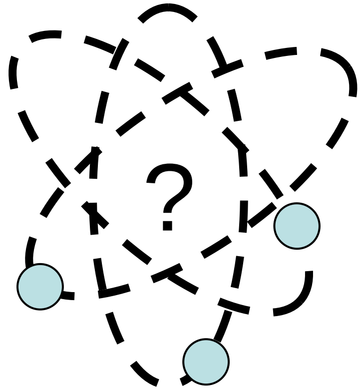
Fizika 1i

1.előadás

Fizika Tsz.

3 h előadás + 1 h gyakorlat

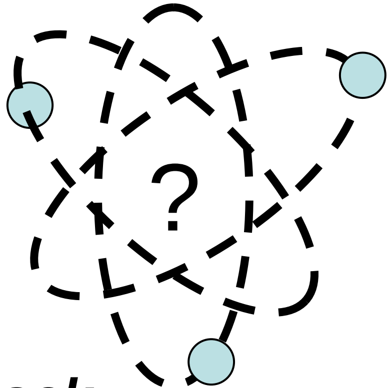
Miért éppen fizika



Fizikai kutatások		***Alkalmazások***
Számítógépes hálózat	→	Internet (www.)
Tranzisztor	→	Félvezető elektronika
Nemlin. Egyenletek (áramlástan)	→	Számítógép
GPS (atomóra, rel. elm.)	→	Helymeghatározás

40%

Miért éppen fizika

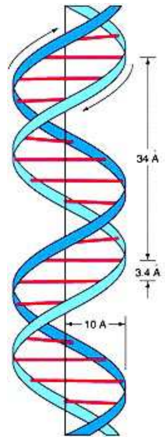


Fizikai kutatások | ***Alkalmazások***

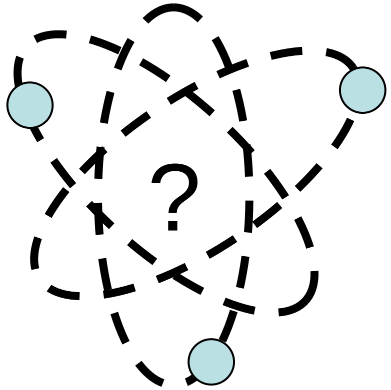
CT (NMR) → Gyógyászat, rákdiagnosztika

Holográfia → 3D képalkotás, 3D TV
bankkártya, stb.

Anyagtudomány → Új anyagok, DNS

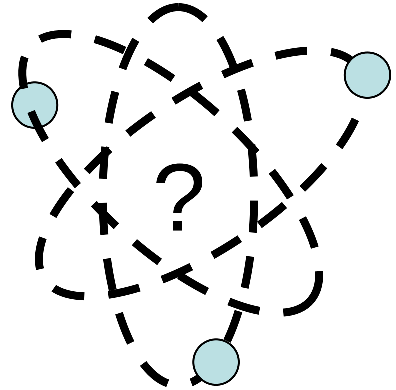


Miért éppen fizika



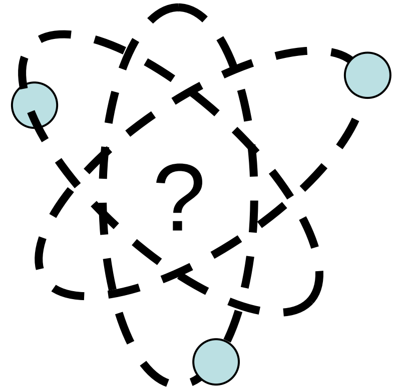
Káosz elmélet → Modell

Miért éppen fizika



Mert érdekes !!!

Miért éppen fizika



Mert izgalmas a jövő

Kvantumszámítógép → Nagy számolási sebesség
RSA kód feltörése, stb.

Nanofizika → Láthatatlan repülőgép
Öntisztuló ruha
"Öngyógyuló" számítógép

Robot kutya

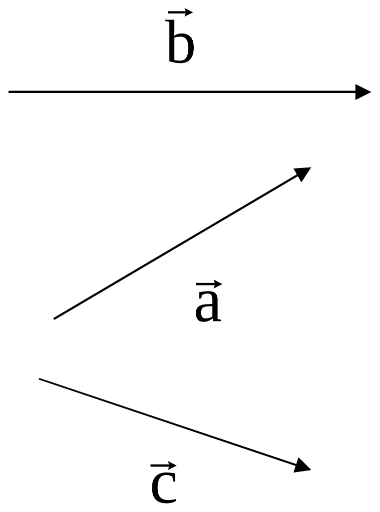
Youtube: robot dog boston dynamics https://youtu.be/M8YjvHYbZ9w

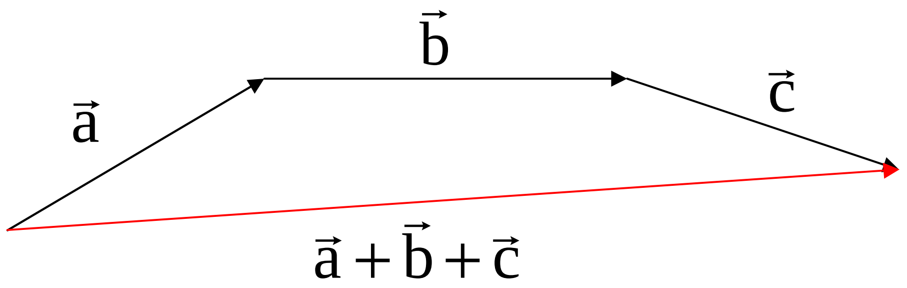
Mit kell tudni *Matematikából???*

Emlékeztető

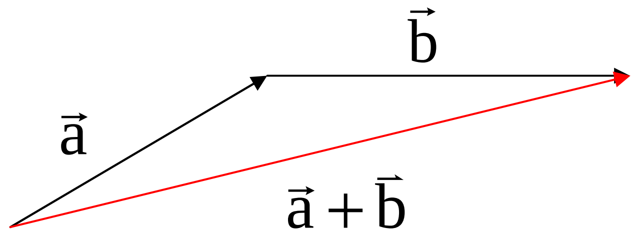
Vektorgeometria

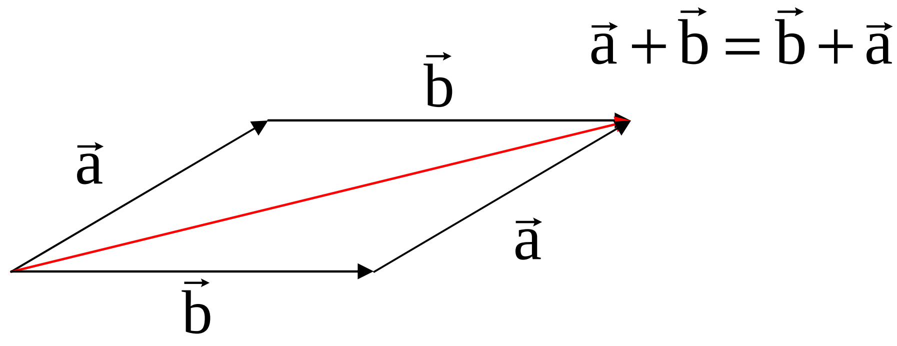
I. Vektorok

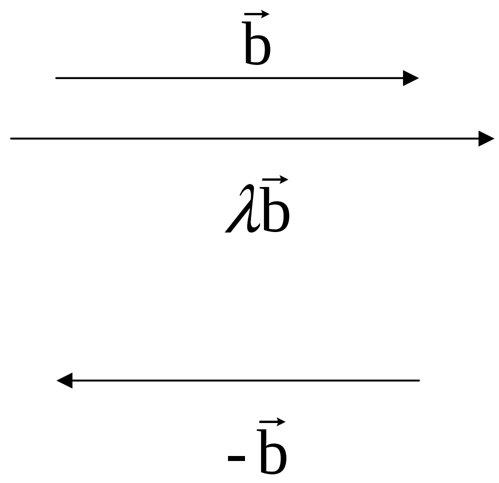




Vektorok összeadása:



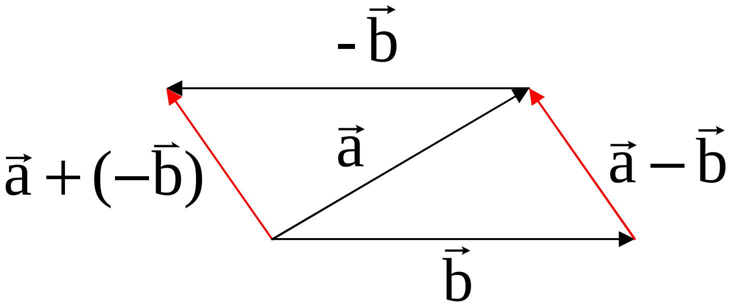


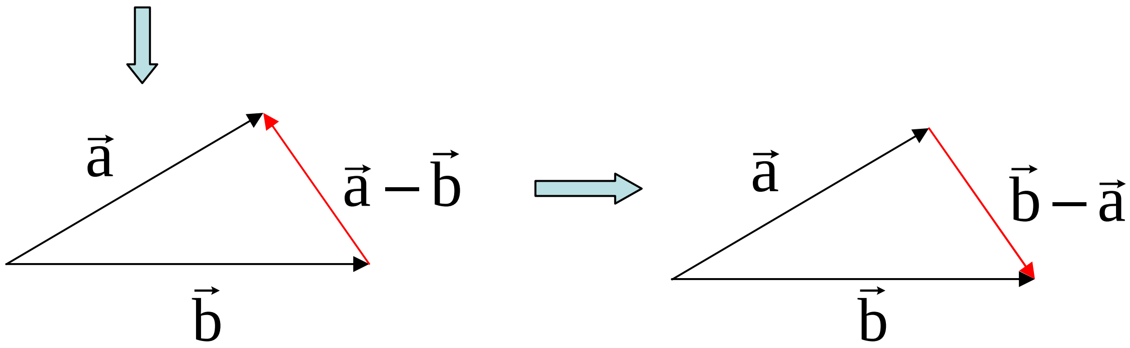


Vektor(ok) kivonása

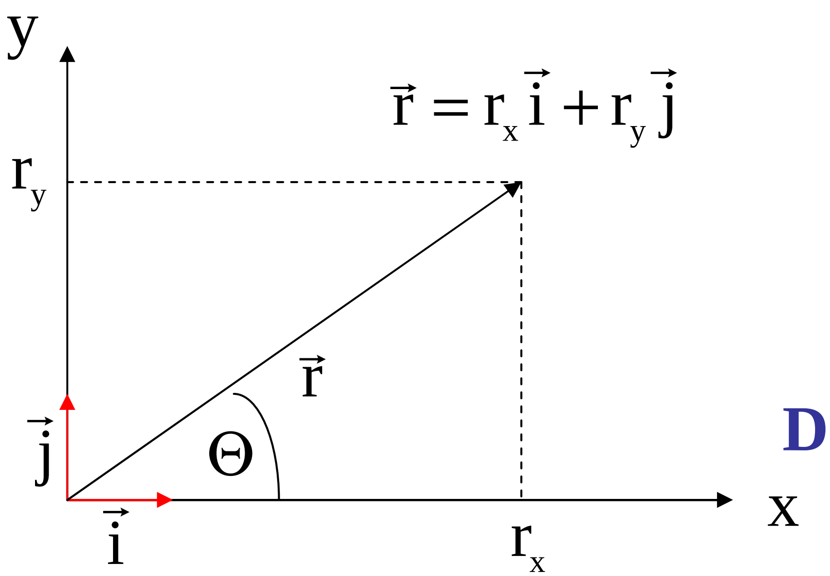
$$\vec{a} - \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (\text{-}\vec{b})$$





Konponensek és egységvektorok



$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\tan\Theta = \frac{r_y}{r_x}$$

Descartes koordináták: r_x & r_y

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{r} = (r_x, r_y)$$

Polár koordináták : r & Θ

$$r_x = r \cdot \cos\Theta$$

$$r_y = r \cdot \sin\Theta$$

$$\vec{r} = (r, \Theta)$$

Elemi vektoralgebra

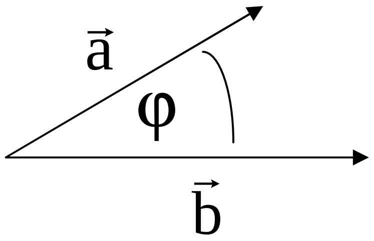
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \qquad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \qquad \vec{a} + \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{d_x}\vec{i} + \underbrace{(a_y + b_y)}_{d_y}\vec{j} = \vec{d}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \underbrace{(a_x - b_x)}_{c_x}\vec{i} + \underbrace{(a_y - b_y)}_{c_y}\vec{j} = \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots = (a_x + b_x + c_x + \ldots)\vec{i} + (a_y + b_y + c_y + \ldots)\vec{j}$$

Skalárszorzat



Def.: $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \quad \textbf{és} \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = ?$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

