Analízis I Vizsga - Elméleti áttekintő

Karsa Zoltán István

2018. december 14.

A jegyzetben megtalálható a hivatalos honlapról származó tételsor kidolgozott változata, ahol a tételsor nem kéri a bizonyítást, nem is mutatom be. Ugyanakkor érdemes ellenőrizni az éppen aktuális tételeket. A triviális definíciókat, összefüggéseket nem tárgyalom.

Tételek

1.1. Algebra alaptétele 3
2.1. Határérték egyértelműsége 3
2.2. Cauchy-féle konvergenciakritérium 4
2.3. Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel 4
2.4. Rendőr-elv 4
2.5. Speciális rendőr-elv 4
2.6. Összeg határértéke 4
2.7. Szorzat határértéke - Zérósorozat . 4
2.8. Szorzat határértéke 4
2.9. Reciprok határértéke 5
2.10. Tört határértéke 5
2.11. Monoton, korlátos sorozat konvergens 5
2.12. Nevezetes számsorozatok 5
3.1. Átviteli elv (szükséges és elégséges felt. határértékre) 6
3.2. Összeg és szorzatfüggvény határértéke 6
3.3. Bolzano-tétele 6
3.4. Weiesstrass I. tétele 7
3.5. Weiesstrass II. tétele 7
3.6. Elégséges tétel invertálhatóságra . 7
3.7. Heine tétele 7
4.1. Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra 7
4.2. Szükséges feltétel 8
4.3. Deriválási szabályok 8
4.4. Inverz függvény deriváltja 8
5.1. Érintő egyenes egyenlete 8
5.2. Lokális szélsőérték és a derivált közötti kapcsolat 9
5.3. Rolle-tétel (Rolle-féle középérték) . 9
5.4. Lagrange-féle középértéktétel . . . 9
5.5. Integrálszámítás I. alaptétele . . . 9
5.6. L'Hospital-szabály 9
5.7. Paraméteres görbék t_0-beli deriváltja 9
6.1. Parciális integrálás 10
6.2. Helyettesítéses integrál 10
7.1. Alsó és felső közelítőösszeg viszonya 10
7.2. Darboux-féle alsó és felső integrál . 11
7.3. Szükséges és elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra 11
7.4. Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra 11
7.5. Newton-Leibniz tétel 11
7.6. Integrálszámítás középértéktétele . 11
7.7. Az integrálszámítás II. alaptétele . 12
7.8. Határozott integrál, helyettesítéssel 12

Definíciók

1.1. Komplex számok algebrai alakja . . 3
2.1. Valós számsorozatok konvergenciája 3
2.2. Divergencia 3
2.3. Környezet 5
2.4. Torlódási pont 5
2.5. Limesz szuperior, inferior 5
3.1. Véges helyen vett véges határérték 6
3.2. Folytonosság 6
3.3. Szakadások osztályozása 6
3.4. Kompakt halmaz 6
3.5. Inverz függvény 7
3.6. Egyenletes folytonosság 7
4.1. Differenciahányados 7
4.2. Differenciálhányados 7
4.3. Hiperbolikus függvények 8
5.1. Lokális szélsőérték 8
6.1. Primitív függvények 10
6.2. Határozatlan integrál 10
7.1. Alsó és felső közelítő összeg 10
7.2. Minden határon túl finomodó felosztás sorozat 10
7.3. Riemann-féle határozott integrál . 11
7.4. Oszcillációs összeg 11
7.5. Integrálközép 11
7.6. Integrálfüggvény 12

1. Komplex számok

Definíció 1.1 ▶ Komplex számok algebrai alakja

Komplex számnak nevezzük azokat a $z = x+iy$ kifejezéseket, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$, x-t valós résznek, míg y-t képzetes (imaginárius) résznek hívjuk és így jelöljük: $Re(z) = x$ és $Im(z) = y$. A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$

Egy komplex szám konjugáltja: $\bar{z} = x - iy$, abszolút értéke, a szám origótól vett távolsága: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ A komplex számokat megadhatjuk még trigonometrikus és exponenciális alakban is:

Trigonometrikus alak: A φ szöggel elforgatott r hosszúságú komplex szám trigonometrikus alakja: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Az algebrai alakból a φ szögre: $\tan\varphi = Im(z)/Re(z)$, fontos hogy a tangens függvény tulajdonságai miatt ellenőriznünk kell, valóban abba a negyedbe-e esik a szám.

