsilon$$

Tehát $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{K}$ választás mellett az a_n sorozathoz megtalált küszöbindex megfelel az $a_n b_n$ sorozathoz keresett küszöbindexnek.

Így $N(\varepsilon) = N_a\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$ választással

$$|a_n b_n - 0| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

■

(T₄)

$$(a_n \rightarrow A) \implies (|a_n| \rightarrow |A|)$$

(B) $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon).$

■

(M) $(|a_n|)$ konvergenciából általában nem következik (a_n) konvergenciája.
(Pl. $a_n = (-1)^n$ divergens, de $|a_n| = 1^n = 1 \rightarrow 1$).

Speciálisan azonban igaz: $|a_n| \rightarrow 0 \implies a_n \rightarrow 0$.

Ugyanis

$$|\lvert a_n \rvert - 0| = \lvert a_n \rvert = \lvert a_n - 0 \rvert < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

(T₅)

$$(i) (b_n \rightarrow B \neq 0) \implies \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$$

$$(ii) (b_n \rightarrow B \neq 0) \wedge (a_n \rightarrow A) \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$$

(B) (i) Mivel T₄ szerint $\lvert b_n \rvert \rightarrow |B|$, ezért $\exists N_1 \left(\frac{|B|}{2} \right) = N_1$, hogy

$$\lvert \lvert b_n \rvert - |B| \rvert < \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

azaz

$$|B| - \frac{|B|}{2} < |b_n| < |B| + \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

vagyis

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \forall n > N_1.$$

Másrészt $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N_2 \left(\frac{\varepsilon}{2} |B|^2 \right) = N_2(\varepsilon^*)$, hogy

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} |B|^2 = \varepsilon^* \quad \forall n > N_2(\varepsilon^*).$$

Így ha $n > N(\varepsilon) := \max \{N_1, N_2\}$, akkor:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} \right| = \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot |b_n|} < \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} < \frac{\varepsilon^*}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = < \frac{\frac{\varepsilon}{2} |B|^2}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \varepsilon$$

(ii) $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$ T₃ és T₅ (i) miatt. ■

Néhány példa az előző tételek alkalmazására

(Pl.) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{500}{n^2} \rightarrow \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{500 \text{ db}} = 0$

Megoldás. A tagok száma 500 (n -től független!), ezért T_1 véges sokszori alkalmazásával a 0 eredmény helyesnek adódik.

$$\text{Pl. } \boxed{b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}} \rightarrow 0 + \cdots + 0 = 0 \quad \text{HIBÁS gondolatmenet!!!}$$

Megoldás. Hiszen

$$b_1 = \frac{1}{1^2}, \quad b_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2}, \quad b_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2}, \quad b_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^2}, \dots$$

Így a tagok száma itt függ n -től, ez nem véges sok sorozat összege, így a T_1 téTEL erre már nem terjeszthető ki. A helyes megoldás:

$$b_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{(1+n) \cdot \frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1+n}{2n} = \frac{\frac{1}{n}+1}{2} \rightarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pl. } \boxed{a_n = \frac{8n^2 - n + 3}{n^2 + 9}} = \underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \cdot \frac{8 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^2}} \rightarrow \frac{8 - 0 + 0}{1 + 0} = 8$$

$$\text{Pl. } \boxed{a_n = \left(\frac{2n+1}{3-n} \right)^3 \cdot \frac{3n^2 + 2n}{2 + 6n^2}}$$

Megoldás.

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{2n}{-n} \right)^3}_{=-8} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{n}} \right)^3 \cdot \underbrace{\frac{3n^2}{6n^2}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3n}}{1 + \frac{1}{3n^2}} \rightarrow -8 \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -4$$

(M) A hatványozásnál a szorzatra vonatkozó téTEL alkalmaztuk.

$$\text{Pl. } \boxed{a_n = \frac{n^2 - 5}{\underbrace{2n^3 + 6n}_{b_n}} \cdot \underbrace{\sin(n^4 + 5n + 8)}_{c_n} \rightarrow 0.}$$

Megoldás. Hiszen

$$b_n = \frac{\frac{n^2}{2n^3}}{=\frac{1}{2n} \rightarrow 0} \cdot \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{és } c_n \text{ korlátos.}$$

•••

1.4.2. Néhány jól használható egyszerűbb téTEL

(T)
$$(a_n \geq 0) \wedge (a_n \rightarrow A \geq 0) \implies (\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{A})$$

(B) (i) $A = 0$ esete:
 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon,$ ha $n > N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^2)$ $\iff \begin{cases} 0 \leq |a_n - 0| = a_n < \varepsilon^2, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^2) \\ (a_n \rightarrow 0 \text{ miatt } \exists N_a(\varepsilon^2)) \end{cases}$

(ii) $A > 0$ esete:

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow A \text{ miatt } \exists N_a(\varepsilon \sqrt{A}) = N_a(\varepsilon^*) : \\ |a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A} = \varepsilon^*, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon \sqrt{A}) \end{aligned}$$

De ekkor

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \left| \frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon,$$

tehát $N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^*)$

■

(M) $a_n \geq 0, a_n \rightarrow A \implies \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{A}$ tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}^+$ esetén.

(Pl.)
$$a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 1} - \sqrt{4n^2 + n + 3} \quad (\infty - \infty \text{ alakú})$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4n^2 + 5n - 1 - (4n^2 + n + 3)}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} = \\ &= \frac{4n - 4}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} = \\ &= \frac{4n}{\underbrace{\sqrt{4n^2}}_{4n=2} = 2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4n} - \frac{1}{4n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{3}{4n^2}}} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

Gy

1.4.3. Feladatok

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{3n^2 + 8}} = ?$
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 + 3}) = ?$
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 4}) = ?$
 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^4 + n^3 - 2n^2 + 8}}{\sqrt[3]{n^6 + 5n^2 + 3}} = ?$
 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 4n^2 - n} - \sqrt{n^4 - n^2 - n + 1}) = ?$
-

(T)
$$(a_n \rightarrow \infty) \implies \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \right)$$

(B) Tudjuk, hogy $\exists N_a(P)$:

$$a_n > P > 0, \text{ ha } n > N_a(P).$$

■

Tehát $\frac{1}{P} > \frac{1}{a_n} > 0$, ha $n > N_a(P)$. $P = \frac{1}{\varepsilon}$ választással kapjuk, hogy

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \text{ ha } n > N_a(P).$$

Vagyis

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon) = N_a(P).$$

$(a_n > 0)$ feltehető, hiszen csak véges sok negatív elem lehet. Ezek elhagyhatók.)

(Pl.)
$$(a_n \rightarrow 0) \stackrel{?}{\implies} \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \right)$$

Megoldás. Nem következik!

Például

$$a_n = \frac{-2}{n} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = -\frac{n}{2} \rightarrow -\infty$$

Vagy például

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n^2 := b_n$$

$$b_{2m} \rightarrow \infty, \quad b_{2m+1} \rightarrow -\infty. \quad \text{Tehát} \quad \frac{1}{a_n} \not\rightarrow \infty.$$

De igaz:

$$((a_n > 0) \wedge (a_n \rightarrow 0)) \implies \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \right)$$

$$((a_n < 0) \wedge (a_n \rightarrow 0)) \implies \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty \right)$$

Ezt röviden így fogjuk jelölni az indoklásoknál: $\frac{1}{0^+} \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{0^-} \rightarrow -\infty$

⑩ $(a_n \rightarrow 0) \implies \left(\frac{1}{|a_n|} \rightarrow \infty \right)$

⑪ Tudjuk, hogy $\exists N_a(\varepsilon)$:

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon).$$

Vagyis $\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = P, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon) = N(P).$

■

•••

További hasonló tételek bizonyíthatók:

Pl. $\frac{0}{\infty} \rightarrow 0 \quad (\text{Jelentése: } a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty \quad \text{esetén} \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0)$
 $\left(\text{sőt } \frac{\text{korlátos}}{\infty} \rightarrow 0; \right) \quad \frac{\infty}{+0} \rightarrow \infty; \quad \infty + \infty \rightarrow \infty; \quad \infty \cdot \infty \rightarrow \infty$

(Felhasználhatóak bizonyítás nélkül.)

Határozatlan alakok:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Ilyen esetekben azonos átalakítással próbálkozunk, ill. később kapunk egy segédeszközt (L'Hospital-szabály).

1.5. További tételek a határértékről (2)

A limesz monoton:

(T) $(a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^+) \implies (A \leq B, \text{ tehát } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$

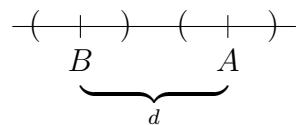
(M₁) Példa $A = B$ esetére:

$$a_n = \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\downarrow \quad 1 = A} < b_n = \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\downarrow \quad 1 = B}$$

(M₂) $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n \leq b_n$ esetén is igaz az állítás.

(M₃) $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n \leq b_n$, ha $n > N_1$ (\exists ilyen N_1) feltétel is elég.

(B) Megmutatjuk, hogy $A > B$ nem lehet, így a trichotom tulajdonság miatt $A \leq B$.



Ha $A > B$ lenne, akkor pl. $\varepsilon := \frac{d}{3} = \frac{A - B}{3} > 0$ -hoz a számsorozatok konvergenciája miatt $\exists N_a, N_b :$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n > N_a (\varepsilon)\text{-ra } |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall n > N_b (\varepsilon)\text{-ra } |b_n - B| < \varepsilon \end{array} \right\} \implies a_n > b_n, \text{ ha } n > \max\{N_a, N_b\}$$

EZ pedig a feltétel miatt nem lehetséges. ■

Rendőrelv:

(T)

$$\left(\begin{array}{l} a_n \rightarrow A \\ b_n \rightarrow A \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \implies (c_n \rightarrow A)$$

(M) A tétel állítása most is igaz marad, ha a $\forall n \in \mathbb{N}$ feltétel helyett a gyengébb $\forall n > N_1$ (\exists ilyen N_1) feltételt használjuk.

(B) A feltételek miatt:

Ha $n > N_a(\varepsilon) : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ és $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$, ha $n > N_b(\varepsilon)$.

$N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$.

Ha $n > N(\varepsilon)$, akkor az előzőek miatt:

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

Tehát, ha $n > N(\varepsilon)$

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \implies |c_n - A| < \varepsilon.$$

Vagyis $c_n \rightarrow A$, ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

Speciális rendőrelv:

(T)

$$(i) (a_n \geq b_n) \wedge (b_n \rightarrow \infty) \implies a_n \rightarrow \infty$$

$$(ii) (a_n \leq b_n) \wedge (b_n \rightarrow -\infty) \implies a_n \rightarrow -\infty$$

(B) $(\neg B)$ ■

•••

Néhány nevezetes számsorozat

Gy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{oszcillálóan divergens egyébként.} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0, \text{ ha } |a| < 1 \text{ és } k \in \mathbb{N}^+ \quad (\neg B)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{n} = 1, \text{ ha } p > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (\neg B)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = \infty.$$

1.6. Néhány példa az előző tételek alkalmazására

Pl.
$$\boxed{a_n = \frac{3n^5 + n^2 - n}{n^3 + 3}} > \frac{3n^5 + 0 - n^5}{n^3 + 3n^3} = \frac{n^2}{2} \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow \infty$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{n^5}{n^3} \cdot \frac{\underbrace{\frac{3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{3}{n^3}}}_{c_n} > n^2 \cdot 2 \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow \infty}$$

Felhasználtuk, hogy

$$c_n \rightarrow 3 \implies \exists N_0 : 2 < c_n (< 4), \text{ ha } n > N_0$$

(M) Persze belátható lenne, hogy $b_n \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow C > 0$ esetén $b_n c_n \rightarrow \infty$. Mi azonban ezt nem bizonyítottuk be, ezért nem használhatjuk fel a megoldásnál.

Pl.
$$\boxed{a_n = \frac{1}{n^4 + 3} \cos(n^7 - 5)} \stackrel{?}{\rightarrow} 0,$$

Megoldás.

$$\underbrace{\frac{1}{n^4 + 3} \cdot (-1)}_{\downarrow 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^4 + 3} \cdot 1}_{\downarrow 0} \text{ a rendőrelv miatt} \implies a_n \rightarrow 0.$$

Másik megoldás: egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzatáról van szó, így egy korábbi téTEL miatt a szorzat is nullsorozat.

Pl.
$$\boxed{a_n = \frac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} \rightarrow ?}$$

Megoldás.
$$\frac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{9}{4}\right)^n}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n}}_{\rightarrow 1}$$

Tehát $+\infty$ határértéket várunk, ezért a **speciális rendőrelvet** használjuk:

$$a_n > \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot 1} \rightarrow \infty \\ \implies a_n \rightarrow \infty.$$

Pl. $a_n = \frac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}} \rightarrow ?$

Megoldás. $\frac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}} = \frac{4^n - \frac{1}{3} \cdot (-3)^n}{25 \cdot 5^n + 7 \cdot 7^n} =$

$$= \underbrace{\frac{4^n}{7^n}}_{=\left(\frac{4}{7}\right)^n \rightarrow 0} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n}{25 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 7} \rightarrow 0 \cdot \frac{1-0}{0+7} = 0$$

Pl. $a_n = \frac{n^2 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}} \rightarrow ?$

Megoldás. $\frac{n^2 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}} = \frac{n^2 \left(\frac{1}{9}\right)^n + 9}{2n^5 \left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{3}} \frac{9^n}{9^n} \rightarrow \frac{0+9}{0+\frac{1}{3}} = 27$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0$, ha $|a| < 1$. (Most $a = \frac{1}{9}$.)

Pl. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+100}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Megoldás. $a_n \rightarrow \underbrace{0+0+\dots+0}_{100 \text{ darab}} = 0$

A (b_n) sorozatnál már nem alkalmazható az előbbi módszer, mivel az egyes tagok ugyan nullához tartanak, de a tagok száma végtelenhez tart ($\infty \cdot 0$ alakú). A rendőrelv segítségével tudjuk megoldani a feladatot.

$$\underbrace{\frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}}_{1} = n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < b_n < n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \underbrace{\frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}}_1$$

$$\implies b_n \rightarrow 1.$$

Pl. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)!

Megoldás. Ha $a = 0$: triviálisan igaz.

Ha $0 < a < 1$: $\frac{0}{\infty}$ alakú, ezért 0-hoz tart a sorozat.

Ha $a = 1$: $\frac{1}{n!} \rightarrow 0$.

Ha $a > 1$: $n > [a]$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \frac{a}{n} = \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n} = \frac{\text{konstans}}{n} \\ &\downarrow \\ 0 & \end{aligned}$$

$$\implies \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Ha $a < 0$:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{(-1)^n |a|^n}{n!} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{korlátos}} \underbrace{\frac{|a|^n}{n!}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Pl. $a_n = \sqrt[3n]{n} \rightarrow ?$

Megoldás. $\sqrt[3n]{n} = \frac{\sqrt[3n]{3n}}{\sqrt[3n]{3}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$

Ugyanis az $\sqrt[p]{n}$ és az $\sqrt[p]{p}$ ($p = 3$) részsorozatairól van szó.

Másik megoldás: $a_n = \sqrt[3n]{n} = \sqrt[3]{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

Pl. $a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n}{8n^2 - 2}} \rightarrow ?,$

Megoldás.

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{4}}}_{1 \cdot 1^3 = 1} (\sqrt[n]{n})^3 = \sqrt[n]{\frac{2n^5}{8n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n^5}{8n^2 - 2n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{7}{6}}}_{1 \cdot 1^3 = 1} (\sqrt[n]{n})^3$$

$$\implies a_n \rightarrow 1.$$

Pl. $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}} \rightarrow ?$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}}^{\downarrow \frac{5}{4}} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \underbrace{\sqrt[n]{2} + \frac{5}{4}}_{\downarrow \frac{5}{4}}$$

$$\implies a_n \rightarrow \frac{5}{4}.$$

•••

1.7. Monoton sorozatok

Elégséges téTEL (a_n) konvergenciájára:

- (T)** (i) Ha (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens.
(ii) Ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

A két esetet összevonva a téTEL így is kimondható :

Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor konvergens.

(B) Monoton növekedő esetre:

Felveszünk egy $I_n = [c_n, d_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot, ahol
 c_n : mindenkorlátos, mindenkorlátos, mindenkorlátos.

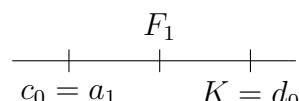
Így az (a_n) sorozat elemei véges sok elem kivételével a $[c_n, d_n]$ -ben vannak. A Cantor-axióma szerint az I_n intervallumok metszete nem üres. Választunk a metszetből egy elemet, erről belátjuk, hogy a számsorozat határértéke. Mivel a határérték egyértelmű, azt is beláttuk, hogy ebben a speciális intervallumsorozatban egyetlen közös elem van, mert az intervallumok hossza 0-hoz tart.

Részletesen:

$$a_1 \leq a_n \leq K \quad \exists K \text{ (a korlátosság miatt)}$$

$$I_0 = [c_0, d_0] := [a_1, K]$$

$$F_1 := \frac{c_0 + d_0}{2}$$



Ha F_1 felső korlát, akkor $c_1 = c_0$, $d_1 = F_1$, $I_1 = [c_1, d_1] := [c_0, F_1]$

Ha F_1 nem felső korlát: $\exists a_{n_1} > F_1$ és ekkor $c_1 = a_{n_1}$, $d_1 = d_0$, $I_1 = [c_1, d_1] := [a_{n_1}, d_0]$

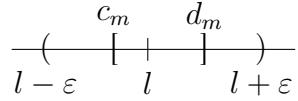
$$F_2 := \frac{c_1 + d_1}{2}$$

Ha F_2 felső korlát: $I_2 = [c_2, d_2] := [c_1, F_2]$

Ha F_2 nem felső korlát: $\exists a_{n_2} > F_2$ és ekkor $I_2 := [a_{n_2}, d_1]$.

Stb.

$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ (Cantor-axióma), tehát $\exists l \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.
Belátjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.



I_n hossza: $d_n - c_n \leq \frac{K - a_1}{2^n} < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$. Az előzőek miatt

$$0 < l - c_n \leq d_n - c_n < \varepsilon \quad \text{és} \quad 0 < d_n - l \leq d_n - c_n < \varepsilon, \quad \text{vagyis} \\ l - \varepsilon < c_n \leq d_n < l + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

Mivel $c_m = a_{n_m}$ és $(a_n) \nearrow$:

$$c_m = a_{n_m} \leq a_n, \quad \text{ha} \quad n > n_m \quad \text{és} \quad a_n \leq d_m \quad (\text{felső korlát}) \quad \forall n \implies$$

$$l - \varepsilon < c_m = a_{n_m} \leq a_n \leq d_m < l + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_m = N(\varepsilon)$$

Tehát valóban $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. ■

•••

Gy 1.7.1. Példák rekurzív sorozatokra

A rekurzív megadású számsorozatok konvergenciája sok esetben vizsgálható az előző elégsséges téTEL alkalmazásával. Erre mutatunk most néhány példát.

Pl. $a_1 = \frac{4}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}; \quad n = 1, 2, \dots$

Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

Megoldás. $a_1 = 1,33 > a_2 = \frac{3 + (1,33)^2}{4} = 1,194 > a_3 = 1,1067$

Sejtés: $(a_n) \searrow$, tehát $a_n > a_{n+1} > 0$.

Bizonyítás: teljes indukcióval.

1. $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ teljesül

2. Tfh. $a_{n-1} > a_n > 0$

3. Igaz-e:

$$\frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n > ? = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

2. miatt $a_{n-1} > a_n \geq \frac{3}{4} > 0$

$$\begin{aligned} &\implies a_{n-1}^2 > a_n^2 \implies 3 + a_{n-1}^2 > 3 + a_n^2 \\ &\implies \frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n > a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4} \end{aligned}$$

Tehát a számsorozat monoton csökkenő és alulról korlátos (hiszen $a_n > 0$)

$\implies (a_n)$ konvergens, és fennáll:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + a_{n-1}^2}{4}$$

$$A = \frac{3 + A^2}{4} \implies A^2 - 4A + 3 = 0 \implies A = 1 \text{ vagy } A = 3.$$

$A = 3$ nem lehet, mivel $a_n < a_1 = \frac{4}{3}$, ezért a_n nem esik a 3 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Pl.

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

Megoldás. $(a_n) = (1, 2, 646, 2, 94, \dots)$

$\sqrt{6 + a_n} \geq 0$ miatt a sorozat elemei pozitívak ((ii)-ben precízen megmutatjuk).

(i) Ha a sorozat konvergens lenne, akkor létezne

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_{n-1}} = \sqrt{6 + A}, \quad \text{vagyis} \quad A^2 - A - 6 = 0.$$

Ebből $A = 3$ vagy $A = -2$ lehetne. $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}} > 0$ miatt $A = -2$ nem lehet. Így csak az $A = 3$ jöhet szóba.

(ii) Sejtés: $(a_n) \nearrow$.

Bizonyítás: teljes indukcióval. (Egyidejűleg belátjuk, hogy $a_n > 0$.)

$0 < a_1 < a_2 < a_3$ igaz.

Tegyük fel, hogy $0 < a_{n-1} < a_n$.

Igaz-e, hogy

$$0 < \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n < a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

$$\begin{aligned} \text{Az indukciós feltevés miatt } \quad 0 &< a_{n-1} < a_n \\ \implies 0 &< 0 + 6 < 6 + a_{n-1} < 6 + a_n \quad (a_n > 0 \text{ miatt}) \\ \implies 0 &< \sqrt{6 + a_{n-1}} < \sqrt{6 + a_n} \end{aligned}$$

Vagyis $0 < a_n < a_{n+1}$.

Tehát a sorozat monoton növekedő és elemei értelmezettek és pozitívak.

- (iii) Létezik-e K felső korlát? K -nak most célszerű A -t választani. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:
- $a_1 < 3$ teljesül. Tegyük fel, hogy $a_n < 3$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Tehát (a_n) felülről korlátos (felső korlátja 3).

- (iv) Vagyis $(a_n) \nearrow \wedge (a_n)$ felülről korlátos $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.
Láttuk, hogy $A = 3$ lehet csak.

(M) A monotonitás másképpen is belátható:

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \\ a_n^2 &< ? 6 + a_n \\ a_n^2 - a_n - 6 &< ? 0 \end{aligned}$$

Ez igaz, ha $-2 < a_n < 3$, de ezt még be kell bizonyítani. $-2 < a_n$ triviálisan igaz ($a_n > 0$ miatt), $a_n < 3$ pedig teljes indukcióval bizonyítandó.

Pl.	$a_1 = -3; \quad a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13}; \quad n = 1, 2, \dots$
------------	--

Konvergens-e a sorozat?

Megoldás. Monoton csökkenő-e?

$$a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13} < ? a_n, \text{ amiből } 6a_n^2 + 13a_n - 5 > ? 0.$$

$$\left(6x^2 + 13x - 5 = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

Tehát monoton csökkenő, ha $a_n < -\frac{5}{2}$, vagy $a_n > \frac{1}{3}$.

Most teljes indukcióval belátható, hogy $a_n \leq -3$ ($< -\frac{5}{2}$) (HF.)

Tehát a sorozat monoton csökkenő a -3 kezdőértékkel.

Ha a sorozat alulról korlátos lenne, akkor konvergens lenne, és a határértéke:

$$A = \frac{5 - 6A^2}{13} \implies A = -\frac{5}{2} \text{ vagy } A = \frac{1}{3} \text{ lehetne.}$$

Mivel most $a_n \leq -3 \forall n$ -re $\implies (a_n)$ nem konvergens, vagyis alulról nem korlátos

$\implies \forall M$ -hez $\exists n_0$, hogy $a_{n_0} < M$.

Mivel $(a_n) \searrow$, ezért $a_n < a_{n_0} < M$, ha $n > n_0$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

1.8. Egy kitüntetett számsorozat

⑩ $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ korlátos és $\nearrow \implies (e_n)$ konvergens.

(B) 1. Korlátosság (a binomiális téTEL felhasználásával):

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{0 < \dots < 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{0 < \dots < 1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{0 < \dots < 1} \right) < \\ &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} := s_n \end{aligned}$$

De (s_n) felülről korlátos, mert

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} < \\ &< 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} < 3 \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } e_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3.$$

2. (e_n) monoton nő:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1} \right) \right) = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)}_{>1-\frac{1}{n}} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n+1} \right)}_{>1-\frac{k-1}{n}} \right) + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \\ &> 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \right) + 0 = e_n \end{aligned}$$

Tehát $e_{n+1} > e_n$. ■

Mivel $(e_n) \nearrow$ és korlátos \implies konvergens.
A sorozat határértékét e -vel jelöljük.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A fentiek miatt: $2 < e < 3$.

Belátható (mi nem bizonyítjuk), hogy e nem racionális szám, továbbá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1.8.1. Néhány e -vel kapcsolatos példa

Gy

Pl. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3 + n + 6}\right)^{n^3+n+6} \rightarrow e$, ugyanis (e_n) egy részsorozatáról van szó.

Pl. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^{n-6} \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^6 \rightarrow e \cdot 1^6 = e$

Pl. $a_n = \left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^{6n-7} = \left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^{6n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^8} \rightarrow e \cdot \frac{1}{1^8} = e$

Pl. $a_n = \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n-2} = \left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^{n+4-6} =$
 $= \left(1 + \frac{-1}{n+4}\right)^{n+4} \frac{1}{\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^6} \rightarrow e^{-1} \cdot \frac{1}{1^6} = \frac{1}{e}$

$\left(\text{Felhasználtuk, hogy } \frac{n+4}{n+3} = \frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 \right)$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \quad \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^2 \rightarrow \frac{e^3}{e^4} \cdot 1^2 = \frac{1}{e}$$

Pl.

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 + 3}\right)^{n^2} = \frac{\left(1 + \frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \rightarrow \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5}$$

Pl.

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+6}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^n}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^1}{e^6}\right)^2 = e^{-10}$$

Pl.

$$a_n = \left(\frac{2n+2}{2n+9}\right)^{2n} = \frac{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{9}{2n}\right)^{2n}} \rightarrow \frac{e^2}{e^9} = e^{-7}$$

Pl.

$$a_n = \left(\frac{2n^2 + 5}{2n^2 + 3}\right)^{4n^2} \rightarrow ?$$

Megoldás. Két átalakítással is megoldjuk.

1. megoldás:

$$a_n = \left(\frac{\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \frac{3}{2n^2}\right)^{2n^2}}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^5}{e^3}\right)^2 = e^4$$

2. megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{5 \cdot 2}{4n^2}\right)^{4n^2}}{\left(1 + \frac{3 \cdot 2}{4n^2}\right)^{4n^2}} \rightarrow \frac{e^{10}}{e^6} = e^4$$

Pl. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n^2}, \quad b_n = \left(\frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{9n^2},$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n^3}, \quad d_n = \left(\frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n}.$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1 + \frac{-2}{3n^2}\right)^{3n^2}} \rightarrow \frac{e}{e^{-2}} = e^3 = A$$

$$b_n = (a_n)^3 \implies b_n \rightarrow A^3 = e^9$$

$$c_n = (a_n)^n > 8^n, \text{ ha } n > N_1 \quad (a_n \rightarrow e^3 \text{ miatt } \exists N_1) \implies c_n \rightarrow \infty$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \infty \end{array}$$

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} \implies \exists N_2 : n > N_2 \text{ esetén}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{e^3 - 0,1}}_{\downarrow 1} \leq d_n \leq \underbrace{\sqrt[n]{e^3 + 0,1}}_{\downarrow 1}$$

$$\implies d_n \rightarrow 1.$$

1.8.2. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben azok léteznek!

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{n+100}$

b) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+8}\right)^{n+7} (-1)^n$

c) $a_n = \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n+8}$

d) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^n, \quad b_n = \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^n, \quad c_n = \left(\frac{4n-1}{3n+2} \right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1} \right)^{n^3+8}, \quad b_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1} \right)^{n^4}, \quad c_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1} \right)^{n^2}$

f) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n!} \right)^{n!}, \quad b_n = \left(1 - \frac{2}{n!} \right)^{(n-1)!}, \quad c_n = \left(1 - \frac{2}{n!} \right)^{(n+1)!}$

2. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n^2+1} \right)^{\frac{1}{n}} = ?$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+4} \right)^{n^2+4}} = ?$

3. Gyakorló példák rekurzív sorozatokhoz:

a) $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$

b) $a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$

(Útmutatás: $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, először $0 < a_n < 1$ -et mutassa meg.)

c) $a_1 = \frac{1}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n}$

(Segítség: $a_{n+1} = \frac{a_n + 3 - 3}{3 + a_n} = 1 - \frac{3}{3 + a_n}$)

d) $a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$

e) $a_1 = 4; \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$

f) $a_1 = 5; \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 5}$

•••

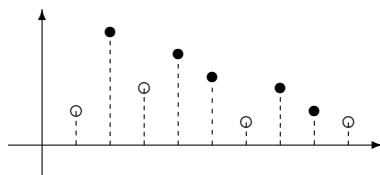
1.9. További tételek a határértékről (3)

(T)

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

(B)

„csúcs”: a_{n_0} csúcs, ha $\forall n > n_0$ -ra
 $a_n \leq a_{n_0}$



1. \exists végtelen sok csúcs \implies van monoton csökkenő részsorozat, hiszen ezek a csúcsok monoton csökkenő részsorozatot alkotnak.
2. Véges sok csúcs van (esetleg nincs is).
 - a_{s_1} : a legnagyobb indexű csúcs után következő elem. (Ha nem volt: $a_{s_1} = a_1$.) a_{s_1} nem csúcselem.
 - $\exists s_2 > s_1 : a_{s_2} \geq a_{s_1}$, különben a_{s_1} csúcs lenne. a_{s_2} sem csúcselem.
 - $\exists s_3 > s_2 : a_{s_3} \geq a_{s_2}$, különben a_{s_2} csúcs lenne.
 Stb. Így kapunk egy $(a_{n_r}) \nearrow$ részsorozatot. ■

Bolzano–Weierstrass kiválasztási téTEL:

(T) Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

(B) Az előző téTEL miatt \exists monoton részsorozat, és mivel ez korlátos \implies konvergens. ■

(M) A racionális számok \mathbb{Q} halmazában nem igaz a Bolzano–Weierstrass kiválasztási téTEL. Legyen $(b_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, \dots) \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $b_n \in \mathbb{Q}$. $(b_n) \subset [1, 2]$, azaz korlátos. (b_n) minden részsorozata $\sqrt{2}$ -hez konvergál, tehát nincs (b_n) -nek olyan részsorozata, amely egy \mathbb{Q} -beli elemhez konvergálna.

•••

Szükséges és elégsges téTEL számsorozat konvergenciájához

Cauchy-féle konvergenciakritérium:

(T) Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m > M(\varepsilon) \text{ esetén}$$

$(\neg B)$

(M₁) Más megfogalmazásban:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad \forall n > M(\varepsilon), \forall k \in \mathbb{N} \text{ esetén}$$

(M₂) A téTEL azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszőlegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a téTEL használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

(D) Az (a_n) számsorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists M(\varepsilon)$:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > M(\varepsilon)$$

A Cauchy-féle konvergencia tétele megfogalmazhatjuk a következőképpen is:

Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

(M) \mathbb{Q} -ban a Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens.

Például $(a_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, \dots) \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Az (a_n) Cauchy-sorozat, mert $|a_{n+k} - a_n| < 10^{-N} = \varepsilon$, ha $n > N$, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Nincs olyan \mathbb{Q} -beli elem, amelyhez (a_n) konvergálna.

•••

Egy fontos példa

(Pl.)

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$

Megoldás.

$$s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$s_{2N} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

N -et akármilyen nagyra választjuk:

$$|s_{2N} - s_N| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát nem szorítható ε alá, ha $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergencia kritérium \implies divergens.

Mivel $(s_n) \nearrow \implies s_n \rightarrow \infty$.

•••

1.10. Sorozat torlódási pontjai

D (Torlódási pont (sűrűsödési pont, sűrűsödési érték):) $t \in \mathbb{R}$, ill. $t = \infty$, vagy $t = -\infty$ az (a_n) torlódási pontja, ha minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza

(Tehát létezik olyan (a_{n_r}) részsorozat, amely t -hez tart.)

($+\infty$ környezetei (P, ∞) alakúak, ahol $P \in \mathbb{R}$. $-\infty$ környezetei $(-\infty, M)$ alakúak, ahol $M \in \mathbb{R}$.)

T (a_n) valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy valós szám a torlódási pontja.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $t = \infty$ az egyetlen torlódási pont.

D $S := (a_n)$ torlódási pontjainak halmaza.

T Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor létezik legnagyobb torlódási pont. ($\neg B$)

D (Limesz szuperior:)

$$\limsup a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \overline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legnagyobb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{felülről korlátos} \\ -\infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{-\infty\} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

D (Limesz inferior:)

$$\liminf a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \underline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legkisebb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{alulról korlátos} \\ \infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{\infty\} \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

M Ha $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Gy

Pl. $a_n = 2^{(-1)^n n}; \quad \overline{\lim} a_n = ?, \quad \underline{\lim} a_n = ?$

Megoldás. Ha n páros: $a_n = 2^n \rightarrow \infty$ (Részletezve: $n = 2m : a_{2m} = 2^{2m} = 4^m \rightarrow \infty$)

Ha n páratlan: $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ ($n = 2m + 1 : a_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} = \frac{1}{2 \cdot 4^m} \rightarrow 0$)

Így a sorozat torlódási pontjai: $0, \infty \implies \overline{\lim} a_n = \infty, \underline{\lim} a_n = 0$

(Pl.)

$$a_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + 3n + 7}$$

Adja meg a számsorozat torlódási pontjait! $\overline{\lim} a_n = ?, \underline{\lim} a_n = ?$

Megoldás. n értékétől függően három részsorozat viselkedését kell vizsgálnunk.

Ha $n = 2m : \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ezért a kapott részsorozat:

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 3n + 7} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Ha $n = 4m + 1 : \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$, ekkor a részsorozat:

$$a_n = \frac{2n^2}{2n^2 + 3n + 7} \rightarrow 1$$

Ha $n = 4m - 1 : \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -1$, így a részsorozat:

$$a_n = 0 \rightarrow 0$$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $S = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$$\overline{\lim} a_n = 1, \underline{\lim} a_n = 0$$

(Pl.)

$$a_n = \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}}, \quad b_n = a_n \cdot \cos n\pi$$

$$\overline{\lim} a_n = ?, \underline{\lim} a_n = ? \quad \overline{\lim} b_n = ?, \underline{\lim} b_n = ?$$

Megoldás. $a_n = \frac{3 \cdot 9^n + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} = \underbrace{\frac{9^n}{9^n}}_{=1} \frac{3 + \left(-\frac{4}{9}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 9} \rightarrow \frac{3+0}{0+9} = \frac{1}{3}$

Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \frac{1}{3}$$

Az (a_n) sorozat konvergens, mert egyetlen véges torlódási pontja van.

(b_n) vizsgálata : $\cos n\pi = (-1)^n$.

Ezért, ha n páros: $b_n = a_n \rightarrow \frac{1}{3}$

Ha n páratlan: $b_n = -a_n \rightarrow -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \overline{\lim} a_n = \frac{1}{3}, \quad \underline{\lim} a_n = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \notin$$

Pl.

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint limeszszuperiorját és a limesz inferiorját!

$$\text{a) } a_n = \frac{-4^n + 3^{n+1}}{1 + 4^n} \quad \text{b) } b_n = \frac{(-4)^n + 3^{n+1}}{1 + 4^n}$$

$$\text{c) } c_n = \frac{(-4)^n + 3^{n+1}}{1 + 4^{2n}}$$

$$\text{Megoldás. a) } a_n = \frac{-4^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \underbrace{\frac{4^n}{4^n}}_{=1} \frac{-1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \rightarrow \frac{-1 + 0}{0 + 1} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = -1$$

$$\text{b) } b_n = \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \underbrace{\frac{(-4)^n}{4^n}}_{=(-1)^n} \underbrace{\frac{1 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}}_{:=\beta_n} = (-1)^n \beta_n$$

$$\beta_n \rightarrow \frac{1+0}{0+1} = 1$$

$$\text{Ha } n \text{ páros: } b_n = \beta_n \rightarrow 1$$

$$\text{Ha } n \text{ páratlan: } b_n = -\beta_n \rightarrow -1$$

$$\implies \overline{\lim} b_n = 1, \quad \underline{\lim} b_n = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \not\exists$$

$$\text{c) } c_n = \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 16^n} = \underbrace{\frac{(-4)^n}{16^n}}_{=(-\frac{1}{4})^n} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{16}\right)^n + 1} \rightarrow 0 \cdot \frac{1+0}{0+1} = 0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \overline{\lim} c_n = \underline{\lim} c_n = 0$$

2. fejezet

Valós számsorok

2.1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy (s_n) számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{a_1}_{s_1} + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 s_2
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
 s_3
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
 s_n

$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$: n-edik részletösszeg

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

D) A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s , ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

¹lásd Thomas 11-es bemutató 2. fejezet (21-31. oldal).

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \text{az összeg konvergens} \\ +\infty, & \\ -\infty, & \\ \not\exists, & \end{cases} \quad \text{az összeg divergens.}$$

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = ?$

Megoldás. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ esetén $s_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ (Divergens a sor.)

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = ?$

Megoldás. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^k + \dots$ divergens, mert

$$\left. \begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \rightarrow 1 \\ s_{2k} = 0 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (s_n) \text{-nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = ?$

Megoldás.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{s_n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}}_{s_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1,$$

tehát a sor konvergens.

Pl. $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = ?}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{-1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1, \quad \text{konvergens a sor.} \end{aligned}$$

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonikus sor) divergens

Megoldás.

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \\ &\quad + \left(\cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2^k} &= \infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \end{aligned}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$.

(M) Ha a sorban véges sok tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

2.1.1. Geometriai (mértani) sor

(T) *Geometriai sor*

$$1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \quad s_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

Ha $q = 1$:

$$s_n = n, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Ha $q \neq 1$:

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \rightarrow 0$, ha $|q| < 1$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

Mivel $q^n \rightarrow \infty$, ha $q > 1 \implies s_n \rightarrow \infty$, ha $q > 1$.

Ha $q = -1$:

q^n -nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.
 $\implies s_n$ -nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q < -1$:

q^n -nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$.
 $\implies s_n$ -nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞ , tehát divergens.

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum_{k=3}^{\infty} q^k = q^3 + q^4 + q^5 + \cdots = \frac{q^3}{1 - q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

A részletösszegek a téTELben szereplő részletösszegek q^3 -szeresei, így a határérték (a sor összege) is q^3 -nel szorzódik.

$$\textcircled{Pl.} \quad a + aq + aq^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a q^k = \sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1} = \frac{a}{1 - q}, \quad \text{ha } |q| < 1$$

Most a részletösszegek a téTELben szereplő részletösszegek a -szorosai, így a határérték is a -szoros lesz.

$\left(\text{A képletet úgy érdemes megjegyezni, hogy } s = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}. \right)$

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = ?$$

Megoldás. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{((-2)^3)^k}{(3^2)^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-8)^k}{9^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^k =$

$$= -\left(\frac{8}{9}\right)^3 + \left(\frac{8}{9}\right)^4 - \left(\frac{8}{9}\right)^5 \pm \dots = \frac{-\left(\frac{8}{9}\right)^3}{1 - \left(-\frac{8}{9}\right)}$$

$$(q = \frac{8}{9}, \quad |q| < 1)$$

(Pl.)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k+1}}{4^{k+2}} = ?$$

Megoldás.

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^k}{4^{k+2}} + \frac{3^{k+1}}{4^{k+2}} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \right)$$

$$s_n = \frac{1}{16} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} + 3 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = \frac{5}{8}$$

(Pl.) Milyen x -re konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty} (\log_2 x)^k$ sor?

Megoldás. $q = \log_2 x, \quad |\log_2 x| < 1 \iff -1 < \log_2 x < 1,$
 $2^{-1} < x < 2, \quad \text{azaz } x \in (2^{-1}, 2).$

2.1.2. Konvergens sorok összege és konstansszorosa

(T) Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b, \quad S_a, S_b, c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a.$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{B} \quad S_a &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\
 S_b &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k \\
 S_{a+b} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{a+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right) = \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = S_a + S_b
 \end{aligned}$$

Másrészt

$$S_{ca} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{ca} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (c a_k) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = c S_a \quad \blacksquare$$

Ezen tételek segítségével egyszerűbben oldhatók meg az előző típusú feladatok.

$$\textcircled{Pl.} \quad \boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = ?}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} &= \frac{(-3)^2}{2^1} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4} \right)^k = \frac{9}{2} \quad \frac{\left(-\frac{3}{4} \right)^2}{1 - \left(-\frac{3}{4} \right)} \\
 &\quad \left(q = -\frac{3}{4}, \quad |q| < 1 \quad \text{teljesül.} \right)
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{Pl.} \quad \boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} + (-2)^{k+2}}{5^k} = ?}$$

Megoldás. A sor két konvergens geometriai sor összege:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 3^k + (-2)^2 \cdot (-2)^k}{5^k} &= 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^k + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^k = 9 \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} + \\
 &4 \frac{-\frac{2}{5}}{1 - \left(-\frac{2}{5} \right)}
 \end{aligned}$$

$$(q_1 = \frac{3}{5}, \quad |q_1| < 1, \quad q_2 = -\frac{2}{5}, \quad |q_2| < 1)$$

•••

A konvergencia szükséges és elégsges feltétele (Cauchy-kritérium):

(T) Cauchy-tétel

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}^+$$

- (B)** Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és elégsges **tétel** alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists M(\varepsilon)$, hogy $n, m > M(\varepsilon)$ esetén $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Legyen $m > n$ és $m = n + k$! Mivel

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$s_m = s_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon,$$

ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. ■

- (Pl.)** Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (alternáló harmonikus sor)?