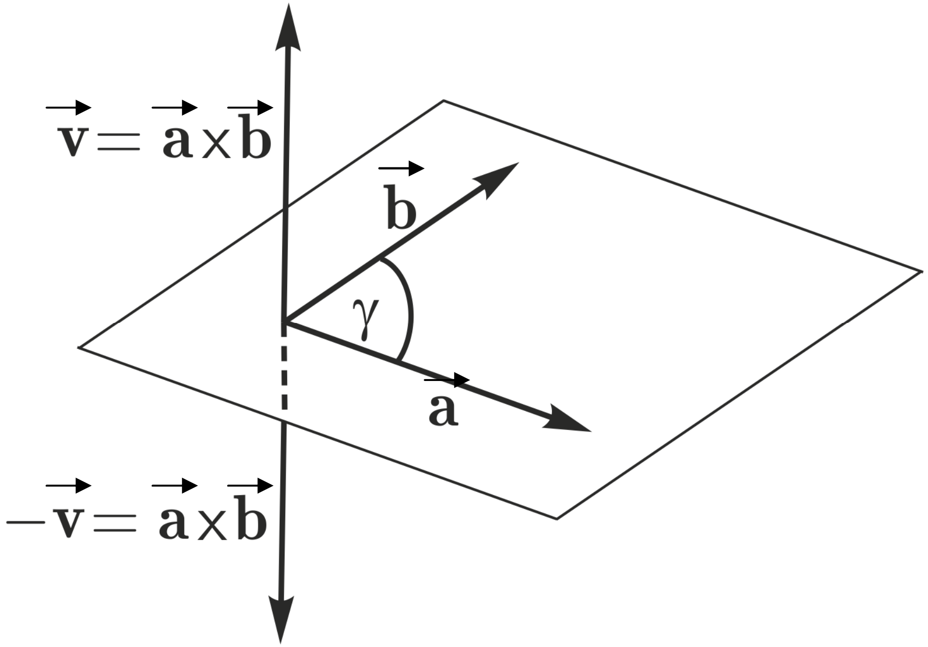
Szuperpozíció

Példa: munka

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

Vektoriális szorzat

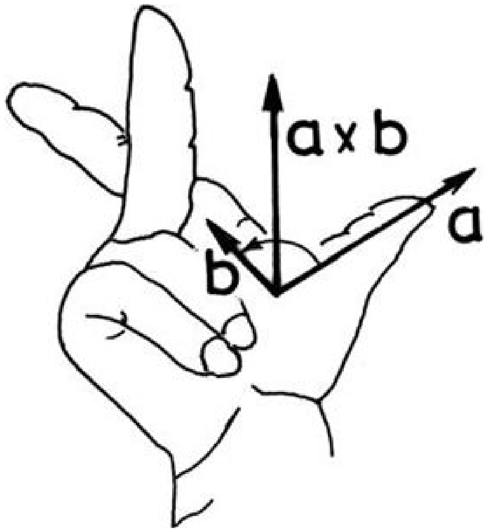
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\gamma$$



$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad \text{és} \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$

és $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ **, de:** $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$

Jobbkéz-szabály:



Példa: forgatónyomaték

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

Vektoriális szorzat kiszámítása

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = ?$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right) \cdot \vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right) \cdot \vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \cdot \vec{k}$$

Szuperpozíció

II. Trigonometria

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

H.F.: $\mathrm{tg}(2\alpha) = ?$

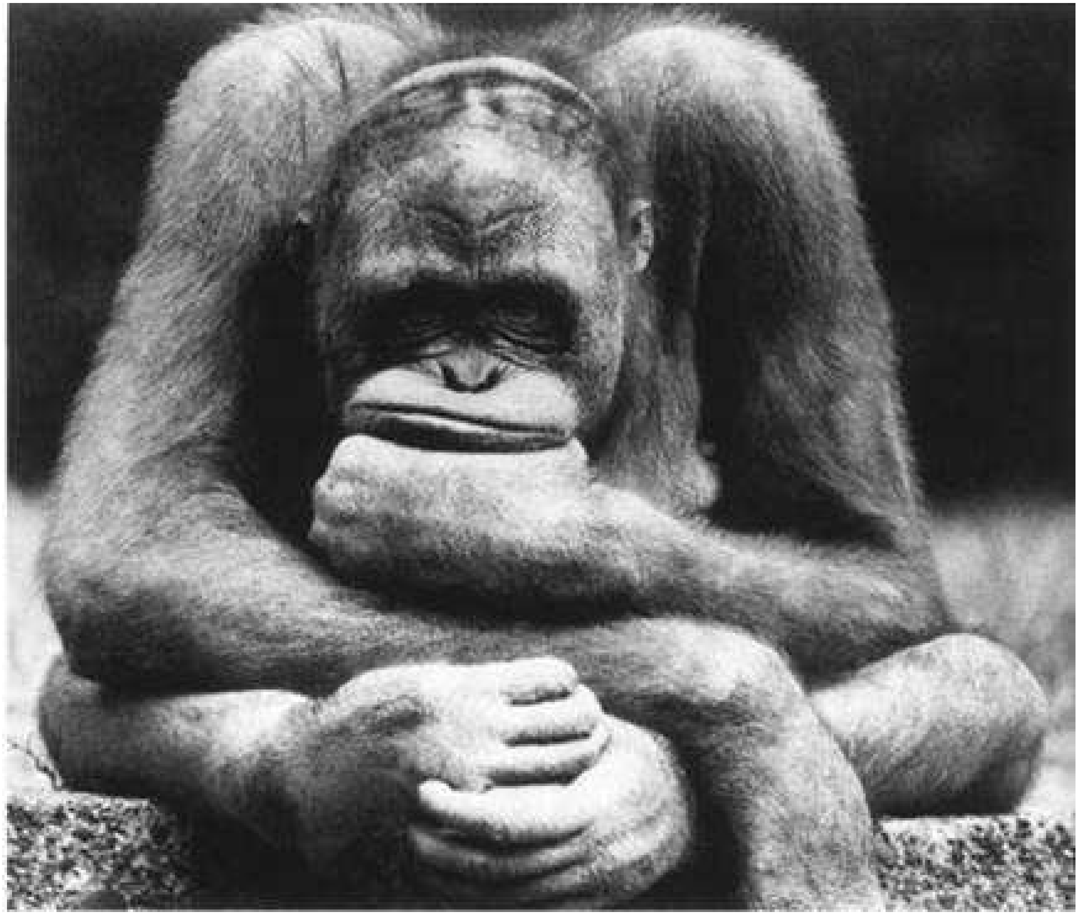
$$\cos(3\alpha) = ?$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = ?$$

Jó tudni: ……..

MATEMATIKA BEVEZETŐ

1. Differenciálszámítás



Miért hasznos a differenciálszámítás?

Példa:

Sebesség = út/idő $v = \frac{s}{t}$

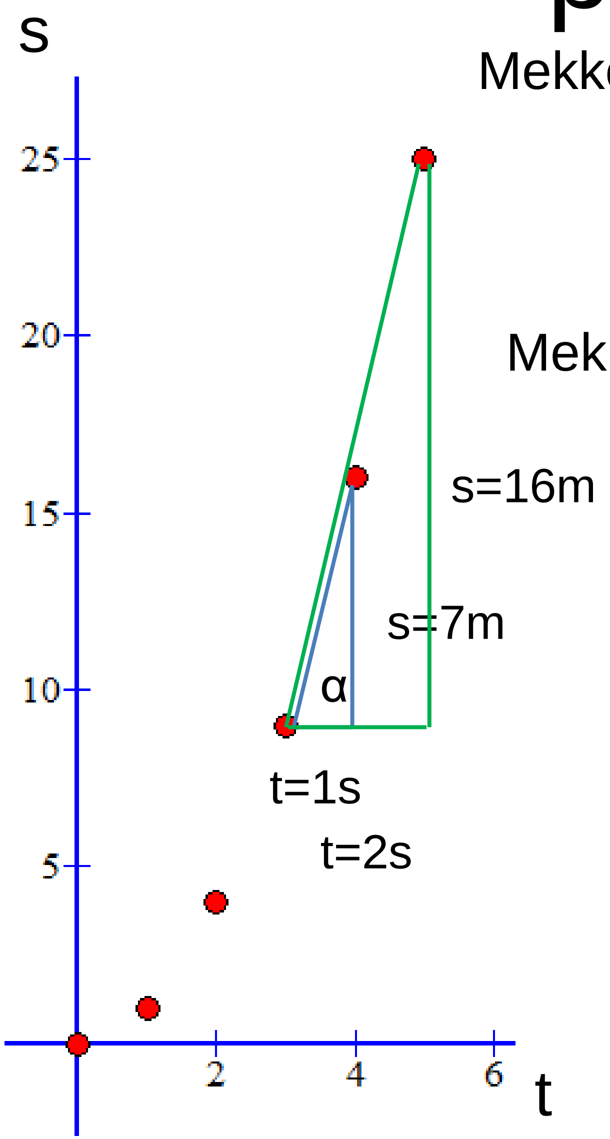
Átlagsebesség

$$v = \frac{\sum s}{\sum t}$$

Pillanatnyi sebesség

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Út-idő mérése diszkrét pontokban



Mekkora az **átlagsebesség** a 3. és a 4. s között?

$$v = \frac{\sum s}{\sum t} = \frac{7\,m}{1\,s} = 7\frac{m}{s}$$

Mekkora az **átlagsebesség** a 3. és az 5. s között?

$$v = \frac{\sum s}{\sum t} = \frac{16\,m}{2\,s} = 8\frac{m}{s}$$

Geometriai jelentés:

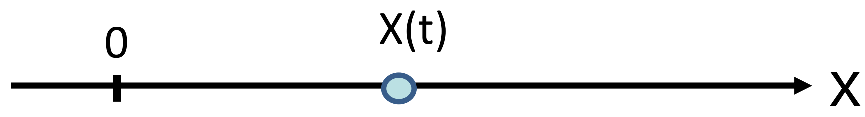
$$v = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

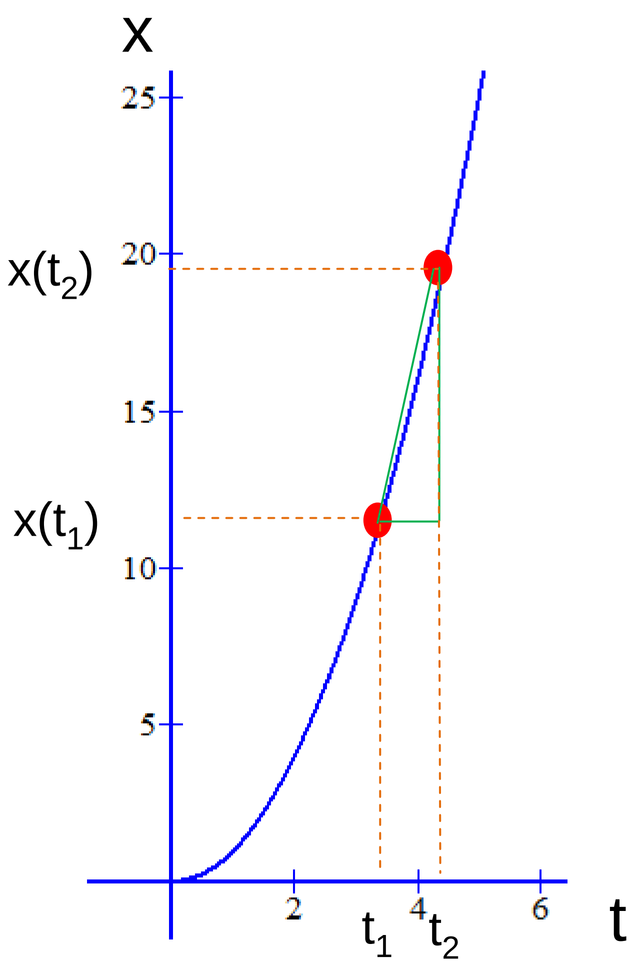
A sebesség a vízszintessel bezárt szög tangensét,
a **meredekséget** mutatja meg.

Az út és idő között ismert a függvénykapcsolat

1 D mozgás

példa:





$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A sebesség még mindig átlagsebesség (a szelő meredeksége), a kifejezés a **differenciahányados**.

Ha t_2 nagyon megközelíti t_1-et ($t_2 = t_1 + \Delta t$, és $\Delta t \rightarrow 0$)

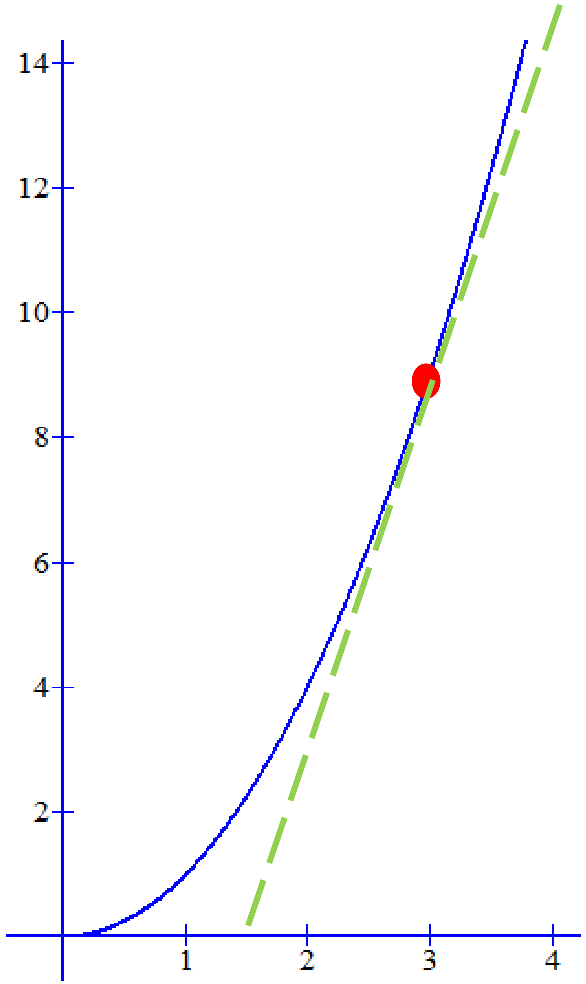
a differenciahányados határértéke a **differenciálhányados**, a **derivált**:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

amely megmutatja a pillanatnyi sebességet (az érintő meredekségét) t_1-ben.