Exponenciális alak: A φ szöggel elforgatott r hosszúságú komplex szám exponenciális alakja: $z = re^{i\varphi}$, a szöget megkaphatjuk az előbbihez hasonlóan. Az **Euler-formula**: $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ami fennáll $\forall\varphi \in \mathbb{R}$-re. Láthatjuk, ha $\varphi = \pi$ és $r = 1$, akkor egy olyan számot kapunk, ami pont -1, innen: $e^{\pi} + 1 = 0$

Míg az algebrai alakban két komplex szám összegét, különbségét könnyen megállapíthatjuk, addig n-dik hatványát, vagy több szám szorzata már igen nehézkes, ezeket érdemes trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadni, néhány összefüggés:

- $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
- $z^n = (re^{i\pi})^n = r^n e^{in\pi}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$ és $k = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Tétel 1.1 ▶ Algebra alaptétele

Bármely legalább elsőfokú $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinomnak van gyöke, multiplicitással számolva pontosan $n = deg(p)$ (polinom foka) db komplex gyöke van és ezen polinomok a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen szorzattá alakíthatók a gyökök segítségével: $p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n)$

2. Valós számsorozatok

Definíció 2.1 ▶ Valós számsorozatok konvergenciája

Azt mondjuk hogy a_n sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

Definíció 2.2 ▶ Divergencia

A nem konvergens sorozatokat divergensnek mondjuk. Egy sorozat divergens, azaz $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty[-\infty]$, ha $\forall P > 0[P < 0]$-hoz $(P \in \mathbb{R})$ $\exists N(P) \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > P[a_n < P]$, ha $n > N(P)$

Tétel 2.1 ▶ Határérték egyértelműsége

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, akkor $A = B$

Bizonyítás: Indirekt módon bizonyítunk: T.f.h. ekkor $A \neq B$, valamint $A > B$ (ez igazából mindegy is), ekkor a határértékeke közötti különbség: $d = A - B$, adjuk meg a határértékek egy ε

sugarú környezetét d-vel, pl.: $\varepsilon = d/3$, ekkor a környezetek metszete üres halmaz (képzeljünk el egy számegyenest). A konvergencia definíciója alapján, létezik $N_1(\varepsilon)$ és $N_2(\varepsilon)$, ekkor igaz, hogy:

$$a_n \longrightarrow A, \text{ ha } n > N_1(\varepsilon), \text{ akkor } A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$
$$a_n \longrightarrow B, \text{ ha } n > N_2(\varepsilon), \text{ akkor } B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon$$

Tehát ekkor ha $n > max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, akkor $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \cap (B-\varepsilon, B+\varepsilon) = 0$, üres halmaz, ellentmondás.

Tétel 2.2 ▶ Cauchy-féle konvergenciakritérium

Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ fennáll, $|a_m - a_n| < \varepsilon$, $\forall n, m > M(\varepsilon)$ esetén.