Megoldás. Igen, ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{l} \left(\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}_{>0} \right) + \left(\underbrace{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}}_{>0} \right) + \cdots + \left(\underbrace{\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}}_{>0} \right) = \\ = \frac{1}{n+1} - \left(\underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{>0} \right) - \cdots - \left(\underbrace{\frac{1}{n+k}}_{>0} \right), \quad \text{ha } k \text{ páros} \end{array} \right. \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} \left(\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}_{>0} \right) + \left(\underbrace{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}}_{>0} \right) + \cdots + \left(\underbrace{\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}}_{>0} \right) + \frac{1}{n+k} = \\ = \frac{1}{n+1} - \left(\underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{>0} \right) - \cdots - \left(\underbrace{\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}}_{>0} \right), \quad \text{ha } k \text{ páratlan} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \implies N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett [Leibniz-sor](#).

2.1.3. A konvergencia szükséges feltétele

(T) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens} \right) \implies \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \right)$

(B) A [Cauchy-kritériumból](#) ($k = 1$ választással):

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \implies a_n \rightarrow 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n = s_{n-1} + a_n \implies a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$$

■

(M) A feltétel nem elégsges. Például a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

2.2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n, \quad c_n > 0$$

$\xrightarrow{\text{Thom}_2}$
 $\xrightarrow{\text{App}}$

Leibniz-kritérium:

(T) Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent (c_n)) monoton fogyóan tart 0-hoz (jelben $c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz-sor**.

(B) Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \implies s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\implies s_{2k}$ konvergens, legyen $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}$.

Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \rightarrow s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \rightarrow s + 0 = s$$

■

(M) Az is megmutatható, hogy az s_{2k+1} részsorozat monoton csökkenően tart s -hez.

$$0 \leq s_{2k+1} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2k-1} - c_{2k}) + c_{2k+1} =$$

$$= \underbrace{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + c_{2k-1}}_{s_{2k-1}} - \underbrace{(c_{2k} - c_{2k+1})}_{\geq 0} \leq s_{2k-1}$$

²lásd Thomas 11-es bemutató 6. fejezet (49-60. oldal).

Hibabecslés Leibniz-típusú soroknál

Tehát a Leibniz-típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s -nél kisebbek vagy egyenlők:

$$s_{2k} \leq s.$$

A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s -hez, ezért

$$s \leq s_{2k+1}.$$

Mivel

$$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \leq s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$

ezért

$$|H| = |s - s_n| \leq c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

•••

(Pl.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ sor?

Megoldás. A sor Leibniz-típusú és így konvergens, mivel $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$.

(Pl.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ sor?

Megoldás.

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[n]{n}}}_{\downarrow} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+n}} \leq c_n < 1 \rightarrow 1$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, tehát nem teljesül a **konvergencia szükséges feltétele**, így a sor divergens.

(Pl.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ sor?

Megoldás. $c_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \rightarrow 0$

A monoton csökkenés most nem triviálisan igaz, hiszen n növelésével a számláló és a nevező is nő. Várható, hogy a (c_n) sorozat monoton csökkenő, mert a nevező „gyorsabban nő”. De ezt ilyenkor be kell bizonyítanunk! Tehát igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\stackrel{?}{\leq} c_n \\ \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{n+1}{n^2+2} \\ (n+2)(n^2+2) &\stackrel{?}{\leq} (n+1)(n^2+2n+3) \\ 0 &\stackrel{?}{\leq} n^2+3n-1 \quad \text{Ez pedig igaz, minden } n \text{-re.} \end{aligned}$$

És innen visszafelé igaz, hogy $c_{n+1} \leq c_n$.

Tehát a sor Leibniz-típusú és így konvergens.

Ha a sor összegét s_{100} -zal közelítjük, akkor az elkövetett hiba:

$$|H| = |s - s_{100}| \leq c_{101} = \frac{101+1}{101^2+2}$$

Gy

2.2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

$$1. \sum_2^\infty \frac{\cos k\pi}{\lg k}$$

$$2. \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$3. \sum_2^\infty \frac{(-1)^{k-1} 2k}{k^2-1}$$

$$4. \sum_2^\infty (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

2.3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

$\xrightarrow{\text{Thom}_3}$

(D) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens.

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{2}$.)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

(D) *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens.

(T) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergens} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens} \right)$
Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.

(B) Ha $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy-kritérium, továbbá

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq \underbrace{\|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}\|}_{\text{Cauchy-kritérium } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\text{-ra}} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon), k \in \mathbb{N}^+$$

Így $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ -ra is teljesül a szükséges és elégsges téTEL (Cauchy-kritérium), tehát konvergens. ■

Gy

³lásd Thomas 11-es bemutató 6. fejezet (49-60. oldal).

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

2.4. Pozitív tagú sorok

- T**
- (i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedők.
 - (ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

- B**
- (i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \forall n$ -re.
 - (ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\implies (s_n)$ korlátos
 - b) Ha (s_n) korlátos, akkor (s_n) konvergens. ■

M Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞ -nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$).

- T**
- $a_k > 0$; $a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett
- $a \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{l=1}^{\infty} a_{2l} \cdot 2^l$ is konvergens

- B** ($\neg B$)

A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becsülhetők. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az (a_k) sorozat monoton csökken.

(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.) ■

Példák a tétele alkalmazására:

- Pl.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha > 1$. Egyébként divergens.

- B** Ha $\alpha \leq 0$: $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} = n^{|\alpha|} \not\rightarrow 0$
 A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül \implies divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \searrow$, így alkalmazható az előző tételet:

Vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha-l} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

Vigyázat! A téTELben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani $\alpha > 1$ -re. Ilyenkor a megfelelő s_n részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések, 2.5.6 fejezet).

Pl.	$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n}$ divergens
-----	--

Ugyanis: $\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l}$ divergens.

Pl.	$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p}$ $p > 1$ konvergens, egyébként divergens
-----	--

(B) $p > 0$ esetén alkalmazható az előző tételek:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \quad 0 < p \leq 1 : \text{div.}; \quad 1 < p : \text{konv.}$$

($p \leq 0$ esete HF. Pl. [minoráns kritériummal](#) megmutatható. (Lásd később.) ■

(Pl) $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$ divergens

A téTEL alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

2.5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

$\xrightarrow{\text{Thom}_4}$

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrálkritérium

Ezeket a kritériumokat kizárolag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konverenciája is.)

2.5.1. Majoráns kritérium

$\xrightarrow{\text{App}}$

(T) Ha $0 < a_n \leq c_n \quad \forall n$ -re és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

(B) A feltétel miatt

$$\begin{aligned} a_1 &\leq c_1 \\ &\vdots \\ a_n &\leq c_n \end{aligned}$$

Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeadhatók, ezért

⁴lásd Thomas 11-es bemutató 3., 4. és 5. fejezet (32-48. oldal).

$$s_n^a = a_1 + \cdots + a_n \leq c_1 + \cdots + c_n = s_n^c.$$

Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \leq K \implies s_n^a$ korlátos és mivel pozitív tagú a sor $\implies \sum_1^{\infty} a_n$ konvergens. ■

App 2.5.2. Minoráns kritérium

(T) Ha $0 \leq d_n \leq a_n \quad \forall n$ -re és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

(B) $s_n^a \geq s_n^d \rightarrow \infty \implies s_n^a \rightarrow \infty$ (spec. rendőrelv) ■

(M) Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall n$ helyett $n \geq N_0$ -ra teljesül.

($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens, ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

(Pl.) Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. A harmonikus sorból végtelen sok tagot elhagytunk. A minoráns kritériummal belátjuk, hogy még ez a sor is divergens. Ugyanis

$$a_n > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

(Pl.) Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás.

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2} n^{5/2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ konvergens } (\alpha = \frac{5}{2} > 1)$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

(Pl.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5 + 3}}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. A sor divergens, mivel a rendőrelvvel megmutatható, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, tehát nem tart nullához, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Részletezve:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{5} (\sqrt[n]{n})^5}}_{\downarrow} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n^5 + 3n^5}} \leq a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2n^5 + 3}} < \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\downarrow 1}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 1^5} = 1$$

$$\implies a_n \rightarrow 1.$$

(Pl.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^4 + 5}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás.

$$a_n < \frac{n+2n}{3n^4} = \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konvergens } (\alpha = 3 > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

(Pl.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 32}{n^3 + 8}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. $n \geq 4$ -re a sor pozitív tagú. A minoráns kritériummal megmutatjuk, hogy divergens.

Ugyanis, ha $n \geq 6$, akkor $n^2 > 32$ és ezért

$$a_n = \frac{2n^2 - 32}{n^3 + 8} > \frac{2n^2 - n^2}{n^3 + 8n^3} = \frac{1}{9n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

(Pl.) Konvergens-e a $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{2n+3} + 5} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás.

$$a_n = \frac{2^n + 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n + 5} < \frac{3^n + 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \text{ konvergens geometriai sor } \left(q = \frac{3}{4}, |q| < 1 \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Feladatok

Gy

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$

2. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$

7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$

3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log_2 n}$

8. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n + 2^{n+1}}$

4. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n^2}$

9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n \cdot 4^n - 3}$

5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$

10. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 3n^2 - \sqrt{n}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3}$$

$$14. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$$

2.5.3. Hányados kritérium

(T₁)

1. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \forall n \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$

2. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1, \forall n \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$

(B) 1. Mivel $a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq q^3 a_{n-2} \leq \dots \leq q^n a_1, \forall n$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{-nek } \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} a_1 \text{ konvergens majoránsa (geometriai sor, } 0 < q < 1\text{)} \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

2. Mivel $a_{n+1} \geq q a_n \geq q^2 a_{n-1} \geq \dots \geq q^n a_1, \forall n$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{-nek } \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} a_1 \text{ divergens minoránsa (geometriai sor, } q \geq 1\text{)} \xrightarrow{\text{App}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.} \quad \blacksquare$$

(M₁) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens, ill. divergens, ezért elég, ha a T₁ feltételei $\forall n \geq N_0$ -ra teljesülnek.

(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege $a_1 + a_2 + \dots + a_{N_0-1}$ -gyel több, mint a második sor összege.)

(M₂) T₁ (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, q -t is kell találni.

(Pl.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, pedig

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{miatt} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

(Pl) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1. \quad (\text{De } \nexists \quad 0 < q < 1)$$

M₃ T₁ (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A téTEL így is kimondható.

$$(a_n > 0) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N_0 \right) \implies \sum_1^\infty a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$$0 < a_n \leq a_{n+1}, \text{ tehát } a_n \nearrow \text{(és } a_n > 0\text{)} \implies a_n \not\rightarrow 0 \text{ (nem teljesül a szükséges feltétel)} \implies \sum_1^\infty a_n \text{ divergens}$$

A hárnyados kritérium egy kényelmesebbet használható formában is kimondható:

T₁*

$$1. (a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1 \right) \implies \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ konv.}$$

$$2. (a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1 \text{ vagy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \right) \implies \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ div.}$$

B 1. Legyen $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Ezért T₁ (1)-ből adódik, hogy $\sum_{n=N(\varepsilon)}^\infty a_n$ és így vele együtt $\sum_{n=1}^\infty a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \frac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists N(\varepsilon)$, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Így T_1^* (2)-ből adódik az állítás.

T_1^* (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q . (Pl. $q = 2$ is választható.)

(M₄) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.

(Pl.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(M₅) A fenti téTEL tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0 \forall n, \text{ és } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0 \forall n, \text{ és } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

$(\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \text{ a konvergenciáról nem mond semmit.})$

(Pl.) Konvergens-e a $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) 3^{n+1}}{n!} \right]$ sor?

Megoldás. A feladatot a T_1^* tételel (hányadoskritériummal) oldjuk meg.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) 3^{n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+2) 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \cdot \frac{1 + \frac{3}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 0 < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.} \end{aligned}$$

Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(2n+1)!}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2} (n+2)!}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

2.5.4. Gyökkritérium

(T₂) Ha $\forall n \geq N$ -re $a_n > 0$ és

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konv.
2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ div.

(B) 1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ konvergens $\implies \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergens a **majoráns kritérium** miatt.

2. $a_n \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ div. ■

(M₆) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ elég, ha végtelen sok n -re igaz. Nem kell, hogy $\forall n > N$ -re teljesüljön. Ekkor már $\exists a_{n_r} \not\rightarrow 0$ részsorozat.

Ez a tételel is kimondható limeszes alakban:

T₂*

Ha $a_n > 0$ és $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, akkor

$$c < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$c > 1 \text{ vagy } c = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

(B) Hasonló a [hányados kritériumnál](#) látottathoz. ■

M₇ $c = 1$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetén nem használható a [gyökkritérium](#). Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

(Pl.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

(Pl.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

T

Ha $a_n > 0$, $n > N$ és $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. } (\neg B)$

Ha $a_n > 0$, $n > N$ és $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.}$

M₈ A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$ -ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n -re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies a_n > 1 ; \text{ tehát } \exists a_{n_r} \not\rightarrow 0 \text{ részsorozat.}$$

(Pl.) Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^{2n^3} \text{ sor?}$$

Megoldás. A feladatot a T_2^* tételel (gyökkritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}} = \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3} < 1$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 7^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3} \right)^{n^2+2n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{7^{n+1}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n+1}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^{n+3}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n+1} (3n+1)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n^2}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$$

További kidolgozott példák

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4 8^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. Ezt a feladatot legegy szerűbben a majoráns kritériummal oldhatjuk meg.

$$a_n < \frac{8^n}{n^4 8^n} = \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ konvergens } (\alpha = 4 > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

A **hányados kritérium**, illetve a **gyökkritérium** is használható lenne.

Pl. Konvergens-e a $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \cdot 7^n}{8^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. Ennek a feladatnak a megoldása már a majoráns kritérummal elég nehézkes lenne. A **hányados kritérium** alkalmazható, de itt a **gyökkritérium** alkalmazása a legjobb választás.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^4 \cdot 7}{8} = \frac{7}{8} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Pl. Konvergens-e a $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1) \cdot 5^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. Most viszont a **hányados kritérium** alkalmazása a legcélszerűbb. (A **gyökkritérium** alkalmazásánál a **rendőrelvre** is szükségünk lenne az $\sqrt[n]{2n+1}$ sorozat határértékének bizonyításához.)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{(2n+3)} \frac{(2n+1)}{5^{n+1}} \frac{5^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \frac{2n+1}{2n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{3}{5} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.} \end{aligned}$$

Pl. Konvergens-e a $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{3^{2n}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! \left(\frac{2}{9} \right)^n$ sor?

Megoldás. Itt is a **hányados kritériumot** alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! \left(\frac{2}{9} \right)^{n+1}}{(n+1)! \left(\frac{2}{9} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{9} (n+2) = \infty > 1 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.} \end{aligned}$$

(Pl.) Abszolút vagy feltételesen konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n^2 + 3}$ sor?

Megoldás. Nem abszolút konvergens, mert

$$|a_n| = \frac{n}{5n^2 + 3} \geq \frac{n}{5n^2 + 3n^2} = \frac{1}{8n}$$

és $\frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, tehát $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ divergens (a minoráns kritérium miatt).

Viszont $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergens, mert Leibniz-típusú. Ugyanis

$$|a_n| = \frac{n}{5n^2 + 3} \searrow 0, \text{ mert}$$

$$|a_n| = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}} \frac{1}{5 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

És

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= \frac{n+1}{5(n+1)^2 + 3} < \frac{n}{5n^2 + 3} = |a_n| \\ (n+1)(5n^2 + 3) &< n(5n^2 + 10n + 8) \\ 5n^3 + 5n^2 + 3n + 3 &< 5n^3 + 10n^2 + 8n \\ 0 &< 5n^2 + 5n - 3, \quad \text{ha } n \geq 2 \end{aligned}$$

Vagyis a sor feltételesen konvergens.

App
⇒

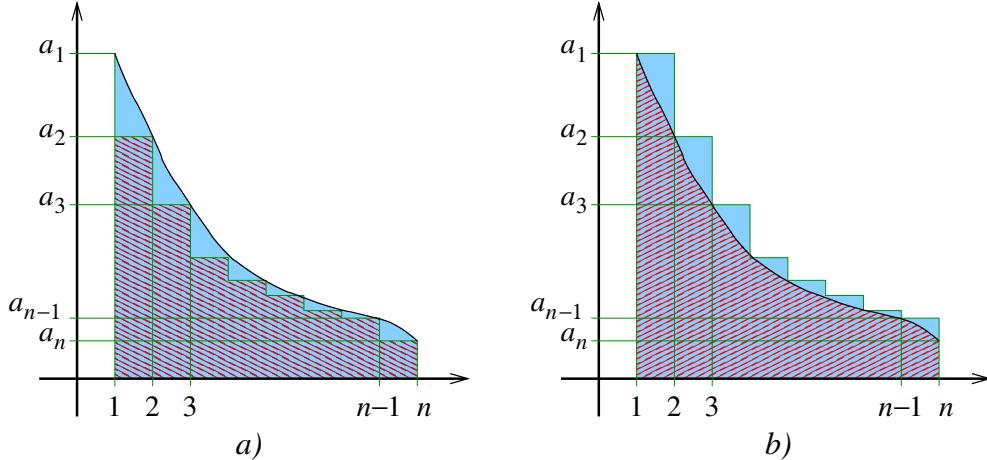
2.5.5. Integrálkritérium

(T) Legyen f pozitív értékű monoton csökkenő függvény $[1, \infty)$ -en és $f(k) = a_k > 0$

1. Ha $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergens $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens
2. Ha $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergens $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens

(M) \iff állítás is igaz, tehát a sor és az [improprius integrál](#) egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

2.1. ábra. Az integrál és a részletösszeg kölcsönösen majorálja, minorálja egymást



(B) 1. Tekintsük a 2.1.a) ábrát! Mivel

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \underbrace{\int_1^n f(x) dx}_{\text{monoton növő függvénye } n\text{-nek}} \leq$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \int_1^\infty f(x) dx \in \mathbb{R},$$

$$a_k > 0 \text{ és } \sum_2^n a_k \text{ korlátos} \implies \sum_2^\infty a_k \text{ konvergens} \implies \sum_1^\infty a_k \text{ konvergens}$$

2. Tekintsük a 2.1.b) ábrát!

$$\int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = s_{n-1}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \infty$, tehát a sor divergens. ■

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergenciája

T $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens, ha $\alpha > 1$, minden más esetben divergens.

B $\alpha \leq 0$ esete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{|\alpha|} \not\rightarrow 0$$

($\alpha = 0$ esetén 1-hez tart, $\alpha < 0$ esetén pedig ∞ -hez tart)

\implies a sor divergens, mivel nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

$\alpha > 0$ esete:

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha}, x \geq 1 : \text{a függvény monoton csökkenő és } f(n) = \frac{1}{n^\alpha} = a_n.$$

Így alkalmazható a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának vizsgálatára az integrálkritérium.

Mint bizonyítottuk $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergens $\alpha > 1$ -re, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor is konvergens, ha $\alpha > 1$. Az improprios integrál divergens $0 < \alpha < 1$ esetén, így ekkor a vizsgált sor is divergens. ■

2.5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorok esetén

Integrálkritériummal

Ha a sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor az s sorösszeg s_n részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

T Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba

$$0 < H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

B Mivel

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m \leq \int_n^m f(x) dx,$$

ezért

$$H = r_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m a_k \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_n^m f(x) dx = \int_n^\infty f(x) dx.$$
■

(Pl.) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^{10}}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln \sqrt{n})^2}$

Amelyik sor konvergens, annál adjon becslést az $s \approx s_{1000}$ közelítésnél elkövetett hibára!

Gy

Megoldás.

a) $f(x) := \frac{1}{x \ln x^{10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{x \ln x}, \quad x \geq 3$

f pozitív értékű monoton csökkenő függvény a $[3, \infty)$ intervallumon

és $f(n) = a_n > 0 \implies$ alkalmazható az integrálkritérium.

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{1}{10} \frac{1}{x \ln x} dx &= \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_3^{\omega} \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{f'/f \text{ alakú}} dx = \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \ln x|_3^{\omega} = \\ &= \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln \ln \omega - \ln \ln 3) = \infty \end{aligned}$$

Az improprius integrál divergens $\stackrel{\text{int. kr.}}{\implies}$ a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^{10}}$ sor is divergens.

b) $f(x) := \frac{1}{x (\ln \sqrt{x})^2} = \frac{1}{1/4} \frac{1}{x (\ln x)^2}, \quad x \geq 3$

f pozitív értékű monoton csökkenő függvény a $[3, \infty)$ intervallumon

$f(n) = a_n > 0 \implies$ most is alkalmazható az integrálkritérium.

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} 4 \frac{1}{x (\ln x)^2} dx &= 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_3^{\omega} \underbrace{\frac{1}{x} (\ln x)^{-2}}_{f' f^{-2} \text{ alakú}} dx = 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{-1}}{-1}|_3^{\omega} = \\ &= 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln \omega} + \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{4}{\ln 3} \end{aligned}$$

Az improprius integrál konvergens $\stackrel{\text{int. kr.}}{\implies}$ a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln \sqrt{n})^2}$ sor is konvergens.

Hibaszámítás az $s \approx s_{1000}$ közelítésre:

$$\begin{aligned} 0 < H = s - s_{1000} &\leq \int_{1000}^{\infty} 4 \frac{1}{x} (\ln x)^{-2} dx = 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left. \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} \right|_{1000}^{\omega} = \\ &= 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln \omega} + \frac{1}{\ln 1000} \right) = \frac{4}{\ln 1000} \end{aligned}$$

Egyéb esetekben (csak pozitív tagú sorokra)

Ha a sor konvergenciáját nem az integrálkritériummal mutattuk meg, akkor próbálkozhatunk azzal, hogy a hibát megadó r_n maradékösszeget egy konvergens geometriai sor r_n^* maradékösszegével becsüljük. Ha pl. a sor konvergenciájára hánnyados vagy gyökkritériummal következtettünk, akkor a sorhoz minden található konvergens majoráló geometriai sor.

Gy

Pl. Bizonyítsa be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^{2n+1} + n^2 + n}$$

sor konvergens és adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítésnél elkövetett hibára!

Megoldás. $a_n = \frac{3^n + 2}{2 \cdot 4^n + n^2 + n} < \frac{3^n + 3^n}{2 \cdot 4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $(0 < q = \frac{3}{4} < 1) \xrightarrow{\text{maj. kr.}}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

Hibaszámítás az $s \approx s_{100}$ közelítésre:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^{2n+1} + n^2 + n} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{101}}{1 - \frac{3}{4}}$$

Pl.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Mutassa meg, hogy a sor konvergens és adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítésnél elkövetett hibára!

Megoldás. Hányados kritériummal dolgozunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{3^n} = \frac{3}{n+2} \rightarrow 0 < 1$$

$\xrightarrow{\text{hány. kr.}}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Hibaszámítás az $s \approx s_{100}$ közelítésre:

$$\begin{aligned} 0 < H &= \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{3^{101}}{102!} + \frac{3^{102}}{103!} + \frac{3^{103}}{104!} + \frac{3^{104}}{105!} + \dots = \\ &= \frac{3^{101}}{102!} \left(1 + \frac{3}{103} + \frac{3^2}{103 \cdot 104} + \frac{3^3}{103 \cdot 104 \cdot 105} + \dots \right) < \\ &< \frac{3^{101}}{102!} \left(1 + \frac{3}{103} + \left(\frac{3}{103} \right)^2 + \left(\frac{3}{103} \right)^3 + \dots \right) = \frac{3^{101}}{102!} \frac{1}{1 - \frac{3}{103}} \end{aligned}$$

2.6. Műveletek konvergens sorokkal

\textcircled{T} Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, $S_a, S_b \in \mathbb{R}$
$\implies \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b$ és $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a$.

Bizonyítása az 1.2 fejezetben már megtörtént.

2.6.1. Végtelen sorok természetes szorzata

	a_1	$+$	a_2	$+$	a_3	$+$	a_4	$+$	\cdots	$+$	a_k	$+$	\cdots
b_1	b_1a_1	$+$	b_1a_2	$+$	b_1a_3	$+$	b_1a_4	$+$	\cdots	$+$	b_1a_k	$+$	\cdots
$+$													
b_2	b_2a_1	$+$	b_2a_2	$+$	b_2a_3	$+$	b_2a_4	$+$	\cdots	$+$	b_2a_k	$+$	\cdots
$+$													
b_3	b_3a_1	$+$	b_3a_2	$+$	b_3a_3	$+$	b_3a_4	$+$	\cdots	$+$	b_3a_k	$+$	\cdots
$+$													
b_4	b_4a_1	$+$	b_4a_2	$+$	b_4a_3	$+$	b_4a_4	$+$	\cdots	$+$	b_4a_k	$+$	\cdots
$+$													
\vdots	\vdots												
b_k	b_ka_1	$+$	b_ka_2	$+$	b_ka_3	$+$	b_ka_4	$+$	\cdots	$+$	b_ka_k	$+$	\cdots
$+$													
\vdots	\vdots												

A természetes szorzat elemei:

$$t_1 = b_1a_1, \quad t_2 = b_2a_1 + b_2a_2 + b_1a_2, \quad t_3 = b_3a_1 + b_3a_2 + b_3a_3 + b_2a_3 + b_1a_3, \dots$$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k, \quad \text{ahol} \quad \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k.$$

(T) Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok természetes szorzata konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = S_a S_b.$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

2.6.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata

	a_1	$+$	a_2	$+$	a_3	$+$	a_4	$+$	\cdots	$+$	a_k	$+$	\cdots
b_1	b_1a_1		b_1a_2		b_1a_3		b_1a_4		\cdots		b_1a_k		\cdots
$+$													
b_2	b_2a_1		b_2a_2		b_2a_3		b_2a_4		\cdots		b_2a_k		\cdots
$+$													
b_3	b_3a_1		b_3a_2		b_3a_3		b_3a_4		\cdots		b_3a_k		\cdots
$+$													
b_4	b_4a_1		b_4a_2		b_4a_3		b_4a_4		\cdots		b_4a_k		\cdots
$+$													
\vdots	\vdots												
$+$													
b_k	$b_k a_1$		$b_k a_2$		$b_k a_3$		$b_k a_4$		\cdots		$b_k a_k$		\cdots
$+$													
\vdots	\vdots												

A Cauchy-szorzat elemei:

$$c_1 = b_1 a_1,$$

$$c_2 = b_1 a_2 + b_2 a_1,$$

$$c_3 = b_1 a_3 + b_2 a_2 + b_3 a_1,$$

\cdots ,

$$c_n = b_1 a_n + b_2 a_{n-1} + b_3 a_{n-2} + \cdots + b_n a_1 \quad (\text{indexek összege } n+1).$$

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ ahol } c_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k+1}.$$

⑩ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abszolút konvergens sorok és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$,

akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a S_b, \quad \text{ahol } c_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k+1}.$$

($\neg B$)

Pl. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x}$, ha $|x| < 1$.

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots = \frac{1}{1+x}$, ha $|x| < 1$.

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

Megoldás.

$$\begin{array}{r}
 & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots \\
 \hline
 1 & 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \cdots \quad x^k \quad \cdots \\
 + & -x \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \cdots \quad -x^{k+1} \quad \cdots \\
 -x & -x^2 \quad -x^3 \quad -x^4 \quad \cdots \\
 + & x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad \cdots \quad x^{k+2} \quad \cdots \\
 + & -x^3 \quad -x^4 \quad -x^5 \quad -x^6 \quad \cdots \quad -x^{k+3} \quad \cdots \\
 + & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 + & (-1)^k x^k \quad \cdots \\
 + & \vdots \quad \vdots
 \end{array}$$

Cauchy-szorzat:

$$1 + 0 + x^2 + 0 + x^4 + 0 + x^6 + \cdots = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2k} + \cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x}, \text{ ha } |x| < 1.$$

(Pl.) Házi feladat:

Hatórozzuk meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y$ sorok Cauchy-szorzatát!

(M) $e^x \cdot e^y = e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$ eredményt kell kapni.

2.6.3. Zárójelek elhelyezése, illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots$$

A fenti sor részletösszegei:

$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \dots$
stb. Az

$$a_1 + a_2 + (\underbrace{a_3 + a_4 + a_5}_{a_3^*}) + a_6 + \cdots$$

bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^* = a_1, \quad s_2^* = a_1 + a_2, \quad s_3^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \quad s_4^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \quad \dots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

$$\text{Pl. } (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - \dots)$$

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

2.6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_k + \dots$$

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_{100} + a_5 + a_6 + \dots + a_{99} + a_4 + a_{101} + \dots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, **feltételesen konvergens** sor átrendezhető akár divergenssé is.

T Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens és $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergens, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege.

(Nem bizonyítjuk.)

T Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **abszolút konvergens**, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.

(Nem bizonyítjuk.)

2.7. Feladatok sorokhoz

1. a) $\sum_{2}^{\infty} \frac{3^{k+1} + 2^{2k+1}}{5^k} = ?$

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$

$$\text{c)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} = ?$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\text{a)} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}$$

$$\text{b)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n n^3 + 1}{n^5 + 1}$$

$$\text{c)} \sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 + 5}}$$

$$\text{d)} \sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$$

$$\text{e)} \sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n+1}$$

$$\text{f)} \sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}}$$

$$\text{g)} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$$

$$\text{h)} \sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n + n}$$

$$\text{i)} \sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\text{j)} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\text{k)} \sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$$

$$\text{l)} \sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(3n)!}$$

$$\text{m)} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n$$

$$\text{n)} \sum_{1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 6^n}$$

$$\text{o)} \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\text{p)} \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 5}$$

$$\text{q)} \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3 + 5}$$

$$\text{r)} \sum_{10}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}} + 3}$$

$$\text{s)} \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3n} \right)^n$$

$$\text{t)} \sum_{1}^{\infty} \frac{10^n}{n! \cdot n^2}$$

$$\text{u)} \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{n} \right)^{n^2+n}$$

$$\text{v)} \sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(4 + \frac{2}{n^2} \right)^n}$$

$$\text{w)} \sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{x)} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2}$$

$$\text{y)} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$$

$$\text{z)} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét 10^{-3} -nál kisebb hibával! Lásd [itt](#) és [itt](#).

a) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2 + 1} \right)^n$

b) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$

c) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + 10^n}$

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n + 5}$

e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{(2n)!}$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük? Lásd [itt](#) és [itt](#).

$$(s \approx s_{10}; \quad H = r_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} a_k; \quad |H| \leq ?)$$

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}$

c) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)^n$

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3}$

f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n}$

5. Abszolút, illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

- a) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+4}{n^2+4}$
- b) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log_2 n^2}$
- c) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8}$
- d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^n} + \cdots$
- e) $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} + \cdots$
- f) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \cdots$
- g) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \cdots$
- h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2^n} + \cdots$

2.8. Számsorozatok nagyságrendje

④ $a_n = O(b_n)$ („nagy ordó b_n ”), ha $\exists c_1 :$
 $|a_n| \leq c_1 |b_n|, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

④ $a_n = \Omega(b_n)$ („omega b_n ”), ha $b_n = O(a_n)$.

Vagyis $|b_n| \leq c_1 |a_n| \quad n > N \quad (\exists c_1)$.

Ekkor: $c_2 |b_n| = \frac{1}{c_1} |b_n| \leq |a_n|$, vagyis most $|a_n|$ alulról becsülhető $|b_n|$ segítségével.

④ $a_n = \Theta(b_n)$ („teta b_n ”), ha $a_n = O(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a_n és b_n azonos nagyságrendű
Az előzőből következik:

⑤ $a_n = \Theta(b_n) \iff c_2 |b_n| \leq |a_n| \leq c_1 |b_n|$

Pl. $a_n = 2n^2 - n + 3$

Megoldás. 1. $a_n = O(n^2)$, mert $2n^2 - n + 3 \leq 2 \cdot n^2$, ha $n \geq 3$. Persze $a_n = O(n^3)$ is igaz, sőt általánosságban: $a_n = O(n^{2+\alpha})$, $\alpha \geq 0$.

2. $a_n = \Omega(n^2)$, mert $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \leq 2n^2 - n + 3$. Sőt $a_n = \Omega(n^{2-\alpha})$, $\alpha \geq 0$.
3. Tehát $a_n = \Theta(n^2)$.

2.8.1. Műveletek Θ -val

(T)

$$a_n, b_n, c_n, d_n > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \Theta(c_n) \\ b_n = \Theta(d_n) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. \quad \frac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\frac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. \quad a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{array} \right.$$

Különbségre nem igaz!

(M) Akkor van értelme használni ezt, ha c_n és d_n sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

(B)

$$0 < \alpha_1 c_n \leq a_n \leq \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$

$$0 < \beta_1 d_n \leq b_n \leq \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeszorozhatók:

$$(\alpha_1 \beta_1) c_n d_n \leq a_n b_n \leq (\alpha_2 \beta_2) c_n d_n \implies a_n b_n = \Theta(c_n d_n)$$

- 2.

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \alpha_1 c_n \leq a_n \leq \alpha_2 c_n \\ 0 < \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{d_n} \leq \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{d_n} \end{array} \right\} \implies \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \frac{c_n}{d_n} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1} \right) \frac{c_n}{d_n},$$

$$\text{tehát } \frac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$$

- 3.

$$\alpha(c_n + d_n) \leq \alpha_1 c_n + \beta_1 d_n \leq a_n + b_n \leq \alpha_2 c_n + \beta_2 d_n \leq \beta(c_n + d_n)$$

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$$

$$\implies a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n)$$

■

(Pl.) $a_n = \sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = ?$

Megoldás. $a_n = \frac{n^2 + 4n}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} =$
 $= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n) + \Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n+n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \implies a_n \rightarrow \infty$

(Pl.) $a_n = \sqrt{7n^2 - 2n + 10} - \sqrt{7n^2 - 2n + 3} = ?$

Megoldás. $a_n = \frac{10 - 3}{\sqrt{7n^2 - 2n + 10} + \sqrt{7n^2 - 2n + 3}} = = \frac{\Theta(1)}{\Theta(n+n)} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \implies a_n \rightarrow 0$

2.8.2. Aszimptotikus egyenlőség ($a_n \sim b_n$)

(D) a_n aszimptotikusan egyenlő b_n -nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

(Pl.) $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

(Pl.) $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ Stirling-formula (B)

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left. \begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2. \quad a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3. \quad \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{c_n} \\ 4. \quad \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n} \end{array} \right.$$

Megint nincs különbség!

(B)

$$a_n \sim c_n : \quad \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 1 \implies 0 < 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n : \frac{b_n}{d_n} \rightarrow 1 \implies 0 < 1 - \varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

$$1. \quad 1 - \varepsilon = \frac{(1 - \varepsilon)c_n + (1 - \varepsilon)d_n}{c_n + d_n} < \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} < \frac{(1 + \varepsilon)c_n + (1 + \varepsilon)d_n}{c_n + d_n} = 1 + \varepsilon,$$

ha $n > N$

2. $\neg B$

$$3. \quad \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \rightarrow 1$$

$$4. \quad \text{Az előző kettőből következik: } a_n \sim c_n \implies \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{c_n}; \text{ másrészt } b_n \sim d_n$$

$$\implies \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n}$$

■

(Pl.) $a_n = \sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} = ?$

Megoldás.

$$a_n = \frac{2n^2 + n + 1 - (2n^2 - 3n - 7)}{\left(\sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} + \left(\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{4n}{\left(\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4} \cdot 3n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}} \implies a_n \rightarrow 0$$

(Pl.) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}} = ?$

Megoldás.

$$a_n \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}} = \text{konst} \cdot \sqrt[3]{n} \rightarrow \infty$$

(Pl.) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = ?$

Megoldás.

$$a_n \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{n}}{4^n} \rightarrow 0$$

$$\text{Pl. } \binom{2n}{n} = ?$$

Megoldás. Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \quad \left(= \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

$$\text{M) } a_n \sim b_n \iff (a_n)^n \sim (b_n)^n \quad \text{Pl. } \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{n} \sim \sqrt[n]{2}, \text{ de } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 2 \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ 1 \qquad \qquad 1 \qquad \qquad e \end{array}$$

Persze $a_n \sim b_n$ esetén $a_n^k \sim b_n^k, k \in \mathbb{N}^+$ már igaz ($k \neq f(n)$). (k valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \implies \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^k \rightarrow 1 \right)$$

És igaz a következő téTEL is:

T)	$a_n, b_n > 0$	$a_n \sim b_n \implies \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$
----	----------------	--

$$\begin{aligned} \text{B) } a_n \sim b_n &\implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \implies 0 < 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon) \\ &\implies \sqrt[n]{1 - \varepsilon} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \sqrt[n]{1 + \varepsilon} \implies \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\text{Pl. } \sqrt[n]{\frac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\frac{3}{2}} \sim 1$$

Pl.)	Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\cos \frac{1}{n} - 1 \sim An^\alpha$ teljesüljön!
------	--

Megoldás. 1. megoldás:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{An^\alpha} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{n^\alpha} = A \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0\text{-ra } A = 0 \text{ lenne} \\ \alpha > 0\text{-ra } \frac{0}{\infty} \rightarrow 0 = A \text{ lenne} \end{array} \right\} \implies \alpha < 0$$

$$u := \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \underbrace{\frac{\cos u - 1}{u^{-\alpha}}}_{\stackrel{0}{\underset{0}{\sim}} \text{ alakú } (-\alpha > 0)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u \rightarrow +0} \frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = A$$

$$\text{ha } -\alpha - 1 = 1 \implies \alpha = -2, A = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Tehát } \cos \frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$$

2. megoldás:

$$\begin{aligned} \cos x - 1 &= -2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{ azonosság segítségével: } \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{An^\alpha} = \frac{-2 \sin^2 \frac{1}{2n}}{An^\alpha} \rightarrow 1, \text{ ha} \\ An^\alpha &= -2 \left(\frac{1}{2n} \right)^2 \rightarrow A = -\frac{1}{2}, \alpha = -2 \end{aligned}$$

Feladat:

Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sim An^\alpha$ fennálljon!

(T)

$a_n > 0, b_n > 0$

$a_n \sim b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ egyidejűleg konvergens, illetve divergens}$

(Jelben: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$)

(B) $a_n \sim b_n \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \implies 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$. Legyen $\varepsilon < 1$.

Tehát $c_1 b_n < a_n < c_2 b_n$ ($c_1 = 1 - \varepsilon > 0$, $c_2 = 1 + \varepsilon$)

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $b_n < \frac{1}{c_1} a_n$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\frac{1}{c_2} a_n < b_n$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens (minoráns kritérium)

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $a_n < c_2 b_n$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens, akkor $c_1 b_n < a_n$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergens (minoráns kritérium) ■

(Pl.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Megoldás. $a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n$ és $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum \frac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum a_n$$

Megoldás. $a_n \sim \frac{1}{7n} = b_n$ és $\sum b_n$ divergens $\Rightarrow \sum a_n$ divergens

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum \arctg \frac{1}{n} = \sum a_n$$

Megoldás. $a_n \sim \frac{1}{n} = b_n$ és $\sum b_n$ divergens $\Rightarrow \sum a_n$ divergens

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) = \sum a_n$$

Megoldás. $a_n = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2 \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} = b_n$ és $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens

Feladatok:

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \arctg \frac{1}{n} \right)$$

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{2}{n} - \cos \frac{3}{n} \right)$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$$

⑩ $a_n = o(b_n)$ („kis ordó b_n ”), ha $\forall c > 0$ -ra

$$|a_n| \leq c |b_n| \quad n > N\text{-re}$$

Más jelölés is használatos:

$$a_n \ll b_n, \text{ ha } a_n = o(b_n)$$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy $b_n \neq 0$ esetén $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq c, \quad n > N \quad \forall c > 0$ -ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N_0(\varepsilon)$, hogy $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$, ha $n > N_0(\varepsilon)$.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

T $a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Pl. Mit jelent $a_n = o(1)$?

Megoldás. Mivel $\forall c > 0$ -ra $|a_n| \leq c$, ha $n > N$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne: ū

M $a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1))$.

Pl. Mutassuk meg, hogy $n! = o(n^n)!$

Megoldás. Be kell látni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \quad + \text{ rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \rightarrow 0$$

3. fejezet

Egyváltozós valós függvények határértéke és folytonossága

3.1. Függvény határértéke

$\xrightarrow{\text{Thom}_1}$

(D) Függvény: egyértékű reláció.

$f : D_f \longrightarrow R_f \quad \forall x \in D_f \subset \mathbb{R}$ -hez hozzárendel pontosan egy $y \in R_f \subset \mathbb{R}$ -et.
($y = f(x)$)

D_f : domain, értelmezési tartomány (ÉT); R_f : range, értékkészlet (ÉK).
(Jelöljük $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ módon is.)

Néhány definíció és példa:

(D) f felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, amire $f(x) \leq K \quad (x \in D_f)$, vagy másképp $R_f \subset (-\infty, K]$.

(D) f alulról korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, amire $f(x) \geq -K \quad (x \in D_f)$, vagy másképp $R_f \subset [-K, \infty)$.

(D) f korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, amire $|f(x)| \leq K \quad (x \in D_f)$, vagy másképp $R_f \subset [-K, K]$.

(D) f monoton nő, ha $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in D_f)$.

(D) f szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in D_f)$.

¹lásd Thomas 02-es bemutató 1. és 3. fejezet (3-13. és 25-36. oldal).

(D) f monoton csökken, ha $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ ($x_1, x_2 \in D_f$).

(D) f szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ ($x_1, x_2 \in D_f$).

(D) f periodikus $p > 0$ periódussal, ha $f(x+p) = f(x)$ ($x \in D_f$). (Ehhez persze az is kell, hogy $x \in D_f \implies x+p \in D_f$, azaz $D_f + p \subset D_f$ teljesüljön.)