A differenciálás (deriválás) alkalmazása

Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény grafikonjának meredekségét x=3 pontban



$f(x)=x^2$

Képezzük a függvény **deriváltfüggvényét** vagy **deriváltját**

$f(x)=x^2 \longrightarrow f'(x)=2x$

Helyettesítsük be az érintési pont x koordinátáját

$f'(x=3)=2•3=6$

Az $f(x)=x^2$ függvény grafikonjának meredeksége
az x=3 helyen 6.

$tg\alpha=6$

Deriválási szabályok

$$(c)' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Összetett függvény

$$f(g(x))$$

$f=\sin(x)$ $g=3x^2$

$$f(g(x))=\sin(3x^2)$$

Összetett függvény deriválása

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Példa :

$$(\sin(3x^2))'=\cos(3x^2)\cdot 6x$$

Második derivált

Példa:

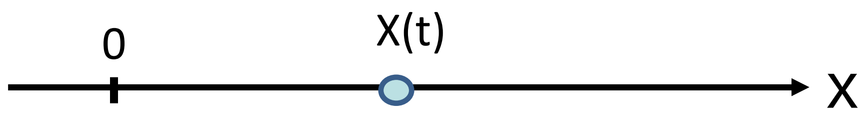
$$f(x)=5x^3$$

$$f'(x)=5\cdot 3x^2=15x^2$$

$$f''(x)=15\cdot 2x=30x$$

1 D mozgás

Alkalmazás (pl):



$$x(t)=5t^3$$

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=15t^2$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=30t$$

$$\Downarrow$$

$F=m\cdot a$ → F kiszámítható

Szélsőérték meghatározása

Példa: $f(x)=2x^3-21x^2+60x+3$

Hol van az f(x) fv. szélsőértéke?

f(x) függvény szélsőértéke ott található, ahol $f'(x)=0$

$$f'(x)=6x^2-42x+60$$

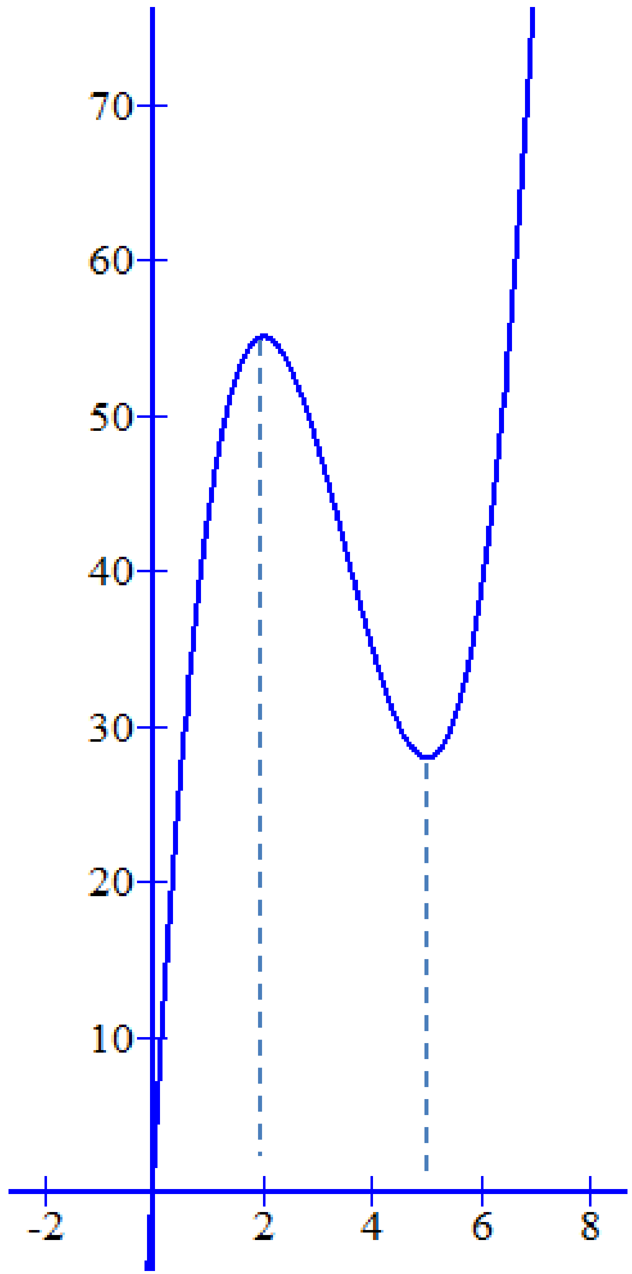
$6x^2-42x+60=0$ $x_1=5$, $x_2=2$

Minimum vagy maximum?

$f'(x)=6x^2-42x+60$ $f''(x)=12x-42$

$f''(5)=18$ Minimum! $f''(2)=-18$ Maximum!

$f(x)=2x^3-21x^2+60x+3$



Szokásos jelölés az idő szerinti deriváltra

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

3D-ben:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Taylor-sor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

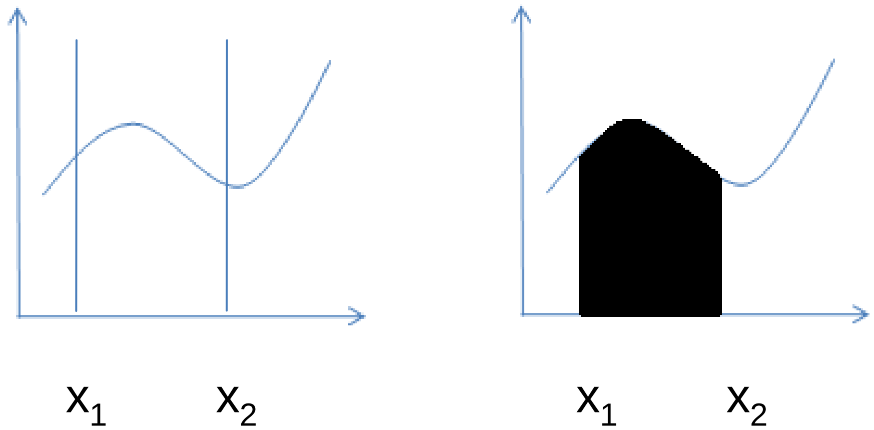
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

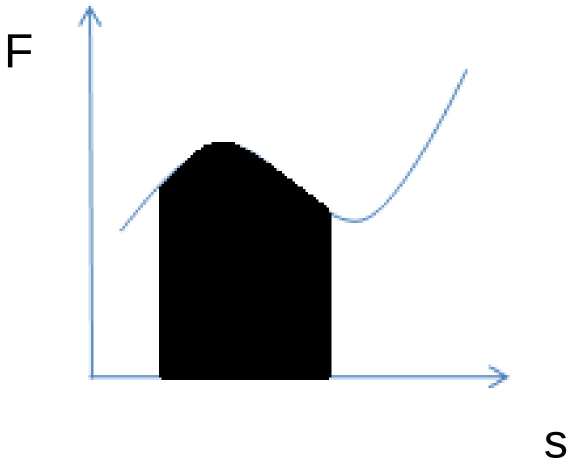
2. Integrálszámítás

CÉL:

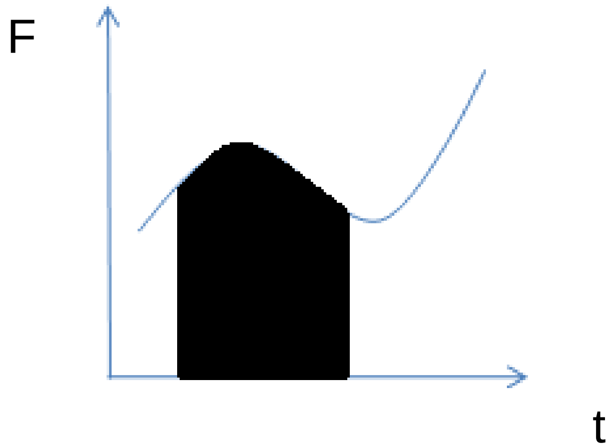
Görbe alatti terület meghatározása



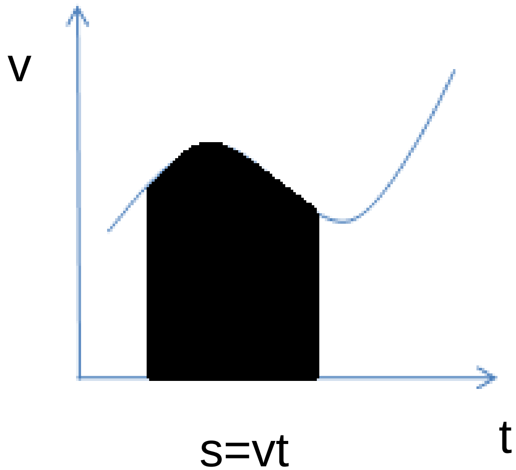
Példa:



W=Fs

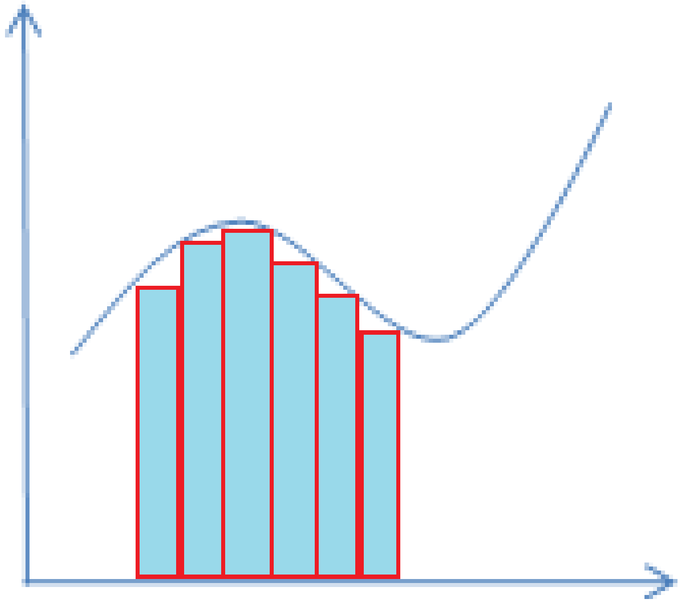


I=Ft

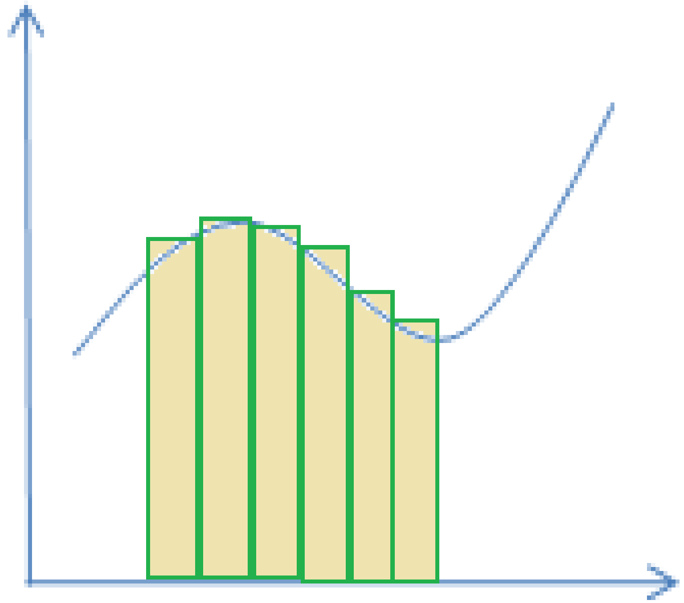


s=vt

Alsó-felső közelítő összeg



s(f)



S(f)

s(f) < S(f)

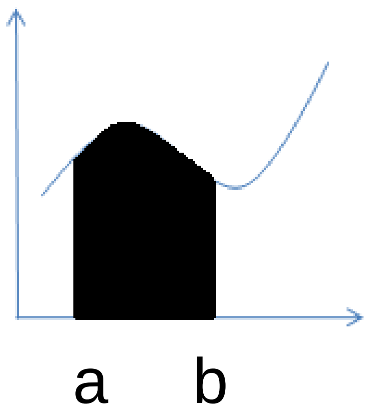
Minél finomabb a beosztás, az alsó és a felső közelítő összeg
értéke annál inkább megközelíti egymást

Integrál

Ha a beosztás minden határon túl finomodik , akkor

s(f)=S(f)

$$\int_a^b f(x)dx = s(f) = S(f)$$



Az integrál kiszámítása
Newton-Leibniz tétel

Ha létezik F(x), úgy, hogy F'(x)=f(x)

F(x) az f(x)függvény primitív függvénye: $F(x) = \int f(x)dx$

(Határozatlan integrál)

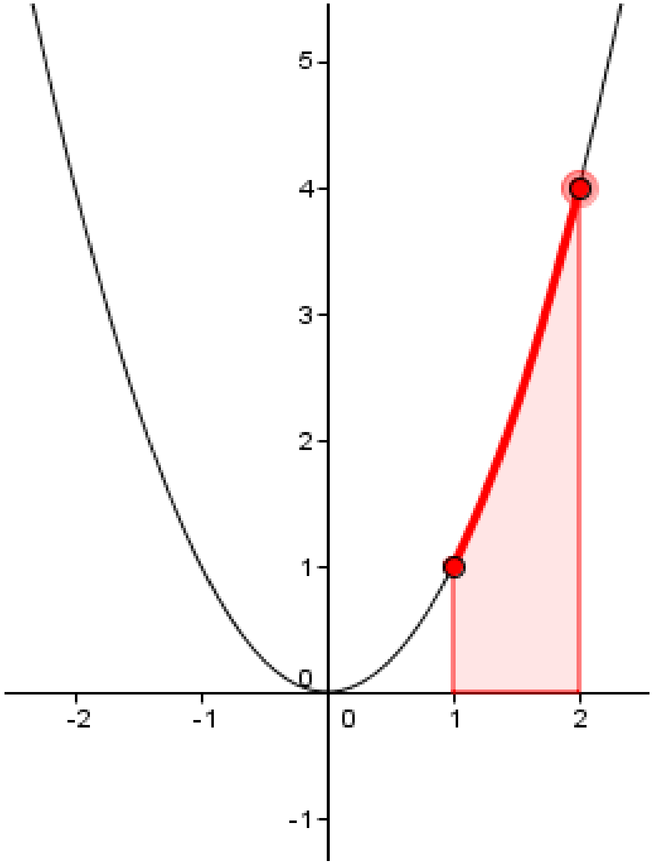
A primitív függvény segítségével a határozott integrál kiszámítható

