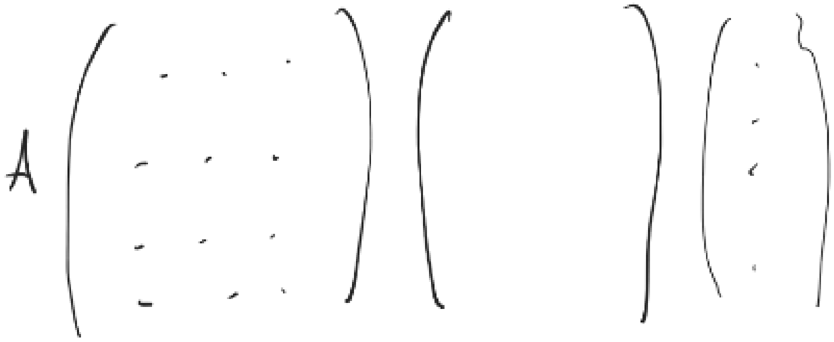
# Bsz előadás 11. hét

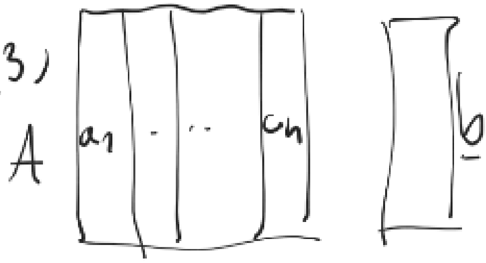
$( ) = \underline{x}$




(1) $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlet

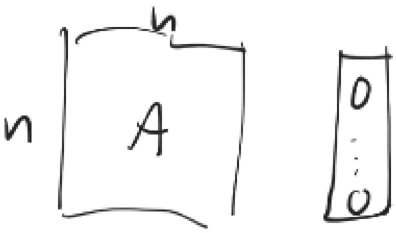
(2) $(A|b)$ kibővített együttható mátrix

(3)




$\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$

(1), (2), (3) ekvivalens




Állítás: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Ekvivalensek:

(1) $A\underline{x} = \underline{0}$ mx. egyértelműen megoldható

(2) $(A|\underline{0})$ lin. egyenletrendszer megoldható

(3) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ lin független

(4) $\det A \neq 0$

(5) $\det A = \det A^T \Rightarrow$ A sorai lineárisan függetlenek

Mátrix inverze

Csak négyzetes mátrixnak lehet

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A$-nak az $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mx inverze, ha

$A \cdot X = E = X \cdot A$

Jele: $X = A^{-1}$

---

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = X \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ y_1 + 2y_2 = 0 \\ 3y_1 + 5y_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = -5 \quad y_2 = -1$

$x_2 = 3 \quad y_1 = 2$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(1) $\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$

(2) Ha $A^{-1}$ létezik $\implies A^{-1}$ egyértelmű

$\det A = \frac{1}{\phantom{x}}$

det $A^{-1}$

Lemma: Ha $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists! X$, amire $AX = E$

Inverz számítása:

n darab lineáris egyenletrendszer
Gauss elimináció n-szer
↳ egybe lehet venni:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1} & \cdots & & 1 & 0 & \cdots\ 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ \vdots & & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

$$(A|E) \overset{\text{gauss}}{\sim} \ldots \sim (E|A^{-1})$$

Mátrixok rangja: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

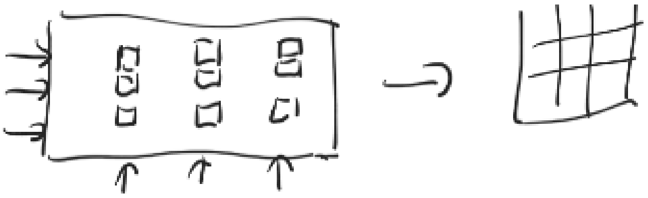
oszloprang: r, ha A oszlopai közül kiválasztható r db úgy, hogy azok lin. ftlenek. de r+1 db nem.

$o(A) = r$

sorrang — || — sorai közül

$s(A) = r$

Négyzetes részmátrix

$A$  $A$-nak $3\times 3$-as részmátrixa

determinánsrang

$d(A)=r$ A determinánsrangja $r$, ha $A$-ból kiválasztható $r\times r$-es nem 0 determinánsú négyzetes részmátrix, de $(r+1)\times(r+1)$-es már nem.

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times k} \qquad \overbrace{o(A) = s(A) = d(A)}^{r(A)}$$

mátrix rangja: $r(A)$

(1) Gauss elimináció sorokon végzett lépései $r(A)$-t nem változtatják

(2) Lépcsős alakú mátrix rangja a sorainak száma

$$r(A) = \dim\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\rangle$$