(D) f páros, ha $f(-x) = f(x)$ ($x \in D_f$). (Ehhez persze az is kell, hogy $x \in D_f \implies -x \in D_f$, azaz $-D_f \subset D_f$ teljesüljön.) *y tengelyre szimmetriás*

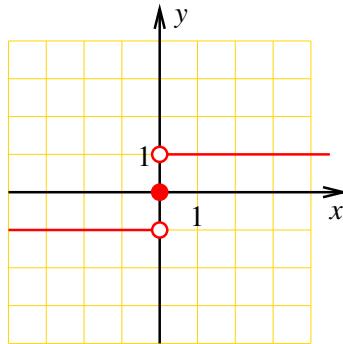
(D) f páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ ($x \in D_f$). (Ehhez persze az is kell, hogy $x \in D_f \implies -x \in D_f$, azaz $-D_f \subset D_f$ teljesüljön.) *origóra szimmetrikus*

(Pl.) Az előjel (signum) függvény (3.1.a) ábra):

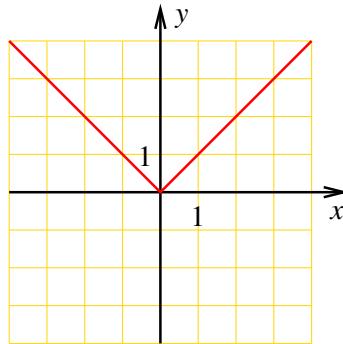
$$\text{sg } x = \text{sgn } x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az előjel függvény korlátos (pl.: $K = 1$), monoton nő, de nem szigorúan, nem periodikus, és páratlan.

3.1. ábra. Az előjel és az abszolútérték függvény grafikonja



a) $\text{sgn } x$



b) $\text{abs } x$

Pl. Az abszolútérték függvény (3.1.b) ábra):

$$|x| = \text{abs } x = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az abszolútérték függvény alulról korlátos (pl.: $K = 0$), de felülről nem, így nem korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, nem periodikus, és páros.

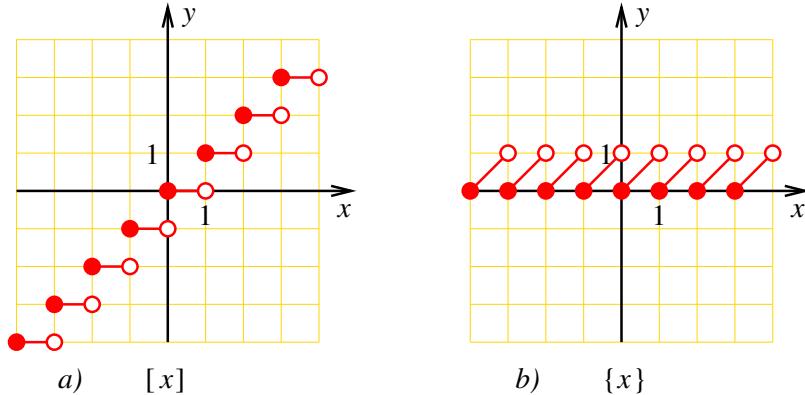
Pl. Az egészrész függvény (3.2.a) ábra):

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

Tehát $[x]$ az x -nél nem nagyobb legnagyobb egész szám. Pl. $[1.9] = 1$, $[-1.1] = -2$.

Az egészrész függvény alulról sem és felülről sem korlátos, így nem korlátos. Monoton nő, de nem szigorúan, nem periodikus, és se nem páros, se nem páratlan.

3.2. ábra. Az egészrész és a törtrész függvény grafikonja



Pl. A törtrész függvény (3.2.b) ábra):

$$\{x\} = x - [x]$$

A törtrész függvény alulról korlátos (pl.: $K = 0$), és felülről is (pl.: $K = 1$), így korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, periodikus ($p = 1$), és se nem páros, se nem páratlan.

(Pl.) Dirichlet függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

A Dirichlet függvény alulról korlátos (pl.: $K = 0$), felülről korlátos (pl.: $K = 1$), így korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, minden pozitív, racionális p -vel periodikus, így nincs legkisebb periódusa, és páros.

Néhány definíció:

(D) Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha x_0 minden környezete a H végtelen sok elemét tartalmazza.

Környezet fogalma:

(D) Az x_0 pont δ sugarú környezete:

Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, akkor

$$K_{x_0, \delta} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(D) Az x_0 pont δ sugarú pontozott környezete:

$$\dot{K}_{x_0, \delta} = K_{x_0, \delta} \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

Ha δ -nak nincs szerepe, akkor a jelölésben sem tüntetjük fel: K_{x_0} , \dot{K}_{x_0} .

$$|x - x_0| < r \iff x \in K_{x_0, r}.$$

Végesben vett véges határérték definíciója

App
⇒

App
⇒

(D) Azt mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, ha

- x_0 torlódási pontja D_f -nek,
- $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad x \in D_f$$

(Azaz $f(x) \in K_{A, \varepsilon}$, ha $x \in \dot{K}_{x_0, \delta} \cap D_f$)

App

H halmazra szorítkozó határérték:az előző definícióban a $D_f \rightarrow D_f \cap H$ helyettesítést elvégezve kapjuk a definícióját.Jobb oldali határérték: $H = (x_0, \infty)$ Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$ Bal oldali határérték: $H = (-\infty, x_0)$ Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$

A definíciókból következően az értelmezési tartomány x_0 belső pontjában $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ (véges).

(T) **Cauchy-kritérium ($\neg B$)**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x_1, x_2 \in K_{x_0, \delta} \text{ esetén } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(Pl.)

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} - 3x - 1 \right) = 3$

Megoldás. Be kell látnunk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x + 2| < \delta(\varepsilon)! \quad \delta(\varepsilon) = ?$$

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= \left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} - 3x - 1 - 3 \right| \stackrel{x \neq -2}{=} |x - 2 - 3x + 1 - 3| = |-2x - 4| = \\ &= |(-2)(x + 2)| = 2|x + 2| < \varepsilon \implies |x + 2| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(Pl.)

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow 27} \sqrt[3]{x} = 3$

Megoldás. $|f(x) - 3| < \varepsilon$, ha $0 < |x - 27| < \delta(\varepsilon)$ $\delta(\varepsilon) = ?$

$$|\sqrt[3]{x} - 3| = \left| (\sqrt[3]{x} - 3) \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2} \right| = \frac{|x - 27|}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9} < \frac{|x - 27|}{9} < \varepsilon$$

Innen $|x - 27| < 9\varepsilon$, így $\delta(\varepsilon) \leq \min\{9\varepsilon, 27\}$ (27 az $x > 0$ megkötésből származik.)

(Pl.) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 5) = 11$

Megoldás. $|f(x) - 11| < \varepsilon$, ha $0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$ $\delta(\varepsilon) = ?$

$$\begin{aligned} |x^2 - x + 5 - 11| &= |x^2 - x - 6| = |x - 3||x + 2| &< & |x - 3| \cdot 6 < \varepsilon \\ && |x - (-2)| &< 6 \\ && -8 &< x < 4 \end{aligned}$$

Tehát $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}$, vagyis $\delta(\varepsilon) \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\right\}$

(A vizsgálatot leszűkítettük a $(-8, 4)$ intervallumra. A vizsgált $x_0 = 3$ pontnak ezen intervallum végpontjaitól való minimális távolsága 1, tehát δ nem lehet 1-nél nagyobb. Ezért került be a képletbe 1.)

(Pl.) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{1 - x} = -1$

Megoldás. $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$, ha $0 < |x - (-2)| < \delta(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x + 1}{1 - x} + 1 \right| &= \left| \frac{2x + 1 + 1 - x}{1 - x} \right| = \frac{|x + 2|}{|x - 1|} &< & \frac{|x + 2|}{1} < \varepsilon \\ && |x - 1| &> 1 \\ && (x < 0) \vee (x > 2) \end{aligned}$$

Tehát $|x + 2| < \varepsilon$, vagyis $\delta(\varepsilon) \leq \min\{\varepsilon, 2\}$
(2: -2 távolsága 0-tól.)

Feladatok:

Gy →

A definícióval mutassa meg, hogy

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} = 3$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 3$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$

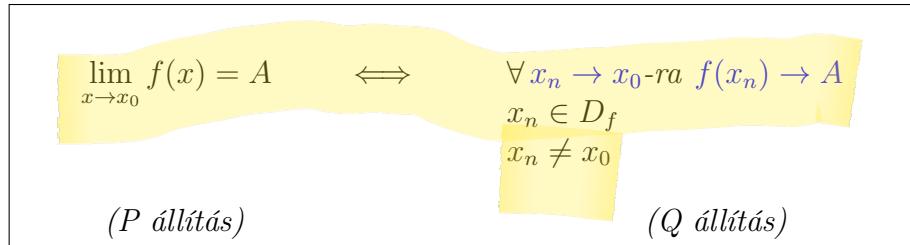
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{3 + x} = -\frac{1}{2}$

•••

3.1.1. Szükséges és elégsges tételek határérték létezésére

Átviteli elv:

(T)



(B) 1. Szükségesség ($P \Rightarrow Q$):

Teljesül: $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Be kell látni:

$f(x_n) \rightarrow A$, tehát $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$: $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$

Algoritmus:

$\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) \rightarrow N_1(\delta(\varepsilon))$: $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon))$

De ekkor $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow N(\varepsilon) := N_1(\delta(\varepsilon))$

2. Elégsgesség ($Q \Rightarrow P$, ezzel ekvivalens $\neg P \Rightarrow \neg Q$):

$\forall x_n \rightarrow x_0$ -ra $f(x_n) \rightarrow A$.

Következik-e ebből, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon)$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$?

Indirekt módon bizonyítunk.

Tfh. $\exists \varepsilon > 0$, melyhez nincs $\delta(\varepsilon)$. Tehát minden δ rossz. Pl. $\delta = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^+$) is rossz, tehát $\exists x_m$: $0 < |x_m - x_0| < \frac{1}{m}$, de $|f(x_m) - A| \geq \varepsilon$. De ekkor lenne olyan $x_m \rightarrow x_0$ pontsorozat, amelyre $f(x_m) \not\rightarrow A$ ↗

▀

(Pl.) Legyen $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, és $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ekkor f -nek nincs határértéke a $x_0 = 0$ -ban, még féloldali sem.

Megoldás. Csak a jobb oldali határérték létezését cáfoljuk. Legyen

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 + .$$

Ekkor

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0,$$

vagyis az **átviteli elv** miatt csak 0 lehetne a jobb oldali határérték. (És így a határérték is.)

Legyen most

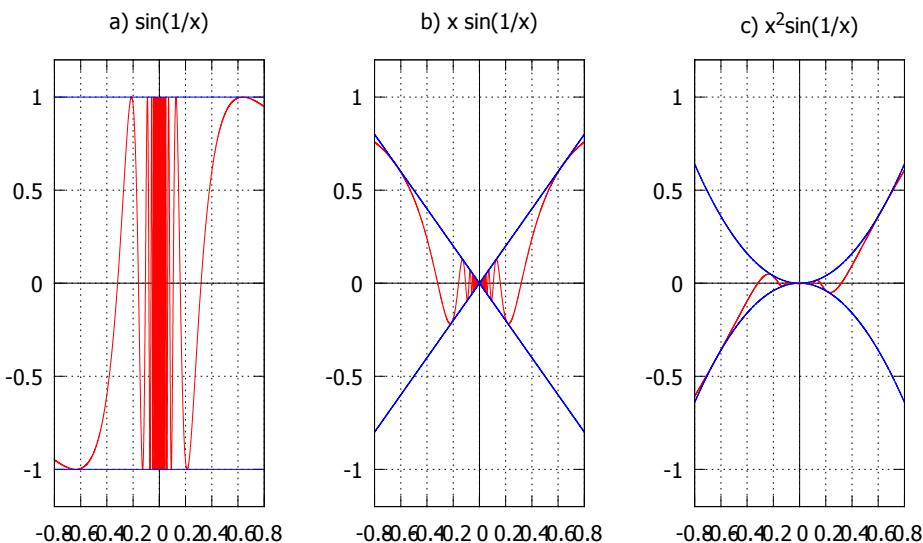
$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0+$$

Ekkor

$$f(x_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1 \neq 0,$$

így az **átviteli elv** miatt nem létezik jobb oldali határérték. (És így a határérték sem.)

3.3. ábra. A $\sin(1/x)$ függvény grafikonja



(Pl.) Ezzel szemben

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Megoldás. Csak az utóbbit bizonyítjuk. Legyen $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Ha $x_n \neq 0$ és $x_n \rightarrow 0$, akkor

$$-x_n^2 \leq f(x_n) \leq x_n^2$$

így a rendőrelv miatt $f(x_n) \rightarrow 0$, ami az **átviteli elv** szerint adja az állítást.

(Másik indoklás: mivel ($0 \cdot$ korlátos) alakú határértékről van szó, a tanult tétel miatt a függvény 0-hoz tart.)

3.1.2. Végesben vett határértékek

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = A \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = A \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0: \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 < |x - x_0| < \delta \\ (x \in \dot{K}_{x_0, \delta}) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) > \Omega, \text{ ha} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 < |x - x_0| < \delta \\ (x \in \dot{K}_{x_0, \delta}) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = -\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) < -\Omega, \text{ ha} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 < |x - x_0| < \delta \\ (x \in \dot{K}_{x_0, \delta}) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$$

•••

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{6-2x} = -\infty}$

Megoldás.

$$\frac{1}{6-2x} < -\Omega \implies \frac{1}{2x-6} > \Omega > 0 \implies 0 < x-3 < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{6-2x} = +\infty}$

Megoldás.

$$\frac{1}{6-2x} = \frac{1}{2(3-x)} > \Omega \implies 2(3-x) < \frac{1}{\Omega} \implies 3-x < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

$$\left(-\delta(\Omega) = -\frac{1}{2\Omega} < x - 3 < 0 \right)$$

3.1.3. Végtelenben vett határértékek

App
⇒

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists P(\varepsilon) > 0 :$	$ f(x) - A < \varepsilon$, ha $x > P(\varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists P(\varepsilon) > 0 :$	$ f(x) - A < \varepsilon$, ha $x < -P(\varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0 :$	$f(x) > \Omega$, ha $x > P(\Omega)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0 :$	$f(x) < -\Omega$, ha $x > P(\Omega)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0 :$	$f(x) > \Omega$, ha $x < -P(\Omega)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0 :$	$f(x) < -\Omega$, ha $x < -P(\Omega)$

(M) Az átviteli elv mindegyik típusra kiterjeszthető. A rendőrelv is alkalmazható.

•••

Pl.
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+3}{2x-1} = \frac{3}{2}}$$

Megoldás. $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x < -P(\varepsilon)$

$$\left| \frac{3x+3}{2x-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6x+6 - (6x-3)}{4x-2} \right| = \frac{9}{|4x-2|} < \varepsilon \implies |4x-2| > \frac{9}{\varepsilon}$$

$$x < 0 \text{ miatt } -(4x-2) > \frac{9}{\varepsilon} \implies -4x > \frac{9}{\varepsilon} - 2 \implies x < -\frac{\frac{9}{\varepsilon} - 2}{4} = -P(\varepsilon)$$

Pl. $f(x) = \{x\} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{x\} \not\ni$

Megoldás. $x_n^{(1)} = n \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n^{(1)}) = 0 \rightarrow 0$
 $x_n^{(2)} = n + \frac{1}{2} \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n^{(2)}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$

Pl. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\{x\}}{x^2 + 1} = 0$

Megoldás. A rendőrelv segítségével:

$$\begin{array}{c} 0 \leq \frac{\{x\}}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 0 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\implies \frac{\{x\}}{x^2 + 1} \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow \pm\infty.$$

•••

3.1.4. Feladatok

1. A megfelelő definícióval mutassa meg, hogy

- a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^2 + 1) = \infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 3}{2x + 4} = \frac{1}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{1}{(x - 2)^3} = \pm\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x - 1)^2} = 0$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{1 + x^2} = 3$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 5} = \infty$

2. Mutassa meg, hogy az alábbi határértékek nem léteznek!

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x^2$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sin^2 x]$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, ha $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$

•••

3.2. Folytonosság

x_0 : az értelmezési tartomány belső pontja ($\exists K_{x_0} \subset D_f$)

(D) f folytonos x_0 -ban, ha $\exists f(x_0)$ és $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$\xrightarrow{\text{Thom}_2}$

$\xrightarrow{\text{App}}$

$\xrightarrow{\text{App}}$

Ezzel egyenértékű:

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban, ha } \exists f(x_0), \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(= f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)\right)$$

(Tehát a folytonossági helyeken a határátmenet és a függvényművelet felcserélhető.)

Jobbról folytonos f x_0 -ban, ha: $f(x_0) = f(x_0 + 0)$

Balról folytonos f x_0 -ban, ha: $f(x_0) = f(x_0 - 0)$

3.2.1. Szakadási helyek osztályozása

$\xrightarrow{\text{App}}$

Ha az értelmezési tartomány belső pontjában f nem folytonos, akkor a szakadás lehet:

1. Elsőfajú szakadás

- a) megszüntethető szakadás: $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ (véges), de $\neq f(x_0)$ vagy $\nexists f(x_0)$
- b) véges ugrás: \exists a véges $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0)$, de $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$

2. Másodfajú szakadás (lényeges szakadás): minden más szakadási hely

3.3. Műveletek függvények körében

$$(cf)(x) := c \cdot f(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

$\xrightarrow{\text{Thom}_3}$

$\xrightarrow{\text{Thom}_4}$

(Pl.) $f(x) = x^2; \quad g(x) = \sin x \quad (f \circ g)(x) = \sin^2 x; \quad (g \circ f)(x) = \sin x^2$

A határértékekre vonatkozó tételek:

(T) Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (cf)(x) = c \cdot A \quad (= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = A + B$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) \left(= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) \right) = A \cdot B$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}, \text{ ha } B \neq 0$$

(B) A számsorozatokra vonatkozó hasonló tételek alapján. Pl. az összegre:
A feltételek miatt:

$$\forall x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \neq x_0, x_n \in D_f) \text{ sorozatra } f(x_n) \rightarrow A, \quad g(x_n) \rightarrow B \\ \Rightarrow \quad \forall \text{ ilyen } x_n \rightarrow x_0\text{-ra: } (f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B. \quad \text{Stb.} \quad \blacksquare$$

(M) A tételek kiterjeszhetők minden határérték fajtára a számsorozatokhoz hasonlóan. Ugyanazok a határozatlan alakok is.

•••

²lásd Thomas 02-es bemutató 6. fejezet (75-94. oldal).

³lásd Thomas 01-es bemutató 5. fejezet (70-87. oldal).

⁴lásd Thomas 02-es bemutató 2. fejezet (14-24. oldal).

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^2}{x - 1} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{(x - 1)}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{x - 1}{x - 1}}_{\downarrow 1} \underbrace{(x + 1)^2}_{\downarrow 4} = 0$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x^2 - 9)^2} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} \frac{x - 3}{x - 3} \frac{x - 2}{(x + 3)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \underbrace{\frac{1}{x - 3}}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\frac{x - 3}{x - 3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{x - 2}{(x + 3)^2}}_{\downarrow \frac{3-2}{6^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \underbrace{\frac{1}{x - 3}}_{\downarrow -\infty} \underbrace{\frac{x - 3}{x - 3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{x - 2}{(x + 3)^2}}_{\downarrow \frac{3-2}{6^2}} = -\infty$$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x^2 - 9)^2} = ?$

Megoldás. $\dots = \underset{+0}{=} +\infty$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + 2}{\sqrt{4+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\sqrt{4+x} + 2) = 4$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8+x}{3x^2 + 6} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\underbrace{3x^2}_{= \frac{1}{3x} \rightarrow 0}} \frac{1 + \frac{8}{x}}{\underbrace{1 + \frac{2}{x^2}}_{\downarrow}} = 0$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{6 + 3x^2} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{\underbrace{3x^2}_{= \frac{1}{3}}} \underbrace{\frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}}_{\downarrow} = \frac{1}{3}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9 - 2x^2}{3x + 6} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{\underbrace{3x}_{= -\frac{2}{3}x}} \underbrace{\frac{1 - \frac{9}{2x^2}}{1 + \frac{2}{x}}}_{\begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \end{array}} = \mp\infty$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^9 + 6x^5 + 2x^2 + 3) = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^9 \underbrace{\left(1 - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^7} - \frac{3}{x^9}\right)}_{\downarrow 1} = \mp\infty$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 + 6x}) = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 8 - (x^2 + 6x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 6x}} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\underbrace{-3x}_{=\frac{-3x}{|x|}=\frac{-3x}{\pm x}}}{\sqrt{\underbrace{x^2}_{|x|^2}}} \frac{\frac{1 - \frac{8}{3x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}}}{\sqrt{1 + \frac{6}{x}}} = (\mp 3) \cdot \frac{1}{1 + 1} = \mp \frac{3}{2} \end{aligned}$$

A folytonosságra vonatkozó tételek:

Beláthatók a következő tételek:

- (T) Ha f és g folytonos x_0 -ban, akkor
 $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0 -ban.
- (T) Ha g folytonos x_0 -ban és f folytonos $g(x_0)$ -ban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0 -ban.

3.4. Racionális függvények

3.4.1. Polinomok (racionális egészfüggvények)

- (D) n -edfokú polinomnak nevezzük a

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$
függvényt.

(T)

$$x, \quad x^2, \quad x^n, \quad P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

mindenütt folytonos.

- (B) A folytonosság definíciója:
 $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon)$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

a) $f_1(x) := x$:

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

b) $f_2(x) := x^2$:

Az alábbi bizonyításnál leszűkítjük a vizsgálatot az x_0 pont 1 sugarú környezetére.

Ez a $-x_0$ pont $r = 2|x_0| + 1$ sugarú környezete.

Tehát fennáll, hogy

$$|x + x_0| = |x - (-x_0)| < r = 2|x_0| + 1$$

Így

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < |x - x_0| (2|x_0| + 1) < \varepsilon$$

$$\implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \implies \delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}, 1\right\}$$

Ez a $\delta(\varepsilon)$ minden ε -ra megfelel, de most értéke függ x_0 -tól is.

- c) $f_n(x) := x^n$: teljes indukcióval látjuk be a függvény folytonosságát.
(A definícióval is dolgozhatnánk, de úgy kissé nehéz a bizonyítás.)
- 1.) $n = 1$ -re igaz az állítás, hiszen már beláttuk, hogy $f_1(x) = x$ folytonos.
 - 2.) Tegyük fel, hogy $(n - 1)$ -re igaz az állítás, tehát $f_{n-1}(x) = x^{n-1}$ folytonos.
 - 3.) Igaz-e az állítás n -re?
- Mivel $f_n(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x = f_{n-1}(x) \cdot x$, így folytonos, mert két folytonos függvény szorzata.
- Tehát a teljes indukció értelmében valóban $f_n(x) \forall n$ -re folytonos.

- d) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ n -edfokú polinom (racionális egész függvény), ahol $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).
A polinomok mindenütt folytonosak, hiszen véges sok folytonos függvény szorzásával és összeadásával állnak elő.

■

Néhány megjegyzés az n -edfokú polinomokról:

- x_0 a polinom gyöke, ha $P_n(x_0) = 0$.

Ekkor a polinom felírható a következő alakban:

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x),$$

tehát a polinomból kiemelhető az $(x - x_0)$ gyöktényező.

- Egy n -edfokú polinomnak pontosan n darab gyöke van, de lehetnek többszörös gyökei és komplex gyökei is. Ha a polinom valós együtthatójú, akkor a komplex gyökök csak konjugált párban fordulhatnak elő. Ha a konjugált komplex gyökökhöz tartozó gyöktényezőket összeszorozzuk, akkor egy valós együtthatójú másodfokú gyöktényezőt kapunk.

Tehát a valós együtthatójú polinomok minden felírhatók valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.

Például:

$$P_{11}(x) = \underbrace{x^3}_{=(x-0)^3} \cdot (x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+4)^2$$

Ennek a polinomnak $x = 0$ háromszoros gyöke (a gyök multiplicitása 3), $x = 1$ kétszeres gyöke.

A további gyökök már komplexek:

$+i$ és $-i$: az $(x^2 + 1)$ gyökei,
 $+2i, +2i, -2i, -2i$ (két darab kétszeres gyök) : az $(x^2 + 4)^2$ gyökei.

3.4.2. Racionális törtfüggvény

(D)

$$f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (P_n(x) : n - \text{edfokú}, Q_m(x) : m - \text{edfokú polinom})$$

Valódi törtfüggvény, ha $n < m$, egyébként áltört. Az áltört polinomosztás segítségével minden felírható egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként. Mivel a polinomok mindenütt folytonosak, a racionális törtfüggvény is mindenütt folytonos, kivéve a nevezőben levő polinom valós gyökeit, ahol a törtfüggvény nincs értelmezve.

Például:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{(x + 2)^2 (x^2 + 2)}$$

A függvény az $x = -2$ pont kivételével mindenütt folytonos.
 $(x^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2$, tehát ennek nincs valós gyöke.)

3.5. Példák és feladatok

Gy

(Pl.) Milyen szakadása van $x = 1$ -ben az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9}$$

Megoldás. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4)$

A nevezőnek is gyöke $x = 1$, ezért kiemelhető belőle $(x - 1)$.

$$(x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9) : (x - 1) = x^3 - x^2 + 9x - 9$$

A hánnyadosnak még mindig gyöke $x = 1$, így: $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1) = x^2 + 9$.

Tehát $x \rightarrow 1$ -re

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\downarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{\equiv 1} \underbrace{\frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2+9}}_{\downarrow -\frac{3}{5}}$$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \mp\infty$: $x = 1$ másodfajú szakadás

Pl.

Hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x+2|} + \frac{1}{x+2}, & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{-x^3 + x^2 + 4x - 4}{1-x^2}, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$x = -2$:

$$\text{Ha } x < -2 : f(x) = \frac{1}{-(x+2)} + \frac{1}{x+2} \equiv 0 \implies f(-2-0) = 0.$$

$$\text{Ha } -2 < x \leq -1 : f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+2} \implies f(-2+0) = +\infty.$$

Így $x = -2$ lényeges (másodfajú) szakadás.

$$\text{Ha } x > -1 : f(x) = \frac{x^2(-x+1) + 4(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{1-x} \frac{x^2-4}{1+x}$$

$x = 1$:

$$f(1+0) = f(1-0) = -\frac{3}{2} : x = 1 \text{ megszüntethető szakadás } (\#f(1))$$

$x = -1$:

$$f(-1-0) = f(-1) = 2$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1-x}{1-x} \underbrace{(x^2-4)}_{\substack{\downarrow \\ -3}} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} = -\infty$$

Tehát $x = -1$ másodfajú szakadás.

Feladatok

1. a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+ax+1}) = ?$ $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt[4]{x^4+ax^2+2} - \sqrt[4]{x^4+bx^2+1}) = ?$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\{\pi x\}}{\{x\}} = ?$
3. $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} + \frac{1}{x - 2} \right) = ?$
4. a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 2}}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{3x + 4}} = ?$
 b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{2x + 1} + 1}{\sqrt{3x + 4} - 1} = ?$
 c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{-x}} = ?$
 d) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = ?$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt[6]{x - 1}}{1 - \sqrt[4]{x - 1}} = ?$ (Próbálkozzon $u = \sqrt[12]{x - 1}$ helyettesítéssel!)

5. Milyen típusú szakadásai vannak az

$$\frac{x^2 - x - 20}{|x^2 - 12x + 35| (x + 4)}$$

függvénynek?

6. Milyen típusú szakadása van $x = -1$ -ben f -nek?

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}$$

7. Hol és milyen típusú szakadása van f -nek?

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 8) (x + 4)}{|x^2 + 3x - 10| (x^2 + 5x + 4)}$$

3.6. Egy nevezetes határérték

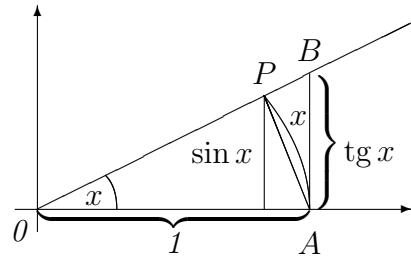
(T) A $\sin(x)$ és $\cos(x)$ függvények mindenütt folytonosak.

($\neg B$)

(A következő határérték számolása közben felhasználjuk a sin és cos függvények folytonosságát.)

(T)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(B) Mivel $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ páros, elég $f(+0)$ -val foglalkozni.Legyen $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$T_{POA\Delta} < T_{POA\triangle} < T_{OAB\Delta}$$

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1^2 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

sin x < x < tg x

Mindkét oldalt $\frac{2}{\sin x} > 0$ -val megszorozva:

$$\begin{array}{c} 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} \xrightarrow[+0]{x} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}$$

■

(M) Tehát $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ -ben $\sin x < x \Rightarrow |\sin x| \leq |x| \quad \forall x$ -re.(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\downarrow 1^2} = \frac{2}{3}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \frac{3}{2}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = ?$

Megoldás. $\dots = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \cdot \underbrace{\sin x}_{\downarrow 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \quad u := x - \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{\cos(u + \frac{\pi}{2})} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{-\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$$

Feladatok

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = ?$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = ?$

2. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \sqrt[4]{x} - \sin \sqrt[4]{x^3}}{\sin \pi x} = ?$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{\sin^2 3x} = ?$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = ?$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = ?$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = ?$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = ?$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = ?$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x} = ?$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = ?$

15. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = ?$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) = ?$

16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{5}} \frac{1 - \cos 5x}{5x - \pi} = ?$

17. Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3x + 2) \sin |2 - x|}{x^2 - 4}$$

függvénynek?

18. Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x+3|} + \frac{1}{x+3}, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}, & \text{ha } 0 < x < 1 \end{cases}$$

•••

3.7. Folytonos függvények tulajdonságai

Néhány definíció:

- (D) f folytonos (a, b) -n, ha $\forall x \in (a, b)$ -ben folytonos.
- (D) f folytonos $[a, b]$ -n, ha folytonos (a, b) -n és a -ban jobbról, b -ben balról folytonos.
- (D) $b \in H$ belső pont, ha $\exists K_b : K_b \subset H$
- (D) h határpont, ha $\forall K_h$ -ra $K_h \cap H \neq \emptyset$ és $K_h \cap \overline{H} \neq \emptyset$
- (D) k külső pont, ha $\exists K_k : K_k \cap H = \emptyset$
- (D) Nyílt halmaz: minden pontja belső pont
- (D) Zárt halmaz: a nyílt halmaz komplementere
- (D) **Kompakt halmaz** \mathbb{R} -ben: korlátos és zárt halmaz (\mathbb{R}^n -ben is érvényes a definíció)

(T) Ha f folytonos x_0 -ban és $f(x_0) > c$, akkor $\exists \delta > 0 : f(x) > c$, ha $x \in K_{x_0, \delta}$.

(B)

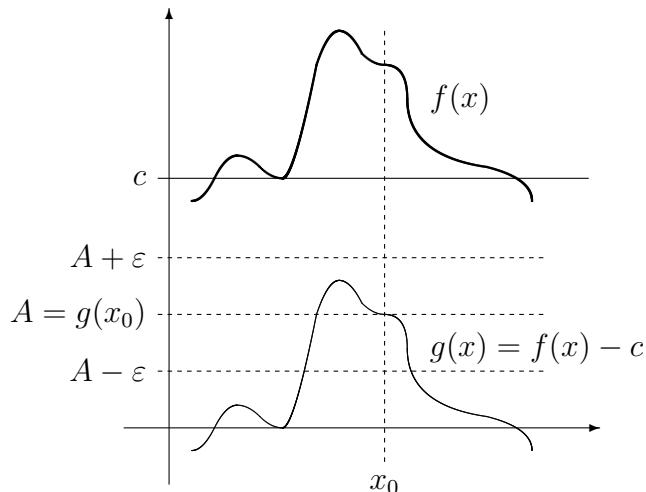
$$g(x) := f(x) - c$$

g is folytonos x_0 -ban és $g(x_0) > 0$.

Bizonyítandó, hogy $\exists K_{x_0, \delta}$:

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in K_{x_0, \delta}$$

$A := g(x_0)$. A folytonosság miatt:



$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

$$\varepsilon := \frac{A}{2} \longrightarrow \delta \left(\frac{A}{2} \right), \text{ hogy}$$

$$|g(x) - A| < \frac{A}{2}, \text{ azaz } 0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < g(x) \left(< A + \frac{A}{2} \right), \text{ ha } |x - x_0| < \delta \left(\frac{A}{2} \right).$$

$$\text{Tehát itt } g(x) > \frac{A}{2} > 0 \implies f(x) = g(x) + c > c + \frac{A}{2} > c. \quad \blacksquare$$

3.7.1. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

App

(T) **Bolzano tétele:**

Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c értéket felvesz $[a, b]$ -ben.

(B) Csak $f(a) < c < f(b)$ esetre bizonyítunk, azaz belátjuk, hogy létezik $\xi \in (a, b)$, amire $f(\xi) = c$.

1. lépés:

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > c \implies a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}, I_1 = [a_1, b_1]$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < c \implies a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = c \implies \xi = \frac{a+b}{2}. \text{ Ekkor vége az eljárásnak. Egyébként}$$

$$f(a_1) < c < f(b_1), \quad [a, b] \supset I_1, \quad |a_1 - b_1| = \frac{|a - b|}{2}$$

2. lépés: Megismételjük az eljárást I_1 -re, így kapunk egy $I_2 = [a_2, b_2]$ intervallumot:

$f(a_2) < c < f(b_2)$, $[a, b] \supset I_1 \supset I_2$, $|a_2 - b_2| = \frac{|a - b|}{4}$, vagy megkaptuk ξ értékét.
Ha ξ -t nem kaptuk meg, folytatjuk az eljárást.

⋮

$n.$ lépés:

$$f(a_n) < c < f(b_n), \quad [a, b] \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n$$

A Cantor-axióma szerint: $\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, és $|a_n - b_n| = \frac{|a - b|}{2^n} \xrightarrow[n]{\downarrow} 0$

$$0 \leq |a_n - \xi| \leq |a_n - b_n| \quad \xrightarrow{\downarrow} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi \quad (\text{rendőrelv})$$

$$0 \leq |b_n - \xi| \leq |a_n - b_n| \quad \xrightarrow{\downarrow} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad (\text{rendőrelv})$$

f folytonossága és az átviteli elv alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Másrészt a sorozatok határértékére vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával kapjuk:

$$f(a_n) < c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq c$$

$$f(b_n) > c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq c$$

Tehát $f(\xi) \leq c$ és $f(\xi) \geq c$, ami azt jelenti, hogy $f(\xi) = c$. ■

(K₁) Ha f folytonos $[a, b]$ -ben és $f(a) f(b) < 0$, vagyis $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van (a, b) -ben.

Mivel $c = 0$ az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékek közé esik, a Bolzano tétel értelmében $\exists \xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$, tehát ξ gyöke az egyenletnek.

(K₂) Páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

(B) Legyen $f(x) = a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k} x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0$, legyen $a_{2k+1} > 0$.

$$\implies \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ ezért } \exists \beta : f(\beta) > 1 \right)$$

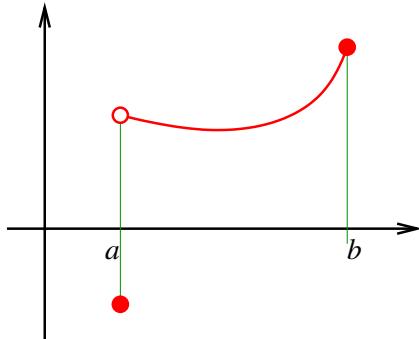
$$\text{és } \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ ezért } \exists \alpha : f(\alpha) < -1 \right).$$

A polinomok folytonosak mindenütt, tehát $[\alpha, \beta]$ -ban is és $f(\alpha) f(\beta) < 0$.

Így az 1. következmény szerint $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f(\xi) = 0$. ■

(M) Megjegyezzük, hogy ha a Bolzano téTEL feltételei közül akár az intervallum korlátoSSágát, akár a zártSágát elhagyjuk, akkor a téTEL érvényét veszti. A 3.4 ábrán látható függvénY például az $(a, b]$ intervallumon folytonos, $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelű, mégsem veszi föl a függvénY a zérus értékét az (a, b) intervallumon. (A függvénY az a pontban *nem* folytonos.)

3.4. ábra. Az a pontban nem folytonos függvényre nem teljesül a Bolzano téTEL



3.7.2. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

(T) Weierstrass I. tétele

Ha f folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott f korlátos.

(B) Indirekt:

TfH. nem korlátos pl. felülről, tehát $\nexists K : f(x) \leq K$ teljesüljön $\forall x \in [a, b]$ -re.

Ekkor $\exists x_1 : x_1 \in [a, b], f(x_1) > 1$

$\exists x_2 : x_2 \in [a, b], f(x_2) > 2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\exists x_n : x_n \in [a, b], f(x_n) > n$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

(x_n) sorozat korlátos ($\forall x_n \in [a, b]$) B.W. kiv. t. \exists konv. részsorozat: $(x_{n_i}) \rightarrow x_0$.

Mivel $a \leq x_{n_i} \leq b$ mindenkoránál, ezért $a \leq \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x_0 \leq b$. Tehát $x_{n_i} \rightarrow x_0 \in [a, b]$, de $f(x_{n_i}) \rightarrow \infty$ \nsubseteq f folytonos x_0 -ban, ezért $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x_0)$. ■

(T) Weierstrass II. tétele:

Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor ott felveszi az infimumát, ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$, hogy

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} & \left(= \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \max f([a, b]) \right) \\ f(\beta) &= \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} & \left(= \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \min f([a, b]) \right) \end{aligned}$$

(B) $A := f([a, b]).$

Weierstrass I. tétele értelmében A korlátos $\xrightarrow{\text{Dedekind}}$ $\exists \sup A := M; \inf A := m.$

Megmutatjuk, hogy $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = M, f(\beta) = m.$

Bizonyítás $f(\alpha) = M$ -re: indirekt. (Hasonlóan lehetne $f(\beta) = m$ -re.)

Tfh. $\nexists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = M \implies M - f(x) > 0$, ha $x \in [a, b]$

$\implies g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ folytonos $[a, b]$ -ben $\xrightarrow{\text{W. I. t.}} g$ korlátos $[a, b]$ -ben, tehát $\exists K :$

$$\frac{1}{M - f(x)} < K, \quad x \in [a, b] \quad (K > 0, \quad \frac{1}{M - f(x)} > 0)$$

$$M - f(x) > \frac{1}{K}$$

$$f(x) < \underbrace{M - \frac{1}{K}}_{\text{felső korlát}} < M \text{ (legkisebb felső korlát)} \quad \downarrow$$

■

(M) Weierstrass tételeiből sem a függvény folytonossága. sem a halmaz kompaktsága nem hagyható el.

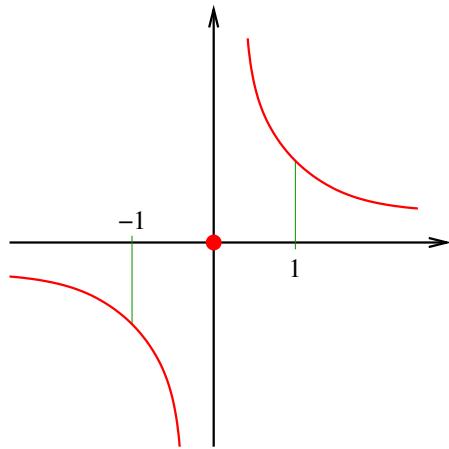
Tekintsük például a 3.5 ábrán látható függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Ha f -et a $(0, 1]$ nem zárt intervallumon vizsgáljuk, akkor ott se nem korlátos se nem veszi fel szuprémumát, bár folytonos.

Ugyanígy, ha a $[-1, +1]$ intervallumon vizsgáljuk, akkor sem korlátos, és nem veszi fel szuprémumát (és infimumát sem), bár most az intervallum kompakt, de f nem folytonos.

Végül jegyezzük meg, hogy ha f -et az $[1, \infty)$ nem korlátos (zárt) intervallumon vizsgáljuk, akkor szintén nem veszi fel infimumát.

3.5. ábra. Az $f(x)$ függvény grafikonja

3.7.3. Egyenletes folytonosság

(Pl.)

$$f(x) = x^2 + 2$$

1. Mutassuk meg, hogy $\forall x_0 \in [1, 2]$ -ben folytonos a függvény!
2. Megadható-e közös $\delta(\varepsilon)$? (Létezik-e $\inf_{x_0 \in [1, 2]} \delta(\varepsilon, x_0) > 0$?)

Megoldás.

$$1. |f(x) - f(x_0)| = |x^2 + 2 - (x_0^2 + 2)| = |x - x_0||x + x_0| < |x - x_0|(2|x_0| + 1) < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

$$2. \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \underset{x_0 \in [1, 2]}{\geq} \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon, 2) \quad \text{a közös } \delta(\varepsilon)$$

(D)

Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon)$ (A -ban közös):

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x_1 - x_2| < \delta; \quad x_1, x_2 \in A$$

(M₁)

Tehát $\exists \inf_{x \in A} \delta(\varepsilon, x) > 0$

(M₂)

Az A halmaz általában intervallum szokott lenni.

(Pl.)

$$f(x) = x^2 + 2$$

1. Egyenletesen folytonos-e f az $[1, 2]$ intervallumon?
2. Egyenletesen folytonos-e f az $(1, 2)$ intervallumon?
3. Egyenletesen folytonos-e f az $(1, \infty)$ intervallumon?

Megoldás. 1. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel. (Lásd előző példa!)

2. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel. (Ami a zárt intervallumhoz megfelel, az a nyílthoz is minden jó.) Általánosságban is igaz, hogy ha f egyenletesen folytonos I -n (nyílt vagy zárt), akkor $I_1 \subset I$ esetén I_1 -en is egyenletesen folytonos. Ugyanaz a δ megfelel.

3. f nem egyenletesen folytonos $(1, \infty)$ -en.

$x_n^{(1)} := n \rightarrow \infty$, $x_n^{(2)} := n + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$, $x_n^{(2)} - x_n^{(1)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; egymást tetszőlegesen megközelítik, ha n -et elegendően nagynak választjuk.

Mégis

$$|f(x_n^{(2)}) - f(x_n^{(1)})| = \left| \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 + 2 - (n^2 + 2) \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Tehát, ha $\varepsilon < 2$, nincs közös δ .

(Pl.)

$$f(x) = x \text{ egyenletesen folytonos } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

Megoldás.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

(Pl.)

$$f(x) = \sin x \text{ egyenletesen folytonos } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

Megoldás. Felhasználjuk, hogy

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ ill. } |\sin x| \leq |x|.$$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

(M) Ezzel persze azt is beláttuk, hogy $\sin x$ mindenütt folytonos.

És mivel $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, így $\cos x$ is mindenütt folytonos, mivel folytonos függvények összetétele.