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Példa:

$f(x)=x^2$

$$\int_1^2 x^2 dx$$



$f(x)=x^2$

$\downarrow$

$F(x)=x^3/3$

Ellenőrzés:

$(F(x))'=f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \rightarrow \int_1^2 x^2 dx \quad =(2)^3/3-(1)^3/3=7/3=2,33$$

Integrálási szabályok – Primitív függvény

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad ha \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int tg x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int ctg x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int cf = c\int f$$

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int (fg') = fg - \int (f'g)$$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b (c \cdot f) = c\int_a^b f$$

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

Primitív függvény meghatározása

$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C \qquad \int f(g(x))g'(x) = F(g(x)) + C$$

Példa: $\int \sin^5(x)\cos(x)dx$

$\int \sin(3x+5)dx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+6}}dx$$

$$\int \sqrt[5]{7x+3}dx$$

$$\int \frac{12x^2+3}{4x^3+3x}dx$$

$$\int 3^{4x-7}dx$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$

$\int \sin(x^5)x^4dx$

$$\int tgx dx$$

H. F.

Parciális integrálás

$$\int u\,v' = \mathrm{uv} - \int u'v$$

Példa:

$$\int xe^x dx$$

$$u = x, \qquad v' = e^x$$

$$u' = 1, \qquad v = e^x$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = \mathrm{x}e^x - e^x$$

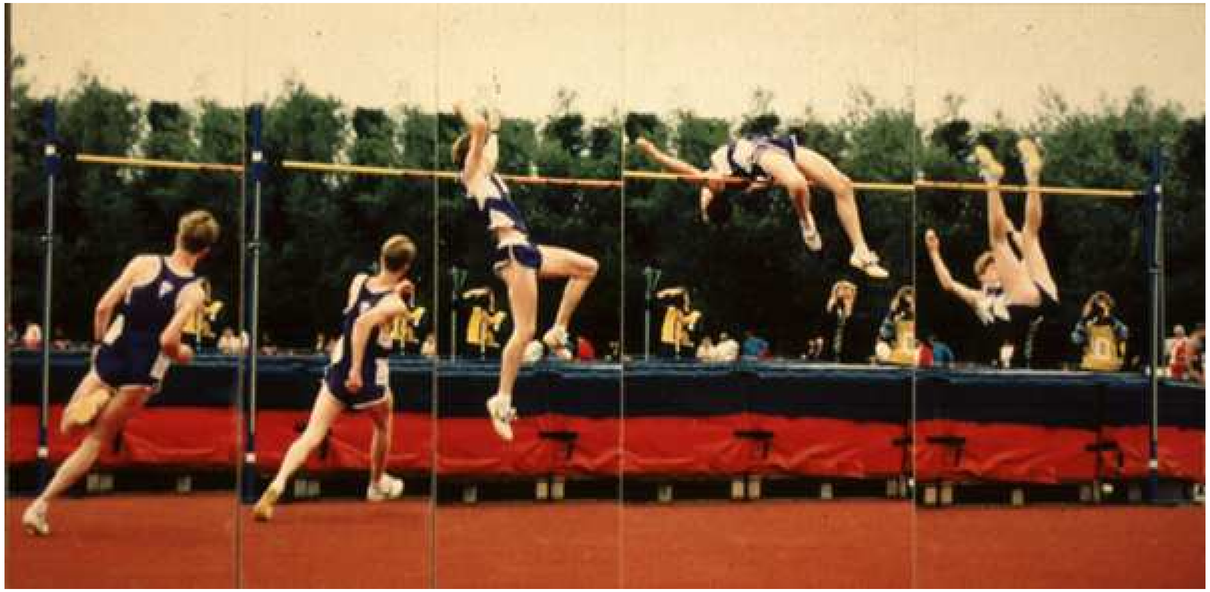
Példa2:

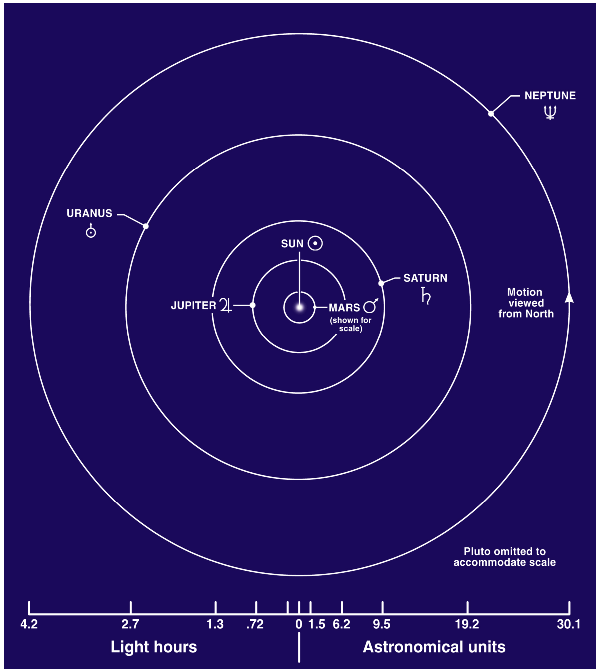
$$\int 2x\sin x dx$$

H. F.

Példák

Kinematika




NEPTUNE
URANUS
SUN
SATURN
JUPITER
MARS
(shown for scale)
Motion viewed from North
Pluto omitted to accommodate scale
4.2
2.7
1.3
.72
0
1.5
6.2
9.5
19.2
30.1
Light hours
Astronomical units

A kinematika alapjai

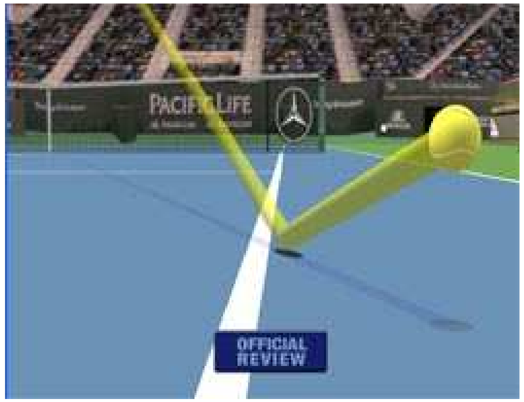
A tömegpont helyének megadása az idő függvényében

Tömegpont helyzete : $\vec{r}(t)$

Elmozdulás: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

Megtett út: $$s = \sum_i \left|\Delta\vec{r}_i\right|$$

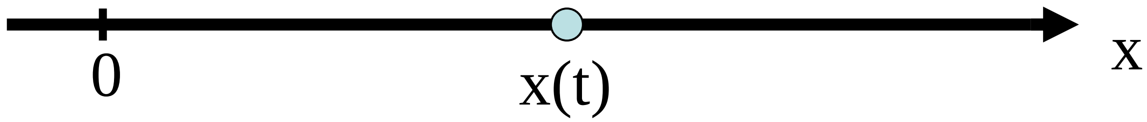
Kinematika → tömegpont helyzete → pl. tenisz: "challange"

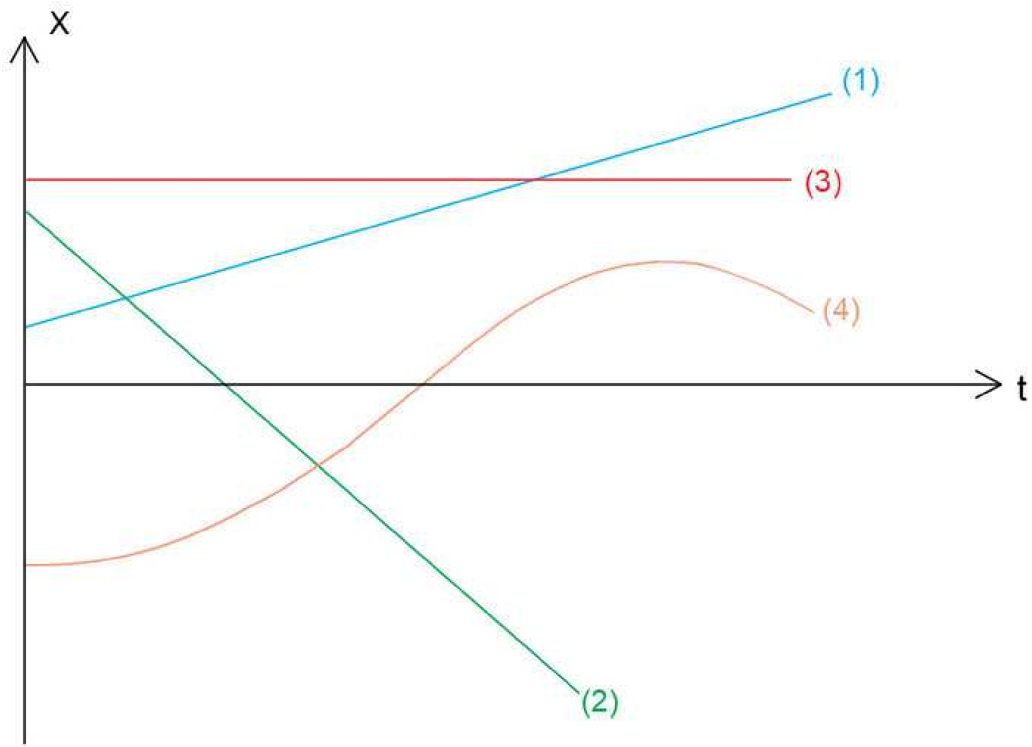


Apophis kisbolygó

?

Legegyszerűbb modell: 1 D - mozgás





Definíciók:

x,s,d: [m] pontosabban: később
t: [s]

Átlagsebesség: $$v_{átl.} = \frac{s_{össz.}}{t_{össz.}}$$ Mértékegység: m/s

Pillanatnyi sebesség: $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

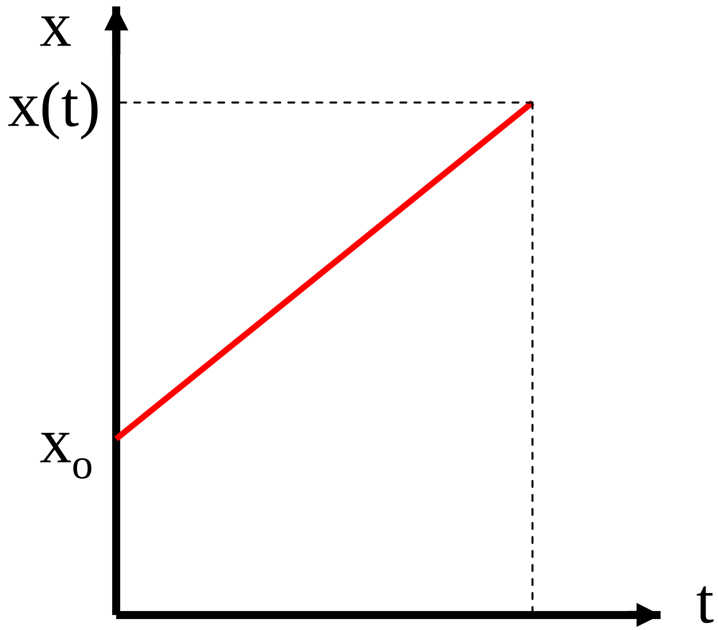
Elmozdulás: $$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \sum_i v_i \Delta t_i$$

Pozíció: $x(t) = x_0 +$ elmozdulás

v = 72 km/h = 20 m/s

Legegyszerűbb mozgás: egyenesvonalú egyenletes mozgás

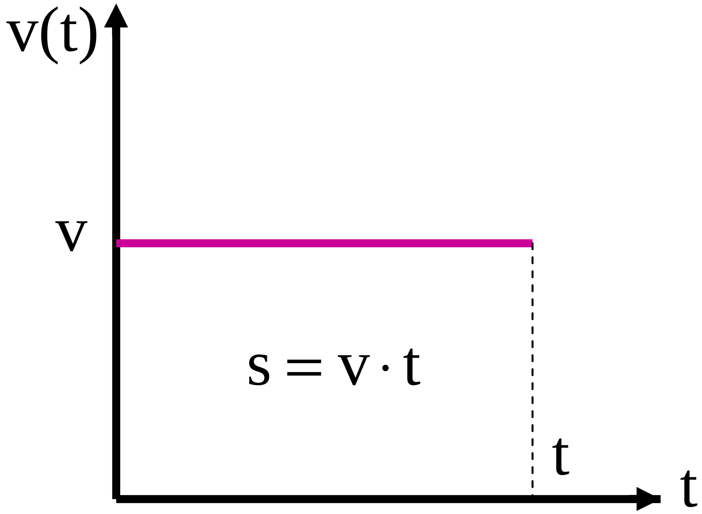
v = const.



