Ismertető

A „Matematika 2." elektronikus oktatási segédanyag a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatika Karán a mérnök-informatikus szakos hallgatók „Analízis 2." tárgyához készült, de haszonnal forgathatják más szakok, karok vagy műszaki főiskolák, egyetemek hallgatói is, akik hasonló mélységben hasonló anyagot tanulnak matematikából.

Az anyag az „Analízis 1." tárgyban tanult ismeretekre épül, tehát ismertnek tekintjük a valós egyváltozós függvények differenciál- és integrálszámításának elméletét, valamint a numerikus sorozatok, sorok alapjait.

A jegyzetben a közönséges differenciálegyenletekkel, függvénysorokkal (Taylor-sorokkal, Fourier-sorokkal), többváltozós függvényekkel (differenciálás, integrálás), valamint a komplex függvénytan alapjaival foglalkozunk. A jegyzet szerkezetével maximálisan igazodik a mérnök hallgatók igényeihez. A definíciók, tételek, bizonyítások mellett kiemelt szerepet kapnak a kidolgozott példák és a tematizált feladatok megoldásai.

A mintegy 350 oldalas elméleti anyagot kiegészíti egy 150 oldalas példatár, amely többségében megoldott, tematizált gyakorlófeladatokat tartalmaz. A két jegyzet azonos témaköröket azonos mélységben tárgyal, a jelölésrendszer teljesen összehangolt.

A jegyzetben az eligazodást tartalomjegyzék, valamint az elméleti anyagban található tárgymutató könnyíti meg. A megértést rengeteg színes ábra és néhány animáció segíti.

Az elméleti jegyzetben tárgyalt anyag szándékosan jóval bővebb, mint a jelenlegi heti 4 óra előadáson és 2 óra gyakorlaton tárgyalható mennyiség. Az előadáson nem szereplő anyagrészeket az érdeklődő hallgatók önállóan is megérthetik a jegyzetből.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

1.1. Bevezetés

Differenciálegyenlet: olyan egyenlet,amelyben az ismeretlen egy függvény, és az ismeretlen függvény és a differenciálhányados függvényei ugyanazon a helyen szerepelnek.
Közönséges differenciálegyenlet: a függvény egyváltozós.
Parciális differenciálegyenlet: a függvény többváltozós (mi ezzel az esettel nem foglalkozunk, tehát a továbbiakban csak közönséges differenciálegyenletekről beszélünk).

n-ed rendű differenciálegyenlet: a fellépő legmagasabb rendű derivált n-ed rendű.
Implicit alakja:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Explicit alakja:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})\,.$$

Lineáris differenciálegyenlet (n-ed rendű eset):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = f(x)\,.$$

A differenciálegyenlet megoldása
A differenciálegyenlet megoldásához keressük azon differenciálható valós egyváltozós függvényeket, melyek „kielégítik” a differenciálegyenletet, tehát behelyettesítve a differenciálegyenletbe azonossághoz jutunk.
Az n-ed rendű differenciálegyenlet megoldása: n paraméteres függvénysereg, melyet általános megoldásnak hívunk.

Az általános megoldás explicit alakban:

$y = g(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$

implicit alakban:

$G(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0, \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}\,.$

A differenciálegyenlet egyetlen megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük, melyet az állandók speciális megválasztásával kapunk. Például n darab kezdeti feltétel megadásával jelölhetünk ki egyetlen megoldást:

$y(x_0) = y_{0,0}\,,\ y'(x_0) = y_{0,1}\,,\ \ldots\,, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$

ahol $x_0\,,\ y_{0,0}\,,\ y_{0,1}\,,\ y_{0,n-1}$ adott valós számok.
Ezt kezdetiérték problémának hívjuk.

Partikuláris megoldás keresése peremfeltételek megadásával is történhet, de ezzel mi nem foglalkozunk.

A differenciálegyenletek elméletének két alapkérdése van:

- Egzisztencia kérdése: egy adott kezdetiérték problémának létezik-e megoldása?
- Unicitás kérdése: egyértelmű-e a megoldás?

A későbbiekben az egyes differenciálegyenlet típusoknál kitérünk az egzisztencia és unicitás kérdésére is.

A fogalmak megértéséhez tekintsünk egy egyszerű példát!

1.1. Példa

$$y' = 2x + 2$$

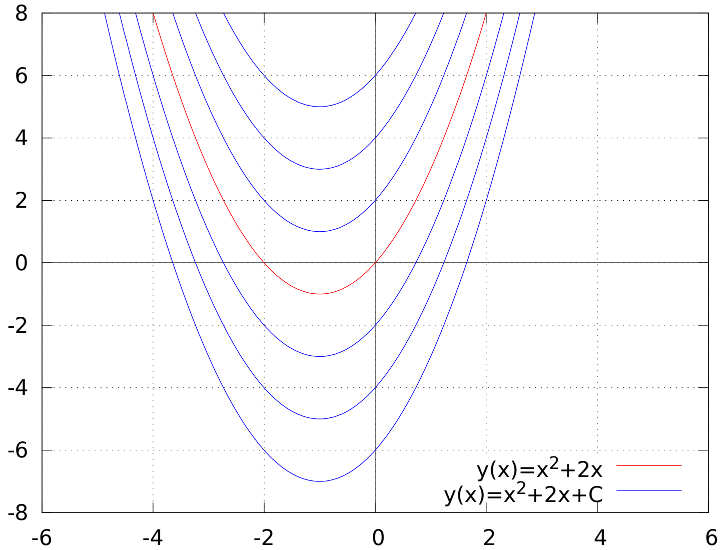
1. *Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!*
2. *Keressük meg az $y(1) = 5$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!*
3. *Keressük meg azon megoldást (ún. integrálgörbét), mely érinti az $y = 8x - 20$ egyenest!*

1 Megoldás: *Ez egy elsőrendű differenciálegyenlet explicit alakban megadva.*

1. *Egy y függvény akkor és csak akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha az egyenlet jobb oldalán adott függvény primitív függvénye. Így az általános megoldás:*

   $y(x) = x^2 + 2x + C \quad (= (x+1)^2 + C - 1)\ , \quad C \in \mathbb{R}.$

   Valóban egyparaméteres görbesereget kaptunk, melyet az 1.1 ábra mutat. A sík minden pontján pontosan egy megoldásgörbe (más elnevezéssel: integrálgörbe) halad át.



1.1. ábra. Az $y' = 2x + 2$ differenciálegyenlet megoldásai.

2. *Egy $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték problémát kell megoldanunk, ahol most $x_0 = 1$ és $y_0 = 5$. Ehhez az általános megoldásban elvégezve az $x = 1$ helyettesítést $(y(1) = 5)$: $5 = 1 + 2 + C$, amiből $C = 2$ adódik.*
   Így a keresett partikuláris megoldás: $y = x^2 + 2x + 2$.

3. *Milyen kezdetiérték probléma tartozik a megadott feltételhez? $(x_0 =?\,,\ y_0 =?)$*
   Mivel a keresett partikuláris megoldás $(x_0\ y_0)$ pontbeli érintő egyenese az $y = 8x - 20$ egyenes, így meredeksége: $m = 8$. Tehát adott a keresett megoldásfüggvény x_0 pontbeli deriváltja, melyet behelyettesítve a differenciálegyenletbe, megkapjuk x_0 értékét:

   $$8 = 2x + 2 \Longrightarrow x = 3, \quad \textit{tehát } x_0 = 3$$

   Az érintő egyenes egyenletéből pedig y_0 értéke is adódik:

   $$y_0 = 8 \cdot 3 - 20 = 4\,.$$

   Vagyis az $y(3) = 4$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást keressük.

   $4 = 9 + 6 + C \Longrightarrow C = -11$, *így a keresett megoldás: $y = x^2 + 2x - 11$.*

1.2. Elsőrendű differenciálegyenlet

1.2.1. Alapfogalmak

1.2. Definíció Elsőrendű implicit differenciálegyenletnek *nevezzük az olyan egyenletet, amelyben az* y, y' *és* x *szimbólumok szerepelnek, (amelyeket persze más betűkkel is jelölhetünk), és az* y' *semmiképp se hiányzik az egyenletből. Ezt úgy írhatjuk fel, hogy:*

$$F(x,\, y,\, y') = 0. \tag{1.1}$$

Ha ebből az egyenletből az y' *kifejezhető, akkor* elsőrendű explicit differenciálegyenletről *beszélünk:*

$$y' \;=\; f(x,y). \tag{1.2}$$

Tehát az (1.1) alak általánosabb, mint az (1.2) alak.

Az adott x_0, y_0 *esetén jutunk az*

$$y' = f(x,y)\,, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1.3}$$

ún. Cauchy-problémához.

1.3. Definíció *a) Azt mondjuk, hogy a* $\varphi : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, $(a<b)$ *differenciálható függvény megoldásfüggvénye a* (1.2) *differenciálegyenletnek, ha*

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \qquad \forall\, x \in (a,b)\,. \tag{1.4}$$

A φ *függvény grafikonját megoldásgörbének vagy integrálgörbének nevezzük:*

$$\{(x,y) : \quad y = \varphi(x),\;\; x \in (a,b).\} \tag{1.5}$$

Az összes megoldásfüggvény halmazát általános megoldásnak nevezzük. Ha ezek közül csak egyet tekintünk, például a Cauchy-feladat megoldását, akkor partikuláris megoldásról beszélünk.

b) Azt mondjuk, hogy a φ *megoldásfüggvénye* (1.3) *Cauchy-problémának, ha van olyan* (a,b) *intervallum* $(a<b)$, *hogy*

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))\,, \quad \forall\, x \in (a,b)\,, \quad \text{ahol } x_0 \in (a,b) \text{ és } \varphi(x_0) = y_0. \tag{1.6}$$

φ*-nek a grafikonja az (1.3) Cauchy-probléma megoldásgörbéje.*

Megjegyezzük, hogy egy megoldásfüggvény mindig valamely nem üres, nyílt intervallumon van értelmezve, és ott minden pontban differenciálható. Vannak olyan differenciálegyenlet tankönyvek is, amelyek nem kívánják meg, hogy a megoldások minden pontban deriválhatók legyenek. Azt azonban felteszik, hogy „nulla összhosszúságú” halmaz kivételével legyenek differenciálhatók a φ megoldások. Ilyenkor azt mondják, hogy φ majdnem mindenütt differenciálható az (a,b)-ben.
φ helyett természetesen y-nal is jelölhetjük a megoldásfüggvényt, mi is általában így teszünk a későbbiekben. (A φ jelölés kezdetben segíti az anyag könnyebb megérthetőségét.)

1.4. Példa *Mutassuk meg, hogy az*

$$y' = y - 2$$

differenciálegyenletnek megoldása az

$$y = 2 + e^{x+C}, \quad \textit{ahol } x \in (-\infty, \infty) \quad \forall\, C \in \mathbb{R}$$

esetén, vagyis a teljes számegyenesen értelmezett függvénycsalád tagjai mind megoldások! Ellenőrizzük azt is, hogy az azonosan kettővel egyenlő függvény is megoldás!

2 Megoldás: *Mivel a megadott függvény deriváltja* $y' = e^{x+C}$, *és fennáll, hogy* $y-2 = e^{x+C}$, *azért tetszőleges* $x, C \in \mathbb{R}$ *esetén fennáll az egyenlőség. Tehát a megadott függvény kielégíti a differenciálegyenletet.*
Az azonosan 2-vel egyenlő konstans függvény deriváltja nulla, és $2 - 2 = 0$, *így* $y \equiv 2$ *valóban megoldás.*

Megjegyzés: azt nem állítja a feladat, hogy más megoldása nincs a differenciálegyenletnek.

1.5. Példa

1. *Oldjuk meg az* $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ *differenciálegyenletet!*
2. *Oldjuk meg az* $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y(1) = 0$ *kezdetiérték problémát!*

3 Megoldás: 1. *Az* $y = \operatorname{arctg} x + C$, $C \in \mathbb{R}$ *az általános megoldás, amelynek elemei értelmezettek a* $(-\infty, \infty)$ *intervallumon.*

2. *Ezek közül az* $y = \operatorname{arctg} x - \pi/4$ *adja az* $(1,0)$ *kezdeti értékhez tartozó megoldásgörbét.*

Vegyük észre, hogy minden ponton halad át megoldásgörbe, és mind a $(-\infty, \infty)$ *intervallumon vannak értelmezve.*

1.6. Példa *Oldjuk meg az*

$$y' = \frac{1}{x}$$

differenciálegyenletet!

4 Megoldás: *A*

$$\varphi(x) = \ln x + C_1, \;\; x > 0 \qquad \text{és a} \qquad \varphi(x) = \ln(-x) + C_2, \;\; x < 0$$

függvények a megoldások, ahol C_1, C_2 *tetszőleges valós konstansok.*

Ha az $x_0 = e$, $y_0 = -2$ *kezdetiérték problémát akarjuk megoldani, akkor feltehetjük, hogy* $x > 0$ *, így a* $-2 = \ln e + C_1$ *-ből* $C_1 = -3$ *adódik. Ezért*

$$\varphi(x) = \ln x - 3$$

adja a megoldásfüggvényt.

Ha pedig az $x_0 = -e$, $y_0 = 7$ *kezdetiérték problémát akarjuk megoldani, akkor feltehetjük, hogy* $x < 0$ *, így a* $7 = \ln(-(-e)) + C_2$ *-ből* $C_2 = 6$ *adódik, ezért*

$$\varphi(x) = \ln(-x) + 6$$

a megoldásfüggvény.

A rövidebb írásmód kedvéért az általános megoldást $\varphi(x) = \ln|x| + C$ *alakban szoktuk leírni, ami alatt az* $\ln|x| + C$ *függvény valamely* (a, b) *intervallumra való leszűkítését értjük, például a* $(-\infty, 0)$ *vagy a* $(0, \infty)$ *intervallumra való leszűkítését. A 0-t tartalmazó* (a, b) *intervallumra nem lehet úgy leszűkíteni, hogy differenciálható függvényhez jussunk. A fenti két kezdetiérték probléma megoldása:*

$$\varphi(x) = \ln|x| - 3\,, \qquad \text{illetve} \qquad \varphi(x) = \ln|x| + 6$$

alakokban is írható. Ilyenkor az értelmezési tartományok nincsenek kiírva, de értelemszerűen az első esetben $x > 0$ *, a másodikban* $x < 0$ *.*

1.7. Példa *Mutassuk meg, hogy ha az* $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ *differenciálható, és kielégíti az*

$$x^3 y^3 = 3x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

implicit egyenletet, akkor megoldása az alábbi differenciálegyenletnek:

$$xy^2 y' + y^3 - 2/x = 0. \tag{1.8}$$

5 Megoldás: *Az y helyett $\varphi(x)$ -et gondolunk és differenciáljuk az (1.7) implicit egyenlet mindkét oldalát x szerint, a K paramétert konstansnak tekintve:*

$$3x^2y^3 + x^3 3y^2 y' = 6x\,,$$

amiből $3x^2$ -tel való osztással megkapjuk a kívánt differenciálegyenletet. (Megjegyezzük, hogy $x = 0$ esetén φ nem elégíti ki az (1.7) implicit egyenletet sem.)
Ilyenkor az (1.7) -et nevezzük az (1.8) differenciálegyenlet implicit alakú megoldásának. Sokszor meg kell elégednünk a megoldások implicit alakjával.

1.8. Példa

1. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $y = y(x)$ differenciálható függvény kielégíti az*

$$x^2 + x\,y^2 - 2\,x^2\,y + 2\,y^2 \;=\; 0 \tag{1.9}$$

implicit függvénykapcsolatot, akkor $y = y(x)$ megoldása a

$$\big(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\big)\;\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \big(4\,x\,y - 2\,x - y^2\big) \tag{1.10}$$

differenciálegyenletnek.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $x = x(y)$ differenciálható függvény kielégíti az (1.9) implicit függvénykapcsolatot, akkor kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:*

$$\big(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\big) \;=\; \big(4\,x\,y - 2\,x - y^2\big)\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}. \tag{1.11}$$

3. *Mi a tanulság?*

6 Megoldás: 1. *Tehát most az*

$$x^2 + x\;y^2(x) - 2\,x^2\;y(x) + 2\,y^2(x) \;=\; 0$$

implicit egyenletet kell x szerint deriválni. Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$2\,x + y^2(x) + x\;2\,y(x)\;y'(x) - 4x\;y(x) - 2\,x^2\;y'(x) + 4\;y(x)\;y'(x) \;=\; 0.$$

Innen pedig $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ cserével és rendezéssel adódik az állítás.

2. *Ebben az esetben az y a független változó, ezért az*

$$x^2(y) + x(y)\;y^2 - 2\,x^2(y)\;y + 2\,y^2 \;=\; 0.$$

egyenletet most az y független változó szerint kell deriválni:

$$2x(y)\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\;y^2 + x(y)\;2y - 4\,x(y)\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\;y - 2\,x^2(y) + 4y \;=\; 0.$$

Ebből rendezéssel kapjuk (1.11)-et.

3. $\quad y' = f(x,y)\,,\quad$ *azaz* $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$

esetén az inverzfüggvényre vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x,y)}\,, \qquad\qquad f(x,y) \neq 0$$

Most y *jelöli a független változót.*

Megjegyzés:
A fentiekből következően az (1.10) és az (1.11) differenciálegyenletek közös alakja:

$$\left(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\right)\ \mathrm{d}y \ = \ \left(4\,x\,y - 2\,x - y^2\right)\ \mathrm{d}x$$

A megoldásnál tudnunk kell, hogy melyik a független változó. Mi megállapodunk abban, hogy esetünkben mindig az x lesz a független változó, ha nincs ezzel ellentétes állítás.

1.9. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y' = \frac{1}{xy} \tag{1.12}$$

7 Megoldás: *A megoldásgörbék valamelyik síknegyedben vannak, ugyanis* $x \neq 0$, $y \neq 0$ *miatt nem metszhetik a tengelyeket. A megoldásoknak ki kell elégíteniük az*

$$yy' = 1/x, \quad \text{azaz a} \quad 2yy' = 2/x, \quad \text{azaz az} \quad (y^2)' = 2/x$$

differenciálegyenletet. Tehát

$$y^2 = 2\,\ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

a megoldások implicit alakja.

Legyen $C = 2\ln\tilde{C}$ *, ekkor*

$$y^2 = 2\,\ln|x| + 2\,\ln\tilde{C}\,, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}^+\,,$$

amelyet kényelmesebben

$$y^2 = 2\,\ln(|x|\,\tilde{C})\,, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}^+\,,$$

azaz

$$e^{(y^2/2)} = |x|\,\tilde{C}\,, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}^+\,, \tag{1.14}$$

amelyből x *-et fejezhetjük ki, mint az* y *függvényét, vagyis a megoldásfüggvények inverzeiről beszélhetünk kényelmesen:*

$$x = \pm\frac{1}{\tilde{C}}\,e^{(y^2/2)}\,, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}^+\,,$$

vagyis

$$x = k\, e^{(y^2/2)}\,, \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\; y \neq 0. \tag{1.15}$$

Az (1.15) formula minden $y \in \mathbb{R}$ *-re értelmezett, de a mi esetünkben* (1.12) *miatt* $y \neq 0$ *lehet csak.*
Ha differenciálegyenletet kell megoldanunk és a megoldásfüggvényekkel kapcsolatban semmi más feladatunk sincs, akkor az (1.13) implicit függvénykapcsolat megtalálásával a feladatot megoldottnak tekinthetjük.

1.2.2. Gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az adott függvények megoldásai a feltüntetett differenciálegyenleteknek:

   (a)

   $$y = -2\, e^{-2x} + \frac{1}{3}\, e^{x}; \qquad\qquad y' + 2y = e^{x}.$$

   (b)

   $$y = x\sqrt{1-x^2}, \qquad 0 < x < 1;$$

   $$y\, y' = x - 2x^3.$$

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenleteknek a feltüntetett paraméteresen adott görbék megoldásgörbéi:

   (a)

   $$x + y\, y' = 0\,;$$

   $$x = \cos t\,, \qquad y = \sin t\,, \qquad t \in (0, \pi).$$

   (b)

   $$(1 + xy)\, y' + y^2 = 0\,;$$

   $$x = te^{t}\,, \qquad y = e^{-t}\,, \qquad t < -1.$$

   (c)

   $$(y')^2 + e^{y'} = x\,;$$

   $$x = t^2 + e^{t}\,, \qquad y = \frac{2}{3}\, t^3 + (t-1)\, e^{t}\,, \qquad t > 0.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ függvény differenciálható, és kielégíti a megadott implicit egyenletet, akkor megoldása a feltüntetett differenciálegyenletnek is:

   (a)
$$x^2 + y^2 - x^6 + y^4 = K\,; \qquad y\,y'\,(1 + 2y^2) = 3\,x^5 - x.$$

   (b)
$$y^2 + 6x = 9\,, \qquad y > 0\,;$$
$$y\,(y')^2 + 2x\,y' = y.$$

   (c)
$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0\,, \qquad x > 0\,;$$
$$(x - y)\,y' = x + y.$$

4. Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ függvény kielégíti a megadott integrálegyenletet, akkor megoldása a feltüntetett differenciálegyenletnek is:

   (a)
$$y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt\, +\, 3\,e^x\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,;$$
$$y' - y = e^{x + x^2}.$$

   (b)
$$y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,; \qquad x > 0\,;$$
$$xy' = y + x\,\sin x.$$

   (c)
$$y = x \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\,, \qquad x > 0\,;$$
$$x\,y' - y = x\,e^x.$$

   Útmutatás:
   Ha az integrandus függvény folytonos, akkor az integrálszámítás II. alaptétele szerint az $y = \varphi(x)$ differenciálható. A 4b feladatot úgy kell érteni, hogy az integrandus függvény 0 pontbeli szakadását megszüntettük, felhasználva, hogy $\lim\limits_{t \to 0} (\sin t)/t = 1$.

1.2.3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Más elnevezéssel: szeparálható vagy szeparábilis differenciálegyenletek.

1.10. Definíció *A szétválasztható változójú differenciálegyenletek speciális alakú elsőrendű differenciálegyenletek, melynek alakja*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad \textit{ahol} \;\; f \in C^0_{(a,b)}, \quad g \in C^0_{(c,d)}. \tag{1.16}$$

Tehát az explicit megadású $y' = \varphi(x,y)$ elsőrendű differenciálegyenlet jobb oldalán álló kétváltozós függvény felírható egy csak x-től és egy csak y-tól függő egyváltozós függvény szorzataként.
A differenciálegyenlet megoldásaként keressük azt az $y = y(x)$ függvényt, amelyre:

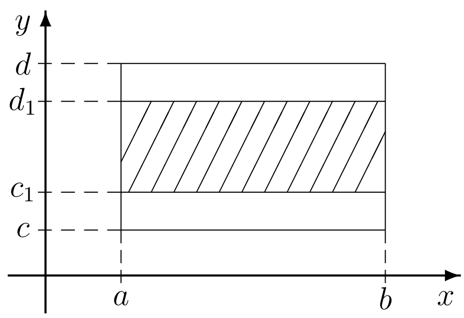
$$y'(x) \equiv f(x) \cdot g(y(x)), \qquad \forall\, x \in (a,b)\text{-re.}$$

1.11. Tétel *A szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása:*

1.) Ha $g(y_0) = 0$ $(y_0 \in (c,d))$, *akkor* $y \equiv y_0$ *megoldás.*
(Egyensúlyi helyzet, mivel $y' \equiv 0$.*)*

2.) Ha $(c_1, d_1) \subset (c,d)$ *-ben* $g(y) \neq 0$, *akkor az*
$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c_1, d_1)$
kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható. Az $y(x)$ *megoldásfüggvényre vonatkozó implicit egyenlet:*

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Bizonyítás.

1.) $y \equiv y_0$ -át behelyettesítve (1.16)-ba:

$$\underbrace{y_0'}_{\equiv 0} = f(x) \cdot \underbrace{g(y_0)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad 0 \equiv 0$$

Tehát $y \equiv y_0$ valóban kielégíti a differenciálegyenletet.

2.) Mivel $g(y) \neq 0$, (1.16) ekvivalens (1.17)-tel:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \tag{1.17}$$

Ha $y = y(x)$ ($y(x_0) = y_0$) megoldása (1.17)-nek, akkor

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,, \qquad \forall\, x \in K_{x_0,\delta}. \tag{1.18}$$

Legyen $H(y)$ az $1/g(y) = h(y)$ egy primitív függvénye (c_1, d_1)-en, tehát

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}\,.$$

$1/g$ folytonossága miatt létezik H , hiszen az integrálszámítás II. alaptételének következményeinél tanultunk erről (folytonos függvénynek mindig van primitív függvénye).

Legyen F a f egy primitív függvénye (a, b)-n, tehát itt

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

(f folytonossága miatt létezik F).

Látjuk, hogy (1.18) az alábbi alakú

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(H(y(x))) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(F(x))\;,$$

amiből a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$H(y(x)) = F(x) \,+\, C\,. \tag{1.19}$$

(A deriváltak egyenlősége miatt a primitív függvények csak egy állandóban különböznek.)

Az $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték probléma megoldása az általános megoldásból:

$$H(y(x_0)) = F(x_0) \,+\, C \quad\Longrightarrow\quad C = H(y(x_0)) - F(x_0)\,,$$

tehát C egyértelműen megadható.

Megfordítva, ha (1.19) valamilyen C-vel teljesül, akkor mindkét oldalt x szerint deriválva

$$h\,(y(x))\; y'(x) = f(x)\,, \qquad \text{vagyis} \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,,$$

tehát $y(x)$ megoldása (1.16)-nak.

Összefoglalva: F és H meghatározásával az ismeretlen $y = y(x)$ függvényre a

$$H(y) = F(x) + C \tag{1.20}$$

implicit függvénykapcsolatot kapjuk. Ezt írhatjuk

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

alakban is.
Az utóbbi alaknál az integrálási állandót csak a jobb oldalon írjuk ki.

Megjegyezzük, hogy H szigorúan monoton, ezért elvileg y kifejezhető (1.20)-ból. (Ugyanis $H'(y) \left(= h(y) = \dfrac{1}{g(y)}\right) \neq 0$, így $H'(y)$ jeltartó.) $\square$

1.12. Példa *Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!*

$$y' = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y}\,, \qquad y(0) = 0.$$

8 Megoldás: $f(x) = \operatorname{sh} 2x\,, \quad f \in C^0_{\mathbb{R}}\,; \qquad g(y) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 3y} \neq 0\,, \quad g \in C^0_{\mathbb{R}}.$
Így minden kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható.
A megoldás:

$$y' = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y} \quad\Longrightarrow\quad \int \operatorname{ch} 3y\,\mathrm{d}y = \int \operatorname{sh} 2x\,\mathrm{d}x.$$

Elvégezve a kijelölt integrálásokat kapjuk az általános megoldást:

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{sh} 3y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + C}} \qquad \left(y = \frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{3}{2}\operatorname{ch} 2x + C\right)\right).$$

Az $y(0) = 0$ *kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás:*

$$\frac{1}{3}\operatorname{sh} 0 = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 0 + C, \quad \textit{vagyis} \quad 0 = \frac{1}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad C = -\frac{1}{2},$$

tehát

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{sh} 3y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2}}}.$$

1.13. Példa *Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!*

$$y' = x\,y$$

9 Megoldás: *$f(x) = x$ és $g(y) = y$ mindenütt folytonosak, de $g(y) = 0$, ha $y = 0$. Így az alábbit állíthatjuk:*
$y \equiv 0$ megoldja a differenciálegyenletet. Tételünk értelmében az $y > 0$ félsíkra eső kezdetiérték problémák egyértelműen megoldhatók, ilyenkor vizsgálatunkat az $y > 0$ félsíkra korlátozzuk. Hasonlóan az $y < 0$ félsíkra eső kezdetiérték problémák is egyértelműen megoldhatók, de vizsgálatunkat ekkor pedig az $y < 0$ félsíkra korlátozzuk.
A megoldás a változók szétválasztásával:

$y \neq 0$: $\quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + K$

Ha $y > 0$: $\quad \ln y = \frac{x^2}{2} + K \quad \Longrightarrow \quad y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+K}$ *vagyis* $y = \mathrm{e}^K\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

Ha $y < 0$: $\quad \ln(-y) = \frac{x^2}{2} + K \quad \Longrightarrow \quad y = -\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+K}$ *vagyis* $y = -\mathrm{e}^K\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

Így az általános megoldás a következő alakú lett:

$$y = C\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,, \text{ ahol } C \in \mathbb{R}\,, \text{ de } C \neq 0.$$

Az $y \equiv 0$ megoldás beilleszthető $C = 0$ választással az előző seregbe, így az összes megoldás:

$$y = C\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

A megoldásokat az 1.2. ábra mutatja.

Ebben az esetben a teljes síkot vizsgálva is állíthatjuk, hogy minden $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható.

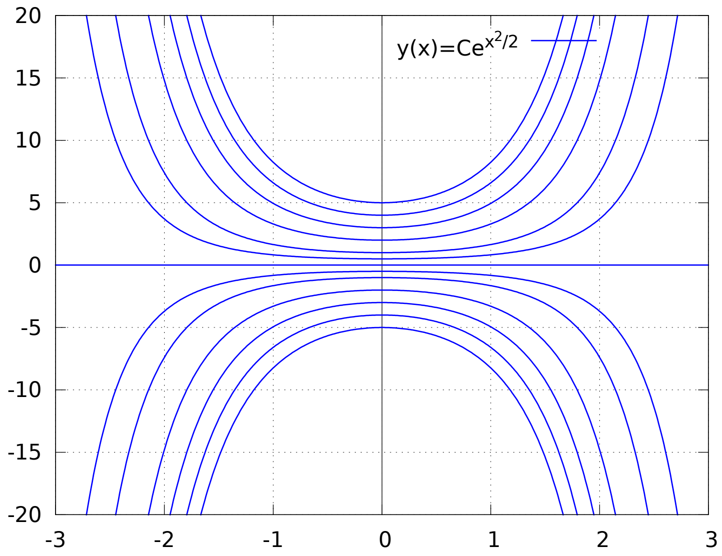
1.14. Példa

$$y' = 3\,\sqrt[3]{y^2}$$

1. *Oldjuk meg a differenciálegyenletet!*
2. *Oldjuk meg az $y(2) = 0$ kezdetiérték problémát!*
3. *Mit mondhatunk a megoldások egyértelműségéről?*

10 Megoldás: 1. *$f(x) \equiv 1$ és $g(y) = 3\,\sqrt[3]{y^2}$ mindenütt folytonosak, és $g(y) = 0$, ha $y = 0$.*
Így $y \equiv 0$ megoldás.
Ha $y \neq 0$, a változók szétválasztásával:

$\displaystyle\int \frac{1}{3}\,y^{-2/3}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{y} = x + C.$



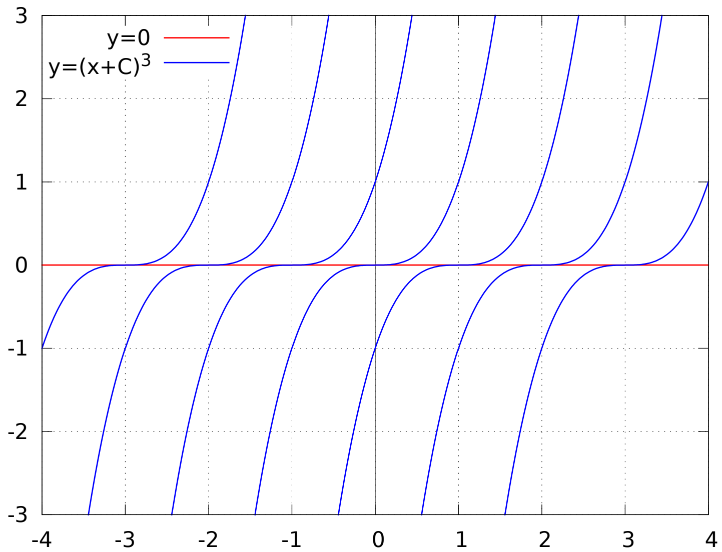
1.2. ábra. Az $y' = xy$ differenciálegyenlet megoldásai.

Tehát az általános megoldás: $\qquad y = (x + C)^3\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$

Most az $y \equiv 0$ *megoldás nem illeszthető be ebbe a függvényseregbe a* C *konstans megfelelő megválasztásával. A megoldásokat az 1.3 ábra mutatja.*

2. *Az* $y(2) = 0$ *kezdetiérték probléma megoldása például:* $\quad y \equiv 0\,,$ *de az* $y = (x+C)^3$ *függvényseregből is adódik megoldás:*
   $0 = (2 + C)^3 \quad \Longrightarrow \quad C = -2\,,$ *tehát* $y = (x - 2)^3$ *is megoldás.*
   Sőt például az
   $$y \;=\; \begin{cases} (x+1)^3\,, & ha\;\; x \le -1\,, \\ 0\,, & ha\;\; -1 < x < 2\,, \\ (x-2)^3\,, & ha\;\; 2 \le x. \end{cases}$$
   függvény is megoldás, hiszen mindenütt differenciálható, kielégíti a differenciálegyenletet és y(2)=0. És még végtelen sok ilyen típusú függvényt felírhatnánk. Tehát ennek a kezdetiérték problémának a megoldása nem egyértelmű.

3. *Az előző példában az* $y \equiv 0$ *megoldást betéve az integrálás útján kapott megoldások közé nem romlott el az egyértelműség. Ezért ezt a megoldást regulárisnak nevezzük. A mostani példában az* $y \equiv 0$ *megoldást szingulárisnak nevezzük, mert ennek egyetlen pontjában sem teljesül az egyértelműség. Az* $y > 0\,,$ *illetve* $y < 0$ *félsíkok bármely pontján áthaladó megoldás lokálisan egyértelmű, mert a pont köré felvehető olyan nyílt téglalap, melyben tekintve a megoldásokat az adott ponton csak egyetlen megoldás halad át (nem szabad kilépnünk a vizsgált félsíkból).*



1.3. ábra. Az $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ differenciálegyenlet megoldásai.

1.15. Megjegyzés *A továbbiakban a $g(y) = 0$ egyenlet vizsgálatából származó megoldásokat kérjük felsorolni, de nem kell vizsgálniuk, hogy figyelembe vételükkel elromlik-e az egyértelműség. Tehát nem kell megállapítani, hogy ezek reguláris vagy szinguláris megoldások-e.*

1.16. Példa *Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!*

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad\qquad y > 0,\ \textit{vagy}\ y < 0$$

11 Megoldás: $f(x) = -x, \quad f \in C^0_{\mathbb{R}}; \qquad g(y) = \dfrac{1}{y} \neq 0, \quad g \in C^0_{(0,\infty)}$ *és* $g \in C^0_{(-\infty,0)}$
Így minden $y(x_0) = y_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}\,, y_0 \neq 0$ *kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható. A megoldás:*

$$y' = -\frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad \int y\,\mathrm{d}y = \int -x\,\mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálásokat kapjuk az általános megoldást:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad \underline{\underline{x^2 + y^2 = C \qquad (\,y > 0}}\ \ \textit{vagy}\ \ \underline{\underline{y < 0\,)}}$$

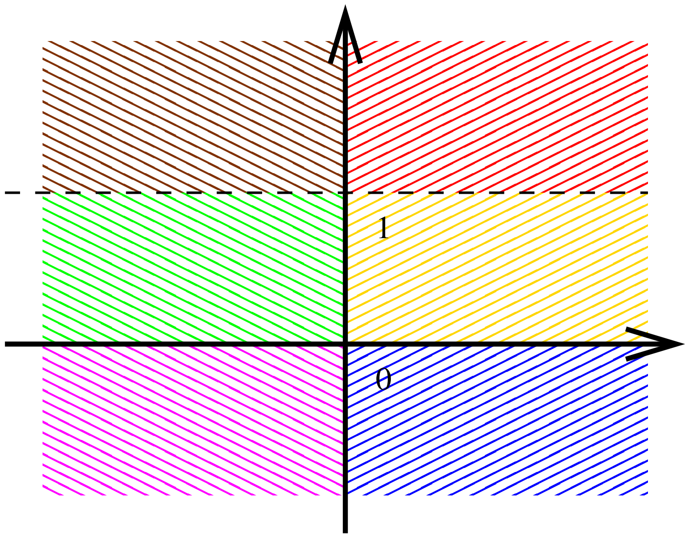
1.17. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$x\,y' = y^2 - y$$

12 Megoldás: *A differenciálegyenlet szétválasztható változójú, mert*

$$y' = y(y-1)\,\frac{1}{x}$$

alakú. Ebből a felírásból látjuk, hogy $x \neq 0$ *, tehát a megoldásgörbék nem metszhetik az* y *tengelyt, hiszen* $x = 0$ *-ra nem értelmezett a differenciálegyenlet.*
Másrészt látjuk, hogy $y \equiv 0\,, \quad y \equiv 1$ *megoldások. (Persze az* $x > 0$ *, vagy* $x < 0$ *része.)*
Az 1.4. ábrán berajzoltuk azokat a legbővebb nyílt tartományokat, melyekbe eső kezdetiérték problémák egyértelműen megoldhatók. Ilyenkor persze csak a vizsgált tartományban tekintjük az adott ponton áthaladó görbét.



1.4. ábra. A legbővebb nyílt tartományok, amelyekben az $xy' = y^2 - y$ differenciálegyenlet kezdetiérték problémája egyértelműen megoldható.

Ha $y \neq 0$ *és* $y \neq 1$*, azaz* $y \in (-\infty, 0)$*, vagy* $y \in (0,1)$*, vagy* $y \in (1, \infty)$*:*

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

A bal oldalon elvégezve a részlettörtekre bontást:

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + C.$$

Ez a következő alakban is írható:

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{C}.$$

$K = \mathrm{e}^C$ választással:

$$\left|1 - \frac{1}{y}\right| = K \cdot |x| \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} = \pm K \cdot x\,, \text{ ahol } \quad K > 0.$$

Így

$$y = \frac{1}{1 - (\pm K)\,x}.$$

De $y \equiv 1$ is megoldás, mely $K = 0$ megengedésével beilleszthető az előző megoldások közé.
Így a differenciálegyenlet megoldása:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1 - Cx}\,, \quad C \in \mathbb{R}}} \qquad (\text{persze az } y = \frac{1}{1 + Cx} \text{ alak is jó}).$$

Ezekhez a megoldásokhoz hozzá kell venni az $\underline{\underline{y \equiv 0}}$ megoldást is.
(Az $y \equiv 1$ megoldás $C = 0$ választással adódik, mint láttuk.)

1.18. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y' \sin x = y \ln y\,, \qquad x \neq k\pi \quad \text{és} \quad y > 0$$

13 Megoldás:

$$y' = \frac{1}{\sin x}\; y \ln y \qquad \text{és} \qquad \sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$$

$g(y) = y \cdot \ln y = 0$*, ha* $y = 1 \quad \Longrightarrow \quad y \equiv 1$ *megoldás. Ha $y > 0$ és $y \neq 1$:*

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Az integrandusok f'/f alakúak. Elvégezve az integrálást kapjuk a megoldást:

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + \ln C_1 = \ln\left(C_1\;\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) \qquad (C_1 > 0).$$

Most célszerű az integrálási állandót így felvenni. ($\ln C_1 \in \mathbb{R}$).

$$\Longrightarrow \quad |\ln y| = C_1\;\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,, \quad C_1 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \ln y = C\;\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,, \quad C > 0 \text{ vagy } C < 0\,.$$

Mivel $y \equiv 1$ is megoldás, azért $C = 0$ is lehet. Összegezve kapjuk, hogy

$$\ln y = C\;\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ezt az alábbi alakban is írhatjuk:

$$\underline{\underline{y = \mathrm{e}^{C\;\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\,, \quad C \in \mathbb{R}}}$$

1.19. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$x\,y' + 2\,y = 0$$

Keressük meg az $y(3) = -1$ *kezdetiérték probléma megoldását!*

14 Megoldás: *A differenciálegyenlet:* $\quad y' = -\dfrac{2}{x}\,y\,,$ *azaz* $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2}{x}\,y \quad$ *alakú.*
Innen látható, hogy $y \equiv 0$ *megoldás. (A kezdeti feltételnek nem tesz eleget.)*
Ha $y \neq 0$ *, a változók szétválasztásával:*

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \ln|y| = -2\ln|x| + \ln K,\ K > 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(y = \frac{\pm K}{x^2} \quad \textit{és} \quad y \equiv 0 \right)$$

Tehát a megoldás: $\quad \underline{\underline{y = \dfrac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.}}$

Az $y(3) = -1$ *kezdetiérték probléma megoldása:*

$$-1 = \frac{C}{3^2} \quad \Longrightarrow \quad C = -9 : \quad \underline{\underline{y = -\frac{9}{x^2}}}.$$

1.2.4. Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket illetve a hozzájuk tartozó Cauchy-problémákat:

   (a)

   $\alpha)$ $\quad y' = x\,e^x.$

   $\beta)$ $\quad y' = x\,e^x, \qquad y(-\ln 5) = 1.$

   (b)

   $\alpha)$ $\quad y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}.$

   $\beta)$ $\quad y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}, \qquad y(0) = -1.$

   $\gamma)$ $\quad y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}, \qquad y(\ln 2) = 3.$

(c)

$$\alpha) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{3}{x}.$$

$$\beta) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{3}{x}, \qquad y(-1) = -2.$$

2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

   (a) $y' = \dfrac{y-1}{y} \ \cos^2 x \ \sin^3 x\,, \quad y > 0$

   (b) $y' = \dfrac{y^2-4}{x^2+4}$

   (c) $y' = \dfrac{y^2-4}{y\,(x^2+2x+4)}\,, \quad y > 0$

   (d) $y' = \dfrac{y^2+4}{y^2-3} \ x \ \sqrt[3]{1+2x^2}\,, \quad y > \sqrt{3}$

   (e) $y' = \dfrac{\operatorname{sh}^6 2y}{\operatorname{ch} 2y} \ \sqrt[5]{3+8x}$

   (f) $y' = (2y+1)^6 \ \ln 3x\,, \quad x > 0\,,\ y > -\dfrac{1}{2}$

   (g) $y' = \dfrac{x}{y} \ \mathrm{e}^{2x^2+3y}\,, \quad y > 0$

   (h) $y' = \dfrac{(2x+1)\ \mathrm{e}^{3x-2}}{y\ \mathrm{e}^{5y^2}}\,, \quad y > 0$

1.2.5. Homogén és inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Ahhoz, hogy a címet megértsük, átismételjük a lineáris tér és az általános értelemben vett lineáris függvény (amit szoktak homogén lineáris függvénynek is nevezni) fogalmát. Már most megjegyezzük, hogy az inhomogén jelző tagadást foglal magában és a lineáris tulajdonság hiányára utal.

1.20. Definíció *Az* $\mathcal{L}$ *teret* lineáris térnek *nevezzük az* $\mathbb{R}$ *valós számtest felett, ha értelmezett benne egy összeadás művelet és a valós skalárral való szorzás, továbbá ezekre teljesülnek a szokásos műveleti azonosságok.*

Pontosabban megfogalmazva, $\mathcal{L}$ *az összeadásra (* $+$ *-ra) nézve kommutatív csoportot alkot és* $\forall\ l, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ *és* $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *esetén teljesülnek a következő* (1.21) *és* (1.22) *azonosságok.*

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

$$ha\ \ l \in \mathcal{L}\,, \quad \alpha l \in \mathcal{L}, \quad \alpha l = l\alpha, \quad 1l = l, \quad (\alpha\beta)\, l = \alpha\, (\beta l),$$

$$(\alpha+\beta)\, l = \alpha l + \beta l, \quad \alpha\, (l_1 + l_2) = \alpha l_1 + \alpha l_2\,,\ \forall\, l_1, l_2 \in \mathcal{L}. \tag{1.21}$$

A kommutatív csoport tulajdonságai:

$$ha\ \ l_1, l_2 \in \mathcal{L}\,, \ \ akkor\ \ \ l_1 + l_2 \in \mathcal{L}\,,$$

$$l_1 + (l_2 + l_3) = (l_1 + l_2) + l_3\,, \quad \forall\, l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{L},$$

$$\exists\, 0 \in \mathcal{L}\ : \quad l_1 + 0 = 0 + l_1 = l_1\,, \quad \forall\, l_1 \in \mathcal{L}\,,$$

$$\forall\, l \in \mathcal{L}\ esetén\ \ \exists\ -l \in \mathcal{L}\ :\ \ l + (-l) = (-l) + l = 0,$$

$$és\quad l_1 + l_2 = l_2 + l_1\,, \quad l_1, l_2 \in \mathcal{L}. \tag{1.22}$$

1.21. Definíció *Ha egy f függvény értékét az* $l_1 + l_2$ *helyen tagonként számolhatjuk ki, továbbá a konstans kiemelhető a függvényből, akkor a függvényt lineárisnak nevezzük.*

Tehát az $f : \mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ *függvényt* lineáris függvénynek *(operátornak, leképezésnek, stb.) nevezzük, ha*

a) $\mathcal{L}_1$ *lineáris tér,*

b)

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2), \qquad \forall\, l_1, l_2 \in \mathcal{L}_1, \tag{1.23}$$

c)

$$f(\alpha\, l) = \alpha\ f(l), \qquad \forall\, l \in \mathcal{L}_1\ \ és\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Könnyen látható, hogy ilyenkor az $\mathcal{L}_2$ képtér is lineáris tér. Másrészt, ha n_0 az $\mathcal{L}_1$ tér nulleleme, akkor $f(n_0)$ az $\mathcal{L}_2$ tér nulleleme.