Pl. $f(x) = \tan x$ egyenletesen folytonos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ -on.

Megoldás.

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \right| = \left| \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{(\cos \frac{\pi}{3})^2} = 4|x_1 - x_2| < \varepsilon \\ &\implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Pl. $f(x) = \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0, 1)$ -en.

Megoldás. $x_n^{(1)} := \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $x_n^{(2)} := \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \implies x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \rightarrow 0$.

Ugyanakkor

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = |n - (n+1)| = 1 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon < 1$$

Pl. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0, 1)$ -en.

Megoldás. $x_n^{(1)} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$, $x_n^{(2)} := \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = |\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \sin(3\frac{\pi}{2} + 2n\pi)| = |1 - (-1)| = 2 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon \leq 2.$$

(T) Heine tétele:

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos. ($\neg B$)

(T) Ha f folytonos $[a, \infty)$ -en és $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (véges), akkor f egyenletesen folytonos $[a, \infty)$ -en. ($\neg B$)

(Pl.) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Egyenletesen folytonos-e $(1, 10)$ -en?

Megoldás. Mivel P_n folytonos $[1, 10]$ -en $\implies P_n$ itt egyenletesen folytonos $\implies P_n$ az $(1, 10) \subset [1, 10]$ -en is egyenletesen folytonos.

Feladatok

1. $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

- a) Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?
- b) Van-e minimuma f -nek a $[-1, 0]$ intervallumon?

2. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{\cos x}$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = ?$
- b) Bizonyítsa be, hogy f -nek van gyöke $(0, \frac{\pi}{2})$ -ben!

3. Legyen f folytonos $(-\infty, \infty)$ -en és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Bizonyítsa be, hogy f korlátos $(-\infty, \infty)$ -en! Van-e nullahelye f -nek?

4. a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$?

- b) Bizonyítsa be, hogy ha f folytonos a $[2, \infty)$ intervallumon és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5, \quad \sup_{x \in (2, \infty)} f(x) = 6,$$

akkor f értékkészletében szerepel a 6.

5. Van-e gyöke az alábbi egyenletnek a $(0, \pi)$ -ben?

$$\frac{1}{x}(\cos^2 x + 1) + \frac{1}{x - \pi}(\sin^2 x + 1) = 0$$

6. $f(x) = 2x^3 - 3$

- a) Mutassa meg a határérték definíciója alapján, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 13$ ($\delta(\varepsilon) = ?$)
- b) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1, 4)$ intervallumon?
- c) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1, \infty)$ intervallumon?

4. fejezet

Egyváltozós valós függvények differenciálása

4.1. Differenciálszámítás

App
App

④ **Differenciahányados (különbségi hányados):**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\text{függvényérték megváltozása}}{\text{független változó megváltozása}} = \text{húr iránytangense} \right)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ esetén a húrok átmennek az érintőbe, ha létezik $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ differenciálhányados (derivált) = az érintő iránytangense.

④ Legyen $K_{x_0, \delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f deriválható (differenciálható) x_0 -ban, ha a fenti határérték létezik és véges. Ekkor $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ az f függvény x_0 pontbeli deriváltja (differenciálhányadosa).

④ Jobb oldali derivált: $f'_+(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f jobbról deriválható (jobbról differenciálható) x_0 -ban, ha a fenti határérték létezik és véges.

D) Bal oldali derivált: $f'_-(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f balról deriválható (balról differenciálható) x_0 -ban, ha a fenti határérték létezik és véges.

M) $f'(x_0)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

D) f deriválható (differenciálható) (a, b) -ben, ha f differenciálható x -ben $\forall x \in (a, b)$ -re.

D) f deriválható (differenciálható) $[a, b]$ -ben, ha differenciálható (a, b) -ben és még $\exists f'_+(a), f'_-(b) \in \mathbb{R}$.

Pl. $f(x) = x^2, \quad f'(5) = ?$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 + h)^2 - 5^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10 + h) = 10. \end{aligned}$$

Pl. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(3) = ?$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - (3+h)}{3h(3+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}.$$

Pl. $f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(4) = ?$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Pl. $f(x) = |x|, \quad f'(3) = ?, \quad f'(-2) = ?, \quad f'(0) = ?$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|3+h| - |3|}{h} \quad \text{ha } |h| < 3 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-3}{h} = 1; \\ f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-2+h| - |-2|}{h} \quad \text{ha } |h| < 2 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-h-2}{h} = -1. \\ f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

Az $f(x) = |x|$ függvény folytonos az origóban, de nem deriválható; ilyenkor azt mondjuk, hogy az origóban a függvénynek *törése* van.

(Pl.) $f(x) = x|x|$, $f'(0) = ?$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

(Pl.) $f(x) = \sqrt{4x+5}$, $f'(1) = ?$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4(1+h)+5} - \sqrt{4 \cdot 1 + 5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+4h} - \sqrt{9}}{h} \frac{\sqrt{9+4h} + \sqrt{9}}{\sqrt{9+4h} + \sqrt{9}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+4h-9}{h(\sqrt{9+4h}+3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{9+4h}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(T) Szükséges és elégsges téTEL deriválhatóságra:

f akkor és csak akkor differenciálható x_0 -ban, ha $K_{x_0, \delta} \subset D_f$, $|h| < \delta$ -ra:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A csak x_0 -tól függhet, h -tól nem, és $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.)

(B) 1. Szükségesség:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \implies \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. $\implies (\Delta f =) f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varepsilon \cdot h$.

2. Elégsgesség:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$ teljesül. Innen

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h) \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A \quad (= f'(x_0))$$

■

(T) Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor ott folytonos.

(M) Tehát a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak, de nem elégséges. Lásd $|x|$.

(B) A szükséges és elégséges téTEL alapján:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

■

Mindkét oldalon határértéket veszünk. $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ -ra jutunk, vagyis a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, tehát folytonos.

(Pl.) $f(x) = x^2$ $f'(x) = ?$

$$\Delta f = f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = 2x \cdot h + h \cdot h = A \cdot h + \varepsilon \cdot h$$

$$A = f'(x) = 2x \quad (\text{független } h\text{-tól}), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

4.1.1. Differenciál, érintő egyenes

Ha f differenciálható x_0 -ban:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0) \cdot h}_{\text{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{\text{elenyészű rész}}$$

(D) Az f függvény (elsőrendű) differenciálja az x_0 pontban h megváltozás mellett:
 $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(x_0, h) := f'(x_0) \cdot h$

(M) $\mathrm{d}f(x_0, h)$: a függvény x_0 -beli érintő egyenesén a függvényérték megváltozása h lépére. (4.1 ábra)

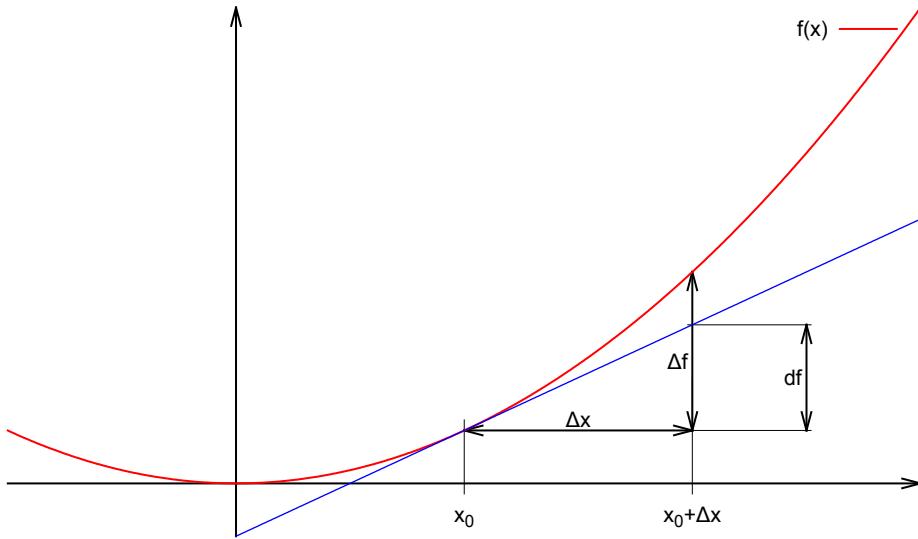
Egyéb jelölések:

$$\mathrm{d}f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x; \quad \mathrm{d}f = f'(x) \Delta x = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$$

(Pl.) $f(x) = x^3$: $\mathrm{d}f = 3x^2 \Delta x$, tehát $\mathrm{d}x^3 = 3x^2 \Delta x$

(Pl.) $f(x) = x$: $\mathrm{d}f = 1 \cdot \Delta x$, tehát $\mathrm{d}x = \Delta x$. Ez indokolja a differenciál legutolsó jelölését.

4.1. ábra. Egy függvény Δf megváltozása valamint df elsőrendű differenciálja az x_0 pontban, a Δx megváltozás mellett



Alkalmazása:

$$\Delta f \approx df :$$

$$f(\underbrace{x_0 + h}_{:=x}) \approx f(x_0) + df(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$: az x_0 pontbeli érintő egyenes egyenlete.

4.1.2. Differenciálási szabályok

App₁

App₂

App₃

App₄

(T) Ha f és g differenciálható x -ben, akkor itt $f + g$, cf ($c \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ is differenciálható valamint $g(x) \neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható, és

$$1. (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$2. (cf(x))' = cf'(x)$$

$$3. (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

¹konstansszoros deriváltja

²összeg deriváltja

³szorzat deriváltja

⁴összetett függvény deriváltja

$$4. \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$5. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(B)

$$1. (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$z(x) := f(x) + g(x)$$

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$2. (cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(cf(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

$$3. (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\begin{array}{cccc} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & g(x+h) & + & \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ \downarrow & & & \downarrow \\ f'(x) & g(x) & & g'(x) \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ (határérték = helyettesítési érték) oka:

g deriválható x -ben $\implies g$ folytonos x -ben

$$4. \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h g(x+h) g(x)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{g(x+h) - g(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$: g folytonossága miatt

($g(x) \neq 0$ és g folytonos x -ben (mivel deriválható) $\implies \exists K_x : g(x) \neq 0$ (lásd a Bolzano tétele előtti segédtételt). Tehát elegendően kis h -ra $g(x+h) \neq 0$.)

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ez már következik az előző két pontból:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

■

Láncszabály: összetett függvény deriválása

T₂ Ha f differenciálható K_{x,δ_1} -ben és g differenciálható $K_{f(x),\delta_2}$ -ben, akkor $g \circ f$ is differenciálható x -ben és

$$((g \circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (\neg B)$$

T₃ Ha f folytonos $K_{x_0,\delta}$ -ban, $x \in K_{x_0,\delta} \setminus \{x_0\}$ (tehát $x \in \dot{K}_{x_0,\delta}$) esetén $\exists f'(x)$ és $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = c$, akkor f differenciálható x_0 -ban és $f'(x_0) = c$. $(\neg B)$

Pl. $f(x) = (2x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 5}$

$$f'(x) = (2x^2 + 3)' \sqrt{x^2 + 5} + (2x^2 + 3) \left(\sqrt{x^2 + 5}\right)' = 4x\sqrt{x^2 + 5} + (2x^2 + 3) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot 2x$$

Pl. $f(x) = \frac{x^7 + x^2 + 5}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \frac{(x^7 + x^2 + 5)' \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - (x^7 + x^2 + 5) (\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1})^2} =$$

Gy

$$= \frac{(7x^6 + 2x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - (x^7 + x^2 + 5)\frac{1}{2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}} \cdot (4x^3 + 4x)}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

•••

App

App

4.1.3. Magasabbrendű deriváltak

Ha az $f(x)$ függvény differenciálható az x_0 pont egy környezetében, akkor az $f'(x)$ derivált függvény x_0 -beli differenciálhányadosa adja meg az $f(x)$ függvény x_0 pontban vett $f''(x_0)$ második deriváltját, azaz

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

A második derivált egy adott x_0 pontban való létezéséhez tehát szükséges, hogy az első derivált függvény az x_0 pont egy kis környezetében létezzék.

Az $f(x)$ függvény ismételt deriválásával kapjuk a függvény további, harmadik, negyedik, stb. deriváltját. A magasabbrendű deriváltakat zárójelbe tett arab számmal, esetleg római számmal, vagy a differenciahányadosra utaló formális törttel jelöljük:

másodrendű derivált:	$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = f^{\text{II}}(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$
harmadrendű derivált:	$f'''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = f^{\text{III}}(x_0) = \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}$
⋮	⋮
ötödrendű derivált:	$f^{(5)}(x_0) = f^{\text{V}}(x_0) = \frac{d^5 f(x_0)}{dx^5}$
⋮	⋮
n -edrendű derivált:	$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$

Fizikában idő szerinti deriváltat, illetve matematikában paraméter szerinti deriváltat szokás vessző helyett a függvény fölé tett ponttal is jelölni. Ha például az $x(t)$ függvény egy egyenes vonalú mozgás hely–idő függvénye, akkor az $x'(t) = \dot{x}(t)$ derivált függvény a mozgás sebesség–idő függvénye, és az $x''(t) = \ddot{x}(t)$ második derivált pedig a gyorsulás–idő függvénye.

(Pl.) A következő függvény mindenütt deriválható, de második deriváltja az origóban nem létezik.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad f'(x) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = ? \quad f''(x) = ?$$

Ha $x \neq 0$, alkalmazhatjuk a deriválási szabályokat:

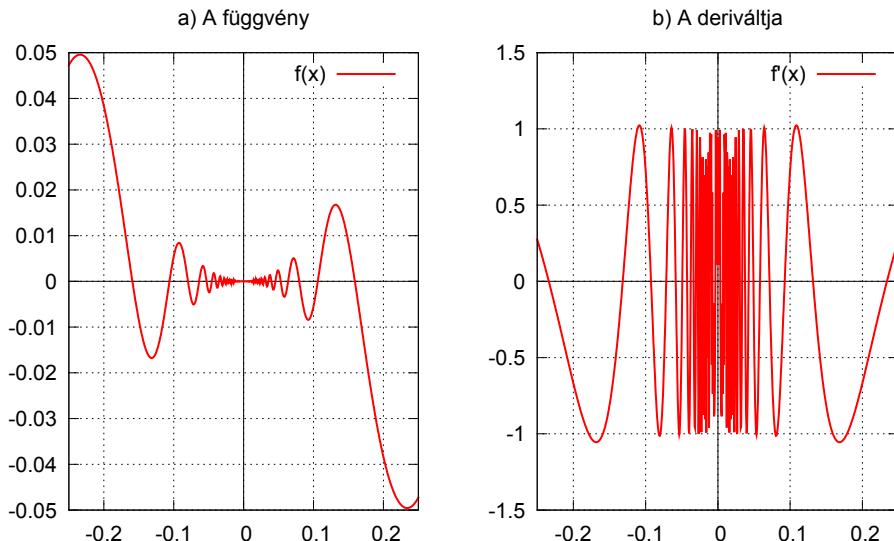
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Ha $x = 0$, a definícióval dolgozunk:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{h}}_{\text{korlátos}} = 0$$

Az $f(x)$ és az $f'(x)$ függvény grafikonját a 4.2. ábra mutatja.

4.2. ábra. Egy mindenütt deriválható függvény, melynek deriváltja az origóban szakad



Látható, hogy $f'(x)$ -nek (másodfajú) szakadása van az origóban, tehát $\nexists f''(0)$. Ha $x \neq 0$, $f''(x)$ a deriválási szabályok ismételt alkalmazásával egyszerűen kiszámolható.

Érdekességképpen megemlíjtük a következő tételt:

(T) *Intervallumon értelmezett deriváltfüggvénynek csak másodfajú szakadása lehet.*

A tételt nem bizonyítjuk.

4.1.4. Inverz függvény

App
⇒

(D) Az f függvény invertálható értelmezési tartományának egy $I \subset D_f$ részhalmazán, ha bármely két $x_1, x_2 \in I$ szám esetén az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőség teljesülése maga után vonja, hogy $x_1 = x_2$, tehát ha az f függvény az I halmazon injektív (kölcsonösen egyértelmű vagy 1-1 értelmű). Ekkor bármely $y \in R_f$ szám esetén legfeljebb egyetlen olyan $x \in I$ szám létezik, melyre $f(x) = y$. Ezesetben azt mondjuk, hogy x az y szám f -inverze általi képe; $x = f^{-1}(y)$.

Az inverz függvény jelölése összekeverhető a mínusz első hatvánnyal, ezért ez utóbbit inkább $1/f$ -el jelöljük. A számunkra fontos esetekben $I \subset D_f$ intervallum.

Az inverz függvény értelmezési tartománya, értékkészlete:

$$D_{f^{-1}} = f(I) = \{y \in R_f \mid \exists x \in I : f(x) = y\}, \quad R_{f^{-1}} = I \subset D_f.$$

A definícióból azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in I : \quad & f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x, \\ \forall y \in f(I) : \quad & f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = y. \end{aligned}$$

Igaz továbbá, hogy $(f^{-1})^{-1} = f|_I$, tehát egy függvény inverzének inverze megegyezik az eredeti függvény megszorításával arra a halmazra, amelyen az inverzet képeztük.

(T) Ha f szigorúan monoton az $I \subset D_f$ halmazon, akkor itt invertálható.

(B) Ha valamely $y \in R_f$ esetén létezne $x_1, x_2 \in I$, melyre $f(x_1) = f(x_2) = y$, és $x_1 \neq x_2$, akkor ellentmondásba kerülnénk a szigorú monotonitással. ■

Igaz továbbá, hogy f^{-1} pontosan akkor szigorúan monoton nővő, ill. csökkenő, ha f szigorúan monoton nővő, ill. csökkenő I -n.

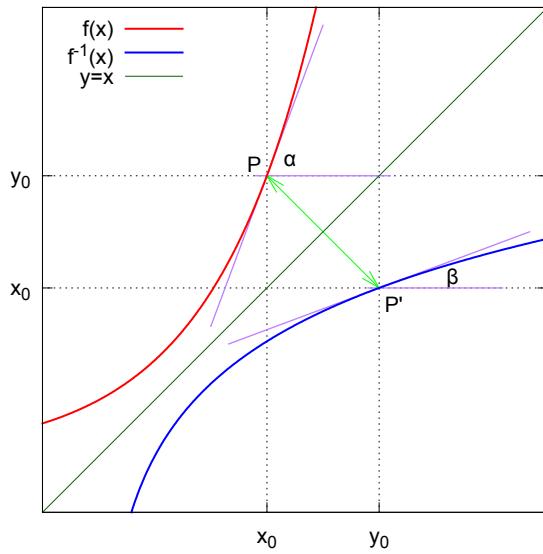
(Pl.) Az $f(x) = x^2$ függvény nem invertálható a teljes \mathbb{R} halmazon, hiszen $f(x) = f(-x)$. Azonban f szigorúan monoton az $I = [0, \infty)$ intervallumon, tehát itt invertálható, és $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

A következő téTEL geometriai kapcsolatot teremt f és f^{-1} grafikonja között.

(T) Ha az f függvény invertálható, akkor f^{-1} inverzének grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével kapható meg. (4.3. ábra)

(B) Ha a $P(x_0, y_0)$ pont az f függvény grafikonján van, akkor $y_0 = f(x_0)$, és így $x_0 = f^{-1}(y_0)$, tehát a $P'(y_0, x_0)$ pont az f^{-1} inverz függvény grafikonján helyezkedik el. P és P' egymás tükröképei az $y = x$ egyenesre nézve, ezzel az állítást beláttuk. ■

4.3. ábra. Az inverz függvény grafikonja az eredeti grafikonnak az $y = x$ egyenesre való tükröképe



Inverz függvény deriválása

- (T) Legyen f szigorúan monoton I-ben \Rightarrow invertálható
 f differenciálható I-ben \Rightarrow f folytonos I-ben
 és $f'(x) \neq 0$ I-ben.

A feltételek miatt belátható, hogy $f(I)$ is intervallum. Ekkor f^{-1} differenciálható az $f(I)$ tetszőleges belső pontjában (x_0) és

$$f'^{-1}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{f'^{-1}(f(x_0))}$$

- (B) Az összefüggés igazolásához azt kell észrevenünk, hogy a 4.3. ábrán jelölt α és β szögek pót szögek $(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2})$, így $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, és

$$f'^{-1}(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Innen y_0 helyett x_0 -t írva kapjuk a bizonyítandó állítást. ■

Az inverz függvény deriválási szabályának egy másik egyszerű bizonyítása az

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

azonosság deriválásával kapható meg. Az összefüggés bal oldalát a lánc szabály szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$f'(f^{-1}(x)) f^{-1}'(x) = 1,$$

ahonnan egyszerű átrendezéssel és $x = x_0$ helyettesítéssel adódik a bizonyítandó egyenlőség.

4.2. Elemi függvények

Gy

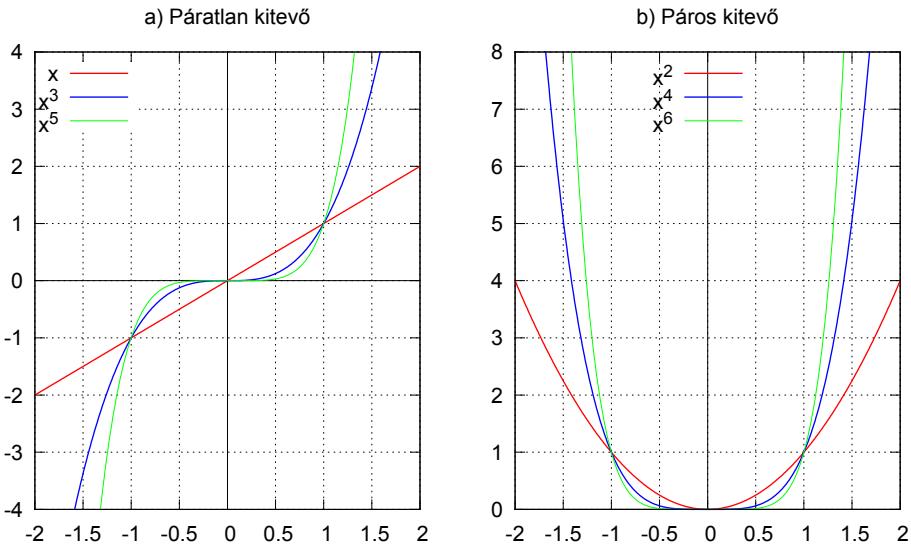
App

4.2.1. Hatványfüggvények

Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények

$$f(x) = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^+$$

4.4. ábra. Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények



A függvény mindenütt **folytonos**. (lásd: 4.4. ábra)

Mindenütt **deriválható** és

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Ugyanis

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(x+h) - x}{h}}_{=1} ((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \dots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1}) = \\
 &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ darab tag}} = n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

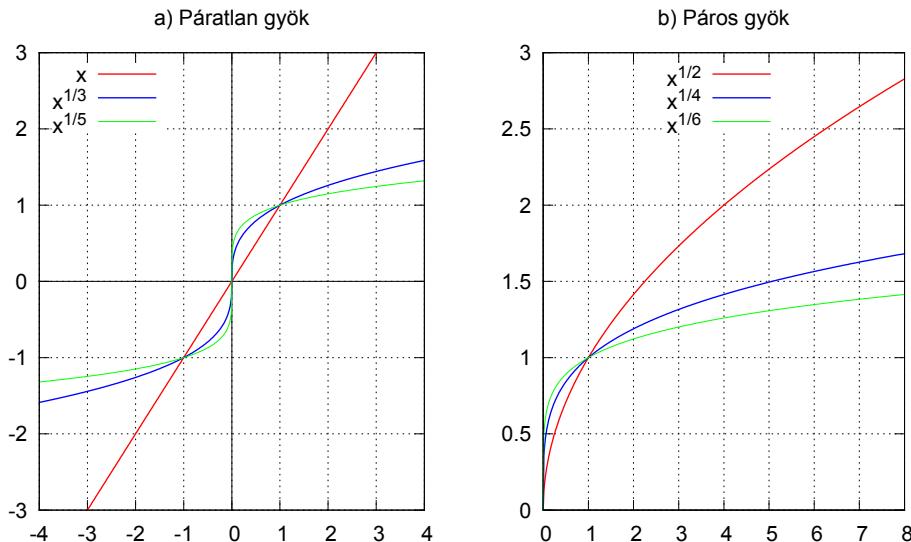
$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2} b + b + a^{n-3} b^2 + \dots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1})$$

Pozitív egész rendű gyökökfüggvények

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

A függvény az x^n függvény inverze (lásd: 4.5. ábra), páros n esetén csak $x \geq 0$ - ra. (Páros n esetén a teljes értelmezési tartományban nem invertálható a függvény, mert nem kölcsönösen egyértelmű a leképezés.)

4.5. ábra. Pozitív egész rendű gyökökfüggvények



$f'(x)$: az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}; \quad f^{-1}(u) = u^n; \quad f'(x) = \frac{1}{f^{-1}'(u)|_{u=f(x)}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{nu^{n-1}|_{u=\sqrt[n]{x}}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

Tehát $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

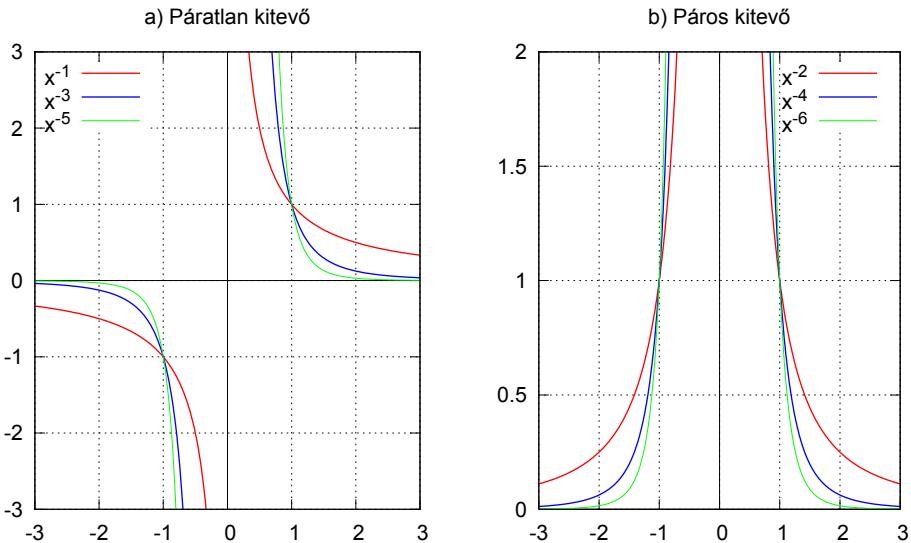
n páros: $x > 0$
 n páratlan: $x \neq 0$

$x = 0$ -ban $\not\exists f'(0)$ (n páratlan) és $\not\exists f'_+(0)$ (n páros).

Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \text{ (lásd: 4.6. ábra)}$$

4.6. ábra. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények



Deriváltja a reciprokfüggvény $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ deriválási szabálya alapján:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -\frac{n}{x^{2n}}x^{n-1} = -n x^{-n-1}$$

Racionális kitevőjű hatványfüggvények

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p} \quad (q > 0)$$

Az összetett függvény differenciálási szabályával belátjuk, hogy most is

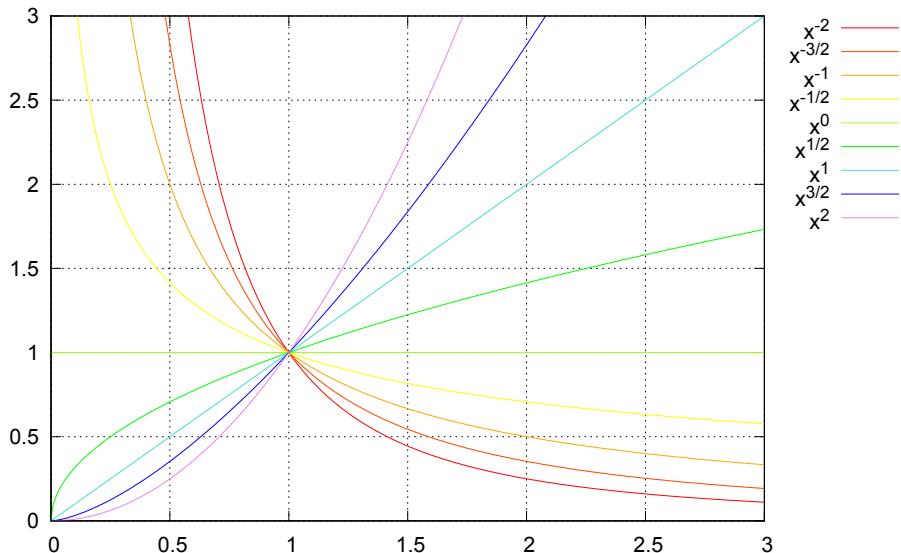
$$\left(x^{\frac{p}{q}} \right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Ugyanis

$$f'(x) = \frac{1}{q} (x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot p x^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-p+p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Valós kitevőjű hatványfüggvények

4.7. ábra. Tetszőleges valós kitevőjű hatványfüggvények



$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \text{ valós, } x > 0).$$

A függvény definíciója:

$$x^\alpha := e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

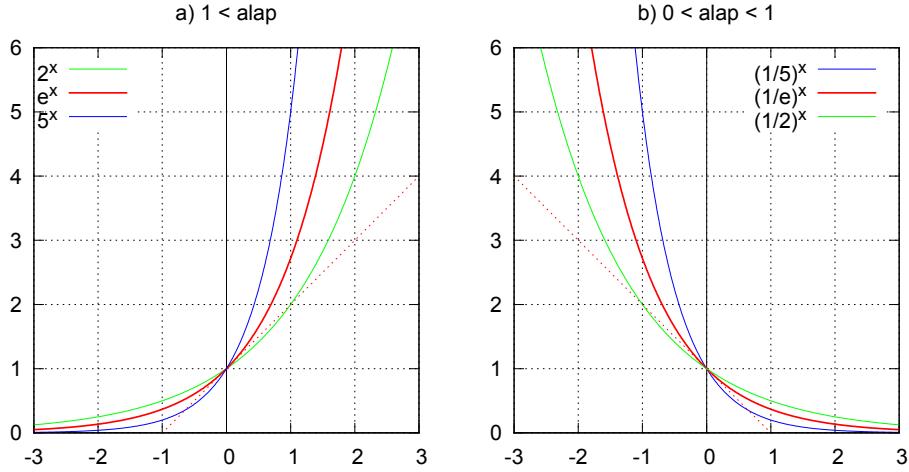
A függvény grafikonja különböző kitevők esetén a 4.7. ábrán látható.

Belátható, hogy most is

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4.2.2. Exponenciális függvények

4.8. ábra. Különböző alapokhoz tartozó exponenciális függvények



$$f(x) = a^x \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

Definiálása (vázlat):

$$\text{Ha } x \in \mathbb{Z}^+: \quad a^x := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{x \text{-szor}}$$

$f(x) = a^x$ -re igaz:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (4.1)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} \quad (4.2)$$

$$\text{Ha } x = 0: \quad a^0 := 1$$

$$\text{Ha } x \in \mathbb{Z}^-: \quad a^x := \frac{1}{a^{-x}}$$

$$\text{Ha } x = \frac{p}{q}; \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0: \quad a^x = a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$$

Ha x irrationális:

Felveszünk egy racionális értékeket felvevő pontsorozatot, mely az adott x -hez tart. Tehát

$$x_n \rightarrow x, \quad x_n \in \mathbb{Q}$$

$$a^{x_n} \rightarrow A \text{ esetén : } a^x := A$$

Belátható, hogy A értéke független x_n választásától, csak x -től függ.

Az így definiált függvény tulajdonságai:

$$D_{a^x} = \mathbb{R}, \quad R_{a^x} = (0, \infty),$$

$a > 1$ esetén (4.8.a ábra):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$$

és a függvény szigorúan monoton nő és alulról konvex. Egy speciális exponenciális függvény: e^x , melynek meredeksége az origóban 1.

$0 < a < 1$ esetén (4.8.b ábra):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty,$$

és a függvény szigorúan monoton csökken és alulról konvex.

Deriválhatóság:

$$(e^x)' = e^x$$

$x = 0$ - ra:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Nevezetes határérték, $\neg B$.

$x \neq 0$ - ra:

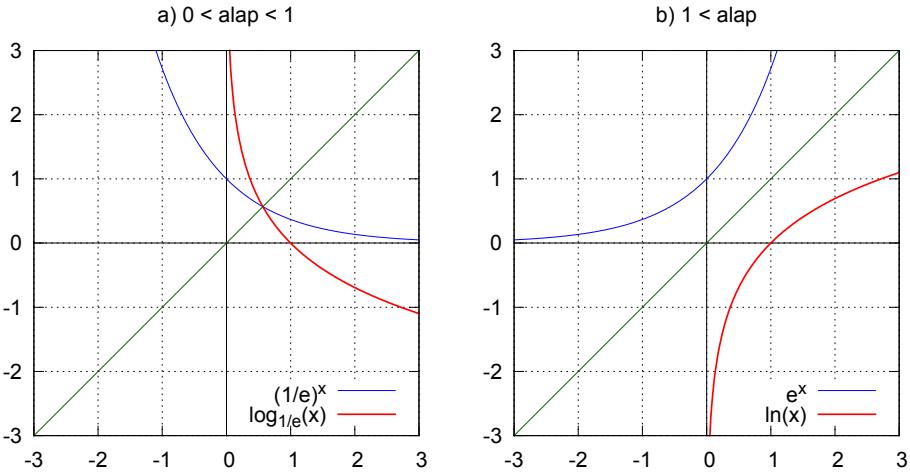
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{e^x}_{\downarrow} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\downarrow 1} = e^x$$

4.2.3. Logaritmusfüggvények

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, \quad a \neq 1) \quad (a^x \text{ inverze, 4.9. ábra})$$

Ha $a = e$: $\ln x$ (természetes alapú logaritmus).

4.9. ábra. A logaritmusfüggvények az exponenciális függvények inverzei



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$f(x) = \ln x, \quad f^{-1}(u) = e^u, \quad f^{-1}'(u) = e^u$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^u|_{u=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\text{Ugyanis } (a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\text{Ugyanis } (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}.$$

Pl. $f(x) = 10^{2x^2+1}, \quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = 10^{2x^2+1} \cdot \ln 10 \cdot (2x^2 + 1)' = \ln 10 \cdot 10^{2x^2+1} \cdot 4x$$

(Pl.) $f(x) = \ln|x|, \quad f'(x) = ?$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ezért

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \neq 0$$

$$(\text{Ugyanis} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \text{és} \quad (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}).$$

(Pl.) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^4 + 3}, \quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^4 + 3} \right)' = \frac{x^4 + 3}{x^2 + 1} \cdot \frac{2x(x^4 + 3) - (x^2 + 1)4x^3}{(x^4 + 3)^2}$$

Egyszerűbben is eljuthattunk volna erre az eredményre. Ugyanis most

$$f(x) \equiv \ln(x^2 + 1) - \ln(x^4 + 3).$$

(A két függvény értelmezési tartománya is azonos.)

Ennek felhasználásával

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} 2x - \frac{1}{x^4 + 3} 4x^3$$

4.2.4. Exponenciális hatványfüggvények

(D) Exponenciális hatványfüggvény definíciója:

$$(f(x))^{g(x)} := e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Értelmezett, ha f és g értelmezett és $f(x) > 0$.

Deriválása ezen alak segítségével.

(Pl.)

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

(Pl.)

$$\begin{aligned} \left((1+x^2)^{\sin 2x} \right)' &= \left(e^{\sin 2x \cdot \ln(1+x^2)} \right)' = e^{\sin 2x \cdot \ln(1+x^2)} \cdot (\sin 2x \cdot \ln(1+x^2))' = \\ &= (1+x^2)^{\sin 2x} \left(\cos 2x \cdot 2 \cdot \ln(1+x^2) + \sin 2x \frac{2x}{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

(M) A derivált meghatározásához felhasználhatjuk a **logaritmikus deriválást** is:

$$h(x) := (f(x))^{g(x)}$$

Mindkét oldalra alkalmazzuk az \ln függvényt:

$$\ln h(x) = \ln(f(x))^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$\frac{1}{h(x)} h'(x) = (g(x) \cdot \ln f(x))' \implies h'(x) = h(x) \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))'$$

Természetesen ugyanahhoz az eredményhez vezet ez a módszer is, mint az előző.

4.2.5. Trigonometrikus függvények és inverzeik (ciklometrikus vagy arcus függvények)

App

A szinuszfüggvény és inverze

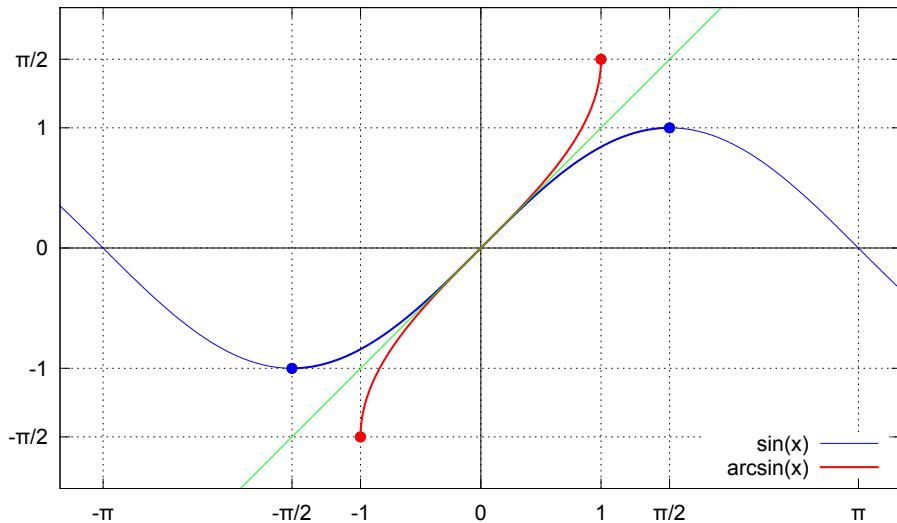
$$f(x) = \sin x$$

Mindenütt folytonos. (4.10 ábra)

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} = \cos x \end{aligned}$$

Ugyanis:

4.10. ábra. A $\sin(x)$ és inverze, az $\arcsin(x)$ függvény

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \frac{h}{2} = -1 \cdot 0 = 0$$

A $\sin(x)$ függvény a teljes értelmezési tartományban nem invertálható, mert végtelen sokrétű. Ezért szűkítjük az értelmezési tartományt:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-1, 1] \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists f^{-1}(x)$$

(D) $f^{-1}(x) = \boxed{\arcsin x}$:

Jelenti azt a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -be eső radiánban mért szöget, melynek szinusza x (4.10. ábra).

Tulajdonságai:

$$D_{\arcsin x} = [-1, 1], \quad R_{\arcsin x} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Szigorúan monoton nő, páratlan.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad |x| < 1$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad f(x) = \sin x, \quad f^{-1}'(x) = \left. \frac{1}{f'(u)} \right|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos u} \Big|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \Big|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

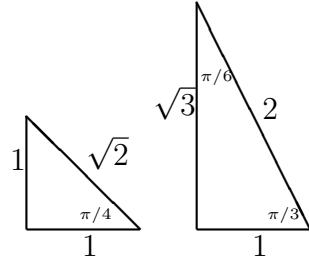
Felhasználtuk, hogy

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \implies \cos u = +\sqrt{1 - \sin^2 u} \quad \text{és} \quad \sin \arcsin x = x$$

(A megadott intervallumon $\cos u$ pozitív.)