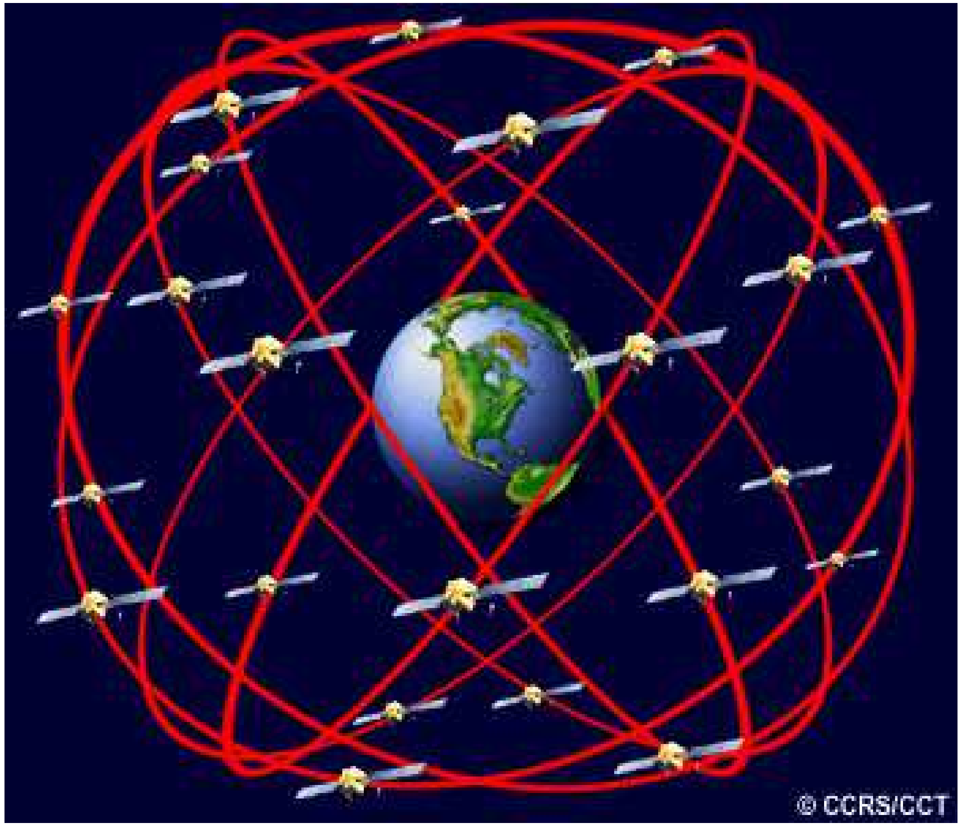
$$v = \frac{x(t) - x_o}{t}$$

$$\Downarrow$$

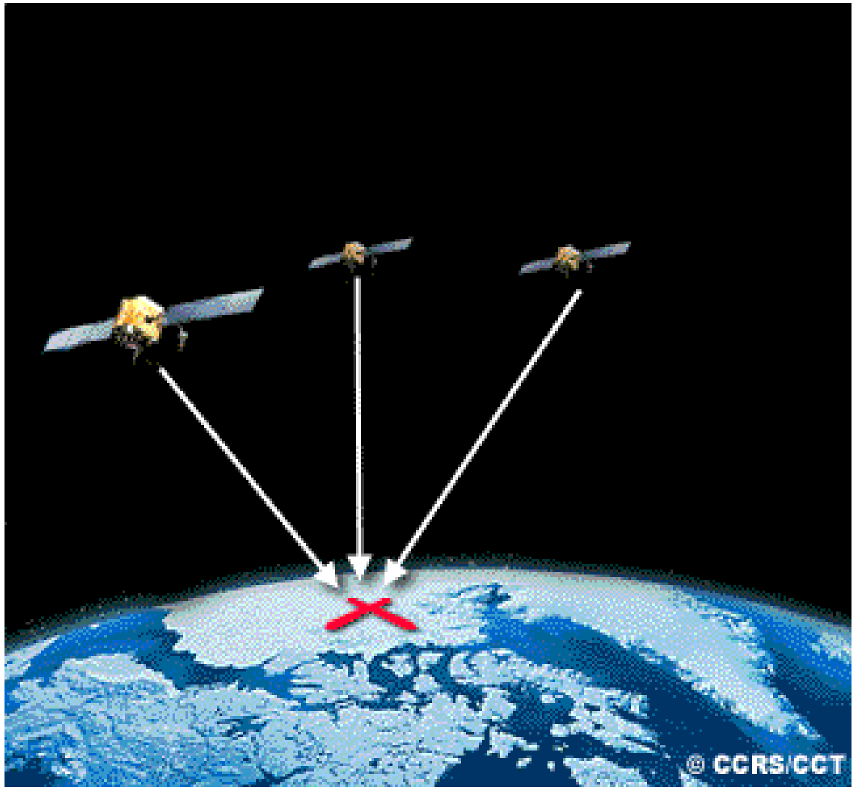
$$x(t) = x_o + v \cdot t$$



$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t$$

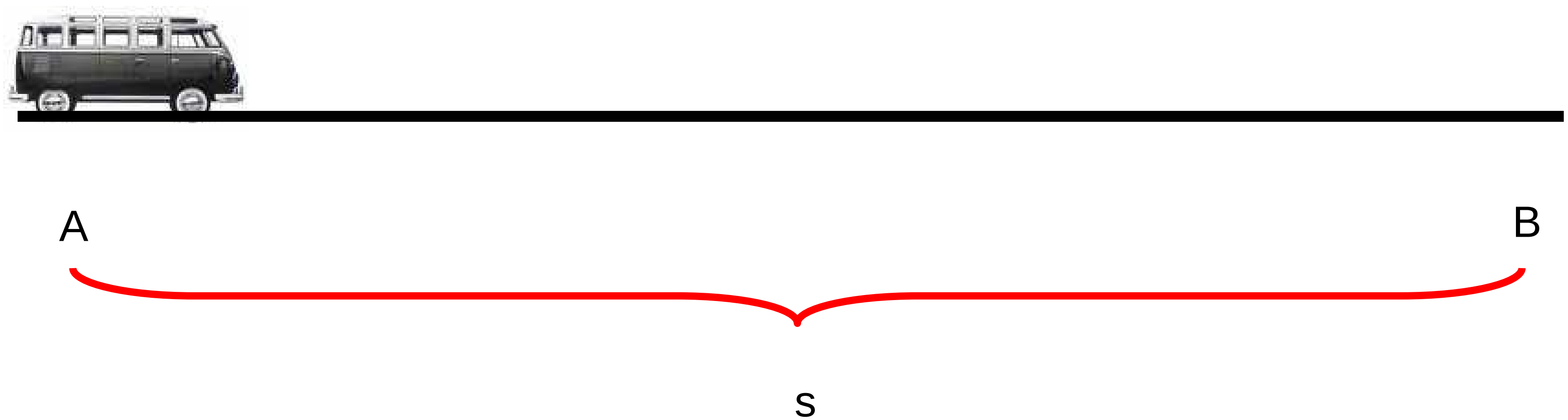


GPS



Egy egyszerű feladat:

Átlagsebesség (láttuk): $v_{\acute{a}tl.} = \dfrac{s_{\ddot{o}ssz.}}{t_{\ddot{o}ssz.}}$



Average velocity:

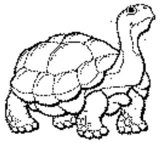
$$\frac{elmozdulás}{idő} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

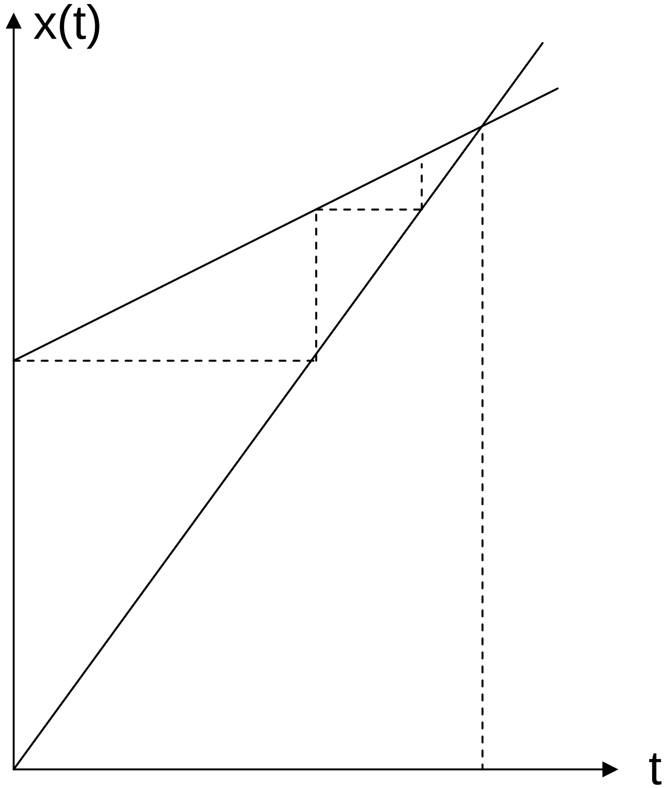
Average speed:

$$v_{\acute{a}tl.} = \frac{s_{\ddot{o}ssz.}}{t_{\ddot{o}ssz.}}$$

Egy paradoxon: Achilleus és a teknősbéka

Achilleus nem éri utol a teknősbékát, mert mire odaér, ahol a teknősbéka volt eredetileg, addig a teknős előbbre jutott, és így tovább ….



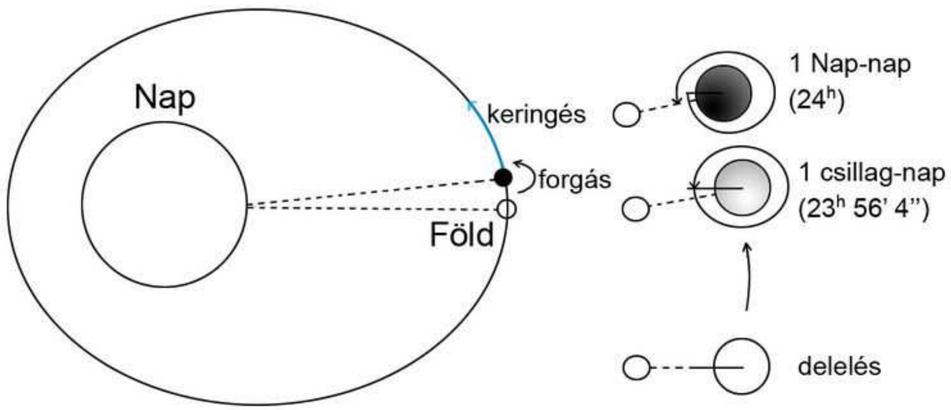


Megoldás: Achilleus nem éri utol a teknősbékát, amíg nem éri utol a teknősbékát !!!

Hol a hiba???

Hosszúság és időegység

A másodperc: A másodpercet eredetileg az átlagos
Nap-nap segítségével lehetett meghatározni, annak 1/86400-ad része.



Atomóra: nagy pontosság
1ms / év vagy jobb

A másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9192631770 periódusának időtartama.

A méter: 1 méter a Föld kerületének (a Párizson átmenő délkörnek)
1/40000000-od része $\rightarrow$ ősméter

1 méter: Kr^{86} narancssárga spektrumvonalának 1650763.73 - szorosa

Pontosabb definíció: jegyzet

Gyorsulás

$$\mathbf{v \neq const. \Rightarrow v = v(t)}$$

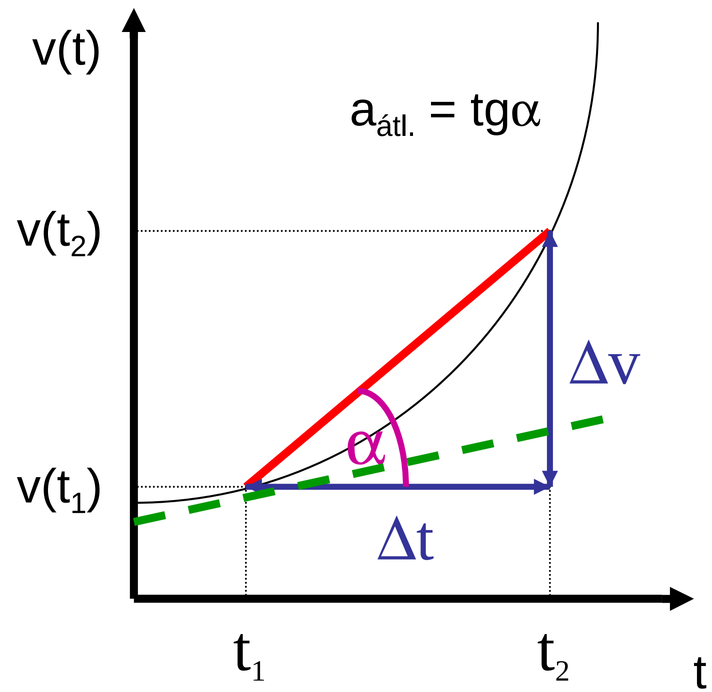
Def. átlagos gyorsulás: $$a_{átl.} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Def. pillanatnyi gyorsulás:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = \sum_i a_i \Delta t_i + v_0$$