1.22. Példa

a) A síkvektorok tere, valamint a térvektorok tere egy-egy lineáris teret alkot. (Ezért szokás a lineáris teret vektortér néven is emlegetni.) Nyilvánvaló, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ *tere is lineáris tér.*

b) Az $[a, b]$ *intervallumon értelmezett folytonos függvények* $C^0_{[a,b]}$ *tere, vagy az akárhányszor differenciálható függvények* $\mathbb{D}^\infty_{(a,b)}$ *tere szintén példák lineáris térre. Mindkét esetben az azonosan nulla függvény a nullelem, egyik esetben az* $[a, b]$ *, másik esetben az* (a, b) *intervallumon értelmezve.*

1.23. Példa

a) Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ valós függvények közül az $f(x)=mx$ lineáris függvény.
(A $g(x)=mx+b\,,\ b\neq 0$ nem lineáris az 1.21. Definíció értelmében. Ezért a nyomaték kedvéért szokták az 1.21. Definíció szerinti lineáris függvényt homogén lineáris függvénynek is nevezni.)

b) Az $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ valós kétváltozós függvények közül az

$$f(x,y)=ax+by\,,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

lineáris függvény. Ugyanis az $\underline{\mathbf{x}}=(x,y)$ és az $\underline{\mathbf{a}}=(a,b)$ jelölést használva kapjuk, hogy skaláris szorzatról van szó: $f(\underline{\mathbf{x}})=\underline{\mathbf{a}}\cdot\underline{\mathbf{x}}\,,$ amire teljesül az (1.23) és az (1.24) tulajdonság.

1.24. Definíció *Ha az 1.2. Definícióban F az y és y' szimbólumoknak lineáris függvénye, akkor jutunk homogén lineáris implicit differenciálegyenlethez:*

$$a(x)\,y'+b(x)\,y=0 \tag{1.25}$$

Feltételezve, hogy $a(x)\neq 0$, oszthatunk vele és így jutunk a homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet általános alakjához:

$$y'+g(x)\,y\;=\;0 \tag{1.26}$$

Itt feltételezzük, hogy g folytonos valamely (α,β) intervallumon.

Homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

1.25. Tétel

a) Az (1.26) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.

b) Az

$$y'+g(x)\,y=0,\qquad y(x_0)=y_0 \tag{1.27}$$

kezdetiérték problémának $\forall\,x_0\in(\alpha,\beta)$, bármely $y_0\in\mathbb{R}$ esetén van az (α,β) intervallumon értelmezett megoldása.
(Ezt, a megoldás létezését garantáló állítást egzisztencia *tételnek nevezzük.)*

c) Ha φ és ψ is a (α,β) intervallumon értelmezett megoldásai az (1.27) kezdetiérték problémának, (vagyis grafikonjaik ugyanazon az (x_0,y_0) ponton haladnak át), akkor
$\varphi(x)=\psi(x)\quad\forall\,x\in(\alpha,\beta).$
(Ezt, a megoldás egyértelműségét garantáló állítást unicitás *tételnek nevezzük.)*

d) Az (1.26) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak, *tehát a megoldások megadhatók egy sehol sem nulla φ elem konstans-szorosaként.*

Bizonyítás.

a) Meg kell mutatnunk, hogy ha φ és ψ is megoldásai az (1.26) differenciálegyenletnek, akkor $\varphi + \psi$ is megoldása (1.26)-nak. Továbbá, ha egy φ függvény megoldása az (1.26) differenciálegyenletnek, akkor ennek a φ függvénynek a konstans-szorosai is megoldások.

Ha φ és ψ is megoldásai az (1.26) differenciálegyenletnek, akkor

$$\varphi'(x) + g(x)\,\varphi(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,, \tag{1.28}$$

$$\psi'(x) + g(x)\,\psi(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta). \tag{1.29}$$

Összeadva (1.28)-at és (1.29)-et:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) \;+\; g(x)\;\left(\varphi(x) + \psi(x)\right) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta),$$

amiből:

$$\left(\varphi(x) + \psi(x)\right)' \;+\; g(x)\;\left(\varphi(x) + \psi(x)\right) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta).$$

Tehát $\varphi + \psi$ is megoldása az (1.26)-nak.

Ha egy φ függvény megoldása az (1.26) differenciálegyenletnek, akkor (1.28)-ból c-vel való szorzással kapjuk:

$$c\,(\varphi'(x) + g(x)\,\varphi(x)) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,,$$

amit átalakítva:

$$(c\,\varphi(x))' + g(x)\,(c\,\varphi(x)) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta).$$

Tehát a φ függvénynek a konstans-szorosai is megoldásai az (1.26)-nak.

b)

$$\begin{aligned} & y' + g(x) \cdot y = 0 && \text{(szeparábilis differenciálegyenlet),} \\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x) \cdot y, && y \equiv 0 \text{ megoldás} \end{aligned}$$

Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jelöljük g primitív függvényét G-vel! (G létezik g folytonossága miatt.) Ekkor

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -G(x) + C_1 \\ |y| &= \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{-G(x)} = K\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad K > 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} y>0: & y=K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ y<0: & y=-K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ & \quad (K>0) \\ \text{és} & y\equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y=C\,\mathrm{e}^{-G(x)}, \quad C\in\mathbb{R}$$

az általános megoldás.
A megoldást azon az (α,β) intervallumon kaptuk meg, ahol g folytonos.

Ha $y(x_0)=y_0 \quad \Longrightarrow \quad y_0=C\,\mathrm{e}^{-G(x_0)}$-ból C egyértelműen meghatározható.

c) Nem bizonyítjuk.

d) $y=C\,\mathrm{e}^{-G(x)}$, $C\in\mathbb{R}$-ből látható, hogy valóban

$$y=C\,\varphi(x)$$

alakú az általános megoldás. Azt is látjuk, hogy $\varphi(x)$ sehol sem nulla. □

1.26. Megjegyzés *Ezt a megoldást*

$$y_H=C_1\cdot Y_1(x), \qquad C_1\in\mathbb{R}$$

alakban írva később ellenőrizhetjük, hogy az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekre is érvényesek a magasabbrendű homogén lineáris differenciálegyenletekre tanult tulajdonságok.

1.27. Példa *Oldjuk meg az*

$$y'+(\sin x)\,y=0$$

homogén differenciálegyenletet!

15 Megoldás: *Az 1.25. Tétel d) állítása szerint egy* $y\neq 0$ *megoldást keresünk, ezért* y*-nal oszthatunk:*

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int-\sin x\,\mathrm{d}x,$$

amiből például ($y>0$ *feltételezéssel):*

$$\ln y=\cos x\,, \qquad \textit{azaz} \qquad y=e^{\cos x}=\varphi(x) \quad \textit{egy, nem nulla megoldás.}$$

Ezért az 1.25. Tétel d) állítása alapján a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y=C\,e^{\cos x}, \qquad x,C\in\mathbb{R}.$$

Inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Tekintsük most az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x) \tag{1.30}$$

differenciálegyenletet, amelyet $f(x) \not\equiv 0$ esetén *inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezünk és (I)-vel jelölünk.
Itt is feltesszük, hogy g és f folytonos az (α, β) intervallumon.
Az (1.30) inhomogén problémához tartozó homogén differenciálegyenlet:

$$(H) \qquad y' + g(x)\, y = 0. \tag{1.31}$$

1.28. Tétel *a) Az*

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet $y_{I\,ált}$ *általános megoldása felírható az (1.31) homogén differenciálegyenlet* $y_{H\,ált}$ *általános megoldása és az (1.30) lineáris inhomogén differenciálegyenlet valamely* y_p *partikuláris megoldása összegeként, tehát:*

$$y_{I\,ált} = y_{H\,ált} + y_p \ .$$

b) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása mindig megtalálható a konstans variálás módszerével.

c) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x) \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,, \quad \text{és} \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.32}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat egyértelműen oldható meg $\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta)\,, y_0 \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Bizonyítás.
a) Először egy segédtételt bizonyítunk be.

Segédtétel

Ha (I)-nek két megoldását megtaláltuk, akkor ezeknek a megoldásoknak a különbsége megoldása az

$$(H) \qquad y' + g(x)\, y = 0$$

homogén differenciálegyenletnek.

Ugyanis

$$(I) \qquad y_1'(x) + g(x)\, y_1(x) \equiv f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta),$$

és

$$(I) \qquad y_2'(x) + g(x)\, y_2(x) \equiv f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta),$$

akkor a két egyenlet különbségéből kapjuk:

$$y_1'(x) + g(x)\, y_1(x) - (y_2'(x) + g(x)\, y_2(x)) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\,.$$

Tehát:

$$(y_1(x) - y_2(x))' + g(x)\,(y_1(x) - y_2(x)) \equiv 0\,,$$

azaz $y_1(x) - y_2(x)$ megoldása az (1.31) homogén differenciálegyenletnek. Ezért nevezzük (1.31)-et az (1.30) inhomogén problémához tartozó homogén differenciálegyenletnek.

Visszatérünk a bizonyításhoz. Jelöljük az $(y_1(x) - y_2(x))$ különbséget $y_H(x)$-szel, ekkor: $y_1(x) = y_H(x) + y_2(x)$. Ebből már következik a tétel állítása:

$$y_{I\text{ált}} = y_{H\text{ált}} + y_p$$

Tehát az (1.30) inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása egyenlő a hozzá tartozó (1.31) homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása plusz az (1.30) inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása, ugyanis

$y_1 := y_{I\text{ált}}, \quad y_2 := y_p$ választással:

$y_1 - y_2 = y_{H\text{ált}}$

az összes lehetséges megoldása (H)-nak

egy konkrét megoldása (I)-nek

tetszőleges megoldása (I)-nek

(I)-nek nem lehet más megoldása, csak ami ebből y_1-re kijön, midőn y_H helyén (H) minden lehetséges megoldását szerepeltetjük.

1.29. Megjegyzés *Használjuk még az alábbi jelöléseket is:*

$$y_{i\acute{a}} = y_{h\acute{a}} + y_{ip} \qquad vagy \qquad y_{i\acute{a}} = y_H + y_{ip}.$$

b) Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével

$$y_p(x) = c(x)\, \varphi(x)$$

alakban keressük, ahol φ (H) egy sehol sem nulla megoldása, tehát

$$\varphi'(x) + g(x)\,\varphi(x) \equiv 0.$$

y_p-nek az (I)-be való behelyettesítésével megmutatjuk, hogy létezik ilyen alakú megoldás.
Deriváljuk y_p-t: $\quad y_p'(x) = c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot\varphi'(x)$
Behelyettesítünk (I)-be:

$$\left(c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot\varphi'(x)\right) + g(x)\cdot\left(c(x)\cdot\varphi(x)\right) =$$

$$= c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot \underbrace{\left(\varphi'(x) + g(x)\cdot\varphi(x)\right)}_{\equiv 0,\ \text{mivel } \varphi \text{ a (H) megoldása}} = c'(x)\cdot\varphi(x) = f(x).$$

Ebből

$$c'(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

adódik. Mivel ez folytonos, ezért létezik primitív függvénye, tehát c mindig meghatározható integrálással. Mivel csak egy y_p kell, ezért elég egyetlen $c(x)$-et találni (az integrálási állandó 0-nak választható).

c) Nem bizonyítjuk. □

1.30. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y' - \frac{2}{x}\,y = x$$

Adjuk meg az $y(-1) = 3$ kezdetiérték probléma megoldását is!

16 Megoldás: *Minden olyan tartományban, melyben $x \neq 0$ a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.*

(H): $\quad y' - \frac{2}{x}\,y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}\,y\,, \qquad y \equiv 0$ *megoldás*

Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \ln|y| = 2\,\ln|x| + C_1\,,\ C_1\in\mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad |y| = \mathrm{e}^{C_1}\,x^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} y > 0: & y = \mathrm{e}^{C_1}\,x^2 & \\ y < 0: & y = -\mathrm{e}^{C_1}\,x^2 & \\ & \quad (\mathrm{e}^{C_1} > 0) & \\ \textit{és} & y \equiv 0 \textit{ is megoldás.} & \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y_{h\acute{a}} = C\,x^2\,, \quad C\in\mathbb{R}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásával keressük:

$$y_{ip} = c(x)\,x^2\,, \qquad y_{ip}' = c'(x)\,x^2 + c(x)\,2x.$$

Behelyettesítve (I)-be:

$$\text{(I):} \qquad c'(x)\,x^2 + \underbrace{c(x)\,2x - \frac{2}{x}\,c(x)\,x^2}_{\equiv 0} = x.$$

Innen:

$$c'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad c(x) = \ln|x| + K$$

Mivel egyetlen y_{ip} *megoldást keresünk,* $K = 0$ *választható, így* $\quad y_{ip} = x^2\,\ln|x|\,.$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása: $\qquad \underline{\underline{y_{iá} = C\,x^2 + x^2\,\ln|x| \qquad (C \in \mathbb{R})}}.$

Tehát $y_{iá} = C\,x^2 + x^2\,\ln x\,,$ *ha* $x > 0$ *és* $y_{iá} = C\,x^2 + x^2\,\ln(-x)\,,$ *ha* $x < 0\,.$

Az y(-1)=3 kezdetiérték probléma megoldása:

$$3 = C + \ln 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{y = 3\,x^2 + x^2\,\ln(-x)}}.$$

1.31. Példa *Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!*

$$y' - \frac{y}{x} = x\,\mathrm{e}^x\,, \qquad\qquad y(1) = 5$$

17 Megoldás: *Minden olyan tartományban, melyben* $x \neq 0$ *a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.*

(H): $\qquad y' - \dfrac{y}{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}.$

Az 1.25. Tétel d) állítása szerint $y_{há} = C\,\varphi(x)$ *alakú, ahol* $\varphi(x)$ *egy sehol sem 0 megoldása a homogén egyenletnek. Ha erre a tételre hivatkozunk, akkor elkerülhetjük az előző példa megoldásánál használt hosszadalmas eljárást.*

Ha $y \neq 0$ *(az előző miatt ezt most feltesszük):*

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln y = \ln x\,, \qquad\qquad \text{így} \;\; y = x\,(= \varphi(x)).$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása: $\qquad y_{há} = C\,x\,, \quad C \in \mathbb{R}.$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_{ip} = c(x)\,x\,, \qquad y'_{ip} = c'(x)\,x + c(x).$$

Behelyettesítve (I)-be:

$$\text{(I)} \qquad c'(x)\,x + \underbrace{c(x) - \frac{c(x)\,x}{x}}_{\equiv 0} = x\,\mathrm{e}^x.$$

Innen:

$$c'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_{ip} = x\,\mathrm{e}^x .$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása: $\underline{\underline{y_{iá} = C\,x + x\,\mathrm{e}^x \qquad (C \in \mathbb{R})}}.$
Az y(1)=5 kezdetiérték probléma megoldása:

$$5 = C + \mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad C = 5 - \mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = (5-\mathrm{e})x + x\mathrm{e}^x}}.$$

1.2.6. Gyakorló feladatok

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1. $y\,\mathrm{e}^{2x} - (1+\mathrm{e}^{2x})\; y' = 0$
2. $y' - \dfrac{1}{x\ln x}\,y = x\;\ln x\,, \qquad y(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$
3. $y' - \dfrac{y}{x} - 2x^2 = 0\,, \qquad y(1) = -1$
4. $y' + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1+2x}{1+x}\,, \qquad y(0) = 2$
5. $y' + \dfrac{y}{x} = \mathrm{e}^x + \dfrac{3\mathrm{e}^x}{x}$
6. $y' - \dfrac{3}{x}\,y = 2$
7. $y' + \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}\,, \qquad y(1) = 0$
8. $y' + \dfrac{2}{x}\,y = 3\,, \qquad y(1) = 2$
9. $y' - \dfrac{3}{x}\,y = x^4$
10. $y' + \dfrac{2}{x}\,y = 3x^2\,, \qquad y(1) = 4$
11. $y' + 2y\;\mathrm{sh}\,x = \mathrm{sh}\,x$
12. $y' + \dfrac{y}{x} = \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)\mathrm{e}^{2x}\,, \qquad x > 0$
13. $y' + 2x\,y = 4x$

14. $y' - 3y = x^2 + 1$

15. $x\,y' - y = \mathrm{e}^x\,(x^2 + x^3)$

16. $y' + a\,y = \mathrm{e}^{5x}\,, \qquad a \neq 0$

17. $y' + a\,y = \mathrm{e}^{mx}\,, \qquad a \neq 0$

1.3. Új változó bevezetése

Bizonyos differenciálegyenletek helyettesítéssel az eddig tanult differenciálegyenlet típusok valamelyikére vezethetők vissza. Mi két esettel ismerkedünk meg részlesebben.

1. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek:

   (a) $y' = \varphi(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   Tehát a jobb oldali kétváltozós függvény felírható y/x függvényeként. Ekkor a helyettesítés:

   $$\begin{aligned} u &:= \frac{y}{x} \qquad \left(u(x) = \frac{y(x)}{x}\right)\ , \quad x \neq 0 \\ y &= u \cdot x \\ y' &= u' \cdot x + u \cdot 1 \end{aligned}$$

   A helyettesítés elvégzése után az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk:

   $$\begin{aligned} u'\,x + u &= f(u) \\ u'\,x &= f(u) - u = g(u) \\ u' &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u) \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   (b) $y' = f(ax + by) \quad (a, b \in \mathbb{R})$

   $$\begin{aligned} u &:= a\,x + b\,y \\ y &= \frac{1}{b}\,u - \frac{a}{b}\,x \\ y' &= \frac{1}{b}\,u' - \frac{a}{b} \end{aligned}$$

   A helyettesítés után kapott egyenlet:

   $$\frac{1}{b}\,u' - \frac{a}{b} = f(u)\,,$$

   mely szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

2. Egyéb helyettesítések: ezeknél megadjuk, hogy mivel helyettesítünk.

1.32. Példa *Helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y' = \frac{2y^2 + x^2}{xy}\,, \qquad x \neq 0,\;\; y \neq 0$$

18 Megoldás: $\quad y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\,, \qquad u := \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = u \cdot x,\;\; y' = u'x + u$

$$\begin{aligned}
u'x + u &= 2u + \frac{1}{u} \\
u'x &= u + \frac{1}{u} \\
u' &= \frac{1}{x} \cdot \frac{u^2+1}{u} \\
\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(u^2+1) &= \ln|x| + C \\
\ln(u^2+1) &= \ln x^2 + 2C \\
u^2 + 1 &= x^2 \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2C}}_{:=K>0} \\
\frac{y^2}{x^2} + 1 &= Kx^2
\end{aligned}$$

Tehát a végeredmény:

$$\underline{\underline{y^2 = Kx^4 - x^2}}\,, \qquad K > 0.$$

1.33. Példa *Megfelelő helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!*

$$x^2\,y' + x\,y = x^2 + y^2\,, \qquad y(1) = 2$$

19 Megoldás:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2}$$

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}\,, \qquad x \neq 0 \qquad (\textit{Most } x > 0.)$$

$$u := \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = ux \quad \Longrightarrow \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = 1 + u^2 - u$$

$$u'x = 1 + u^2 - 2u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{(1-u)^{-1}}{-1} = \ln|x| + C\ , \qquad |x| = x \textit{ most, mivel } x \in K_{1,\delta}.$$

$$\frac{1}{1-u} = C + \ln x$$

Visszahelyettesítve:

$$\underline{\underline{1 - \frac{y}{x} = \frac{1}{C + \ln x}}}.$$

Az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(1) = 2\ : \qquad 1 - 2 = \frac{1}{C} \quad \Longrightarrow \quad C = -1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = x\left(1 - \frac{1}{-1 + \ln x}\right)}}.$$

1.34. Példa *Helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!*

$$y' = \mathrm{e}^{2y+x} - \frac{1}{2}\ , \qquad y(0) = 0$$

20 Megoldás:

$$u := 2y + x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{u}{2} - \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{u'}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{u'}{2} - \frac{1}{2} = \mathrm{e}^u - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u' = 2\,\mathrm{e}^u$$

$$\int \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \int 2\,\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{e}^{-u} = 2x + C$$

$$\mathrm{e}^{-2y-x} = -2x + C \qquad y(0) = 0: \quad 1 = C$$

Tehát a kezdeti feltételt kielégítő megoldás implicit alakja:

$$\mathrm{e}^{-2y-x} = -2x + 1.$$

Ebből most a megoldás explicit alakja is könnyen felírható:

$$-2y - x = \ln(1-2x).$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1-2x).}}$$

1.35. Példa *Alkalmazzuk az* $u(x) = y^3(x)$ *helyettesítést, és oldjuk meg a*

$$3x\, y' - 2\, y = x^3\, y^{-2}$$

differenciálegyenletet!

21 Megoldás:

$$u = y^3\,, \qquad u' = 3y^2 \cdot y'\,, \qquad y' = \frac{u'}{3y^2}$$

A differenciálegyenlet átalakítva (beszorozva y^2/x*-szel):*

$$3y'\, y^2 - \frac{2}{x}\, y^3 = x^2.$$

Elvégezve a helyettesítést:

$$u' - \frac{2}{x}\, u = x^2,$$

lineáris elsőrendű differenciálegyenlethez jutottunk. Mint tudjuk $u_{há} = C\,\varphi(x)$ *alakú.*

(H): $\quad u' - \frac{2}{x}\, u = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}\, u \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = 2\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \quad \ln u = 2\,\ln x \quad \Longrightarrow \quad \ln u = \ln x^2 \quad \Longrightarrow \quad u = x^2 = \varphi(x)$$

Tehát $u_{há} = C\,x^2$. *A partikuláris megoldást az állandó variálásával keressük:*

$$u_{ip} = c(x)\, x^2 \quad \Longrightarrow \quad u'_{ip} = c'\, x^2 + c \cdot 2x$$

$$c'\, x^2 + c\, 2x - \frac{2}{x}\, cx^2 = x^2$$

$$\Longrightarrow \quad c'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad c(x) = x \quad \Longrightarrow \quad u_{ip} = x^3$$

$$u_{iá} = u_{há} + u_{ip} = C\, x^2 + x^3$$

Visszahelyettesítve:

$$y^3 = C\, x^2 + x^3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = \sqrt[3]{C \cdot x^2 + x^3}.}}$$

1.36. Példa *A megadott helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y(xy+1)+x(1+xy+x^2y^2)y'=0\,, \qquad u=xy$$

22 Megoldás:

$$u'=1\cdot y+xy' \quad\Longrightarrow\quad xy'=u'-y \quad\Longrightarrow\quad xy'=u'-\frac{u}{x}$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$\frac{u}{x}(u+1)+(1+u+u^2)\left(u'-\frac{u}{x}\right)=0$$

$$\vdots$$

$$u'\,\frac{1+u+u^2}{u^3}=\frac{1}{x}$$

$$\int(u^{-3}+u^{-2}+u^{-1})\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{u^{-2}}{-2}+\frac{u^{-1}}{-1}+\ln|u|=\ln|x|+C$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk a végeredményt:

$$-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln|xy|=\ln|x|+C.$$

1.37. Példa *A megadott helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'\left(\frac{y^2-1}{y^2}\right)=-2x\left(x^2+y+\frac{1}{y}\right)\,, \qquad z=x^2+y+\frac{1}{y}$$

23 Megoldás:

$$z=x^2+y+\frac{1}{y} \quad\Longrightarrow\quad z'=2x+y'-\frac{y'}{y^2} \quad\Longrightarrow\quad y'\,\frac{y^2-1}{y^2}=z'-2x$$

Behelyettesítve:

$$z'-2x=-2x\,z \quad\Longrightarrow\quad z'+2x\,z=2x.$$

Ez egy lineáris elsőrendű differenciálegyenlet, de egyben szétválasztható változójú is (így rövidebb a megoldás, melyet most nem részletezünk). A megoldás:

$$z=C\,\mathrm{e}^{-x^2}+1.$$

Visszahelyettesítve:

$$x^2+y+\frac{1}{y}=C\mathrm{e}^{-x^2}+1.$$

1.3.1. Gyakorló feladatok

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet a megadott helyettesítéssel!

1. $4x - 3y + y'\,(2y - 3x) = 0\ ,\qquad u = \dfrac{y}{x}$
2. $(1 - 2x - 2y)\,y' = x + y + 1\ ,\qquad u = x + y$
3. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2\,y^4\ ,\qquad u = y^{-3}$
4. $y' + 2xy = 2x\,y^3\ ,\qquad u = y^{-2}$
5. $5(1 + x^2)\,y' = 2xy + \dfrac{(1 + x^2)^2}{y^4}\ ,\qquad u = y^5$
6. $(x^2y^2 - 1)\,y' + 2x\,y^3 = 0\ ,\qquad u = \dfrac{1}{xy}$
7. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2\,\dfrac{y}{x}\ ,\qquad u = \dfrac{y}{x}$
8. $3\,y' - \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{x^2}{y^2}\ ,\qquad u = y^3$
9. $y' = \dfrac{2x + y}{y - x},\quad x > 0\ ,\qquad u = \dfrac{y}{x}$
10. $xy'\,\mathrm{sh}\,y - \mathrm{ch}\,y = x^2\,\mathrm{sh}\,x\ ,\qquad u = \mathrm{ch}\,y$
11. $xy'\sin y + \cos y = 1\ ,\qquad u = \cos y$
12. $\dfrac{1 + y'}{x + y} = \dfrac{1 + \ln^2(x + y)}{1 + x^2},\qquad y(0) = \mathrm{e}\ ,\qquad u = \ln(x + y)$
13. $xy'\cos(x + y) = \sin^2(x + y) - x\cos(x + y) - 1\ ,\qquad u = \sin(x + y)$

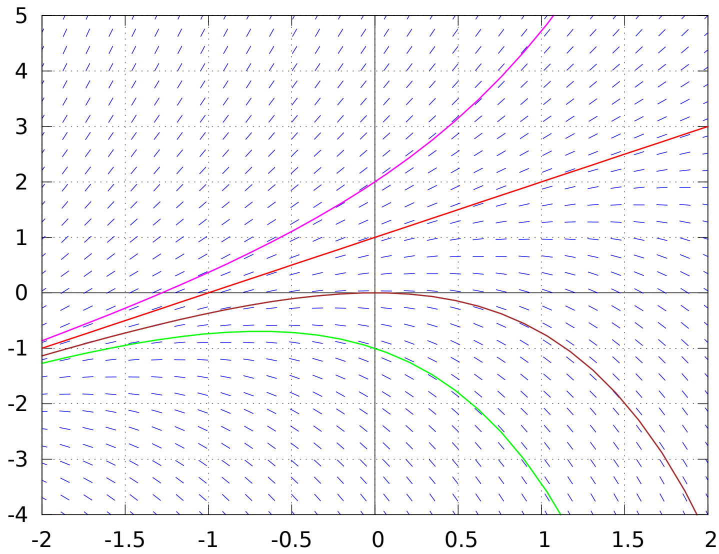
1.4. Iránymező, izoklinák, grafikus megoldás

Tegyük fel, hogy az $y = \varphi(x)\,,\ x \in (\alpha, \beta)$ megoldása az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek. Ekkor

$$\varphi'(x) \;=\; f\,(x, \varphi(x))\ ,\quad \forall\, x \in (\alpha, \beta).$$

Ha φ átmegy az (x_0, y_0) ponton, akkor $\varphi(x_0) = y_0$ és

$$\varphi'(x_0) \;=\; f\,(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0)\,.$$



1.5. ábra. Az $y' = y - x$ differenciálegyenlet iránymezője, valamint az $y(0) = -1$, $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ és az $y(0) = 2$ kezdeti feltételhez tartozó megoldásgörbék. (A megoldásgörbéket az 1.40. feladatban kiszámoljuk.)

Tehát, ha az (x_0, y_0) koordinátákat behelyettesítjük a differenciálegyenlet jobb oldalába, akkor az így kapott $f(x_0, y_0)$ érték megadja az (x_0, y_0) ponton átmenő megoldásgörbe érintőegyenesének a meredekségét $(\operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0))$.

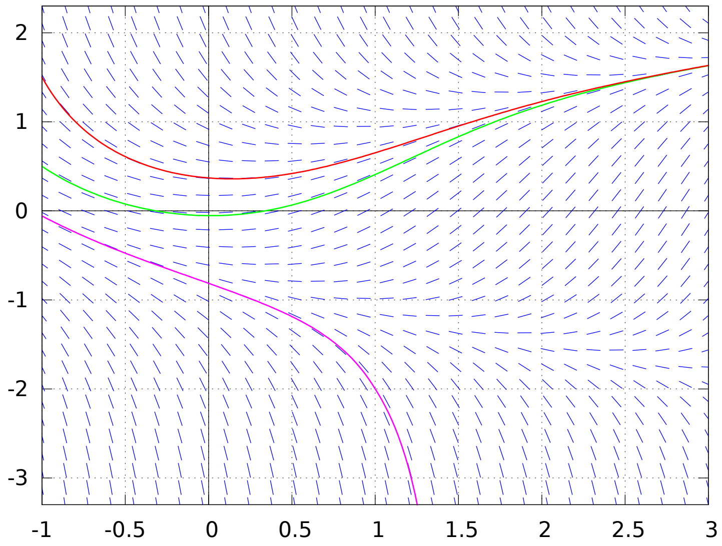
1.38. Definíció (Vonalelem, iránymező) *Az $y'(x) = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet esetén az (x_0, y_0) pontban megrajzolt $f(x_0, y_0)$ meredekségű vonaldarabkát* vonalelemnek *nevezzük. Ha az $x - y$ sík minden pontjában felvesszük a vonalelemet, akkor jutunk az* iránymezőhöz. *Tehát az iránymező a vonalelemek összessége.*

Minden $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlethez tartozik egy iránymező. A megoldásgörbéknek illeszkedniük kell ehhez az iránymezőhöz, vagyis a megoldásgörbét minden pontjában érinti az iránymező valamely vonaleleme. Az 1.5 és az 1.6 ábrán egy-egy differenciálegyenlet iránymezője látható néhány megoldásgörbével.

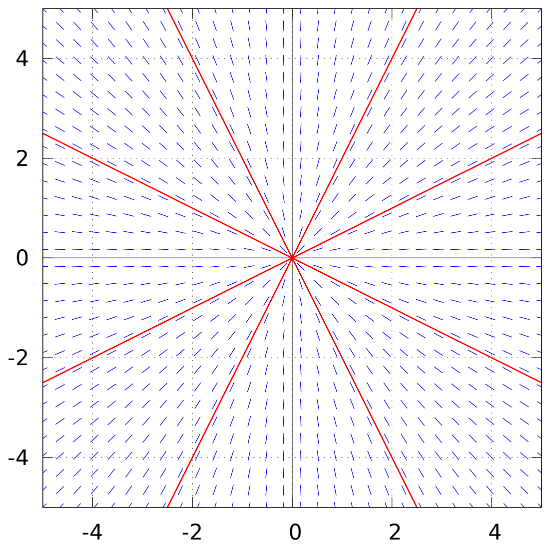
1.39. Példa *Rajzoljuk fel az iránymezőt!*

$$y' = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad \textit{(Az y tengely pontjaihoz nincs rendelve irány.)}$$

24 Megoldás: *Az $y = mx$ egyenes pontjaihoz a differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendeli:* $\operatorname{tg}\alpha = m$ *(1.7 ábra).*
Tehát most a vonalelemek párhuzamosak a szóban forgó ponthoz mutató helyvektorral.
A megoldásgörbének minden pontban érintenie kell a megfelelő vonalelemet.



1.6. ábra. Az $y' = x - y^2$ differenciálegyenlet iránymezője, valamint az $y(-1) = 0.5$, az $y(-1) = 1.5$ és az $y(1) = -2$ kezdeti feltételhez tartozó megoldásgörbék. (A megoldásokat numerikusan határoztuk meg.)



1.7. ábra. Az $y' = \frac{y}{x}$ differenciálegyenlet iránymezőjét a kék vonalelemek jelölik. A piros görbék a megoldásgörbék (integrálgörbék), amelyek most *kivételesen* egybeesnek az izoklinákkal (1.41. definíció).

A megoldások leolvashatók az iránymezőből: $\quad y = c\,x\,,\ x > 0\,,$ *vagy* $\quad y = c\,x\,,\ x < 0\,.$

(Valóban: $\quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \quad \Longrightarrow \quad y = c\,x\,,\ x \neq 0$ *és* $y \equiv 0\,,\ x \neq 0.$*)*

1.40. Példa *Határozzuk meg az $y' = y - x$ differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az*

$$y(0) = -1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = 2$$

kezdetiértékekhez tartozó megoldásokat. Ábrázoljuk a megoldásokat és az iránymezőt!

25 Megoldás: *Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletről van szó. A homogén egyenlet $y' = y$, melynek általános megoldása $y_{há}(x) = Ke^x$, ahol $K \in \mathbb{R}$. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az együttható variálásával, $y_{ip}(x) = K(x)e^x$ alakban keressük. Az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve*

$$K'(x) = xe^x \quad \Longrightarrow \quad K(x) = \int xe^x \,\mathrm{d}x = \ldots \textit{parciális integrálás} \cdots = e^{-x}(x+1)$$

adódik, tehát

$$y_{iá}(x) = Ke^x + x + 1, \qquad K \in \mathbb{R} \qquad \textit{és}$$

$$\begin{array}{lllll}
y(0) = -1 & \Longrightarrow & K = -2 & \Longrightarrow & y(x) = -2e^x + x + 1, \\
y(0) = 0 & \Longrightarrow & K = -1 & \Longrightarrow & y(x) = -e^x + x + 1, \\
y(0) = 1 & \Longrightarrow & K = 0 & \Longrightarrow & y(x) = x + 1, \\
y(0) = 2 & \Longrightarrow & K = 1 & \Longrightarrow & y(x) = e^x + x + 1.
\end{array}$$

Az iránymező valamint a fenti négy megoldásgörbe az 1.5 ábrán látható.

1.41. Definíció (Izoklina) *Az* izoklina *azon pontok halmaza, melyekhez az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendeli, tehát az izoklina pontjaiban a vonalelemek párhuzamosak. Ennek megfelelően az izoklinák egyenlete:*

$$f(x,y) = K\,, \quad K \in \mathbb{R}.$$

1.42. Példa

$$y' = x - y^2$$

1. *Írjuk fel az izoklinák egyenletét!*
   Mely pontokban van a megoldásoknak lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege?

2. *Tekintsük a differenciálegyenlet* $(1,-2)$ *ponton átmenő megoldását! (Belátható, hogy van ilyen: egzisztencia tétel.)*
Van-e ennek a megoldásfüggvénynek inflexiója az $(1,-2)$ *pontban?*

A differenciálegyenlet iránymezője, valamint néhány megoldás, köztük az $(1,-2)$ ponton áthaladó is az 1.6 ábrán látható.

26 Megoldás: *1. Izoklinák:* $x - y^2 = K$ *(fektetett parabolák)*
A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: $y' = 0$.
Tehát a $K = 0$ *-hoz tartozó izoklina pontjaiban lehet lokális szélsőérték:*

$$x - y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y^2$$

parabola pontjai jönnek szóba. (Az $x = y^2$ *izoklinát a megoldásgörbék vízszintesen metszik.)*
Mivel az első derivált előjelváltását most nem tudjuk ellenőrizni, a második derivált értékét vizsgáljuk az adott pontokban. Ehhez az $y'(x) = x - y^2(x)$ *differenciálegyenlet mindkét oldalát* x *szerint deriváljuk:*

$$y'' = 1 - 2\,y\,y' .$$

Az $x = y^2$ *parabola pontjaiban* $y' = 0$ *és így:* $y'' = 1 > 0$

$\Longrightarrow$ *Az* $x = y^2$ *parabola pontjaiban* $y' = 0$ *és* $y'' > 0$ *, tehát a megoldásfüggvényeknek lokális minimuma van a parabola pontjaiban (1.8 ábra).*

2. $y(1) = -2$ *és* $y' = x - y^2 \quad \Longrightarrow \quad y'(1) = 1 - (-2)^2 = -3$

$$y'' = 1 - 2yy' \quad \Longrightarrow \quad y''(1) = 1 - 2(-2)(-3) = -11 \neq 0$$

Nem teljesül az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele $\Longrightarrow$ *nincs itt inflexió. Az 1.6 ábrára berajzoltuk az* $(1,-2)$ *ponton áthaladó megoldást is, jól látszik, hogy ebben a pontban nincs inflexió, a függvény lokálisan konkáv.*

1.43. Példa *Milyen lokális tulajdonsága van az*

$$y' = x^3 + y^3 - 9$$

differenciálegyenlet $(2,1)$ *ponton átmenő megoldásának az adott pontban?*

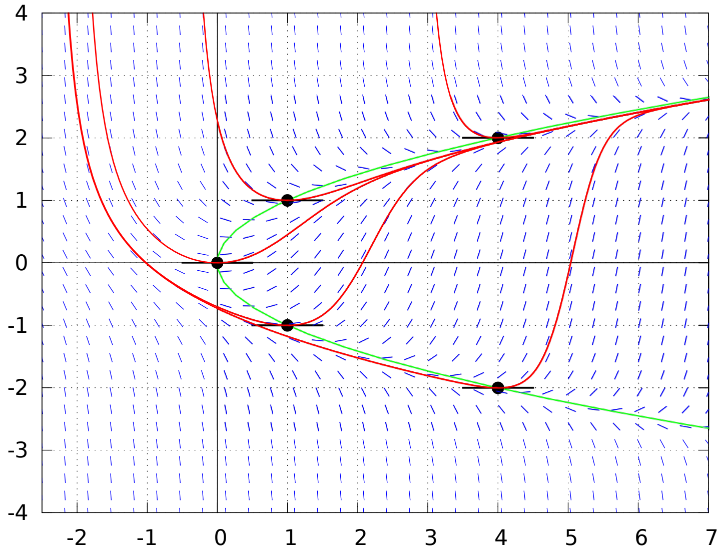
27 Megoldás: *Az* $y'(x) = x^3 + y^3(x) - 9$ *egyenletben* x *helyére* 2 *kerül.* $(y(2) = 1)$

$$y'(2) = 2^3 + 1^3 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \textit{lokális szélsőérték lehet.}$$

A differenciálegyenlet mindkét oldalát x *szerint deriváljuk és itt is elvégezzük az* $x = 2$ *helyettesítést:*

$$y'' = 3x^2 + 3y^2 \cdot \underbrace{y'}_{=0}, \qquad y''(2) = 12.$$

Tehát $y'(2) = 0$ *és* $y''(2) > 0 \quad \Longrightarrow \quad y(2) = 1$ *lokális minimum érték.*



1.8. ábra. Az $y' = x - y^2$ differenciálegyenlet iránymezője (kék), a $K = 0$-hoz tartozó izoklina (zöld) valamint néhány megoldásgörbe (piros). Jól látható, hogy a megoldásgörbék vízszintes érintővel metszik az izoklinát, és lokális minimumuk van a metszéspontban.

1.44. Példa

Az $y = \varphi(x)$ *átmegy az* $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ *ponton, és kielégíti az*

$$y^2 y' = x(64 - y^3) + x - 2$$

differenciálegyenletet. Milyen lokális tulajdonsága van ennek a megoldásgörbének a $(2, 4)$ *pontban?*

28 Megoldás: *Az* x *helyére* 2*-t, az* y *helyére* 4*-et helyettesítve kapjuk:*

$$4^2\, y'(2) = 2(64 - 4^3) + 2 - 2,$$

amiből $y'(2) = 0$.
Deriváljuk x *szerint a fenti implicit differenciálegyenletet:*

$$2yy'\, y' + y^2\, y'' = (64 - y^3) + x(-3y^2)y' + 1.$$

Az x *helyére* 2*-t, az* y *helyére* 4*-et és az* y' *helyére* 0*-át helyettesítve kapjuk:*

$$0 + 16y''(2) = 0 + 2(-3 \cdot 0) + 1\,,$$

amiből $y''(2) = \dfrac{1}{16} > 0$. *Tehát* $y(x)$*-nek* $x = 2$*-ben lokális minimuma van* $(\, y'(2) = 0\,;\ y''(2) > 0\,)$, *a minimum értéke:* 4.

1.45. Példa

Legyen az $y = \varphi(x)\,,\ \ x \in K_{2,\delta}$ *megoldása az*

$$y' = 2\,(x-2)^2 \,+\, 5\,y^2\,, \qquad y(2) = -1$$

kezdetiérték problémának.

1. *Határozzuk meg a* $\varphi'(2)\,,\varphi''(2)\,,\varphi'''(2)$ *értékeket!*
2. *Van-e lokális szélsőértéke* φ *-nek* $x_0 = 2$ *-ben?*
3. *Írjuk fel a* φ *függvény* $x_0 = 2$ *bázispontú harmadfokú Taylor polinomját!*

1.46. Megjegyzés *Mivel* φ *a differenciálegyenlet megoldása, így*

$$\varphi'(x) = 2\,(x-2)^2 \,+\, 5\,\varphi^2(x)\,, \qquad \varphi(2) = -1$$

Mivel a jobb oldal differenciálható, azért a bal oldal is. Tehát létezik $\varphi''(x)\,,\quad x \in K_{2,\delta}\,.$ *Hasonlóan kaphatjuk, hogy* φ *akárhányszor differenciálható* $K_{2,\delta}$ *-ban.*

1. $\varphi'(x) = 2\,(x-2)^2 \,+\, 5\,\varphi^2(x) \quad\Longrightarrow\quad \varphi'(2) = 2\,(2-2)^2 \,+\, 5\,\underbrace{\varphi^2(2)}_{=(-1)^2=1} \,=\, 5$

   $\varphi''(x) = 4\,(x-2) \,+\, 5\cdot 2\,\varphi(x)\,\varphi'(x) \Longrightarrow \varphi''(2) = 4\,(2-2) \,+\, 10\cdot(-1)\cdot 5 \,=\, -50$

   $\varphi'''(x) = 4 + 10\varphi'(x)\varphi'(x) + 10\varphi(x)\varphi''(x)$

   $\Longrightarrow\ \varphi'''(2) = 4 + 10\cdot 5\cdot 5 + 10\cdot(-1)\cdot(-50) = 754$

2. Mivel $\varphi'(2) = 5 \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad$ nincs lokális szélsőérték $x_0 = 2$ -ben. (Szükséges feltétel nem teljesül).

3. $T_3(x) \,=\, \varphi(2) \,+\, \dfrac{\varphi'(2)}{1!}\,(x-2) \,+\, \dfrac{\varphi''(2)}{2!}\,(x-2)^2 \,+\, \dfrac{\varphi'''(2)}{3!}\,(x-2)^3 =$

   $= -1 + 5\,(x-2) - \dfrac{50}{2!}\,(x-2)^2 + \dfrac{754}{3!}\,(x-2)^3$

1.4.1. Gyakorló feladatok

1.

$$y' = x^2 + 2y^2$$

A differenciálegyenlet megoldása nélkül válaszoljunk a következő kérdésekre!

(a) Mely pontokban párhuzamosak a megoldások az $y = 2x$ egyenessel?

(b) Lehet-e lokális szélsőértéke a megoldásoknak?

(c) Írja fel az $y(0) = 0$ kezdetiérték problémához tartozó megoldásgörbe $x_0 = 0$ körüli harmadfokú Taylor polinomját!

2.

$$y' + y^2 + x^2 + 1 = 0$$

Írja fel az izoklinák egyenletét! Van-e a megoldásoknak lokális szélsőértéke? Vizsgálja meg a megoldásgörbék pozitív síknegyedbe ($x > 0, \quad y > 0$) eső részeit monotonitás szempontjából!
Számítsa ki az $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$ ponton átmenő megoldás első és második deriváltját az x_0 pontban!

3. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$y' = y^4 - x^3 + 2x - 15$$

differenciálegyenlet $(-1, 2)$ ponton átmenő megoldásának az adott pontban?

4.

$$y' = (y^2 - 4)x + x - 1$$

(a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be három vonalelemet!

(b) Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = 1, \quad y_0 = 2$ ponton átmenő megoldásnak az adott pontban? (Ha egyáltalán van ilyen megoldás.)

5.

$$y' = x^2 + y^2 - 12$$

(a) Vázoljuk az izoklinákat, jelöljük be a vonalelemek irányát!

(b) Mely pontokban van lokális maximuma, illetve lokális minimuma a megoldásgörbéknek?

1.5. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Most ennek két speciális esetével foglalkozunk.

1. $F(x, y', y'') = 0$ Hiányzik: y.
   $y' := p(x) \implies y'' = p'(x)$ helyettesítést alkalmazzuk.