A nevezetes szögek szögfüggvényei az alábbi két jól ismert háromszög segítségével számíthatók ki:

$$\begin{aligned}\arcsin 0 &= 0 \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2} \\ \arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\pi}{4} \\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\pi}{6} \\ \sin \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \arcsin \sin \frac{2\pi}{3} &= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \left(= \pi - \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$



Néhány példa:

Pl.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = ?$$

1. megoldás:

Helyettesítéssel oldjuk meg:

$$u := \arcsin x \implies x = \sin u$$

Ha $x \rightarrow 0$, akkor $u \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = 1$$

2. megoldás:

Mivel az $\arcsin x$ függvény deriváltját az inverzfüggvény deriválási szabályával vezettük le, a derivált definícióját felhasználhatjuk a megoldáshoz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - 0}{x - 0} = (\arcsin x)'|_{x=0} = \left. \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right|_{x=0} = 1$$

(Pl.)

$$f(x) = \pi + 2 \arcsin(x^2 - 1), \quad g(x) = \arcsin \frac{1}{x^2}$$

- a) Határozza meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!
- b) Írja fel a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

Megoldás.

a) f értelmezési tartománya:

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \implies \underbrace{0 \leq x^2}_{\forall x\text{-re igaz}} \leq 2 \implies |x| \leq \sqrt{2}$$

Tehát $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

f értékkészlete:

$$\text{Mivel } x^2 - 1 \in [-1, 1] \implies \arcsin(x^2 - 1) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\implies 2 \arcsin(x^2 - 1) \in [-\pi, \pi] \implies R_f = [0, 2\pi]$$

g értelmezési tartománya:

$$\underbrace{0 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1}_{\forall x\text{-re igaz}} \implies x^2 \geq 1 \implies |x| \geq 1$$

Tehát $D_g = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

g értékkészlete:

$$\text{Mivel } \frac{1}{x^2} \in (0, 1] \implies \arcsin \frac{1}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

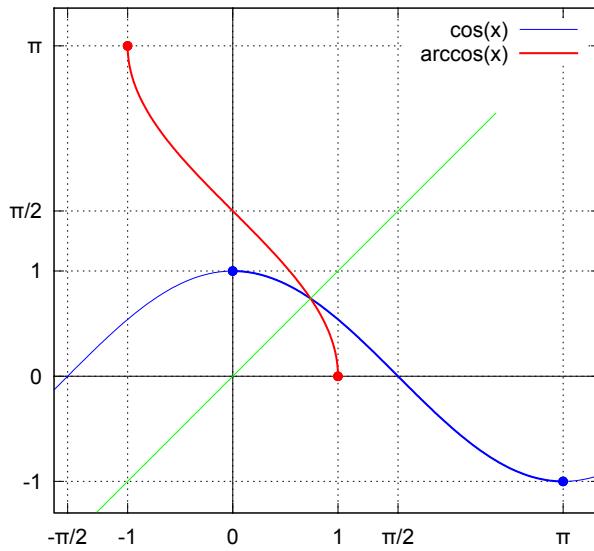
$$\text{Így } R_f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

b) $f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \cdot 2x, \quad |x| < \sqrt{2}$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}} \cdot \frac{-2}{x^3}, \quad |x| > 1$$

A koszinuszfüggvény és inverze

4.11. ábra. A $\cos(x)$ és inverze, az $\arccos(x)$ függvény



$$f(x) = \cos x$$

Mindenütt folytonos. (4.11. ábra)

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} = -\sin x \end{aligned}$$

Invertálás:

A $\cos(x)$ függvény a teljes értelmezési tartományban nem invertálható, mert végtelen sokrétű. Ezért szűkítjük az értelmezési tartományt:

$f : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$ szigorúan monoton $\implies \exists f^{-1}(x)$

(D) $f^{-1}(x) = \boxed{\arccos x}$

Jelenti azt a $[0, \pi]$ -be eső radiánban mért szöget, melynek koszinusra x . (4.11. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\arccos x} = [-1, 1], \quad R_{\arccos x} = [0, \pi]$$

Szigorúan monoton csökken.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$$

Bizonyítása az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \arccos x, \quad f(u) = \cos u, , \quad f'(u) = -\sin u \\ f^{-1}'(x) &= \left. \frac{1}{f'(u)} \right|_{u=f^{-1}(x)} \end{aligned}$$

Ennek alapján:

$$(\arccos x)' = \left. \frac{1}{-\sin u} \right|_{u=\arccos x} = \left. \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 u}} \right|_{u=\arccos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pl.

$$f(x) = 5\pi - 2 \arccos(4x - 1)$$

- a) $D_f = ?$, $R_f = ?$
- b) Létezik-e inverze f -nek?
Ha igen, $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$
- c) Írja fel a függvény $x_0 = \frac{1}{8}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás.

a) ÉT.: $-1 \leq 4x - 1 \leq 1 \implies 0 \leq 4x \leq 2 \implies 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Tehát $D_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \text{Mivel } (4x - 1) &\in [-1, 1] \implies \arccos(4x - 1) \in [0, \pi] \\ \implies 2 \arccos(4x - 1) &\in [0, 2\pi] \implies R_f = [3\pi, 5\pi] \end{aligned}$$

b) f szigorúan monoton nő D_f -en:

Ugyanis, ha felvesszük az értelmezési tartományban két pontot:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2} &\implies 4x_1 - 1 < 4x_2 - 1 \\ \implies \arccos(4x_1 - 1) &> \arccos(4x_2 - 1) \\ \implies -2 \arccos(4x_1 - 1) &< -2 \arccos(4x_2 - 1) \\ \implies f(x_1) = 5\pi - 2 \arccos(4x_1 - 1) &< 5\pi - 2 \arccos(4x_2 - 1) = f(x_2) \end{aligned}$$

Mivel a függvény szigorúan monoton nő D_f -en, ezért $\exists f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(x)$ meghatározása :

$$\begin{aligned} y &= 5\pi - 2 \arccos(4x - 1) \\ \implies \arccos(4x - 1) &= \frac{5\pi - y}{2} \implies 4x - 1 = \cos \frac{5\pi - y}{2} \\ \implies x &= \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{5\pi - y}{2} \right) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{5\pi - x}{2} \right) \\ D_{f^{-1}} = R_f &= [3\pi, 5\pi] \quad \text{és} \quad R_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

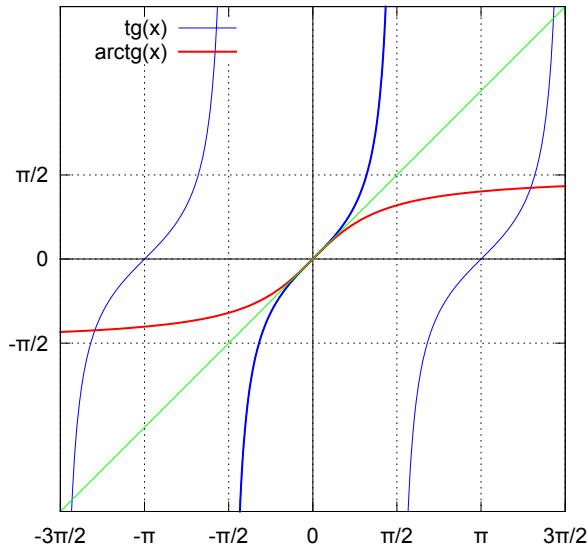
$$\text{c)} \quad f'(x) = -2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - (4x - 1)^2}} \cdot 4$$

$$(f'(x) = \frac{8}{\sqrt{\dots}} > 0 :$$

Hamarosan látni fogjuk, hogy a szigorúan monoton növekedés ebből is következik.)

$$y_e = f\left(\frac{1}{8}\right) + f'\left(\frac{1}{8}\right)\left(x - \frac{1}{8}\right) = \frac{11\pi}{3} + \frac{16}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{8}\right), \quad \text{mert}$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 5\pi - 2 \underbrace{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{11\pi}{3} \quad \text{és} \quad f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

4.12. ábra. A $\operatorname{tg}(x)$ és inverze, az $\operatorname{arctg}(x)$ függvény

A tangens függvény és inverze

$$f(x) = \operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén folytonos. (4.12. ábra)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

A hárnyadosfüggvény deriválási szabályát és a függvény definícióját használjuk fel.

$$\left(\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Invertálás:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \mapsto (-\infty, \infty) \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists f^{-1}(x)$$

(D) $f^{-1}(x) = \boxed{\arctg x}$:

Jelenti azt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -be eső radiánban mért szöget, melynek tangense x . (4.12. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\arctg x} = \mathbb{R}, \quad R_{\arctg x} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Páratlan függvény: $\arctg(-x) = -\arctg x$

$$\boxed{(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával bizonyítunk:

$$f^{-1}(x) = \arctg x, \quad f(u) = \tg u, \quad f'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$f^{-1}'(x) = \left. \frac{1}{f'(u)} \right|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\arctg x)' = \left. \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 u}} \right|_{u=\arctg x} = \left. \frac{1}{1+\tg^2 u} \right|_{u=\arctg x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \mid : \cos^2 u \implies 1 + \tg^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

Pl.

$$f(x) = \arctg \frac{2-x}{2+x}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} f(x) = ?$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq -2$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = ?$

Létezik-e $f'(-2)$?

Megoldás.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow -2+0} \arctg \left(\underbrace{\frac{2-x}{2+x}}_{\substack{\overset{-4}{\uparrow} \\ \underset{0+}{\downarrow}}} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} \arctg \underbrace{\frac{2-x}{2+x}}_{\substack{\rightarrow +\infty}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Mivel} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{2}{x}+1} = -1, \quad \text{ezért}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

b) Ha $x \neq -2$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} \quad \left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} \quad \frac{-1 \cdot (2+x) - (2-x) \cdot 1}{(2+x)^2} =$$

$$= \frac{-4}{(2+x)^2 + (2-x)^2}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = -\frac{1}{4}$$

$f'(-2) \notin$, mert az f függvény nem folytonos $x = -2$ -ben.

Így most láttunk arra példát, hogy hiába létezik az f' függvénynek határértéke -2 -ben, mégsem létezik $f'(-2)$.

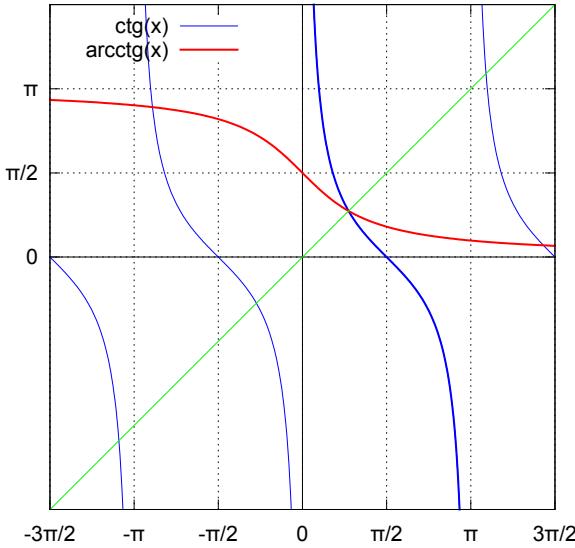
A kotangens függvény és inverze

$$f(x) = \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

$x \neq k\pi$ esetén folytonos. (4.13. ábra)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi$$

Most is a hárnyadosfüggvény deriválási szabályát és a függvény definícióját használjuk fel.

4.13. ábra. A $\operatorname{ctg}(x)$ és inverze, az $\operatorname{arcctg}(x)$ függvény

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi \end{aligned}$$

Invertálás:

$$f : (0, \pi) \mapsto (-\infty, \infty) \text{ szigorúan monoton} \implies \exists f^{-1}(x)$$

D $f^{-1}(x) = \boxed{\operatorname{arcctg} x} :$

Jelenti azt a $(0, \pi)$ -be eső radiánban mért szöget, melynek kotangense x . (4.13. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\operatorname{arcctg} x} = \mathbb{R},$$

$$R_{\operatorname{arcctg} x} = (0, \pi)$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával bizonyítunk:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \operatorname{arcctg} x, \quad f(u) = \operatorname{ctg} u, \quad f'(u) = -\frac{1}{\sin^2 u} \\ f^{-1}'(x) &= \left. \frac{1}{f'(u)} \right|_{u=f^{-1}(x)} \end{aligned}$$

Ennek alapján:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 u}} \Big|_{u=\operatorname{arcctg} x} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 u} \Big|_{u=\operatorname{arcctg} x} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \mid : \sin^2 u \implies 1 + \operatorname{ctg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}$$

(M) Vigyázat!

$$\frac{\arcsin x}{\arccos x} \neq \operatorname{arctg} x ; \quad \arcsin^2 x + \arccos^2 x \neq 1 \quad \text{stb.}$$

Ellenőrzés nélkül ne próbálják a trigonometrikus azonosságokat általánosítani az arkusz függvényekre!

(Pl.) Fejezzük ki $\operatorname{arctg} x$ segítségével $\arcsin x$, $\arccos x$ és $\operatorname{arcctg} x$ értékét!
(A programozási nyelvekben beépített függvényként általában csak az $\operatorname{arctg} x$ szerepel.)

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \arcsin x &= \frac{\sin \arcsin x}{\cos \arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \implies y &= \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

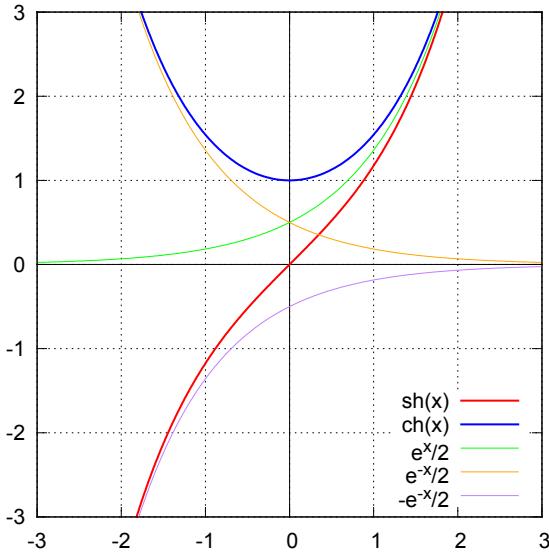
Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} ; \quad \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

4.2.6. Hiperbolikus függvények és inverzeik

App

A szinusz hiperbolikusz és a koszinusz hiperbolikusz függvény

4.14. ábra. Az $\operatorname{sh} x$ és $\operatorname{ch} x$ függvény

(D)

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{lánccörbe})$$

(Szinusz hiperbolikusz, illetve koszinusz hiperbolikusz függvények, 4.14. ábra.)

Tulajdonságok:

$\operatorname{sh} x$ páratlan, $\operatorname{ch} x$ páros.

Ugyanis

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \operatorname{ch} x\end{aligned}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x ; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

Ugyanis

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

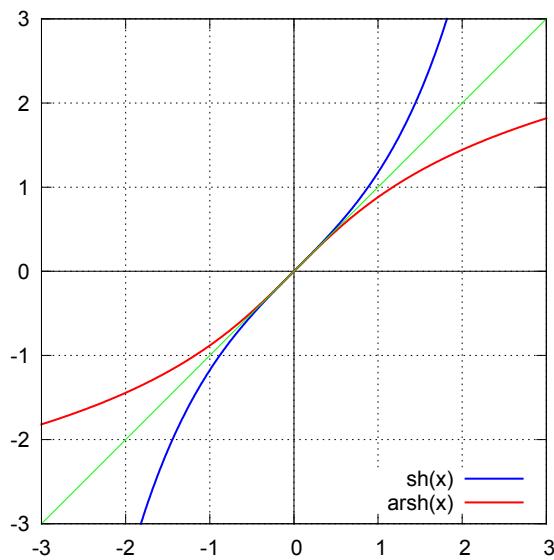
$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

Azonosságok:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ \operatorname{ch}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}\end{aligned}$$

Az area szinusz hiperbolikusz és az area koszinusz hiperbolikusz függvény

4.15. ábra. A $\operatorname{sh} x$ és inverze, az $\operatorname{arsh} x$ függvény



(D) $f(x) = \operatorname{arsh} x$: az $\operatorname{sh} x$ függvény inverze (4.15. ábra)

Az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény szigorúan monoton a teljes értelmezési tartományban, ezért \exists az inverze, melynek jelölése: $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$ (area szinusz hiperbolikusz).

Érdekesség: a függvény kifejezhető az \ln függvény segítségével az alábbi módon:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Ugyanis:

$$y = \operatorname{arsh} x \implies \operatorname{sh} y = x \implies \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \implies (e^y)^2 - 2x e^y - 1 = 0$$

Ez e^y -ra másodfokú egyenlet.

$$\implies e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

A másik gyök negatív, így nem jöhét szóba e^y értékére, mely minden pozitív.

$$\implies y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$(\operatorname{arsh} x)' = \left. \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right|_{u=\operatorname{arsh} x} = \left. \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}} \right|_{u=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad \text{miatt} \quad \operatorname{ch} u = +\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \quad (\operatorname{ch} u > 0).$$

D (D) $f(x) = \operatorname{arch} x$: a $\operatorname{ch} x$ függvény inverze $x \geq 0$ -ra. (4.16. ábra)

$f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény a $[0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton $\implies \exists f^{-1}(x)$ ezen az intervallumon, melyet $\operatorname{arch} x$ módon jelölünk és area koszinusz hiperbolikusz (röviden: area ch) függvénynek nevezünk.

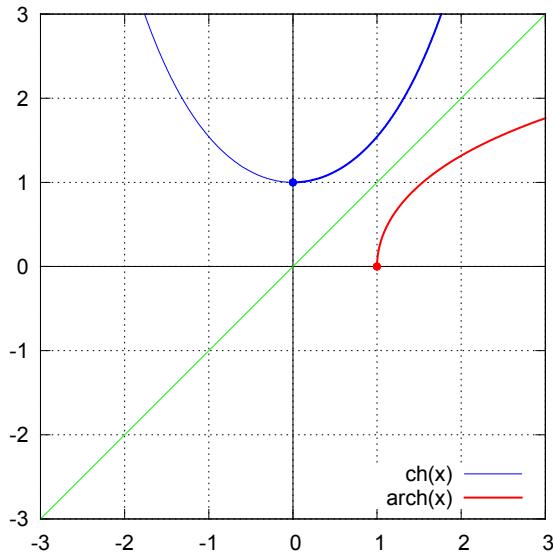
Ez a függvény is megadható az \ln függvény segítségével:

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\neg B)$$

Deriválhatóság:

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x > 1$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával dolgozunk:

4.16. ábra. A $\operatorname{ch} x$ és inverze, az $\operatorname{arch} x$ függvény

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh} u} \Big|_{u=\operatorname{arch} x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} \Big|_{u=\operatorname{arch} x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad \text{miatt} \quad \operatorname{sh} u = +\sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 u}$$

(A vizsgált intervallumon $\operatorname{sh} u > 0$).

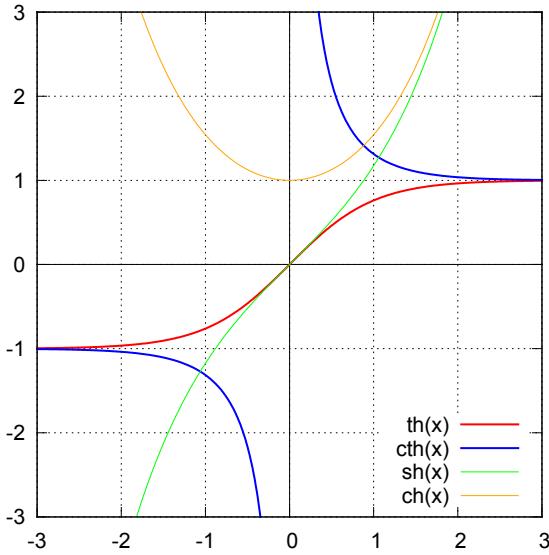
A tangens hiperbolikusz, kotangens hiperbolikusz függvény és inverzük

$\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ és inverzeik $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{arcth} x$ függvények

(tangens hiperbolikusz, kotangens hiperbolikusz, area tangens hiperbolikusz és area kotangens hiperbolikusz)

⑩ $\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (páratlan függvény, 4.17. ábra)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^x}{e^x}}_{=1} \underbrace{\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}_{\stackrel{0}{\downarrow}} \stackrel{0}{\uparrow} = 1$$

4.17. ábra. A $\operatorname{th} x$ és a $\operatorname{cth} x$ függvény

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

D) $\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \neq 0 \quad (\text{páratlan, 4.17. ábra})$

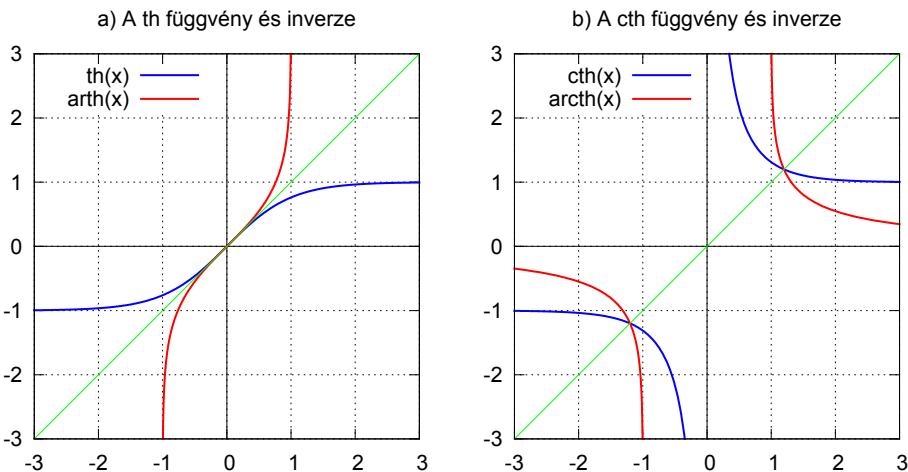
$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Mindkettő a teljes értelmezési tartományban invertálható, mert a leképezés kölcsönösen egyértelmű (4.18. ábra).

Belátható, hogy

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$$

4.18. ábra. A $\text{th}(x)$, $\text{arth}(x)$, valamint a $\text{cth}(x)$ és az $\text{arcth}(x)$ függvények

Deriválttáblázat

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$(-\infty, +\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0, \pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(0, +\infty)$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, +\infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

4.2.7. Néhány összetett példa az előző anyagrészhez

(Pl.)

$$f(x) = |(x^2 + 1)(x^3 - x^2)| \quad f'(x) = ?$$

Megoldás.

$$f(x) = (x^2 + 1)x^2|x - 1| = (x^4 + x^2)|x - 1| = \begin{cases} (x^4 + x^2)(x - 1), & \text{ha } x \geq 1 \\ -(x^4 + x^2)(x - 1), & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$g(x) := (x^4 + x^2)(x - 1)$: mindenütt deriválható.

A szorzatfüggvény deriválási szabályával:

$$g'(x) = (4x^3 + 2x)(x - 1) + (x^4 + x^2) \cdot 1$$

Ennek felhasználásával:

$$f(x) = \begin{cases} g'(x), & \text{ha } x > 1 \\ -g'(x), & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$x = 1$ -ben a definícióval dolgozunk:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^2)|x - 1| - 0}{x - 1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \underbrace{\frac{(x^4 + x^2)(x - 1)}{x - 1}}_{=x^4+x^2} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \underbrace{\frac{(x^4 + x^2)(-(x - 1))}{x - 1}}_{=-(x^4+x^2)} = -2 \neq f'_+(1)$$

$$\implies f'(1) \nexists$$

(Pl.)

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ch} 5x)^2, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{\sin 4x}{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Hol folytonos és hol differenciálható az f függvény?

$$f'(x) = ? \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$$

Megoldás.

Ha $x \neq 0$, akkor f folytonos, mert folytonos függvények összetétele.

Vizsgálandó az $x = 0$ pontbeli viselkedés:

$$f(0 - 0) = f(0) = (\operatorname{ch} 0)^2 = 1 \quad \text{és}$$

$$f(0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Mivel $f(0 - 0) \neq f(0 + 0)$, tehát $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nem létezik, így a függvény nem folytonos $x = 0$ -ban, ezért nem is deriválható itt, tehát $f'(0)$ nem létezik.

$x \neq 0$ -ra a függvény deriválható és

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot (\operatorname{ch} 5x) \cdot (\operatorname{sh} 5x) \cdot 5, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{(4 \cdot \cos 4x) \cdot x - (\sin 4x) \cdot 1}{x^2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\sin 4x}_{\text{korlátos}} = 0$$

(Pl.)

$$g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ h(x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Megválasztható-e α és β értéke úgy, hogy f mindenütt differenciálható legyen?

Megoldás.

Mivel g , h mindenütt deriválható, ezért $x \neq 0$ esetén f is deriválható.

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = 2e^{2x}, & \text{ha } x > 0 \\ h'(x) = 4x + \alpha, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Így csak $x = 0$ -át kell vizsgálni.

A differenciálhatóság szükséges feltétele a folytonosság. Ehhez teljesülnie kell, hogy $f(0+0) = f(0) = g(0) = 1$, megegyezzen $f(0-0) = h(0) = \beta$ értékével, tehát $\underline{\beta = 1}$.

Mivel

$$\begin{aligned} f'_+ 0 &= g'(0) = 2, \\ f'_- 0 &= h'(0) = \alpha, \end{aligned}$$

Így a deriválhatósághoz $\alpha = 2$ választás kell.

(Pl.) $f(x) = \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

1. $D_f = ?$ $R_f = ?$
2. Írja fel az $x_0 = \frac{4}{5}$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!
3. Mutassa meg, hogy f -nek létezik az inverze és határozza meg!
 $(f^{-1}(x) = ?)$

Megoldás.

$$\begin{aligned} 1. \quad 0 \leq \frac{1}{x} - 1 \leq 1 &\implies 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq x \leq 1 : D_f = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \text{Itt } 0 \leq \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \leq \frac{\pi}{2} &\implies \frac{\pi}{2} \leq \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \leq \pi : R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ x_0 = \frac{4}{5}; \quad f\left(\frac{4}{5}\right) &= \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}; \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{-5^2}{4^2} = \frac{-25}{8\sqrt{3}}$$

$$y_0 = f\left(\frac{4}{5}\right) + f'\left(\frac{4}{5}\right) \left(x - \frac{4}{5}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{25}{8\sqrt{3}} \left(x - \frac{4}{5}\right)$$

3. $\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 1$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\implies f$ szigorúan monoton csökken $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en
(Vagy:

$f' < 0 D_f = I$ -n $\implies f$ szigorúan monoton csökken $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en)

$$\begin{aligned} y = \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &\implies \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \pi - y \\ \implies \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &= \cos(\pi - y) \implies \frac{1}{x} - 1 = \cos^2(\pi - y) \\ \implies \frac{1}{x} &= 1 + \cos^2(\pi - y) \implies x = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - y)} \quad (x \leftrightarrow y) \\ f^{-1}(x) &= \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - x)} = \frac{1}{1 + \cos^2 x} \\ D_{f^{-1}} = R_f &= \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] ; \quad R_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \end{aligned}$$

Pl. Legyen

$$f(x) = -\frac{\pi x}{3} + \arcsin\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in (2, \infty)$$

1. $f'(x) = ?$
2. Indokolja meg, hogy a függvénynek létezik az inverze! Határozza meg az inverz függvény értelmezési tartományát!
Ellenőrizze, hogy f^{-1} grafikonja átmegy a $\left(-\frac{7\pi}{6}, 4\right)$ ponton!
3. Írja fel az inverz függvénynek ezen a ponton áthaladó érintő egyenleteit!

Megoldás.

1. $f'(x) = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-2}{x^2} = -\frac{\pi}{3} - \frac{2}{x\sqrt{x^2 - 4}}$, ha $x > 2$.
2. $2 < x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\implies f$ szigorúan monoton csökken $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en
(Vagy:

$x > 2$ -re $f'(x) < 0 \implies f$ szigorúan monoton csökken \implies invertálható)

$$x \in (2, \infty)\text{-re } \frac{2}{x} \in (0, 1) \implies \arcsin \frac{2}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\implies R_f = \left(-\infty, \frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\infty, \frac{-\pi}{6}\right) = D_{f^{-1}}$$

$$\text{Mivel } f(4) = -\frac{4\pi}{3} + \arcsin \frac{1}{2} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} \implies f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 4$$

3. Az érintő egyenes egyenlete:

$$f^{-1}'\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{4\sqrt{4^2 - 4}}} = -\frac{12}{4\pi + \sqrt{3}}$$

$$y = \underbrace{f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}_{=4} + f^{-1}'\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \left(x - \left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 4 + \frac{-12}{4\pi + \sqrt{3}} \left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

(Pl.) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\arcsin(2x-5)}{3}\right)$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Mutassa meg, hogy a teljes értelmezési tartományban létezik az inverze, és írja fel az inverz függvényt!

Megoldás.

$D_f = \{x : |2x-5| \leq 1\} = [2, 3]$, mert akkor $\left|\frac{\arcsin(2x-5)}{3}\right| \leq \frac{\pi}{6}$ miatt tg is értelmezett.

$$D_f\text{-en } \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \text{ értékkészlete } \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \implies R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Mivel $2x-5$, \arcsin és tg is szigorúan monoton növő, ezért f is az D_f -en $\implies D_f$ -en $\exists f^{-1}$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} \underbrace{\frac{\arcsin(2x-5)}{3}}_{\in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \implies \operatorname{arctg} y &= \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \implies 2x-5 &= \\ &\sin(3 \operatorname{arctg} y) \\ &\implies x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(3 \operatorname{arctg} y) \end{aligned}$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(3 \operatorname{arctg} x); \quad D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]; \quad R_{f^{-1}} = D_f = [2, 3]$$

Pl. $f(x) = \sqrt[3]{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x \right)}$

Adja meg az $x = 5$ pontot tartalmazó legbővebb intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és írja fel itt az inverz függvényt!

$$D_{f^{-1}} = ? \quad R_{f^{-1}} = ?$$

Megoldás.

$$x \in (4, 6) \text{ esetén } \frac{\pi}{4}x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right) \implies \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}x \in (0, \infty) = D_{\ln}$$

Tehát $f : (4, 6) \rightarrow (-\infty, \infty)$ egy-egyértelmű, mert az összetételben szereplő függvények mindegyike szigorúan monoton nő az érintett intervallumon $\implies f$ szigorúan monoton nő $\implies \exists f^{-1}$.

Az inverz:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}x \right)} \implies y^3 = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}x \right) \implies e^{(y^3)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4}x \right) = \operatorname{tg} \left(\underbrace{\frac{\pi}{4}x - \pi}_{\in (0, \frac{\pi}{2})} \right) \\ &\implies \operatorname{arctg} e^{(y^3)} = \frac{\pi}{4}x - \pi \implies x = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(y^3)} + 4 \end{aligned}$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(x^3)} + 4; \quad D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty); \quad R_{f^{-1}} = (4, 6)$$

•••

4.3. A differenciálszámítás középértéktételei

4.3.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére

(Differenciálható függvényre, az értelmezési tartomány belső pontjában)

D f -nek lokális maximuma (minimuma) van az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában, ha $\exists K_{x_0, \delta} : f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), ha $x \in K_{x_0, \delta}$.

T Ha f az x_0 helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. ($K_{x_0, \delta} \subset D_f$)

B Pl. lokális maximumra (4.19.a ábra):

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\equiv} = \underbrace{f'_-(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} = f'(x_0) \geq 0$$

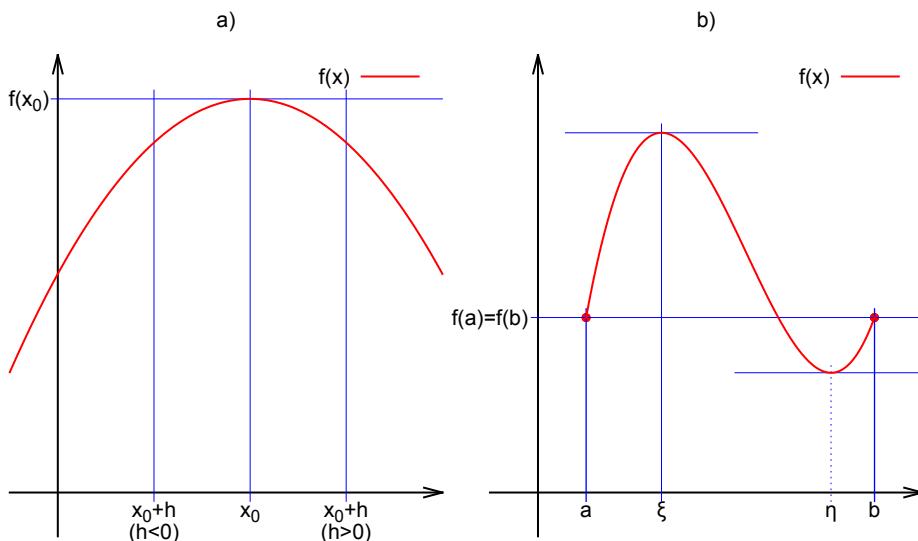
$$\lim_{h \rightarrow 0+} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\stackrel{-}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

■

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad (\text{vízszintes érintő})$$

(A $\stackrel{-}{=}$, illetve a $\stackrel{-}{+}$ szimbólumokban a + és – jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

4.19. ábra. a) Deriválható függvény lokális szélsőértékének szükséges feltétele a vízszintes érintő b) Magyarázó ábra a Rolle-tételhez



4.3.2. A differenciál számítás középértéktételei

(T) Rolle-tétel: (4.19.b ábra)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

(B) Weierstrass II. tétel értelmében f -nek van minimuma és maximuma. Ha mindenket tőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $f(x) \equiv \text{konst.}$ és így $\forall \xi \in (a, b)$ -re $f'(\xi) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(\xi) = 0$ (ξ a szélsőértékhely).

Megjegyezzük, hogy ξ nem mindenkor egyértelmű, a 4.19.b ábrán például $f'(\xi) = f'(\eta) = 0$.

(T) Lagrange-féle középértéktétel:

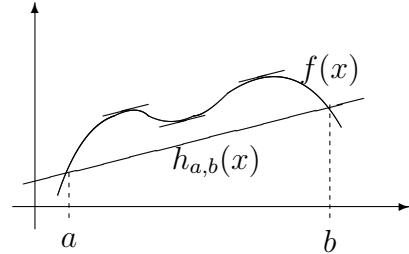
Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, akkor $\exists \xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(B)

$$h_{a,b}(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = h(x)$$

$$g(x) := f(x) - h(x) \quad g(a) = g(b) = 0; \\ g \text{ folytonos } [a, b]\text{-n, differenciálható } (a, b)\text{-n}$$



$$\xrightarrow{\text{Rolle-t.}} \exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = f'(\xi) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{h'(\xi)} = 0$$

(T) Cauchy-féle középértéktétel:

Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$, akkor $\exists \xi \in (a, b)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(B)

$$h(x) := (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) = -f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

h folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b) \xrightarrow{\text{Rolle-t.}} \exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0, \text{ vagyis}$$

$$(f(b) - f(a)) g'(\xi) - (g(b) - g(a)) f'(\xi) = 0 \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy $g(b) - g(a) \neq 0$, ellenkező esetben $g(a) = g(b)$ miatt g -re alkalmazható lenne a Rolle-tétel és akkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre $g'(\xi) = 0$ lenne. Így rendezéssel megkapjuk az állítást.

(M) A Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete ($g(x) = x$), a Rolle-tétel pedig a Lagrange speciális esete.

(T) Ha f folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor

$$f(x) \equiv c \quad x \in [a, b]\text{-re}$$

(B) A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\forall [x_1, x_2] \subset [a, b]$ -re $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad \xi \in (a, b)$$

De mivel $f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2$ -re $\implies f(x) \equiv \text{konst.}$ ■

(T) Az integrálszámítás I. alaptétele:

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és

$$f'(x) = g'(x), \quad \text{ha } x \in (a, b),$$

akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Tehát csak egy állandóban különböznek.

(B) $h(x) := f(x) - g(x)$ -re kell alkalmazni az előző tételt.

4.3.3. Feladatok

1. Alkalmazható-e az

$$f(x) = x \cdot \sin \sqrt[3]{x^2}$$

függvényre a Lagrange-féle középértéktétel a $[-1, 1]$ intervallumon?

2. Alkalmazható-e a Rolle-tétel az

$$f(x) = |\arctg x|$$

függvényre a $[-1, 1]$ intervallumon?

3. Alkalmazható-e f -re a Lagrange-féle középértéktétel?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 0$$

Ha igen, $\xi = ?$

4. Határozza meg a deriválás elvégzése nélkül a

$$p(x) = (x - 2,1)(x - 2,3)(x - 2,5)(x - 2,7)$$

polinom deriváltjának gyökeit 0,1-nél kisebb hibával!

5. Bizonyítsa be, hogy

a) $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$.

b) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tg b - \tg a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, ahol $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

c) $\tg x - 1 > 2x - \frac{\pi}{2}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$

d) $\arsh(1 + x^2) < 1 + \arsh x^2$

e) $\sin x \leq \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

6. $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x-1} + \frac{\pi}{4}(x-1), & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$

a) Adja meg b értékét úgy, hogy f -re a $[0, 1]$ intervallumon alkalmazható legyen a Rolle-féle középértéktétel!

b) Keressen egy olyan értéket, amely a Rolle-tétel értelmében létezik!

4.4. L'Hospital-szabály

App

$(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ alakra alkalmazható közvetlenül.)

T *L'Hospital-szabály:*

Legyen f és g differenciálható $K_{\alpha, \delta}$ -ban és itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$$

Ha $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

(Itt $\alpha = x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty$ lehet, $\beta = b, +\infty, -\infty$ lehet).

B $\alpha = x_0$ -ra bizonyítjuk.

$$f(x_0) := 0, g(x_0) := 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\text{Cauchy-féle k.é.t.}) \quad \xi \in (x, x_0) \quad (\text{ill. } \xi \in (x_0, x))$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ha ez utóbbi létezik (véges vagy ∞)

Hasonló tétel bizonyítható ∞ alakra is.

Határozatlan alakok:

$0, \frac{\infty}{\infty}$: L'H közvetlenül alkalmazható.

$0 \cdot \infty$: átalakítás után: $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \vee \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ alakkal próbálkozunk.

$\infty - \infty$: $h(x) := \frac{1}{f(x)}, k(x) := \frac{1}{g(x)}, f(x) - g(x) = \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{k(x)} = \frac{k(x) - h(x)}{h(x) k(x)} \left(\frac{0}{0} \right)$

$0^0, 1^\infty, \infty^0$: $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$
 $g(x) \cdot \ln f(x)$ határozatlan alakra már a megismert módon dolgozhatunk.

Példák:

Gy

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}}$ L'H $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$ L'H $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}}$ L'H $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}$ L'H \dots L'H $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$ (n lépések)

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}}$ L'H $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0$

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - xe^{\cos x}}{-1 - \sin x + \cos x}}$ L'H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x - e^{\cos x} + xe^{\cos x} \sin x}{-\cos x - \sin x} = \frac{3 - e}{-1}$

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}}$ L'H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{3x^2}$ L'H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{6x}$ L'H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x}{6} = \frac{1}{6}$

Pl. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} x \right)}$ L'H $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} x \right)} \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 5x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5 \sin 5x}{\cos 5x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-25}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\downarrow 1} \cdot \frac{1}{\cos 5x} = -\frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{25}{2}}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = ?$$

$$(1 + \cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = e^{\ln(1 + \cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}} = e^{\frac{3 \ln(1 + \cos x)}{\operatorname{ctg} x}} \xrightarrow[x \rightarrow \frac{\pi}{2}]{\operatorname{ctg} x} e^{3 \cdot 1} = e^3, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\operatorname{ctg} x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{1 + \cos x} \cdot (-\sin x)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} = 1$$

Pl. Legyen $f(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$, ha $x \in (0, 1]$, $f(0) = b$.

1. $f'(x) = ?$, ha $x \in (0, 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$
3. Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f -re alkalmazható legyen a Lagrange-féle középértéktétel a $[0, 1]$ intervallumon?
(Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!)

Megoldás.

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^4} \ln \cos x^2}$

$$f'(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \left(\frac{\ln \cos x^2}{x^4} \right)' =$$

$$= (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \frac{\frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2) \cdot 2x \cdot x^4 - (\ln \cos x^2) \cdot 4x^3}{x^8}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \cos x^2}{x^4} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2) \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-1}{2 \cos x^2} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\downarrow 1} = -\frac{1}{2} \\
 & \implies \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x^4} \cdot \ln \cos x^2} = e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

3. Ha $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, azaz $b = e^{-\frac{1}{2}}$, akkor f folytonos $[0, 1]$ -ben és differenciálható $(0, 1)$ -ben, így alkalmazható a Lagrange-féle középtéktétel.

(Pl.) A derivált definíciója alapján mutassa meg, hogy az

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$$

függvénynek az $x = 0$ -ban létezik a jobb oldali deriváltja!

Írja fel az $x = 0$ pontbeli jobb oldali érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}} - 1}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}} \operatorname{sh} \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

mert $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} u}{u} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} u}{1} = 1$, és most $u = \sqrt{x} \rightarrow 0$.

$$y_0 = f(0) + f'_+(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{4}x, \quad x \geq 0$$

4.5. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

App \Rightarrow
App \Rightarrow

- (M)** A nyílt intervallum $I = (a, b)$ lehet $(-\infty, \infty)$ is.

Néhány definíció:

- (D) f monoton nő I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (D) f szigorúan monoton nő I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$.
- (D) f monoton csökken I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$.
- (D) f szigorúan monoton csökken I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$.
- (D) f alulról konvex I -n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ -re $f(x) \leq h_{x_1, x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
($(h_{x_1, x_2}$ az x_1 -en és x_2 -n áthaladó húr.)
- (D) f alulról konkáv I -n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ -re $f(x) \geq h_{x_1, x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
($(h_{x_1, x_2}$ az x_1 -en és x_2 -n áthaladó húr.)
- (D) f -nek x_0 -ban inflexiós pontja van, ha f az x_0 -ban folytonos, és itt konvex és konkáv szakaszok találkoznak.

(T₁) Ha f differenciálható I -n:

- 1. f monoton nő $\iff f'(x) \geq 0$
 f szigorúan monoton nő $\iff f'(x) > 0$
- 2. f monoton csökken $\iff f'(x) \leq 0$
 f szigorúan monoton csökken $\iff f'(x) < 0$

(B) A megértést segíti a 4.20. ábra.

1. \implies :

$$\begin{aligned} f \text{ monoton nő} &\implies \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad (\pm \text{ vagy } \exists \text{ alakú}) \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

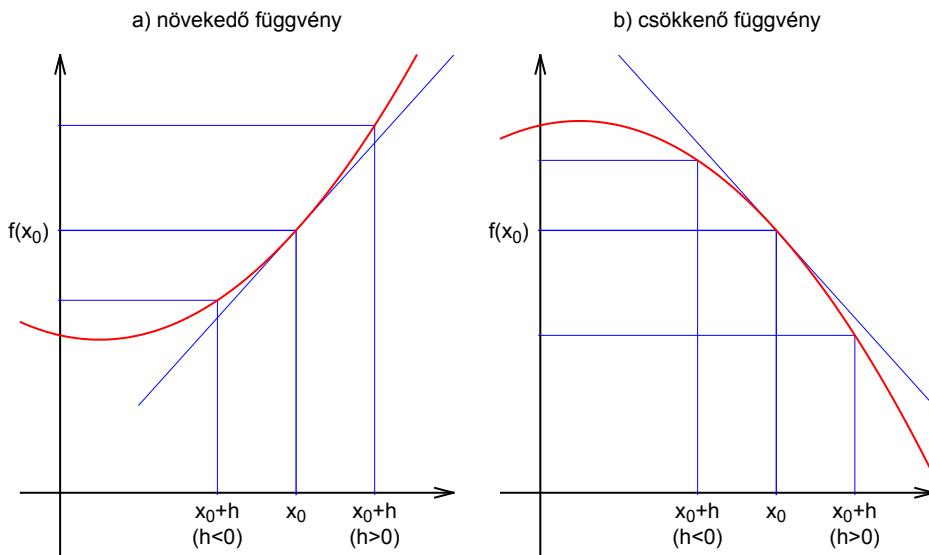
\iff :

$x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2 : [x_1, x_2]$ -ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0$$
 (a feltétel miatt) $\xi \in (x_1, x_2)$.

Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$.