A tétel azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszolegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a tételt használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

Tétel 2.3 ▶ Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel

Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. (Ez racionális számok halmazán már nem igaz)

Tétel 2.4 ▶ Rendőr-elv

Ha $a_n \longrightarrow A$, $b_n \longrightarrow A$, és $\forall n$-re $a_n < c_n < b_n$, akkor $c_n \longrightarrow A$

Bizonyítás: A határérték def. szerint: $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ és $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$ mivel $a_n < c_n < b_n$: $A - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < A + \varepsilon$, innen $c_n \longrightarrow A$

Tétel 2.5 ▶ Speciális rendőr-elv

$\forall n$-re, ha $a_n \geq [\leq] b_n$ és $b_n \longrightarrow \infty[-\infty]$, akkor $a_n \longrightarrow \infty[-\infty]$

Tétel 2.6 ▶ Összeg határértéke

$a_n \longrightarrow A$, $b_n \longrightarrow B$, akkor $(a_n + b_n) \longrightarrow A + B$

Bizonyítás: Legyen $A + B = C$, azaz $(a_n + b_n) \longrightarrow C$. Mivel a_n és b_n konvergens, és határértékei A, B, ezért, ha $n > N_a(\varepsilon)$, akkor $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ illetve ha $n > N_b(\varepsilon)$, akkor $B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$, innen: $|(a_n + b_n) - (A + B)| < 2\varepsilon$, ha $n > N_c(\varepsilon) = max\{N_a(\varepsilon/2), N_b(\varepsilon/2)\}$

Tétel 2.7 ▶ Szorzat határértéke - Zérósorozat

$a_n \longrightarrow 0$, b_n korlátos, akkor $(a_n b_n) \longrightarrow 0$

Bizonyítás: Mivel a_n konvergens, $|a_n| < \varepsilon$, ha $n > N_a(\varepsilon)$, illetve b_n korlátos, azaz $\exists K$, hogy $|b_n| \leq K$, bármely n-re. Így $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \varepsilon K$, ha $n > N_a(\varepsilon)$, tehát $N_{ab}(\varepsilon) = N_a(\varepsilon/K)$

Tétel 2.8 ▶ Szorzat határértéke

$a_n \longrightarrow A$, $b_n \longrightarrow B$, akkor $(a_n b_n) \longrightarrow AB$

Bizonyítás: Bontsuk fel a szorzatot az alábbi módon: $a_n b_n = (a_n - A)(b_n - B) + Ab_n + Ba_n - AB$ (látható, hogy a szorzat értékét nem változtattuk így meg), midőn n tart a végtelenbe $(a_n - A)(b_n - B) \longrightarrow 0$ (összeg és az előző tétel szerint), valamint $Ab_n \longrightarrow AB$ és $Ba_n \longrightarrow AB$ (konstans szorzat sz.), így $a_n b_n \longrightarrow 0 + AB + AB - AB = AB$

Tétel 2.9 ▶ Reciprok határértéke

$b_n \longrightarrow B(\neq 0)$, ekkor $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{B}$

Bizonyítás: T.f.h. $B > 0$, a határérérték definíciója szerint: $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}| = |\frac{B-b_n}{b_n B}| = \frac{|B-b_n|}{b_n B} < \frac{\varepsilon}{B/2B}$

Tétel 2.10 ▶ Tört határértéke

$a_n \longrightarrow A, b_n \longrightarrow B(\neq 0)$, ekkor $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{A}{B}$

Bizonyítás: Átalakítva: $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$, az előző tétel és a szorzat határértéke szerint: $\longrightarrow A\frac{1}{B} = \frac{A}{B}$

Tétel 2.11 ▶ Monoton, korlátos sorozat konvergens

i. Ha a_n sorozat monoton nő és felülről korlátos, akkor konvergens

ii. Ha a_n sorozat monoton nő és felülről korlátos, akkor konvergens

Bizonyítás: A bizonyításhoz az alábbi segédtételt használjuk fel, csak az i) esetet bizonyítom:

1. Lemma (Cantor-axióma). *Egymásba skatulyázott nem üres, korlátos, zárt intervallumok metszete nem üres.*

Konstruáljunk egy nem üres, zárt, intervallum skatulyázást: $I_k = [c_k, d_k]$, ahol c_k a sorozat egy-egy eleme, míg d_k felső korlát. Láthatjuk hogy $d_k - c_k = 0$, ha $k \longrightarrow \infty$, azaz az intervallumok hossza szinte nulla. Ekkor a Cantor-axióma szerint, az intervallum sokaságok metszete nem üres, méghozzá: $\bigcap I_k = A$ és ekkor $a_n \longrightarrow A$. Legyen tehát $c_1 = a_1$ és $d_1 = K$, ekkor köztes pont: $f_1 = \frac{c_1+d_1}{2}$. Ha f_1 felső korlát, akkor $d_2 = f_1$, $c_2 = c_1$, ha nem, akkor $\exists a_n > f_1$, így $f_2 = \frac{(c_2=)a+d_2}{2}$...