2. $F(y, y', y'') = 0$ Hiányzik: x.
   $y' := p(y)$, vagyis $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = p(y(x))$ helyettesítés alkalmazásával oldjuk meg.
   y'' előállításához az összetett függvény deriválási szabályát (a láncszabályt) használjuk fel:
   $$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(y(x)) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p\,.$$

1.47. Példa *Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!*

$$y'' = 6y \cdot {y'}^3, \qquad y(1) = -1, \quad y'(1) = -\frac{1}{3}$$

29 Megoldás: *x hiányzik:* $y' = p(y), \qquad y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p.$

Behelyettesítéssel kapjuk:

$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\, p = 6y\, p^3\,, \qquad p \equiv 0$ *megoldás.* $\implies y \equiv$ *konstans megoldás.*

(Most nem jó, mert $y'(1) \neq 0$.*)*

Általános megoldás:

$p \neq 0:$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2} &= \int 6y \,\mathrm{d}y \\
-\frac{1}{p} &= 3y^2 + C_1 \\
p = y' &= -\frac{1}{3y^2 + C_1} \\
\int (3y^2 + C_1)\,\mathrm{d}y &= \int -\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(Szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutottunk a helyettesítéssel.)

$$\underline{\underline{y^3 + C_1\, y = -x + C_2}}.$$

Partikuláris megoldás:

$$y'(1) = -\frac{1}{3} : \quad -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3(-1)^2 + C_1} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0.$$

$$y^3 = -x + C_2 \;\; \textit{és} \;\; y(1) = -1 \;: \quad -1 = -1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0.$$

Tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y^3 = -x \Longrightarrow \underline{\underline{y = \sqrt[3]{-x}}}.$$

1.48. Példa *Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!*

$$xy'' - 2y' = \frac{2}{x^3}, \qquad y(1) = \frac{1}{5}, \quad y'(1) = \frac{3}{5}$$

30 Megoldás:

$$y \textit{ hiányzik:} \qquad y' := p(x) \quad \Longrightarrow \quad y'' = p'.$$

$$xp' - 2p = \frac{2}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad p' - \frac{2}{x}p = \frac{2}{x^4} \qquad \textit{(lineáris elsőrendű inhomogén diff.egy.)}$$

$$\textit{(H):} \quad p' - \frac{2}{x}p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}p \qquad p \equiv 0 \textit{ megoldás}$$

Ha $p \neq 0$*:*

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|p| = 2\ln|x| + K$$

$$|p| = \mathrm{e}^K x^2, \quad \textit{és} \quad p \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad p_{h\acute{a}} = Cx^2$$

$$p_{ip} = c(x) \cdot x^2 \quad \Longrightarrow \quad p'_{ip} = c' \cdot x^2 - c \cdot 2x$$

Behelyettesítve (I)-be:

$$c'x^2 - c2x - \frac{2}{x}cx^2 = \frac{2}{x^4}$$

$$c' = \frac{2}{x^6} = 2x^{-6} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \frac{2x^{-5}}{-5} = -\frac{2}{5}\frac{1}{x^5} \quad \Longrightarrow \quad p_{ip} = -\frac{2}{5}\frac{1}{x^3}$$

$$p = y' = C_1x^2 - \frac{2}{5}\frac{1}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = C_1\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5x^2} + C_2}}$$

Írható $y = C_1x^3 + \dfrac{1}{5x^2} + C_2$ *alakban is, de ekkor* $y' = 3C_1x^2 - \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x^3}$*-t képezni kell, ha kezdetiérték probléma van. (Vagy előzőleg meg kellett volna* C_1*-et határozni.)*

$$y(1)=\frac{1}{5}: \quad \frac{1}{5}=C_1+\frac{1}{5}+C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_1+C_2=0$$

$$y'(1)=\frac{3}{5}: \quad \frac{3}{5}=3C_1-\frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad C_1=\frac{1}{3}, \quad C_2=-\frac{1}{3}$$

A keresett megoldás:

$$\underline{\underline{y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5x^2}+\left(-\frac{1}{3}\right).}}$$

1.49. Példa *Az*

$$yy''+y'^2=1$$

differenciálegyenlet általános megoldásából válasszuk ki azt az integrálgörbét, amely
a) keresztülhalad a $(0,1)$ *ponton és ott érintőjének meredeksége* -1,
b) $y(1)=2\,, \quad y'(1)=3$
(A differenciálegyenlet megoldásához alkalmazza az $y'(x)=p(y(x))$ *helyettesítést!)*

31 Megoldás:

$$y'=p(y)\,, \qquad\qquad y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,p$$

$$y\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,p+p^2=1$$

$$\int\frac{p}{1-p^2}\,\mathrm{d}p=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}\,, \qquad p\neq\pm1$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-p^2|=\ln|y|+C$$

$$\ln|1-p^2|= \underbrace{\ln\frac{1}{y^2}+C}_{=\ln\frac{1}{y^2}+\ln K=\ln\frac{K}{y^2}\,,\ \textit{ahol}\ K>0}$$

$$|1-p^2|=K\frac{1}{y^2}\,, \qquad K>0$$

$$p^2-1=\pm K\frac{1}{y^2} \qquad \textit{és} \quad p\equiv\pm1 \ \textit{is megoldás.}$$

Összesítve kapjuk:

$$p^2=1+C_1\frac{1}{y^2}\,, \qquad C_1\in\mathbb{R}.$$

a) $y(0)=1\,,\quad y'(0)=-1$

A kezdeti feltételekből: $(-1)^2 = 1 + C_1 \dfrac{1}{1^2} \quad\Longrightarrow\quad C_1 = 0$

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \qquad \textit{(csak a } -1 \textit{ jó)}$$

$$y = -x + C_2\,, \qquad y(0) = 1 \quad\Longrightarrow\quad C_2 = 1$$

$$\underline{y + x = 1}.$$

b) Hf.

1.5.1. Gyakorló feladatok

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1. $y'' + (x-1)\,(y')^3 = 0 \qquad y' = p(x)$
2. $y''y' + x = 0 \qquad y' = p(x)$
3. $2yy' - y'' = 0 \qquad y' = p(y)$
4. $y'' = (y')^3 + y' \qquad y' = p(y)$
5. $y'' + 2x\,(y')^2 = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 4 \qquad y' = p(x)$

1.6. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y$

$$\begin{array}{rll} \text{(H):} & L[y] = 0 & \text{(homogén egyenlet)} \\ \text{(I):} & L[y] = f(x) & \text{(inhomogén egyenlet)} \end{array}$$

Ha $f, a_0, \ldots, a_{n-1} \in C^0_{(a,b)}$, akkor minden

$$y^{(k)}(x_0) = y_{0,k}, \quad \text{ahol } k = 0, 1, \ldots, n-1\,, \quad x_0 \in (a,b)$$

kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható.

1.50. Tétel *Ha* y_1, y_2 *megoldása (I)-nek, akkor* $y_1 - y_2$ *megoldása (H)-nak.*

Bizonyítás. Az elsőrendű inhomogén egyenletre vonatkozó állításhoz hasonlóan. □

1.51. Tétel *Következmény:*

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip}$$

Bizonyítás. Az elsőrendű inhomogén egyenletre vonatkozó állításhoz hasonlóan. □

1.6.1. A homogén egyenlet általános megoldása

1.52. Tétel *(H) megoldásai lineáris teret alkotnak.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy ha Y_1, Y_2 megoldása (H)-nak, akkor $Y_1 + Y_2$ és $C \cdot Y_1$ is az.

$$\begin{array}{rl} & Y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)\,Y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,Y_1' + a_0(x)\,Y_1 \equiv 0 \\ + & \left(Y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)\,Y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,Y_2' + a_0(x)\,Y_2 \equiv 0\right) \\ \hline & (Y_1+Y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)\,(Y_1+Y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,(Y_1+Y_2)' + a_0(x)\,(Y_1+Y_2) \equiv 0 \end{array}$$

Tehát valóban $L[Y_1 + Y_2] \equiv 0$. Hasonlóan lehet megmutatni, hogy $L[Y_1] \equiv 0$-ból következik $L[C \cdot Y_1] \equiv 0$.
Ebből már következik, hogy (H) megoldásai lineáris teret alkotnak. □

1.53. Tétel *(H) megoldásainak tere n dimenziós.* *(Nem bizonyítjuk.)*

Ha tehát megadunk n db lineárisan független megoldást, akkor

$$y_{há} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot Y_i(x), \qquad C_i \in \mathbb{R}.$$

1.54. Definíció *$f_1, f_2, \ldots, f_n$ függvények lineárisan függetlenek $x \in I$-n, ha*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f_i(x) \equiv 0,\ x \in I \quad \textit{akkor és csak akkor, ha } \lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

1.55. Definíció *Az $f_1, \ldots, f_n$ függvények legyenek az x változónak legalább $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható függvényei. A*

$$\underline{\underline{W}}\,(x) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

mátrixot Wronski-féle mátrixnak, a belőle képzett determinánst Wronski-féle determináns*nak nevezzük.*

Legyen $f_1, \ldots, f_n$ legalább $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható I-n:

1. az I-n $|\underline{\underline{W}}\,| \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f_1, \ldots, f_n$ lineárisan függetlenek I-n
2. $\qquad\qquad\qquad\qquad \not\Leftarrow$

   Például: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = |x|^3$ lineárisan függetlenek $(-\infty, \infty)$-en, de

   $$|\underline{\underline{W}}| = \begin{vmatrix} x^3 & |x|^3 \\ 3x^2 & \begin{cases} 3x^2 \\ -3x^2 \end{cases} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3. (Kevésbé fontos számunkra:
   $f_1, \ldots, f_n$ lineárisan összefüggő $\Longrightarrow$ $|\underline{\underline{W}}| \equiv 0.$)

De igaz a következő tétel:

1.56. Tétel $L[Y_i] \equiv 0$, $x \in I$, $i = 1, \ldots, n$, *tehát* $Y_1, \ldots, Y_n$ *a homogén egyenlet megoldásai* I*-n :*
$Y_1, \ldots, Y_n$ *lineárisan függetlenek* $\Longleftrightarrow$ $|\underline{\underline{W}}\,(x)| \neq 0$, *ha* $x \in I$.

(Tehát, ha f_i-k helyére a homogén egyenlet megoldásai kerülnek, akkor már érvényes a megfordított, egyben erősebb állítás is.) *(Nem bizonyítjuk.)*

Hogyan kereshetünk n darab lineárisan független megoldást a homogén egyenlethez?

A homogén egyenlet általános megoldása függvény együtthatós esetben

Például másodrendű esetben, ha Y_1 adott, $Y_2 = u(x) \cdot Y_1(x)$ alakban kereshető. u-ra hiányos másodrendű differenciálegyenlet adódik.

Mi nem foglalkozunk ezzel az esettel.

A homogén egyenlet általános megoldása konstans együtthatós esetben

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \,, \qquad a_i \in \mathbb{R} \,, \quad i = 0, 1, \ldots , n-1$$

$y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alakban keressük az egyenlet megoldásait, tehát próbafüggvénnyel kísérletezünk:

$$y' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(k)} = \lambda^k\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n\, \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Behelyettesítve (H)-ba:

$$\underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0\right)}_{\text{karakterisztikus polinom}} \;\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

1.57. Definíció *Az*

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus polinom:

$$\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0$$

Mivel az előző egyenletben $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, a megoldáshoz a karakterisztikus polinomnak kell nullának lennie. Így jutunk el az ún. *karakterisztikus egyenlet*hez.

1.58. Definíció *Az*

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0 = 0$$

Ennek n db gyöke van, de lehetnek többszörös gyökök, valamint komplex gyökök is. Mivel állandó együtthatós a polinom, a komplex gyökök csak konjugált párban fordulhatnak elő. A különböző esetek:

1. A különböző valós gyökökhöz tartozó $e^{\lambda_i x}$, $e^{\lambda_j x}$ $(i \neq j)$ függvények lineárisan függetlenek.

2. Ha pl. λ_1 k-szoros gyök (belső rezonancia), akkor is van hozzá k db lineárisan független megoldás: $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, $x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$. (Nem bizonyítjuk.)

3. Az előző állítások akkor is igazak, ha a gyökök komplexek. De így nem valós megoldást kapnánk.
   Az alábbiakban felhasználjuk az Euler formulát:
   Mint tudjuk, $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi\,.$

   Pl. $e^{2+j3} = e^2\, e^{j3} = e^2\,(\cos 3 + j\sin 3)\,.$

   Tehát $\mathrm{Re}\, e^{2+j3} = e^2 \cos 3\,,\qquad \mathrm{Im}\, e^{2+j3} = e^2 \sin 3\,.$

   És most nézzük a konjugált komplex gyökök esetét!

   Pl.: $\lambda_1 = \alpha + j\beta\,,\qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - j\beta\,:$
   $Y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x),$

   $$Y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j(-\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + j\sin(-\beta x)) =$$
   $$= e^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x).$$
   Mint tudjuk Y_1 és Y_2 tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

   $$Y_1^* := \tfrac{Y_1+Y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x\ \left(= \mathrm{Re}\, e^{\lambda_1 x}\right)$$
   $$Y_2^* := \tfrac{Y_1-Y_2}{2j} = e^{\alpha x}\sin\beta x\ \left(= \mathrm{Im}\, e^{\lambda_1 x}\right)$$

   Ezek is lineárisan függetlenek. Ezekre cseréljük le Y_1, Y_2-t.
   Tehát látjuk, hogy Y_1^*, illetve Y_2^* az Y_1 valós és képzetes része.
   (Többszörös komplex gyökök esetén Y_1^*, Y_2^* szorzandó x-szel, x^2-tel, x^3-nel, stb.)

1.59. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

32 Megoldás: *A karakterisztikus egyenlet és annak megoldásai:*

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = -1\,,\ \lambda_3 = 3$$

Tehát a lineárisan független megoldások: $\mathrm{e}^{0x}\,,\ \mathrm{e}^{-x}\,,\ \mathrm{e}^{3x}$
A homogén egyenlet általános megoldása pedig ezek lineáris kombinációja:

$$y_{h\acute{a}} = C_1\,\mathrm{e}^{0x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,\mathrm{e}^{3x} = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,\mathrm{e}^{3x}\,, \qquad C_1,\, C_2,\, C_3 \in \mathbb{R}$$

1.60. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

33 Megoldás:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Tehát belső rezonancia van.

$$y_{h\acute{a}} = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,x\,\mathrm{e}^{-x}$$

1.61. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$

34 Megoldás:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = \lambda\,(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2 + 3j,\ \lambda_3 = -2 - 3j$$

$$y_{h\acute{a}} = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + C_3\,\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$$

1.62. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$$

35 Megoldás:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = j,\ \ \lambda_4 = \lambda_5 = -j \quad \textit{(belső rezonancia)}$$

Mivel $\mathrm{e}^{jx} = \cos x + j\sin x\,,$ *ezért* $\operatorname{Re}\mathrm{e}^{jx} = \cos x$, $\operatorname{Im}\mathrm{e}^{jx} = \sin x$ *lineárisan független valós megoldások és ezek* x *-szeresei is, így az általános megoldás:*

$$y_{h\acute{a}} = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\cos x + C_3\,\sin x + C_4\,x\,\cos x + C_5\,x\,\sin x =$$

$$= C_1\,\mathrm{e}^{2x} + (C_2 + C_4\,x)\,\cos x + (C_3 + C_5\,x)\,\sin x$$

1.63. Példa *Írjunk fel egy olyan legalacsonyabb rendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek megoldásai:*

1. $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$
2. $5\,e^x - 4\,e^{-x} + 7\,e^{2x}$
3. $3x^2 - e^{-3x}$
4. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$
5. $x^2e^{-x},\ x^3e^{2x}$
6. $e^{2x}\sin x,\ e^{2x}\cos x$
7. $e^{2x}\sin 3x,\ e^{-3x}$
8. $e^{2x}\sin x,\ x^2e^{2x}\sin x,\ 1$
9. *tetszőleges másodfokú polinom,* $\sin x$

36 Megoldás: *1. A karakterisztikus polinom gyökei:*

e^x *miatt:* $\lambda_1 = 1,$
e^{-x} *miatt:* $\lambda_2 = -1,$
e^{2x} *miatt:* $\lambda_3 = 2.$

Így a karakterisztikus polinom:

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Ezért a keresett differenciálegyenlet:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

2. *Megoldása megegyezik az a) feladat megoldásával, mivel a megadott függvény az* $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$ *függvények lineáris kombinációja.*

3. x^2 *miatt:* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$
e^{-3x} *miatt:* $\lambda_4 = -3.$

Így a karakterisztikus polinom:

$$\lambda^3\,(\lambda-(-3)) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^4 + 3\lambda^3 = 0.$$

Ezért a keresett differenciálegyenlet:

$$y^{(4)} + 3y''' = 0.$$

4. *Hf.*

5. *Hf.*

6. *A karakterisztikus polinom gyökei:*
   $\lambda_{1,2} = 2 \pm j.$
   Így a karakterisztikus polinom:
   $(\lambda - (2+j))\,(\lambda - (2-j)) = ((\lambda-2) - j)\,((\lambda-2) + j) =$
   $= (\lambda-2)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$
   (Felhasználtuk, hogy $(a-b)\,(a+b) = a^2 - b^2$.*)*
   Ezért a keresett differenciálegyenlet:
   $y'' - 4y' + 5y = 0.$

7. *Hf.*

8. *Hf.*

9. *Hf.*

1.6.2. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

Állandók variálása

A módszer minden jobb oldali f függvénynél alkalmazható, azonban elég nehézkes. Speciális f-re lesz jobb módszerünk is. Az állandók variálását csak a másodrendű esetre mutatjuk meg.

Legyen adott az $a(x)\,y''+b(x)\,y'+c(x)\,y = f(x)$-hez tartozó homogén differenciálegyenlet megoldása:

$y_{há} = C_1\,Y_1(x) + C_2\,Y_2(x).$

Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az alábbi alakban keressük:

$c(x)\cdot|\quad y_{ip} := \underline{c_1(x)\,Y_1(x)} + \underline{c_2(x)\,Y_2(x)}$

$b(x)\cdot|\quad y'_{ip} = \underline{c_1\,Y'_1} + \underline{c_2\,Y'_2} + \underbrace{c'_1\,Y_1 + c'_2\,Y_2}_{:=0}$

Alulhatározott feladat (majd meglátjuk, hogy jogos a felvétel).

$a(x)\cdot|\quad y''_{ip} = \underline{c'_1\,Y'_1} + \underline{c_1\,Y''_1} + \underline{c'_2\,Y'_2} + \underline{c_2\,Y''_2}$

Az áttekinthetőség növelésére a bal oldalon nem jelöljük az x-től való függést. Behelyettesítve (I)-be (c_1, c_2, c'_1, c'_2-re rendezzük):

$$c_1(\underbrace{aY''_1 + bY'_1 + cY_1}_{=L[Y_1]\equiv 0}) + c_2(\underbrace{aY''_2 + bY'_2 + cY_2}_{=L[Y_2]\equiv 0}) + aY'_1c'_1 + aY'_2c'_2 = f(x)$$

c_1', c_2'-re az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{W}}} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a} \end{bmatrix}$$

$|\underline{\underline{W}}| \neq 0$, mert Y_1, Y_2 lineárisan függetlenek és $L[y] = 0$ megoldásai $\Longrightarrow$ az egyenletrendszer egyértelműen megoldható c_1', c_2'-re:

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a} \end{bmatrix}$$

c_1', c_2' folytonossága miatt létezik c_1, c_2. (Integrációs állandó nem kell.)

Ezt a módszert nem kérjük számon, ezért nem adunk rá példát.

Kísérletezés

Az alább ismertetésre kerülő módszer csak speciális f függvény (a jobb oldalon álló ún. zavaró függvény) esetén alkalmazható és csak állandó (konstans) együtthatójú lineáris differenciálegyenletnél!

Ha az állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán álló f függvény:

1. $K\mathrm{e}^{\alpha x}$,
2. $P_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$,
3. $K \sin \beta x$ vagy $K \cos \beta x$,
4. $K\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$ vagy $K\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$.
5. $P_m(x) \sin \beta x$ vagy $P_m(x) \cos \beta x$,
   ahol $P_m(x)$ adott m-ed fokú polinom,
6. $P_m(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}$, ahol $P_m(x)$ adott m-ed fokú polinom,
7. $P_m(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$ vagy $P_m(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$,
   ahol $P_m(x)$ adott m-ed fokú polinom

függvények valamelyike, akkor a partikuláris megoldást az alábbi alakban kereshetjük:

1. $y_{ip} = A\mathrm{e}^{\alpha x}$, A ismeretlen,

2. $y_{ip} = Q_m(x) = B_m x^m + \cdots + B_0\,, \qquad B_0, \ldots, B_m$ ismeretlen,

3. $y_{ip} = A \sin \beta x + B \cos \beta x\,, \qquad A, B$ ismeretlen,

4. $y_{ip} = \mathrm{e}^{\alpha x}\,(A \sin \beta x + B \cos \beta x)\,, \qquad A, B$ ismeretlen,

5. $y_{ip} = Q_m(x)\ \sin \beta x + R_m(x)\ \cos(\beta x)$,
   ahol $Q_m(x)$, $R_m(x)$ ismeretlen m-ed fokú polinomok,

6. $y_{ip} = Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,, \quad$ ahol $Q_m(x)$ ismeretlen m-ed fokú polinom,

7. $y_{ip} = \mathrm{e}^{\alpha x}\ (Q_m(x)\ \sin \beta x + R_m(x)\ \cos(\beta x))\,,$
   ahol $Q_m(x)$, $R_m(x)$ ismeretlen m-ed fokú polinomok.

A próbafüggvényben szereplő — még határozatlan — állandókat tartalmazó kísérletező függvényt elegendően sokszor differenciálva és az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve az egyenlő együtthatók módszerével (a megfelelő tagok együtthatóinak összehasonlításával) tudjuk meghatározni.

Ha a feltételezés helyes volt, akkor annyi független lineáris egyenletet kapunk az ismeretlen együtthatókra, ahány ismeretlenünk van. (Tehát pontosan 1 megoldás van.)

Ha a jobb oldali f függvényben az előző függvények összege szerepel, akkor a kísérletező függvényeket is össze kell adni.

Külső rezonancia:

A módszer nem vezet eredményre, ha a kísérletező függvény, vagy annak egy tagja szerepel a homogén egyenlet megoldásai között. Ilyenkor x-szel szorozzuk ezt a tagot mindaddig, amíg megszűnik a rezonancia.

1.64. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' - 3y' + 2y = \left(\mathrm{e}^{3x}\right) + \left(x^2 + x\right)$$

37 Megoldás:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{há} = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kísérletezéssel keressük.

1.65. Megjegyzés *A könnyebb érthetőségért a jobb oldali*

$f(x) = (\mathrm{e}^{3x}) + (x^2 + x)$

zavaró függvényben ()-be tettük az egyes megengedett függvényeket tartalmazó tagokat, melyekhez tartozó kísérletező függvényeket szintén ()-ben adjuk meg. A további példáknál hasonlóan járunk el.

$$\begin{array}{rl} 2\cdot | & y_{ip} := (A\mathrm{e}^{3x}) + (Bx^2 + \quad Cx + D) \\ -3\cdot | & y'_{ip} = 3A\mathrm{e}^{3x} + \ 2Bx + C \\ 1\cdot | & y''_{ip} = 9A\mathrm{e}^{3x} + 2B \end{array}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$(9A - 9A + 2A)\mathrm{e}^{3x} + x^2(2B) + x(2C - 6B) + (2D - 3C + 2B) = \mathrm{e}^{3x} + x^2 + x$$

Az azonos típusú függvények együtthatóinak összehasonlításával megkapjuk a keresett ismeretlenek értékét.

$$2A = 1 \qquad \underline{A = \frac{1}{2}}$$

$$2B = 1 \qquad \underline{B = \frac{1}{2}}$$

$$2C - 6B = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2C = 4\ , \qquad \underline{C = 2}$$

$$2D - 3C + 2B = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2D = 6 - 1\ , \qquad \underline{D = \frac{5}{2}}$$

$$\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}}$$

1.66. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' - 3y' + 2y = (x) + (\mathrm{e}^{x})$$

38 Megoldás:

$$y_{há} = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} \qquad \textit{(Lásd az előző példában!)}$$

Most külső rezonancia van. Megmutatjuk, hogy derül ez ki, ha nem vesszük észre és így rossz függvénnyel kísérletezünk.

$$\begin{array}{rl} 2\cdot | & y_{ip} := (Ax + B) + (C\mathrm{e}^{x}) \\ -3\cdot | & y'_{ip} = A + C\mathrm{e}^{x} \\ 1\cdot | & y''_{ip} = C\mathrm{e}^{x} \end{array}$$

$$x\,(2A) + (2B - 3A) + (\underbrace{2C - 3C + C}_{=0})\,\mathrm{e}^{x} = x + \mathrm{e}^{x} \qquad (\,0 \neq 1:\ \textit{ellentmondásra jutottunk})$$

És most nézzük a megoldást a helyesen felvett kísérletező függvénnyel:

$$\begin{array}{rll} 2\cdot | & y_{ip} & := (Ax + B) + (Cx\,\mathrm{e}^{x}) \\ -3\cdot | & y'_{ip} & = A + Cx\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{x} \\ 1\cdot | & y''_{ip} & = Cx\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{x} \end{array}$$

$$x(2A) + (2B - 3A) + xe^x(\underbrace{2C - 3C + C}_{=0}) + e^x(-3C + 2C) = x + e^x$$

$$2A = 1 \qquad \underline{A = \frac{1}{2}}$$

$$2B - 3A = 0 \qquad \underline{B = \frac{3}{2}A = \frac{3}{4}}$$

$$-C = 1 \qquad \underline{C = -1}$$

$$\underline{y_{iá} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x}$$

1.67. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' - y = (x^2 - x + 1) + (e^x)$$

39 Megoldás:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = -1\ :\ y_{há} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$\begin{aligned} -1 \cdot |\ \ & y_{ip} := (Ax^2 + Bx + C) + (Dxe^x) \qquad \textit{(külső rezonancia)} \\ 0 \cdot |\ \ & y'_{ip} = 2Ax + B + Dxe^x + De^x \\ 1 \cdot |\ \ & y''_{ip} = 2A + Dxe^x + De^x + De^x \end{aligned}$$

$$-Ax^2 - Bx + (2A - C) + xe^x(-D + D) + e^x \cdot 2D = x^2 - x + 1 + e^x$$

$$A = -1\,, \qquad B = 1 \qquad C = 2A - 1 = -3\,, \qquad D = \frac{1}{2}$$

$$\underline{y_{iá} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 + x - 3 + \frac{1}{2}xe^x}$$

1.68. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' - 2y' + y = 6e^x$$

40 Megoldás:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad y_{há} = C_1 e^x + C_2 xe^x \qquad \textit{(belső rezonancia)}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot |\ \ & y_{ip} := Ax^2 e^x \qquad \textit{(külső rezonancia)} \\ -2 \cdot |\ \ & y'_{ip} = 2Axe^x + Ax^2 e^x \\ 1 \cdot |\ \ & y''_{ip} = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2 e^x \end{aligned}$$

$$x^2 e^x(\underbrace{A - 2A + A}_{=0}) + xe^x(\underbrace{-4A + 4A}_{=0}) + 2A\,e^x = 6\,e^x\,, \qquad 2A = 6 \quad \Longrightarrow \quad A = 3$$

$$\underline{y_{iá} = C_1 e^x + C_2 xe^x + 3x^2 e^x}$$

1.69. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' + 8y' + 25y = \mathrm{e}^{-4x}$$

41 Megoldás:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \ : \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \frac{-8 \pm j6}{2} = -4 \pm j3$$

Mivel $\mathrm{e}^{(-4+j3)x} = \mathrm{e}^{-4x}(\cos 3x + j \sin 3x)$, *a homogén egyenlet általános megoldása:*

$$y_{há} = C_1\,\mathrm{e}^{-4x}\cos 3x + C_2\,\mathrm{e}^{-4x}\sin 3x$$

$$\begin{array}{rl} 25 \cdot | & y_{ip} := A\mathrm{e}^{-4x} \qquad \textit{(nincs külső rezonancia!)} \\ 8 \cdot | & y_{ip}' = -4A\mathrm{e}^{-4x} \\ 1 \cdot | & y_{ip}'' = 16A\mathrm{e}^{-4x} \end{array}$$

$$(25A - 32A + 16A)\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x} \qquad 9A = 1 \qquad A = \frac{1}{9}$$

$$\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^{-4x}\cos 3x + C_2\mathrm{e}^{-4x}\sin 3x + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-4x}}$$

1.70. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' + 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{-2x}\ , \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

42 Megoldás:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$$y_{há} = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} \qquad (y_{ip} = A\mathrm{e}^{-2x} \textit{ nem jó, mert külső rezonancia van.})$$

$$\begin{array}{rl} 6 \cdot | & y_{ip} := x \cdot A\mathrm{e}^{-2x} = \underline{Ax\mathrm{e}^{-2x}} \\ 5 \cdot | & y_{ip}' = A\mathrm{e}^{-2x} - \underline{2Ax\mathrm{e}^{-2x}} \\ 1 \cdot | & y_{ip}'' = -2A\mathrm{e}^{-2x} - 2A\mathrm{e}^{-2x} + \underline{4Ax\mathrm{e}^{-2x}} \end{array}$$

$$x\mathrm{e}^{-2x}(\underbrace{6A - 10A + 4A}_{=0}) + \mathrm{e}^{-2x}(5A - 4A) = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad \underline{A = 2}$$

$$\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}}$$

$y(0) = 0 \ : \quad 0 = C_1 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = -C_2$

$y'(0) = 3 \ : \quad y' = -2C_1\mathrm{e}^{-2x} - 3C_2\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^{-2x} - 4x\mathrm{e}^{-2x}$

$\qquad 3 = -2C_1 - 3C_2 + 2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = -1\ , \quad C_1 = 1$

$$\underline{y = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}}$$

1.71. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' + y = (-4\cos x) + (x)\,, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$$

43 Megoldás:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm j \qquad y_{h\acute{a}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot | & y_{ip} := (Ax\cos x + Bx\sin x) + (Cx + D) \qquad \textit{(külső rezonancia)} \\ 0 \cdot | & (y'_{ip} = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x + C) \\ 1 \cdot | & y''_{ip} = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x \end{array}$$

$$(A - A)\,x\cos x + (B - B)\,x\sin x + (2B)\,\cos x + (-2A)\,\sin x + Cx + D = -4\cos x + x$$

$$2B = -4\,, \quad \underline{B = -2}; \qquad -2A = 0\,, \quad \underline{A = 0}; \qquad \underline{C = 1}\,; \qquad \underline{D = 0}$$

$$\underline{y_{i\acute{a}} = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\sin x + x}$$

$$\begin{array}{ll} y(0) = 2\ : & 2 = C_1 \\ y'(0) = 2\ : & y' = -C_1\sin x + C_2\cos x - 2\sin x - 2x\cos x + 1 \\ & 2 = C_2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 1 \end{array}$$

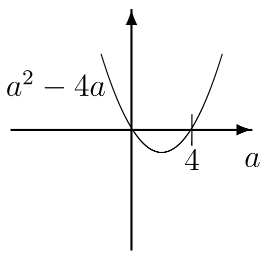
$$\underline{y = 2\cos x + \sin x + x(1 - 2\sin x)}$$

1.72. Példa *Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$-re oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:*

$$y'' + ay' + ay = 0$$

44 Megoldás:

$$\lambda^2 + a\lambda + a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$



1. $0 < a < 4 \quad (a^2 - 4a < 0)\ : \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}$

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\,\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}\,x\right) + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\,\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}\,x\right)$$

2. $a = 0$ *, illetve* $a = 4$ *:* $\qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$ $\qquad$ *(belső rezonancia)*

$y = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} + C_2\,x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$

3. $a < 0$ *vagy* $a > 4$ $\;(a^2 - 4a > 0)$ *:* $\qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a}$

$y = C_1\,\mathrm{e}^{(-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4a})x} + C_2\,\mathrm{e}^{(-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4a})x}$

1.6.3. Helyettesítéssel megoldható differenciálegyenletek

Bizonyos típusú függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenletek új független változó bevezetésével állandó együtthatójú differenciálegyenletté alakíthatók. A módszert a következő példán mutatjuk meg.

1.73. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$y'' - \frac{2}{x^2}\,y = 0, \quad (x > 0)$$

$x = \mathrm{e}^t$ *helyettesítéssel dolgozzunk!*

45 Megoldás: *Tehát az* x *régi független változó helyére a* t *új független változót helyettesítjük be:*

$$x = x(t) \quad \longrightarrow \quad t = t(x)$$

A helyettesítéssel kapott differenciálegyenlet megoldása $\varphi(t)$ *lesz, így az eredeti differenciálegyenlet megoldása* $y(x) = \varphi(t(x))$ *módon adódik. Hogyan kell elvégeznünk a helyettesítést?*

$\varphi(t);\ \ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$ *jelölést alkalmazva az alábbi helyettesítéseket végezzük el:*

$$y \longrightarrow \varphi$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{\varphi}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{x}} = \frac{\dot{\varphi}}{\mathrm{e}^t}.$$

(Az összetett függvény és az inverzfüggvény deriválási szabályát használtuk fel.)

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\dot{\varphi}}{\dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\dot{\varphi}}{\dot{x}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}_{\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\dot{x}}} = \frac{\ddot{\varphi}\,\dot{x} - \dot{\varphi}\,\ddot{x}}{\dot{x}^2}\,\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{\varphi}\,\mathrm{e}^t - \dot{\varphi}\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t)^3} = \frac{\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}}{(\mathrm{e}^t)^2}$$

Elvégezve a behelyettesítéseket:

$x = \mathrm{e}^t \quad \Longrightarrow \quad t = \ln x \;,$

$$\frac{\ddot\varphi - \dot\varphi}{(\mathrm{e}^t)^2} - \frac{2}{(\mathrm{e}^t)^2}\,\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot\varphi - \dot\varphi - 2\varphi = 0$$

Másodrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletet kaptunk.

$$\varphi := \mathrm{e}^{\lambda t} \;: \qquad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

$$\varphi = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} \quad \Longrightarrow \quad \underline{y(x) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x}\;, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

1.74. Megjegyzés *Az eljárás $x < 0$ -ra is jó. Ekkor $x = -\mathrm{e}^t$ a helyettesítés.*

$$x = -\mathrm{e}^t \quad \Longrightarrow \quad t = \ln(-x)$$

$$y' = -\frac{\dot\varphi}{\mathrm{e}^t} \qquad y'' = \frac{\ddot\varphi\,\dot x - \dot\varphi\,\ddot x}{\dot x^3} = \frac{\ddot\varphi(-\mathrm{e}^t) - \dot\varphi(-\mathrm{e}^t)}{-(\mathrm{e}^t)^3} = \frac{\ddot\varphi - \dot\varphi}{(\mathrm{e}^t)^2} \quad \textit{(ua.)}$$

Az egyenlet ugyanaz lesz:

$$\ddot\varphi - \dot\varphi - 2\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C_1x^2 - \frac{C_2}{x}$$

Ez pedig írható a következő alakban is: $\underline{y(x) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x}\;, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$

1.75. Példa

$x = \mathrm{e}^t$ *helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$x^2y'' - xy' + y = \ln x$$

46 Megoldás:

$$y(x) = \varphi(t(x)) \qquad y' = \frac{\dot\varphi}{\dot x} = \frac{\dot\varphi}{\mathrm{e}^t} \qquad y'' = \frac{\ddot\varphi\,\dot x - \ddot\varphi\,\ddot x}{\dot x^3} = \frac{\ddot\varphi\,\mathrm{e}^t - \dot\varphi\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{3t}}$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$\mathrm{e}^{2t}\,\frac{\ddot\varphi\,\mathrm{e}^t - \dot\varphi\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{3t}} - \mathrm{e}^t\,\frac{\dot\varphi}{\mathrm{e}^t} + \varphi = t \quad \Longrightarrow \quad \ddot\varphi - 2\dot\varphi + \varphi = t$$

$$\textit{(H):} \quad \varphi = \mathrm{e}^{\lambda t}: \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{h\acute{a}} = C_1\mathrm{e}^t + C_2\,t\,\mathrm{e}^t$$

$$\begin{array}{rl} 1\cdot| & \varphi_{ip} := At + B \\ (-2)\cdot| & \dot\varphi_{ip} = A \qquad\qquad At + B - 2A = t \qquad A = 1,\ B = 2 \qquad \varphi_{ip} = t + 2 \\ 1\cdot| & \ddot\varphi_{ip} = 0 \end{array}$$

$$\varphi_{i\acute{a}}(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,t\mathrm{e}^t + t + 2 \qquad \textit{és } x = \mathrm{e}^t; \quad t = \ln x$$

$$\underline{y = C_1\,x + C_2\,x\ln x + \ln x + 2}$$

1.76. Példa *$x = \mathrm{e}^t$ helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!*

$$x^2y'' - xy' + 2y = x$$

47 Megoldás:

$$\mathrm{e}^{2t}\,\frac{\ddot{\varphi}\,\mathrm{e}^t - \dot{\varphi}\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{3t}} - \mathrm{e}^t\,\frac{\dot{\varphi}}{\mathrm{e}^t} + 2\varphi = \mathrm{e}^t \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\varphi} - 2\dot{\varphi} + 2\varphi = \mathrm{e}^t$$

$$\text{(H):}\quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm j \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{há} = \mathrm{e}^t(C_1\cos t + C_2 \sin t)$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot & \varphi_{ip} := A\mathrm{e}^t \\ (-2)\cdot & \dot{\varphi}_{ip} = A\mathrm{e}^t \qquad\qquad A = 1 \qquad\quad \varphi_{ip} = \mathrm{e}^t \\ 1\cdot & \ddot{\varphi}_{ip} = A\mathrm{e}^t \end{array}$$

$$\varphi_{iá}(t) = \mathrm{e}^t(C_1\cos t + C_2 \sin t) + \mathrm{e}^t$$

$$\underline{y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x) + x}$$

1.6.4. Gyakorló feladatok

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$
2. $y''' - 4y'' + 5y' = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
4. $y'' + 4y = x$
5. $y'' + y = 2\sin x\cos x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
6. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
7. $y^{(4)} + 4y'' = \cos x.$ Adja meg az összes periodikus megoldást!
8. $y'' + 4y = 2\sin x\cos x$
9. $y'' + \alpha y' + 3y = 0$
   Milyen α érték mellett lesz a differenciálegyenlet minden megoldásfüggvénye olyan, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$?
10. $y'' - 4y = \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

11. $y'' + y' = \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

12. $y' - 5y = 2\mathrm{e}^{5x}$

13. $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$

14. $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' = x + 1$

15. $y^{(4)} - 2y'' + y = 2\mathrm{e}^{x}$

16. $x^2y'' - xy' + y = \ln x, \qquad (x = \mathrm{e}^t$ helyettesítéssel)

1.7. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y + e^t \end{aligned} \right\} \quad \text{mátrixos alakban:} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Ez egy kétváltozós elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ahol t a független változó, x, y pedig az ismeretlen függvények. A fenti mátrixos alakot röviden így jelölhetjük:

$$\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{f}(t)}\,,$$

ahol

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Konstans együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{f}(t)} \qquad \left(\; \underline{f}(t) \not\equiv \underline{0} \; \right) \qquad ,$$

ahol $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es, adott, konstans elemű mátrix.
A fenti differenciálegyenlet-rendszerhez tartozik egy homogén differenciálegyenlet-rendszer.

Homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}} \qquad \text{(H)}$$

Az egyváltozós lineáris differenciálegyenlethez hasonlóan itt is igaz, hogy az inhomogén általános megoldása megegyezik a homogén általános megoldása plusz az inhomogén egy partikuláris megoldása:

1.77. Tétel $\underline{x}_{iá} = \underline{x}_{há} + \underline{x}_{ip}$

1.78. Megjegyzés *Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer egy partikuláris megoldásának keresése sok esetben próbafüggvény-rendszerrel történhet. Mi az inhomogén esettel nem foglalkozunk.*

1.79. Tétel *A homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldástere lineáris tér, dimenziója* n*, ha az* $\underline{\underline{A}}$ *együttható mátrix* $n \times n$*-es mátrix.*

1.80. Tétel *Ha* λ *sajátértéke* $\underline{\underline{A}}$*-nak és* $\underline{s}$ *egy a* λ*-hoz tartozó sajátvektor* *(* $\underline{\underline{A}}\underline{s} = \lambda\underline{s}$ *), akkor*

$$\underline{x} = e^{\lambda t}\underline{s} \quad \textit{megoldása az} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\underline{x} \qquad (H)$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

Bizonyítás.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}s_1 \\ e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t}s_1 \\ \lambda e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ \lambda e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\underline{s} = e^{\lambda t}\boxed{\lambda\underline{s}} = e^{\lambda t}\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{s}} = \underline{\underline{A}}e^{\lambda t}\underline{s} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

□

1.81. Tétel *Ha az* $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$*-es konstans elemű mátrixnak* n *darab különböző sajátértéke* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *és az ezekhez tartozó egy-egy megfelelő sajátvektor* $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n$*, akkor az*

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \qquad (H)$
általános megoldása felírható

$$\underline{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{s_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{s_2} + c_3 e^{\lambda_3 t}\underline{s_3} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\underline{s_n}$$

alakban, ahol $c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,\ c_n$ *tetszőleges konstansok (valós számtest felett és komplex számtest felett is igaz az állítás.)*

1.82. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!*

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{y}} \\ \underline{\dot{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

48 Megoldás: *Karakterisztikus polinom:* $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0.$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6 \end{array}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\underline{s} = 0 \qquad \stackrel{\lambda=2}{\Longrightarrow} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez egy közönséges lineáris egyenletrendszer, ami Gauss-módszerrel megoldható. $s_{12} = 0$, s_{11} *és* s_{13} *közül az egyik tetszőleges, így a* $\lambda_1 = 2$ *-höz tartozó egyik sajátvektor:*

$$\underline{s_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóan kapható $\lambda_2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

és $\qquad \lambda_3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\underline{x}_{há} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & c_1e^{2t} & + & c_2e^{3t} & + & c_3e^{6t} \\ y & = & & & c_2e^{3t} & - & 2c_3e^{6t} \\ z & = & -c_1e^{2t} & + & c_2e^{3t} & + & c_3e^{6t} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textit{ahol } c_1,\ c_2,\ c_3 \textit{ tetszőleges} \\ \textit{valós konstansok.} \end{array}$$

1.83. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!*

$$\begin{array}{rcrcr} \underline{\dot{x}} & = & 2x & + & 9y \\ \underline{\dot{y}} & = & x & + & 2y \end{array}$$

49 Megoldás:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} (2-\lambda)^2 = 9 \\ 2-\lambda = \pm 3 \\ \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1 \end{array}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad s_{11} = 3\,, \quad s_{12} = 1\,, \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad s_{21} = 3\,, \quad s_{22} = -1\,, \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{há} = c_1\, e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 3c_1e^{5t} & + & 3c_2e^{-t}, \\ y & = & c_1e^{5t} & - & c_2e^{-t}, \end{array} \quad \textit{ahol } c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}$$

1.84. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!*

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -16 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

50 Megoldás:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -16 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Karakterisztikus polinom: $(2-\lambda)^2 + 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} (2-\lambda)^2 &= -16 \\ 2-\lambda &= \pm 4j \\ \lambda_1 = 2+4j,\ \lambda_2 &= 2-4j \end{aligned}$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -4j & -16 \\ 1 & -4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{11} = 4j\ , \quad s_{12} = 1\ , \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 4j \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan megkaphatjuk, hogy

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4j & -16 \\ 1 & 4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{21} = -4j\ , \quad s_{22} = 1\ , \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -4j \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a két sajátérték egymás konjugáltja, ezért a két sajátvektor is egymás konjugáltja. Így $\underline{s}_2$ *meghatározására nem lett volna szükség.*
λ_1 *és* $\underline{s}_1$ *segítségével felírhatjuk a komplex megoldást:*

$$\underline{x}_{komplex\ megoldás} = e^{(2+4j)t} \begin{bmatrix} 4j \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\,(\cos 4t + j \sin 4t) \begin{bmatrix} 4j \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Itt is igaz, hogy, ha $\underline{x}$ *megoldása az* $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\underline{x}$ *valós együtthatós differenciálegyenlet-rendszernek, akkor* $\mathrm{Re}\ \underline{x}$ *és* $\mathrm{Im}\ \underline{x}$ *is megoldások és lineárisan függetlenek.*

$$\mathrm{Re}\ \underline{x}_{komplex\ megoldás} = \begin{bmatrix} e^{2t}(-4)\sin 4t \\ \\ e^{2t}\cos 4t \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} -4\sin 4t \\ \\ \cos 4t \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\ \underline{x}_{komplex\ megoldás} = \begin{bmatrix} e^{2t}4\cos 4t \\ \\ e^{2t}\sin 4t \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 4\cos 4t \\ \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

A megoldástér dimenziója 2, ezért a valós általános megoldás az előző két megoldás összes lineáris kombinációja.

$$\underline{x}_{há} = c_1\, e^{2t} \begin{bmatrix} -4\sin 4t \\ \\ \cos 4t \end{bmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 4\cos 4t \\ \\ \sin 4t \end{bmatrix} \quad \textit{valós alakú megoldás.}$$

Megjegyezzük, hogy λ_2 *és* $\underline{s}_2$ *-ből ugyanehhez az általános megoldáshoz jutnánk.*

1.85. Példa *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \phantom{x_1 + x_2 +{}} 3x_3 \end{aligned}$$

Adjuk meg az $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *kezdetiérték probléma megoldását is!*

51 Megoldás:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} \qquad \left(= \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\right)$$

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_{1,2} = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} c &= 0 \\ a &:= t \\ b &:= u \end{aligned}$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} t \\ u \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát van két lineárisan független sajátvektor: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ -2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Ebből például $\quad \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

A megoldás:

$$\underline{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

vagy más alakban:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\mathrm{e}^t \\ c_2\mathrm{e}^t + c_3\mathrm{e}^{3t} \\ 2c_3\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}.$$

Az $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *kezdetiérték probléma megoldása:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 + c_3 \\ 2c_3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1\,,\ c_2 = 2\,,\ c_3 = 1$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$$

1.8. Egzisztencia és unicitás tétel

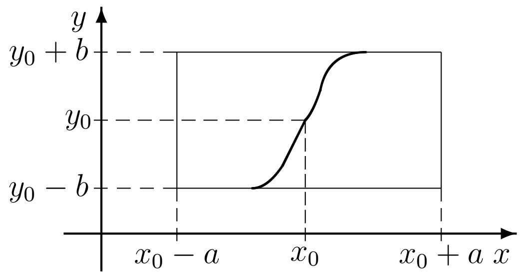
$$\underbrace{(y'(x) = f(x, y(x));\quad y(x_0) = y_0)}_{\text{differenciálegyenlet}} \ \equiv \ \underbrace{\left(y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{integrálegyenlet}} \quad (f \text{ folyt.})$$

(Ui.: $y'(x) = \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t\right)' = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} \ldots = y_0$)
Az utóbbi integrálegyenletből jön az ötlet, hogy a matematikában több területen is eredményesen használt fokozatos közelítések módszerével $\left(y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x}^{x_0} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t\right)$ próbálkozzunk.