4.20. ábra. A derivált előjelének és a monotonitásnak a kapcsolata



2. Bizonyítása lényegében megegyezik az előzővel.

Itt $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ -ból következik, hogy $f(x_2) > f(x_1)$. Tehát szigorúan monoton. ■

(T₂) Ha f differenciálható I-n:

1. f' monoton nő $\iff f$ konvex

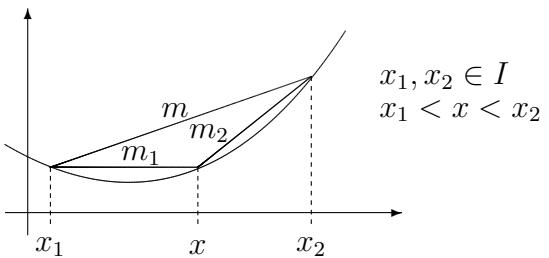
2. f' monoton csökken $\iff f$ konkav

(B)

1. Csak \iff irányban bizonyítjuk.
Az ábra alapján a konvexitásból következik, hogy $\forall x \in (x_1, x_2)$ -re:

$$m_1 \leq m \leq m_2.$$

Így $\lim_{x \rightarrow x_1} m_1 = f'(x_1) \leq m \leq f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} m_2$, vagyis $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, tehát f' monoton nő.



2. A második állítás bizonyítása az elsőhöz hasonló. ■

(M)

$$f'(x_1) \leq m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Ebből

$$\begin{aligned} f(x_2) &\geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \forall x_1 < x_2\text{-re, ill.} \\ f(x_1) &\geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad \forall x_1 < x_2\text{-re.} \end{aligned}$$

Tehát konvex görbe az érintője felett halad az érintési pontot kivéve.
(Konkáv görbe pedig az érintője alatt halad az érintési pontot kivéve.)

(T₃) Ha f kétszer differenciálható I-n:

1. $f''(x) \geq 0 \iff f$ konvex
2. $f''(x) \leq 0 \iff f$ konkáv

(B)

$$\begin{array}{lllll} 1. \quad f''(x) \geq 0 & \stackrel{T_1 \text{ miatt}}{\implies} & f' \text{ monoton nő} & \stackrel{T_2 \text{ miatt}}{\implies} & f \text{ konvex} \\ f''(x) \geq 0 & \stackrel{T_1 \text{ miatt}}{\iff} & f' \text{ monoton nő} & \stackrel{T_2 \text{ miatt}}{\iff} & f \text{ konvex} \end{array} \quad \blacksquare$$

(M) Az állítások igazak maradnak, ha I zárt és f a zárt intervallumban folytonos, nyíltban differenciálható.

Gy

Példák

(Pl.)
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x$$

$$f'(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1) \quad f''(x) = 2x - 7$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 6)$	6	$(6, \infty)$	
f'	+	0	-	0	+	$f(1) = \frac{17}{6}$
f	\nearrow	lok. max.	\searrow	lok. min.	\nearrow	$f(6) = -18$

x	$(-\infty, \frac{7}{2})$	$\frac{7}{2}$	$(\frac{7}{2}, \infty)$
f''	-	0	+
f	infl. pont	U	

$$f\left(\frac{7}{2}\right) < 0$$

Pl. $f(x) = e^{2x} - (4x + 1)$

1. Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f monoton növekedő, illetve fogyó.
2. Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv.

Megoldás.

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4 = 0 \implies e^{2x} = 2 \implies 2x = \ln 2 \implies x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

x	$(-\infty, \ln \sqrt{2})$	$\ln \sqrt{2}$	$(\ln \sqrt{2}, \infty)$
f'	-	0	+
f	↗	↗	↗

$$f''(x) = 4e^{2x} > 0$$

f monoton csökken $(-\infty, \ln \sqrt{2})$ -n, monoton nő $(\ln \sqrt{2}, \infty)$ -en.
 f konvex $(-\infty, \infty)$ -en.

Pl. Legyen

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol f monoton nő, f monoton csökken, f konvex, f konkáv!

Megoldás.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{Nem intervallum!})$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x - 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x (e^x - 1)^2 - e^x 2(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^4} (1 - e^{2x})$$

$f'(x) > 0$: f szigorúan monoton nő a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumon.

$f''(x) > 0$, ha $x < 0$: $(-\infty, 0)$ intervallumon f konvex

$f''(x) < 0$, ha $x > 0$: $(0, \infty)$ intervallumon f konkáv

4.6. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

- D**) f x_0 -ban lokálisan növekedő, ha $\exists K_{x_0, \delta}$:
 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ -ra $f(x) \leq f(x_0)$ és $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ -ra $f(x_0) \leq f(x)$.
- D**) f x_0 -ban lokálisan csökkenő, ha $\exists K_{x_0, \delta}$:
 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ -ra $f(x) \geq f(x_0)$ és $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ -ra $f(x_0) \geq f(x)$.

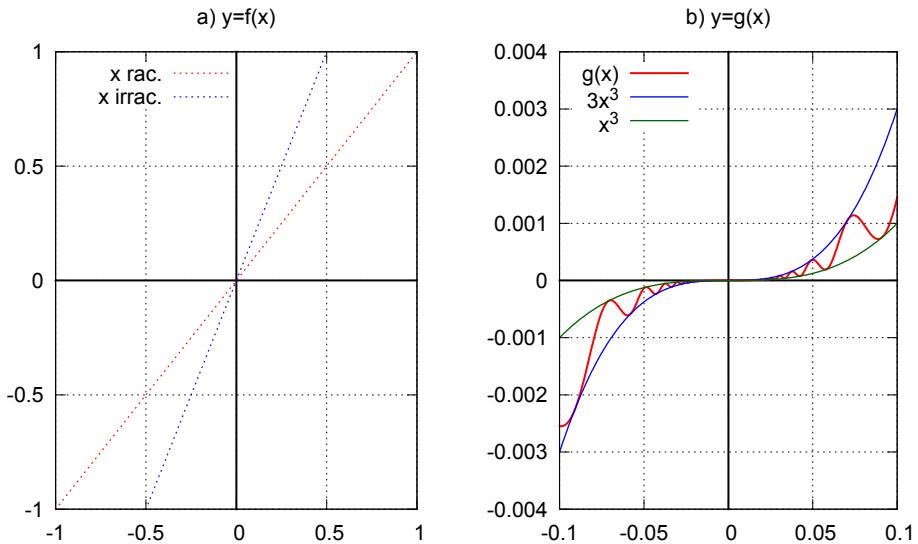
A következő példában két olyan függvényt mutatunk, melyek az origóban lokálisan növekedők, mégsem az origónak olyan környezete, melyben a függvény növekedő lenne.

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \text{ (racionális);} \\ 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (irracionális);} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

A 4.21. ábráról látható, hogy minden függvény lokálisan növekedő az origóban, de nem létezik olyan $\delta > 0$, melyre a függvények a $(-\delta, \delta)$ nyílt intervallumon monoton növekedők lennének.

4.21. ábra. a) Az $f(x)$ függvény vázlatos grafikonja b) A $g(x)$ függvény grafikonja



(T) Ha f differenciálható x_0 -ban és

$$1. f \text{ lokálisan nő } x_0\text{-ban} \implies f'(x_0) \geq 0$$

$$2. f \text{ lokálisan nő } x_0\text{-ban} \iff f'(x_0) > 0$$

(B)

$$1. \lim_{h \rightarrow -0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\equiv} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\pm} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$2. \underbrace{f'(x_0)}_A = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\circledast} > 0 \quad (A - \varepsilon < \circledast < A + \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2})$$

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{3}{2} f'(x_0), \quad \text{ha } |h| < \delta(\varepsilon).$$

Tehát $K(x_0, \delta)$ -ban $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \implies f$ lokálisan nő x_0 -ban.

(T) $K(x_0, \delta) \subset D_f$ (belő pont); $K(x_0, \delta) \subset D_{f'}$

Differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésének

1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$

2. elégsges feltétele:

a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0 -ban (tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0 -ban)

b) Ha f kétszer differenciálható x_0 -ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$
 $(f''(x_0) > 0 : \text{lok. min.}; \quad f''(x_0) < 0 : \text{lok. max.})$

(B)

1. a Rolle-tétel előtt volt

2. a) f' lokálisan csökken:

f'	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
f	$+ (\geq 0)$	0 lok. max.	$- (\leq 0)$

f' lokálisan nő:

f'	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
f	-	0 lok. min.	+

- b) $f''(x_0) > 0 \implies f'$ lok. nő x_0 -ban és $f'(x_0) = 0 \implies$ lok. min.
 $f''(x_0) < 0 \implies f'$ lok. csökken x_0 -ban és $f'(x_0) = 0 \implies$ lok. max. ■

(M) A tétel második pontja csak elégséges feltételt ad, ezt mutatja az alábbi példa:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Az $f(x)$ függvény grafikonja a 4.22 ábrán látható. A függvény mindenütt deriválható. Az origóban a definícióval kell dolgoznunk.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0 \end{aligned}$$

Tehát a szükséges feltétel teljesül.

De f' nem vált előjelet $x_0 = 0$ -ban, mert annak minden jobb és bal oldali környezetében is felvesz + és - értékeket is annak megfelelően, hogy minden ilyen környezetben vannak f -nek szigorúan monoton növekedő és csökkenő szakaszai. Mégis van lokális szélsőértéke $x_0 = 0$ -ban, sőt abszolút minimuma van itt.

(T) $K(x_0, \delta) \subset D_{f''}$

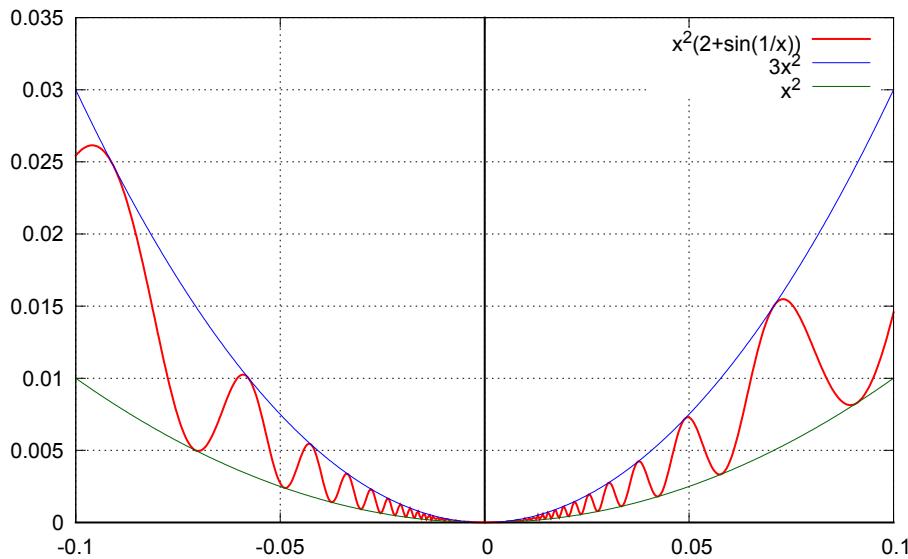
Kétszer differenciálható függvény esetén inflexiós pont létezésének

1. szükséges feltétele: $f''(x_0) = 0$

2. elégséges feltétele:

a) $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0 -ban (f'' lokálisan nő vagy lokálisan csökken x_0 -ban)

b) $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$

4.22. ábra. Az $f(x)$ függvény grafikonja

(B)

1. Az inflexiós pont konvex és konkáv szakaszokat választ el.

Ha f konvex, akkor f' monoton nő. Ha f konkáv, akkor f' monoton csökken.

Tehát f' -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke van, hiszen $\nearrow\searrow$ vagy $\searrow\nearrow$ típusú \implies

$$\frac{d}{dx}f'\Big|_{x_0} = f''(x_0) = 0$$

	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
f''	+	0	-
f	\cup	infl. pont	\cap

	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
f''	-	0	+
f	\cap	infl. pont	\cup

- b) Ha $f'''(x_0) > 0 \implies f''$ növekedően halad át x_0 -on, tehát a 2. táblázat igaz.

Ha $f'''(x_0) < 0 \implies f''$ csökkenően halad át x_0 -on, tehát az 1. táblázat igaz. ■

Pl. Igaz-e, hogy $g'(x_0) = 0$ esetén g -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke van vagy inflexiója?

Megoldás.

Nem igaz. Például

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

A 4.21. ábrán látható a függvény (b) ábra).

g mindenütt deriválható, $x = 0$ -ban a definícióval:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \underbrace{\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0$$

Ennek ellenére a függvénynek sem lokális szélsőértéke, sem inflexiója nincs az origóban.

De kimondható a következő téTEL:

(T) Ha f x_0 -ban legalább n -szer differenciálható és $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, de $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, akkor

f -nek inflexiós pontja van $x = 0$ -ban, ha n páratlan,

f -nek lokális szélsőértéke van $x = 0$ -ban, ha n páros ($f^{(n)}(x_0) > 0$ esetén lokális minimum, $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetén lokális maximum).

(A tétele nem bizonyítjuk.)

Példák

(Pl.) $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^2$ Keresse meg a függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x - 1)^2(x + 3)^2 + (x - 1)^3 \cdot 2(x + 3) = \\ &= (x - 1)^2(x + 3)(3(x + 3) + 2(x - 1)) = (x - 1)^2(x + 3)(5x + 7) \end{aligned}$$

f'	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -\frac{7}{5})$	$-\frac{7}{5}$	$(-\frac{7}{5}, 1)$	1	$(1, \infty)$
f	+	0	-	0	+	0	+

(Pl.) Határozza meg az $f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x$ függvény inflexiós pontjait!

Megoldás.

$$f'(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) + 3 \sin x = -3 \cos^2 x \sin x + 3 \sin x$$

$$f''(x) = 6 \cos x \sin^2 x - 3 \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos x (2 \sin^2 x - \underbrace{\cos^2 x + 1}_{=\sin^2 x}) = 3^2 \cos x \sin^2 x$$

$f''(x) = 0:$

1. $\cos x = 0 : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ inflexiós helyek, mert f'' előjelet vált ($k \in \mathbb{Z}$).
2. $\sin x = 0 : x = k\pi$ pontokban nincs inflexió, mert f'' nem vált előjelet.

(Pl.)

$$f(x) = \frac{x-4}{(x+2)^3}$$

- a) Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek?
 - b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken f szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!
- Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van?

Megoldás.

- a) ÉT.: $x \neq -2$ (Egyébként a függvény folytonos.)

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{\overbrace{x-4}^{-6}}{\underbrace{(x+2)^3}_{+0}} = -\infty, \quad f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{\overbrace{x-4}^{-6}}{\underbrace{(x+2)^3}_{-0}} = \infty$$

Tehát $x = -2$ -ben másodfajú szakadás van.

$$\begin{aligned} b) f'(x) &= \frac{1 \cdot (x+2)^3 - (x-4) \cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{x+2 - 3(x-4)}{(x+2)^4} = \\ &= \frac{-2x+14}{(x+2)^4} = \frac{2(7-x)}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

Az értelmezési tartományban ($x \neq -2$) a nevező a páros kitevőnek köszönhetően minden pozitív, így elég a számláló jeltartását vizsgálni.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 7)$	7	$(7, \infty)$
f'	+	≠	+	0	-
f	↗	szak.hely	↗	lok.max.	↘

Tehát f szigorúan monoton nő: $(-\infty, -2)$ és $(-2, 7)$ intervallumokon,

f szigorúan monoton csökken: $(7, \infty)$ -en.

$x = 7$ -ben lokális maximum van, mert f növekvőből csökkenőbe megy át.

Pl. Vizsgálja meg az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvényt ($x > 0$) monotinitás szempontjából, határozza meg a függvény lokális szélsőértékeit, valamint az origóban és a végtelenben vett határértékét!

Megoldás.

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} \implies D_f = (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

(A kitevő $-\infty \cdot \infty$ alakú, így $-\infty$ -hez tart.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{\equiv} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \sqrt[x]{x} \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} (1 - \ln x)$$

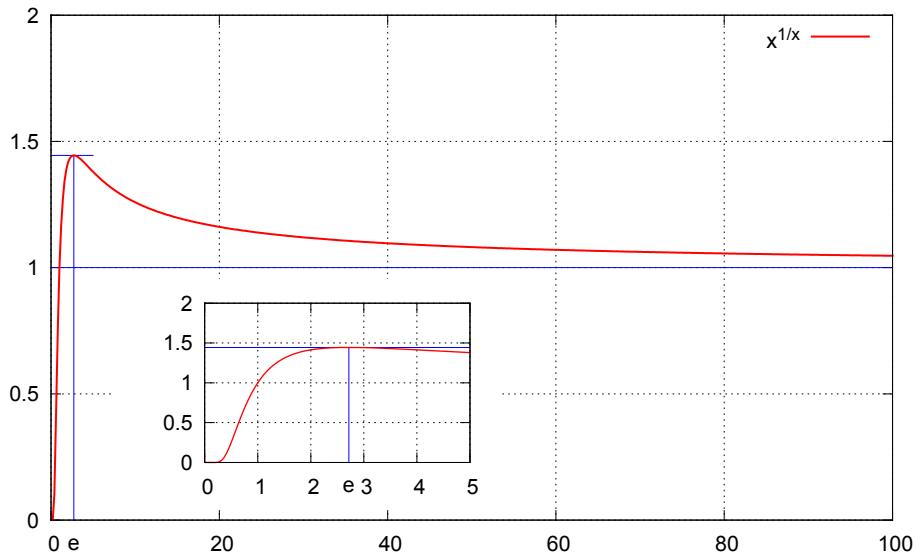
$$f'(x) = 0, \quad \text{ha} \quad 1 - \ln x = 0 \implies x = e$$

x	$(0, e)$	e	(e, ∞)
f'	+	0	-
f	↗	lok.max.	↘

A függvény grafikonja a 4.23. ábrán látható.

Pl. Határozza meg az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat legnagyobb elemét!

Az előző példában vázlatosan ábrázoltuk az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvényt. Látható, hogy a maximális függvényérték az $f(e) = \sqrt[e]{e}$ szám \implies , a sorozat legnagyobb eleme $\sqrt[2]{2}$ és $\sqrt[3]{3}$ közül a nagyobbik.

4.23. ábra. Az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvény grafikonja

Tehát a sorozat legnagyobb eleme: $\sqrt[3]{3}$

$$\text{(T)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(B)

$$f(x) := \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\infty \text{ alakú}}{\approx}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Az átviteli elv miatt tetszőleges $x_n \rightarrow \infty$ pontsorozat esetén $f(x_n) \rightarrow 1$.

Így $x_n = n$ választással adódik, hogy $f(x_n) = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

4.7. Implicit megadású függvények deriválása

Vizsgálunk két mennyiséget, x -et és y -t, melyekről tudjuk, hogy valamilyen jól meghatározott módon függnek egymástól. Két lehetőség van e függés megadására. Az első, ha az egyik változót, például y -t megadjuk, mint x függvényét $y = f(x)$ alakban. Ilyenkor explicit függvénymegadásról beszélünk. Sokszor azonban nincs mód erre, illetve egy

$\Phi(x, y) = 0$ összefüggést adunk meg, mely jellemzi az összetartozó x és y értékeket. Ilyenkor *implicit* kapcsolatmegadásról beszélünk.

Felmerül a kérdés, hogy explicit megadás hiányában elő lehet-e állítani a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányadost. Meglepő módon a kérdésre igenlő választ adhatunk, ha csak egy ismert (x_0, y_0) helyen keressük a differenciálhányadost. Sőt, egy rögzített pontban elvben tetszőleges magasabb rendű derivált is megkapható az úgynevezett *implicit deriválás* módszerével. A módszert a következő példákon mutatjuk be:

Gy

Pl. A deriválható $y = y(x)$ függvény kielégíti a

$$(2x + 1) \ln(2 - y^2) + \frac{x}{y} + x^2 = 0$$

implicit függvénykapcsolatot, $y(-1) = 1$.

Írja fel ezen függvény $x_0 = -1$ pontbeli érintőegyenesenek egyenletét!

Megoldás.

Ellenőrizzük, hogy a $(-1, 1)$ pont kielégíti-e az adott egyenletet!

$$-1 \cdot \ln 1 + \frac{-1}{1} + 1 = 0 \quad \text{valóban teljesül.}$$

Az érintőegyen es egyenlete: $y_e = \underbrace{y(-1)}_{=1} + \underbrace{y'(-1)}_{=?} (x - (-1))$

A deriváltat a

$$(2x + 1) \ln(2 - y^2(x)) + \frac{x}{y(x)} + x^2 = 0$$

egyenlet x szerinti deriválásával kaphatjuk meg.

$$2 \cdot \ln(2 - y^2(x)) + (2x + 1) \cdot \frac{1}{2 - y^2(x)} (-2y(x)y'(x)) + \frac{1 \cdot y(x) - x \cdot y'(x)}{y^2(x)} + 2x = 0$$

Elvégezve az $x = -1$ helyettesítést és figyelembe vesszük, hogy $y(-1) = 1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \ln 1 + (-1) \frac{1}{2 - 1} (-2 \cdot 1 \cdot y'(-1)) + \frac{1 - (-1)y'(-1)}{1^2} + 2(-1) &= 0 \\ 2y'(-1) + 1 + y'(-1) - 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad y'(-1) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Így az érintőegyen es egyenlete: $y_e = 1 + \frac{1}{3}(x + 1)$

Pl. Az $y = y(x)$ kétszer folytonosan differenciálható függvény grafikonja átmegy az $x = 0$, $y = 1$ ponton és kielégíti az

$$y + x \ln y + 2x^2 - x + \ln(1+x) = 1$$

implicit egyenletet, ha $x > -1$.

Milyen lokális tulajdonsága van f -nek az $x = 0$ -ban?

Megoldás.

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$y'(x) + \ln(y(x)) + x \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) + 4x - 1 + \frac{1}{1+x} = 0$$

$x = 0$, $y(0) = 1$ -et behelyettesítve:

$$y'(0) + \ln 1 + 0 + 0 - 1 + 1 = 0 \implies y'(0) = 0 \quad \text{lok. szé. lehet.}$$

Ismét deriválva:

$$y''(x) + \frac{1}{y(x)} y'(x) + 1 \cdot \frac{1}{y(x)} y'(x) + x \frac{-y'(x)}{y^2(x)} y'(x) + x \frac{1}{y(x)} \cdot y''(x) + 4 - \frac{1}{(1+x)^2} = 0$$

Behelyettesítve:

$$y''(0) + 4 - 1 = 0, \quad y''(0) = -3 \implies \text{lok. max. van } x = 0\text{-ban (értéke } y(0) = 1\text{).}$$

Mivel $y''(0) \neq 0 \implies$ nincs inflexiós pont itt.

Pl. Milyen lokális tulajdonsága van az f függvénynek az $x_0 = 0$ pontban, ha f kétszer folytonosan differenciálható és az $y = f(x)$ egyváltozós függvény kielégíti az

$$x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} y = 0$$

implicit függvénykapcsolatot?

Megoldás.

$$0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y_0 \operatorname{ch} y_0 = 0 \implies y_0 = 0 = f(0)$$

$$\operatorname{sh} x + x \cdot \operatorname{ch} x - y' \operatorname{ch} y - y(\operatorname{sh} y) \cdot y' = 0$$

$$0 + 0 - y' - 0 = 0 \implies y'(0) = 0$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - y'' \operatorname{ch} y - y'(\operatorname{sh} y)y' - y'(\operatorname{sh} y)y' - y(\operatorname{ch} y)y'y' - y(\operatorname{sh} y)y'' = 0$$

$$1 + 1 + 0 - y''(0) - 0 - 0 - 0 = 0 \implies y''(0) = 2 \text{ és } y'(0) = 0, \text{ tehát lokális minimuma van.}$$

4.8. Egyenes aszimptota $\pm\infty$ -ben

D) A $g(x) = Ax + B$ egyenes az f függvény lineáris aszimptotája a $+\infty$ -ben ($-\infty$ -ben), ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0)$$

Pl. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ -nek $g(x) = x + 2$ lineáris aszimptotája $\pm\infty$ -ben.

Ha $\exists +\infty$ -ben aszimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax - B) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underset{\downarrow}{x} \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) \right) = 0 \text{ miatt}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) = 0\text{-nak fenn kell állnia.}$$

Vagyis $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A$ szükséges feltétele az aszimptota létezésének.

De nem elég, mert még kell, hogy ezzel az A -val:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax - B) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = B$$

($x \rightarrow -\infty$ -re hasonlóan).

Tehát $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = A$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax) = B \iff \exists$ lineáris aszimptota.

Pl. $f(x) = x e^{\frac{2}{x}}$ Van-e lineáris aszimptotája $+\infty$ -ben?

Megoldás.

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{x}} = 1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{\frac{2}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{h := \frac{2}{x}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{\frac{1}{2} \cdot h} = 2$$

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ nevezetes határérték} \right)$$

(L'H-lal is megoldható, de hogyan?) Tehát $g_a = x + 2$.

4.9. Függvényvizsgálat

Gy
App

Teendők:

1. D_f ; nullahelyek (ha megállapítható); periodicitás; paritás; határértékek: $+\infty$ -ben, $-\infty$ -ben (ha van értelme), a szakadási pontokban, határponkokban.

2. f' vizsgálata (\nearrow , \searrow , lok. szé.).
3. f'' vizsgálata (\cap , \cup , infl. pont)
4. Lineáris aszimptoták.
5. f ábrázolása, R_f meghatározása.

4.9.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei (abszolút szélsőértékek)

[App](#)

Zárt intervallumban folytonos függvénynek van minimuma és maximuma ([Weierstrass II. tétele](#)). Lehetséges helyek:

- ahol a függvény nem deriválható
- deriválható és lokális szélsőértékhely (elég a szükségességet vizsgálni)
- az intervallum végpontjaiban

Végül a szobajövő értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet.

Példák:

[Gy](#)

Pl. Milyen méretezésű legyen az az 1 liter ūrtartalmú konzervdoboz, amelyet minimális anyagfelhasználással akarunk elkészíteni?

Megoldás.

$$T(r, h) = r^2 \pi h = 1 \text{ dm}^3 \quad \text{és} \quad F(r, h) = 2r^2 \pi + 2r\pi h$$

Az első egyenletből kifejezve h -t

$$h = \frac{1}{r^2 \pi}$$

és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$f(r) := F\left(r, \frac{1}{r^2 \pi}\right) = 2r^2 \pi + 2r\pi \frac{1}{r^2 \pi} = 2r^2 \pi + \frac{2}{r}, \quad r > 0.$$

Így egy egyváltozós függvény szélsőérték feladatához jutottunk.

$$f'(r) = 4r\pi - \frac{2}{r^2} = 2 \frac{2r^3\pi - 1}{r^2} = 0 \implies r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

r	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, \infty\right)$
f'	–	0	+
f	\searrow	lok. min	\nearrow

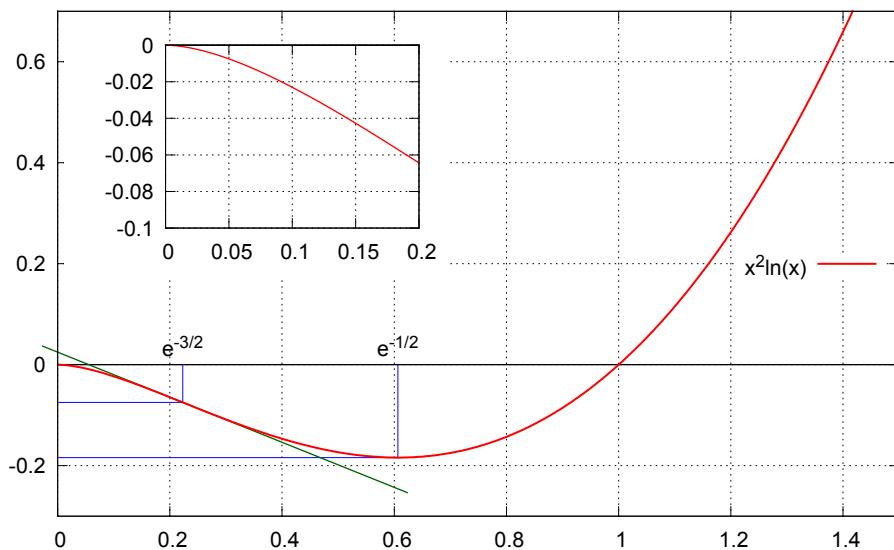
A lokális minimum egyben abszolút minimum is.

Tehát a minimális anyagfelhasználáshoz:

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ dm}, \quad h = \left. \frac{1}{r^2 \pi} \right|_{r=\sqrt[3]{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ dm}$$

(Pl.) $f(x) = x^2 \ln x$ Végezzen függvényvizsgálatot!

4.24. ábra. Az $y = x^2 \ln x$ függvény grafikonja



Megoldás.

$$D_f = (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{1}{2}x^2 = 0$$

Nullahely: $\ln x = 0 \implies x = 1$

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0 \implies \ln x = -\frac{1}{2} \implies x = e^{-\frac{1}{2}}$$

x	$(0, e^{-\frac{1}{2}})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$
f'	-	0	+
f	\searrow	lok. min.	\nearrow

$$f''(x) = 2 \ln x + 3 = 0 \implies x = e^{-\frac{3}{2}}$$

x	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$
f''	-	0	+
f	∩	infl. pont	∪

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e} \quad f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2e^3} \quad R_f = \left[-\frac{1}{2e}, \infty\right)$$

Aszimptota: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = \infty \implies$ nincs egyenes aszimptota.

A függvény grafikonja a 4.24. ábrán látható.

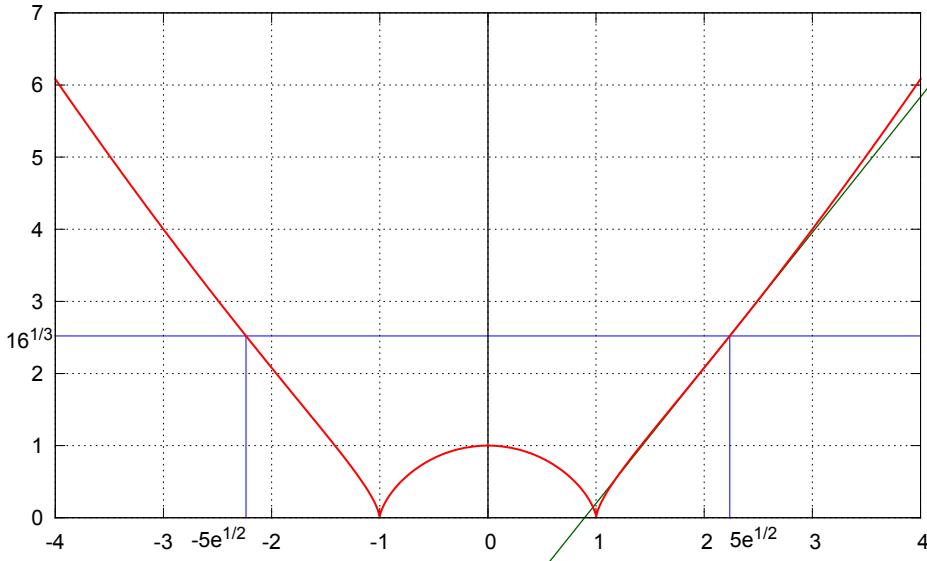
HF. Hány valós gyöke van az $x^2 \ln x - a = 0$ egyenletnek? ($a \in \mathbb{R}$)

Pl. Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot, és ábrázolja a függvényt! Van-e a függvénynek egyenes aszimptotája a $+\infty$ -ben?

4.25. ábra. Az $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ függvény grafikonja



Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$ Nullahelyek: $x = \pm 1$

Páros függvény, ezért elég $x \geq 0$ -ra vizsgálni és tükrözni az y tengelyre.

Van-e lineáris aszimptota $+\infty$ -ben?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \infty\end{aligned}$$

Nincs lineáris aszimptota.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \\ f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x - 1)^2(x + 1)^2}}{\sqrt[3]{(x - 1)^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(x + 1)^2}{x - 1}} = \nexists\end{aligned}$$

x	$\dots (-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	+	0	-	\nexists	+
f	\nearrow	lok, max.	\searrow	lok. min.	\nearrow

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{4}{3} \frac{(x^2 - 1) - \frac{2}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} = \frac{4}{9} \frac{x^2 - 5}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} \\ \begin{array}{c|ccccc} x & [0, 1) & 1 & (1, \sqrt{5}) & \sqrt{5} & (\sqrt{5}, \infty) \\ \hline f'' & - & \nexists & - & 0 & + \\ f & \cap & & \cap & \text{infl. pont} & \cup \end{array}\end{aligned}$$

$$f(\sqrt{5}) = \sqrt[3]{16}, \quad f'(\sqrt{5}) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}} \quad R_f = [0, \infty)$$

A függvény grafikonja a 4.25. ábrán látható.

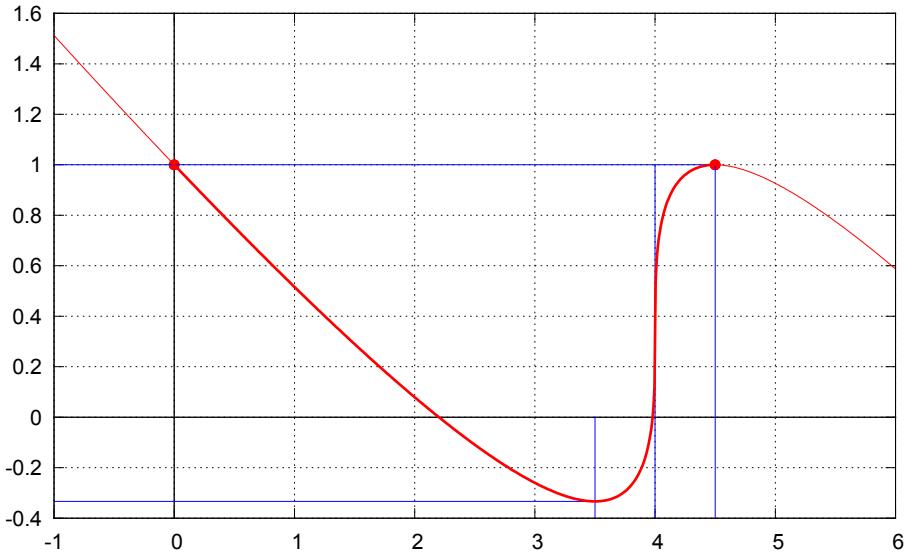
Pl.	$f(x) = \sqrt[3]{2x - 8} - \frac{2}{3}x + 3$
Keresse meg f szélsőértékeit a $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ intervallumon!	

Megoldás.

f folytonos $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ -en $\xrightarrow{\text{W. II. t.}}$ \exists min. és max.

Ahol nem deriválható: $x = 4 \in I$: $f(4) = \frac{1}{3}$

Az intervallum végpontjai: $f(0) = 1$, $f\left(\frac{9}{2}\right) = 1$

4.26. ábra. Az $f(x) = \sqrt[3]{2x - 8} - \frac{2}{3}x + 3$ függvény grafikonja

Ahol differenciálható és lokális szélsőértéke lehet: $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 - \frac{2}{3} = 0 \implies (2x - 8)^{-\frac{2}{3}} = 1 \implies 2x - 8 = \pm 1 \implies x = \frac{9}{2}, \frac{7}{2} \quad f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

A függvény grafikonja a 4.26. ábrán látható.

Tehát a fenti értékek közül kiválasztva, a maximum $x = 0$ -ban, ill. $x = \frac{9}{2}$ -ben van, értéke: 1, a minimum pedig $x = \frac{7}{2}$ -ben, értéke: $-\frac{1}{3}$.

4.10. Paraméteres megadású görbék

Sok alkalmazásnál valamely görbe egyenlete nem $y = f(x)$ alakban van megadva, hanem az x és y koordináta egy harmadik változó, az ún. paraméter függvényében van megadva, tehát egy paraméteres egyenletrendszerrel:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Ha pl. t idő, akkor az $(x(t), y(t))$ egy mozgó pont t időpontbeli helyzete. Ugyanannak a görbünek végtelen sok paramétereziése lehetséges.

Ha a görbe $y = f(x)$ alakban adott, akkor minden paraméteres előállítás:

$$x := t$$

$$y = f(t)$$

Gy
App
App

Ha a görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor nem biztos, hogy létezik $y = f(x)$ előállítása. Pl. az

$$x = 3, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

egyenes nem írható le $y = f(x)$ alakban.

A következő téTEL elégsgéges feltételt ad arra, hogy a paraméteresen megadott görbénél legyen $y = f(x)$ előállítása is.

(T)

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$t_1 < t < t_2$$

Ha $x(t)$ szigorúan monoton, akkor a görbénél létezik $y = f(x)$ előállítása.

Tehát a feltétel teljesülése esetén ez a görbeszakasz megadható az $y = f(x)$ egyváltozós függvény grafikonjaként is.

(M) $x(t)$ szigorúan monoton például, ha az intervallumon a deriváltja jeltartó, vagy legfeljebb véges sok pontban lehet az értéke 0, egyébként mindenütt + vagy -.

(B)

A szigorú monotonitás miatt $x = x(t)$ -nek létezik inverze: $t = t(x)$

Így a keresett függvény:

$$f(x) = y(t)|_{t=t(x)} = y(t(x))$$

■

Néhány példa paraméteres megadásra:

$$1. \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad y \geq 0 \text{ paraméteres megadása pl.:}$$

$$x := t, \quad y = \sqrt{R^2 - t^2}, \quad t \in [-R, R]$$

$$2. \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x \leq 0 \text{ paraméteres megadása pl.:}$$

$$y := t, \quad x = -\sqrt{R^2 - t^2}, \quad t \in [-R, R]$$

$$3. \quad \text{Origó középpontú teljes kör: } x^2 + y^2 = R^2$$

Most nem járunk eredménnyel, ha x -et vagy y -t akarjuk paraméterül választani. Helyette az x tengely + felével bezárt szöget választjuk paraméterül és jelöljük t -vel (4.27 ábra). Ekkor:

$$x = R \cos t$$

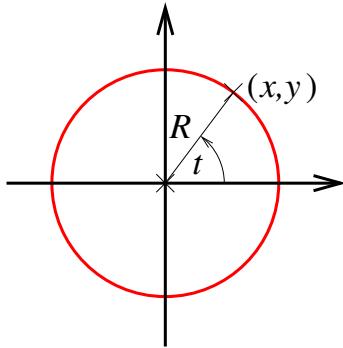
$$y = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$4. \quad \text{Általános helyzetű kör (4.28.a ábra): } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

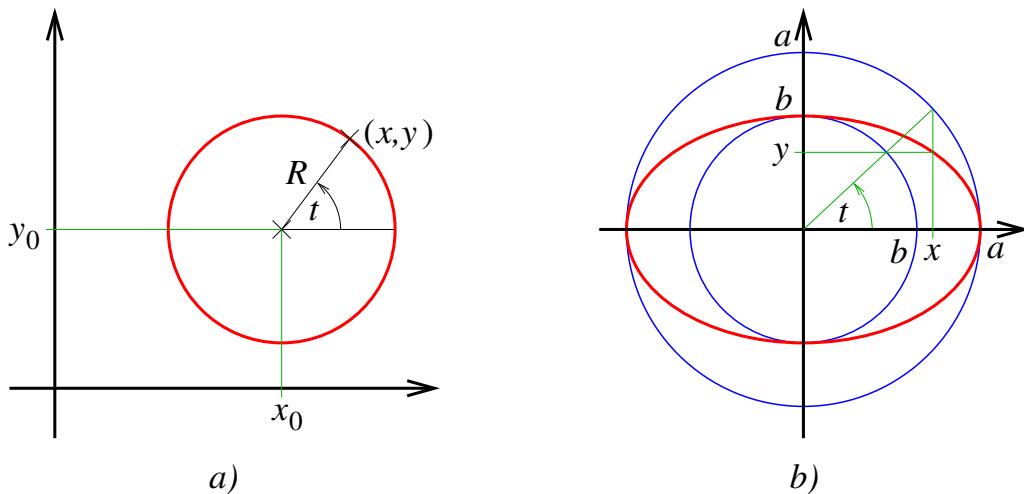
$$x = x_0 + R \cos t$$

$$y = y_0 + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

4.27. ábra. Origó középpontú kör megadása paraméteresen



4.28. ábra. Kör (a) és ellipszis (b) megadása paraméteresen



5. Ellipszis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Az ellipszis egy pontjának megszerkesztése: megrajzolunk egy a és egy b sugarú kört és húzunk egy félegyenest, melynek az x tengely pozitív felével bezárt szöge: t (4.28.b ábra). Ahol ez a félegyenes metszi az a sugarú kört, abban a pontban az y tengellyel húzunk párhuzamos egyenest. A félegyenes és a b sugarú kör metszéspontjában az x tengellyel párhuzamos egyenest rajzolunk be. Az így kapott két egyenes metszéspontja adja meg az ellipszis t paraméterű pontját. Ennek megfelelően a paraméteres egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

(T) Legyen a G görbe paraméteres egyenlete:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 < t < t_2$$

$x(t)$ szigorúan monoton,

$x(t), y(t)$ deriválható $t_0 \in (t_1, t_2)$ -ben és $\dot{x}(t_0) \neq 0$.

a) Ekkor az $f(x) = y(t(x))$ függvény deriválható a megfelelő $x_0 = x(t_0)$ pontban és

$$f'(x_0) = \left. \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

b) Ha az előző feltételeken túl létezik $\ddot{x}(t_0), \ddot{y}(t_0)$ is:

$$f''(x_0) = \left. \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \right|_{t_0}$$

(B)

a) A feltétel miatt $x(t)$ -nek létezik a $t(x)$ inverze és az deriválható. Az összetett függvény és az inverzfüggvény deriválási szabályát felhasználva:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dy(t(x))}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x_0} = \\ &= \dot{y}(t_0) \left. \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad f''(x_0) &= \left. \frac{d}{dx} f'(x) \right|_{x_0} = \left. \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right|_{x_0} = \left. \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right|_{t_0} \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x_0} = \\ &= \left. \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \right|_{t_0} \left. \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \right|_{t_0} \blacksquare \end{aligned}$$

(Pl.)

$$x(t) = e^{2t} + t^2$$

$$y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t^2$$

- a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!
- b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az f függvénynek az x_0 pontban?