$$x(t) = \sum_i v_i \Delta t_i + x_0$$

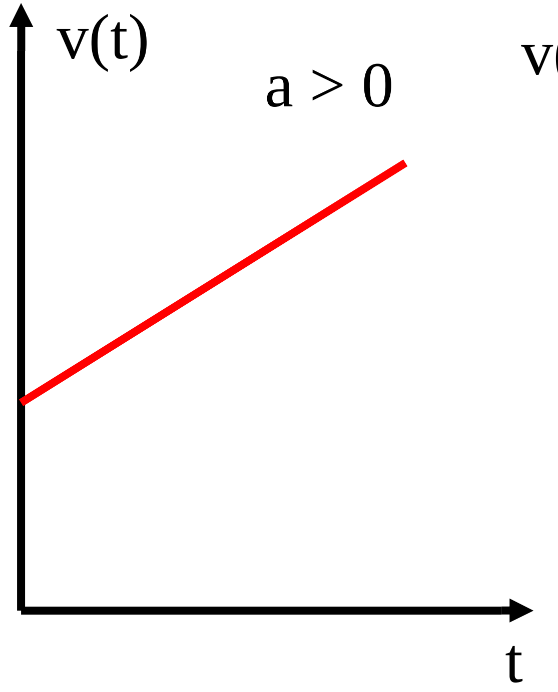


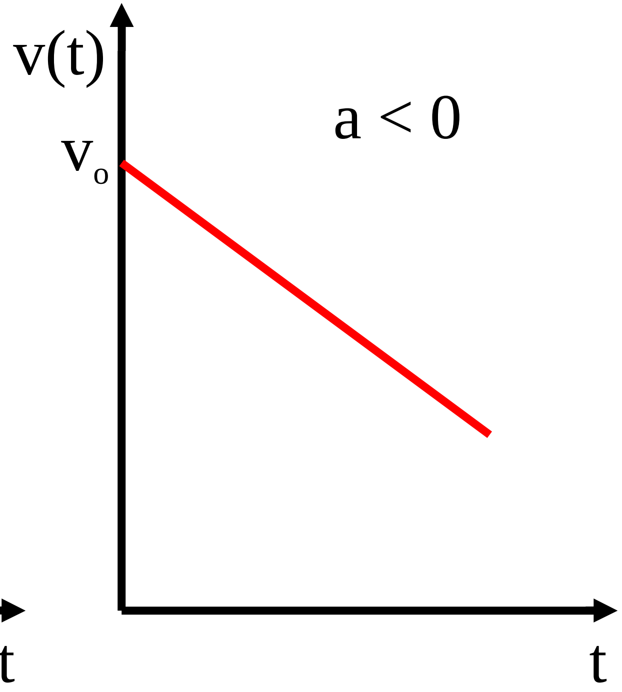
Mozgás állandó gyorsulással

a = const.

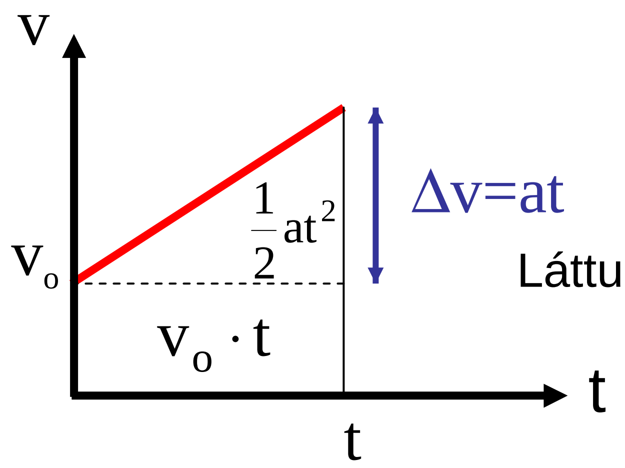
$$a = \frac{v(t)\text{-}v_o}{t}$$

$$v(t) = v_o + a \cdot t$$





Elmozdulás és pozíció

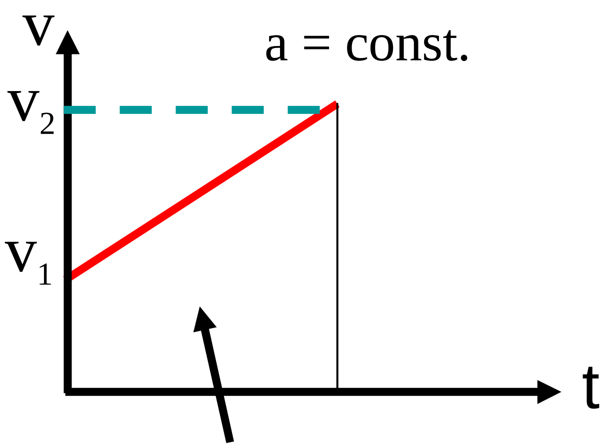


Elmozdulás: $$s = v_o \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

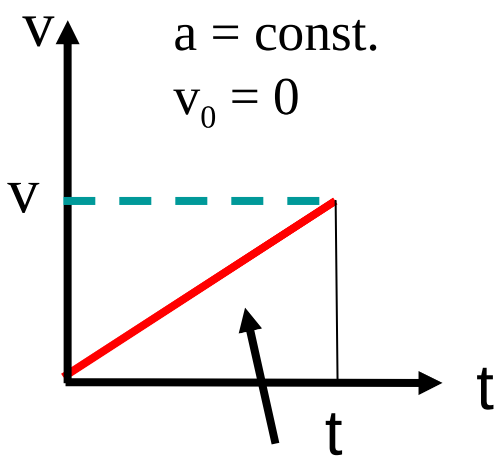
Láttuk: $$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + x_0 = \int_0^t \left(\int_0^{\tau'} a(\tau)d\tau \right) d\tau' + v_0 t + x_0$$

Pozíció: $$x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

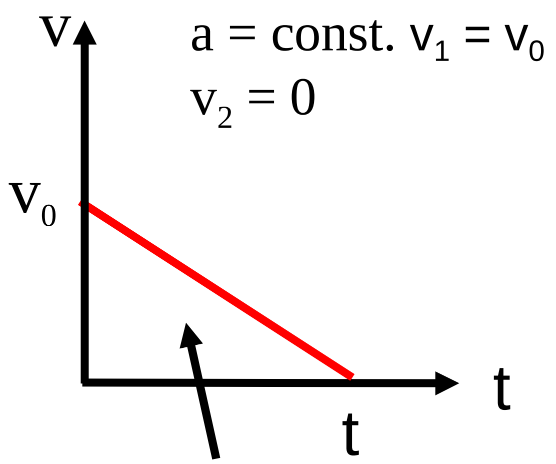
Feladatmegoldáshoz hasznos formulák



$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} t = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$



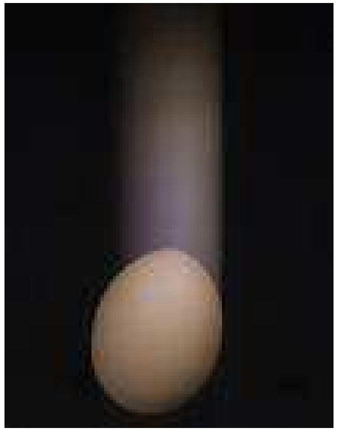
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{vt}{2} = \frac{v^2}{2a}$$



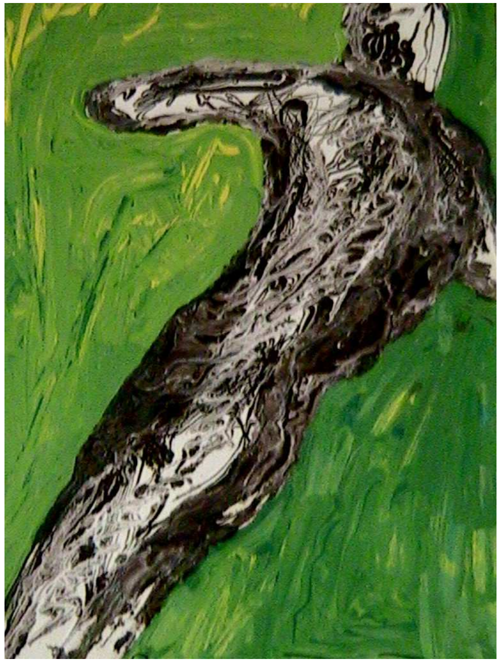
$$s = \frac{1}{2}|a|t^2 = \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0^2}{2|a|}$$

Szabadesés

$g = 9.81\ m/s^2 \approx 10\ m/s^2$



NY Mets 2009 Season: Free Falling



Mintapéldák: …

2. e.a. : 2D és 3D mozgás + koordinátarendszerek

2D és 3D mozgás

Átlagsebesség (vektor): $\vec{v}_{átl.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$\vec{v}_{átl.} = \frac{elmozdulás}{idő}$$

Átlagsebesség: $v_{átl.} = \frac{s_{össz.}}{t_{össz.}}$

Pillanatnyi sebesség: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Mivel: $d\vec{r} = dr\vec{u}_t$

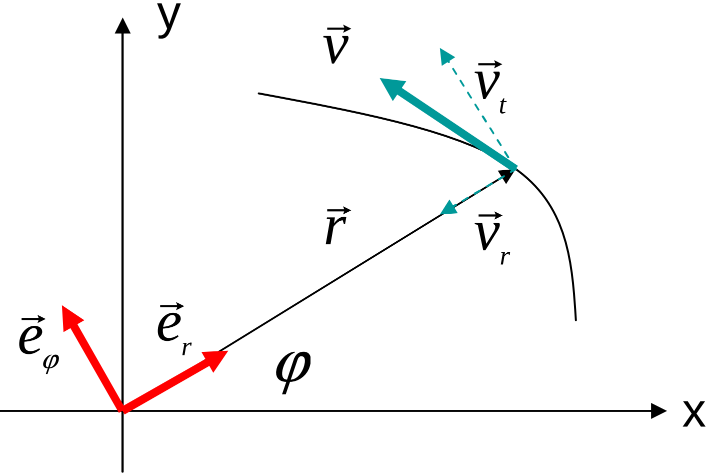
$\vec{u}_t$: érintő irányú egységvektor

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_t + r\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$\vec{v}_t$?

Polárkoordináták: r, φ

(síkbeli)



$$\vec r = r\vec e_r$$

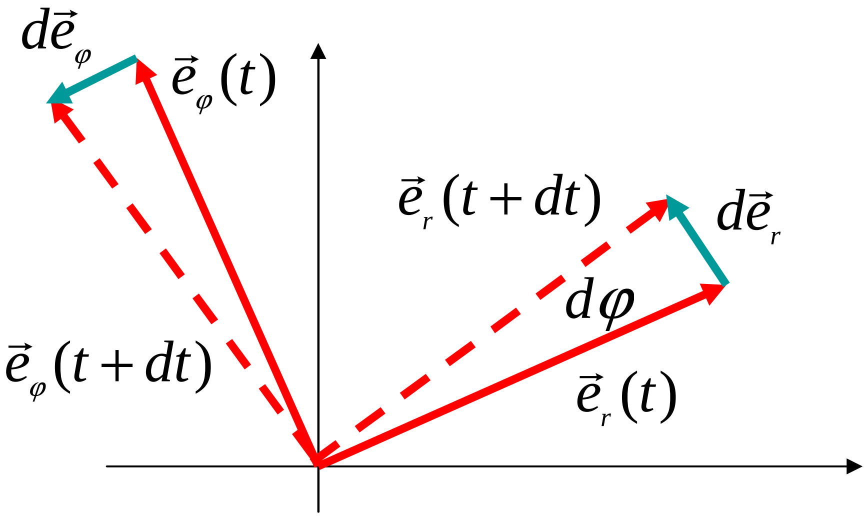
$$\dot{\vec r} = \dot r \vec e_r + r\dot{\vec e}_r$$

$$\vec v = \dot{\vec r} = \underbrace{\dot r \vec e_r}_{\vec v_r} + \underbrace{r\dot\varphi \vec e_\varphi}_{\vec v_t}$$

$$\vec a = \dot{\vec v} = \ddot r \vec e_r + \dot r \dot{\vec e}_r + \dot r \dot\varphi \vec e_\varphi + r\ddot\varphi \vec e_\varphi + r\dot\varphi \dot{\vec e}_\varphi$$

$$\downarrow$$

$$\vec a = \left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\vec e_r + \left(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi\right)\vec e_\varphi$$



$$\dot{\vec e}_r = \dot\varphi \vec e_\varphi \qquad \dot{\vec e}_\varphi = -\dot\varphi \vec e_r$$

A tömegpont helyzete: $\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau + \vec{r}_0$

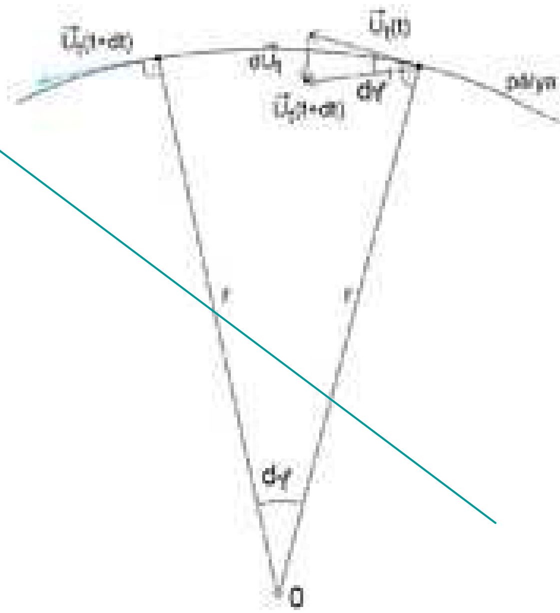
A tömegpont által megtett út: $s = \int_0^t v(\tau)d\tau$