1.8.1. Picard-féle szukcesszív approximáció

(Fokozatos közelítések módszere.)

1.86. Tétel $Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *(zárt!)*
$f : D \to \mathbb{R};\ D \subset \mathbb{R}^2,\ Q \subset D.$



Ha $f, f'_y \in C^0_Q$, *akkor a*

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= y_0\\ &\vdots\\ \varphi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

rekurzíve meghatározott függvénysorozathoz létezik olyan $\delta > 0$, *hogy* φ_n *egyenletesen konvergál* φ *-hez* $K_{x_0,\delta}$*-n és* φ *megoldása az* $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ *kezdetiérték problémának.* $(\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)))$

(Ha φ^* *is megoldás lenne* $K_{x_0,\delta}$*-ban, akkor* $\varphi^*(x) \equiv \varphi(x) \quad \forall\, x \in K_{x_0,\delta}$*.)*

1.8.2. Egzisztencia és unicitás tétel

1.87. Tétel *Ha* f, f'_y *folytonos a* Q *(zárt) téglalapon* $(f, f'_y \in C^0_Q)$, *akkor* $\exists\ K_{x_0,\delta}$, *amelyben az*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték problémának egy és csakis egy megoldása van. (Nem bizonyítjuk.)

(A tétel bizonyítása a szukcesszív approximáció módszerét használja fel. Így nem csupán a megoldás létezésének kérdését intézi el, hanem lehetőséget ad ezen megoldás közelítő kiszámítására is (konstruktív bizonyítás).)

1.88. Példa *Adjunk közelítő megoldást az alábbi kezdetiérték problémára!*

$$y' = x^2 + y^2 \,, \qquad y(0) = 0$$

52 Megoldás: *Az integrálegyenlet:* $\qquad y = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y^2(t))\,\mathrm{d}t.$

Szukcesszív approximációval dolgozunk:

$$\varphi_n(x) = \int\limits_0^x \left(t^2 + \varphi_{n-1}^2(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

$\varphi_0(x) \equiv 0 \ (= y_0)$

$\varphi_1(x) = \int\limits_0^x (t^2 + 0^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$

$\varphi_2(x) = \int\limits_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9\cdot 7}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9\cdot 7}$

$\varphi_3(x) = \int\limits_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9\cdot 7}\right)^2)\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9\cdot 7} + \frac{2\cdot x^{11}}{3\cdot 9\cdot 7\cdot 11} + \frac{x^{15}}{9\cdot 7\cdot 15}$

($\varphi_3' \not\equiv x^2 + \varphi_3^2$. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy bár φ_3 nem elégíti ki a differenciálegyenletet, de pl. $K_{0,\frac{1}{10}}$ -ben a bal oldal és a jobb oldal eltérése már kicsi.)

1.9. Lineáris rekurzió

1.89. Definíció *Legyen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ és $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Ekkor az*

$$f(n) = F(f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k)) \qquad (n \geq k)$$

formulát (k-ad rendű) rekurziónak nevezzük.

Egy rekurzió egy $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ megoldását rekurzióval adott sorozatnak, vagy röviden rekurzív sorozatnak nevezzük.

Ha $F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ adottak, akkor lineáris rekurzióról beszélünk. Ekkor

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(n-i).$$

1.90. Tétel *Egy k-ad rendű lineáris rekurzió megoldásainak halmaza k dimenziós lineáris tér.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy lineáris tér. Ehhez be kell látni, hogy ha f és g megoldások, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$ és cf is megoldás.

Legyen $n \geq k$. Ekkor

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(n-i) + \sum_{i=1}^{k} a_i g(n-i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i (f(n-i) + g(n-i)) = \sum_{i=1}^{k} a_i (f+g)(n-i)$$

és

$$(cf)(n) = cf(n) = c \sum_{i=1}^{k} a_i f(n-i) = \sum_{i=1}^{k} c a_i f(n-i) = \sum_{i=1}^{k} a_i (cf)(n-i).$$

Mivel $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$ egyértelműen meghatározza a megoldást, a megoldástér valóban k dimenziós. □

1.91. Megjegyzés *A megoldástér egy bázisát alaprendszernek nevezzük.*

1.92. Példa (Fibonacci-sorozat) *Legyen adott $f(0)$ és $f(1)$. Definiáljuk az f sorozatot a következő (másodrendű, lineáris) rekurzióval, minden $n > 1$-re:*

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Ha például $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$, akkor a sorozat első néhány eleme: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Sejtés: keressük a rekurzió feloldását $f(n) = q^n$ alakban.

Ekkor $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$, azaz ha $q \neq 0$, akkor $q^2 = q + 1$, amit karakterisztikus egyenletnek hívunk. Ennek gyökei $q_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Megoldás tehát a q_1^n és a q_2^n sorozat. Az előző tétel szerint ezek lineáris kombinációja is megoldás lesz. Sőt, mivel $q_1 \neq q_2$, ezért minden megoldás ezek lineáris kombinációja lesz.

1.93. Lemma *Az általános megoldás*

$$f(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n,$$

így az összes megoldások halmaza:

$$\{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : f(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n\}.$$

1.94. Példa (Fibonacci-sorozat) *Ha például $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$, akkor*

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 &= 1 \end{aligned}$$

miatt

$$c_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \textit{míg} \quad c_2 = \frac{1}{q_2 - q_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

és így a sorozat:

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \sqrt{5}\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{5 \cdot 2^n}.$$

1.95. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2)$$

1. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;
2. $f(0) = 1$, $f(1) = 1$;

kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

53 Megoldás: *A karakterisztikus egyenlet:*

$$q^n = 3q^{n-1} - 2q^{n-2}$$

nullától különböző megoldásai a

$$q^2 - 3q + 2 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei, nevezetesen $q_1 = 1$ és $q_2 = 2$. Egy alaprendszer $f_1(n) = q_1^n = 1$ és $f_2(n) = q_2^n = 2^n$, az általános megoldás

$$f(n) = c_1 + c_2 2^n.$$

1. $0 = f(0) = c_1 + c_2 2^0 = c_1 + c_2$ *és* $1 = f(1) = c_1 + c_2 2^1 = c_1 + 2c_2$ *egyenletrendszer megoldása* $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, *így a megoldás* $f(n) = -1 + 2^n$.
2. $1 = f(0) = c_1 + c_2 2^0 = c_1 + c_2$ *és* $1 = f(1) = c_1 + c_2 2^1 = c_1 + 2c_2$ *egyenletrendszer megoldása* $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, *így a megoldás* $f(n) = 1$.

1.96. Példa

$$f(n) = \frac{9}{2} f(n-1) - 2f(n-2)$$

1. *Határozzuk meg a rekurzió általános megoldását!*
2. *Határozzuk meg az $f(0) = 0$, $f(1) = 7$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!*
3. *Van-e $O(n)$ nagyságrendű megoldás?*

54 Megoldás: *1. A karakterisztikus egyenlet:*

$$q^n = \frac{9}{2}q^{n-1} - 2q^{n-2}$$

nullától különböző megoldásai a

$$q^2 - \frac{9}{2}q + 2 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei, nevezetesen $q_1 = 4$ *és* $q_2 = \frac{1}{2}$. *Egy alaprendszer* $f_1(n) = q_1^n = 4^n$ *és* $f_2(n) = q_2^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, *az általános megoldás*

$$f(n) = c_1 4^n + \frac{c_2}{2^n}.$$

2. $0 = f(0) = c_1 4^0 + \frac{c_2}{2^0} = c_1 + c_2$ *és* $7 = f(1) = c_1 4^1 + \frac{c_2}{2^1} = 4c_1 + \frac{1}{2}2c_2$ *egyenletrendszer megoldása* $c_1 = 2$, $c_2 = -2$, *így a megoldás*

$$f(n) = 2 \cdot 4^n - \frac{2}{2^n}.$$

3. Egy megoldás pontosan akkor $O(n)$, *ha* $\exists c \in \mathbb{R} : |f(n)| \leq cn$. *Ez pontosan akkor teljesül, ha* $c_1 = 0$, *vagyis az ilyen megoldások az*

$$f(n) = \frac{c_2}{2^n}$$

alakú sorozatok.

1.97. Példa

$$f(n) = 2f(n-1) - \frac{3}{4}f(n-2)$$

1. *Határozzuk meg a rekurzió általános megoldását!*
2. *Határozzuk meg az* $f(0) = 6$, $f(1) = 7$ *kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!*
3. *Van-e* $O(1)$ *nagyságrendű megoldás?*

55 Megoldás: *1. A karakterisztikus egyenlet:*

$$q^n = 2q^{n-1} - \frac{3}{4}q^{n-2}$$

nullától különböző megoldásai a

$$q^2 - 2q + \frac{3}{4} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei, nevezetesen $q_1 = \frac{1}{2}$ *és* $q_2 = \frac{3}{2}$. *Egy alaprendszer* $f_1(n) = q_1^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *és* $f_2(n) = q_2^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, *az általános megoldás*

$$f(n) = \frac{c_1}{2^n} + c_2 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

2. $6 = f(0) = \frac{c_1}{2^0} + c_2 \left(\frac{3}{2}\right)^0 = c_1 + c_2$ *és* $7 = f(1) = \frac{c_1}{2^1} + c_2 \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{c_1}{2} + \frac{3c_2}{2}$ *egyenletrendszer megoldása* $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, *így a megoldás*

$$f(n) = \frac{2}{2^n} + 4 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

3. *Egy megoldás pontosan akkor* $O(1)$, *ha korlátos. Ez pontosan akkor teljesül, ha* $c_2 = 0$, *vagyis az ilyen megoldások az*

$$f(n) = \frac{c_1}{2^n}$$

alakú sorozatok.

1.98. Megjegyzés *Általában, az*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k) \qquad (n \geq k)$$

k-ad rendű lineáris rekurzió alaprendszerét a $q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \cdots + a_k$ *karakterisztikus egyenlet segítségével határozzuk meg.*

Nevezetesen, ha q egy m-szeres valós gyöke a $q^k - \sum_{i=1}^{k} a_i q^{k-i}$ *karakterisztikus polinomnak, akkor az alaprendszer hozzátartozó m eleme:* $q^n, nq^n, \ldots, n^{m-1}q^n$.

Ha pedig $\alpha \pm \beta j$ *egy m-szeres nem valós gyökpár* ($\beta \neq 0$), *akkor az alaprendszer hozzátartozó $2m$ eleme:* $n^p((\alpha + \beta j)^n + (\alpha - \beta j)^n)$ *és* $n^p j((\alpha + \beta j)^n - (\alpha - \beta j)^n)$, *ahol p lehetséges értékei* $0, 1, \ldots, m-1$. *Az 1.100. Feladatban látni fogjuk, hogy ezek valós számsorozatok, ha a kezdetiértékek, és a rekurzió együtthatói valósak.*

1.99. Példa *Adjuk meg $f(1000)$-et, ha tudjuk, hogy* $f(0) = 3$, $f(1) = -4$, $f(2) = 9$ *és ha* $n \geq 3$, *akkor*

$$f(n) = -f(n-1) + f(n-2) + f(n-3).$$

56 Megoldás: *A karakterisztikus polinom*

$$q^3 + q^2 - q - 1 = \left(q^2 - 1\right)(q + 1)$$

gyökei $q_1 = 1$ *és* $q_{2,3} = -1$. *Egy alaprendszer* $f_1(n) = 1$, $f_2(n) = (-1)^n$ *és* $f_3(n) = (-1)^n n$, *az általános megoldás*

$$f(n) = c_1 + c_2(-1)^n + c_3(-1)^n n.$$

A $3 = f(0) = c_1+c_2$, $-4 = f(1) = c_1-c_2-c_3$ *és* $9 = f(2) = c_1+c_2+2c_3$ *egyenletrendszer megoldása* $c_i = i$, *így a sorozat*

$$f(n) = 1 + 2(-1)^n + 3(-1)^n n,$$

azaz

$$f(1000) = 1 + 2(-1)^{1000} + 3(-1)^{1000}1000 = 1 + 2 + 3000 = 3003.$$

1.100. Példa *Adjuk meg* $f(1000)$*-et, ha tudjuk, hogy* $f(0) = 5$, $f(1) = -7$, $f(2) = -3$ *és ha* $n \geq 3$, *akkor*

$$f(n) = -f(n-1) - f(n-2) - f(n-3).$$

57 Megoldás: *A karakterisztikus polinom*

$$q^3 + q^2 + q + 1 = \left(q^2 + 1\right)(q + 1)$$

gyökei $q_1 = -1$ *és* $q_{2,3} = \pm j$. *Egy alaprendszer* $f_1(n) = (-1)^n$,

$$f_2(n) = j^n + (-j)^n = \begin{cases} 2(-1)^{n/2}, & \textit{ha } n \textit{ páros} \\ 0, & \textit{ha } n \textit{ páratlan,} \end{cases}$$

és

$$f_3(n) = j(j^n - (-j)^n) = \begin{cases} 2(-1)^{(n+1)/2}, & \textit{ha } n \textit{ páratlan} \\ 0, & \textit{ha } n \textit{ páros,} \end{cases}$$

az általános megoldás

$$\begin{aligned} f(n) &= c_1(-1)^n + c_2(j^n + (-j)^n) + c_3 j(j^n - (-j)^n) = \\ &= \begin{cases} c_1 + c_2 2(-1)^{n/2}, & \textit{ha } n \textit{ páros} \\ -c_1 + c_3 2(-1)^{(n+1)/2}, & \textit{ha } n \textit{ páratlan.} \end{cases} \end{aligned}$$

A $5 = f(0) = c_1+2c_2$, $-7 = f(1) = -c_1-2c_3$ *és* $-3 = f(2) = c_1-2c_2$ *egyenletrendszer megoldása* $c_i = i$, *így a sorozat*

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^n + 2(j^n + (-j)^n) + 3j(j^n - (-j)^n) = \\ &= \begin{cases} 1 + 4(-1)^{n/2}, & \textit{ha } n \textit{ páros} \\ -1 + 6(-1)^{(n+1)/2}, & \textit{ha } n \textit{ páratlan,} \end{cases} \end{aligned}$$

azaz

$$f(1000) = 1 + 4(-1)^{500} = 5.$$

2. fejezet

Függvénysorok

2.1. Bevezetés

Függvénysorozaton olyan sorozatot értünk, amelynek minden eleme függvény, *függvénysoron* pedig olyan sort, melynek tagjai függvények. Ahogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor összegét az $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ részletösszeg sorozat határértékeként definiáljuk, úgy egy *függvénysor* összegét is a *részletösszeg függvénysorozat* határértékeként értelmezzük. Ily módon függvénysorok és függvénysorozatok kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak. Egy függvénysor esetén is vizsgálhatjuk a részletösszegek sorozatát, és fordítva, egy függvénysorozat esetén áttérhetünk az egymást követő elemek különbségéből képzett sorra. Ez a tény indokolja a függvénysorok és a függvénysorozatok általános elmélete között megfigyelhető párhuzamokat.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából talán a függvénysorok fontosabbak, ugyanakkor az általános elmélet kiépítését egyszerűbb a függvénysorozatokkal kezdeni.

Ebben a jegyzetben szinte kizárólag függvénysorok vizsgálatára szorítkozunk, csupán – a teljesség kedvéért – egyetlen fejezetet szentelünk a függvénysorozatoknak, melyben bizonyítások, példák nélkül, tömören összefoglaljuk a függvénysorozatokra vonatkozó legfontosabb, általános tételeket. Ez a fejezet kihagyható, az analóg tételek részletes tárgyalása megtalálható a függvénysorok fejezetben.

2.2. Függvénysorozatok

2.1. Definíció (Függvénysorozat) *Legyen adott minden $n \in \mathbb{N}$ esetén egy $f_n : D_n \to \mathbb{R}$ valós függvény úgy, hogy $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$. Ekkor az*

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = f_1, f_2, f_3 \dots$$

függvényhalmazt a D halmazon értelmezett függvénysorozatnak *nevezzük. Röviden jelölés: $f_n(x)$, vagy f_n.*

Az $f_n(x)$ függvénysorozat elemei tekinthetők kétváltozós függvényeknek is, az egyik, $n \in \mathbb{N}$ „diszkrét” változó, míg a másik, $x \in \mathbb{R}$ „folytonos”.

2.2. Definíció (Konvergenciatartomány, határfüggvény) *A $D \subset \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $H \subset D$* konvergenciatartománya

$$H = \{x \in D \mid f_n(x) \textit{ konvergens}\},$$

és határfüggvénye

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad\qquad x \in H.$$

2.3. Definíció (Egyenletes konvergencia) *Az f_n függvénysorozat a H' halmazon ($H' \subset H \subset D$)* egyenletesen konvergál *az f függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy*

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad\qquad \forall x \in H' \textit{ és } \forall n > N(\varepsilon) \textit{ esetén.}$$

(Tehát $N(\varepsilon)$ független *$x \in H'$-tól.)*

2.4. Megjegyzés *Az egyenletes konvergencia „globális” tulajdonság, függ a $H' \subset H$ halmaz megválasztásától.*

A *szuprémum-norma* bevezetésével az egyenletes konvergenciát kicsit átfogalmazhatjuk.

2.5. Definíció (Szuprémum norma) *Az f függvény $H \subset D_f$ halmazon vett* szuprémum-normája*:*

$$\|f\|_H := \sup_{x\in H} \{|f(x)|\}.$$

2.6. Lemma *Az f_n függvénysorozat a H' halmazon ($H' \subset H \subset D$) pontosan akkor konvergál egyenletesen az f függvényhez, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{H'} = 0$$

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik az egyenletes konvergencia és a szuprémum norma definíciójából. (2.3. és 2.5. definíciók.) □

2.7. Tétel (Cauchy-kritérium egyenletes konvergenciára) *Az f_n függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál a H' halmazon egyenletesen, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in H' \textit{ és } \forall n, m > N(\varepsilon) \textit{ esetén,}$$

vagyis

$$\|f_n - f_m\|_{H'} < \varepsilon \qquad\qquad \forall n, m > N(\varepsilon).$$

A tétel „belső” konvergenciakritérium, ugyanis nem hivatkozik az $f(x) = \lim_n f_n(x)$ határfüggvényre.

Alapötlet. A bizonyításhoz a numerikus sorozatokra vonatkozó hasonló kritériumot kell felhasználni. A függvénysorokra vonatkozó analóg 2.22. tételt bebizonyítjuk. □

Egyenletesen konvergens függvénysorozat tulajdonságai

A következő három tétel azt mutatja, hogy egyenletesen konvergens $f_n(x)$ függvénysorozat esetén az n-ben vett határérték „felcserélhető” az x-ben vett határértékkel, az integrálással illetve a deriválással.

Folytonos függvények sorozatának határfüggvénye általában nem folytonos. (Lásd 2.34. példa.) Egyenletes konvergencia esetén azonban a határfüggvény is folytonos.

2.8. Tétel (Elégséges feltétel a határfüggvény folytonosságára) *Ha az f_n függvénysorozat minden eleme folytonos a H konvergenciatartomány egy $I \subset H$ intervallumán, és f_n egyenletesen konvergens I-n, akkor az $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határfüggvény is folytonos az I intervallumon.*

Alapötlet. A bizonyítás a függvénysorokra vonatkozó analóg 2.27. tételéhez hasonló. □

Függvénysorozat integráljának határértéke általában nem egyezik meg a határfüggvény integráljával (lásd 2.35. példa), de egyenletes konvergencia esetén az állítás igaz.

2.9. Tétel (Elégséges feltétel a határfüggvény integráljára) *Ha az f_n függvénysorozat elemei integrálhatóak az $[a, b]$ intervallumon, és $[a, b]$-n egyenletesen konvergálnak az f határfüggvényhez, akkor f is integrálható $[a, b]$-n, és*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz az x-ben vett határozott integrál „felcserélhető” az n-ben vett határértékkel.

Egyenletes konvergencia esetén a differenciálás is „felcserélhető” az n-ben vett határértékkel.

2.10. Tétel (Elégséges feltétel a határfüggvény deriváltjára) *Ha az f_n függvénysorozat elemei differenciálhatóak az I intervallumon, és az f'_n deriváltfüggvények I-n egyenletesen konvergálnak a g határfüggvényhez, továbbá f_n konvergens I-n, akkor $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ is differenciálható I-n, és*

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x) \qquad \forall x \in I \text{ esetén},$$

tehát az I intervallumon az x-ben vett differenciálás „felcserélhető” az n-ben vett határértékkel.

2.2.1. Gyakorló feladatok

Az alábbiakban jelölje $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ az $f_n(x)$ függvénysorozat határfüggvényét, és legyen $H = D_f$ a konvergenciatartomány.

1. Határozza meg a következő függvénysorozatok határfüggvényét és konvergenciatartományát!

$$(a) \quad f_n(x) = \frac{1}{(2x)^n} \qquad\qquad (b) \quad f_n(x) = \sin^n 2x$$

$$(c) \quad f_n(x) = \frac{(x-1)^n}{9^n} \qquad\qquad (d) \quad f_n(x) = x^2 + 2\frac{x}{n}$$

2. $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{n}$

   (a) Határozza meg a fenti függvénysorozat határfüggvényét és konvergenciatartományát!

   (b) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a $[-2,-1]$ intervallumon?

3. $f_n(x) = \dfrac{x}{2+x^n}$

   Egyenletesen konvergens-e a $(-1,1]$ ill. $(-1,1)$ intervallumon?

4. $f_n(x) = (\arcsin x)^n$

   (a) Határozza meg a fenti függvénysorozat határfüggvényét és konvergenciatartományát!

   (b) Egyenletesen konvergens-e a konvergenciatartományban?

5. $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{n^2x^2+1}$

   (a) Határozza meg a fenti függvénysorozat határfüggvényét és konvergenciatartományát!

   (b) Egyenletesen konvergens-e $[0,1]$-en illetve $[1,2]$-n?

6. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{3+2x^{2n}}$

   (a) Határozza meg a fenti függvénysorozat határfüggvényét és konvergenciatartományát!

   (b) Egyenletesen konvergál-e f_n a konvergenciatartományon?

(c) Mely x_0 pontban teljesül a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ numerikus sorra a konvergencia szükséges feltétele? Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenciatartományát!

7. $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$

   (a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) =?$

   (b) $\| f_n - f \|_{[0,1]} = ?$ Egyenletes-e a konvergencia $[0,1]$-en?

8. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + 4x^2}$

   (a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) =?$

   (b) $\| f_n - f \| = ?$ Egyenletes-e a konvergencia?

9. Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\mathrm{e}^{2nx}}\,\mathrm{d}x =?$$

2.3. Függvénysorok általános tulajdonságai

2.11. Definíció (Függvénysor) *Legyen adott minden $k \in \mathbb{N}$ esetén egy $f_k : D \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ a függvényeknek a közös értelmezési tartománya. Ekkor ezen függvényekből, mint tagokból képzett*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_k + \cdots$$

végtelen összeget függvénysornak *nevezzük.*

2.12. Definíció (Részletösszeg) *A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor n-edik* részletösszege*:*

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad (x \in D).$$

2.13. Definíció (Konvergenciatartomány, összegfüggvény) *A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor* konvergenciatartománya *a*

$$H = \{x \in D \mid s_n(x) \textit{ konvergens numerikus sorozat}\} \subset D$$

halmaz, tehát azon x pontok halmaza ahol az $s_n(x)$ részletösszeg-sorozat konvergens. Ezen a halmazon az

$$s(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad (x \in H)$$

módon értelmezzük a függvénysor s összegfüggvényét.

2.14. Példa *Határozzuk meg a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k$$

függvénysor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

58 Megoldás: *Adott x esetén egy $q = \frac{x}{3}$ hányadosú geometriai sorról van szó, mely pontosan akkor konvergens, ha $q = \frac{x}{3} \in (-1, 1)$. Tehát a H konvergenciatartomány és az $s(x)$ összegfüggvény:*

$$H = (-3, 3), \qquad s(x) = \frac{x/3}{1 - x/3} = \frac{x}{3 - x}.$$

2.15. Definíció (Maradékösszeg) *A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor n*-edik maradékösszegét *az*

$$r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in H)$$

formula definiálja a függvénysor H konvergenciatartományán.

2.16. Lemma *Egy függvénysor pontosan azokban az x pontokban konvergens, amelyekben a maradékösszegek sorozata zérushoz tart, azaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz az

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

egyenlőségen hajtsuk végre az $n \to \infty$ határátmenetet. □

Rögzített x esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor tagjai egy numerikus sort adnak, így a függvénysorra gondolhatunk úgy is, mint végtelen sok numerikus sor „összességére”, amelyeket az x „ponttal paraméterezünk”. Ezért ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x)\ , \qquad x \in H,$$

akkor a nyomaték kedvéért azt is mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor a H halmazon *pontonként konvergál* s-hez.

2.17. Definíció *Azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor a $H \subset D$ halmazon* pontonként konvergál *(vagy egyszerűen csak* konvergál*) az $s : H \to \mathbb{R}$ összegfüggvényhez, ha $\forall x_0 \in H$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = s(x_0),$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon, x_0)$, hogy

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon, x_0) \text{ és } x_0 \in H.$$

Nyilvánvaló, hogy különböző $x_0 \in H$ esetén más-más $\{s_n(x_0)\}$ numerikus sorozathoz juthatunk, így $N(\varepsilon, x_0)$ értéke függhet x_0-tól is.

2.3.1. Egyenletes konvergencia

2.18. Definíció *A $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor a $H \subset D$ halmazon* egyenletesen konvergál *az s függvényhez, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy*

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon\ , \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon) \text{ és } x \in H.$$

Az $N(\varepsilon)$ küszöbszám független *az $x \in H$ ponttól.*

Tehát az $N(\varepsilon)$ küszöbszám univerzálisan „jó” a H halmaz minden pontjában.

2.19. Példa *A 2.14. feladatban láttuk, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{x}{3-x}, \qquad \text{ha } x \in H = (-3, 3).$$

a) Igazoljuk, hogy a függvénysor a $H^* = (-2, 2)$ halmazon egyenletesen konvergens*!*

b) Igazoljuk, hogy a függvénysor a $H = (-3, 3)$ halmazon nem egyenletesen konvergens*!*

59 Megoldás: *a) Tetszőleges* $x \in (-2, 2)$ *esetén:*

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \right| = \left| \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{3}} \right| = \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1 - \frac{x}{3}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1 - \frac{|x|}{3}\right|} \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Itt az $N(\varepsilon)$ *értékét a* $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ *sorozathoz választhattuk. Tehát a* $H^* = (-2, 2)$ *halmaz* $\forall x_0$ *pontjában ugyanaz az* $N(\varepsilon)$ *küszöbszám használható, vagyis a* H^* *halmazon a konvergencia egyenletes.*

Nyilván a $H^{**} = [-2, 2]$ *halmazon is egyenletes a konvergencia. Sőt, hasonló gondolatmenettel belátható, hogy* $0 < \delta < 3$ *esetén a* $[-3 + \delta, 3 - \delta]$ *halmazon is egyenletes a konvergencia.*

b) Indirekt bizonyítunk. Ha

$$|s(x) - s_n(x)| = \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1 - \frac{x}{3}\right|} < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \text{ és } \forall x \in (-3, 3)$$

teljesülne, akkor

$$\lim_{x \to 3} \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{n+1}}{\left|1 - \frac{x}{3}\right|} \leq \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

is fennállna, amiből $\infty \leq \varepsilon$ *adódna, ami ellentmondás.*

2.20. Tétel *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *függvénysor egyenletesen konvergens* H*-n, akkor pontonként is konvergens.*

Bizonyítás. Ez a definíció közvetlen következménye, hiszen $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, x_0)$ választható $\forall\, x_0 \in H$ esetén. □

2.21. Definíció (Cauchy-kritérium) *A* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *függvénysor a* H *halmazon eleget tesz a* Cauchy-kritériumnak, *ha* $\forall \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists N(\varepsilon)$, x*-től független küszöbszám, hogy* $\forall x \in H$ *esetén*

$$|\, f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)\, | < \varepsilon\,, \qquad \forall\, m > n > N(\varepsilon)\,.$$

2.22. Tétel *Egy függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens egy halmazon, ha itt eleget tesz a Cauchy-kritériumnak, azaz*

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ egyenletesen} & \Longleftrightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ eleget tesz a} \\ \text{konvergens } H\text{-n} & & \text{Cauchy-kritériumnak } H\text{-n} \end{array}$$

Bizonyítás. ($\Rightarrow$)
Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\frac{\varepsilon}{2}$-höz létezik olyan $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy $\forall x \in H$ esetén

$$|s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha } m > n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} |s_m(x) - s_n(x)| &= |s_m(x) - s(x) + s(x) - s_n(x)| \le \\ &\le |s_m(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $m > n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ és $x \in H$, vagyis teljesül a Cauchy-kritérium.
($\Leftarrow$)
A tétel másik részét nem bizonyítjuk. (A numerikus sorokra vonatkozó megfelelő tétel bizonyításához hasonlóan bizonyítható, felhasználva a H halmazon való egyenletes konvergencia fogalmát.) $\square$

Megjegyezzük, hogy most is beszélhetünk abszolút konvergenciáról:

2.23. Definíció *A $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor* abszolút konvergens *x_0-ban, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|$ sor konvergens.*

A függvénysor abszolút konvergenciájából következik a függvénysor konvergenciája. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|$ sor konvergens az $x_0 \in H$ pontban, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ sor is konvergens. Ez az állítás a numerikus sorokra tanult tétel megismétlése.

A következő tétel elégséges feltételt fogalmaz meg egy függvénysor egyenletes konvergenciájára.

2.24. Tétel (Weierstrass-kritérium) *Ha létezik olyan $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $|f_k(x)| \le b_k$ minden $x \in H$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ numerikus sor konvergens, akkor*

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ \text{ abszolút konvergens } \forall\, x \in H\,,$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ \text{ egyenletesen konvergens } H\text{-n.}$$

Bizonyítás.
(a) A $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergenciája a majoráns kritériumból következik a H halmaz minden pontjában.

(*b*) Megmutatjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ eleget tesz a Cauchy-kritériumnak a H halmazon. Ha $x \in H$ és $m > n > N(\varepsilon)$, akkor

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \le |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \le b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon,$$

mert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ teljesíti a Cauchy-kritériumot, hiszen $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens. Az $N(\varepsilon)$ küszöbindex független x-től, mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ numerikus sorhoz választottuk. Mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor teljesíti a Cauchy-kritériumot H-n, ezért egyenletesen konvergens H-n. $\square$

2.25. Példa *A* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3 x + \pi)}{n^2+1}$ *függvénysor abszolút konvergens* $\forall x \in \mathbb{R}$ *pontban, és egyenletesen konvergens a* $(-\infty, \infty)$ *intervallumon, mert* $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = b_n \qquad \textit{és} \qquad \sum^{\infty} b_n = \sum^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \ \textit{(konvergens)}.$$

2.26. Példa *A* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n(|x|+1)}$ *függvénysor abszolút konvergens* $\forall x \in \mathbb{R}$ *pontban, és egyenletesen konvergens a* $(-\infty, \infty)$ *intervallumon, mert* $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{n}{\left(\mathrm{e}^{|x|+1}\right)^n} < \frac{n}{\mathrm{e}^n} = b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \ \textit{konvergens, mert} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \ \textit{egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\textit{-en.}$$

2.3.2. Egyenletesen konvergens függvénysorok tulajdonságai

Tudjuk, hogy véges sok folytonos függvény összege is folytonos, és tagonként integrálhatjuk illetve tagonként deriválhatjuk véges sok függvény összegét. Végtelen összeg (függvénysor) esetére ezek az állítások nem feltétlenül teljesülnek. Azonban a végtelen soroknál egyenletes konvergenciát megkövetelve elégséges feltételeket nyerünk arra, hogy a függvénysor összege folytonos, tagonként integrálható6, illetve az összege deriválható legyen.

2.27. Tétel (Elégséges feltétel az összeg folytonosságára) *Ha az*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \qquad\qquad (x \in I \, \textit{intervallum})$$

függvénysor tagfüggvényei folytonosak az I *intervallumon* ($f_k \in C_I^0$) *és a sor egyenletesen konvergens* I*-n, akkor az* $s(x)$ *összegfüggvény is folytonos* I*-n.*

(A tételben I lehet nyílt, zárt, vagy félig nyílt, félig zárt, akár nem korlátos intervallum is.)

2.28. Megjegyzés *A tétel azt jelenti, hogy egyenletes konvergencia esetén az „x-ben vett” limesz és a „k-ra vett” végtelen összegzés felcserélhető:*

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = s(x_0).$$

Bizonyítás. Legyen $x, x_0 \in I$, és $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} |s(x) - s(x_0)| &= |s(x) - s_n(x) + s_n(x) - s_n(x_0) + s_n(x_0) - s(x_0)| \le \\ &\le \underbrace{|s(x) - s_n(x)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|s_n(x) - s_n(x_0)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|s_n(x_0) - s(x_0)|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$, ahol a $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$-t a következőképpen határozzuk meg.

A függvénysor egyenletes konvergenciáját kihasználva először választunk egy elég nagy n indexet, melyre az első és a harmadik tag becslése teljesül. Ezután az s_n részletösszeg x_0 pontbeli folytonosságát kihasználva választjuk meg δ-t úgy, hogy a második tag becslése is fennálljon. □

2.29. Következmény *Ha az összeadandó függvények folytonosak, de az $s(x)$ összegfüggvény nem folytonos az I intervallumon, akkor a konvergencia nem egyenletes I-n.*

2.30. Példa *Igazoljuk, hogy a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1})$$

függvénysor nem egyenletesen konvergens a H konvergenciatartományán.

60 Megoldás: *Teleszkopikus összegről van szó, így a részletösszegek és az összeg könnyen megkapható:*

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (x^k - x^{k-1}) = \\ &= x^1 - x^0 + x^2 - x^1 + x^3 - x^2 + \cdots + x^n - x^{n-1} = x^n - 1 \end{aligned}$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - 1) = \begin{cases} -1, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1, \\ \nexists, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A konvergenciatartomány $H = (-1, 1]$. A $(-1, 1]$ halmazon a konvergencia nem egyenletes, mert az összeadandó $f_k(x) = x^k - x^{k-1}$ függvények folytonosak, de az $s(x)$ összegfüggvény nem folytonos a $(-1, 1]$ halmazon.

2.31. Tétel (Egyenletesen konvergens függvénysor tagonkéti integrálhatósága) *Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens a $H = [a,b]$ halmazon, akkor*

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mivel az f_k tagfüggvények folytonosak és a konvergencia egyenletes, ezért (a 2.27. tétel miatt) az s összegfüggvény is folytonos, tehát a tételben szereplő integrálok léteznek.

2.32. Példa *Indokoljuk meg, hogy a*

$$\int_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \mathrm{d}x$$

kifejezésben az integrálás és az összegzés sorrendje felcserélhető, és végezzük el az integrálást mindkét esetben!

61 Megoldás: *A 2.19. feladatban láttuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[-2,2]$-on, ezért nyilván a $[0,2]$-on is az. (A $[-2,2]$-on alkalmas, x-től független $N(\varepsilon)$ küszöbszám alkalmas a $[0,2]$-on is.) Így alkalmazhatjuk a 2.31. tételt:*

$$I = \int_0^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^2 \left(\frac{x}{3}\right)^k \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left. \frac{x^{k+1}}{(k+1)\,3^k} \right|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)\,3^k}.$$

Másrészt

$$I = \int_0^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{3-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 \left(\frac{3-x}{3-x} - \frac{3}{3-x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -[x + 3\ln(3-x)]_0^2 = -\,(2 + 3\ln 1 - 3\ln 3) = 3\ln 3 - 2,$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)\,3^k} = 3\ln 3 - 2.$$

Tehát a 2.31. tétel segítségével meghatároztuk egy numerikus sor összegét.

2.33. Tétel (Egyenletesen konvergens függvénysor tagonkéti deriválhatósága) *Ha* $f_k \in C^1_{[a,b]}$ *(azaz* $f_k'(x)$ *létezik és folytonos* $[a,b]$*-n) és*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \qquad \textit{pontonként konvergál } [a,b]\textit{-n, valamint}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) \qquad \textit{egyenletesen konvergál } [a,b]\textit{-n,}$$

akkor s *deriválható* $[a,b]$ *-n, és* $s' = g$.

Tehát

$$s'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} s(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = g(x).$$

Bizonyítás. A tétel a tagonkénti integrálhatóságra vonatkozó (nem bizonyított) 2.31. tétel felhasználásával egyszerűen igazolható.

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k(a) + \int_{t=a}^{x} f_k'(t)\,\mathrm{d}t \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(a) + \int_{t=a}^{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(t) \right) \mathrm{d}t = s(a) + \int_{t=a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

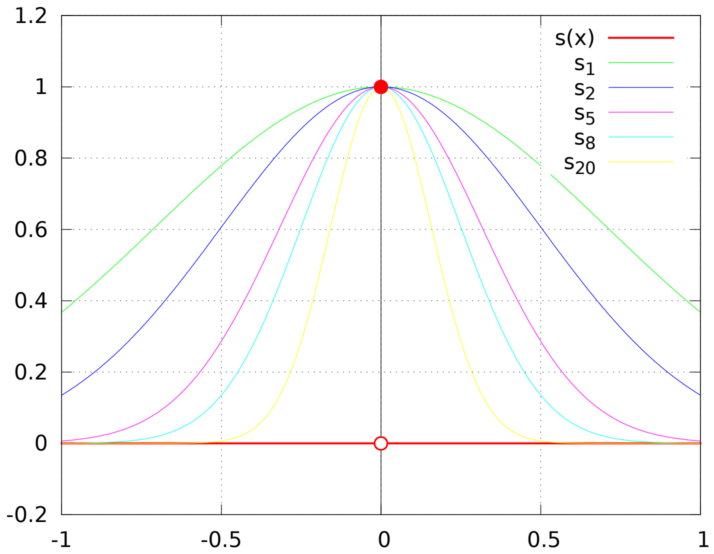
Először a Newton–Leibniz formulát alkalmaztuk az f_k' függvényekre, majd a 2.31. tétel segítségével „felcseréltük” az összegzés és az integrálás sorrendjét. A 2.27. tétel értelmében a g függvény folytonos, így az integrálfüggvény alaptulajdonságai szerint s differenciálható, és $s'(x) = g(x)$. □

A 2.27., 2.31. és a 2.33. tételekben szereplő függvénysorokról fontos feltenni, hogy a szóban forgó halmazon egyenletesen konvergensek. Ezt olyan ellenpéldákon mutatjuk be, ahol a konvergencia a megfelelő halmazon csak pontonként, de nem egyenletesen teljesül. Az egyszerűség kedvéért az $s_n(x)$ részletösszeg függvényeket adjuk meg. Ezt azért tehetjük meg, mert tetszőleges $s_n(x)$ függvénysorozathoz van olyan $\sum_k f_k$ függvénysor, amelynek éppen $s_n(x)$ az n-edik részletösszege. Legyen ugyanis

$$f_0(x) = s_0(x), \qquad f_k(x) = s_k(x) - s_{k-1}(x), \quad \text{ha } k = 1, 2, 3 \dots . \tag{2.1}$$

Így az f_k tagú függvénysor n-edik részletösszege:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \underbrace{s_0(x)}_{f_0(x)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\big(s_k(x) - s_{k-1}(x)\big)}_{f_k(x)} =$$
$$= s_0(x) + \big(s_1(x) - s_0(x)\big) + \big(s_2(x) - s_1(x)\big) + \cdots \big(s_n(x) - s_{n-1}(x)\big) = s_n(x).$$



2.1. ábra. A folytonos s_n függvények s pontonkénti határfüggvénye nem folytonos az origóban.

2.34. Példa *Legyen*

$$s_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} = \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^n, \qquad\qquad D = H = \mathbb{R} \quad \textit{(Ért. és konv. tart.)}$$

Ekkor

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{ha } x \neq 0, \\ 1, & \textit{ha } x = 0. \end{cases}$$

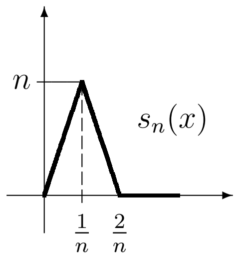
Az s függvény nem folytonos, pedig az s_n függvények folytonosak (2.1 ábra).

2.35. Példa *Legyen*

$$s_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \textit{ha } x \in [0, 1/n), \\ -n^2 x + 2n, & \textit{ha } x \in [1/n, 2/n), \\ 0, & \textit{ha } x > 2/n. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x) \; \mathrm{d}x = ? \qquad\qquad \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} s_n(x) \; \mathrm{d}x = ?$$

62 Megoldás: *Az s_n függvény grafikonja:*



A határfüggvény

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \equiv 0, \qquad\qquad x \in [0,\infty) = H,$$

mert $x > 0$ esetén $s_n(x) = 0$, ha $\frac{1}{2n} \le x$, azaz ha $n \ge \frac{2}{x}$, és $s_n(0) = 0$. (Például $x = \frac{1}{10}$-nél $s_n(x) = 0$, ha $n \ge 20$.)

Látható, hogy

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n \right) = 1 \neq$$
$$\neq I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0,$$

tehát az s_n függvénysorozat esetében a határértékképzés és az integrálás sorrendjének felcserélésekor megváltozik a kifejezés értéke.

Ugyanakkor ha a 2.1 formula szerint áttérünk a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysorra, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\ \mathrm{d}x = I_1 = 1 \neq$$
$$\neq \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\ \mathrm{d}x = I_2 = 0,$$

tehát a végtelen összegzés és az integrálás sorrendjének cseréjekor megváltozik a kifejezés értéke.

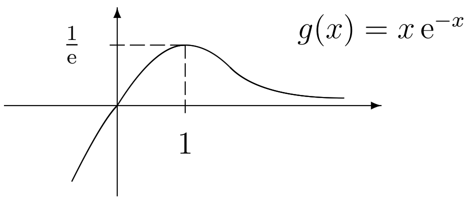
Sem az s_n függvénysorozat, sem a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor nem egyenletesen konvergens a $[0,\infty)$ intervallumon.

2.36. Példa *Igaz-e a következő egyenlőség?*

$$\int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\ \mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\ \mathrm{d}x$$

63 Megoldás: *A függvénysor általános tagja*

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^n = \left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^n = (g(x))^n \in C^0_{\mathbb{R}}, \qquad \textit{ahol} \qquad g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$



A $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ függvény grafikonja.

Az $f_n(x)$ függvények vizsgálatából megállapítható, hogy

$$|f_n(x)| \le \max_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = f_n(1) = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = b_n.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ numerikus sor konvergens ($0 < q = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ hányadosú geometriai sor). Tehát a Weierstrass kritérium (2.24. tétel) miatt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens a $[0,2]$ intervallumon, így a 2.31. tétel értelmében az integrálás és az összegzés felcserélhető, tehát az egyenlőség fennáll.

2.37. Példa *Differenciálható-e a*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{n^2}$$

sor összegfüggvénye, és igaz-e, hogy $s(x)$ deriváltját a sor tagonkénti deriválásával kapjuk?

64 Megoldás: *Mivel*

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right|}{n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} \qquad \textit{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \textit{konvergens,}$$

ezért a Weierstrass-kritérium (2.24. tétel) értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

Vizsgáljuk meg, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ egyenletesen konvergens-e! Nyilvánvalóan $f_n \in C^1_{\mathbb{R}}$, és

$$f_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg}\frac{x}{n} = \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n},$$

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{n^3}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}} \le \frac{1}{n^3} \qquad \textit{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \qquad \textit{konvergens,}$$

ezért a Weierstrass kritérium értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *is egyenletesen konvergens* $\mathbb{R}$*-en.*

Így a 2.33. tétel feltételei teljesülnek, tehát az összegfüggvény deriválható és deriváltját a végtelen sor tagonkénti deriválásával kapjuk.

2.38. Példa *Határozzuk meg a következő határértéket!*

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n^3 x^2+\frac{\pi}{2}\right)}{5^n+n^2x^4} = ?$$

65 Megoldás: *Mivel a sor összegfüggvényét nem tudjuk felírni, csak akkor van reményünk a feladat megoldására, ha a limeszképzés és a szummázás felcserélhető. Ez a folytonosságról szóló 2.27. tétel alkalmazását igényli.*

Az $f_n(x)$ *tagfüggvények folytonosak, és tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\sin\left(n^3 x^2+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{5^n+n^2x^4} \le \frac{1}{5^n} = b_n.$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ *geometriai sor konvergens (*$0 \le q = \frac{1}{5} < 1$*), tehát a Weierstrass-kritérium (2.24. tétel) értelmében a függvénysor egyenletesen konvergens* $\mathbb{R}$*-en.*

Így a 2.27. tétel feltételei teljesülnek, tehát alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n^3 x^2+\dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n+n^2x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(n^3 x^2+\dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n+n^2x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

2.3.3. Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{nx}}{n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+x^4}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^4}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}$

2. Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorok az adott I intervallumon?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+2x^2}, \qquad I=(-\infty,\infty)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2(x+3)}{n^2+1+\cos nx}, \qquad I=(-\infty,\infty)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n, \qquad I=[0,1]$ illetve $I=(0,2)$

3. Szabad-e tagonként deriválni tetszőleges x-re a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x+3)}{n^3}$ függvénysort?

2.4. Hatványsorok

2.39. Definíció *A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

függvénysort x_0 középpontú (bázispontú) hatványsornak *nevezzük. Az* $a_k \in \mathbb{R}$ *konstansok a hatványsor* együtthatói.