Megoldás.

a) $\dot{x}(t) = 2e^{2t} + 2t$

$\dot{x}(0) = 2 > 0$ és $x(t)$ folytonos, ezért $\exists (-\delta, \delta)$ intervallum, ahol $\dot{x}(t) > 0$
 \Rightarrow itt $x(t)$ szigorúan monoton nő
 $\Rightarrow \exists$ inverze : $t = t(x)$ és így $\exists f(x) = y(t(x))$.

b) $\dot{y}(t) = 3 \operatorname{sh} 3t + 4t$, $\dot{y}(0) = 0$ és $x_0 = x(0) = 1$

$f'(1) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = 0 \Rightarrow$ lokális szélsőérték lehet itt.

$$\ddot{x}(t) = 4e^{2t} + 2, \quad \ddot{x}(0) = 6$$

$$\ddot{y}(t) = 9 \operatorname{ch} 3t + 4, \quad \ddot{y}(0) = 13$$

$$f''(1) = \left. \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \right|_0 = \frac{13 \cdot 2 - 0}{2^3} = \frac{13}{4}$$

$f'(1) = 0$ és $f''(1) > 0 \Rightarrow f$ -nek lokális minimuma van $x_0 = 1$ -ben.

4.10.1. Görbék megadása síkbeli polárkoordinátákkal

[App](#)

Polárkoordináták : r, φ

A polár koordinátarendszer a pólusból (O) és a polártengelyből áll. A sík tetszőleges P pontja jellemzhető a pont pólustól való távolságával: r ($r \geq 0$) és az OP szakasz polártengellyel bezárt szögével: φ . Ha $\varphi \in [0, 2\pi)$, akkor a póluson kívül minden pont egyértelműen jellemzett (4.29 ábra).

Egy síkgörbe egyenletét néha célszerű úgy megadni, hogy megmondjuk, hogy r hogyan függ a φ -től, tehát megadjuk az $r = r(\varphi)$ polárkoordinátás egyenletet.

Kapcsolat a polárkoordináták és a Descartes koordináták között

A polár koordinátarendszert úgy vessziük fel, hogy a polártengely az x tengely + felével essen egybe.

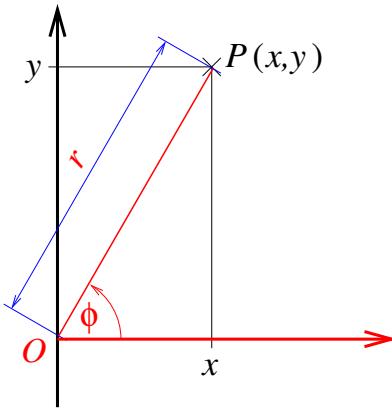
Ha r, φ adott, akkor

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Ha x, y adott, akkor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \varphi \text{ olyan, melyre fennáll, hogy}$$

4.29. ábra. A P pont síkbeli polárkoordinátái: r és φ 

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \quad \text{és} \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}$$

Ha egy görbe $r = r(\varphi)$ módon adott, akkor

$$x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$$

Így megkaptuk a görbe egy paraméteres egyenletrendszerét.

4.11. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi határértékeket!

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 1}$$

2. Határozza meg az

$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsin 2x$$

értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

3. A derivált definíciója alapján vizsgálja meg, hogy differenciálható-e a 0-ban az

$$f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \sin 2x \cdot \arcsin 3x}$$

függvény?

4. $f(x) = 3\pi - \arccos(1-x)$

a) $D_f = ?$ Írja fel az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

b) Invertálható-e f ? $f^{-1}(x) = ?$ $D_{f^{-1}} = ?$

5. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ $x_0 = -\frac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenese?

6. Ábrázolja az

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

függvényt!

7. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad g(x) = x^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

a) Tegye folytonossá a 0 helyen az f és g függvényeket!

b) $f'(0) = ?, \quad g'(0) = ?$

8. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

$$f'(1) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = ?$$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$

10. Határozza meg az

$$f(x) = 1 + \ln(x^3 + 1)$$

függvény inverzét (ha létezik), az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

11. $f(x) = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

Adja meg a fenti függvény

- a) értelmezési tartományát, értékkészletét,
- b) inverzét, amennyiben és ahol az létezik.

12. $f(x) = \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right)$

- a) $D_f = ?, \quad R_f = ?$
- b) $f^{-1}(x); \quad D_{f^{-1}} = ?; \quad R_{f^{-1}} = ?$

13. $f'(x) = ?$

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = (\ln x)^x$ | d) $f(x) = (\sin^2 x)^{\sqrt{x+1}}$ |
| b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x^2}$ | e) $f(x) = (\arctg 2x)^x$ |
| c) $f(x) = \sqrt[x]{x}$ | f) $f(x) = x^x$ |

14. Írja fel a megadott ponton átmenő $y = f(x)$ függvény érintő egyenesének egyenletét, ha a függvény kielégíti a megadott implicit kapcsolatot!

- | |
|--|
| a) $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2$ |
| b) $x \sin y + y \sin x = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}; \quad y_0 = \frac{\pi}{4}$ |
| c) $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2); \quad x_0 = 3; \quad y_0 = 1$ |
| d) $y^2 \sin \pi y + x \cos \pi x + y = 1; \quad P_0(1, 2)$ |
| e) $x \ln y + y \ln x = 1; \quad P_0(e, 1)$ |
| f) $(x^2 + y^2)^3 - 26x^2y^2 = -18; \quad P_0(-1, 1)$ |

15. Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 0$ pontban az

$$x^2 \sin y + y + \sin x = 1$$

impliciten adott függvénynek?

16. $(x - 2)^3(1 - x) = y^3 + y; \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 0$

Van-e a fenti implicit megadású görbünek lokális szélsőértéke, ill. inflexiója az (x_0, y_0) pontban?

17. Milyen lokális tulajdonságai vannak az

$$x \cos \pi y + y^2 x + y \cos \pi x = 0$$

egyenlet által definiált $y(x)$ függvénynek az $x = 0$ pontban?

18. A kétszer folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény kielégíti az

$$y^3 - x^5 + x^2 - y^2 = 4$$

implicit egyenletet és $y(1) = 2$.

- | |
|---|
| a) $y'(1) = ? \quad y''(1) = ?$ |
| b) Van-e 1-nek olyan környezete, amelyben a fenti $y = y(x)$ függvény alulról konvex vagy alulról konkav? (Vigyázat! Ez nem nem lokális tulajdonság.) |

19. $f(x) = x - 1 + \operatorname{arctg} x^3$

a) $f'(x) = ?$ Invertálható-e D_f -en?

b) Írja fel az f^{-1} függvény $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

20. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = ?$ (Indokoljon!)

b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{th} \frac{x-1}{x+2}, & x \neq -2 \\ b, & x = -2 \end{cases}$

Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f mindenütt folytonos legyen? Hol létezik $f'(x)$?

c) Az inverzfüggvény meghatározása nélkül számítsa ki $f^{-1}'(0)$ értékét!

21. Vizsgáljuk meg, hogy $0 \leq \varepsilon < 1$ esetén invertálható-e az

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x$$

ún. Kepler-egyenletnek eleget tevő függvény! Ha invertálható, határozzuk meg az inverz deriváltját is.

Megoldás:

$$y' = 1 - \varepsilon \cos x \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon].$$

Mivel $\varepsilon \in [0, 1) \implies y' > 0 \implies y$ szigorúan monoton nő \implies invertálható (mivel y folytonos is, az inverz is folytonos). Mivel az inverzfüggvényt nem tudjuk explicite előállítani, csak az implicit függvény deriválása végezhető el. Az inverzfüggvényre vonatkozó implicit egyenlet ($x \leftrightarrow y$):

$$x = y - \varepsilon \cdot \sin y$$

Ezt x szerint deriválva:

$$\begin{aligned} 1 &= y'(x) - \varepsilon (\cos y) y'(x) \\ y'(x) &= \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)} \end{aligned}$$

22. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{ha } x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken a függvény szigorúan monoton!

b) $\sup_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ? \quad \inf_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$

$\max_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ? \quad \min_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$

- c) Tekintsük az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó húrokat, ahol $1 < a < b < 2$. Van-e közöttük vízszintes?
- d) Legyen $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$ és $D_g = (1, \infty)$.
Határozzuk meg a g^{-1} inverz függvényt! $D_{g^{-1}} = ?$

23. Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{e^x}$	k) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$	
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$			l) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\operatorname{tg} x}$	
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$			m) $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$	
d) $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x;$	$n \in \mathbb{N}^+$		n) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$	
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha};$	$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$		o) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$	
f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \cdot \sin x} \right)$			p) $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$	
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$			q) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{e^x - 1}{x} \right)$	
h) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$			r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} 2x}$	
i) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$			s) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$	
j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$			t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^k},$	$k \in \mathbb{N}^+$

24. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály alkalmazása nem vezet célhoz a határértékek kiszámításánál, és számítsuk ki a keresett határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{\sin 2x + 2x}$	c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (= \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x)$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$	d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(x+5)}{\operatorname{ch}(x-1)}$

25. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^{x \cdot \sin x}, & \text{ha } x > 0 \\ ax + b, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen \mathbb{R} -en!

26. $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{x^{-2}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

- a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!
- b) Írja fel az $x_0 = 1$ pontbeli érintő egyenletét!

27. $f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{1-x}}$

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ?$
- b) $f'(x) = ?, \quad \text{ha } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$

28. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- a) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = ?$
- b) $f'(x) = ?$

29. $f(x) = \begin{cases} (x^2)^{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

- a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!
- b) Bizonyítsa be, hogy ekkor f differenciálható is a 0 pontban!
- c) Írja fel a 0 pontbeli érintő egyenes egyenletét!

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ a, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

- a) Válassza meg a értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$ -ban!
- b) $f'(x) = ?$

31. Legyen $f(x) = |x|3^{-|x|}$

- a) Létezik-e $f'(0)$?
- b) Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét \mathbb{R} -en, amennyiben ezek léteznak.
- c) $\min_{x \in [1, \infty]} \{f(x)\} = ?, \quad \inf_{x \in [1, \infty]} \{f(x)\} = ?$

32. a) Vázolja az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján.
(Konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük.)
- b) Adj meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát
a C valós szám függvényében!

33. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

b) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

34. $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x}$

Van-e lineáris aszimptotája $\pm\infty$ -ben?

35. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Van-e lineáris aszimptotája $-\infty$ -ben?

36. $x(t) = \frac{\sin t}{t^2 + 1}; \quad y(t) = \sqrt{2 + \cos t} + 2t$

a) $\dot{x}(t) = ? \quad \dot{y}(t) = ?$

b) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordináták-kal!

37. $x(t) = e^{2t} + t^2; \quad y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az f függvénynek az x_0 pontban?

38. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$x = t^2 + 2 \cos \frac{\pi}{2} t, \quad y = \sin \pi t + \frac{\pi}{2} t^2$$

által meghatározott $y = f(x)$ függvénynek a $t_0 = 1$ paraméterű $x_0 = x(t_0)$ pontban?

4.12. Néhány kidolgozott feladat

Pl.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \pm \infty\text{-ben van-e lineáris aszimptota?}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{\substack{\downarrow \\ \text{korl.} \\ \infty}} + \underbrace{x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\substack{\sin \frac{1}{x} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow 0}} \right) = 1 = A \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{x^2 \sin \frac{1}{x} - x}_{\infty \cdot 0 - \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \underbrace{\left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)}_{\infty \cdot 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 0 = B \end{aligned}$$

$g_a = x$: aszimptota a $\pm\infty$ -ben.

Pl. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ aszimptota $-\infty$ -ben?

Megoldás.

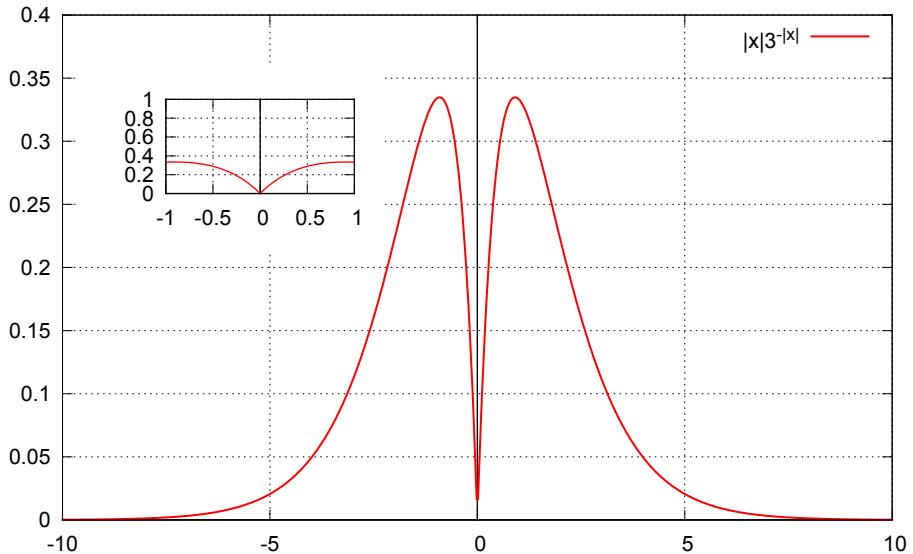
$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1 \\ B &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x \right) \underset{u := -x}{=} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\sqrt{u^2 + u + 1} - u \right) \frac{\sqrt{u^2 + u + 1} + u}{\sqrt{u^2 + u + 1} + u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u + 1}{\sqrt{u^2 + u + 1} + u} = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u \left(1 + \frac{1}{u}\right)}{\sqrt{u^2} \sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} + u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{u \sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$g_a = -x + \frac{1}{2}$$

Pl. Legyen $f(x) = |x|3^{-|x|}$.

1. Létezik-e $f'(0)$?

2. Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét \mathbb{R} -en (amennyiben ezek léteznek)!
3. $\min_{x \in [1, \infty)} f(x) = ?$ $\inf_{x \in [1, \infty)} f(x) = ?$

4.30. ábra. Az $f(x) = |x|3^{-|x|}$ függvény grafikonja**Megoldás.**

1. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|3^{-|x|}}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|3^{-|x|}}{x} = -1 \implies x = 0$ -ban nem differenciálható

2. f páros, $x \geq 0$ esetén $f(x) = x3^{-x}$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0$$

$$f'(x) = 3^{-x} - \ln 3 \cdot x 3^{-x} = 3^{-x}(1 - \ln 3 \cdot x) = 0 \implies x = \frac{1}{\ln 3}$$

x	$\left(0, \frac{1}{\ln 3}\right)$	$\frac{1}{\ln 3}$	$\left(\frac{1}{\ln 3}, \infty\right)$
f'	+	0	-
f	\nearrow	lok. max.	\searrow

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \quad \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$$

3. $\frac{1}{\ln 3} < 1$ (mert $\ln 3 > 1$)

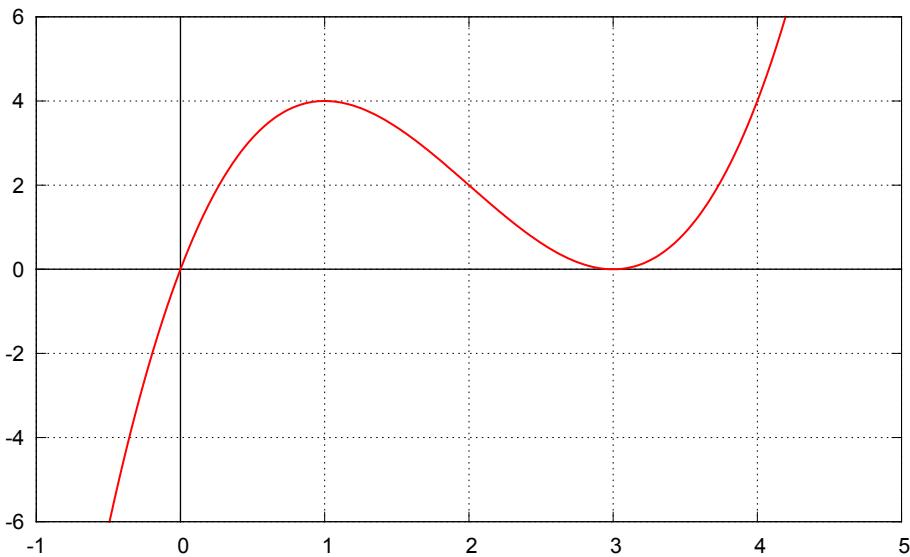
$$\min_{[1,\infty)} f(x) \text{ nem létezik, } \inf_{[1,\infty)} f(x) = 0$$

A függvény grafikonja a 4.30. ábrán látható.

(Pl.)

1. Vázolja az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján (konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük).
2. Adja meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényeként. Válaszát indokolja.

4.31. ábra. Az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvény grafikonja



Megoldás.

1. $f(x) = x(x-3)^2 = 0 \implies x = 0, x = 3$
 $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$
 $f(1) = 4, f(0) = 0$
2. $f(x) = C$ egyenlet megoldásainak a száma: $R_f = \mathbb{R}$

$\implies \forall c \in \mathbb{R}$ -re van metszéspontja az $y = f(x)$ és $y = C$ görbeknek.
 $c < 0$: 1 megoldás; $c = 0$: 2 megoldás; $0 < c < 4$: 3 megoldás; $c = 4$: 2 megoldás;
 $c > 4$: 1 megoldás.

A függvény grafikonja a 4.31. ábrán látható.

(Pl.)

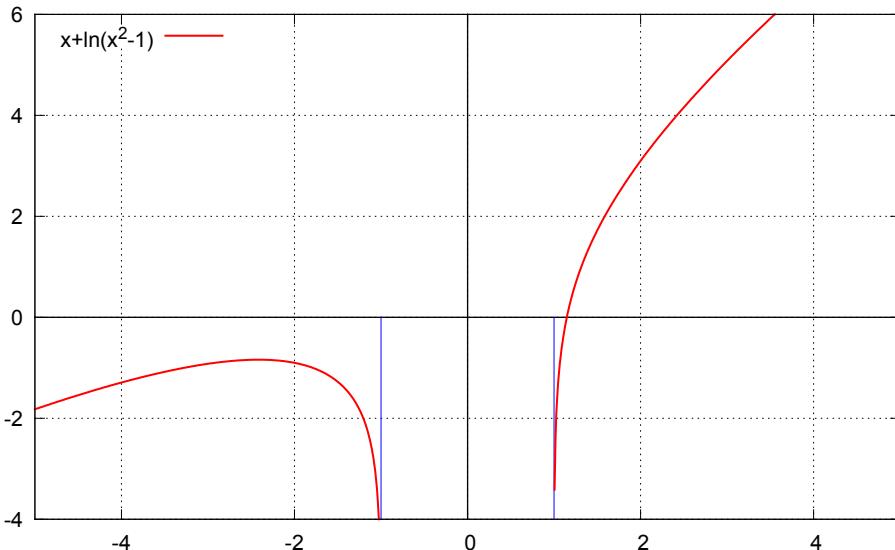
1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

2. Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

4.32. ábra. Az $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ függvény grafikonja



Megoldás.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x}{1} = 0$

$$2. D_f : |x| > 1 \quad \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = -\infty$$

\downarrow
0

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = 0$$

$$\implies x_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2} \notin D_f$$

$f(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ -ben és $(1, \infty)$ -ben monoton nő, $[-1 - \sqrt{2}, -1)$ -ben monoton csökken.

$f(-1 - \sqrt{2}) < 0$: itt lok. max.

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \implies f \text{ konkáv}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty \implies \text{csak } x = \pm 1 \text{ aszimptota}$$

A függvény grafikonja a 4.32. ábrán látható.

5. fejezet

Egyváltozós valós függvények integrálása

5.1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Thom₁

App

App

App

(D) f -nek F az I intervallumon primitív függvénye, ha $\forall x \in I$ -re:

$$F'(x) = f(x).$$

(Pl.) $f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}, \quad G(x) = -\frac{\cos 2x}{4}$$

Az $I = (-\infty, \infty)$ intervallumon F és G primitív függvények, mert

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \text{ sőt } (F(x) + C)' = (G(x) + C)' = f(x)$$

(T) Ha f -nek F és G primitív függvénye I -n, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + C, \quad x \in I$$

Tehát a primitív függvények csak egy állandóban különböznek.

(B) Már volt. Ez az [integrálszámítás I. alaptétele](#). ■

(D) f határozatlan integrálja I -n: a primitív függvények összessége.

$$\int f(x) dx = \{H : H'(x) = f(x) \quad x \in I\text{-re}\} = F(x) + C$$

¹lásd Thomas 05-ös bemutató 5. fejezet (49-53. oldal).

(P1) $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$

(M)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ 4 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 3 + \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ -2 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \psi'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = H$$

Tehát a H halmazon minden két primitív függvénye $\frac{1}{x}$ -nek, de nem csak egy konstansban különböznek. Uí.:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x > 0 \\ 6, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

De most nem is intervallumon dolgoztunk!

Fontos! Az integrálszámítás alaptétele csak intervallumra igaz!

Ennek ellenére használjuk a következő jelölést:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

Jelentése: $\ln x + C$, ha $I \subset (0, \infty)$ és $\ln(-x) + C$, ha $I \subset (-\infty, 0)$.

A határozatlan integrál néhány tulajdonsága :

(A definíció és a [deriválási szabályok](#) következményei)

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int c f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C, \quad \text{ha } \int f(x) \, dx = F(x) + C$$

$$\int f'(x) \cdot f^\alpha(x) \, dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + C$$

5.1.1. Példák

$$\boxed{\int \sin 8x \, dx} = -\frac{\cos 8x}{8} + C$$

$$\boxed{\int \cos \frac{x}{2} \, dx} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\boxed{\int e^{3x} \, dx} = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\boxed{\int \frac{7e^x + 8e^{3x}}{e^{2x}} \, dx} = \int (7e^{-x} + 8e^x) \, dx = -7e^{-x} + 8e^x + C$$

$$\boxed{\int (1 + e^x)^2 \, dx} = \int (1 + 2e^x + e^{2x}) \, dx = x + 2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\boxed{\int \underbrace{e^x (1 + e^x)^5}_{f' f^5 \text{ alakú}} \, dx} = \frac{(1 + e^x)^6}{6} + C$$

$$\boxed{\int \tg x \, dx} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \underbrace{\frac{-\sin x}{\cos x}}_{f'/f \text{ alakú}} \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\boxed{\int \tg^2 x \, dx} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \tg x - x + C$$

$$\boxed{\int \frac{\tg x}{\cos^2 x} \, dx} = \int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tg x}_{f' f^1 \text{ alakú}} \, dx = \frac{\tg^2 x}{2} + C$$

$$\boxed{\int \underbrace{\cos x \sin^2 x}_{f' f^2 \text{ alakú}} \, dx} = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\boxed{\int x^3 \cos x^4 \, dx} = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cos x^4 \, dx = \frac{1}{4} \sin x^4 + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{3x} \, dx} = \frac{5}{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \frac{5}{3} \ln |x| + C$$

Vagy: $\frac{5}{3} \int \frac{3}{3x} \, dx = \frac{5 \ln |3x|}{3} + C$ (csak egy állandóban különböznek)

$$\boxed{\int \frac{5}{1+3x} \, dx} = \frac{5}{3} \int \frac{3}{1+3x} \, dx = \frac{5}{3} \ln |1+3x| + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{(1+3x)^2} dx} = 5 \cdot \frac{1}{3} \int \underbrace{3(1+3x)^{-2}}_{f' f^{-2} \text{ alakú}} dx = \frac{5}{3} \frac{(1+3x)^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{1+3x^2} dx} = 5 \int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2} dx = 5 \frac{\arctg \sqrt{3}x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{5x}{1+3x^2} dx} = 5 \cdot \frac{1}{6} \int \underbrace{\frac{6x}{1+3x^2}}_{f'/f \text{ alakú}} dx = \frac{5}{6} \ln(1+3x^2) + C$$

$$\boxed{\int e^{2x} dx} = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\boxed{\int xe^{2x^2} dx} = \frac{1}{4} \int 4x e^{2x^2} dx = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C$$

$$\boxed{\int e^{x^2} dx} \neq \frac{e^{x^2}}{2x} + C : \quad \left(\frac{e^{x^2}}{2x} \right)' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x - e^{x^2} \cdot 2}{(2x)^2}$$

$f(x) = e^{x^2}$ -nek van primitív függvénye (később tudjuk megindokolni), de nem tudjuk előállítani zárt alakban.

$$\boxed{\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx} = - \int \frac{-2 \sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = - \ln(1+\cos^2 x) + C$$

$$\boxed{\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x} dx} = \arctg \cos x + C$$

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}} dx} = \int |\sin x| \cos^{-\frac{3}{2}} x dx = \int -\sin x \cos^{-\frac{3}{2}} x dx = \frac{\cos^{-\frac{1}{2}} x}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

•••

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{\arcsin 2x}{2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}} dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\arcsin 2x}{2} + C = \alpha$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}} dx} = \frac{-1}{16} \int -16x(2-8x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{16} \frac{(2-8x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \beta$$

$$\boxed{\int \frac{4+3x}{\sqrt{2-8x^2}} dx} = 4 \int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}} dx + 3 \int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}} dx = 4\alpha + 3\beta$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx} = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} dx = \\ = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \gamma$$

$$\boxed{\int \frac{4x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx} = -2 \int \frac{-2-2x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = \\ = -2 \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{\frac{1}{2}} - 2\gamma + C$$

Foglaljuk össze az előző példák tanulságait!

$$\boxed{\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$$f(x) := ax^2 + bx + c$$

Az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{f(x)}} dx &= k_1 \int f'(x) f^{-1/2}(x) dx + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = \\ &= k_1 \frac{f^{1/2}(x)}{1/2} + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \end{aligned}$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő esetek egyikét kapjuk:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1-(...)^2}} dx = k_3 \frac{\arcsin(...)}{(...)' } + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1+(...)^2}} dx = k_3 \frac{\operatorname{arsh}(...)}{(...)' } + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{(...)^2 - 1}} dx = k_3 \frac{\operatorname{arch}(...)}{(...)' } + C$$

Itt (...) : x -nek lineáris függvénye, tehát deriváltja konstans.

•••

$\boxed{\int \frac{1}{x^2 + 6x + 1} dx}$: A nevezőnek vannak valós gyökei, ilyenkor részlettörtekre bontással dolgozunk ([lásd később](#)).

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}} = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int 1 \cdot (x+2)^{-2} dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$$

$$\begin{aligned} \boxed{\int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 12}} &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3 + (x+1)^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{9} \frac{\arctg \frac{x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \delta \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{6x+6}{3x^2 + 6x + 12} dx} = \ln(3x^2 + 6x + 12) + C = \varepsilon$$

$$\boxed{\int \frac{6x+8}{3x^2 + 6x + 12} dx} = \int \frac{6x+6}{3x^2 + 6x + 12} dx + 2 \int \frac{1}{3x^2 + 6x + 12} dx = \varepsilon + 2\delta$$

Összefoglalva az előző példák tanulságait:

$$\boxed{\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$$f(x) := ax^2 + bx + c, \quad D := b^2 - 4ac$$

$D \geq 0$ esetén részlettörtekre bontással dolgozunk. ([Ezt később vesszük.](#))

$D < 0$ esetén az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx = k_1 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + k_2 \int \frac{1}{f(x)} dx = k_1 \ln|f(x)| + k_2 \int \frac{1}{f(x)} dx$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő alakot kapjuk:

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = k_3 \int \frac{1}{1 + (\dots)^2} dx = k_3 \frac{\arctg(\dots)}{(\dots)'} + C$$

 Itt (...) : x -nek lineáris függvénye, így a nevezőbe konstans került.

5.2. Határozott integrál

 Thom₂

 App

 App

5.2.1. Jelölések, definíciók

A továbbiakban feltesszük, hogy $a < b$.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és f korlátos $[a, b]$ -n.

Néhány definíció

- (D) Osztópontok: $x_k; k = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$
- (D) A k -adik részintervallum: $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, hossza: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$.
- (D) $[a, b]$ egy felosztása: $F = \{I_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ (= P -vel is jelöljük)
- (D) Alsó közelítő összeg (vagy alsó összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad m_k = \inf_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

- (D) Felső közelítő összeg (vagy felső összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad M_k = \sup_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

- (D) Az F felosztás finomsága: $\Delta F = \max_k \Delta x_k$

- (D) Az $[a, b]$ intervallum (F_n) felosztásainak sorozatát minden határon túl finomodónak (m.h.t.f.f.s.) nevezzük, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta F_n = 0$$

²lásd Thomas 05-ös bemutató 1., 2. és 3. fejezet (3-36. oldal).

Az alsó és felső összeg tulajdonságai:

$$\boxed{\text{T}_1} \quad s_F \leq S_F$$

(B) $m_k \leq M_k$ -ból következik.

(T₂) F^* : F -ből egy új osztópont elhelyezésével származik. Ekkor

$$s_F \leq s_{F^*} \leq S_{F^*} \leq S_F$$

Tehát a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg (a.k.ö.) nem csökkenhet, a felső közelítő összeg (f.k.ö.) nem nőhet.

(B) $s_F \leq s_{F^*}$ -ot bizonyítjuk. Az új osztópont kerüljön I_k -ba.

$$\begin{aligned} s_{F^*} - s_F &= m'_k(x^* - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{k-1}) = \\ &= (\underbrace{m'_k - m_k}_{\geq 0})(\underbrace{x^* - x_{k-1}}_{>0}) + (\underbrace{m''_k - m_k}_{\geq 0})(\underbrace{x_k - x^*}_{>0}) \geq 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

(T₃) $s_{F_1} \leq S_{F_2}$, F_1, F_2 tetszőleges. Tehát bármely a.k.ö. \leq bármely f.k.ö.-nél.

(B) Az egyesített felosztás segítségével:

$$\begin{array}{ccccc} s_{F_1} & \leq & s_{F_1 \cup F_2} & \leq & S_{F_1 \cup F_2} & \leq & S_{F_2} \\ T_2 \text{ miatt} & & T_1 \text{ miatt} & & T_2 \text{ miatt} & & \blacksquare \end{array}$$

$$\boxed{\text{T}_4} \quad \exists \sup \{s_F\} = h \text{ és } \inf \{S_F\} = H$$

$h = \int_a^b f(x) dx$ Darboux-féle alsó integrál, $H = \int_a^b f(x) dx$ Darboux-féle felső integrál

(B) $\{s_F\}$ felülről korlátos számhalmaz, hiszen bármely f.k.ö. felső korlát.

$\implies \exists$ szuprénuma.

Dedekind t.

$\{S_F\}$ -re hasonlóan bizonyítható.

(T₅)
$$h \leq H$$

(B) $s_{F_1} \leq S_{F_2} \quad \forall F_1\text{-re} \implies h \leq S_{F_2} \quad \forall F_2\text{-re} \implies h \leq H$

A határozott integrál definíciója:

(D) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, ha $h = H = I$. Ezt a közös I számot az f függvény $[a, b]$ -beli határozott integráljának nevezzük és

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f$$

módon jelöljük. (f : integrálandó függvény vagy integrandusz.)

(Pl.) $f(x) \equiv c \in \mathbb{R} \quad \int_a^b c dx = ?$

$$s_F = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a) \quad \forall F\text{-re.}$$

$$S_F = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c(b-a) \quad \forall F\text{-re.}$$

$$h = \sup \{s_F\} = c(b-a) = \inf \{S_F\} = H$$

Tehát

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

(Pl.) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_1^2 f(x) dx = ?$

$$s_F = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0 \quad \forall F\text{-re} \implies h = 0$$

$$S_F = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b-a = 2-1 \quad \forall F\text{-re} \implies H = 1 \neq h$$

$$\implies \not\exists \int_1^2 f(x) dx \quad (\text{Más intervallumon sem integrálható!})$$

(D) Jelölés:
 $R_{[a,b]}$ vagy $\sum_{[a,b]}$ az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza.

5.3. A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Segédtétel:

(T) Ha (F_n) m.h.t.f.f.s., akkor s_{F_n} és S_{F_n} konvergensek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F_n} = h; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{F_n} = H. \quad (\neg B)$$

(T₁)

1. Ha $\int_a^b f(x) dx \exists \implies \forall F_n$ m.h.t.f.f.s-ra: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{F_n} = \int_a^b f(x) dx$
2. Ha $\exists F_n$ m.h.t.f.f.s., melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{F_n} = I \implies \exists \int_a^b f(x) dx$ és $= I.$

(B)

1. A Segédtétel miatt: $s_{F_n} \rightarrow h \wedge S_{F_n} \rightarrow H$

De az integrálhatóság miatt: $h = H = \int_a^b f(x) dx.$

2. A Segédtétel miatt: $s_{F_n} \rightarrow h \wedge S_{F_n} \rightarrow H$

A feltétel miatt azonban $h = H(:= I) \implies \exists \int_a^b f(x) dx$ és $= I.$ ■

(D) Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$0 \leq O_F := S_F - s_F = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

(T₂)

$$\exists \int_a^b f(x) dx \iff \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists F : O_F < \varepsilon$$

(B)

$$1. \implies \varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$$

$\frac{\varepsilon}{2}$ -höz $\exists F^*$ és F^{**} , hogy $h - s_{F^*} < \frac{\varepsilon}{2}$ \wedge $S_{F^{**}} - H < \frac{\varepsilon}{2}$

$F := F^* \cup F^{**}$ (egyesített felosztás)

Tudjuk: $s_{F^*} \leq s_F \leq S_F \leq S_{F^{**}}$ Ebből:

$$0 \leq O_F = S_F - s_F \leq S_{F^{**}} - s_{F^*} = \underbrace{S_{F^{**}} - H}_{\geq 0} + \underbrace{h - s_{F^*}}_{\geq 0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. \Leftarrow

Mivel $s_F \leq h \leq H \leq S_F$ minden fennáll:

$$0 \leq H - h \leq S_F - s_F = O_F < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra} \implies H = h,$$

vagyis f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n. ■

(D) Az f függvény F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege:

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}),$$

ahol $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$: reprezentáns pont,
 $f(\xi_k)$: reprezentáns függvényérték.

(M₁) Geometriai tartalom: a függvénygörbe alatti (előjeles) terület közelítő értéke.

(M₂) $s_F \leq \sigma_F \leq S_F$ minden fennáll.

Ugyanis minden részintervallumon teljesül, hogy $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$. Ebből már következik az állítás.

(T₃)

1. $\exists \int_a^b f(x) dx = I \implies \forall F_n$ m.h.t.f.f.s-ra a reprezentáns pontok választásától függetlenül a σ_{F_n} integrálközelítő összeg sorozatra fennáll, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_n} = \int_a^b f(x) dx = I$$

2. $\exists \int_a^b f(x) dx = I \iff \exists F_n$ m.h.t.f.f.s., hogy a reprezentáns pontok választásától függetlenül $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_n} = I$.

(B)

1. Nyilvánvaló T_1 -ből, ugyanis $s_{F_n} \leq \sigma_{F_n} \leq S_{F_n} \implies \sigma_{F_n} \rightarrow I$.

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$I \quad \quad \quad I$$

2. $\neg B$

■

(M) Fontos, hogy a határérték a reprezentáns pontok választásától függetlenül létezzen.

Pl. a Dirichlet-függvényre tetszőleges F_n m.h.t.f.f.s-ra:

$$\xi_k \text{ rac. esetén: } \sigma_{F_n} = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = b - a \rightarrow b - a$$

$$\xi_k \text{ irrac. esetén: } \sigma_{F_n} = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0 \rightarrow 0.$$

Ezért a Dirichlet-függvény egyetlen intervallumon sem integrálható.

5.4. Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra

(T₁) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és monoton $\implies f \in R_{[a, b]}$

(B) f legyen monoton növő!

$$\Delta x_k := \frac{b-a}{n} \text{ (egyenletes felosztás; ekvidisztáns alappontok)}$$

$$\begin{aligned} O_F &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Tehát $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists F : O_F < \varepsilon$

$(F : I\text{-t } n \text{ egyenlő részre osztjuk, az } n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon} \text{ feltétel teljesülése}$

melllett.)

$$\boxed{\textcircled{T}_2} \quad f \in C_{[a,b]}^0 \implies f \in R_{[a,b]}$$

(B) Belátjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists F : O_F < \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ legyen tetszőleges. $f \in C_{[a,b]}^0 \implies f$ egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n, vagyis

$$\forall \varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{b-a} > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon^*) :$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon^*, \text{ ha } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon^*); \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

F_n legyen egy minden határon túl finomodó felosztás sorozat, tehát $\Delta F_n \xrightarrow[\infty]{n} 0$.

Ezért $\exists n_0 : \Delta F_{n_0} < \delta(\varepsilon^*) = \delta(\frac{\varepsilon}{b-a})$. Erre az F_{n_0} felosztásra igaz:

$$O_{F_{n_0}} = S_{F_{n_0}} - s_{F_{n_0}} = \sum_{k=1}^{n_0} (M_k - m_k) \Delta x_k =$$

A folytonosság miatt f felveszi szuprémumát, ill. infimumát ([Weierstrass II. tétele](#))

$$= \sum_{k=1}^{n_0} (f(\xi'_k) - f(\xi''_k)) \Delta x_k <$$

$$|\xi'_k - \xi''_k| \leq \Delta x_k < \delta(\varepsilon^*), \text{ így az egyenletes folytonosság miatt } 0 \leq f(\xi'_k) - f(\xi''_k) < \varepsilon^*$$

$$< \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon^* \Delta x_k = \varepsilon^* \sum_{k=1}^{n_0} \Delta x_k = \varepsilon^* (b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

■

Tehát $F = F_{n_0}$.

$$\boxed{\textcircled{T}_3} \quad f \text{ korlátos és egy pont kivételével folytonos } [a, b]\text{-n} \implies f \in R_{[a,b]}$$

(B) Belátjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists F : O_F < \varepsilon$.

Az intervallumot 3 részre osztjuk. (f az x_0 pontban nem folytonos)

1. Vizsgálat

$$O_{II} = (M_{II} - m_{II}) \cdot 2\delta \leq \frac{2K \cdot 2\delta}{|f(x)| \leq K} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Feltétel: $\delta < \frac{\varepsilon}{12K}$ (ε, K adott). Ilyen δ -t választva $O_{II} < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$2. [a, x_0 - \delta]\text{-n } f \text{ folytonos} \implies \exists F^{(1)} : O_I = O_{F^{(1)}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$3. [x_0 + \delta, b]\text{-n } f \text{ folytonos} \implies \exists F^{(2)} : O_{III} = O_{F^{(2)}} < \frac{\varepsilon}{3}$$
■

F : a 3 felosztás egyesítése:

$$O_F = O_I + O_{II} + O_{III} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

A következő tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

(T) Ha f korlátos és véges sok pont kivételével folytonos $[a, b]$ -n, akkor integrálható $[a, b]$ -n.

(T) Egy Riemann-integrálható függvény értékét véges sok pontban megváltoztatva a függvény integrálható marad, és az integrál értéke is ugyanaz.

(T) Ha $f \in R_{[-a, a]}$ és

$$\begin{aligned} &\text{fpáratlan:} & \int_{-a}^a f(x) dx &= 0 \\ &\text{fpáros:} & \int_{-a}^a f(x) dx &= 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

5.5. Newton–Leibniz-tétel

$\xrightarrow{\text{Thom}_3}$

$\xrightarrow{\text{App}}$

(T) **Newton–Leibniz-tétel**

Ha $f \in R_{[a, b]}$ és itt létezik primitív függvénye (F), azaz $x \in [a, b]$ -re $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

³lásd Thomas 05-ös bemutató 4. fejezet (37-48. oldal).

(B) F_n : m.h.t.f.f.s.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \\ &\quad + \dots + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Másrészt az $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ intevallumon az F függvényre alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel, miszerint

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = F'(\xi_k) \Delta x_k$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_{F_n}^f$$

Vagyis

$$F(b) - F(a) = \sigma_{F_n}^f$$

Mindkét oldal limeszét véve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_n}^f$$

A bal oldal határértéke önmaga, hiszen független n -től, a jobb oldalon f integrál közelítő összege az integrálhatósági feltétel miatt az integrálhoz tart. Tehát

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

■

Gy

(Pl.) $\boxed{\int_0^1 x^3 dx} = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

(Pl.) $\boxed{\int_0^{2\pi} \sin x dx} = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$

(Pl.) $\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$

(M) Mindkét feltétel fontos a Newton–Leibniz-tételben. Az alábbi példák mutatják, hogy egyik sem hagyható el.

(Pl.) $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

 $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

($x = 0$ -ban a definícióval kell számolni.)

$\int_0^1 f(x) \, dx \notin \mathbb{R}$, mert f nem korlátos, de \exists primitív függvény.

(Pl.) $\int_0^5 \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6) \, dx \notin \mathbb{R}$, mert f 2 pont kivételével folytonos. De $F \notin \mathbb{R}$, mert egy deriváltfüggvénynek (f lenne) nem lehet elsőfajú szakadása.

5.6. A Riemann-integrál tulajdonságai

[App](#)

(D) $f \in R_{[a,b]}$ ($b > a$) $\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$

(D) $\int_a^a f(x) \, dx := 0$ (az előzővel összhangban)

(T) Ha $f \in R_{[a,c]}$ és $f \in R_{[c,b]}$ ($a < c < b$) $\implies f \in R_{[a,b]}$ és

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\neg B)$$

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$ $\implies f \in R_{[a,c]}$, ha $c \in [a, b]$ $\quad (\neg B)$

(T) Ha $f, g \in R_{[a,b]}$ $\implies f + g \in R_{[a,b]}$ és $c \cdot f \in R_{[a,b]}$ és

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ,$$

$$\text{és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Tehát $R_{[a,b]}$ lineáris tér (vektortér).

(B) Pl. $f + g$ -re:

F_n : m.h.t.f.f.s.; reprezentáns pontok: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\sigma_{F_n}^f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \rightarrow \int_a^b f(x) dx = I_1$$

$$\sigma_{F_n}^g = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \rightarrow \int_a^b g(x) dx = I_2$$

a reprezentáns pontok választásától függetlenül.

$$\implies \sigma_{F_n}^{f+g} = \sum_{k=1}^n (f+g)(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \rightarrow I_1 + I_2$$

(D) $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés (operátor) funkcionál, ha

H : tetszőleges halmaz, \mathbb{R} : a valós számok halmaza.

(D) $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, ha

H : lineáris tér a valós számok teste felett, \mathbb{R} : a valós számok halmaza.