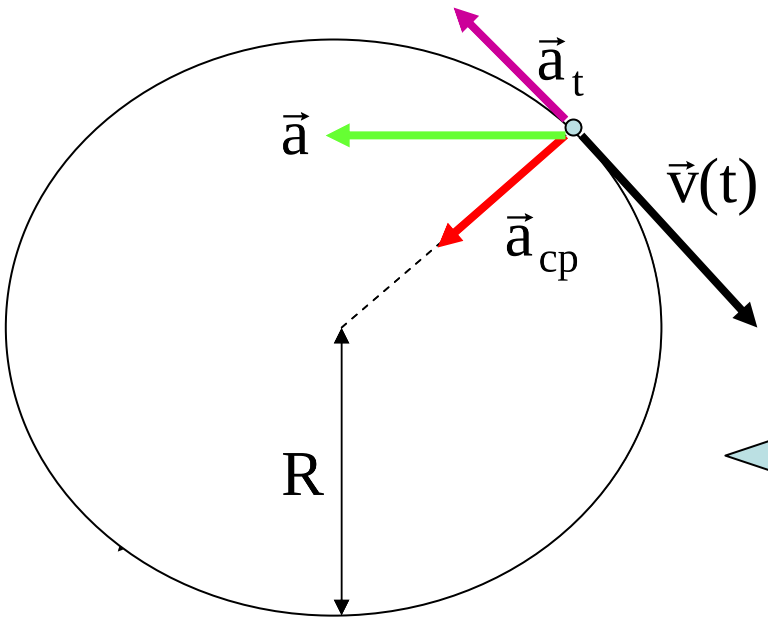
A tömegpont gyorsulása:
(egyszerűen)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{u}_t\right) = \dot{v}\vec{u}_t + v\dot{\vec{u}}_t$$

$$\frac{du_t}{\left|\vec{u}_t\right|} = \frac{vdt}{R} \Rightarrow \frac{du_t}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\dot{v}\vec{u}_t}_{a_t} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{n}}_{a_{cp}}$$





$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t \quad \text{ahol} \quad a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

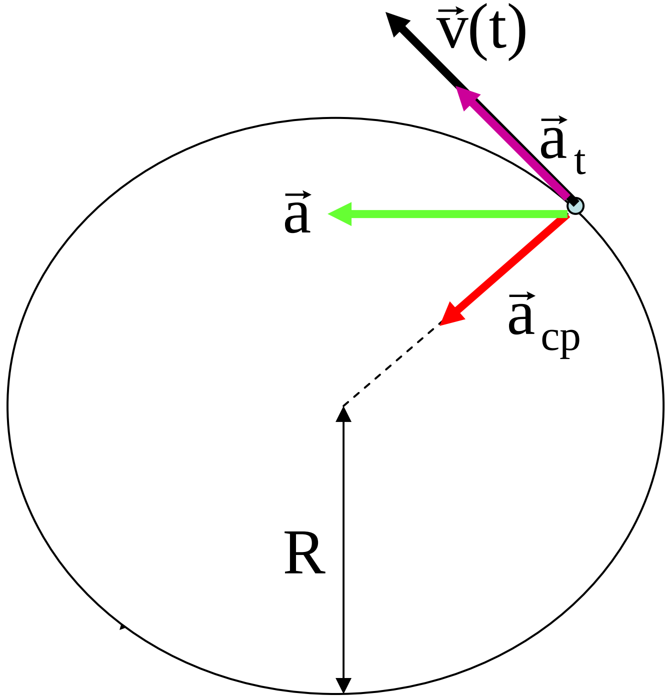
$$\vec{a}_{cp} \perp \vec{a}_t$$

$$\Downarrow$$

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

v csökken: $a_t < 0$

$v \neq \text{const}$



v növekszik: $a_t > 0$

Egy speciális eset: $\vec{a} = const.$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a} \cdot t$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = x_o + v_{ox} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Vízszintes mozgás

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x \cdot t$$

$$y(t) = y_o + v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Függőleges mozgás

$$v_y(t) = v_{oy} + a_y \cdot t$$

Hajítás

függőleges mozgás

$$y(t) = y_o + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_o = y_f = 0$$

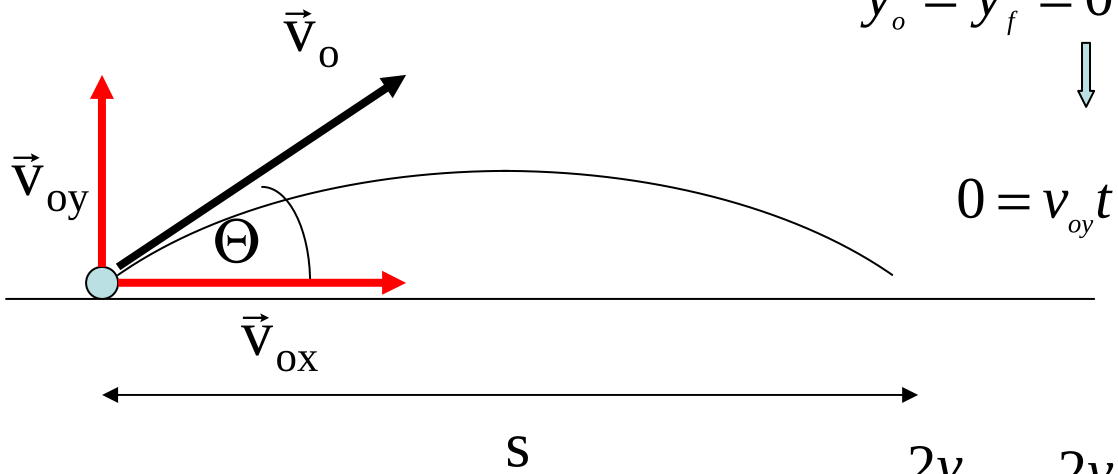
$$0 = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$t = -\frac{2v_{oy}}{a_y} = \frac{2v_o \sin\Theta}{g}$$

$$v_{ox} = v_o \cos\Theta$$

$$v_{oy} = v_o \sin\Theta$$

$$t = 2\frac{v_{oy}}{g}$$

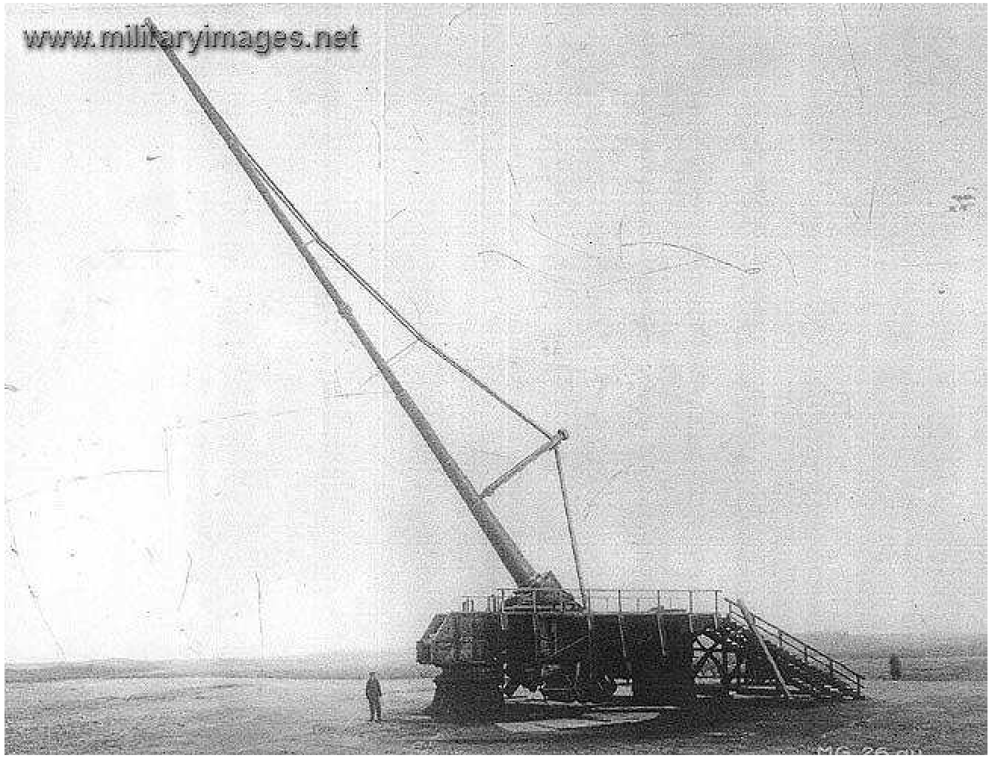


$$s = \frac{v_o^2}{g}\sin(2\Theta)$$ ← vízszintes elmozdulás

$$x(t) = v_{ox}t = v_o \cos\Theta t$$

$$s = v_{ox}t = v_o \cos\Theta t = v_o \cos\Theta \cdot \frac{2v_o \sin\Theta}{g}$$

A nagy Bertha és tsi



v_o = 1700 m/s

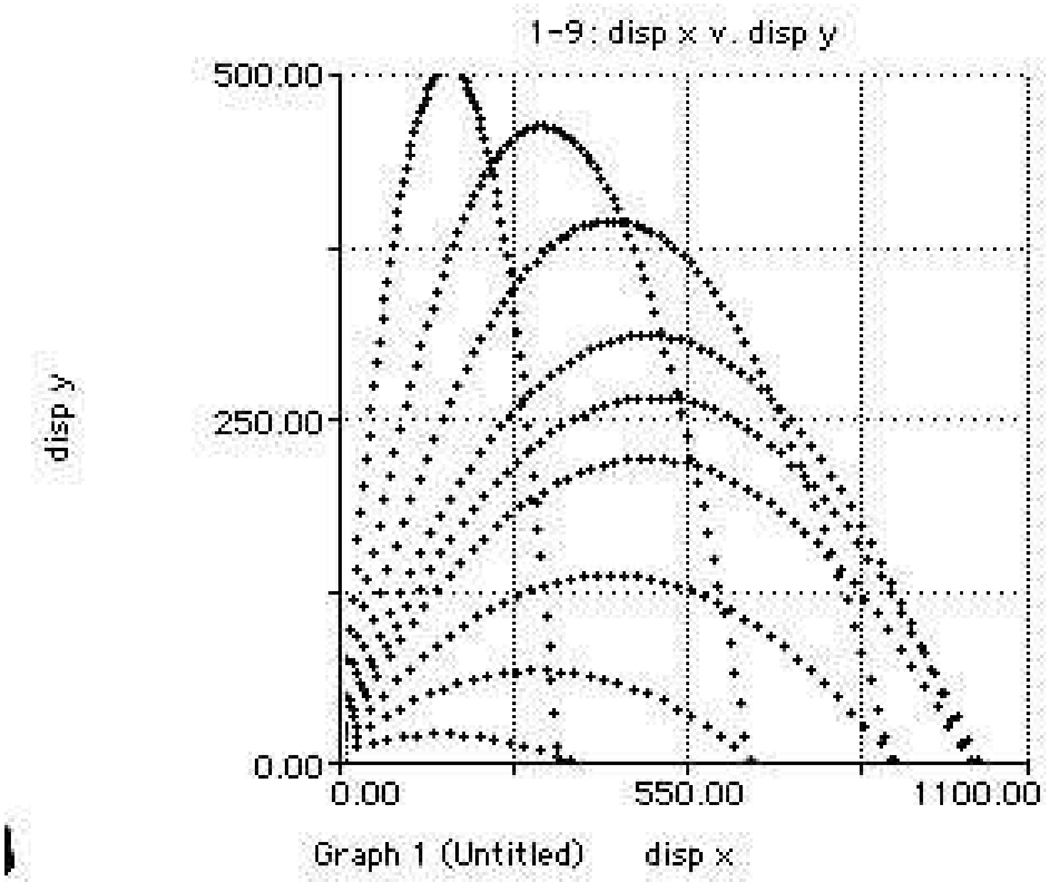
θ = 55°

s = ?

h = ?