2.40. Megjegyzés *Sokszor elég a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ *hatványsorral foglalkozni, mert az* x_0 *bázispontú hatványsor* $u := x - x_0$ *helyettesítéssel* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$ *alakú lesz.*

2.41. Tétel *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *sor* x_2*-ben konvergens, akkor* $|x_1| < |x_2|$ *esetén* x_1*-ben abszolút konvergens és így konvergens is.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a hatványsor x_1-ben abszolút konvergens és így konvergens is. Mivel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ konvergens, ezért $\lim\limits_{k\to\infty} a_k x_2^k = 0$. (Teljesül a konvergencia szükséges feltétele.) Konvergens sorozat korlátos, tehát $\exists\, K$, melyre $\forall\, k$ esetén $\left|a_k x_2^k\right| \le K$. Ekkor

$$\left|a_k x_1^k\right| = |a_k|\; |x_2|^k \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^k \le K q^k\,, \qquad\qquad |q| = \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < 1,$$

és $\sum_{k=0}^{\infty} Kq^k = \frac{K}{1-q}$ konvergens majoráns, így

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_1^k| \quad \text{konvergens,} \quad \text{tehát} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{konvergens.}$$

□

2.42. Tétel *Ha a* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *hatványsor az* $x = x_2$ *helyen divergens, akkor* $|x_1| > |x_2|$ *esetén* x_1*-ben is divergens.*

Bizonyítás. Indirekt.

Feltesszük, hogy x_1-ben konvergens. De ekkor $\forall\, |x_2| < |x_1|$ esetén is konvergens lenne az előző tétel miatt, ami ellentmondás. □

2.43. Következmény *E két tételből már látható, hogy a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *hatványsor* H *konvergenciatartománya mindig* 0 *középpontú,* R *sugarú nyílt intervallumból és esetleg az* R *vagy* $-R$ *végpontokból áll, ahol* R *az úgynevezett konvergenciasugár (2.45. definíció).*

Mivel 0-ban a fenti hatványsor mindig abszolút konvergens, ezért H nem üres halmaz, $R > 0$ vagy $R = 0$ vagy $R = \infty$ lehetséges. Az egyes példáknál látjuk majd, hogy ezek az esetek valóban előfordulnak. A hatványsor a $(-R, R)$ nyílt intervallumon abszolút konvergens. A hatványsor a $(-\infty, R)$ és az (R, ∞) intervallumokon nem abszolút konvergens de itt konvergencia sem állhat fenn a 2.42. tétel miatt, itt tehát divergens a hatványsor. Megjegyezzük, hogy $0 < R < \infty$ esetén az $x = R$ és az $x = -R$ pontokban mind a konvergencia, mind pedig a divergencia fennállhat. Ezért az $x = \pm R$ pontokban minden egyes hatványsor esetében külön kell vizsgálódnunk.

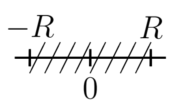
Tehát (origó középpontú hatványsor esetén) a lehetséges esetek:

1. $R = 0$, $H = \{0\}$. Például:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k\,, \qquad \text{mert} \quad \lim_{k\to\infty} k!\, x^k \neq 0\,, \quad \text{ha} \quad x \neq 0\,.$$

2. $0 < R < \infty$, $H = [(-R, R)]$. Ekkor a sor

$$\begin{array}{ll} |x| < R & \text{esetén konvergens,} \\ |x| > R & \text{esetén divergens.} \end{array}$$

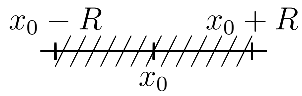


A végpontokban, $|x| = R$ esetén külön vizsgálat szükséges.

3. $R = \infty$, $H = \mathbb{R}$.

Áttérve az x_0 középpontú hatványsorra, az alábbi állítást kapjuk.

2.44. Tétel *A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya x_0 középpontú intervallum (nyílt, vagy zárt, vagy csak egyik oldalról zárt). Az intervallum belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens.*



Vagyis a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor $|x-x_0| < R$ esetén abszolút konvergens, $|x-x_0| > R$ esetén divergens, ahol R a sor konvergencia sugara. A végpontokban a konvergenciát külön kell vizsgálni. Természetesen most is lehet $R=0$, illetve $R=\infty$.

2.45. Definíció (Konvergenciasugár) *A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\underbrace{x-x_0}_{u})^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$$

hatványsor konvergenciasugara*:*

$$R = \sup\left\{ |x-x_0| = |u| \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{a hatványsor az } x \textit{ illetve } u \\ \textit{pontban abszolút konvergens} \end{array} \right\}.$$

2.46. Példa *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

hatványsor konvergenciatartományát!

66 Megoldás: $x=1$*-ben:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \ \textit{divergens} \qquad \underset{2.42.\ \textit{miatt}}{\Longrightarrow} \qquad |x| > 1\textit{-ben divergens}$$

$x=-1$*-ben:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ \textit{konvergens} \qquad \underset{2.41.\ \textit{miatt}}{\Longrightarrow} \qquad |x| < 1\textit{-ben konvergens}$$

Tehát a konvergenciasugár $R=1$ és a konvergenciatartomány $H=[-1,1)$.

2.47. Megjegyzés *A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciasugara már nem vizsgálható az előbbi módszerrel, mert $x=\pm 1$-ben a sor konvergens, ezért $R>1$ is igaz lehetne.*

A következő alfejezetben a konvergenciasugár meghatározásával foglalkozunk.

2.4.1. A konvergenciasugár meghatározása

A hatványsor konvergenciasugarának meghatározására két lehetőségünk is lesz. Ezekhez felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyök- ill. hányados kritériumot. Elevenítsük fel ezeket!

2.48. Tétel (Gyökkritérium numerikus sorra) *A $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ pozitív tagú ($c_n > 0$) numerikus sor esetén legyen $A = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{c_n}$. Ekkor a sor*

- *konvergens, ha $A < 1$,*
- *divergens, ha $A > 1$.*

(Ha $A = 1$, akkor külön vizsgálat szükséges.)

2.49. Tétel (Hányados kritérium numerikus sorra) *Abban az esetben, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ pozitív tagú ($c_n > 0$) numerikus sor esetén létezik $A = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$, a sor*

- *konvergens, ha $A < 1$,*
- *divergens, ha $A > 1$.*

(Ha $A = 1$, akkor külön vizsgálat szükséges.)

Ezeket a kritériumokat függvénysor konvergenciájának eldöntésére is felhasználhatjuk. Nézzünk egy példát!

2.50. Példa *Tekintsük a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x^2)^n}{4^{nx} n^n} \tag{2.2}$$

függvénysort! (Ez nem hatványsor!) Rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum c_n = \sum f_n(x)$ pozitív tagú numerikus sorra alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{c_n} = \frac{1+x^2}{4^x n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.$$

Tehát a 2.2 függvénysor $\forall$ x-re konvergens.

Visszatérve a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorokra, két tétel is kimondható.

2.51. Tétel (Gyökkritérium hatványsorra) *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:*

$$R = \frac{1}{\alpha}, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Pontosabban:

1.	$R = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}\,,$	*ha* $0 < \alpha < \infty$,
2.	$R = \infty,$	*ha* $\alpha = 0$,
3.	$R = 0,$	*ha* $\alpha = \infty$.

Bizonyítás. Az $x = 0$-ban a sor abszolút konvergens, ezért csak $x \neq 0$-ban vizsgálódunk. Az abszolút konvergenciát vizsgáljuk, tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\, x^n \rvert$ sorra alkalmazzuk a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó 2.48. gyökkritériumot:

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert\, \lvert x \rvert^n} \;=\; \lvert x \rvert\ \underbrace{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}_{:=\alpha} \;=\; \lvert x \rvert\ \alpha \;=\; q.$$

1. Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0 < 1$, tehát a sor minden x-re abszolút konvergens, $R = \infty$.
2. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $\lvert x \rvert\ \alpha = q < 1$, azaz $\lvert x \rvert < 1/\alpha$ esetén a sor abszolút konvergens, és $\lvert x \rvert > 1/\alpha$ esetén ($q > 1$) a sor nem abszolút konvergens, így $R = 1/\alpha$.
3. Ha $\alpha = \infty$, akkor $\lvert x \rvert\ \alpha = q = \infty$ (mivel $x \neq 0$), vagyis a sor nem abszolút konvergens semmilyen x esetén se, így $R = 0$. (Tehát csak $x = 0$ esetén konvergens a hatványsor.) □

2.52. Tétel (Hányados kritérium hatványsorra) *Ha létezik az* $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{\lvert a_{n+1} \rvert}{\lvert a_n \rvert}$ *határérték, akkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *hatványsor* R *konvergencia sugara:*

1.	$R = \dfrac{1}{\alpha},$	*ha* $0 < \alpha < \infty$,
2.	$R = \infty,$	*ha* $\alpha = 0$,
3.	$R = 0,$	*ha* $\alpha = \infty$.

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan történik, csak most a 2.49. hányados kritériumot használjuk. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ abszolút konvergenciáját $x \neq 0$ esetében vizsgáljuk. (Az $x = 0$-ban abszolút konvergens.)

Ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lvert a_{n+1} \rvert\ \lvert x \rvert^{n+1}}{\lvert a_n \rvert\ \lvert x \rvert^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\lvert a_{n+1} \rvert}{\lvert a_n \rvert}\ \lvert x \rvert = \alpha\ \lvert x \rvert \;=\; q\ < 1\,,$$

akkor a sor abszolút konvergens, ha $q > 1$, akkor nem abszolút konvergens.

1. Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0$ minden x-re, a sor minden x-re abszolút konvergens, tehát $R = \infty$.

2. Ha $0 < \alpha < \infty$, akkor $|x| < 1/\alpha$ esetén fennáll az abszolút konvergencia, az $|x| > 1/\alpha$ esetén nem áll fenn az abszolút konvergencia. Tehát $R = 1/\alpha$.

3. Ha $\alpha = \infty$, akkor $q = \infty$ (ugyanis $x \neq 0$), így a sor minden $x \neq 0$ esetén divergens, tehát $R = 0$. □

2.53. Példa *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\, x^n$$

hatványsor konvergenciatartományát!

67 Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|(-3)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad R = 3.$$

Így a vizsgált függvénysor

$$\begin{aligned} &|x| < 3 \text{ esetén, vagyis } (-3,3)\text{-ban abszolút konvergens,} \\ &|x| > 3 \text{ esetén divergens.} \end{aligned}$$

A végpontokban, $x = \pm 3$ esetén további vizsgálat szükséges:

$$\begin{aligned} x = -3: &\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,(-3)^n = \sum_{0}^{\infty} n &&\qquad \textit{divergens, mert } n \nrightarrow 0. \\ x = +3: &\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,3^n = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n\, n &&\qquad \textit{divergens, mert } (-1)^n n \nrightarrow 0. \end{aligned}$$

(Mindkét esetben a sor konvergenciájának szükséges feltétele sérül.)
Tehát a konvergenciatartomány: $(-3, 3)$.

2.54. Példa *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

hatványsor konvergenciatartományát!

68 Megoldás:

$$a_n = n!, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad R = 0.$$

Tehát csak $x = 0$ esetén konvergens a sor.

2.55. Példa *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n)\,(x+2)^n$$

hatványsor konvergenciatartományát!

69 Megoldás:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{n^2+n} = \frac{n+2}{n} = 1+\frac{2}{n} \to 1 = \frac{1}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad R=1.$$

Most $x_0=-2$, *így* $x-x_0=x+2$, *tehát a sor* $|x+2|<1$ *esetén konvergens,* $|x+2|>1$ *esetén divergens,* $|x+2|=1$ *esetén pedig további vizsgálat szükséges:*

$$x=-2+1=-1: \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n) \text{ div., mert az ált. tag } \not\to 0.$$

$$x=-2-1=-3: \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n)(-1)^n \text{ div., mert az ált. tag } \not\to 0.$$

Tehát a konvergenciatartomány: $(-3,-1)$.

2.56. Példa *Határozzuk meg az*

$$1-3x+2^2x^2-3^3x^3+2^4x^4-3^5x^5+\cdots$$

hatványsor R *konvergenciasugarát!*

70 Megoldás:

$$|a_n| = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ 3^n, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \end{cases} \qquad \text{tehát} \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ 3, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a torlódási pontok: $t_1=2$, $t_2=3$. *Így*

$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|} = 3 = \frac{1}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad R=\frac{1}{3}.$$

2.57. Példa *Keresse meg az alábbi sorok konvergenciatartományát!*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\,x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\,(x-1)^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\,(x-1)^{2n}$$

71 Megoldás: *a)*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n \cdot 9^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 9} \to \frac{1}{9} = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = 9;\ x_0 = 0.$$

$$x = 9: \qquad \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} \cdot 9^n = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \textit{konv. (de nem absz. konv.).}$$

$$x = -9: \qquad \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} \cdot (-9)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{2n} = \sum^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \textit{divergens.}$$

Tehát a konvergenciatartomány (KT): $(-9, 9]$ *azaz* $-9 < x \leq 9$

b) Most $x_0 = 1$*, ennek a 9 sugarú környezetéről van szó, tehát*
KT: $-9 < x - 1 \leq 9$ *azaz* $-8 < x \leq 10$.

c) Vigyázat! Most

$$a_n = \begin{cases} 0, & \textit{ha } n \textit{ páratlan,} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{\frac{n}{2}\, 9^{n/2}}, & \textit{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

A $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$ *határértékkel lehetne dolgozni, de jobb, ha helyettesítéssel visszavezetjük a problémát a)-ra.*

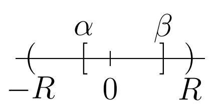
$$z := (x-1)^2 \quad \textit{esetén:} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, 9^n}\, z^n$$

Tehát a z*-re felírt sor konvergenciatartománya az a) példa értelmében* $-9 < z \leq 9$. *Így* $-9 < (x-1)^2 \leq 9$ *adódik. Tehát KT:* $|x - 1| \leq 3$.

2.4.2. A hatványsor tulajdonságai

Az előző alfejezetek 2.44., 2.51. és 2.52. tételei a hatványsor konvergenciatartományáról és abszolút konvergencia tartományáról szólnak. Ezeket itt nem ismételjük meg. A 2.40. megjegyzés értelmében a következő tételeket $x_0 = 0$ középpontú hatványsorokra mondjuk ki.

2.58. Tétel (Hatványsor egyenletes konvergenciája) *Ha* $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, *akkor a* $\sum a_k\, x^k$ *hatványsor egyenletesen konvergens* $[\alpha, \beta]$ *-n.*



Bizonyítás. Legyen $q := \max\{|\alpha|, |\beta|\} < R$. Ekkor

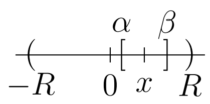
$$|a_k|\,|x|^k \le |a_k|\,q^k, \qquad \text{ha} \qquad x \in [\alpha, \beta]\,,$$

és a $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,q^k$ sor konvergens (mivel a hatványsor a konvergenciatartomány bármely belső pontjában abszolút konvergens, 2.44. tétel). Így a Weierstrass kritérium (2.24. tétel) értelmében fennáll az egyenletes konvergencia (2.18. definíció) az $[\alpha, \beta]$ intervallumon.□

Az egyenletes konvergencia következményei

2.59. Tétel *Az $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ összegfüggvény folytonos $\forall x \in (-R, R)$ esetén.*

Bizonyítás. Adott $x \in (-R, R)$ esetén megválasztható az $[\alpha, \beta]$ zárt intervallum úgy, hogy $-R < \alpha < x < \beta < R$:



Mivel $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens $[\alpha, \beta]$ intervallumon (2.58. tétel). Mivel az $a_k x^k$ tagfüggvények mindenütt folytonosak, ezért a 2.27. tétel értelmében f is folytonos x-ben. □

2.60. Lemma *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor R-ben is konvergens, akkor összegfüggvénye e helyen balról folytonos, tehát*

$$f(R) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,R^k = \lim_{x \to R-0} f(x).$$

2.61. Megjegyzés *Hasonló tétel mondható ki $(-R)$-re is.*

2.62. Tétel (Hatványsor tagonkénti integrálása) *Az R konvergenciasugarú $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ hatványsor bármely $[a, b] \subset (-R, R)$ intervallumon „tagonként integrálható”, azaz*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k\Big)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k\,x^k\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b .$$

Bizonyítás. Az $a_k\,x^k$ tagfüggvények folytonosak $[a, b]$-n (sőt mindenütt) és $[a, b] \subset (-R, R)$ miatt a sor egyenletesen konvergens az $[a, b]$ intervallumon (2.58. tétel). Így a 2.31. tétel értelmében az integrálás és a végtelen összegzés sorrendje felcserélhető. □

2.63. Tétel (Hatványsor tagonkénti differenciálása) *A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallumának bármely belső x pontjában differenciálható, mégpedig tagonként:*

1. azaz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k\, x^{k-1}$ *(újfent hatványsor)*

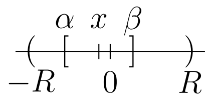
2. és a két sor konvergenciasugara megegyezik.

Bizonyítás. Először a 2. állítást látjuk be, mivel a tagonkénti deriválhatósághoz $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ egyenletes konvergenciája kell.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|n\, a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{miatt} \qquad R_1 = R_2\ (= R)$$

Felhasználtuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ és $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^n$ együtt konvergens illetve divergens, ugyanis a második sor az első sornak konstans szorosa (x-szerese).

1.: Minden $x \in (-R, R)$ esetén található olyan $[\alpha, \beta]$ zárt intervallum, melyre $x \in [\alpha, \beta] \subset (-R, R)$.



A tagonkénti deriválással kapott $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k\, x^{k-1}$ sor is hatványsor, így a 2.58. tétel értelmében egyenletesen konvergens $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$-en. Az eredeti $\sum^{\infty} a_k\, x^k$ sor is konvergens $[\alpha, \beta]$-n és a tagfüggvények $a_k\, x^k \in C^1_{[\alpha,\beta]}$. Tehát teljesülnek a tagonkénti differenciálhatóságra vonatkozó 2.33. tétel feltételei, így

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}\,.$$

□

2.64. Megjegyzés *A tagonkénti deriválással kapott sor konvergenciatartománya nem feltétlenül egyezik meg az eredeti sor konvergenciatartományával, ugyanis a végpontok viselkedése eltérhet.*

Az előző tétel következménye:

2.65. Következmény *A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány bármely belső pontjában* akárhányszor *deriválható (mégpedig tagonként) és a konvergenciasugár ugyanaz marad mindegyik derivált sor esetén.*

2.66. Megjegyzés *Az x_0 középpontú hatványsorokra hasonló tételek igazak. A fentiekből látható, hogy a hatványsor a konvergenciatartomány belsejében ugyanúgy differenciálható és integrálható, mint a polinomok.*

Összegfüggvény meghatározása

A fenti tételek lehetőséget nyújtanak bizonyos hatványsorok összegfüggvényének a meghatározására is. Erre mutatunk most példákat.

2.67. Példa *Adjuk meg a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

hatványsor $f(x)$ összegfüggvényét zárt alakban (véges sok elemi függvény segítségével), és határozzuk meg a konvergenciatartományt (az f összegfüggvény értelmezési tartományát)!

72 Megoldás: *A konvergenciasugár $R = 1$, mert*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R}.$$

A végpontok vizsgálata:

$$x = 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \textit{divergens}, \qquad\qquad x = -1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \ \textit{konvergens}.$$

Tehát $D_f = H = [-1, 1)$.

Vegyük észre, hogy a keresett hatványsort tagonként deriválva geometriai sort kapunk, aminek az összege zárt alakban felírható, és ezután f integrálással kapható meg.

Legyen $x \in (-1, 1)$. Ekkor a Newton–Leibniz formula szerint, valamint a tagonkénti deriválhatóságról tanult 2.63. tétel értelmében:

$$\int\limits_{t=0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \overset{N\text{–}L.}{=} f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = f(x) = \int_{t=0}^{x} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} \right) \mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_{t=0}^{x} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k}}_{\sum\limits_{k=1}^{\infty} t^{k-1} = \frac{1}{1-t}} \ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Tehát $f(x) = -\ln(1-x)$, ha $x \in [-1, 1)$. (A 2.60. lemma miatt $x = -1$ esetén is fennáll az egyenlőség.)

2.68. Példa *Adjuk meg zárt alakban a*

$$\Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, x^{n-2}$$

függvényt! Határozzuk meg Φ értelmezési tartományát!

73 Megoldás: *Akár a hányados- (2.52. tétel), akár a gyökkritériumból (2.51. tétel) megkapható, hogy $R = 1$, és a végpontok behelyettesítésével divergenciát kapunk, tehát $D_\Phi = (-1, 1)$.*

Vegyük észre, hogy a vizsgált hatványsor x-szeresének tagonkénti integráljával geometriai sort kapunk, aminek az összege zárt alakban felírható. Tehát legyen

$$\phi_1(x) := x \cdot \Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Ha $|x| < 1$, akkor alkalmazható a tagonkénti integrálásról szóló 2.62. tétel a Φ_1 függvényre:

$$\int_{t=0}^{x} \Phi_1(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} n \int_{t=0}^{x} t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}.$$

Az integrálfüggvényből deriválással kaphatjuk meg Φ_1-et, majd x-el osztva Φ-t:

$$\Phi_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} \quad\Longrightarrow\quad \Phi(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}\,; \qquad |x| < 1.$$

(Ha $x = 0$, az osztást nem végezhetjük el. Ekkor behelyettesítéssel közvetlenül látszik, hogy $\Phi(0) = 2 \cdot 0^0 + 3 \cdot 0^1 + 4 \cdot 0^2 + \cdots = 2 = \frac{2-0}{(1-0)^2}$, tehát eredményünk ekkor is helyes.)

2.4.3. Analitikus függvény

2.69. Definíció (Analitikus függvény) *Az f függvény az x_0* pontban analitikus, *ha x_0 egy környezetében konvergens hatványsor összegeként áll elő, azaz $\exists R > 0$, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k, \qquad\qquad \text{ha } x \in (x_0 - R, x_0 + R) = K_R(x_0).$$

Az f függvény az (α, β) intervallumon analitikus, *ha az intervallum minden pontjában az.*

A következő tétel kapcsolatot teremt egy analitikus függvény hatványsorának együtthatói és a függvény között.

2.70. Tétel (Hatványsor egyértelműsége) *Ha f analitikus x_0-ban, azaz $\exists R > 0$, hogy $\forall x \in K_R(x_0)$ esetén*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \qquad \text{akkor} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy x_0-ban analitikus függvény egyértelműen fejthető x_0 középpontú hatványsorba, mégpedig

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad x \in K_R(x_0).$$

Bizonyítás. A hatványsor tagonkénti deriválásáról tanult 2.63. tételt használjuk fel, és az egyszerűség kedvéért bevezetjük a $\Delta x = x - x_0$ jelölést.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta x^k = \\
&= a_0 + a_1\Delta x + a_2\Delta x^2 + \cdots + a_n\Delta x^n + \cdots && \Rightarrow && f(x_0) = a_0 \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2\Delta x + 3a_3\Delta x^2 + \cdots + na_n\Delta x^{n-1} + \cdots && \Rightarrow && f'(x_0) = a_1 \\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3\Delta x + \cdots + n(n-1)a_n\Delta x^{n-2} + \cdots && \Rightarrow && f''(x_0) = 2a_2 \\
f'''(x) &= 2\cdot 3a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n\Delta x^{n-3} + \cdots && \Rightarrow && f'''(x_0) = 3!a_3 \\
&\vdots && && \vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!a_n + (n+1)!a_{n+1}\Delta x + \cdots && \Rightarrow && f^{(n)}(x_0) = n!a_n
\end{aligned}$$

Tehát valóban

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

□

2.4.4. Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{2}\right)^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n}x^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n}(x-3)^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}(x+2)^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)!}(x+1)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-6)^n}{(2n)!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{n^2\, 2^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n}}{(n+1)^2\, 3^n}$

2. Határozza meg az alábbi sorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)x^{k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k-1}$

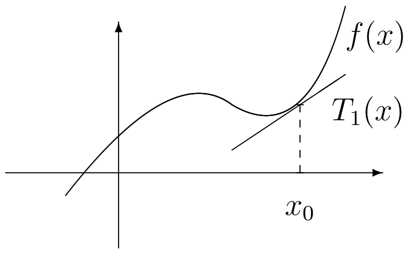
(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}(x-2)^{k-1}$

2.5. Taylor-polinom

Taylor-polinomokat leggyakrabban függvények közelítésére használjuk. Az f függvénynek az x_0 pont környékén a „nullad rendű közelítése az $f(x_0)$ értékű konstans függvény. Ez a függvény $T_0(x) \equiv f(x_0)$ nullad fokú Taylor-polinomja. Az f függvényt az x_0 pont környezetében legjobban közelítő lineáris függvény a függvény grafikonjának érintő egyenese:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = T_1(x),$$

amivel már találkoztunk. Ez a $T_1(x)$ elsőfokú Taylor-polinom.



Látható, hogy az elsőfokú Taylor-polinomot a következő tulajdonságok definiálják:

$$T_1 \text{ elsőrendű polinom}, \qquad T_1(x_0) = f(x_0), \qquad T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Ezt röviden úgy mondjuk, hogy T_1 *legalább első rendben érinti f-et.* A magasabb rendű Taylor-polinomok ezen tulajdonságok általánosításával kaphatóak meg.

2.71. Definíció *Az f és g legalább n-szer differenciálható függvények* legalább n-ed rendben *érintik egymást x_0-ban, ha*

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n.$$

2.72. Definíció *Az f és g legalább $(n+1)$-szer differenciálható függvények* pontosan n-ed rendben *érintik egymást x_0-ban, ha*

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n \quad \text{és} \quad f^{(n+1)}(x_0) \ne g^{(n+1)}(x_0).$$

2.73. Példa *Hányad rendben érintik egymást a következő függvények?*

$$f(x) = \sin x, \qquad\qquad g(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

74 Megoldás:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \sin x, & g(x) = x - \dfrac{x^3}{6}, & f(0) = g(0) = 0; \\
f'(x) = \cos x, & g'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}, & f'(0) = g'(0) = 1; \\
f''(x) = -\sin x, & g''(x) = -x, & f''(0) = g''(0) = 0; \\
f'''(x) = -\cos x, & g'''(x) = -1, & f'''(0) = g'''(0) = -1; \\
f^{(4)}(x) = \sin x, & g^{(4)}(x) = 0, & f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0; \\
f^{(5)}(x) = \cos x, & g^{(5)}(x) = 0, & f^{(5)}(0) \ne g^{(5)}(0).
\end{array}$$

Tehát a két függvény pontosan negyedrendben érinti egymást.

Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Keressük azt a legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinomot, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et.

2.74. Tétel (Taylor-polinom egyértelműsége) *Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Egyetlen olyan legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinom van, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et, mégpedig*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Bizonyítás. A bizonyítás nagymértékben hasonlít a 2.70. tételéhez. Keressük $T_n(x)$-et $x - x_0$ hatványai szerint felírt alakban. Az f függvény és a T_n polinom értéke és első n deriváltja megegyezik x_0-ban, tehát:

$$\begin{aligned}
T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \cdots \\
\cdots + a_n(x - x_0)^n \\
\Longrightarrow \quad T_n(x_0) = a_0 = f(x_0);
\end{aligned}$$

$$T_n'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + \dots + k\,a_k(x-x_0)^{k-1} + \dots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$
$$\Longrightarrow \quad T_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0);$$

$$T_n''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \dots + k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} + \dots$$
$$\dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$
$$\Longrightarrow \quad T_n''(x_0) = 2\,a_2 = f''(x_0);$$

$$T_n'''(x) = 3!\,a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$
$$\Longrightarrow \quad T_n'''(x_0) = 3!\,a_3 = f'''(x_0).$$

Tovább ismételve a differenciálást és behelyettesítést:

$$T_n^{(k)}(x_0) = k!\,a_k = f^{(k)}(x_0), \qquad \dots \qquad T_n^{(n)}(x_0) = n!\,a_n = f^{(n)}(x_0).$$

Tehát:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, \dots, n\,.$$

□

2.75. Definíció (Taylor-polinom) *A legalább n-szer differenciálható f függvény x_0* bázispontú n-edrendű Taylor-polinomja *az egyetlen legfeljebb n-edfokú polinom, mely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et. A 2.74. tétel értelmében a Taylor-polinom $x - x_0$ hatványai szerint rendezett alakja:*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

2.76. Megjegyzés *Egy m-edfokú $P_m(x)$ polinom $T_n(x)$ Taylor-polinomja $m \le n$ esetén önmaga:*

$$P_m(x) = T_n(x), \qquad \text{ha} \qquad m \le n,$$

esetleg más hatványok szerint felírva, ugyanis egyetlen n-edrendben érintő polinom van és önmaga ilyen.

2.5.1. Maradéktag

A Taylor-polinomok bevezetésének legfőbb célja egy f függvény polinomokkal való közelítése az x_0 pont környezetében. Felmerül a kérdés, hogy mely f függvényekre pontos a közelítés, olyan értelemben, hogy

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x), \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x) - T_n(x) = 0.$$

Látni fogjuk, hogy a legtöbb elemi függvényre igaz a fenti határérték, azonban van olyan függvény is, melyre $x \ne x_0$ esetében $T_n(x) \not\to f(x)$. A kérdés vizsgálatához célszerű bevezetni a *maradéktag* fogalmát.

2.77. Definíció (Maradéktag) *Az f függvény T_n Taylor-polinomjához tartozó R_n maradéktag:*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

A következő tétel $R_n(x)$ nagyságrendjét, illetve a Taylor-polinommal való közelítés „jóságát" mutatja.

2.78. Tétel (Maradéktag nagyságrendje) *Legyen f legalább n-szer differenciálható $K_\delta(x_0)$-ban ($\delta > 0$). Ekkor*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

azaz $R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$ az x_0-ban.

Bizonyítás.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - T_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \overset{\text{L'H}}{=} \underset{n \text{ lépés után}}{\cdots} \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!\,(x - x_0)^{n-n}} = \frac{0}{n!} = 0.$$

(Az utolsó tört kivételével a törtek $\frac{0}{0}$ alakúak, ezért alkalmazhattuk a L'Hospital szabályt.) □

2.79. Megjegyzés *Ha $T_n(x)$ helyett másik polinomot tekintünk, akkor ez az állítás nem igaz.*

Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

2.80. Tétel (Lagrange-féle maradéktag létezése) *Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_\delta(x_0)$-ban ($\delta > 0$), és $x \in K_\delta(x_0)$, akkor létezik olyan x_0 és x közti ξ (tehát $x_0 < \xi < x$, vagy $x < \xi < x_0$), melyre*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

tehát

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

2.81. Megjegyzés *A tételt nem bizonyítjuk, csak megjegyezzük, hogy $n = 0$ esetében visszakapjuk a korábban tanult Lagrange-féle középérték-tételt:*

$$f(x) = T_0(x) + R_0(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

2.82. Definíció (Lagrange-féle maradéktag) *A 2.80. tételben szereplő*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (x_0 < \xi < x \text{ vagy } x < \xi < x_0)$$

maradéktagot a Taylor-polinom Lagrange-féle maradéktagjának *nevezzük.*

2.83. Példa *Határozzuk meg $f(x) = \sin x$-nek az origó középpontú, ötödfokú Taylor-polinomját, és becsüljük meg, hogy mekkora az $f(x) \approx T_5(x)$ közelítés hibája a $[0\,,\,0.1]$ intervallumon! Azaz*

$$f(x) = \sin x \approx T_5(x) = ? \qquad |f - T_5| < ?, \qquad \text{ha } x \in [0\,,\,0.1] \text{ és } x_0 = 0.$$

75 Megoldás: *Az f függvény és deriváltjai:*

$$\begin{array}{llll} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, & f''(x) = -\sin x, & f'''(x) = -\cos x, \\ f^{(4)}(x) = \sin x, & f^{(5)}(x) = \cos x, & f^{(6)}(x) = -\sin x, & f^{(7)}(x) = -\cos x, \end{array}$$

valamint ezek értéke az origóban:

$$\begin{array}{llll} f(0) = 0, & f'(0) = 1, & f''(0) = 0, & f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(0) = 0, & f^{(5)}(0) = 1, & f^{(6)}(0) = 0, & f^{(7)}(0) = -1. \end{array}$$

Ennek megfelelően az ötödfokú Taylor-polinom és maradéktagja:

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \qquad R_5(x) = \frac{-\sin\xi}{6!}\,x^6.$$

A hibabecslésnél azt használjuk fel, hogy $0 < \xi < x < 0.1$, és így $|-\sin\xi| < 0.1$, tehát

$$|H| = |R_5(x)| < \frac{1}{6!}\cdot(0.1)^6.$$

Most azonban élesebb becslés is adható, hiszen $f^{(6)}(0) = 0$, ezért $T_5(x) \equiv T_6(x)$, és így az alábbi is igaz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{-\cos\xi}{7!}\,x^7\,; \qquad |H| \le \frac{1}{7!}\cdot(0.1)^7.$$

2.84. Példa *Határozzuk meg az*

$$I = \int_0^{0.1} e^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét, az integrandust a másodfokú Taylor-polinomjával közelítve, és adjunk felső becslést az elkövetett hibára!

76 Megoldás: *Határozzuk meg az integrál mögötti f függvény másodfokú Taylor-polinomját!*

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin x}, & f(0) &= 1,\\ f'(x) &= e^{\sin x}\cos x, & f'(0) &= 1,\\ f''(x) &= -e^{\sin x}\sin x + e^{\sin x}\cos^2 x, & f''(0) &= 1, \end{aligned}\right\} \implies T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}.$$

Így az integrál közelítő értéke:

$$I \approx I_2 = \int_0^{0.1} T_2(x)\,\mathrm{d}x = 10^{-1} + \frac{10^{-2}}{4} + \frac{10^{-3}}{18} \approx 0.102556\ .$$

A hibabecslést a Lagrange-féle maradéktagra vonatkozó 2.80. tétel alapján végezzük.

$$f'''(x) = e^{\sin x}(-\cos x - 3\sin x\cos x + \cos^3 x) = -e^{\sin x}\underbrace{\cos x\sin x}_{\frac{\sin 2x}{2}}(3+\sin x),$$

így $x \in [0, 0.1]$ esetén a Lagrange-féle hibatag a következő módon becsülhető:

$$|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3\right| \le \frac{e^{0.1}\cdot 0.2\cdot(3+0.1)}{2\cdot 6}x^3 < 0.06\,x^3.$$

(Felhasználtuk, hogy $|\sin x| < |x|$, ha $|x| < \frac{\pi}{2}$.) Tehát az integrál hibabecslése:

$$\begin{aligned} |I - I_2| &= \left|\int_{x=0}^{0.1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x=0}^{0.1} T_2(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{x=0}^{0.1} |f(x) - T_2(x)|\,\mathrm{d}x =\\ &= \int_{x=0}^{0.1} |R_2(x)|\,\mathrm{d}x < \int_{x=0}^{0.1} 0.06\,x^3\,\mathrm{d}x = \frac{0.06}{4}10^{-4} = 1.5\cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Látható, hogy nagyon pontosan, közel 10^{-5} relatív hibával kaptuk meg az integrál numerikus értékét!

2.6. Taylor-sorok

2.85. Definíció (Taylor-sor) *Legyen f akárhányszor differenciálható x_0-ban. Ekkor a formálisan előállítható*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

hatványsort az f függvény x_0 alapponthoz tartozó Taylor-sorának *nevezzük.*

Speciálisan $x_0 = 0$ esetén:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \cdots$$

Ezt MacLaurin-sornak *is hívják.*

Tehát egy akárhányszor differenciálható f függvényhez az x_0- ban hozzárendeltük a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ hatványsort, jelben:

$$f(x) \ \rightsquigarrow \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x - x_0)^k = T(x)$$

Felvetődik a kérdés, hogy

1. Milyen x-re konvergens a kapott sor? ($H =$?)

2. Milyen kapcsolat van f és T között?

Látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén $f(x) = T(x)$ minden $x \in H$ esetén. (Vagyis ilyenkor az f függvény helyett a T hatványsorával dolgozhatunk.)

Az alábbi példa szerint azonban előfordulhat az is, hogy a függvényt Taylor-sora az alappont kivételével *sehol nem állítja elő*, azaz $x \neq x_0$ esetén $f(x) \neq T(x)$.

2.86. Példa *Legyen*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & ha\ x \neq 0; \\ 0, & ha\ x = 0\,! \end{cases}$$

Belátható, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists f^{(n)}(0) = 0$. Így $T(x) \equiv 0$, tehát $T(0) = f(0)$, de más x-re nem áll fenn az egyenlőség, hiszen $f(x) \neq 0$, ha $x \neq 0$.

2.6.1. Néhány Taylor-sorfejtés

A következő példáknál azt használjuk ki, hogy a hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora a 2.70. tétel és a 2.85. definíció értelemben önmaga. Ha tehát egy függvényt fel tudunk írni hatványsor összegfüggvényeként, akkor az csak a Taylor-sora lehet.

2.87. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \textit{függvény} \qquad x_0 = 2$$

pont körüli Taylor-sorát!

77 Megoldás: *Másodfokú polinomról van szó, tehát a 2.76. megjegyzés értelmében $T(x) = T_m(x) = f(x)$, ha $m \geq 2$. Az $x-2$ hatványai szerint felírt Taylor-sor is csak legfeljebb másodfokú tagokat tartalmaz, és az együtthatók akár a 2.85. definícióból, akár a polinom algebrai átrendezésével megkaphatóak. Most ez utóbbi utat mutatjuk be:*

$$f(x) = \underbrace{x^2 + x + 1}_{\textit{0 körüli T.-sor}} = \underbrace{(x-2)^2 + 5(x-2) + 7}_{\textit{2 körüli Taylor-sor}} = T_2(x) = T_3(x) = \cdots =$$
$$= T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k.$$

Elevenítsük föl a végtelen geometriai sor összegképletét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{ha } |q| < 1,$$

melyet a következő példákban „visszafelé” fogunk használni, tehát a jobb oldalon szereplő törtet írjuk át végtelen összeg alakjába.

2.88. Példa *Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény*

$$a) \quad x_0 = 0, \qquad\qquad b) \quad \tilde{x}_0 = 3$$

pont körüli Taylor-sorát és a sor konvergenciatartományát!

78 Megoldás: *Mindkét esetben az $f(x)$ függvényt alkalmas konvergens geometriai sor összegeként írjuk fel. A konvergenciatartományt a geometriai sor konvergenciájára érvényes $|q| < 1$ feltételből kapjuk.*

a)

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots = T(x), \qquad \textit{ha } x \in (-1, 1).$$

A Taylor-sor n-edik részletösszege a véges geometriai sor összegképlete alapján:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

b) A nevezőbe először x helyett $q = x-3$-at „csempészünk", majd kiemeléssel a kifejezést $\frac{1}{1-q}$ alakra hozzuk:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-2-(x-3)} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\underbrace{\frac{-(x-3)}{2}}_{q}} =$$

$$= \frac{-1}{2}\left(1-\left(\frac{x-3}{2}\right)+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2-\left(\frac{x-3}{2}\right)^3+\cdots\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(x-3)^n = \tilde{T}(x).$$

Most a konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|-\frac{x-3}{2}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x-3| < 2, \quad \Longrightarrow \quad 1 < x < 5.$$

A sorfejtés általános részletösszege:

$$T_n^*(x) = \frac{-1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3-x}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{3-x}{2}\right)^{n+1}-1}{x-1}.$$

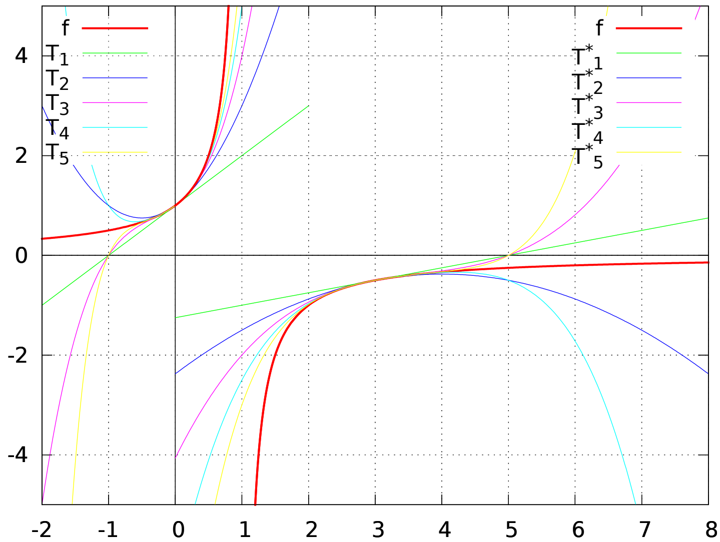
A most kapott két Taylor-sor első néhány részletösszege látható a 2.2 ábrán valamint az animáción. Jól érzékelhető, hogy csak a kiszámolt konvergenciatartományon belül konvergál $T_n(x)$ illetve $T_n^*(x)$ az adott $f(x)$ függvényhez

2.89. Megjegyzés *Hasonlóan megmutatható, hogy az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában analitikus, tehát tetszőleges $x_0 \neq 1$ pont egy környezetében konvergens hatványsor (geometriai sor) összegeként írható föl. Próbálkozzunk meg például az $x_0 = -2$ esettel önállóan!*

2.90. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \qquad \text{függvény} \qquad x_0 = 2$$

pont körüli Taylor-sorát és a sor konvergenciatartományát!



2.2. ábra. Az $\frac{1}{1-x}$ függvény és $x_0 = 0$, illetve $x_0^* = 3$ körüli első néhány Taylor-polinomja.

79 Megoldás: *A 2.88. példa eredményét, valamint a 2.63. tételt használjuk fel, mely szerint hatványsort tagonként differenciálhatunk.*

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right)$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots n\, x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Tagonkénti differenciáláskor a konvergenciasugár nem változik, tehát $R = 1$, és a végpontokban $(\ x = \pm 1\ )$ a sor divergens, mert az általános tag nem tart 0-hoz. Tehát a konvergenciatartomány: $(-1, 1)$.

2.91. Megjegyzés *Hasonlóan, az $\frac{1}{1-x}$ függvény sorának kétszeres tagonkénti deriválásával megkapható az $\left(\frac{1}{1-x}\right)^3$ függvény origó körüli Taylor-sora.*

2.92. Példa
a) Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \qquad \text{függvény} \qquad x_0 = -2$$

pont körüli Taylor-sorát és a sor konvergenciatartományát!

b) A sorfejtésből határozzuk meg a következő deriváltat:

$$\frac{\mathrm{d}^{100}}{\mathrm{d}x^{100}}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)\Big|_{x=-2} = f^{(100)}(-2) = ?$$

80 Megoldás: *a) Először bontsuk az f függvényt parciális törtek összegére úgy, ahogy azt a racionális törtfüggvények integrálásánál tanultuk:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \cdots = \\ &= \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

Ezután külön-külön határozzuk meg mindkét parciális tört Taylor-sorát és konvergencia-tartományát a 2.88. példában megismert módon. Az első tört:

$$\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{3-(x+2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{3}} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{x+2}{3}\right) + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^3 + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

A konvergenciatartomány:

$$KT_1 : \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x+2| < 3\,, \quad R_1 = 3.$$

A második tört:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x+2)-4} = \frac{-1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{4}} =$$
$$= \frac{-1}{4}\left(1 + \left(\frac{x+2}{4}\right) + \left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{4}\right)^3 + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(x+2)^n}{4^{n+1}}.$$

A konvergenciatartomány:

$$KT_2 : \left|\frac{x+2}{4}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x+2| < 4\,, \quad R_2 = 4.$$

Az f függvény Taylor-sora a két sor összege, konvergenciatartománya pedig a két konvergenciatartomány metszete:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)(x+2)^n, \quad \text{ha } |x+2| < 3, \text{ azaz } x \in (-5, 1).$$

b) A Taylor-sorfejtés együtthatói és a derivált közti $a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}$ *kapcsolat alapján:*

$$a_{100} = \frac{f^{(100)}(-2)}{100!} \qquad \Longrightarrow \qquad f^{(100)}(-2) = 100!\Big(\frac{1}{3^{101}} - \frac{1}{4^{101}}\Big).$$

2.93. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad \text{függvény} \qquad\qquad x_0 = 0$$

pont körüli Taylor-sorát és a sor konvergenciatartományát!

81 Megoldás: *Megint a konvergens geometriai sor összegképletét használjuk fel.*

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

ha $|q| = |-x^2| < 1$, *tehát a konvergenciatartomány:* $(-1, 1)$.

Ez a példa lehetőséget biztosít az $\operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sorának a meghatározására is.

2.94. Tétel (arctg x Taylor-sora) *Igazoljuk, hogy az* $\operatorname{arctg} x$ *függvény origó középpontú Taylor-sora és konvergenciatartománya:*

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \text{ha } x \in [-1, 1]. \tag{2.3}$$

Bizonyítás. Az előző 2.93. feladat alapján

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

ha $|x| < 1$. A 2.62. tétel szerint tagonként is elvégezhető az integrálás:

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 \overset{N-L.}{=} \int_{t=0}^{x} (\operatorname{arctg} t)' \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t=0}^{x} \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right) \, \mathrm{d}t =$$

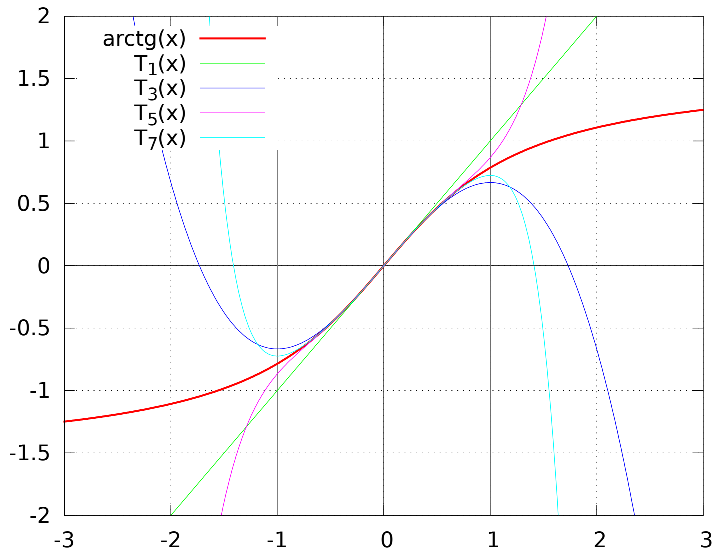
$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Az $R = 1$ konvergenciasugár a tagonkénti integrálással nem változik. Az $x = \pm 1$ végpontok behelyettesítésekor a

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

sort kapjuk, ami konvergens, mert Leibniz-típusú. Így a 2.60. lemma miatt a végpontokban is előállítja a Taylor-sor a függvényt. □

Az arctg függvény és első néhány Taylor-polinomja a 2.3 ábrán és az animáción látható.