Φ lineáris operátor, tehát $\Phi(cx) = c\Phi(x)$, $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$.

(Pl.) $\Phi(f) := \int_a^b f(x) dx$, $\Phi : R_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál.

Ui. igaz: $\Phi(cf) = c\Phi(f)$ (homogén), $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ (additív).

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$ és $f(x) \geq 0$, ha $x \in [a, b]$ $\implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$

(B) $\sigma_F^f \geq 0 \forall F$ -re $\implies \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \sigma_F^f \geq 0$

$$\boxed{\textcircled{T} \quad \text{Ha } f, g \in R_{[a,b]} \text{ és } f(x) \leq g(x) \text{ } x \in [a, b] \text{-ben} \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx}$$

(B) $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$ + előző tételek.

Tehát

$$\begin{aligned} f \geq 0 : & \Phi(f) \geq 0 \\ f \leq g : & \Phi(f) \leq \Phi(g) \quad (\text{monotonitás}) \end{aligned}$$

5.7. Az integrálszámítás középértéktétele

$\xrightarrow{\text{App}}$

$$\boxed{\textcircled{D} \quad \text{Integrálközép:} \quad \varkappa := \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad (b > a)}$$

(T)

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$, $M = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$, $m = \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$, akkor $m \leq \varkappa \leq M$.
2. Ha $f \in C_{[a,b]}^0$, akkor $\exists \xi \in [a, b]$, hogy $f(\xi) = \varkappa$.

(B)

1. Mivel $m \leq f(x) \leq M$, az integrál monotonitása miatt:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Innen $(b-a)$ -val való osztással adódik az állítás.

2. Weierstrass II. tétele miatt f felveszi m -et és M -et, tehát

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b], \text{ hogy } f(\xi_1) = m \text{ és } f(\xi_2) = M$$

$[\xi_1, \xi_2]$ -re (ill. $[\xi_2, \xi_1]$ -re) alkalmazható a Bolzano-tétel. Mivel $m \leq \varkappa \leq M$, a Bolzano-tétel értelmében

$$\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \text{ (ill. } \xi \in [\xi_2, \xi_1]) \text{, hogy } f(\xi) = \varkappa$$

■

(D) Az f függvény f^+ pozitív részét és f^- negatív részét a következőképpen definiáljuk:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) > 0 \end{cases}$$

(M) Könnyen látható, hogy $f = f^+ + f^-$ és $|f| = f^+ - f^-$.

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$, ahol $a < b$, akkor

1. $f^+ \in R_{[a,b]}$, $f^- \in R_{[a,b]}$ és $|f| \in R_{[a,b]}$

2. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(B)

1. Az oszcillációs összegekre vonatkozó szükséges és elégsges tételeből következik, mivel $O_P^{f^+} \leq O_P^f < \varepsilon$ és $O_P^{f^-} \leq O_P^f < \varepsilon$, ezért f^+ , illetve f^- Riemann-integrálható, valamint különbségük $|f| \in R_{[a,b]}$.

2. Mivel

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

ezért az integrál monotonitása miatt

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

amit bizonyítani kellett. ■

(M) Ha nem tesszük fel, hogy $a < b$, akkor a 2. téTEL állítása

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

alakú lesz.

(Pl.) Az alábbi függvény példa arra, hogy ha $|f| \in R_{[a,b]}$, akkor $f \in R_{[a,b]}$ nem feltétlenül teljesül.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$ folytonos $\implies |f| \in R_{[a,b]}$, de $f \notin R_{[a,b]}$

5.7.1. Feladatok

1. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -3, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

Léteznek-e az alábbi integrálok?

a) $\int_0^2 f(x) dx$

b) $\int_0^2 |f(x)| dx$

c) $\int_0^2 f^2(x) dx$

2. A középértéktétel felhasználásával becsülje meg az

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

integrál értékét!

3. Határozza meg az

$$f(x) = \cos^3 x$$

függvény $[0, \pi]$ intervallumbeli integrálközepét!

4. Adjon 0-tól különböző alsó, illetve felső becslést az

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{x^4+x^2+1} dx$$

integrál értékére!

5. Mutassa meg, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség!

a) $0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx < \frac{1}{8}$

b) $0 < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < 1$

- c) $\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx < 1 - \frac{1}{e}$
- d) $\frac{e-1}{2e} < \int_0^1 xe^{-x^3} dx$
- e) $\left| \int_0^1 \frac{\cos(cx^3)}{x+1} dx \right| \leq \ln 2, \quad c \text{ tetszőleges valós szám}$
6. $\int_{-2}^2 \operatorname{sgn} x \cdot x^2 \cdot \cos x \, dx = ?$
7. $\int_0^2 \sqrt{1-2x+x^2} \, dx = ?$
8. $\int_{-2}^3 |x^3 - 2x^2| \, dx = ?$

5.8. Integrálfüggvény

[App](#)

(Pl.)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 3x - 2, & \text{ha } x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = ? , \quad \text{ha } x \in [0, 2] ; \quad F'(x) = ?$$

Megoldás.

Ha $x \in [0, 1]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

Ha $x \in (1, 2]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^x (3t - 2) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \left(3 \frac{t^2}{2} - 2t \right) \Big|_1^x = \frac{3}{2} x^2 - 2x + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1, & \text{ha } x \in (1, 2] \end{cases} \quad F'(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 3x - 2, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Tehát $F'(x) = f(x)$. Látni fogjuk, hogy ez nem véletlen.

(D) $f \in R_{[a,b]}$. Az

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [a, b]$$

függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

(T) Az integrálszámítás II. alaptétele

$$f \in R_{[a,b]}; \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

1. Az integrálfüggvény folytonos $[a, b]$ -ben.
 2. Ha még f folytonos is $x_0 \in (a, b)$ -ben, akkor F differenciálható x_0 -ban és
- $$F'(x_0) = f(x_0).$$

(B)

1. $f \in R_{[a,b]} \implies \exists K : |f(x)| \leq K$. Mi csak belső pontra bizonyítunk. Legyen $x_0 \in (a, b)$. Meg kell mutatnunk, hogy

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x K dt \right| = |K(x - x_0)| = K|x - x_0| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

2. $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \\
&= \left| \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt}{x - x_0} \right| = \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt}{x - x_0} \right| \leq \frac{\left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right|}{|x - x_0|} := \textcircled{*}
\end{aligned}$$

Mivel f folytonos x_0 -ban, $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

(Legyen x ilyen!) Most $|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, így ezzel a $\delta(\varepsilon)$ -nal

$$\textcircled{*} < \frac{\left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right|}{|x - x_0|} = \frac{|\varepsilon(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \varepsilon$$

■

Következmény:

1. Ha $f \in C_{[a,b]}^0$, akkor $\forall x \in (a, b)$ -re $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenciálható és $F'(x) = f(x)$.
2. Folytonos függvénynek minden létezik primitív függvénye.

5.8.1. Példák

(Pl.)
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

A függvényt zárt alakban nem tudjuk előállítani, de a következőket tudjuk róla:

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0 : F \text{ szig. monoton nő}$$

$$F''(x) = -2xe^{-x^2} : x < 0 : F \text{ alulról konvex, } x > 0 : F \text{ alulról konkáv}$$

$$\text{A függvény páratlan: } F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = \int_0^x e^{-(u)^2} (-1) du = -F(x)$$

(Helyettesítés hátrébb!)

Pl. Keresse meg az alábbi függvények deriváltjait!

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sin t^2 dt, \quad x \neq 0 \\ G(x) &= \int_0^{e^x} \sin t^2 dt \\ H(x) &= \int_{e^x}^{e^x+1} \sin t^2 dt \end{aligned}$$

$f(t) = \sin t^2$ folytonossága miatt $\exists F'(x)$ és $F'(x) = \sin x^2$.

$G(x) = F(e^x)$ deriválható, mert deriválható függvények összetétele. A láncszabállyal:

$$G'(x) = F'(e^x) \cdot e^x = (\sin e^{2x}) \cdot e^x$$

$H(x) = F(e^x + 1) - F(e^x)$ szintén a láncszabállyal deriválható:

$$H'(x) = F'(e^x + 1) \cdot e^x - F'(e^x) \cdot e^x = (\sin(e^x + 1)^2) \cdot e^x - (\sin e^{2x}) \cdot e^x$$

Pl. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t^2 dt}{x^2} = ?$

$\frac{0}{0}$ alakú és alkalmazható a L'Hospital-szabály:

(A számláló $\arctg t^2$ folytonossága miatt deriválható)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t^2 dt}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x^2}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^4} \cdot 2x}{2} = 0$$

Pl. $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & \text{ha } 0 \leq t < 1 \\ t-1, & \text{ha } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$1. F''(1) = ?$$

2. A $(0, 2)$ intervallumon hol konvex, ill. konkáv az F függvény?

f folytonossága miatt $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ x-1, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

$$F''(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$$

F' folytonos 1-ben. $g(x) = 1-x^2$, $h(x) = x-1$ mindenütt deriválható. Így

$$F''_-(1) = F''(1-0) = -2 \neq 1 = F''_+(1) = F''(1+0)$$

Tehát $\nexists F''(1)$.

F függvény $(0, 1)$ -ben konkáv ($F'' < 0$ itt) és $(1, 2)$ -ben konvex ($F'' > 0$ itt).

Gy

5.8.2. Feladatok

1. a) $\frac{d}{dx} \int_a^b \cos(x^3 + 1) dx = ?$

b) $\frac{d}{da} \int_a^b \cos(x^3 + 1) dx = ?$

c) $\frac{d}{db} \int_a^b \cos(x^3 + 1) dx = ?$

2. $F(x) = \int_0^x e^{t^2+1} dt; \quad G(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2+1} dt \quad H(x) = \int_{2x}^{3x} e^{t^2+1} dt$

Határozza meg a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

3. $f(x) = \int_0^x e^{x^2} (x^2 - 4) dx$

a) Hol monoton f ? Hol van lokális szélsőértéke?

b) Hol konvex, hol konkav? Hol van inflexiós pontja?

4. $f(x) = \int_0^x x^2 \arcsin x dx$

a) Milyen pozitív x -ekre differenciálható f ?

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x^2 \arcsin x dx}{x}$

c) Írja fel a függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

5. $f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{ha } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1, & \text{ha } 0 < t \leq 1 \end{cases}$

a) Írja fel a $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ függvényt! ($x \in [-1, 1]$)

b) Differenciálható-e a felírt G függvény $(-1, 1)$ -ben?

6. $f(x) = \int_0^x \frac{1}{8t^7 + 5t^3 + 2t + 6} dt, \quad x \in [0, 3]$

a) Van-e f -nek lokális szélsőértéke $(0, 3)$ -ban?

b) Hol veszi fel a függvény $[0, 3]$ -ban a minimumát, illetve maximumát?
(A minimum, ill. maximum értéke nem kell.)

c) Van-e inflexiós pontja f -nek?

5.9. Integrálás helyettesítéssel

$\xrightarrow{\text{Thom}_4}$

$\xrightarrow{\text{App}}$

(T) Legyen $f \in C_{[a,b]}^0$, $\varphi \in C_{[\alpha,\beta]}^1$ szigorúan monoton és $\varphi(t) \in [a,b]$, ha $t \in [\alpha,\beta] \cap ([\beta,\alpha])$.

1. Ekkor

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$(Vagyis \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)})$$

$$2. Ha \varphi(\alpha) = a \text{ és } \varphi(\beta) = b : \quad \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

(B)

1. Az integranduszok folytonossága miatt minden határozatlan integrál létezik. Legyen

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad x \in [a, b].$$

Azt kell belátnunk, hogy $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ primitív függvénye $F(\varphi(t))$ $[\alpha, \beta]$ -ban:

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

2.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

és

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

■

5.10. Integrálási módszerek

$\xrightarrow{\text{Thom}_5}$

5.10.1. sin és cos szorzata

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ezen azonosságok felhasználásával ($\alpha = a x$, $\beta = b x$):

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

Pl.
$$\begin{aligned} \boxed{\int \sin \pi x \cdot \cos 5x \, dx} &= \frac{1}{2} \int (\sin(\pi+5)x + \sin(\pi-5)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(\pi+5)x}{\pi+5} - \frac{\cos(\pi-5)x}{\pi-5} \right) + C \end{aligned}$$

Feladatok:

$$1. \int \sin \sqrt{2}x \cdot \sin 3x \, dx = ?$$

$$2. \int \cos 3x \cdot \cos 8x \, dx = ?$$

5.10.2. sin és cos páratlan kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n+1} x = \sin x \cdot (\sin^2 x)^n = \sin x (1 - \cos^2 x)^n = \dots$$

$$\cos^{2n+1} x = \cos x \cdot (\cos^2 x)^n = \cos x (1 - \sin^2 x)^n = \dots$$

(Az átalakítás után a hatványozás elvégzése szükséges)

Pl.
$$\begin{aligned} \boxed{\int \sin^3 x \, dx} &= \int \sin x \sin^2 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

⁴lásd Thomas 05-ös bemutató 5. fejezetet (49-53. oldal).

⁵lásd Thomas 08-as bemutató 1.-5. fejezetet (3-24. oldal).

Feladatok:

$$1. \int \cos^3 x \, dx = ?$$

$$2. \int \cos^7 x \, dx = ?$$

5.10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^n = \dots$$

$$\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n = \dots$$

(Azonos átalakítás a kitevőt csökkenti.)

$$\text{Pl. } \boxed{\int \sin^2 x \, dx} = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Feladatok:

$$1. \int \cos^2 x \, dx = ?$$

$$2. \int \cos^6 x \, dx = ?$$

5.10.4. sin és cos hatványainak szorzata

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx = ? \quad n, m \in \mathbb{N}^+$$

1. n és m közül legalább az egyik páratlan:

$$\begin{aligned} \text{Pl. } \boxed{\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx} &= \int \sin x \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, dx = \\ &= \int \sin x (\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C \end{aligned}$$

Feladat:

$$\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx = ?$$

2. n és m is páros:

$$\text{Pl. } \boxed{\int \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, dx} = \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx = \dots$$

5.10.5. Parciális integrálás

A szorzatfüggvény

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (u, v \in C_I^1)$$

deriválási szabályából

$$u(x) \cdot v'(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)$$

és ebből adódik a parciális integrálás módszere:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx, \quad x \in I$$

Határozott integrálra:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Az alábbi három esetet kell felismerniük:

1.

$$\int \text{polinom} \cdot \begin{cases} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \\ v' \end{cases} \, dx = ?$$

(n -edrendű polinomnál n -szer kell parciálisan integrálni.)

Pl.

$\int x^2 e^{5x} \, dx$	
$u = x^2$	$v' = e^{5x}$
$u' = 2x$	$v = \frac{1}{5}e^{5x}$

$$= x^2 \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} \, dx =$$

$$u = x \quad v' = e^{5x}$$

$$u' = 1 \quad v = \frac{1}{5}e^{5x}$$

$$= x^2 \frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \, dx \right) = e^{5x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125} \right) + C$$

Feladatok:

a) $\int (2x + 1) \sin 6x \, dx = ?$

b) $\int (x^2 + 1) \cos^2 x \, dx = ?$

c) $\int x \cos x \sin x \, dx = ?$

d) $\int x^2 \operatorname{sh} 2x \, dx = ?$

2.

$$\int \text{polinom. } v' \left\{ \begin{array}{l} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \operatorname{arcctg} ax \\ \operatorname{arsh} ax \\ \vdots \\ u \end{array} \right\} dx = ?$$

(Pl.) $\boxed{\int \ln x \, dx} = \int \frac{1}{v'} \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$
 $v' = 1 \quad u = \ln x$
 $v = x \quad u' = \frac{1}{x}$

Feladatok:

a) $\int \arcsin x \, dx = ?$

b) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

3.

$$\int \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{bx} \\ \sin bx \\ \cos bx \\ \operatorname{sh} bx \\ \operatorname{ch} bx \end{array} \right\} dx = ?$$

(Két parciális integrálással oldható meg.)

Bizonyos párosításokat sokkal egyszerűbben is integrálhatunk. Melyek ezek?

De pl. az alábbi integrált csak így tudjuk kiszámolni:

(Pl.) $\boxed{\int e^{3x} \sin 2x \, dx = ?}$

$$\int \begin{array}{l} e^{3x} \\ u = e^{3x} \\ u' = 3e^{3x} \end{array} \begin{array}{l} \sin 2x \\ v' = \sin 2x \\ v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} dx = -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int \begin{array}{l} e^{3x} \\ u = e^{3x} \\ u' = 3e^{3x} \end{array} \begin{array}{l} \cos 2x \\ v' = \cos 2x \\ v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x dx \right)$$

Ezt az egyenletet kell megoldani a keresett integrálra:

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = \frac{4}{13} \left(-\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \sin 2x \right) + C$$

Másik lehetőség: parciálisan integrálunk két különböző kiosztással, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk az eredeti integrálra.

$$X = \int \begin{array}{l} e^{3x} \\ u = e^{3x} \\ u' = 3e^{3x} \end{array} \begin{array}{l} \sin 2x \\ v' = \sin 2x \\ v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} dx = e^{3x} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \underbrace{\int 3e^{3x} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx}_{\frac{3}{2}Y}$$

$$X = \int \begin{array}{l} e^{3x} \\ v' = e^{3x} \\ v = \sin 2x \end{array} \begin{array}{l} \sin 2x \\ u = \sin 2x \\ u' = 2 \cos 2x \end{array} dx = e^{3x} \frac{1}{3} \sin 2x - \underbrace{\int \frac{1}{3} e^{3x} 2 \cos 2x dx}_{-\frac{2}{3}Y}$$

(Ezt az egyenletrendszert kell megoldani X -re.)

Gy

5.10.6. Racionális törtfüggvények integrálása

- lépés: Valódi törtfüggvény-e? Ha nem, osztással átalakítjuk egy racionális egész függvény és egy valódi racionális törtfüggvény összegére.
- lépés: A valódi törtfüggvény nevezőjében lévő polinomot felírjuk valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.
- lépés: Résztörtekre bontunk.

Pl. $\boxed{\int \frac{2x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 8x + 1}{x^2 + 2x - 8} dx = ?} := X$

Áltört: $(2x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 8x + 1) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - x$, maradék=1

$$X = \int \left(2x^2 - x + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} \right) dx = \int \left(2x^2 - x + \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+4} \right) dx =$$

$$= 2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln|x+4| + C$$

Ugyanis $\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$

Az együtthatók meghatározása:

1. Behelyettesítéssel (közös nevezőre hozás után a számlálókat egyeztetve):

$$\begin{aligned} 1 &= A(x+4) + B(x-2) \\ x = -4 : \quad 1 &= B(-6) \quad B = -\frac{1}{6} \\ x = 2 : \quad 1 &= A \cdot 6 \quad A = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. Együttható összehasonlítással:

$$\begin{aligned} 1 &= (A+B)x + 4A - 2B \\ 4A - 2B = 1 \text{ és } A+B = 0 &\implies A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Pl. $\boxed{\int \frac{x+1}{x^3+x} dx = ?} := X$

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \implies A = 1, B = -1, C = 1$$

$$\begin{aligned} X &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + C \end{aligned}$$

Feladatok:

Gy

$$\int \frac{2x^2}{x^4-1} dx = ?$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+2x+2)} dx = ? \quad \left(= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}{x^2+2x+2} \right) dx = \dots \right)$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx = ? \quad \left(= \int \left(1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \dots \right)$$

5.10.7. Integrálás helyettesítéssel

Gy

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

1. $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0}$

Teljes négyzetté kiegészítéssel az alábbi alakok valamelyikére hozzuk:

$$\sqrt{1 - A^2} \quad A := \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (vagy } A := \cos t, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\sqrt{B^2 + 1} \quad B := \operatorname{sh} t$$

$$\sqrt{C^2 - 1} \quad C := \operatorname{ch} t$$

$A \cos^2 t + \sin^2 t = 1; \quad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ azonosságok felhasználásával elvégezhető a gyökvonás.

(Pl.) $\boxed{\int \sqrt{1 - x^2} dx = ?} := X$

$$x = \sin t (= \varphi(t)) \implies t = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t (= \varphi'(t)) \quad (dx = \cos t dt)$$

$$\int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$X = \left(\frac{1}{2}t + \frac{2}{4}\sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} + C \right) \Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

Határozott integrál esetén:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

(Pl.)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Feladatok:

a) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx = ?$

b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-2x^2}} dx = ?$

c) $\int x^3\sqrt{16-x^2} dx = ?$

d) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}} dx = ?$

(Ez elemi úton is integrálható, mert $\int f'f^\alpha dx$ alakú. Oldjuk meg minden módon!)**Racionális törtfüggvény integráljára vezető helyettesítések**

2. $\boxed{\int R(e^x) dx}$

$e^x := t \rightarrow x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

(Pl.) $\boxed{\int \frac{1}{1+e^x} dx = ?} := X$

$$\int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t} \right) dt = -\ln|1+t| + \ln|t| + C$$

Ugyanis $\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$

$1 = At + B(1+t) \rightarrow t=0 : B=1, t=-1 : A=-1$

Ennek megfelelően a megoldás:

$$X = -\ln(1+e^x) + x + C$$

Feladatok:

a) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ?$

b) $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = ?$

3. $\boxed{\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx, \quad \sqrt[n]{ax+b} := t}$

(Pl.) $\boxed{\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ?} := X$

$$\sqrt{x-2} := t \quad \rightarrow \quad x = t^2 + 2 \quad \rightarrow \quad dx = 2t dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t dt &= 2 \int \frac{t^2+3-4}{t^2+3} dt = 2 \int \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) dt = \\ &= 2t - \frac{8}{3} \frac{\arctg \frac{t}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C \\ X &= 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}} \arctg \sqrt{\frac{x-2}{3}} + C \end{aligned}$$

Feladatok:

a) $\int x\sqrt{5x+3} dx = ?$

b) $\int (2x+1)\sqrt{(5x-3)^3} dx = ?$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = ?$

d) $\int \frac{3x^2+4}{\sqrt[3]{6x-4}} dx = ?$

4. $\boxed{\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} (i=1,2,\dots,n)\right) dx}$
 $t := x^{\frac{1}{q}}, \quad q : q_1, \dots, q_n \text{ legkisebb közös többszöröse}$

$$\text{Pl.} \quad \boxed{\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx = ?} := X \quad q_1 = 2, q_2 = 4, q = 4$$

$$t = x^{\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad x = t^4 \quad \Rightarrow \quad dx = 4t^3 dt$$

$$\int \frac{t^2}{t^3 + 1} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{1}{3} \frac{3t^2}{t^3 + 1} \right) dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C$$

$$X = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \ln \left| \sqrt[4]{x^3} + 1 \right| \right) + C$$

Feladatok:

$$\text{a)} \quad \int \frac{1+x^{\frac{3}{2}}}{3-x^{\frac{1}{3}}} dx = ?$$

$$\text{b)} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} dx = ?$$

$$\text{c)} \quad \int \frac{1}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}} dx = ?$$

$$5. \quad \boxed{\int R(\sin x, \cos x) dx}$$

$$t := \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t} \right)$$

$$\text{Pl.} \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)} = ?} := X$$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{2t} dt = \int \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{t^2}{4} + C$$

$$X = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{4} + C$$

(Pl.) $\boxed{\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = ?} := X$

$$\begin{aligned} \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt &= \int \frac{t^2+1}{t(1-t)(1+t)} dt = \\ &= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t} \right) dt = \dots \end{aligned}$$

Feladatok:

a) $\int \frac{1}{\sin x} dx = ?$

b) $\int \frac{1}{1-\sin x} dx = ?$

c) $\int \frac{1}{2-\cos x} dx = ?$

5.11. Impropius integrál

Thom₆

App

5.11.1. Definíciók

Ha az intervallum nem korlátos

(D) Ha $\forall \omega \in (a, \infty)$ -re $f \in R_{[a, \omega]}$:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) dx$$

Ha létezik a határérték, akkor az impropius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az impropius integrál divergens.

(Pl.) $\boxed{\int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2} dx = ?} := X$

⁶lásd Thomas 08-as bemutató 8. fejezet (49-50. oldal).

Megoldás. Részlektörtekre bontással kell dolgoznunk.

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \rightarrow 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x = -2 : \quad B = -2, \quad x = 1 : \quad A = 2$$

$$\begin{aligned} X &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_2^\omega \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_2^\omega \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \\ &= 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln(x-1) - \ln(x+2))|_2^\omega = 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \underbrace{(\ln(\omega-1) - \ln(\omega+2))}_{\infty-\infty \text{ alakú}} - (\ln 1 - \ln 4) = \\ &= 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\ln \frac{\omega-1}{\omega+2}}_{\ln \frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{2}{\omega}} \rightarrow 0} + \ln 4 \right) = 2 \ln 4 \end{aligned}$$

(D) Ha $\forall \omega \in (-\infty, b)$ -re $f \in R_{[\omega, b]}$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_\omega^b f(x) dx$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

Pl. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2) \sqrt{\ln(2-x)}} dx = ?$:= X

Megoldás.

$$\begin{aligned} X &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^{-1} \underbrace{\frac{-1}{2-x} (\ln(2-x))^{-\frac{1}{2}}}_{f' f^\alpha \text{ alakú}} dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \left. \frac{(\ln(2-x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_{\omega}^{-1} = \\ &= 2 \lim_{\omega \rightarrow -\infty} (\sqrt{\ln 3} - \sqrt{\ln(2-\omega)}) = -\infty \quad (\text{divergens}) \end{aligned}$$

Egy fontos megjegyzés

D) Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált konvergensnek mondjuk, ha tetszőleges $c \in (a, b)$ mellett

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{és} \quad \int_c^b f(x) dx$$

mindketten konvergens integrálok, és a fenti integrál divergens, ha az utóbbi két integrál közül akár csak az egyik divergens.

D) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\omega_2 \rightarrow \infty \\ \omega_1 \rightarrow -\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx$

M) Az előző definíció miatt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) dx$.

Ui. $\int_{-\infty}^{\infty} x dx \neq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} x dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{-\omega^2}{2} \right] = 0$, mert pl. $\int_0^{\infty} x dx$ divergenciája miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \text{ is divergens.}$$

Ha a függvény nem korlátos

D) Ha a -ban nem korlátos, de $f \in R_{[a+\delta, b]}$ ($a < a + \delta < b$)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx \quad \text{vagy} \quad = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^b f(x) dx$$

D) Ha b -ben nem korlátos, de $f \in R_{[a, b-\delta]}$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx \quad \text{vagy} \quad = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

(D) Ha $c \in (a, b)$ -ben nem korlátos:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) \, dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) \, dx$$

(Pl.) $\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = ? := X$

$$X = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f' f^\alpha \text{ alakú}} (\arcsin x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left. \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{1-\delta} = \\ = \frac{2}{3} \lim_{\delta \rightarrow +0} \left((\arcsin (1-\delta))^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

(Pl.) $\int_5^7 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} \, dx = ? := X$

$$X = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{5+\delta}^7 (x-5)^{-\frac{2}{3}} \, dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left. \frac{(x-5)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_{5+\delta}^7 = 3 \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\delta} \right) = 3 \sqrt[3]{2}$$

5.11.2. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ impro prius integráljai

(Pl.) Milyen α -ra konvergens $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx$?

Megoldás.

Ha $\alpha = 1$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^\omega \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^\omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln \omega - \ln 1) = \infty, \quad \text{tehát divergens}$$

Ha $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^\omega x^{-\alpha} \, dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^\omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right]$$

Konvergens, ha $1 - \alpha < 0$, tehát $\alpha > 1$.

Divergens, ha $1 - \alpha > 0$, tehát $\alpha < 1$.

Összefoglalva:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{konvergens, } & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, } & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(Pl.) Milyen α -ra konvergens $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$?

Megoldás.

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{konvergens, } & \text{ha } \alpha < 1 \\ \text{divergens, } & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ui.: $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \ln x \Big|_\delta^1 = \lim_{\delta \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \delta) = \infty, \quad \text{divergens}$$

$\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\delta^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_\delta^1 = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]$$

Konvergens, ha $1 - \alpha > 0$, tehát $\alpha < 1$.

Divergens, ha $1 - \alpha < 0$, tehát $\alpha > 1$.

(Pl.) Milyen α -ra konvergens $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$?

Megoldás.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{konz., ha } \alpha < 1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{konz., ha } \alpha > 1} \quad \text{így divergens } \forall \alpha \text{-ra}$$

5.11.3. Az improprius integrálok néhány tulajdonsága

T₁ *Cauchy-kritérium*

Az $\int_a^\infty f(x) dx$ (ill. $\int_{-\infty}^b f(x) dx$) improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy $\forall \omega_1 > \Omega, \omega_2 > \Omega$ (ill. $\omega_1 < \Omega, \omega_2 < \Omega$) esetén:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

(B) ($\neg B$) ■

(D) Ha $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergens, akkor az improprius integrált abszolút konvergensnek mondjuk.

(D) Ha $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergens, de $\int_a^\infty |f(x)| dx$ nem konvergens, akkor az improprius integrált feltételesen konvergensnek mondjuk.

T₂ Ha $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergens, akkor $\int_a^\infty f(x) dx$ is konvergens, és

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$$

(B)

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \quad \omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon)$$

Az első egyenlőtlenség a határozott integrálnál **tanultak** miatt, a második pedig az abszolút konvergencia és T₁ miatt áll fenn. Tehát $\int_a^\infty f(x) dx$ is konvergens.

Másrészt:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{miatt}$$

$$-\int_a^\omega |f(x)| \, dx \leq \int_a^\omega f(x) \, dx \leq \int_a^\omega |f(x)| \, dx \quad \forall \omega\text{-ra} \quad (\omega > 0)$$

Ekkor a limeszekre is igaz:

$$-\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega |f(x)| \, dx \leq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) \, dx \leq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega |f(x)| \, dx$$

tehát

$$\begin{aligned} -\int_a^\infty |f(x)| \, dx &\leq \int_a^\infty f(x) \, dx \leq \int_a^\infty |f(x)| \, dx \\ \implies \left| \int_a^\infty f(x) \, dx \right| &\leq \int_a^\infty |f(x)| \, dx \end{aligned}$$

■

Majoráns kritérium

(T₃) $f \in R_{[a,\omega]}$ $\forall \omega \in (a, \infty)$ -re és $|f(x)| \leq g(x)$ $x \in [a, \infty)$ -re.

Ha $\int_a^\infty g(x) \, dx$ konvergens, akkor $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$ is az (az előző téTEL miatt $\int_a^\infty f(x) \, dx$ is konvergens) és

$$\left(\left| \int_a^\infty f(x) \, dx \right| \leq \right) \int_a^\infty |f(x)| \, dx \leq \int_a^\infty g(x) \, dx$$

(B) g -re igaz a Cauchy-kritérium:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

De $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ miatt:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)| \, dx \right| \leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

tehát $|f|$ -re is teljesül a Cauchy-kritérium.

Másrészt:

$$\int_a^{\omega} |f(x)| \, dx \leq \int_a^{\omega} g(x) \, dx$$

■

$\forall \omega$ -ra és ezért a limeszekre is teljesül.

Minoráns kritérium

(T₄) Ha $0 \leq h(x) \leq f(x)$ $x \in [a, \infty)$ -re és $\int_a^{\infty} h(x) \, dx = \infty$ $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \, dx = \infty$

(B) Ha $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ konvergens lenne, akkor az előző téTEL miatt $\int_a^{\infty} h(x) \, dx$ is konvergens lenne. ↴

(M) Hasonló tételek mondhatók ki a $(-\infty, b]$, ill. $[a, b]$ intervallumon definiált impro prius integrálokra is.

5.11.4. Feladatok

Gy

1. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = ?$

2. $\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = ?$

3. $\int_0^{\infty} e^{-2x} \, dx = ?$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$

5. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+4)} dx = ?$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = ?$

7. $\int_3^{\infty} \frac{8}{(x-2)(x^2+4)} dx = ?$

8. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = ?$

9. $\int_3^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx = ? \quad (t := \sqrt{x-3})$

10. $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = ? \quad (t := e^x)$

11. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}+1} dx = ? \quad (t := e^x)$

12. Konvergens-e az alábbi integrál?

a) $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^3+1} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^3+1} dx$

13. Konvergens-e az

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+2x^2+2} dx$$

improprius integrál? Ha igen, adjunk becslést az integrál értékére!

5.12. Az integrálszámítás alkalmazása

$\xrightarrow{\text{Thom}_7}$

5.12.1. Terület

$\xrightarrow{\text{App}}$

$\xrightarrow{\text{App}}$

A határozott integrál definíciója azonnal adja a következőt.

Ha egy $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon nem negatív, és integrálható, akkor a grafikonja, az x tengely, illetve az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt általánosított trapéz területét a következő képlet adja.

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

$\xrightarrow{\text{Gy}}$

(Pl.) Számoljuk ki az egységsugarú félkör területét!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ekkor a terület:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2t + 1}{2} \, dt = \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

A helyettesítéses integrál, illetve az inverzfüggvény deriválási szabálya adja a következőt. Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $y \in C_{[\alpha, \beta]}^0$ nem negatív, $x \in C_{[\alpha, \beta]}^1$ pedig szigorúan monoton nő, akkor a terület képlete

$$\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) \, dt.$$

(Pl.) Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör területét!

Legyen $x(t) = -\cos t$, $y(t) = \sin t$ és $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

Ekkor a terület:

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin t \, dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

⁷lásd Thomas 06-os bemutató.

5.12.2. Szektorterület

Ha $r \in C_{[\alpha, \beta]}^0$ nem negatív, akkor az $r(\varphi)$ polárkoordinátkal adott görbe, illetve az α és a β iránytangensű sugarak által közrezárt szektor területét a következő képlettel számolhatjuk ki.

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \, d\varphi$$

(Pl.) Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör területét!

Ehhez legyen $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ és $r(\varphi) = 1$.

Ekkor a terület:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1^2 \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

(Pl.) Számoljuk ki az egységnégyzet területét!

Ehhez legyen $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ és $r(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\cos \varphi}, & \text{ha } \varphi \in [0, \pi/4] \\ \frac{1}{\sin \varphi}, & \text{ha } \varphi \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases}$.

A terület:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\varphi) \, d\varphi &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/4} r^2(\varphi) \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2(\varphi) \, d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi|_0^{\pi/4} + -\operatorname{ctg} \varphi|_{\pi/4}^{\pi/2}) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

5.12.3. Forgátest térfogata

App

Ha $f \in C_{[a, b]}^0$, akkor az x tengely körüli megforgatásával kapott forgátest térfogatát a következő képlet adja.

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

(Pl.) Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ekkor a térfogat:

$$\pi \int_{-1}^1 1 - x^2 \, dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = \pi \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{4}{3}\pi$$

Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $y \in C_{[\alpha, \beta]}^0$, és $x \in C_{[\alpha, \beta]}^1$ pedig szigorúan monoton nő, akkor a térfogat képlete

$$\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) \, dt$$

Pl. Számoljuk ki újra az egységsugarú gömb térfogatát!

Legyen $x(t) = -\cos t$, $y(t) = \sin t$ és $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

Ekkor a térfogat:

$$\pi \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \sin t \, dt = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t \, dt = \pi \left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

5.12.4. Forgátest felszíne

Ha $f \in C_{[a,b]}^1$ nem negatív, akkor az x tengely körüli megforgatásával kapott forgátest palástjának felszínét a következő képlet adja.

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Pl. Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ekkor a felszín:

$$2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} \, dx = 2\pi \int_{-1}^1 1 \, dx = 4\pi$$

Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $x, y \in C_{[\alpha, \beta]}^1$, y nem negatív, akkor a felszín képlete

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

(Pl.) Számoljuk ki újra az egységsugarú gömb felszínét!

Legyen $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ és $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

Ekkor a felszín:

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\pi (-\cos t|_0^{\pi}) = 4\pi$$

App

5.12.5. Ívhosszúság

Ha $f \in C_{[a,b]}^1$, akkor hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

(Pl.) Számoljuk ki az egységsugarú félkör kerületét!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ekkor a kerület:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \arcsin x|_{-1}^1 = \pi$$

Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $x, y \in C_{[\alpha, \beta]}^1$, akkor az ívhossz képlete

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

(Pl.) Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör kerületét!

Legyen most $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ és $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

Ekkor

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \pi$$

Tárgymutató

- abszolút konvergens
 - improprius integrál [247](#)
 - számsor [54](#)
- Archimédesz-axióma [6](#)
- aszimptota [184](#)
- aszimptotikusan egyenlő [82](#)
- átviteli elv [94](#)
- belő pont [110](#)
- Bolzano–Weierstrass kiválasztási téTEL [37](#)
- Bolzano Tétel [111](#)
- Cantor-axióma [6, 28](#)
- Cauchy
 - konvergenciakritérium
 - függvényre [92](#)
 - improprius integrálra [247](#)
 - számsorozatra [37](#)
 - számsorra [49](#)
 - sorozat [38](#)
 - szorzat [75](#)
- Darboux-féle integrál (alsó, felső) [213](#)
- Dedekind folytonossági téTEL [8](#)
- deriválási szabályok [123](#)
 - inverz függvény [129](#)
 - láncszabály [125](#)
- deriválhatóság
 - baloldali [120](#)
 - intervallumbeli [120](#)
 - jobboldali [119](#)
 - magasabbrendű [126](#)
 - pontbeli [119, 121, 122](#)
- differenciál [122](#)
- differenciálási szabályok [123](#)
 - inverz függvény [129](#)
- láncszabály [125](#)
- differenciálhatóság
 - baloldali [120](#)
 - intervallumbeli [120](#)
 - jobboldali [119](#)
 - magasabbrendű [126](#)
 - pontbeli [119, 121, 122](#)
- divergencia
 - számsoré [44](#)
 - számsorozaté [11](#)
 - végtelenhez [11](#)
- érintő [123](#)
- értékkészlet [88](#)
- értelmezési tartomány [88](#)
- e szám [33](#)
- felosztás [212](#)
 - finomsága [212](#)
 - sorozat [212](#)
- folytonosság
 - baloldali [99](#)
 - egyenletes [115](#)
 - intervallumbeli [110](#)
 - jobboldali [99](#)
 - pontbeli [99, 122](#)
- függvény [88](#)
 - exponenciális [134](#)
 - exponenciális hatvány [137](#)
 - hatvány [130](#)
 - hiperbolikus [149](#)
 - inverz [128](#)
 - logaritmikus [135](#)
 - összetett [125](#)
 - trigonometrikus [138](#)

függvényvizsgálat 184

görbék

paraméteres 189

polárkoordinátákkal 193

gyökkritérium 64

hányados kritérium 61, 62

harmonikus sor 45

határ

alsó 8

felső 8

határérték

egyértelműség 12

függvényé 91, 96, 97

baloldali 92

jobboldali 92

számsorozaté 9

végtelen 11

határpont 110

Heine tétele 117

hibabecslés 52, 70, 72

infimum 8

inflexió 170, 176

integálközép 223

integrál

határozatlan 206

határozott 214, 221

improprius 242–244

Riemann 214

integrálás

helyettesítéssel 231, 238

parciális 234

racionális függvényeké 236

integrálfüggvény 227

integrálkritérium 68

integrálszámítás I. alaptétel 165

integrálszámítás II. alaptétele 227

invertálhatóság

függvényé 128

invertálhatóság (függvényé) 128

inverz függvény 128

kompakt halmaz 110

konkáv függvény 170

konvergencia

abszolút 54

egyidejű 68, 85

elégséges feltétele 27

feltételes 54

függvényé 91

számsoré 43, 44

számsorozaté 9

szükséges feltétele 12, 50

konvex függvény 170

korlátos

függvény 88

halmaz 8

számsorozat 9

környezet 91

közeliítő összeg 216

alsó 212, 213

felső 212, 213

középértéktételek

differenciáliszámítás

Cauchy 164

Lagrange 164

Rolle 163

integrálszámítás 223

kritérium

gyök 64

hányados 61, 62

integrál 68

majoráns 57

minoráns 58

külső pont 110

L'Hospital-szabály 166

láncszabály 125

legkisebb felső korlát 8

legnagyobb alsó korlát 8

Leibniz

kritérium 51

sor 51

limesz

függvényé 91, 96, 97

- ~ inferior 39
- számsorozaté 9
- ~ szuperior 39
- lokálisan csökken 174
- lokálisan nő 174
- lokális szélsőérték 162, 175
- m.h.t.f.f.s. 212
- majoráns kritérium 57
 - improprius integrál 248
- minoráns kritérium 58
 - improprius integrál 249
- monoton
 - függvény 88, 128
 - intevallumon 170
 - sorozat 27
- nagyságrend
 - azonos 80
 - kisebb 87
- Newton–Leibniz-tétel 219
- nyílt halmaz 110
- omega Ω 80
- ordó 80, 86
- oszcillációs összeg 215
- összeg
 - számsoré 43
- osztópont 212
- páratlan függvény 89
- páros függvény 89
- periodikus függvény 89
- polinom 103
- primitív függvény 206
- racionális függvény
 - egész 103
 - integrálása 236
 - tört 105
- rendőrelv 22
 - speciális ~ 23
- részintervallum 212
 - hossza 212
- részletösszeg sorozat 43
- részsorozat
 - konvergens 37
- sor
 - numerikus 43
- sorozat
 - numerikus 8
 - részletösszeg 43
 - Stirling-formula 82
- szakadási helyek 99
 - elsőfajú 99
 - másodfajú 99
 - megszüntethető 99
 - véges ugrás 99
- számsor 43
 - $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ 55, 70
 - átrendezés 77
 - átzárójelezés 76
 - divergens 44
 - geometriai 45
 - konvergens 44
 - Leibniz 51
 - mértani 45
- számsorozat 8
 - $(1 + \frac{1}{n})^n$ 31
 - $\sqrt[n]{n}$ 23
 - $\sqrt[p]{p}$ 23
 - a^n 23
 - divergens 11
 - konvergens 9
 - monoton 27
 - nagyságrend 80
 - rekurzióval adott 28
- szorzat
 - Cauchy 75
 - természetes 74
- szupréum 8
 - természetes szorzat 74
- teta Θ 80
- torlódási pont 91
 - sorozaté 39

valós szám [5](#)

Weierstrass tétele

I. [113](#)

II. [113](#)

zárt halmaz [110](#)