Tétel 2.12 ▶ Nevezetes számsorozatok

i. $a^n \longrightarrow \begin{bmatrix} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ div. & a \leq -1 \end{bmatrix}$

ii. $\sqrt[n]{p} \longrightarrow 1 (p > 0)$, $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

iii. Nagyságrendek: $\log n << n^k << a^n << n! << n^n$

iv. $(1 + 1/n)^n \longrightarrow e$

Definíció 2.3 ▶ Környezet

Egy t pont ε sugarú környezete, ha $t \in \mathbb{R}$: $K_\varepsilon(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, ha $t = \infty$ esetén $K_p(+\infty) = (p, \infty)$, míg $t = -\infty$ esetén $K_m(-\infty) = (-\infty, m)$

Definíció 2.4 ▶ Torlódási pont

Az a_n sorozat torlódási pontja t, ha t minden környezete az a_n sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Azaz $\exists a_{n'}$ részsorozat, hogy $a_{n'} \longrightarrow t$

Definíció 2.5 ▶ Limesz szuperior, inferior

$lim\ sup\ a_n$ = a torlódási pontok halmazának legnagyobb eleme
$lim\ inf\ a_n$ = a torlódási pontok halmazának legkisebb eleme

Egyéb említésre érdemes dolgok: rekurzív sorozatok határértéke

3. Függvény analízis

Definíció 3.1 ▶ Véges helyen vett véges határérték

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha x_0 a D_f torlódási pontja, $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\Omega(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \Omega(\varepsilon)$

Hasonlóan: véges helyen vett végtelen, végtelen helyen vett véges... bal- és jobboldali határérérték definíciója...

Tétel 3.1 ▶ Átviteli elv (szükséges és elégséges felt. határértékre)

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ akkor, és csak akkor $\forall x_n \longrightarrow x_0$ -ra ($x_n \neq x_0$ és $x_n \in D_f$) $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Megjegyzés: a tétel egy függvény és végtelen sok sorozat határértéke között teremt kapcsolatot, ez főleg akkor hasznos, ha azt szeretnénk bemutatni, hogy egy függvény adott helyen nincs határértéke

Tétel 3.2 ▶ Összeg és szorzatfüggvény határértéke

Ha $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A$ és $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = B$, akkor

i. $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = A + B$

ii. $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = AB$

Bizonyítás: Csak az elsőt bizonyítom (a 2. tételnél is ugyanezt kell csinálni). Az átviteli-elvből és a sorozatokra vonatkozó hasonló szabályokból következik. Így $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ akkor, és csak akkor $\forall x_n \longrightarrow x_0$ -ra ($x_n \neq x_0$ és $x_n \in D_f$) $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, illetve $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ akkor, és csak akkor $\forall x_n \longrightarrow x_0$ -ra ($x_n \neq x_0$ és $x_n \in D_g$) $\exists \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$, mivel $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = A + B$,ezért $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = A + B$.