Egy jó stratégia a hógolyócsatához

/ avagy hogyan lehet a lányokat (fiúkat) hógolyóval eltalálni /



Tudjuk (alg.):

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

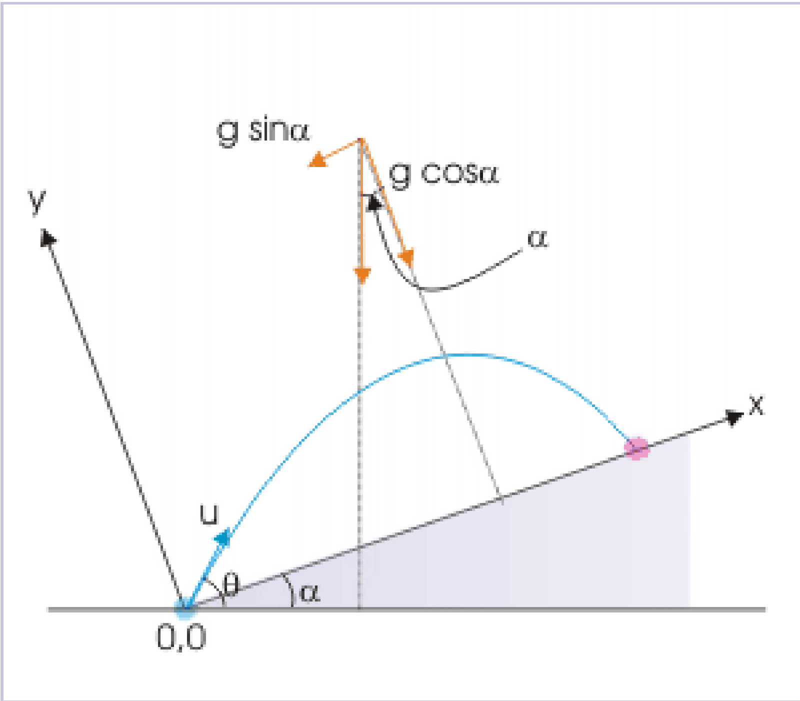
$$s = \frac{v_o^2}{g}\sin(2\Theta)$$

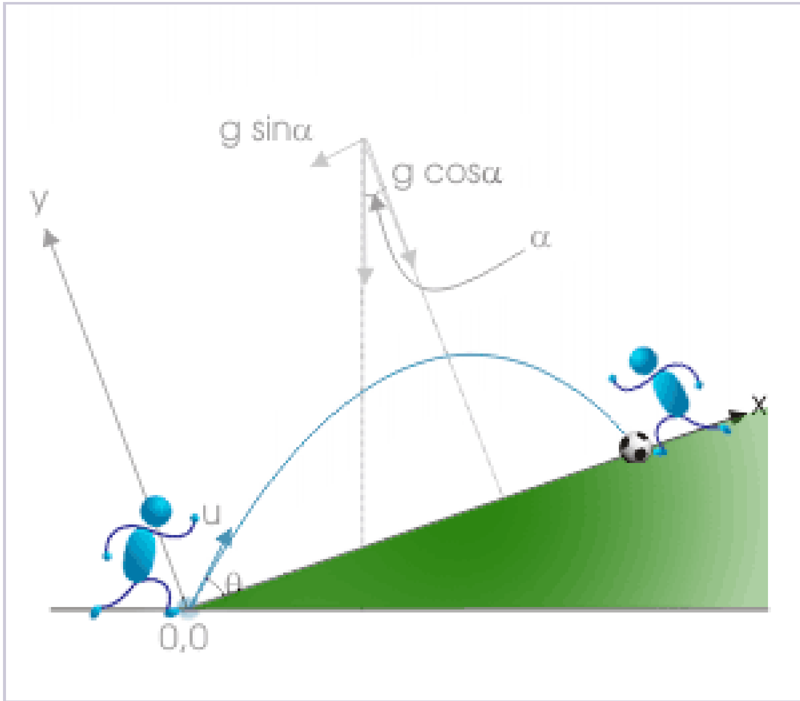
$$\sin(2\Theta) = \sin(\pi - 2\Theta) = \sin(2\beta)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \Theta$$

Egy újabb példa

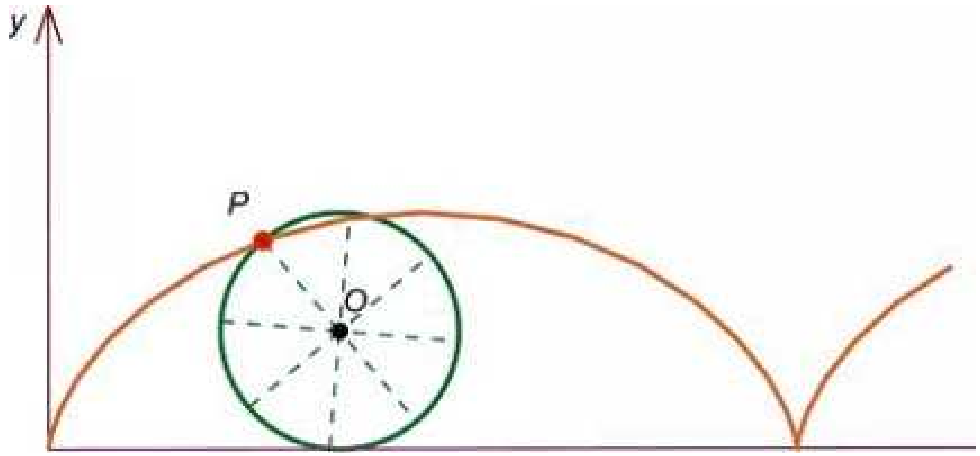
/ avagy miért építették a várakat hegytetőre /





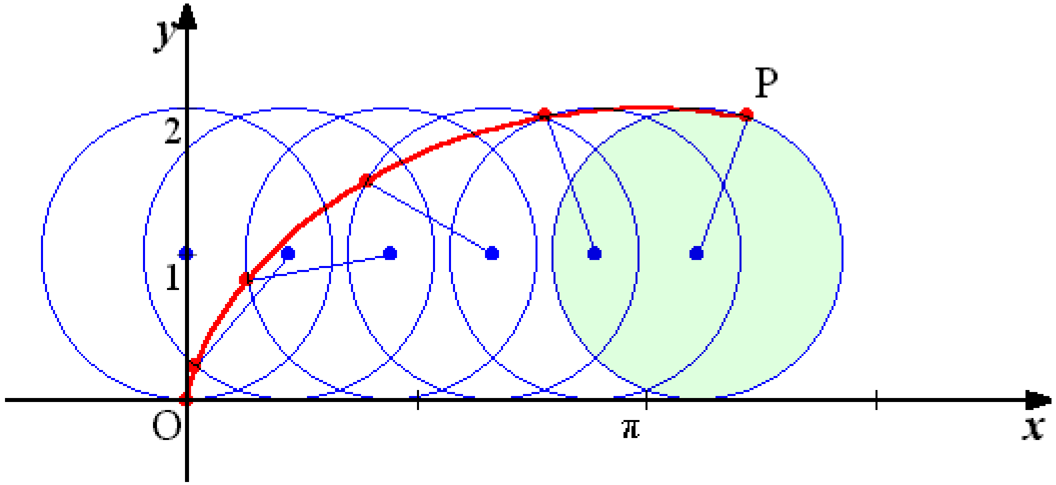
1. megoldás: a_x, a_y
2. megoldás: $y(x)$

Ciklois görbe

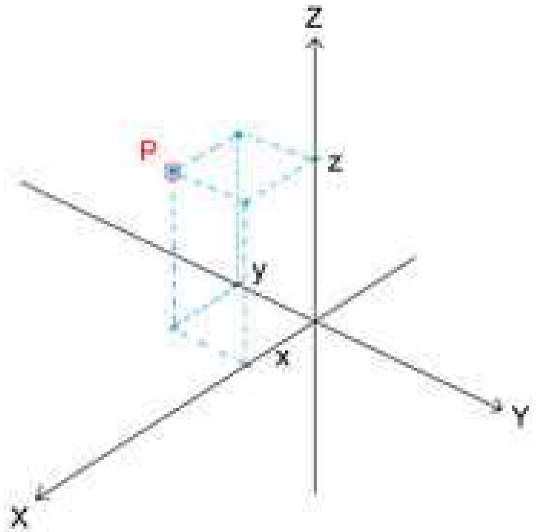


x(t) = ?

y(t) = ?



Koordináta rendszerek



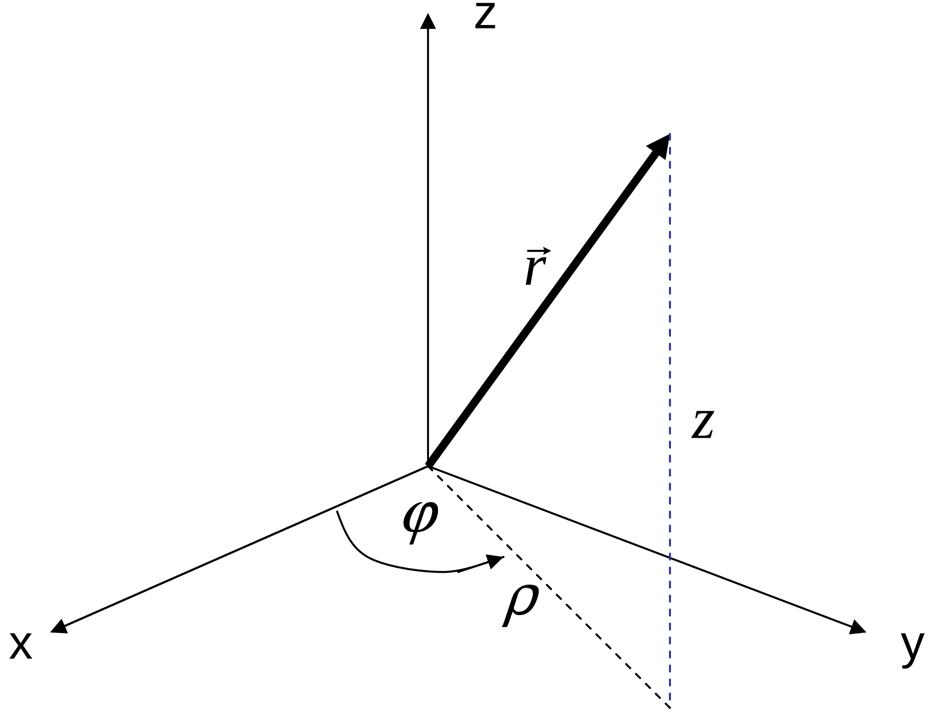
Descartes-féle koordináta rendszer

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Henger koordináta rendszer



$$\vec{r} = (r, \varphi, z)$$

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \underbrace{(\ldots)\vec{e}_\rho + (\ldots)\vec{e}_\varphi}_{\text{Síkbeli polár}} + \ddot{z}\vec{k}$$

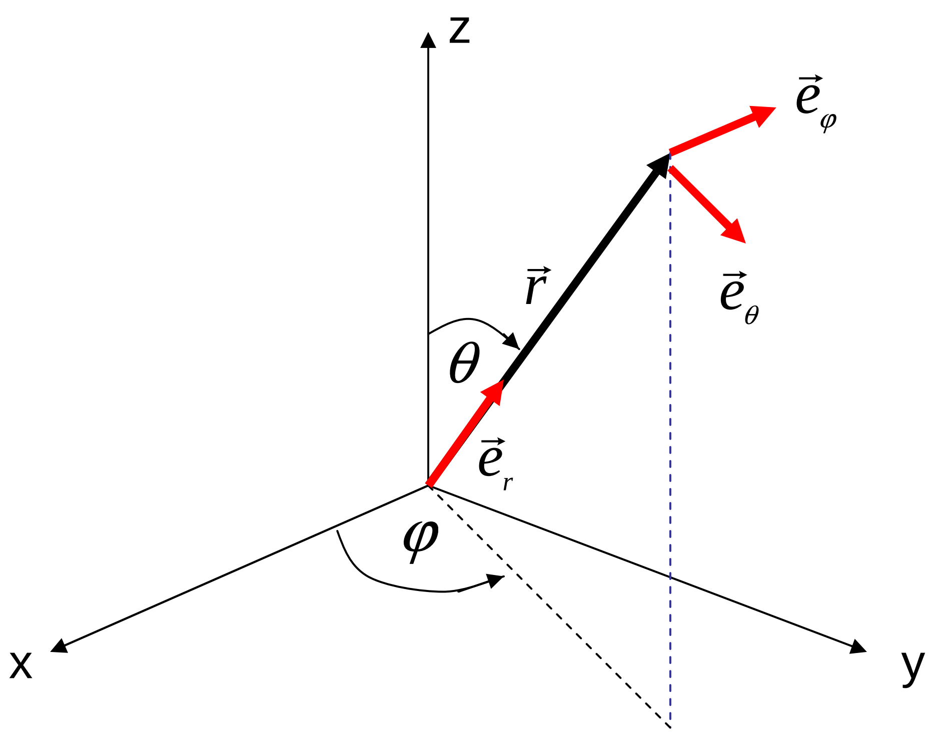
Gömbi koordinátarendszer

$$\vec{r} = (r, \varphi, \theta)$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = H.F. \quad ?$$



Segítség:

$$\vec{e}_r = \sin\Theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\Theta\sin\varphi\vec{j} + \cos(\Theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

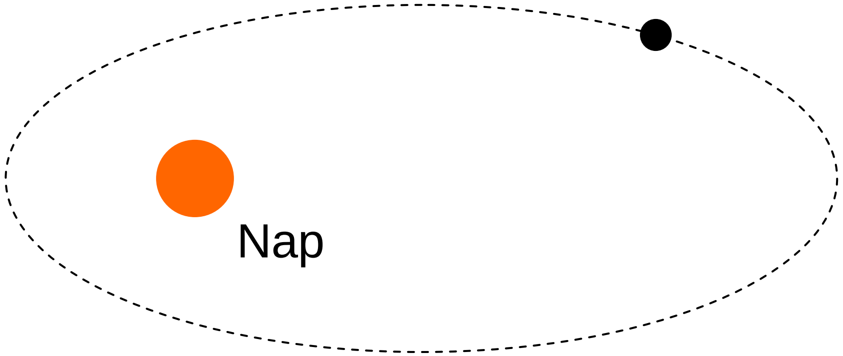
$$\vec{e}_\Theta = \cos\Theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\Theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\Theta\vec{k}$$

Kinematika → dinamika

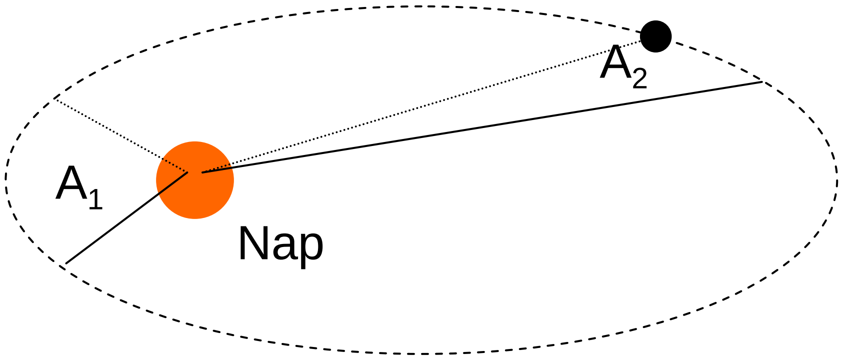
Kepler törvények

(Tycho de Brahe)

1.



2.



$A_1 = A_2$

$$\frac{T^2}{a^3} = const.$$

3.