2.3. ábra. Az $\operatorname{arctg} x$ függvény és első néhány Taylor-polinomja. Látható, hogy a $[-1, +1]$ konvergenciatartományon kívül a Taylor-polinomok nem közelítenek a függvényhez.

2.95. Megjegyzés *A végpontokban való konvergenciából az is adódik, hogy*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Könnyen látható, hogy a 2.3 sorfejtés minden $x \in [-1, 1]$ esetén Leibniz-sort ad, tehát a sorfejtés hibáját igen könnyen becsülhetjük, például:

$$|\operatorname{arctg} x - T_5(x)| \le \frac{|x|^7}{7}.$$

2.96. Tétel ($\ln(1+x)$ Taylor-sora) *Igazoljuk, hogy az* $\ln(1+x)$ *függvény origó középpontú Taylor-sora és konvergenciatartománya:*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad \text{ha } x \in (-1, 1]. \tag{2.4}$$

Bizonyítás. Most is a függvény deriváltjának Taylor-sorát kaphatjuk meg könnyen:

$$\big(\ln(1+x)\big)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n,$$

ha $|x| < 1$. Ezt a 2.62. tétel értelmében tagonként integrálva:

$$\ln(1+x) = \int_{t=0}^{x} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots\right) \mathrm{d}t =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

A konvergenciasugár az integrálással nem változik, és behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a kapott Taylor-sor az 1-ben konvergens, a -1-ben pedig divergens. □

Az $\ln(1+x)$ függvény és első néhány Taylor-polinomja a 2.4 ábrán és az animáción látható.

2.97. Megjegyzés *A 2.60. lemmát az* 1 *pontban alkalmazva az adódik, hogy*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(1+1) = \ln 2.$$

2.98. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad \text{függvény} \qquad x_0 = 0$$

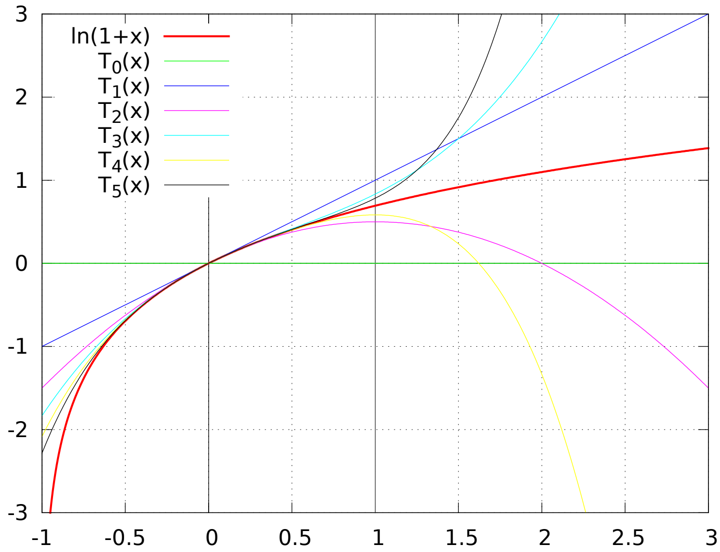
pont körüli Taylor-sorát és a sor konvergenciatartományát!

82 Megoldás: *Az előző, 2.4 sorfejtésből $x \to -x$ helyettesítéssel adódik, hogy*

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}, \qquad \text{ha } x \in [-1, 1).$$

A két sorfejtés összegéből már kapható egy $|x| < 1$ esetén konvergens sorfejtés:

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$



2.4. ábra. Az $\ln(1+x)$ függvény és első néhány Taylor-polinomja. Látható, hogy a $(-1, 1]$ konvergenciatartományon kívül a Taylor-polinomok nem közelítenek a függvényhez.

2.6.2. Függvény és Taylor-sorának megegyezése

Adható egy egyszerű, sokszor alkalmazható, általános feltétel arra, hogy az f függvényhez az

$$f(x) \rightsquigarrow T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

definícióval hozzárendelt T Taylor-sor a teljes számegyenesen megegyezzék f-el. Ebben a fejezetben ezzel a feltétellel és ennek alkalmazásával ismerkedünk meg.

Szükséges és elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

2.99. Tétel *Legyen T_n az akárhányszor differenciálható f függvény n-ed rendű Taylor-polinomja, T pedig ezek határértéke. Ekkor*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \quad \textit{azaz } f(x) = T(x)$$

akkor és csak akkor, ha

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Bizonyítás. A tétel egyszerű következménye a maradéktag 2.77. definíciójának, valamint a Lagrange-féle alakjáról szóló 2.80. tételnek. □

2.100. Definíció *A $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$ függvények a $D = \bigcap D_{g_n}$ halmazon* egyenletesen korlátosak, *ha*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}: \qquad |g_n(x)| \le K\,, \qquad \text{ha } x \in D,\ n \in \mathbb{N},$$

azaz a függvényeknek a D halmazon van közös K korlátjuk.

Például a $\sin(x)$, $2\sin(2x)$, $3\sin(3x)$,$\ldots n\sin(nx)$,$\ldots$ függvények egyenként korlátosak, de nem egyenletesen korlátosak.

Azonban a $\cos(x)$, $\cos(4x)$, $\cos(9x)$, $\ldots\cos(n^2x)$,$\ldots$ függvények egyenletesen korlátosak, $K = 1$ megfelel.

A következő tétel egyszerű, könnyen ellenőrizhető, és emellett sokszor igen jól alkalmazható, elégséges feltételt ad az $f(x) = T(x)$ egyenlőség fennállására.

2.101. Tétel (Függvény és Taylor-sor egyezése) *Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és az f, f', f'',$\ldots f^{(n)}$,$\ldots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$

2.102. Megjegyzés *Az x_0 bázispontra hasonló tétel mondható ki az $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumon.*

Bizonyítás. A 2.80. tételben láttuk, hogy

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{R_n(x)\ \text{Lagrange-féle alakja}} .$$

Az egyenletes korlátosságot kihasználva könnyen adható felső becslés a maradéktagra (felhasználva a $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ nevezetes határértéket):

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| =$$

$$= \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \le K\, \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Így $T_n(x) \to f(x)$, tehát $T(x) = f(x)$. $\square$

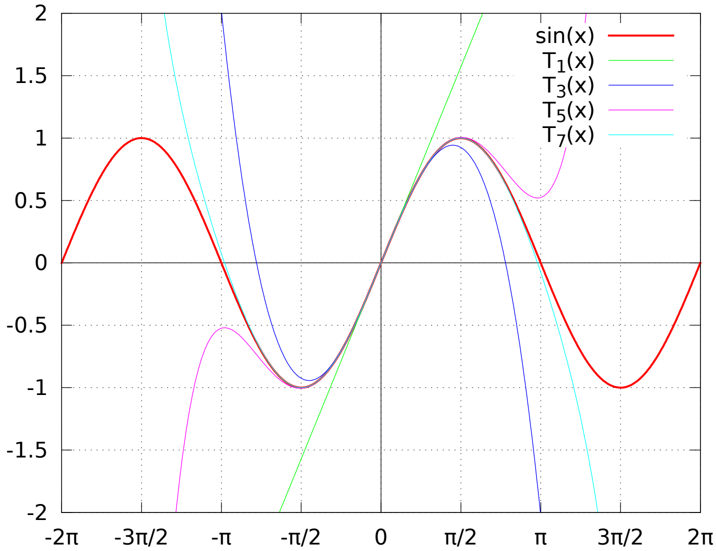
Elemi függvények Taylor-sorfejtése

Az előző, 2.101. tétel segítségével sok elemi függvényre egyszerűen igazolható, hogy Taylor-soruk az egész $\mathbb{R}$-en előállítja őket.

2.103. Lemma ($\sin x$ Taylor-sora) *Minden valós x esetén*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A 2.5 ábrán és az animáción látható a $\sin x$ függvény és az első néhány Taylor-polinomja.



2.5. ábra. A $\sin x$ függvény és első néhány Taylor-polinomja.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = \sin x$. Ekkor f deriváltjai és ezek értéke az origóban:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0;\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1;\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0;\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1;\\
f^{(4)}(x) &= f(x) = \sin x, & f^{(4)}(0) &= f(0) = 0;
\end{aligned}$$

$$\vdots \text{ innen periodikusan ismétlődik } \vdots$$

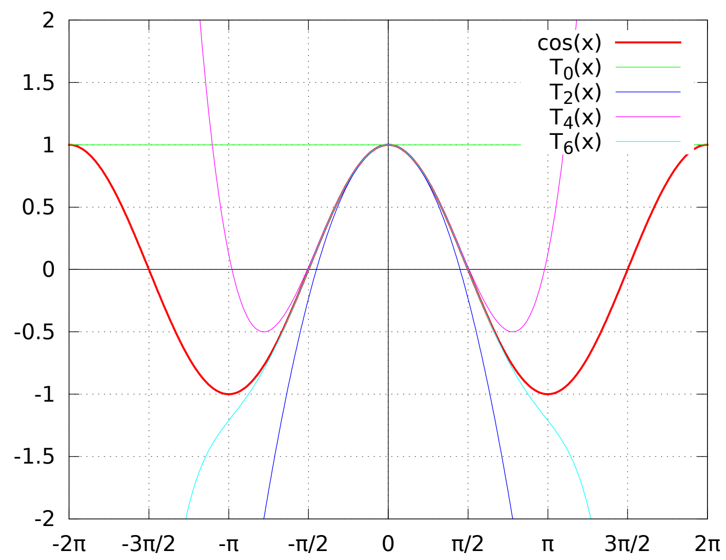
A deriváltak $(-\infty,\infty)$-en egyenletesen korlátosak, ezért $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad \square$$

2.104. Lemma ($\cos x$ Taylor-sora) *Minden valós x esetén*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A 2.6 ábrán és az animáción látható a $\cos x$ függvény és az első néhány Taylor-polinomja.



2.6. ábra. A $\cos x$ függvény és első néhány Taylor-polinomja.

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan bizonyítunk. A deriváltak:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1;\\
f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0;\\
f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1;\\
f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0;\\
f^{(4)}(x) &= f(x) = \cos x, & f^{(4)}(0) &= f(0) = 1;
\end{aligned}$$

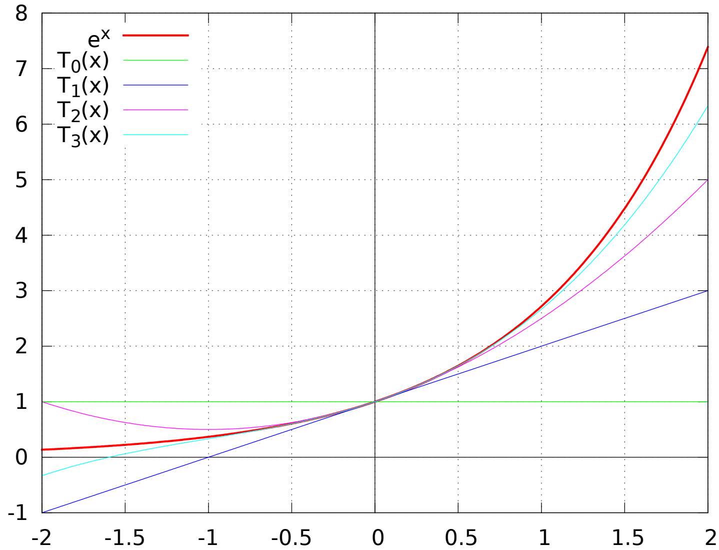
$\vdots$ innen periodikusan ismétlődik $\vdots$

A deriváltak most is egyenletesen korlátosak $\mathbb{R}$-en, és leolvashatók az együtthatók.□

2.105. Lemma (e^x Taylor-sora) *Minden valós x esetén*

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

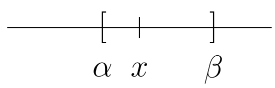
A 2.7 ábrán látható az e^x függvény és az első néhány Taylor-polinomja.



2.7. ábra. Az e^x függvény és első néhány Taylor-polinomja.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = \mathrm{e}^x$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$, és így $f^{(k)}(0) = 1$, ez magyarázza a Taylor-sor együtthatóit.

Konvergencia: $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ az $\mathbb{R}$-en nem korlátos, de tetszőleges $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$-en már igen, $|f^{(k)}(x)| \le \mathrm{e}^\beta$.



Tehát az $[\alpha, \beta]$ intervallumon a deriváltak egyenletesen korlátosak, így a 2.101. tétel alapján $f(x) = T(x)$, ha $x \in [\alpha, \beta]$. Minthogy ez az érvelés *tetszőleges* $[\alpha, \beta]$ intervallumra igaz, ezért a teljes számegyenesen előállítja az e^x függvényt a Taylor-sora. □

2.106. Megjegyzés *Az $x \to (-x)$ helyettesítéssel megkaphatjuk* e^{-x} *Taylor-sorát is:*

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2.107. Lemma (sh x Taylor-sora) *Minden valós x esetén*

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Bizonyítás. Az $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big)$ definícióba behelyettesítve a már ismert

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sorfejtéseket adódik az eredmény. □

2.108. Lemma (ch x Taylor-sora) *Minden valós x esetén*

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Bizonyítás. A $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)$ definícióba kell behelyettesíteni az exponenciális függvények Taylor-sorát. □

2.109. Megjegyzés *A trigonometrikus és hiperbolikus függvények origó középpontú sorfejtéséből látható, hogy a* páros függvények *$(f(x) = f(-x))$ Taylor-sorában csak páros kitevős hatványok szerepelnek, míg a* páratlan függvények *$(-f(x) = f(-x))$ Taylor-sorában csak páratlan kitevős hatványok vannak.*

Példák Taylor-sorfejtésekre

2.110. Példa *Az $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sora:*

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A következő néhány példa az

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots, \qquad u \in \mathbb{R}$$

sorfejtésre (2.105. lemma) támaszkodik.

2.111. Példa *Az $f(x) = e^{x^2}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sora:*

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (u = x^2).$$

2.112. Példa *Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény $x_0 = 0$*

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \cdots, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (u = -x^2).$$

A valószínűségszámításban találkozunk az $f(x) = e^{-x^2}$ Gauss-görbével.

2.113. Példa *Az $f(x) = \sqrt{e^x}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sora:*

$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(u = \frac{x}{2}\right).$$

2.114. Példa *Az $f(x) = e^{3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sora:*

$$e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{1}{2!}3^2x^4 + \frac{1}{3!}3^3x^6 + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(u = 3x^2\right).$$

2.115. Példa *Adjuk meg az $f(x) = e^{3x}$ függvény a) $x_0 = 0$, illetve b) $x_0 = 1$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!*

83 Megoldás: *a)* $x_0 = 0$*:*

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{1}{2!}(3x)^2 + \frac{1}{3!}(3x)^3 + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) $x_0 = 1$

$$e^{3x} = e^{3(x-1)+3} = e^3 e^{3(x-1)} =$$

$$= e^3\left(1 + 3(x-1) + \frac{3^2(x-1)^2}{2!} + \frac{3^3(x-1)^3}{3!} + \cdots\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A következő két példában a geometriai sor összegképletére lesz szükségünk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{ha } |q| < 1.$$

2.116. Példa *Adjuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{7+x}$$

függvény Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát, ha

$$a) \quad x_0 = 0, \qquad\qquad b) \quad x_0 = 2\,!$$

84 Megoldás: *a)* $x_0 = 0$*:*

$$\frac{1}{7+x} = \frac{1}{7}\,\frac{1}{1-\frac{-x}{7}} = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{x}{7} + \left(\frac{x}{7}\right)^2 - \left(\frac{x}{7}\right)^3 + \cdots\right),$$

tehát egy $q = \frac{-x}{7}$ *hányadosú geometriai sorról van szó, aminek konvergenciatartománya és konvergenciasugara:*

$$|q| = \left|-\frac{x}{7}\right| = \frac{|x|}{7} < 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in (-7,7), \qquad R = 7.$$

b) $x_0 = 2$*:*

$$\frac{1}{7+x} = \frac{1}{(x-2)+9} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-2)}{9}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{x-2}{9} + \left(\frac{x-2}{9}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{9}\right)^3 + \cdots\right),$$

tehát egy $q = -\frac{x-2}{9}$ *hányadosú geometriai sorról van szó, aminek konvergenciatartománya és konvergenciasugara:*

$$|q| = \left|-\frac{x-2}{9}\right| = \frac{|x-2|}{9} < 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in (-7,11), \quad R = 9.$$

2.117. Példa *Fejtsük* $x_0 = 0$ *bázispontú Taylor-sorba az*

$$f(x) = \frac{2x}{2-x^2}$$

függvényt, és határozzuk meg a sor konvergenciatartományát!

85 Megoldás:

$$\frac{2x}{2-x^2} = x\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} = x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2^k}.$$

A konvergenciatartomány:

$$\left|\frac{x^2}{2}\right| < 1, \text{ tehát } |x| < \sqrt{2}\,, \quad \text{azaz} \quad R = \sqrt{2}\,, \quad H = (-\sqrt{2}\,, \sqrt{2}).$$

2.118. Példa
a) Határozzuk meg a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!}\, x^{2k}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} = ?$$

86 Megoldás: *a) A konvergenciasugarat a 2.52. hányados kritériumból kaphatjuk meg:*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2k+3}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2k+1} = \frac{2k+3}{(k+1)(2k+1)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \Longrightarrow \quad R = \infty.$$

A sort a 2.62. tétel szerint tagonként integrálva az exponenciális függvény sorát (2.105. lemma) ismerhetjük föl:

$$f_1(x) := \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} t^{2k}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} \int_{t=0}^{x} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = x\mathrm{e}^{x^2}.$$

Így a vizsgált sor összege $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = f_1'(x) = \left(x\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

b) Az 1 pontban vett helyettesítési értékről van szó:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} = f(1) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 3\mathrm{e}.$$

2.119. Példa *Határozzuk meg a következő numerikus sor S összegét:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} = ?$$

87 Megoldás: *A numerikus sor helyett az*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

hatványsort összegezzük, ugyanis $S = f\left(\frac{1}{5}\right)$. *A 2.63. tételt felhasználva:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_{t=0}^{x} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \right) \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \int_{t=0}^{x} \frac{1}{1-t} \, \mathrm{d}t = -\ln(1-x)\,, \quad \textit{ha } |x| < 1.$$

A hatványsor konvergenciasugara 1, *ezért* $x = \dfrac{1}{5}$ *behelyettesíthető:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 5^n} = f\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \ln\frac{5}{4}.$$

2.120. Példa *Határozzuk meg a következő numerikus sor összegét:*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = ?$$

88 Megoldás: *A vizsgált numerikus sort a* $\mathrm{ch}\, x$ *függvény sorával (2.108. lemma) hozhatjuk kapcsolatba.*

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

Ezért

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots = \mathrm{ch}(1) - 1 - \frac{1}{2!} = \mathrm{ch}(1) - \frac{3}{2}.$$

2.121. Példa *Határozzuk meg a következő összegeket!*

$$a) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, x^n = ? \qquad\qquad b) \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\, 3^n} = ?$$

89 Megoldás: *a) A hányadoskritériummal (2.52. tétel) belátható, hogy a konvergenciasugár végtelen* ($R = \infty$).

Az $f(x)$ helyett először célszerűbb $x \cdot f(x)$-et meghatározni. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén:

$$x \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \mathrm{e}^x - 1 - x.$$

A 2.59. tétel miatt az f összeg folytonos függvény, és azt is tudjuk, hogy $f(0) = 0$. Ezért:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

(L'Hospital szabállyal megmutatható, hogy f valóban folytonos $x = 0$-ban is.)

b)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\, 3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 4.$$

2.122. Példa *Határozzuk meg a következő sor összegét!*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(-1)^k}{(2k)!} = ?$$

90 Megoldás: *A vizsgált összeg a $\cos x$ függvény sorára vezethető vissza:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(-1)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} - 1 = \cos(\sqrt{2}) - 1.$$

2.123. Példa *Határozzuk meg az*

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrál mögötti függvényt az ötödfokú Taylor-polinomjával közelítve, és adjunk felső becslést az így elkövetett hibára!

91 Megoldás: *Először az exponenciális függvény Taylor-sorát felhasználva (2.105. lemma) alakítsuk át az integráljel mögötti függvényt, majd a 2.62. tételt felhasználva cseréljük föl az integrálás és az összegzés sorrendjét!*

$$I = \int_{x=0}^{1} e^{-x^2} = \int_{x=0}^{1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{x=0}^{1} x^{2k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!}}_{a_k}.$$

Egy Leibniz-sor összegére jutottunk. Látható, hogy ötödfokú Taylor-polinom járulékát a $k = 0, 1, 2$-höz tartozó tagok adják, így az integrál közelítő értéke:

$$I \approx \int_{x=0}^{1} T_5(x)\,\mathrm{d}x = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2} = \frac{23}{30}.$$

Leibniz-sorok esetén a hibát az első elhagyott tag abszolút értékével becsülhetjük, így

$$\left|\int_{x=0}^{1} T_5(x)\,\mathrm{d}x - I\right| \le |a_3| = \frac{1}{7\cdot 3!} = \frac{1}{42}.$$

2.6.3. Binomiális sor

Ebben a fejezetben az

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor-sorával foglalkozunk.

2.124. Megjegyzés *Speciálisan $\alpha = -1$ esetén $q = -x$ hányadosú geometriai sort kapunk, mely a $(-1, 1)$ intervallumon konvergens:*

$$\alpha = -1: \qquad (1+x)^{-1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n, \qquad \text{ha } |x| < 1.$$

Általános esetben a Taylor-sorfejtést a 2.85. definíció szerint végezzük:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha & f(0) &= 1\\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha\\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1)\\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1). \end{aligned}$$

Így az $f(x) = (1+x)^\alpha$ függvény Taylor-sora:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha \rightsquigarrow T(x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k. \end{aligned}$$

2.125. Megjegyzés *Abban a speciális esetben, ha $\alpha = n \in \mathbb{N}$, akkor $(1+x)^n$ egy n-edfokú polinom, melynek Taylor-sora önmaga. Ennek x hatványai szerint kifejtett alakját a* binomiális tétel *adja meg:*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \qquad \textit{ahol} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ez a most kapott Taylor-sor együtthatóin is jól látszik, ugyanis $k > n$ esetén x^k együtthatója zérus, $0 \le k \le n$ esetén pedig x^k együtthatója éppen a jól ismert binomiális együttható*:*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \underbrace{\frac{(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)!}}_{=1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Ezért tetszőleges α esetén is átvesszük a binomiális együtthatóra bevezetett jelölést.

2.126. Definíció (Általánosított binomiális együttható) *Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és $k \in \mathbb{N}$ természetes szám, akkor az* általánosított binomiális együttható*:*

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \textit{és} \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

2.127. Példa

$$\binom{\frac{2}{3}}{3} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{3!} = \frac{2\cdot 4}{2\cdot 3^4} = \frac{4}{3^4}.$$

2.128. Példa

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & \textit{ha } k \textit{ páros,} \\ -1, & \textit{ha } k \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

2.129. Definíció (Binomiális sor) *Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ valós kitevő esetén az $f(x) = (1+x)^\alpha$ függvény sorfejtésével kapott*

$$(1+x)^\alpha \rightsquigarrow \qquad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Taylor-sort binomiális sornak *nevezzük.*

2.130. Megjegyzés *Eddigi eredményeink alapján (2.124. és 2.125. megjegyzések) a* binomiális sor *a* geometriai sor *és a* binomiális tétel *közös általánosításának tekinthető:*

$$\alpha = -1: \qquad (1+x)^{-1} \overset{|x|<1}{=} T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \qquad \textit{(Geometriai sor)}$$

$$\alpha = n \in \mathbb{N}: \qquad (1+x)^n = T(x) = T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \textit{(Binomiális tétel)}$$

$$\alpha \notin \mathbb{N}: \qquad (1+x)^\alpha \rightsquigarrow T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \textit{(Binomiális sor)}$$

A továbbiakban a következő kérdésekkel foglalkozunk:

1. Mikor konvergens a binomiális sor, mennyi a konvergenciasugara?
2. Előállítja-e a konvergenciasugarán belül a binomiális sor a sorba fejtett függvényt?

Ezekre a kérdésekre ad választ a következő két tétel.

2.131. Tétel (Binomiális sor konvergenciasugara) *A* $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ *binomiális sor konvergenciasugara* $R = 1$.

Bizonyítás. A hatványsorokra vonatkozó 2.52. hányados kritériummal dolgozunk.

$$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}.$$

Tehát

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow{k\to\infty} |-1| = 1 = \frac{1}{R} \implies R = 1.$$

□

2.132. Tétel (Binomiális sor összege) *A konvergenciasugarán belül a binomiális sor a sorba fejtett függvényt állítja elő, azaz*

$$\underbrace{(1+x)^\alpha}_{f(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}_{T(x)}, \qquad \forall x \in (-1,1), \quad \alpha \in \mathbb{R} \textit{ esetén.}$$

Bizonyítás. Az f deriváltfüggvényei most nem egyenletesen korlátosak, így a 2.101. tétel nem alkalmazható. Ezért más módszerrel látjuk be az egyenlőséget. Megmutatjuk, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\left(\frac{T(x)}{f(x)}\right)' \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T(x)}{f(x)} \equiv \text{konstans}.$$

Tudjuk azonban, hogy $f(0) = T(0) = 1$, így $\frac{T(x)}{f(x)} = \frac{T(0)}{f(0)} = 1$, tehát $T(x) = f(x)$, ha $|x| < 1$.

A vizsgálandó derivált

$$\left(\frac{T}{f}\right)' = \frac{T'f - Tf'}{f^2} = \frac{T' \cdot (1+x)^\alpha - T \cdot \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}}{f^2} = \\ = \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}\big((1+x)T' - \alpha T\big),$$

tehát elég az $(1 + x)T' - \alpha T \equiv 0$ egyenlőség igazolása. (Az egyszerűség kedvéért a T és f függvények x argumentumát nem írtuk ki.) Ehhez T és T' hatványsorát használjuk, utóbbit tagonkénti deriválással kapjuk meg (2.63. tétel).

$$\begin{aligned}
T(x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \\
\alpha T(x) &= \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \alpha\binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \\
T'(x) &= \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots \\
&\quad \cdots + k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} + (k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \cdots \\
xT'(x) &= \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \cdots + k\binom{\alpha}{k}x^k + \cdots
\end{aligned}$$

Tehát a vizsgált kifejezés hatványsor alakban

$$(1+x)T' - \alpha T = \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right)x^k,$$

ahol tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetében az x^k hatvány együtthatója

$$(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k}\left((k+1)\frac{\alpha-k}{k+1} + k - \alpha\right) = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy $x \in (-1, 1)$ esetében

$$(1+x)T'(x) - \alpha T(x) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{T}{f}\right)' \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T(x)}{f(x)} \equiv \frac{T(0)}{f(0)} = 1.$$

□

2.133. Megjegyzés *A végpontokban a konvergenciát külön meg kell vizsgálni, erre nem mondunk ki tételt.*

2.134. Megjegyzés *Belátható, hogy* $|x| < 1$ *esetén* $\left|\binom{\alpha}{k}x^k\right| \searrow 0$, *tehát* k *egy értékétől kezdődően a sor tagjai* monoton csökkenően *tartanak a* 0*-hoz. A* 0*-hoz tartás a konvergencia miatt nem kérdéses, csak a monoton csökkenés. (Mi nem bizonyítjuk általánosságban a monoton csökkenést.) Ezért, ha váltakozó előjelű a sor, akkor felírható egy konstans és egy Leibniz típusú sor összegeként. Ilyen esetben könnyű a hibaszámítás:*

$$(1+x)^\alpha \approx \sum_{k=0}^{N} \binom{\alpha}{k} x^k = s_N \quad \textit{közelítésnél} \quad |H| < \left| \binom{\alpha}{N+1} x^{N+1} \right| .$$

(Az első elhagyott tag majorálja a hibát, ha N *értéke akkora, amelynél már teljesül a monoton csökkenés.)*

Példák binomiális sorfejtésre

2.135. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad \textit{függvény } x_0 = 0 \textit{ középpontú}$$

Taylor-sorát és a sor R *konvergenciasugarát! Mit mondhatunk a részletösszegek hibájáról?*

92 Megoldás: *A 2.132. binomiális sorfejtést alkalmazzuk:*

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \ \cdots ,$$

ha $|x| < R = 1$ *(konvergenciasugár).*

Megmutatható, hogy $x > 0$*-ra Leibniz-típusú a sor (*$x < 0$*-nál nem az!). Ezért* $0 < x < 1$ *esetén*

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \textit{és} \quad |H| = |f(x) - T_1(x)| < \frac{1}{8}x^2 .$$

(Tehát $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$, *ha* $x > 0$.*)*

Például $\sqrt{1.05} = (1+0.05)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\,0.05$, *és a hiba* $|H| < \frac{1}{8}\,(0.05)^2$.

2.136. Megjegyzés *Hasonlóan megmutatható, hogy* $k \in \mathbb{N}^+$ *esetén*

$$\sqrt[k]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{k} = T_1(x), \qquad \textit{ha } |x| \ll 1.$$

Sőt, mivel tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, *ezért*

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \qquad \textit{ha } |x| \ll 1.$$

2.137. Példa *Binomiális sorfejtés segítségével határozzuk meg* $\sqrt[5]{34}$ *közelítő értékét, és adjunk felső becslést az elkövetett hibára!*

93 Megoldás: *Az* $\sqrt[5]{34} = (1+33)^{\frac{1}{5}}$ *felbontás nem használható, mert* $x = 33 > 1$.
Azonban a következő átalakítás eredményre vezet:

$$\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32 \cdot \frac{34}{32}} = 2\sqrt[5]{\frac{34}{32}} = 2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \left(\frac{1}{16}\right)^k \approx S_n =$$

$$\overset{Pl.\ n=2}{=} 2\left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)}{2!} \cdot \frac{1}{16^2}\right) = 2 + \frac{39}{1600} = 2.024375.$$

Belátható, hogy a kapott sor Leibniz-típusú, ezért a hiba könnyen becsülhető:

$$|H| = \left|\sqrt[5]{34} - S_2\right| < 2\left|\binom{\frac{1}{5}}{3} \frac{1}{16^3}\right| \approx 2.34 \cdot 10^{-5}.$$

A pontos érték $\sqrt[5]{34} = 2.024387\ldots$, *így a valódi hiba ennél kisebb:* $\sqrt[5]{34} - S_2 \approx 2.25 \cdot 10^{-5}$. *Látható, hogy a binomiális sorfejtés igen gyorsan konvergál, jól használható közelítésre.*

2.138. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \qquad \textit{függvény } x_0 = 0 \textit{ középpontú}$$

Taylor-sorát és a sor R *konvergenciasugarát!*

94 Megoldás: *A kifejezést* $(1+u)^\alpha$ *alakra hozzuk, és alkalmazzuk a 2.132. binomiális sorfejtést:*

$$\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k.$$

A konvergenciasugár:

$$\left|\frac{x^2}{2}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{2}.$$

2.139. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - x^3}} \quad \textit{függvény } x_0 = 0 \textit{ középpontú}$$

Taylor-sorát és a sor R konvergenciasugarát!

95 Megoldás: *Ugyanúgy járunk el, ahogy az előző példában.*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^3}{16}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{x^3}{16}\right)\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \left(-\frac{x^3}{16}\right)^k =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k}\, x^{3k}.$$

A konvergenciasugár:

$$\left|-\frac{x^3}{16}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt[3]{16} \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt[3]{16}.$$

2.140. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \sqrt[3]{8 + x^2} \quad \textit{függvény } x_0 = 0 \textit{ középpontú}$$

Taylor-sorát és a sor R konvergenciasugarát!

96 Megoldás: *A 2.132. tétel felhasználásával:*

$$f(x) = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{8}} = 2\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} \left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^{2k}.$$

A konvergenciasugár:

$$\left|\frac{x^2}{8}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{8} \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{8}.$$

2.141. Példa *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \arcsin x \quad \textit{függvény } x_0 = 0 \textit{ középpontú}$$

Taylor-sorát és a sor R konvergenciasugarát!

97 Megoldás: *Az f' függvényre lehet közvetlenül alkalmazni a 2.132. binomiális sorfejtést, majd a kapott sort a 2.62. tétel értelmében tagonként integráljuk.*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots$$

A binomiális sorfejtés konvergens, ha $|-x^2| < 1$, tehát ha $|x| < 1$, azaz $R_1 = 1$. Ezután

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$
$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots .$$

A tagonkénti integráláskor a konvergenciasugár nem változik, $R = R_1 = 1$.

Érdemes a kapott eredményt egy tételben összefoglalni.

2.142. Tétel

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots , \qquad R = 1,$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots\right) , \qquad R = 1.$$

Bizonyítás. Az első állítást az előző, 2.141. feladatban igazoltuk. A második állítás az

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \Longrightarrow \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

egyenlőségből következik. □

2.143. Példa *Írjuk fel az*

$$f(x) = 5\sqrt[5]{1+x^2} - 7\sqrt[7]{1+x^2} + 2 \qquad \textit{függvény } x_0 = 0 \textit{ körüli}$$

Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!
Létezik-e C és α úgy, hogy $f(\frac{1}{n}) \sim Cn^{\alpha}$ legyen?

98 Megoldás: *Először a 2.132. binomiális sorfejtés alapján írjuk föl külön a két tag Taylor-sorát:*

$$(1+x^2)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2!}x^4 + \cdots \qquad \textit{ha } |x^2| < 1, \qquad R_1 = 1,$$
$$(1+x^2)^{\frac{1}{7}} = 1 + \frac{1}{7}x^2 + \frac{\frac{1}{7}(-\frac{6}{7})}{2!}x^4 + \cdots \qquad \textit{ha } |x^2| < 1, \qquad R_2 = 1.$$

Így az f függvény Taylor-sorának konvergenciasugara is $R = 1$, és a sor első néhány tagja:

$$f(x) = 5 - 7 + 2 + \left(5 \cdot \frac{1}{5} - 7 \cdot \frac{1}{7}\right) x^2 + \left(5 \frac{-4}{5^2 \cdot 2} - 7 \frac{-6}{7^2 \cdot 2!}\right) x^4 + \dots =$$
$$= \underbrace{\left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)}_{K} x^4 + \underbrace{\Big(\cdots\Big) x^6 + \cdots}_{x^4 \varphi(x)} = K x^4 \Big(1 + \frac{\varphi(x)}{K}\Big).$$

Látható, hogy a konstans és a négyzetes tagok kiestek. Az utolsó lépésben kiemeltünk a sorfejtés minden tagjából Kx^4-t, ami a sor első el nem tűnő tagja. Az itt szereplő $\varphi(x)$ függvény a $(-1, 1)$ intervallumon egy konvergens Taylor-sor összegfüggvénye, tehát folytonos az origóban, és $\varphi(0) = 0$.

Elevenítsük föl, hogy az a_n és b_n sorokat akkor nevezzük azonos nagyságrendűnek, *$a_n \sim b_n$, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Belátjuk, hogy*

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) \sim K n^{-4} = K \Big(\frac{1}{n}\Big)^4.$$

Ha $n > 1$, akkor $0 < \frac{1}{n} < 1$, tehát

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = K \Big(\frac{1}{n}\Big)^4 \Big(1 + \frac{\varphi\big(\frac{1}{n}\big)}{K}\Big) = K n^{-4} + n^{-4} \varphi\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

és így, kihasználva, hogy $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{f\big(\frac{1}{n}\big)}{K n^{-4}} = 1 + \frac{1}{K} \varphi\Big(\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow[\frac{1}{n}\to 0]{n\to\infty} 1.$$

Tehát $C = K = -\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$, és $\alpha = -4$.

2.144. Példa *Számítsuk ki a*

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}} \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét közelítően!

99 Megoldás: *A megoldás az integrandus binomiális sorfejtésén alapul:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}} = \left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} x^{2k}, \quad ha \ \left|x^2\right| < 1,$$

tehát a konvergenciasugár $R = 1$. A 2.62. tétel értelmében a hatványsort szabad tagonként integrálni, mivel $[0, 0.1] \subset (-1, 1)$. Tehát:

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \int_0^{0.1} x^{2k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Bigg|_0^{0.1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \frac{0.1^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$= \underbrace{0.1 + \frac{-1}{3}\frac{0.1^3}{3} + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{2!}\frac{0.1^5}{5}}_{:=a} + \underbrace{\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!}\frac{0.1^7}{7}}_{:=b} + \cdots \approx a,$$

és az elkövetett hiba $|H| \le |b|$. (Egyszerűen belátható, hogy Leibniz-sorról van szó.)

2.145. Példa *Határozzuk meg az*

$$\int_0^{0.1} \sqrt[5]{32+x^5}\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét közelítőleg, az integrálandó függvényt ötödrendű Taylor-polinomjával közelítve! Adjunk becslést az elkövetett hibára!

100 Megoldás: *Először fejtsük binomiális sorba az integrandust:*

$$\sqrt[5]{32+x^5} = \sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{1+\frac{x^5}{32}} = 2\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{5k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \frac{1}{32^k} x^{5k}.$$

A konvergenciasugár

$$\left|\left(\frac{x}{2}\right)^5\right| < 1, \quad \Longrightarrow \quad |x| < 2\,, \quad \Longrightarrow \quad R = 2,$$

ezért a $[0, 0.1]$ intervallumon a sor egyenletesen konvergens, tehát szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^{0.1} 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \frac{1}{32^k} x^{5k}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \frac{1}{32^k}\,\frac{x^{5k+1}}{5k+1}\Bigg|_0^{0.1} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \frac{1}{32^k}\,\frac{0.1^{5k+1}}{5k+1} = 2\left(0.1 + \frac{\frac{1}{5}}{1}\,\frac{1}{32}\,\frac{0.1^6}{6} + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2!}\,\frac{1}{32^2}\,\frac{0.1^{11}}{11} + \cdots\right) \approx$$

$$\approx 2\left(0.1 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{32}\,\frac{0.1^6}{6}\right).$$

Egyszerűen látható, hogy a kapott sor most is Leibniz-típusú, ezért a hiba nagysága kisebb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke:

$$|H| < 2\left|\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2}\frac{1}{32^2}\frac{0.1^{11}}{11}\right|.$$

2.6.4. Gyakorló feladatok

1. Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

   (a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}$

   (c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

   (d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

   (e) $f(x) = \sin^2 x$

   (f) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (g) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$

   (h) $f(x) = \dfrac{3}{8+x^3}$

   (i) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}$

   (j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$

2. Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 1$ körüli Taylor-sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

   (a) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   (c) $f(x) = \mathrm{e}^{x}$

   (d) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

3. $f(x) = x^5\mathrm{e}^x, \qquad f^{(67)}(0) = ?$

4. $f(x) = \ln(8-3x^2), \qquad f^{(10)}(0) = ?,\ f^{(9)}(0) = ?$

5. Fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorba az

$$f(x) = \operatorname{arsh} x \quad \text{függvényt, felhasználva, hogy} \quad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

és határozza meg a konvergenciasugarat! Adja meg a $g(x) = 1 - \operatorname{arsh}(2x^3)$ függvény sorfejtését is!

6. $f(x) = \sqrt[5]{1+2x^2} + \operatorname{sh} x - 1$

   (a) Adja meg a függvény $x_0 = 0$ körüli hatodrendű Taylor-polinomját!

   (b) Határozza meg a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorának konvergenciasugarát!

7. (a) Fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorba az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$ függvényt, és határozza meg a sorfejtés konvergenciasugarát!

   (b) Írja fel f harmadrendű Taylor-polinomját elemi műveletekkel!

   (c) $\left(x^{100} f(x)\right)^{(200)}(0) = ?$

8. $f(x) = \sqrt[12]{1+2x^2} - \sqrt[18]{1+3x^2}$

   (a) Írja fel a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát!

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} = ?$

9. Határozza meg az alábbi integrálok közelítő értékét az integrálandó függvény Taylor-sorának 3. részletösszegét felhasználva!

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 \, \mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, \mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \, \mathrm{d}x$

2.7. Fourier-sor

2.7.1. Bevezetés

Elevenítsünk fel néhány lineáris algebrában tanult fogalmat!

2.146. Definíció (Skaláris szorzás) *Ha $\mathcal{L}$ lineáris tér (vektortér) a valós számok teste felett, akkor a $v_1, v_2 \in \mathcal{L}$ vektorpárokon értelmezett $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in \mathbb{R}$ műveletet* skaláris szorzásnak *nevezzük, ha $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathcal{L}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő axiómák:*

1. $(\underline{v}|\underline{v}) \geq 0$ *és* $(\underline{v}|\underline{v}) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\underline{v} = \underline{0}$. *(Itt $\underline{0}$ az $\mathcal{L}$ nulleleme.)*
2. $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = (\underline{v}_2|\underline{v}_1)$ *(Komplex vektortér esetén: $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = \overline{(\underline{v}_2|\underline{v}_1)}$.)*
3. $(\lambda\underline{v}_1|\underline{v}_2) = \lambda(\underline{v}_1|\underline{v}_2)$
4. $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2|\underline{v}_3) = (\underline{v}_1|\underline{v}_3) + (\underline{v}_2|\underline{v}_3)$

Természetesen az axiómákból azonnal következik a valós vektortéren értelmezett skaláris szorzás linearitása a második változóban is.

2.147. Példa *Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények $C^0_{[a,b]}$ lineáris terén az $(f|g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ művelet skaláris szorzás.*

2.148. Definíció (Euklideszi tér) *Azokat a lineáris tereket, amelyekben skaláris szorzás van értelmezve,* euklideszi tereknek *nevezzük.*

A következő alapvető fogalmakat értelmezzük euklideszi terekben:

2.149. Definíció (Ortogonalitás, norma, távolság) *Ha két vektor skaláris szorzata nulla, azaz $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{v}_1$* ortogonális *$\underline{v}_2$-re.*
A $v \in \mathcal{L}$ vektor normája*: $\| \underline{v} \| = \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$ (euklideszi norma).*
Két vektor távolsága *különbségük normája: $\rho(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \| \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \|$.*

A következő absztrakt tételt közvetlenül alkalmazzuk majd a Fourier-sorok elméletében.

2.150. Tétel *Ha a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok egyike sem nullvektor ($\underline{v}_i \neq \underline{0}$), és páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy az adott vektorok lineáris kombinációjaként előáll a nullvektor. Szorozzuk meg az így kapott egyenlőséget skalárisan az egyik $\underline{v}_i$ vektorral:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_i\underline{v}_i + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0} \qquad | \cdot \underline{v}_i$$
$$\lambda_1 \underbrace{(\underline{v}_1|\underline{v}_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_{i-1} \underbrace{(\underline{v}_{i-1}|\underline{v}_i)}_{=0} + \lambda_i \underbrace{(\underline{v}_i|\underline{v}_i)}_{\neq 0} + \cdots + \lambda_n \underbrace{(\underline{v}_n|\underline{v}_i)}_{=0} = 0.$$

Mivel a $\underline{v}_i$ vektor tetszőlegesen választható, ezért minden i-re $\lambda_i = 0$, ami azt jelenti, hogy csak a triviális lineáris kombinációval állítható elő a nullvektor, tehát a vizsgált rendszer valóban lineárisan független. □

2.151. Megjegyzés *A tételt az egyszerűség kedvéért véges számosságú vektorrendszerre mondtuk ki, de teljesen hasonlóan bizonyítható az állítás tetszőleges számosságú vektorrendszer esetén is, ugyanis a lineáris kombináció fogalma mindig véges tagú összeget jelent.*

2.7.2. A trigonometrikus rendszer

2.152. Definíció (Trigonometrikus rendszer) *Az*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \dots\} = \{1, \sin kx, \cos kx\}_{k=0}^{\infty}$$

függvényrendszert trigonometrikus rendszernek *nevezzük.*

A trigonometrikus rendszer első néhány eleme a 2.7.2 ábrán látható.