Definíció 3.2 ▶ Folytonosság

Az f függvény folytonos egy x_0 pontjában, ha $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
Az f függvény balról (jobbról) folytonos egy x_0 pontjában, ha $\exists \lim_{x\to x_0-(+)} f(x) = f(x_0)$

Definíció 3.3 ▶ Szakadások osztályozása

Ha f nem folytonos x_0-ban akkor azt mondjuk, hogy f-nek szakadása van x_0-ban:

i. Elsőfajú, megszüntethető szakadás, ha $\exists f(x_0 + 0) = \exists f(x_0 - 0)$, de vagy $x_0 \notin D_f$ vagy $f(x_0) \neq f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$

ii. Elsőfajú, véges ugrás típusú, ha $\exists f(x_0 + 0) \neq \exists f(x_0 - 0)$

iii. Másodfajú: minden más esetben

Definíció 3.4 ▶ Kompakt halmaz

Egy halmaz kompakt, ha korlátos és zárt

Tétel 3.3 ▶ Bolzano-tétele

Ha f folytonos $[a, b]$-n és $f(a) < c < f(b)$, akkor $\exists\xi \in (a, b)$, melyre $f(\xi) = c$

Következmény: bármely páratlan fokszámú polinomnak van legalább egy gyöke

Tétel 3.4 ▶ Weiesstrass I. tétele

Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos.

Tétel 3.5 ▶ Weiesstrass II. tétele

Kompakt halmazon folytonos f függvény felveszi infimumát és szuprémumát.

Definíció 3.5 ▶ Inverz függvény

Az f függvény invertálható értelmezési tartományának egy $I \subset D_f$ részhalmazán, ha bármely két $x_1, x_2 \in I$ szám esetén az $f(x1) = f(x2)$ egyenlőség teljesülése maga után vonja, hogy $x1 = x2$, tehát ha az f függvény az I halmazon injektív (kölcsönösen egyértelmű). Ekkor bármely $y \in R_f$ szám esetén legfeljebb egyetlen olyan $x \in I$ szám létezik, melyre $f(x) = y$. Ezesetben azt mondjuk, hogy x az y szám f-inverze általi képe; $x = f^{-1}(y)$.

Tétel 3.6 ▶ Elégséges tétel invertálhatóságra

Ha f szigorúan monoton az $I \in D_f$ intervallumon, akkor itt f injektív, így invertálható.

Definíció 3.6 ▶ Egyenletes folytonosság

Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \Omega(\epsilon)$, hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $|x_1 - x_2| < \Omega$; $x_1, x_2 \in A$

Tétel 3.7 ▶ Heine tétele

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen is folytonos.

4. Valós, egyváltozós függvények differenciálása

Definíció 4.1 ▶ Differenciahányados

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definíció 4.2 ▶ Differenciálhányados

Legyen $K_{x_0,\omega} \subset D_f$, ekkor

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f deriválható (differenciálható) x_0-ban ha a fenti határérték létezik és véges. Ekkor $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ az f függvény x_0 pontbeli deriváltja (differenciálhányadosa).

Tétel 4.1 ▶ Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra

f akkor és csak akkor differenciálható x_0 pontban, ha $K_{x_0,\omega} \subset D_f$, $|h| < \Omega$-ra:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \varepsilon(h)h,$$

ahol $h \in \mathbb{R}$ és $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Tétel 4.2 ▶ Szükséges feltétel

Ha f differenciálható x_0-ban, akkor f folytonos x_0-ban, vagyis a differenciálhatóság szükséges feltétele a folytonosság.

Tétel 4.3 ▶ Deriválási szabályok

Legyen f és g differenciálható x-ben, ekkor

i. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ii. $(cf)'(x) = cf'(x)$

iii. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Leibnicz-szabály)

iv. $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

v. $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Bizonyítás (i):
$(f+g)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Bizonyítás (iii):
$(fg)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h)$
$+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} f(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Bizonyítás (iv):
$(1/g)' = \lim_{h\to 0} \frac{1/g(x+h)-1/g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ (Mivel g folytonossága miatt $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$)

Tétel 4.4 ▶ Inverz függvény deriváltja

Legyen f szigorúan monoton I-n, ekkor itt invertálható, illetve f differenciálható I-n, így f folytonos itt. Ekkor f^{-1} is differenciálható az $f(I)$ tetszőleges belső pontjában, ekkor

$$f^{-1'}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Definíció 4.3 ▶ Hiperbolikus függvények