2.153. Tétel (Trigonometrikus rendszer ortogonalitása) *Az* 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ $\dots \sin kx$, $\cos kx$ $\dots$ *függvények páronként ortogonálisak a* $[-\pi, \pi]$ *intervallumon (vagy általában az* $[a, a+2\pi]$ *-n), így közülük bármely véges sok lineárisan független.*

Itt az ortogonalitást az

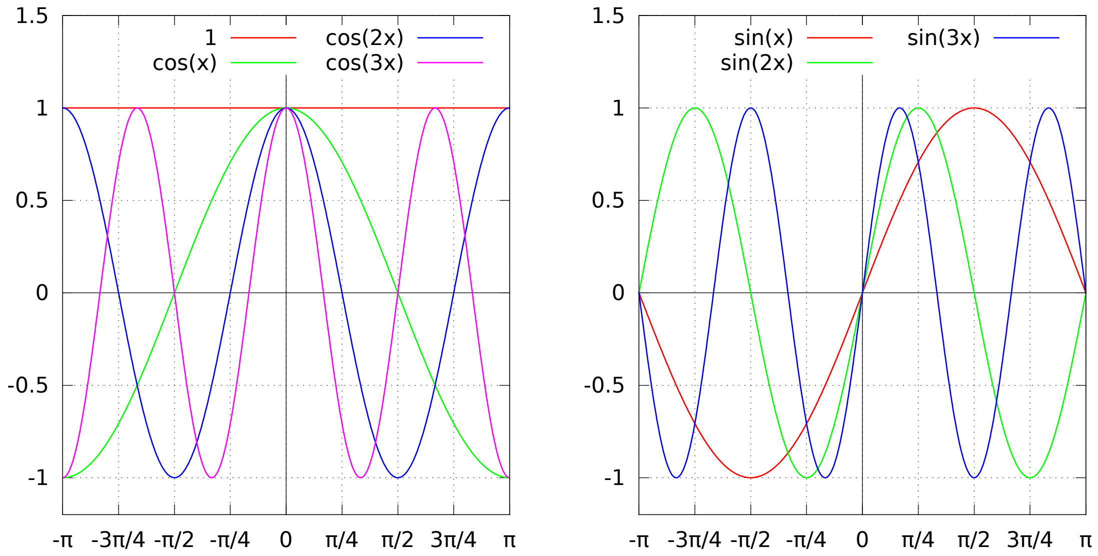
$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

skaláris szorzással értelmezzük.

2.154. Megjegyzés *A tételben szereplő függvények által generált tér nem véges dimenziós.*

Bizonyítás.

$$\left.\begin{aligned} (1|\sin kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x = 0 \\ (1|\cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}\right\}\text{teljes periódusra integrálunk}$$



2.8. ábra. A trigonometrikus rendszer első néhány függvénye.

$$(\sin kx|\sin lx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin lx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos{(k-l)x} - \cos{(k+l)x})\,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{cases} \pi, & \text{ha } \; k = l \\ 0, & \text{ha } \; k \neq l \end{cases}$$

Ebből speciálisan az is következi, hogy $\| \sin kx \| = \sqrt{(\sin kx|\sin kx)} = \sqrt{\pi}$.

Ehhez hasonlóan igazolható, hogy

$$(\cos kx|\cos lx) = \begin{cases} \pi, & \text{ha } \; k = l \\ 0, & \text{ha } \; k \neq l \end{cases}, \qquad \text{és} \qquad (\sin kx|\cos lx) = 0.$$

Speciálisan: $\| \cos kx \| = \sqrt{(\cos kx|\cos kx)} = \sqrt{\pi}$. □

2.155. Megjegyzés *A konstans* 1 *függvény normája különbözik a többi függvény normájától:*

$$(1|1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \implies \| 1 \| = \sqrt{(1|1)} = \sqrt{2\pi}.$$

2.156. Megjegyzés *A 2.153. tétel és bizonyítása értelmében a következő függvényrendszer ortonormált rendszer (ONR):*

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_3(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots \quad \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots$$
$$\varphi_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_4(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots \quad \varphi_{2k}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots$$

Mivel a $\{\varphi_i\}$ függvények közül tetszőlegesen kiválasztva véges sokat, azok lineárisan függetlenek, jogos a kérdés, hogy egy 2π szerint periodikus f függvény felírható-e a következő alakban:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \, \varphi_i(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

A felvetődő kérdések:

1. Hogyan kaphatóak meg az α_i illetve az a_k, b_k együtthatók?
2. Milyen f-ekre és hol van egyenlőség?

2.157. Definíció (Trigonometrikus sor) *A*

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \, \varphi_i(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

alakú függvénysort trigonometrikus sornak *nevezzük.*

2.158. Definíció (Trigonometrikus polinom) *A*

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

alakú függvényeket n-edrendű trigonometrikus polinomnak *nevezzük.*

Felvetődik a kérdés, hogy mi a kapcsolat a trigonometrikus sor Φ összegfüggvénye és az a_k, b_k együtthatók között. Bizonyos feltételek mellett erre ad választ a következő tétel.

2.159. Tétel *Ha a*

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus függvénysor egyenletesen konvergál a Φ összegfüggvényhez, akkor Φ és az a_k, b_k együtthatók között egyértelmű kapcsolat van, mégpedig:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{(\Phi | \cos kx)}{(\cos kx | \cos kx)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{(\Phi | \sin kx)}{(\sin kx | \sin kx)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás. Általánosságban a $\Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)$ egyenletet kellene szoroznunk skalárisan φ_k-val és így megkapnánk α_k értékét, ahonnan már a_k ill. b_k is meghatározható.

Most a tételben szereplő alakot használva az a_2 együtthatóra mutatjuk meg a képlet helyességét. Hasonlóan történik a bizonyítás a többi együtthatóra is.

Az

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \cdots = \Phi(x)$$

egyenletet $\cos 2x$-szel beszorozva és $[-\pi, \pi]$-n integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{a_0}{2} \cdot \cos 2x + a_1 \cos x \cdot \cos 2x + b_1 \sin x \cdot \cos 2x + a_2 \cos 2x \cdot \cos 2x + \cdots$$
$$\cdots + a_k \cos kx \cdot \cos 2x + b_k \sin kx \cdot \cos 2x + \cdots \Big) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cdot \cos 2x \, \mathrm{d}x.$$

Az egyenletes konvergencia miatt szabad tagonként integrálni (2.31. tétel), tehát

$$\frac{a_0}{2} \, (1| \cos 2x) + a_1 \, (\cos x | \cos 2x) + b_1 \, (\sin x | \cos 2x) + a_2 \, (\cos 2x | \cos 2x) + \cdots$$
$$\cdots + a_k \, (\cos kx | \cos 2x) + b_k \, (\sin kx | \cos 2x) + \cdots = (\Phi(x) | \cos 2x).$$

A bal oldalon $(\cos 2x | \cos 2x) = \| \cos 2x \|^2 = \pi$, a többi skaláris szorzat pedig az ortogonalitás miatt (2.153. tétel) nulla, így

$$a_2 \, (\cos 2x | \cos 2x) = (\Phi(x) | \cos 2x) \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{(\Phi(x) | \cos 2x)}{(\cos 2x | \cos 2x)}.$$

□

2.160. Megjegyzés *A tétel feltételei között igen fontos, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorról van szó, hiszen a 2.31. tétel értelmében emiatt tudtuk tagonként integrálni a végtelen sort.*

Eddig kizárólag 2π szerint periodikus függvények sorfejtésével foglalkoztunk. A 2.152. trigonometrikus rendszer (illetve a 2.156. megjegyzésben leírt normált változata) és a 2.159. tétel is könnyen kiterjeszthető $2l$ szerint periodikus függvényekre ($0 < l \in \mathbb{R}$).

2.161. Tétel (A $2l$ szerint periodikus trigonometrikus sor) *Tetszőleges $l > 0$ esetén a*

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \psi_5(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{3\pi x}{l} \cdots$$
$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad \psi_6(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{3\pi x}{l} \cdots$$

függvényrendszer ortonormált rendszer a $[-l,l]$ (vagy az $[x,x+2l]$) intervallumon a 2.147. példában definiált skaláris szorzásra nézve.

Továbbá, ha a

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

trigonometrikus függvénysor egyenletesen konvergál a Φ összegfüggvényhez, akkor

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \Phi(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \Phi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen hasonló a 2.153. és a 2.159. tételek bizonyításához. □

2.7.3. Fourier-sorfejtés

2.162. Definíció (Fourier-sor) *Legyen az f függvény 2π-szerint periodikus és a $[0,2\pi]$ intervallumon Riemann-integrálható ($f \in R_{[0,2\pi]}$). Ekkor az f függvény* Fourier-sora *az*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus sor, ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} (f | \cos kx), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} (f | \sin kx), \quad k = 1, 2, \ldots$$

(Itt $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.) Az a_k, b_k együtthatók a Fourier-együtthatók.

Jelölje Φ_n a Fourier-sor n-edik részletösszegét, Φ pedig az összegfüggvényt, tehát

$$\Phi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad \Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

A következő (bizonyítás nélkül közölt) tétel értelmében az adott fokú trigonometrikus polinomok között a Fourier-sor Φ_n részletösszegei közelítik normában a legjobban az f sorba fejtett függvényt.

2.163. Tétel *Legyen f integrálható, 2π-szerint periodikus függvény,*

$$t_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i \, \varphi_i(x)$$

pedig egy n-edfokú trigonometrikus polinom. Ekkor a

$$\| f - t_n \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 \, \mathrm{d}x}$$

távolság akkor minimális, ha az A_k, B_k együtthatók a Fourier-együtthatók, tehát $t_n = \Phi_n$.

2.164. Példa *Határozzuk meg az $f(x) = \sin^4 x$ függvény Fourier-sorát!*

101 Megoldás: *A sorfejtéshez most fölösleges a 2.162. definícióban szereplő integrálokat kiszámolnunk, elég fölismernünk, hogy f véges trigonometrikus polinom:*

$$f(x) = \sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} \underbrace{\cos^2 2x}_{\frac{1 + \cos 4x}{2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{8}}_{a_0} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a_2} \cos 2x \underbrace{+\frac{1}{8}}_{a_4} \cos 4x = \Phi(x).$$

Tehát f Fourier-sorában csak véges sok együttható nem zérus, és a Fourier-sor mindenütt előállítja a függvényt.

A Fourier-sorokkal kapcsolatban még válaszolni kell arra a kérdésre, hogy milyen x-ekre konvergens a Fourier-sor, és mikor igaz, hogy $f(x) = \Phi(x)$. Bizonyítás nélkül közlünk erre vonatkozó tételeket.

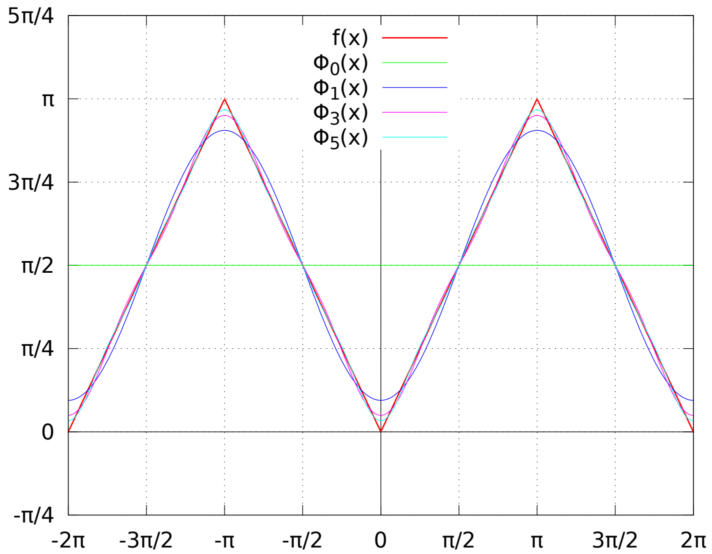
2.165. Tétel *Ha a 2π szerint periodikus f függvény folytonos, és Fourier-sora egyenletesen konvergens, akkor $f(x) = \Phi(x)$.*

Például az úgynevezett háromszögjelre alkalmazható a tétel.

2.166. Példa (Háromszögjel Fourier-sora) *Határozzuk meg az*

$$f(x) = |x|, \quad \text{ha } x \in [-\pi, \pi); \qquad\qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

formulákkal értelmezett f háromszögjel Fourier-sorát, és igazoljuk, hogy a sor összege előállítja f-et!



2.9. ábra. Az $f(x)$ háromszögjel és Fourier-sorának első néhány részletösszege.

102 Megoldás: *Az f függvényt és Fourier-sorának első néhány részletösszegét a 2.9 ábra mutatja.*

A Fourier-sor együtthatói a 2.162. definíció alapján számoljuk, az integrálást a $[-\pi, \pi]$ intervallumra végezve ($k \in \{1, 2, 3 \dots\}$):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{\pi} = \pi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{|x|}^{\textit{páros}} \cdot \overbrace{\sin kx}^{\textit{páratlan}}}_{\textit{páratlan}} \,\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{|x|}^{\textit{páros}} \cdot \overbrace{\cos kx}^{\textit{páros}}}_{\textit{páros}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{x\sin kx}{k}\right]_{x=0}^{\pi}}_{0-0=0} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{x=0}^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \textit{ha } k \textit{ páros,} \\ \dfrac{-4}{k^2\pi}, & \textit{ha } k \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a háromszögjel Fourier-sora:

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\Big) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2}.$$

A kapott trigonometrikus sor általános tagja könnyen majorálható,

$$\left|\frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2n+1)^2} = b_n, \quad \textit{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty,$$

tehát a Weierstrass-kritérium (2.24. tétel) értelmében a sor egyenletesen és abszolút konvergens $\mathbb{R}$-en. Mivel f folytonos, ezért az előző, 2.165. tétel értelmében a most kapott Fourier-sor előállítja a háromszögjelet, $\Phi(x) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetében. A 2.9 ábrán látható, hogy már a Fourier-sor első néhány részletösszege is igen jól közelíti az f függvényt.

2.167. Megjegyzés *Ahogy hatványsoroknál, most is egy rögzített x_0 pontban kiértékelve a sort egy numerikus sor összegét kapjuk meg. Például az $x_0 = 0$ pontban*

$$f(0) = 0 = \Phi(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

ahonnan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

adódik.

2.168. Tétel *Ha f kétszer folytonosan deriválható, 2π szerint periodikus függvény, akkor Fourier-sora egyenletesen konvergens.*

Önmagában az f Fourier-sorának egyenletes konvergenciából még nem következik az $f(x) = \Phi(x)$ egyenlőség. Csak annyi következik a 2.159. tétel értelmében, hogy Φ Fourier-együtthatói megegyeznek f Fourier-együtthatóival. (És a 2.27. tétel értelmében Φ folytonos.)

Felmerül a következő kérdés: ha f és Φ Fourier-együtthatói azonosak, lehetséges-e, hogy $f(x) \not\equiv \Phi(x)$? Lehetséges. Ha a 2.166. példában az $f(x) = |x|$ függvény értékét egyetlen pontban megváltoztatjuk, (pl. $f_1(1) := 3$, és $x \neq 1$ esetén $f_1(x) = f(x)$), akkor a Fourier együtthatók nem változnak meg, így $\Phi(x)$ sem változik, de $f_1(1) \neq \Phi(1)$, így $f_1 \not\equiv \Phi \equiv f$.

Ha viszont f folytonos, akkor már érdekes a kérdés, és a válasz összefügg a trigonometrikus rendszer teljességével.

Legyenek f és Φ Fourier-együtthatói azonosak, tehát $f-\Phi$ Fourier-együtthatói nullák, vagyis $(f - \Phi|\varphi_k) = 0$. Tehát $f - \Phi$ ortogonális a $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ függvényrendszerre.

Bővíthető-e a trigonometrikus rendszer?

2.169. Tétel (Trigonometrikus rendszer teljessége) *Jelölje $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a 2.156. megjegyzésben is használt trigonometrikus rendszert. Ha a g függvény 2π-szerint periodikus, folytonos, és*

$$(g|\varphi_k) = \int_0^{2\pi} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

akkor $g \equiv 0$, azaz a trigonometrikus rendszer folytonos függvénnyel nem bővíthető.

A Fourier-sor konvergenciájával kapcsolatban sok tétel ismert. Mi egy könnyen kezelhető tételt használunk:

2.170. Tétel (Dirichlet, elégséges feltétel a Fourier-sor konvergenciájára) *Ha az f függvény 2π-szerint periodikus, integrálható a $[0,2\pi]$ intervallumon, és $[0,2\pi]$ felbontható véges sok részintervallumra úgy, hogy ezek belsejében f monoton, és a részintervallumok végpontjaiban f-nek a féloldali határértékei léteznek (végesek), akkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, és*

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Tudjuk, hogy monoton függvénynek minden pontban létezik a bal és jobb oldali határértéke, tehát a Dirichle-tétel feltételeinek eleget tevő f függvénynek csak elsőfajú szakadásai lehetnek. A tétel értelmében f folytonossági pontjaiban a Fourier-sor előállítja a függvényt, a szakadási pontokban pedig a két féloldali határérték átlagát.

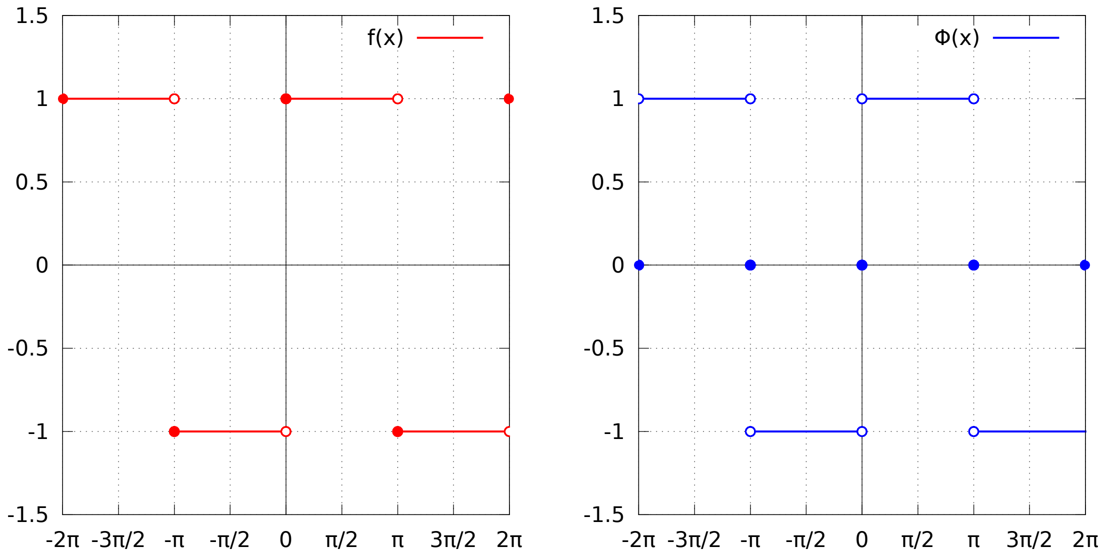
2.171. Példa (Négyszögjel Fourier-sora) *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in [2k\pi, 2k\pi+\pi), \\ -1, & ha\ x \in [2k\pi-\pi, 2k\pi), \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

négyszögjel Fourier-sorát valamint a Fourier-sor Φ összegét!

103 Megoldás: *Az f függvényt a 2.10 ábra első része mutatja.*

A Fourier-sor együtthatói a 2.162. definíció alapján számoljuk, az integrálást a $[-\pi,\pi]$



2.10. ábra. Az $f(x)$ négyszögjel és Fourier-sorának $\Phi(x)$ összege.

intervallumra végezve ($k \in \{1, 2, 3 \dots\}$):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \textit{mivel } f \textit{ páratlan függvény,}$$

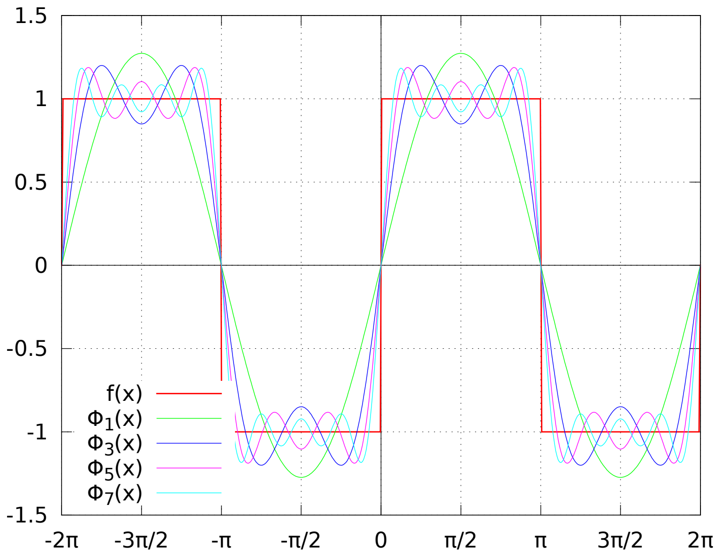
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\textit{páratlan}} \cdot \overbrace{\cos kx}^{\textit{páros}}}_{\textit{páratlan}}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\textit{páratlan}} \cdot \overbrace{\sin kx}^{\textit{páratlan}}}_{\textit{páros}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_{x=0}^{\pi} = \begin{cases} 0, & \textit{ha } k \textit{ páros,} \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \textit{ha } k \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

(A négyszögjel valójában nem páratlan függvény, de ha a szakadási helyeken értékét 0*-nak definiálnánk, akkor már az lenne, és ez a változtatás az integrálok értékét nem befolyásolja.) Tehát a négyszögjel Fourier-sora:*

$$\Phi(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{2n+1}. \tag{2.5}$$



2.11. ábra. Az $f(x)$ négyszögjel és Fourier-sorának első néhány részletösszege.

A Dirichlet-tétel értelmében (2.170. tétel) a sor összege előállítja a függvényt azokban a pontokban, ahol f folytonos, a szakadási helyeken pedig

$$\Phi(k\pi) = \frac{f(k\pi + 0) + f(k\pi - 0)}{2} = 0.$$

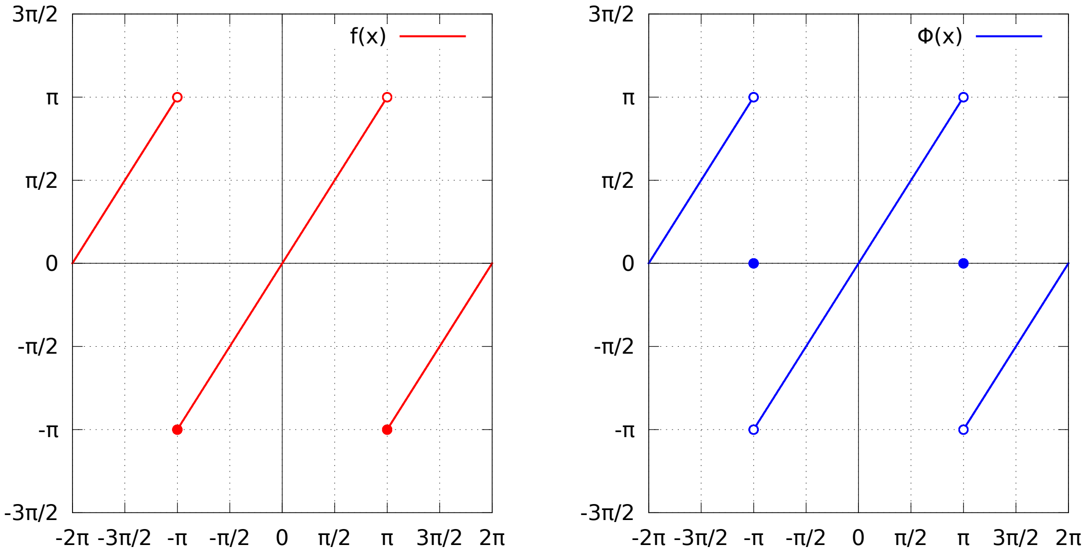
A 2.10 ábrán összehasonlíthatjuk a sorba fejtett $f(x)$ függvényt és Fourier-sorának $\Phi(x)$ összegét. A 2.11 ábra a négyszögjel Fourier-sorának első néhány közelítő összegét mutatja. Az animáció azt mutatja, hogy az első mintegy hatvan Fourier-részletösszeg hogyan közelíti a négyszögjelet.

2.172. Megjegyzés *A négyszögjel Fourier-sora biztos, hogy nem egyenletesen konvergens a $[0, 2\pi]$ intervallumon, mert ha az lenne, akkor a 2.27. tétel értelmében a Φ összegfüggvény folytonos lenne (2.29. következmény). Ez a tény az animáción is jól látszik, a szakadásoknál a részletösszegek „túllövése” nem csökken, csak egyre kisebb tartományra korlátozódik.*

2.173. Megjegyzés *A (2.5) sorfejtést az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen kiértékelve azt kapjuk, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Pontosan ugyanezt az összeget már az arctg *függvény Taylor-sorfejtésénél is, a 2.95. megjegyzésben megkaptuk.*



2.12. ábra. Az $f(x)$ fűrészfogjel és Fourier-sorának $\Phi(x)$ összegfüggvénye.

2.174. Példa (Fűrészfogjel Fourier-sora) *Határozzuk meg az*

$$f(x) = x, \quad \text{ha } x \in [-\pi, \pi); \qquad\qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

formulákkal értelmezett fűrészfogjel Fourier-sorát valamint a Fourier-sor Φ összegét!

104 Megoldás: *A Dirichlet-tétel (2.170. tétel) értelmében a Fourier-sor Φ összegfüggvénye megegyezik f-fel azokban a pontokban, ahol f folytonos, a szakadási helyeken pedig a bal és jobb oldali határérték számtani közepét kapjuk. Az f függvényt és a Fourier-sorának összegét a 2.12 ábra mutatja.*

A Fourier-sor együtthatói most is a 2.162. definíció alapján számoljuk, az integrálást *a* $[-\pi,\pi]$ *intervallumra végezve* ($k\in\{1,2,3\dots\}$)*:*

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = 0,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x\cos kx}_{\textit{páratlan}}\,\mathrm{d}x = 0,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x\sin kx}_{\textit{páros}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_{x=0}^{\pi}}_{\frac{(-1)^{k+1}\pi}{k}} +\\
&\quad + \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,\mathrm{d}x = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{x=0}^{\pi}}_{=0} =\\
&= \begin{cases} \frac{-2}{k}, & \textit{ha } k \textit{ páros},\\ \frac{2}{k}, & \textit{ha } k \textit{ páratlan}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Tehát a fűrészfogjel Fourier-sora:

$$
\Phi(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} = 2\sin x - 2\frac{\sin 2x}{2} + 2\frac{\sin 3x}{3} - 2\frac{\sin 4x}{4} + \cdots \tag{2.6}
$$

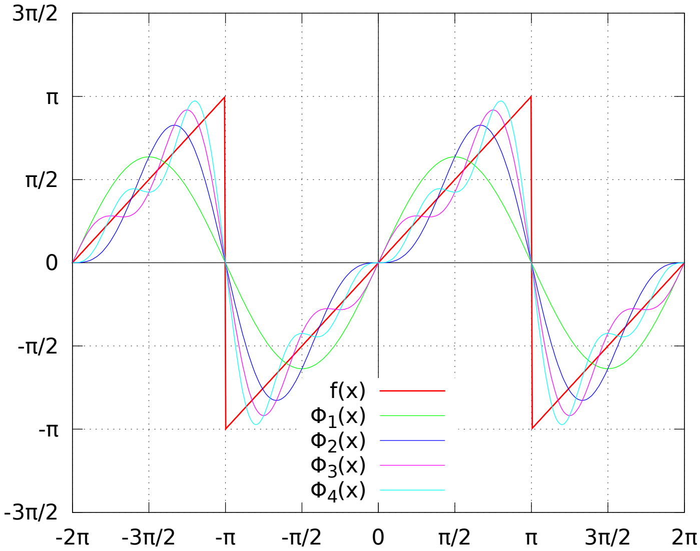
A 2.170. Dirichlet-tétel értelmében

$$
\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{ha } x \neq \pi + 2k\pi,\\ 0, & \textit{ha } x = \pi + 2k\pi.\end{cases} \qquad (k\in\mathbb{Z})
$$

A fűrészfogjel Fourier-sorának első néhány részletösszege a 2.13 ábrán, valamint az animáción látható.

2.175. Megjegyzés *A 2.27. tétel 2.29. következménye értelmében a fűrészfogjel Fourier-sora sem egyenletesen konvergens a* $[0,2\pi]$ *intervallumon. Ez most is jól látszik az animáción.*

A (2.6) sorfejtést az $x=\frac{\pi}{2}$ *helyen kiértékelve most is a 2.173. megjegyzésben szereplő numerikus sor összegét kapjuk meg.*



2.13. ábra. Az $f(x)$ fűrészfogjel és Fourier-sorának első néhány részletösszege.

3. fejezet

Többváltozós függvények

3.1. Bevezető

3.1.1. Véges dimenziós euklideszi tér

Az n-dimenziós valós euklideszi teret $\mathbb{R}^n$-nel jelöljük, elemei rendezett szám n-esek, azaz n-dimenziós vektorok. Ezeket aláhúzással jelöljük.

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

3.1. Tétel *$\mathbb{R}^n$ lineáris tér a vektorok összeadására illetve a vektor skalárral való szorzására nézve.*

Ahhoz, hogy egy vektorteret euklideszi térnek nevezzünk, szükséges egy úgynevezett skaláris szorzat (lásd 2.146. Definíció), amit szokásosan a következőképpen értelmezünk

$$(\underline{x} \mid \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

Ha nem okoz félreértést, megtehetjük, hogy egyszerű szorzásként jelöljük: $\underline{x}\underline{y}$.

3.2. Tétel *A fenti definíció kielégíti a skaláris szorzat axiómáit.*

Euklideszi tér mindig normált tér is, azaz a belső szorzatból mindig származtatható norma, amit szokásosan abszolút értéknek vagy hosszúságnak nevezünk. Nevezetesen

$$\| \underline{x} \| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\underline{x}|.$$

Normált tér metrikus tér is, azaz a normából mindig származtatható metrika, amit szokásosan távolságnak nevezünk. Nevezetesen

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \| \underline{x}-\underline{y} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Az alábbi vektorrendszert szokásosan $\mathbb{R}^n$ természetes bázisának nevezzük.

$$\underline{e_i} = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{i-1 \text{ db}},\underset{i.}{1},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i \text{ db}}) \in \mathbb{R}^n, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Valóban, ezek páronként merőlegesek (skaláris szorzatuk 0), így lineárisan függetlenek.

Továbbá, kifeszítik a teret, azaz generátorrendszert alkotnak, ugyanis minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ esetén

$$\underline{x} = x_1\underline{e_1} + x_2\underline{e_2} + \cdots + x_n\underline{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\underline{e_i}.$$

Végül egységnyi hosszúak, így ortonormált bázist alkotnak. Ezért $\mathbb{R}^n$ valóban n-dimenziós.

3.3. Megjegyzés *Két- és háromdimenziós esetben ($n=2,3$) a koordinátákat sokszor jelöljük x_1, x_2 és x_3 helyett x, y és z-vel, illetve a bázisvektorokat $\underline{e_1}$, $\underline{e_2}$ és $\underline{e_3}$ helyett $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$-val.*

3.4. Definíció *Ha $D \subset \mathbb{R}^n$, akkor az*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

függvényt n-változós függvénynek nevezzük.

A függvény értékkészlete is lehetne többdimenziós, azaz többértékű (vektor értékű) függvényekről is beszélhetnénk, de a 3.2.6, 3.2.7 és 3.3.8 alszakaszokat leszámítva, többnyire csak egyértékű (valós értékű) függvényekről lesz szó. A fejezet többi részében, ha mást nem mondunk, f n-változós (valós értékű) függvényt jelöl.

3.1.2. Néhány definíció és tétel

Kimondunk egy sokszor használható egyszerű tételt.

3.5. Tétel *Ha $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, és $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor*

$$|x_{i_0}| \leq \max_i |x_i| \leq |\underline{x}| \leq \sum_i |x_i|,$$

és

$$|x_{i_0} - y_{i_0}| \leq \max_i |x_i - y_i| \leq d(\underline{x}, \underline{y}) \leq \sum_i |x_i - y_i|.$$

Fontos elnevezések és jelölések.

- Környezet: Minden $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$ esetén $\underline{a}$ r sugarú környezete

  $$K_{\underline{a},r} = K(\underline{a}, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{a}) < r\}.$$

  Ha r-nek nincs jelentősége, röviden $K_{\underline{a}}$-val is jelöljük.

  $n = 1$ esetén $(a - r, a + r)$ nyílt intervallum;

  $n = 2$ esetén $\underline{a}$ középpontú r sugarú nyílt körlap;

  $n = 3$ esetén $\underline{a}$ középpontú r sugarú nyílt gömb;

  $n > 3$ esetén n dimenziós $\underline{a}$ középpontú r sugarú nyílt gömb.

- Átszúrt környezet: Minden $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$ esetén $\underline{a}$ r sugarú átszúrt vagy lyukas környezete

  $$\dot{K}_{\underline{a},r} = K_{\underline{a},r} \setminus \{\underline{a}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < d(\underline{x}, \underline{a}) < r\}.$$

- Belső pont: A $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ belső pontja, ha $\exists K_{\underline{b}} : K_{\underline{b}} \subset A$.

  $\operatorname{int} A$: A belseje, azaz A belső pontjainak halmaza.

- Határpont: A $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$-et az $A \subset \mathbb{R}^n$ határpontjának nevezzük, ha se nem belső pontja, se nem külső pontja, azaz ha $\forall K_{\underline{h}} : K_{\underline{h}} \not\subset A$ és $K_{\underline{h}} \cap A \neq \emptyset$.

  $\operatorname{front} A$: A határa, azaz A határpontjainak halmaza.

- Külső pont: A $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ külső pontja, ha $\exists K_{\underline{k}} : K_{\underline{k}} \cap A = \emptyset$.

  $\operatorname{cl} A$: A lezártja, azaz A belső pontjainak és határpontjainak halmaza. Másképpen azon pontok halmaza, melyek nem külső pontok.

- Torlódási pont: $\underline{c}$ torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaznak, ha $\forall \dot{K}_{\underline{c}}$ átszúrt környezetre:

  $$\dot{K}_{\underline{c}} \cap A \neq \emptyset.$$

- Nyílt halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz $\operatorname{int} A = A$.

- Zárt halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt, ha minden határpontja eleme, azaz $\operatorname{cl} A = A$.
- Korlátos halmaz: Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos, ha

$$\exists K_{\underline{0}} : A \subset K_{\underline{0}}.$$

- Kompakt halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, ha korlátos és zárt.

3.6. Megjegyzés *Ha $\overline{A}$ jelöli $A \subset \mathbb{R}^n$ komplementerét, azaz $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus A$, akkor megmutathatóak a következők:*

1. $\overline{\operatorname{int} A} = \operatorname{cl} \overline{A}$.

2. $A \subset \mathbb{R}^n$ pontosan akkor zárt, ha komplementere nyílt.

3. $A \subset \mathbb{R}^n$ pontosan akkor zárt, ha tartalmazza minden torlódási pontját.

Igaz a Cantor-axióma általánosítása:

3.7. Tétel $\mathbb{R}^n$ *egymásba skatulyázott, nem üres, kompakt részhalmazaiból álló sorozat metszete nem üres.*

Bebizonyítható a Bolzano–Weierstrass tétel általánosítása:

3.8. Tétel $\mathbb{R}^n$ *korlátos, végtelen elemű részhalmazának mindig van torlódási pontja.*

- Folytonos út: Ha $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n), \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, és $\varphi_i \in C^0_{[\alpha,\beta]}$ úgy, hogy $\varphi_i(\alpha) = a_i$ és $\varphi_i(\beta) = b_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, akkor

$$g_{\underline{a},\underline{b}} = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n : t \in [\alpha, \beta]\}$$

  egy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő folytonos út.

- Összefüggő halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető halmazbeli folytonos úttal, azaz

$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in A : \exists g_{\underline{a},\underline{b}} \subset A.$$

- Szakasz: Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, akkor az

$$l_{\underline{a},\underline{b}} = \{\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) : t \in [0, 1]\}$$

  az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő szakasz.

- Konvex halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, ha bármely két pontját összekötő szakasz a halmazban fut, azaz

$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in A : l_{\underline{a},\underline{b}} \subset A.$$

3.1.3. Pontsorozatok

3.9. Definíció *Az* $\underline{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *függvényt* n*-dimenziós pontsorozatnak, vagy vektorsorozatnak nevezzük.*

A számsorozatoknál megszokott módon a sorozat k*-adik elemére az* $\underline{x}(k)$ *helyett az* $\underline{x}_k$ *jelölést használjuk, és ha ez nem okoz félreértést a sorozatot is* $\underline{x}_k$*-val jelöljük.*

$\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ *esetén azt mondjuk, hogy* $\underline{x}_k$ *konvergens, és határértéke* $\underline{a}$*, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : k > N(\varepsilon) \implies \underline{x}_k \in K_{\underline{a},\varepsilon}.$$

Ezt úgy is mondjuk, hogy $\underline{x}_k$ *tart* $\underline{a}$*-hoz, és az alábbi módokon jelöljük.*

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{a} \qquad \lim \underline{x}_k = \underline{a} \qquad \underline{x}_k \to \underline{a}$$

3.10. Tétel (Koordinátánkénti konvergencia) *Ha az* $\underline{x}_k$ n*-dimenziós pontsorozat* k*-adik elemének koordinátáira az* $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}$ *jelöléseket használjuk, és* $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*, akkor*

$$\lim \underline{x}_k = \underline{a} \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim x_{ki} = a_i.$$

Bizonyítás.

- $\implies$: Legyen $N(\varepsilon)$ az $\underline{x_k} \to \underline{a}$ pontsorozat konvergenciájánál szereplő, $\varepsilon > 0$-hoz tartozó küszöb! Ugyanez jó lesz minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az $x_{ki} \to a_i$ konvergenciájánál is ε-hoz tartozó küszöbnek, hiszen a 3.5. Tétel szerint, ha $k > N(\varepsilon)$, akkor
$$|x_{ki} - a_i| \le d(\underline{x_k}, \underline{a}) < \varepsilon.$$
- $\impliedby$: Legyen most $N_i(\frac{\varepsilon}{n})$ az $\frac{\varepsilon}{n}$-hez tartozó küszöb, az $x_{ki} \to a_i$ konvergenciánál, és legyen $N(\varepsilon) = \max_i N_i(\frac{\varepsilon}{n})$. Ekkor $k > N(\varepsilon)$ esetén $k > N_i(\frac{\varepsilon}{n})$ minden i-re, és így a 3.5. Tétel szerint
$$d(\underline{x}_k, \underline{a}) \le \sum_i |x_{ki} - a_i| < \sum_i \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon!$$
□

Emiatt a tétel miatt a pontsorozatok konvergenciáját mindig visszavezethetjük számsorozatok konvergenciájának vizsgálatára, így ezzel nem kell külön foglalkoznunk.

3.11. Példa *Mi a határértéke az*

$$\left(\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k, \frac{2k^2 - 1}{k^2 + 1}\right)$$

sorozatnak?

105 Megoldás:

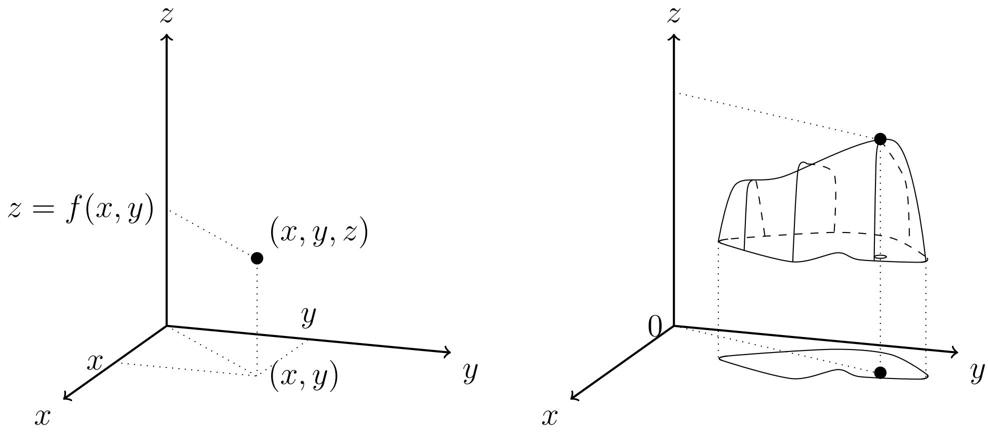
$$\left(\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k, \frac{2k^2 - 1}{k^2 + 1}\right) \to (e^2, 2)$$

3.1.4. Kétváltozós függvény grafikonja

A vektor változós, valós értékű függvények közül fontos a kétváltozós függvények vizsgálata. Ezeket szemléltetni is tudjuk az alábbi módokon.

Ahogy az egyváltozós (egyértékű) függvényt egy görbeként ábrázolhattuk, a kétváltozós függvényt egy felülettel szemléltethetjük, ha elég 'sima'. Ezt a H_0 felületet f grafikonjának nevezzük:

$$H_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\} = \operatorname{graf} f.$$



(a) Egy pont (b) Felület

Például az $f(x, y) = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ függvény grafikonja a $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ felület, azaz

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

tehát egy olyan síkról van szó, amely az x, y, z tengelyeket rendre az $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ pontokban metszi. Lásd a 3.1 ábra.

Ha megforgatjuk az (x, z) síkban lévő $z = f(x)$ görbét a z tengely körül, akkor a

$$z = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

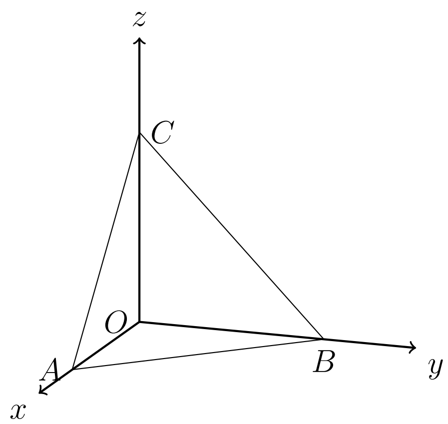
felülethez jutunk. Lásd a 3.2 ábra.

Például a $z = x^2 + 1$ görbének a z tengely körüli megforgatásával a

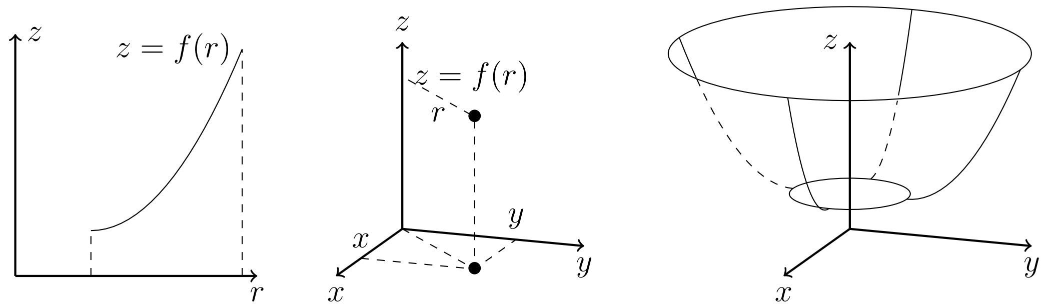
$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1$$

felülethez jutunk (forgási paraboloid). Lásd a 3.3 ábra.

Az $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ grafikonja a $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ felület, ami a $z = \sqrt{x}$ görbe z tengely körüli forgatásával keletkezett. Lásd a 3.4 ábra.



3.1. ábra. Tengelyeket adott pontokban metsző sík.



(a) (b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (c)

3.2. ábra. Forgásfelület

3.1.5. Szintalakzatok

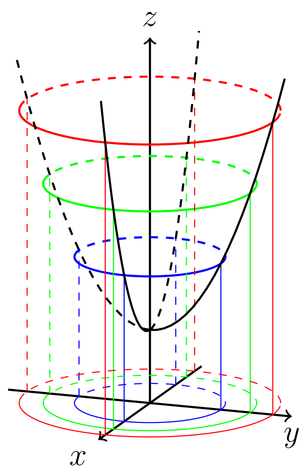
Másik lehetőség többváltozós függvény szemléltetésére a szintalakzatok ábrázolása.

3.12. Definíció *Szintalakzatnak nevezzük azon D_f-beli pontok halmazát, melyekhez f ugyanazt az értéket rendeli.*

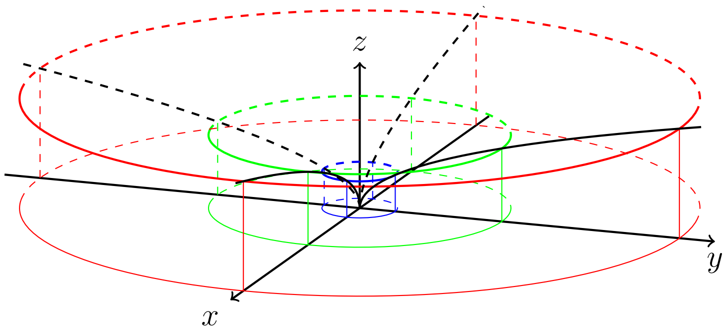
3.13. Megjegyzés *Az értékkészlet minden eleméhez tartozik tehát egy szintalakzat. Ha például $c \in R_f$, akkor a hozzátartozó szintalakzat*

$$\{\underline{x} \in D_f : f(\underline{x}) = c\}.$$

A függvény egy szintalakzaton tehát állandó.



3.3. ábra. Forgásparaboloid.



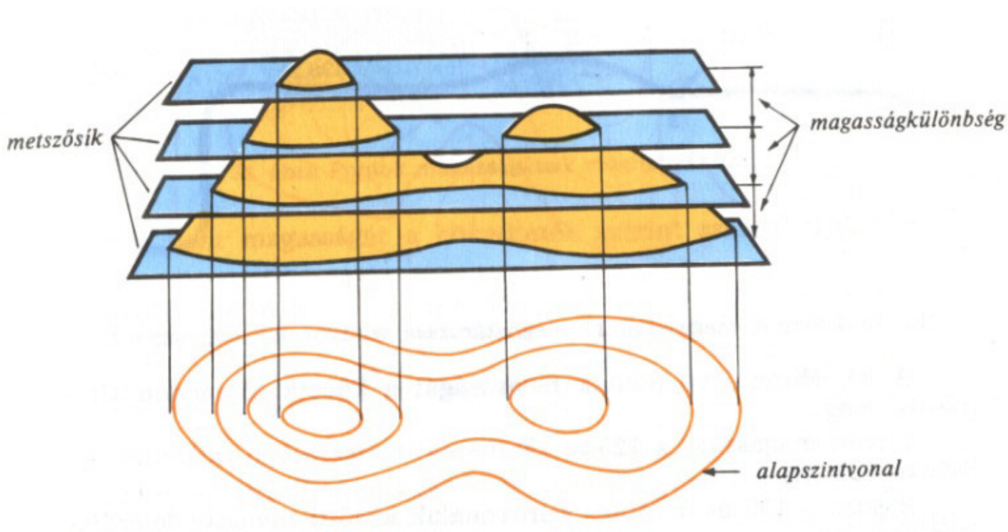
3.4. ábra.