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

5. Differenciálszámítás alkalmazása

Tétel 5.1 ▶ Érintő egyenes egyenlete

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definíció 5.1 ▶ Lokális szélsőérték

f-nek lokális maximuma [minimuma] van az értelmezési tartománya egy belső x_0 pontjában, ha $\exists K_{\Omega,x_0} : f(x) \leq f(x_0)[f(x) \geq f(x_0)]$, ha $x \in K_{\Omega,x_0}$. Azaz létezik egy olyan Ω sugarú kis környezet x_0 körül, ahol $f(x_0)$ értéke maximális [minimális].

Tétel 5.2 ▶ Lokális szélsőérték és a derivált közötti kapcsolat

Ha f az x_0 helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Azaz a szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Ha f' az x_0 hely kis környezetében előjelet vált, akkor az már elégséges feltétel is.

Bizonyítás: Lokális maximumra ekkor: $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ és $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, tehát $f'(x_0) = 0$

Tétel 5.3 ▶ Rolle-tétel (Rolle-féle középérték)

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n és $f(a) = f(b)$, akkor $\exists \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$

Bizonyítás: Weierstrass II. tétele szerint f-nek van maximuma és minimuma (a, b)-n. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor f konstansfüggvény és így $\forall \xi \in (a, b)$-re $f'(\xi) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, a szélsőérték és derivált közötti kapcsolat miatt (előző tétel) lesz olyan, ahol $f'(\xi) = 0$

Tétel 5.4 ▶ Lagrange-féle középértéktétel

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n akkor $\exists \xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tétel 5.5 ▶ Integrálszámítás I. alaptétele

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n és $f'(x) = g'(x)$, ha $x \in (a, b)$, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz felhasználom a következő segédtételt:

2. Lemma. *Ha f folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n és ott $f'(x) = 0$, akkor $f(x) = c$, ha $x \in [a, b]$*

Legyen $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, ekkor a fenti lemma alapján $h(x) = f(x) - g(x) = c$, azaz $f(x) = g(x) + c$, ha $x \in (a, b)$

Tétel 5.6 ▶ L'Hospital-szabály

Legyen f és g differenciálható egy környezetében, és itt $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ és $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Ha $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$

A tételt felhasználva: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1/1 = 1$

Tétel 5.7 ▶ Paraméteres görbék t_0-beli deriváltja

Legyen a G görbe paraméteres egyenlete:

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

Ha $x(t)$ szig. monoton t_0 egy környezetében, létezik inverze, így a függvény explicit is megadható: $f(x) = y(t(x))$ Ekkor a függvény deriválható a $x_0 = x(t_0)$ pontban és:

$$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \qquad f''(x_0) = \frac{\ddot{y}(t_0)\dot{x}(t_0) - \dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)}{\dot{x}^3(t_0)}$$

Egyéb: kapcsolat a monotonitás, konvexitás és a derivált között, inflexiós pontok, implicit görbék deriválása, elemi függvények deriváltjai, függvényvizsgálat

6. Határozatlan integrál

Definíció 6.1 ▶ Primitív függvények

Az I halmazon F függvény f primitív függvénye, ha $\forall x \in I$-re: $F'(x) = f(x)$

Definíció 6.2 ▶ Határozatlan integrál

Az f függvény határozatlan integrálja I-n: a primitív függvények összessége:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Tétel 6.1 ▶ Parciális integrálás

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Bizonyítás: A szorzatfüggvény deriválási szabályából: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, majd átrendezve: $(u(x)v(x))' - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$, az egyenlet integrálját véve: $\int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx = \int u(x)v'(x)dx$, amiből kiintegrálva valóban a fenti összefüggés adódik.

Tétel 6.2 ▶ Helyettesítéses integrál

$$\int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Egyéb: Integrálási szabályok, racionális törtfüggvények integrálása.

7. Határozott integrál

Definíció 7.1 ▶ Alsó és felső közelítő összeg

Legyen $a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b$ az $F = [a, b]$ intervallum osztópontjai. Ekkor a k-adik részintervallumot jelölje: $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, hossza $\Delta x = x_k - x_{k-1} > 0$. A részintervallum infimuma: $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, míg szuprémuma: $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ (Dedekind folytonossági tétel értelmében léteznek: Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van szuprémuma...), ekkor:

$$\text{Alsó közelítő összeg: } s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

$$\text{Felső közelítő összeg: } S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Definíció 7.2 ▶ Minden határon túl finomodó felosztás sorozat

Az F felosztás finomsága: $\Delta F = \max(\Delta x_k)$. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak sorozatát minden határon túl finomodónak mondjuk, ha $\lim_{n\to\infty} \Delta F_n = 0$

Tétel 7.1 ▶ Alsó és felső közelítőösszeg viszonya

Bármely felosztásra: $s_F \leq S_F$

Tétel 7.2 ▶ Darboux-féle alsó és felső integrál

Ha $\exists \sup s_F = h$ és $\inf S_F = H$, akkor

$$h = \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ alsó, míg } H = \overline{\int_a^b} f(x)dx \text{ felső integrál}$$

Definíció 7.3 ▶ Riemann-féle határozott integrál

Azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, $h = H = I$. Ezt az f függvény $[a, b]$-beli határozott integráljának nevezzük:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f$$

Definíció 7.4 ▶ Oszcillációs összeg

Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg: $O_F = S_F - s_F = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\Delta x_k \geq 0$

Tétel 7.3 ▶ Szükséges és elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra

i. Ha $\exists F_n$ m.h.t.f.f.s., melyre $\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = I$, akkor és csak akkor $f(x)$ Riemann-integrálható $[a, b]$-n (röviden: $f \in R_{[a,b]}$)

ii. $f \in R_{[a,b]}$, akkor és csak akkor, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists F(\varepsilon)$, hogy $O_F < \varepsilon$

Tétel 7.4 ▶ Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra

i. $f : [a, b]$ folytonos, korlátos és monoton, akkor $f \in R_{[a,b]}$

ii. Ha f korlátos és véges sok pont kivételével folytonos $[a, b]$-n, akkor $f \in R_{[a,b]}$

Tétel 7.5 ▶ Newton-Leibniz tétel

Ha $f \in R_{[a,b]}$ és itt létezik primitív függvénye (F, azaz $F'(x) = f(x)$), akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Definíció 7.5 ▶ Integrálközép

$$\psi := \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \quad (a < b)$$

Tétel 7.6 ▶ Integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in R_{[a,b]}$, akkor $\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \leq \psi \leq \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$
Ha $f \in C[a, b]$, akkor $\exists\xi \in [a, b]$, hogy $f(\xi) = \psi$

Definíció 7.6 ▶ Integrálfüggvény

Ha $f \in R_{[a,b]}$, az f függvény integrálfüggvényének nevezzük, a...

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(x)dx, \qquad x \in [a, b]$$

Tétel 7.7 ▶ Az integrálszámítás II. alaptétele

$$f \in R_{[a,b]}; \qquad \int_a^x f(x)dx, \qquad x \in [a, b]$$

Az integrálfüggvény folytonos $[a, b]$-n, ha f folytonos is $x_0 \in (a, b)$-n, akkor F differenciálható x_0-ban és $F'(x_0) = f(x_0)$

Tétel 7.8 ▶ Határozott integrál, helyettesítéssel

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b)$$

Hivatkozások

[1] Fritz Józsefné, Kónya Ilona, Pataki Gergely és Tasnádi Tamás *Matematika 1.*
`https://math.bme.hu/ tasnadi/merninf_anal_1/anal1_elm.pdf`

[2] Tasnádi Tamás *Alaízis 1. Tételsor (2017/2018)*
`https://math.bme.hu/ tasnadi/merninf_anal_1/analinfo1_tetelsor_2017_TT.pdf`