Kétváltozós függvény esetén a rögzített $z \in R_f$-hez tartozó szintalakzat a $z = f(x, y)$ egyenlet megoldásainak halmaza. Ha f elég sima, akkor a szintalakzat egy vagy több görbe az (x, y) síkon, ezért kétváltozós esetben a szintalakzatokat szintvonalaknak hívjuk. Ilyet láthatunk egy domborzati térképen, lásd a 'http://mercator.elte.hu/ deszter/mapinfogyak' oldalról átvett 3.5 ábrán.

Hasonlóan háromváltozós függvény esetén szintfelületről beszélünk.

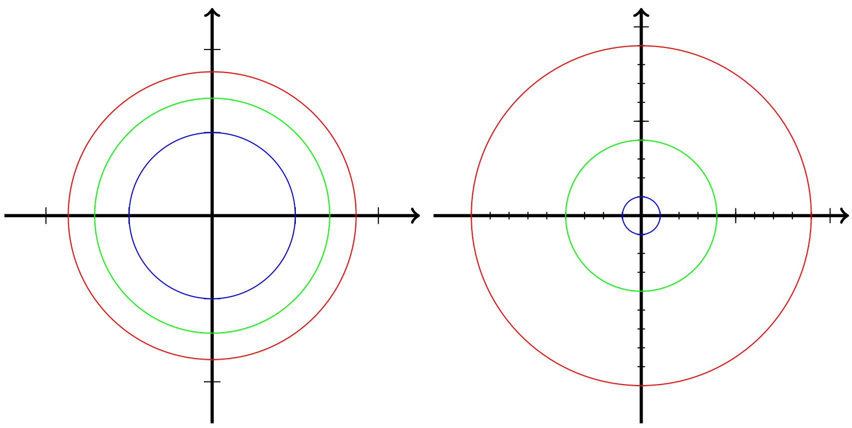
Mivel az előző alszakasz utolsó két függvénye z tengely körüli forgástestet adott, így szintvonalaik origó középpontú körök lesznek.

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ esetén a $z = 1$-hez tartozó szintvonal egyetlen pont, $z < 1$-hez nem tartozik szintvonal, mert $R_f = [1, \infty)$, és $z > 1$ esetén a szintvonal egy origó középpontú kör. A 3.3 és a 3.6(a) ábrákon a $z = 1, 2, 3, 4$-hez tartozó szintvonalak láthatók.



3.5. ábra. Szintvonal

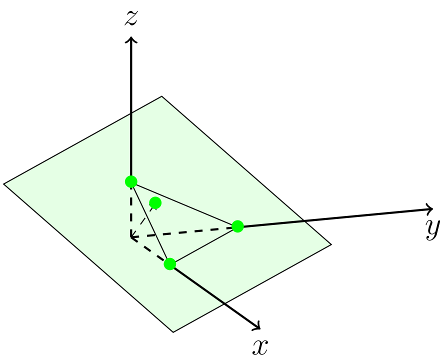
$z = f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ esetén a $z = 0$-hoz tartozó szintvonal egyetlen pont, negatív z-hez nem tartozik szintvonal, mert $R_f = [0, \infty)$, és pozitív z esetén a szintvonal egy origó középpontú kör. A 3.4 és a 3.6(b) ábrákon a $z = 0, 1, 2, 3$-hoz tartozó szintvonalak láthatók.

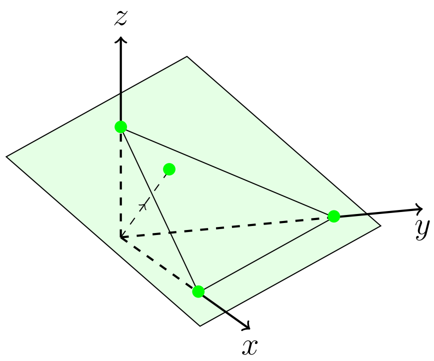


(a) (b)

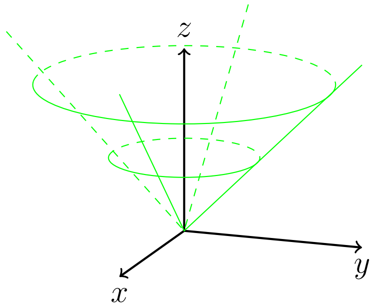
3.6. ábra. Forgástest szintvonala

3.1.6. Néhány felület

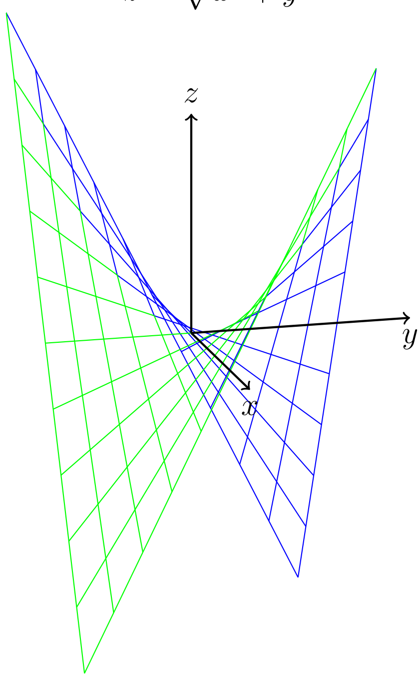




$x+y+2z=6$ $\qquad$ $x+y+2z=12$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$z=xy$

3.1.7. Gyakorló feladatok

Ábrázolja a következő függvényeket!

1. $3x + 4y - z = 2$;
2. $z = 2x^2 + 3y^2$;
3. $z = -x^2 - y^2$;
4. $z = 6 + x^2 + y^2$;
5. $z = 6 - x^2 - y^2$;
6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
7. $z^2 = x^2 + y^2$;
8. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
9. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;
10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;
11. $z = y^2 - x^2$.

3.2. Határérték, folytonosság

3.2.1. Értelmezés

3.14. Definíció *Legyen $\underline{a}$ torlódási pontja D_f-nek, és $b \in \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy f határértéke $\underline{a}$-ban b, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \underline{x} \in D_f \cap \dot{K}_{\underline{a},\delta(\varepsilon)} \implies f(\underline{x}) \in K_{b,\varepsilon}.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = b.$$

Legyen $\underline{a} \in D_f$! Azt mondjuk, hogy f folytonos $\underline{a}$-ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \underline{x} \in D \cap K_{\underline{a},\delta(\varepsilon)} \implies f(\underline{x}) \in K_{f(\underline{a}),\varepsilon}.$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan, most is szoros kapcsolat van a határérték és a folytonosság között, ami a definíció közvetlen következménye.

3.15. Következmény *Legyen* $\underline{a} \in D_f$ *torlódási pontja* D_f*-nek!* f *pontosan akkor folytonos* $\underline{a}$*-ban, ha*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a}).$$

3.16. Tétel (Átviteli elv) *Legyen* $\underline{a}$ *torlódási pontja* D_f*-nek!* f *határértéke* $\underline{a}$*-ban* b *pontosan akkor, ha minden* $D_f \setminus \{\underline{a}\}$*-beli* $\underline{a}$*-hoz tartó* $\underline{x}_k$ *sorozatra az* $f(\underline{x}_k)$ *sorozat tart* b*-hez, azaz*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \begin{cases} \underline{x}_k \to \underline{a} \implies f(\underline{x}_k) \to b, \\ \text{ahol } \underline{x}_k \text{ tetszőleges } D_f \setminus \{\underline{a}\}\text{-beli sorozat.} \end{cases}$$

Legyen most $\underline{a} \in D_f$*!* f *folytonos* $\underline{a}$*-ban pontosan akkor, ha minden* D_f*-beli* $\underline{a}$*-hoz tartó* $\underline{x}_k$ *sorozatra az* $f(\underline{x}_k)$ *sorozat tart* $f(\underline{a})$*-hoz.*

3.17. Tétel *Legyen* $\underline{a}$ *belső pontja* D_f*-nek úgy, hogy* f *folytonos* $\underline{a}$*-ban, és* $f(\underline{a}) > 0$. *Ekkor*

$$\exists K_{\underline{a}} : \underline{x} \in K_{\underline{a}} \implies f(\underline{x}) > 0.$$

1 Útmutatás: *Mint valósban. Legyen* $\varepsilon = f(\underline{a})$ *és* $\delta(\varepsilon)$ *elég kicsi, hogy* $K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ *is teljesüljön.*

3.2.2. Folytonos függvények

3.18. Definíció *Ha* $A \subset D_f$*, és* f *folytonos minden* $\underline{a} \in A$ *pontban, akkor azt mondjuk, hogy* f *folytonos* A*-n.*

Ha f *folytonos* D_f*-en, akkor* f*-et folytonosnak nevezzük.*

Az átviteli elv segítségével bizonyítható az alábbi tétel:

3.19. Tétel (Folytonosság és műveletek) *Ha* f *és* g n*-változós függvények folytonosak az* $\underline{a} \in D_f \cap D_g$ *pontban, illetve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* λf, $f \pm g$ *és* $f \cdot g$ *is folytonos* $\underline{a}$*-ban. Ha még* $g(\underline{a}) \neq 0$*, akkor* $\dfrac{f}{g}$ *is folytonos* $\underline{a}$*-ban.*

3.20. Példa *Mutassuk meg, hogy* $f(x, y) = y$ *folytonos* R^2*-en!*

106 Megoldás: *Bármely rögzített* (a, b) *pontbeli folytonosság belátható definíció szerint,* $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ *választással. Ugyanis a 3.5. Tétel miatt*

$$|f(x, y) - f(a, b)| = |y - b| \leq d((x, y), (a, b)).$$

Hasonlóan látható, hogy az $f(x, y) = x$ is folytonos $\mathbb{R}^2$-en, illetve hogy $f(\underline{x}) = x_i$ folytonos R^n-en, $i = 1, 2, ..., n$.

3.21. Megjegyzés *A fenti tételből következik, hogy x^m, y^k valamint $x^m \cdot y^k$ is folytonosak és így ezek konstansszorosai, összegei is folytonosak. Tehát az n változós polinomok folytonosak. Sőt, az $r(\underline{x}) = \dfrac{p_m(\underline{x})}{p_k(\underline{x})}$ (két polinom hányadosa) racionális tört kifejezés is folytonos, ha a nevező nem nulla.*

3.22. Példa *Hol folytonos a*

$$p_4(x, y, z) = x^3 z + 5xyz - 4z^2 + 6y - \sqrt{2}$$

háromváltozós, negyedfokú polinom?

107 Megoldás: *Az iménti megjegyzés szerint mindenhol, azaz az egész $\mathbb{R}^3$-on.*

3.23. Következmény *A skaláris szorzás folytonos.*

2 Útmutatás: *Tekintsük az n-dimenziós skaláris szorzást egy $2n$-változós függvénynek a következőképpen:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Ez az előzőek szerint folytonos.

3.2.3. Összetett függvény folytonossága

Legyen most f egyváltozós, míg g többváltozós! Ekkor $f \circ g : D_{f \circ g} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt

$$\underline{x} \in D_{f \circ g} = \{\underline{x} \in D_g : g(\underline{x}) \in D_f\}$$

esetén értelmezzük, így:

$$(f \circ g)(\underline{x}) = f(g(\underline{x})).$$

3.24. Tétel (Összetett függvény folytonossága) *Ha g folytonos $\underline{a}$-ban, ahol $\underline{a} \in D_g$, és f folytonos b-ben, ahol $b = g(\underline{a}) \in D_f$, akkor $f \circ g$ folytonos $\underline{a}$-ban.*

Például, ha folytonos egyváltozós függvénybe folytonos kétváltozós függvényt helyettesítünk, akkor folytonos függvényt kapunk.

3.25. Példa *Hol folytonos a* $\sin(x + 2y^2)$ *függvény?*

108 Megoldás: *A $f(x) = \sin x$ egyváltozós függvényről korábbról tudjuk, hogy folytonos, a $g(x, y) = x + 2y^2$ függvényről pedig az előbb láttuk, hogy szintén folytonos. Az összetett függvény folytonosságáról szóló tétel alapján a*

$$\sin(x + 2y^2) = (f \circ g)(x, y)$$

függvény is folytonos mindenhol, azaz az egész $\mathbb{R}^2$-en.

3.2.4. Szükséges feltételek határérték létezésére

Látjuk, hogy a szokásos függvényekből zárt alakban alkotott függvények többváltozós esetben is folytonosak, így határértékük vizsgálata sem nehéz. Más a helyzet a következő függvényekkel.

Az egyszerűség kedvéért, bevezetjük a következő jelölést.

3.26. Definíció *Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ és $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, akkor D-nek $\underline{a}$-val való eltolása alatt a*

$$\{\underline{x} + \underline{a} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \in D\}$$

halmazt értjük. Erre bevezetjük a

$$D + \underline{a}$$

jelölést.

Hasonlóan értelmezzük a

$$D - \underline{a} = \{\underline{x} - \underline{a} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \in D\}$$

halmazt is.

3.27. Megjegyzés

$$D - \underline{a} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} + \underline{a} \in D\}$$

3.28. Lemma *$\underline{a}$ pontosan akkor torlódási pontja D_f-nek, ha $\underline{0}$ torlódási pontja $D_f - \underline{a}$-nak.*

Továbbá, ha $D_g = D_f - \underline{a}$, és $g(\underline{x}) = f(\underline{x} + \underline{a})$, akkor

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x} \to \underline{0}} g(\underline{x}).$$

Ez alatt azt értve, hogy ha az egyik létezik, akkor a másik is, és ilyenkor egyenlőek.

A lemma miatt elég csak origóbeli határértéket vizsgálnunk a következő tételben (és általában is). Továbbá, a következő tételt csak kétváltozós függvényre mondjuk ki, de hasonlót mondhatnánk még több változó esetén is.

3.29. Tétel *Legyen $D_f \subset \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az origó belső pontja $D_f \cup \{\underline{0}\}$-nak, azaz $\exists \dot{K}_{\underline{0}} \subset D_f$! Ha az f függvénynek létezik határértéke az origóban, és ez $A \in \mathbb{R}$, azaz*

$$\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = A \in \mathbb{R},$$

akkor a következők is teljesülnek:

1. $\exists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = A;$

2. $\exists \lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = A$*;*

3. $\exists \lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = A$*;*

4. $\forall m \in \mathbb{R} : \exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = A$*;*

5. ha $\forall x \in K_0 : \exists \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$*, akkor* $\exists \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = A$*;*

6. ha $\forall y \in K_0 : \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$*, akkor* $\exists \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = A$*;*

3 Útmutatás: *A 4. állítás azt mondja, hogy bármely m meredekségű egyenes mentén tartva az origóhoz a határérték ugyanaz marad. Ez az átviteli elv közvetlen következménye.*

A 2. állításban az egyetlen, a 4-ben nem tárgyalt egyenes, a függőleges mentén tartunk az origóhoz. Ez ugyanúgy jön az átviteli elvből. Az 1. és a 3. állítás a 4. speciális esete $m = 0$ illetve $m = 1$ választással.

Az 5. és 6. állításban pedig lényegében tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén közelítjük az origót.

3.30. Példa *Hol folytonos az alábbi függvény?*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

109 Megoldás: *A 3.21. Megjegyzésből következik, hogy az f függvény minden $(x,y) \neq (0,0)$ pontban folytonos, csak a $(0,0)$ pontban kell vizsgálnunk. Ott az átviteli elv alapján belátható, hogy a határérték nem létezik és így a függvény a $(0,0)$ pontban nem folytonos. Ugyanis, az $x_k \to 0$, $y_k = x_k$ origóhoz tartó pontsorozat mentén a függvény $1/2$-hez tart*

$$f(x_k,y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} = \frac{x_k x_k}{x_k^2 + x_k^2} \to \frac{1}{2},$$

míg az $x_k \to 0$, $y_k = 2x_k$ origóhoz tartó pontsorozat mentén a függvény $2/5$-höz tart

$$f(x_k,y_k) = \frac{x_k 2x_k}{x_k^2 + 4x_k^2} \to \frac{2}{5}.$$

A határérték nem lehet egyszerre $1/2$ és $2/5$ is.

Ezt az okoskodást megfogalmazhatjuk úgy is, hogy az f függvényt az $y = mx$ mentén vizsgálva az eredmény függ az m-től, ezért a limesz nem létezik:

$$\lim_{\substack{y=mx\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

valóban függ az m-től. (Az előbbi meggondolásban $m = 1$-et, illetve $m = 2$-t választottunk.)

3.31. Példa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{3x^4+4y^4}, & \textit{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

110 Megoldás: *$x = 0$ (az y tengely) mentén: $\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$, míg*

$y = x$ mentén: $\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{3x^4+4x^4} = \dfrac{1}{7} \neq 0$, ezért nem létezik határérték.

Vagy $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{\substack{y=mx\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{3x^4+4m^4x^4} = \frac{m^2}{3+4m^4}$$

függ m-től, ezért nem létezik határérték.

3.32. Megjegyzés *A $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ jelentése, hogy rögzített y mellett x tart a nullához, tehát a függvényt egy x-tengellyel párhuzamos egyenes mentén vizsgáljuk.*

3.33. Példa $\lim\limits_{(x,y,z)\to \underline{0}} \dfrac{x+y+2z}{x-z+xy} = ?$

111 Megoldás:

$$\lim_{z\to 0}\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+y+2z}{x-z+xy} = \lim_{z\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+2z}{x-z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{-z} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0} \frac{x+y+2z}{x-z+xy} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x+xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \neq -2,$$

ezért nem létezik a határérték. A fenti, úgynevezett ismételt limeszek jelentése, hogy a tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén vizsgáltuk a függvényt. Ezért ha azonos értéket kaptunk volna, abból még nem következne a határérték létezése. Például az $x = y = z = t$ és $t \to 0$ egyenes mentén lehetne más a határérték.

A következő példa mutatja, hogy a 3.29. Tételben szereplő feltételek együttes teljesülése sem elégséges.

3.34. Példa *Van-e határértéke az origóban az*

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

függvénynek?

112 Megoldás: *A tételben szereplő mind a 6 határérték létezik, és mind* 0*, ami alapján a kérdésre lehetne a válasz igen, de a határérték csak* 0 *lehetne.*

Vizsgáljuk most az $(x_k,y_k)=\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}\right)$ *sorozatot. Mivel ez tart az origóhoz, az átviteli elv szerint ha létezne a kérdéses határérték, akkor*

$$0=\lim f(x_k,y_k)=\lim\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{k^2}}{\left(\frac{1}{k}\right)^4+\left(\frac{1}{k^2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{2}{k^4}}=\frac{1}{2}$$

adódna, tehát a határérték nem létezik.

A fenti függvény látható az animáción.

3.2.5. Egyéb módszerek a határérték vizsgálatára

Láttunk módszereket arra, hogy ha a határérték nem létezik, azt hogyan lehet megmutatni. Ha egy az előzőekhez hasonló függvénynek van határértéke, ezt vagy definíció szerint bizonyítjuk, vagy néha a következő módszerrel.

3.35. Példa

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Folytonos-e f *az origóban?*

113 Megoldás: *Legyen* $x_n=\varrho_n\cos\varphi_n$*,* $y_n=\varrho_n\sin\varphi_n$*, ahol* φ_n *tetszőleges,* $\varrho_n\to 0$*. Ekkor* (x_n,y_n) *egy tetszőleges* $(0,0)$*-hoz tartó pontsorozat. E mentén vizsgáljuk* $f(x_n,y_n)$ *konvergenciáját:*

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n\, tetsz.}}\frac{2\varrho_n^3\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n}{\varrho_n^2}=\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n\, tetsz.}}\underbrace{2\varrho_n}_{\to 0}\underbrace{\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n}_{korlátos}=0=f(0,0),$$

tehát f *folytonos* $(0,0)$*-ban.*

3.36. Példa *Hol folytonos az*

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & \text{ha } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

függvény?

114 Megoldás: *A 3.21. Megjegyzés miatt az origót kivéve mindenhol folytonos, így csak az origóbeli folytonosságot kell vizsgálnunk. Mivel $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ esetén a 3.5. Tétel miatt*

$$|f(x,y,z)|=\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2}=|(x,y,z)|\frac{|x|}{|(x,y,z)|}\frac{|y|}{|(x,y,z)|}\frac{|z|}{|(x,y,z)|}\leq$$
$$\leq|(x,y,z)|\cdot1\cdot1\cdot1=|(x,y,z)|,$$

ezért

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0,$$

így f folytonos az origóban is.

3.2.6. Többértékű függvények határértéke és folytonossága

A szakasz eddigi definícióit és tételeit lényegében változatlan formában megismételhetjük többértékű, azaz vektor értékű függvényekre is. Mi csak a leglényegesebbeket ismételjük, és kimondunk egy tételt, ami mutatja, hogy a bizonyításokat sem kell ismételnünk.

3.37. Definíció *Legyen $D\subset\mathbb{R}^n$, és $\underline{f}:D\to\mathbb{R}^m$ n-változós, m-értékű függvény, $\underline{a}$ torlódási pontja $D_{\underline{f}}=D$-nek, és $\underline{b}\in\mathbb{R}^m$! Azt mondjuk, hogy $\underline{f}$ határértéke $\underline{a}$-ban $\underline{b}$, ha*

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\underline{x}\in D\cap\dot{K}_{\underline{a},\delta(\varepsilon)}\implies\underline{f}(\underline{x})\in K_{\underline{b},\varepsilon}.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}}\underline{f}(\underline{x})=\underline{b}.$$

Legyen most $D\subset\mathbb{R}^n$, és $\underline{f}:D\to\mathbb{R}^m$ n-változós, m értékű függvény, és $\underline{a}\in D$! Azt mondjuk, hogy $\underline{f}$ folytonos $\underline{a}$-ban, ha

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\underline{x}\in D\cap K_{\underline{a},\delta(\varepsilon)}\implies\underline{f}(\underline{x})\in K_{\underline{f}(\underline{a}),\varepsilon}.$$

3.38. Tétel (Koordinátánkénti konvergencia) *Legyen $D\subset\mathbb{R}^n$, és $\underline{f}:D\to\mathbb{R}^m$, $\underline{f}$ koordináta-függvényeire használjuk az $f_1,\dots,f_m:D\to\mathbb{R}$ jelölést, és legyen $\underline{a}$ torlódási pontja $D=D_{\underline{f}}$-nek illetve $\underline{b}=(b_1,b_2,\dots,b_m)\in\mathbb{R}^m$. Ekkor*

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}}\underline{f}(\underline{x})=\underline{b}\iff\forall i\in\{1,\dots,m\}:\lim_{\underline{x}\to\underline{a}}f_i(\underline{x})=b_i.$$

3.39. Tétel (Koordinátánkénti folytonosság) *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, és $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^m$, f koordináta-függvényeire használjuk az $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ jelölést, és legyen $\underline{a} \in D = D_{\underline{f}}$. Ekkor*

$$\underline{f} \text{ folytonos } \underline{a}\text{-ban} \iff \forall i \in \{1, \ldots, m\} : f_i \text{ folytonos } \underline{a}\text{-ban.}$$

Az előző tételek mutatják, hogy a valós értékű függvényeknél kimondott tételek vektor értékű függvényekre is kimondhatók.

Például a folytonosság és a műveletek kapcsolata igaz marad a skalárral való szorzás, az összeadás és a kivonás esetében. Szorzásra és osztásra azonban nem mondhatjuk, mert ekkor vektorokat kellene szorozni illetve osztani. Az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt megismételjük bizonyítás nélkül.

Legyen $\underline{g} : D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, illetve $\underline{f} : D_f \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$! Ekkor $\underline{f} \circ \underline{g} : D_{\underline{f} \circ \underline{g}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvényt

$$\underline{x} \in D_{\underline{f} \circ \underline{g}} = \{\underline{x} \in D_{\underline{g}} : \underline{g}(\underline{x}) \in D_{\underline{f}}\}$$

esetén értelmezzük, így:

$$(\underline{f} \circ \underline{g})(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{g}(\underline{x})).$$

3.40. Tétel (Összetett függvény folytonossága) *Ha $\underline{g}$ folytonos $\underline{a}$-ban, ahol $\underline{a} \in D_{\underline{g}}$, és $\underline{f}$ folytonos $\underline{b}$-ben, ahol $\underline{b} = \underline{g}(\underline{a}) \in D_{\underline{f}}$, akkor $\underline{f} \circ \underline{g}$ folytonos $\underline{a}$-ban.*

A 3.23. Következmény alapján kapjuk, hogy folytonos vektor értékű függvények skaláris szorzata folytonos, azaz ha $\underline{f}$ és $\underline{g}$ folytonos $\underline{a}$-ban, akkor

$$\big(\underline{f}(\underline{x}), \underline{g}(\underline{x})\big)$$

is folytonos $\underline{a}$-ban.

3.2.7. Topológiai tételek

Bolzano-tétele általánosan úgy szól, hogy összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő. Ennek egy speciális alakja a következő.

3.41. Tétel (Bolzano-tétel) *Ha D_f összefüggő halmaz, f folytonos, $\underline{a}, \underline{b} \in D_f$ úgy, hogy $f(\underline{a}) \leq f(\underline{b})$ és $c \in [f(\underline{a}), f(\underline{b})]$, akkor*

$$\exists \underline{\xi} \in D_f : f(\underline{\xi}) = c.$$

Bizonyítás. Mivel D_f összefüggő, ezért $\exists \underline{g}_{\underline{a},\underline{b}} \subset D_f$ folytonos út, azaz $\underline{g} : [\alpha, \beta] \to D_f$ folytonos, amire $\underline{g}(\alpha) = \underline{a}$ és $\underline{g}(\beta) = \underline{b}$. Az összetett függvény folytonosságáról szóló 3.40. Tétel szerint $f \circ \underline{g} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonos. $(f \circ \underline{g})(\alpha) = f(\underline{a})$ és $(f \circ \underline{g})(\beta) = f(\underline{b})$, ezért az egyváltozós Bolzano-tétel szerint $\exists t \in [\alpha, \beta]$, hogy

$$(f \circ \underline{g})(t) = c.$$

Ekkor $\xi = \underline{g}(t) \in D_f$ és $f(\xi) = c$. □

Weierstrass-tétele általánosan úgy szól, hogy kompakt halmaz folytonos képe kompakt. Ennek egy speciális alakja a következő.

3.42. Tétel (Weierstrass-tétele) *Ha D_f kompakt és f folytonos, akkor felveszi minimumát és maximumát, azaz*

$$\exists \underline{\xi}, \underline{\eta} \in D_f : \forall \underline{x} \in D_f : f(\underline{\xi}) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{\eta}).$$

3.43. Definíció *Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a $H \subset D_f$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) < \delta(\varepsilon) \implies d(f(\underline{x}), f(\underline{y})) < \varepsilon \qquad (\underline{x}, \underline{y} \in H).$$

3.44. Tétel (Heine-tétele) *Kompakt halmazon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos.*

3.45. Példa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & ha\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Folytonos-e f, illetve g?*

2. *Korlátos-e f, illetve g a $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ körlapon?*

115 Megoldás: *1. Az origón kívül mindenhol folytonos f és g is, így csak az origóbeli folytonosság a kérdés.*

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \, tetsz.}} \frac{\varrho_n^4 \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \, tetsz.}} \underbrace{\varrho_n^2}_{\to 0} \underbrace{\cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n}_{korlátos} = 0 = f(0,0),$$

tehát f folytonos $(0,0)$-ban.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} g(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{m^2x^4}{x^4 + m^4x^4} = \frac{m^2}{1+m^4}.$$

Ez függ m-től így g nem folytonos $(0,0)$-ban.

2. *Mivel H kompakt, így 3.42. Weierstrass-tétele szerint $f(H)$ is kompakt, ezért korlátos.*

   Mivel g nem folytonos, itt nem alkalmazható Weierstrass-tétele.

   A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt $\sqrt{x^4y^4} \le \frac{x^4+y^4}{2}$, így $0 \le \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \le \frac{x^2y^2}{2\sqrt{x^4y^4}} = \frac{1}{2}$. Tehát g korlátos.

3.2.8. Gyakorló feladatok

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+2y}{3x-y} = ?$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = ?$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^{3/2}y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = ?$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+2y^2} = ?$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} = ?$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} = ?$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} = ?$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x^2y}{x^2+y^2} = ?$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = ?$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{x^4+y} = ?$

11. Hol folytonos az
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2y}{x^2}, & \text{ha } x \ne 0, \\ y, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény?

12. Milyen $c \in \mathbb{R}$ esetén lesz

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ c, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mindenütt folytonos?

13. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

T pedig az $|x| + |y| \leq 1$ négyzet.

Folytonos-e a függvény a T tartományon?

14. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

T pedig az $|x| + |y| \leq 1$ négyzet.

(a) Folytonos-e a függvény a T tartományon?

(b) Korlátos-e a függvény a T tartományon?

(c) Felveszi-e a függvény a T tartományon a $\sup\limits_{(x,y)\in T} f(x,y)$ és $\inf\limits_{(x,y)\in T} f(x,y)$ értékeket?

15. Vizsgáljuk az

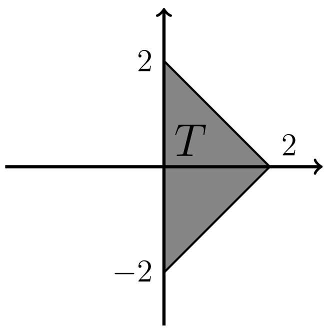
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x}}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt!

(a) $D_f = ?$

(b) Folytonos-e a függvény a T kompakt halmazon?

(c) Korlátos-e a függvény a T kompakt halmazon?



3.3. Derivált

3.3.1. Parciális derivált

3.46. Definíció *Legyen* $\underline{a} \in D_f$, *és* $x = a_i + h$! *Konstruáljuk meg a* g *egyváltozós függvényt úgy, hogy*

$$g(x) = g(a_i + h) = f(\underline{a} + h\underline{e_i}) \qquad (h \in \mathbb{R} : \underline{a} + h\underline{e_i} \in D_f)$$

teljesüljön, azaz legyen

$$g(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)!$$

Ha g *deriválható* $x = a_i$*-ben, akkor azt mondjuk, hogy* f *parciálisan deriválható az* i*-edik változója szerint* $\underline{a}$*-ban, és* $g'(a_i)$*-t az* f $\underline{a}$*-beli,* i*-edik változó szerinti parciális deriváltjának nevezzük.*

Ezt többféleképpen is jelölhetjük, nevezetesen

$$f'_{x_i}(\underline{a}); \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}\right|_{\underline{x}=\underline{a}}; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}=\underline{a}}; \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}(\underline{a}); \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}); \qquad D_i f(\underline{a}).$$

3.47. Megjegyzés *Ahhoz, hogy a fenti* g *deriválható legyen* a_i*-ben kell, hogy* a_i *belső pontja legyen* D_g*-nek. Emiatt csak olyan* $\underline{a}$*-ban értelmeztük az* i*-edik változó szerinti parciális deriváltat, amire* $\underline{a} + h\underline{e_i} \in D_f$, *ha* $|h|$ *elég kicsi. Ha például* $\underline{a}$ *belső pontja* D_f*-nek, akkor ez a feltétel biztosan teljesül a 3.5. Tétel miatt.*

3.48. Megjegyzés *A parciális deriváltakat közvetve egyváltozós határértékként értelmeztük, így*

$$f'_{x_i}(\underline{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h} =$$

$$= \lim_{x\to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{x - a_i} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{a} + h\underline{e_i}) - f(\underline{a})}{h}.$$

Speciálisan, kétváltozós esetben

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

és

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

3.49. Megjegyzés (Geometriai tartalom) *$z = f(x, y)$ kétváltozós esetre: Tekintsük a függvény grafikonja, és az $y = y_0$ sík (lásd 3.7(a) ábra zöld síkja!) metszetét, azaz az $y = y_0$ feltételnek eleget tevő felületi görbét (lásd 3.7(a) ábra piros görbéje).*

Ez a

$$\{(x, y_0, \underbrace{f(x, y_0)}_{g(x)})\} = \{(x, y_0, z) : (x, y_0) \in D_f, z = f(x, y_0)\}$$

ponthalmaz. Legyen α ezen görbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintőegyenesének (lásd 3.7(a) ábra kék egyenese) hajlásszöge (az $y = y_0$ síkban). Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt: $\operatorname{tg} \alpha = g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$, ezért az adott érintőegyenes irányába mutató vektor: $\underline{v_1} = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) = \underline{i} + f'_x(x_0, y_0)\underline{k}$.

Most tekintsük a függvény grafikonja, és az $x = x_0$ sík (lásd 3.7(b) ábra zöld síkja!) metszetét, azaz az $x = x_0$ feltételnek eleget tevő felületi görbét (lásd 3.7(b) ábra piros görbéje).

Ez a

$$\{(x_0, y, \underbrace{f(x_0, y)}_{g(y)})\} = \{(x_0, y, z) : (x_0, y) \in D_f, z = f(x_0, y)\}$$

ponthalmaz. Legyen β ezen görbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintőegyenesének (lásd 3.7(b) ábra kék egyenese) hajlásszöge (az $x = x_0$ síkban). Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt: $\operatorname{tg} \beta = g'(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$, ezért az adott érintőegyenes irányába mutató vektor: $\underline{v_2} = (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) = \underline{j} + f'_y(x_0, y_0)\underline{k}$.

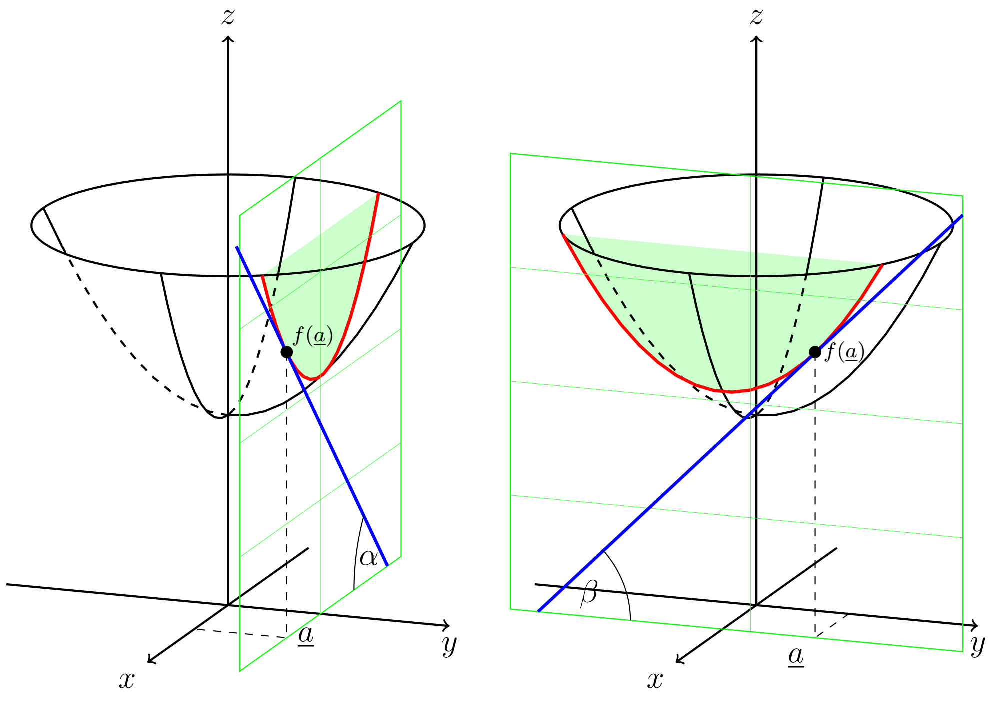
Számoljuk most ki a két érintőegyenes által meghatározott sík egyenletét! Ez a sík áthalad a $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ponton és $\underline{n}$ normálvektora merőleges $\underline{v_1}$-re és $\underline{v_2}$-re is, tehát

$$\underline{n} = \underline{v_1} \times \underline{v_2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0)\underline{i} - f'_y(x_0, y_0)\underline{j} + \underline{k}.$$

Ennek (-1)-szeresével szoktunk dolgozni, így ennek a síknak egy egyenlete:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Később lesz róla szó, hogy milyen feltételek mellett fogjuk ezt a síkot az f függvény (x_0, y_0)-hoz tartozó érintősíkjának nevezni.



(a) Első változó szerinti (b) Második változó szerinti

3.7. ábra. parciális derivált

A 3.7 ábra az $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ függvény $\underline{a} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pontbeli parciális deriváltjait szemlélteti.

3.50. Példa *Adjuk meg az*

$$f(x,y) = y^3 e^{-3x} + 2x^4 + 3(2y+1)^5$$

függvény parciális deriváltjait!

116 Megoldás:

$$f'_x(x,y) = y^3 e^{-3x} \cdot (-3) + 8x^3; \qquad f'_y(x,y) = 3y^2 e^{-3x} + 15(2y+1)^4 \cdot 2.$$

3.51. Példa *Adjuk meg az*

$$f(x,y) = 2x^3 \cos\frac{x}{y} + x^2 + y^3$$

függvény parciális deriváltjait!

117 Megoldás: *$y \neq 0$ mellett*

$$
\begin{aligned}
f'_x &= 6x^2 \cos\frac{x}{y} + 2x^3 \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} + 2x; \\
f'_y &= 2x^3 \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + 3y^2.
\end{aligned}
$$

3.52. Példa *Adjuk meg az*

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2 y}{x^2+y^2} + 2x + 3, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 3, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

függvény origóbeli parciális deriváltjait!

118 Megoldás:

$$
f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 + 2h + 3 - 3}{h} = 2,
$$

illetve

$$
f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{4k}{k^2} + 3 - 3}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{4}{k^2} = \infty,
$$

tehát az y szerinti parciális derivált nem létezik.

Vagy $g_1(x) = f(x,0) = 2x + 3$, így $f'_x(0,0) = g'_1(0) = 2$, illetve

$$
g_2(y) = f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{4y}{y^2} + 3 = \dfrac{4}{y} + 3, & \text{ha } y \neq 0, \\ 3, & \text{ha } y = 0. \end{cases}
$$

Ez a függvény nem folytonos $y = 0$-ban, így ott nem is deriválható, ezért f nem deriválható parciálisan az origóban a 2. változó szerint.

3.3.2. Totális derivált

Egyváltozós esetben akkor neveztük az f függvényt deriválhatónak az $a \in \operatorname{int} D_f$-ben, ha az

$$
A = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}
$$

határérték létezik és véges. Ez így több változós esetben nem megy, mert a nevezőben vektor lenne. Ezért használjuk az ekvivalens Fréchet-féle alakot

$$
\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = 0,
$$

vagy a lineáris approximációt,

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A független h-tól, és $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ezek átírhatók vektorokra.

Most értelmezzük a deriváltat a lineáris approximációval, egyszerűen szorzatként jelölve a skaláris szorzatot.

3.53. Definíció *Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek! Azt mondjuk, hogy f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, és $\underline{a}$-beli gradiens vektora a $\underline{G} \in \mathbb{R}^n$, ha $\exists \underline{\varepsilon} : D_f - \underline{a} \to \mathbb{R}^n$ úgy, hogy $\forall \underline{h} \in D_f - \underline{a}$ esetén*

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{G} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}$$

és

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \underline{\varepsilon}(\underline{h}) = \underline{0}.$$

A gradiensvektorra a

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{G}$$

jelölést vezetjük be.

Fontos, hogy $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \to \underline{0}$ esetén vektor értékű függvény határértékéről van szó, lásd 3.37. Definíció.

3.54. Megjegyzés *A 3.5. Tételt felhasználva kapjuk, hogy*

$$\frac{|\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}|}{|\underline{h}|} = \frac{\left| \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\underline{h}) \cdot h_i \right|}{|\underline{h}|} \le \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i(\underline{h})| \frac{|h_i|}{|\underline{h}|} \le \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i(\underline{h})| \to 0.$$

3.55. Tétel (A totális deriválhatóság szükséges feltételei) *Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható, akkor*

1. *mindegyik változója szerint deriválható parciálisan, és*

$$f'_{x_i}(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{a})_i.$$

2. *folytonos $\underline{a}$-ban.*

Bizonyítás. 1. $\underline{h} = h_i \underline{e_i}$ esetén

$$\Delta f = f(\underline{a} + h_i \underline{e_i}) - f(\underline{a}) = \mathrm{grad} f(\underline{a})_i \cdot h_i + \varepsilon_i(\underline{h}) \cdot h_i,$$

így

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h_i} = \mathrm{grad} f(\underline{a})_i + \varepsilon_i(\underline{h}).$$

Ha $h_i \to 0$, akkor $\underline{h} \to \underline{0}$, ezért $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \to \underline{0}$. Ekkor $\varepsilon_i(\underline{h}) \to 0$, és ezért valóban

$$f'_{x_i}(\underline{a}) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h_i} = \\ = \mathrm{grad} f(\underline{a})_i.$$

2. $f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}$ miatt

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} f(\underline{a} + \underline{h}) = \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} (f(\underline{a}) + \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}) = f(\underline{a}),$$

tehát a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel. □

3.56. Tétel (A totális deriválhatóság elégséges feltétele)

Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek! Ha f mindegyik változója szerint parciálisan deriválható valamely $K_{\underline{a}}$-ban, és a parciális deriváltak folytonosak $\underline{a}$-ban, akkor f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.

Bizonyítás. Kétváltozós függvény esetén, ha $\underline{h}$ olyan, hogy $\underline{a} + \underline{h} \in K_{\underline{a}}$, akkor

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \\ = \underbrace{[f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)]}_{A} + \underbrace{[f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)]}_{B}.$$

Mivel $K_{\underline{a}}$ konvex, ezért $l_{(a_1+h_1,a_2),(a_1+h_1,a_2+h_2)}$-n f parciálisan deriválható y szerint, azaz

$$g_2(t) = f(a_1 + h_1, a_2 + t \cdot h_2)$$

deriválható $[0, 1]$-en. A Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi_2 \in (0, 1) : g_2'(\xi_2) = \frac{g_2(1) - g_2(0)}{1 - 0},$$

azaz

$$A = f'_y(a_1 + h_1, a_2 + \xi_2 h_2) \cdot h_2.$$

Hasonlóan $l_{(a_1,a_2),(a_1+h_1,a_2)}$-n f parciálisan deriválható x szerint, azaz

$$g_1(t) = f(a_1 + t \cdot h_1, a_2)$$

deriválható $[0,1]$-en. A Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi_1 \in (0,1) : g_1'(\xi_1) = \frac{g_1(1) - g_1(0)}{1-0},$$

azaz

$$B = f_x'(a_1 + \xi_1 h_1, a_2) \cdot h_1.$$

Most

$$\varepsilon_1(\underline{h}) = f_x'(a_1 + \xi_1 h_1, a_2) - f_x'(a_1, a_2)$$

és

$$\varepsilon_2(\underline{h}) = f_y'(a_1 + h_1, a_2 + \xi_2 h_2) - f_y'(a_1, a_2)$$

választással, és $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) = (\varepsilon_1(\underline{h}), \varepsilon_2(\underline{h}))$ jelöléssel

$$\begin{aligned} \Delta f = B + A = [f_x'(a_1,a_2) + \varepsilon_1(\underline{h})]\, h_1 + \left[f_y'(a_1,a_2) + \varepsilon_2(\underline{h})\right] h_2 = \\ = (f_x'(\underline{a}), f_y'(\underline{a})) \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}. \end{aligned}$$

Ez éppen f totális deriválhatóságát jelenti $\underline{a}$-ban, mivel

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \underline{\varepsilon}(\underline{h}) = \underline{0}.$$

Végül jegyezzük meg, hogy kettőnél több változó esetén $\underline{a} + \underline{h}$-ból a tengelyekkel párhuzamos szakaszok mentén jutunk $\underline{a}$-ba, és ezeken a szakaszokon alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt, a fentihez hasonló módon. □

3.57. Definíció *Azt mondjuk, hogy f folytonosan deriválható a $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, ha parciális deriváltjai léteznek és folytonosak D-n.*
Jelölés: $f \in C_D$.

Az elégséges feltétel miatt, ha $f \in C_D$, akkor f totálisan deriválható D-n. $n = 1$ esetén láttuk, hogy ez fordítva nem igaz. Nagyobb n-ekre sem.

3.58. Példa *Hol differenciálható (totálisan) az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény?* $\operatorname{grad} f = ?$

119 Megoldás: *$f_x' = 2x$, $f_y' = 2y$ mindenütt léteznek és folytonosak, ezért f mindenütt deriválható, és* $\operatorname{grad} f(x,y) = 2x\underline{i} + 2y\underline{j} = (2x, 2y)$.
Vegyük észre, hogy $\operatorname{grad} f$ *mindig sugár irányú. Ez nem véletlen, mert látni fogjuk, hogy* $\operatorname{grad} f$ *mindig merőleges a szintvonalra és az most éppen origó középpontú kör.*

3.59. Példa *Legyen* $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+1)e^y}$*!* $\operatorname{grad} f = ?$

120 Megoldás:

$$f'_x = \frac{y(x^2+1)e^y - xy2xe^y}{(x^2+1)^2 e^{2y}}$$

és

$$f'_y = \frac{x(x^2+1)e^y - xy(x^2+1)e^y}{(x^2+1)^2 e^{2y}}$$

mindenütt létezik és folytonos, ezért f *mindenütt deriválható, és* $\operatorname{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} = (f'_x, f'_y)$.

3.60. Példa *Differenciálható-e a* $(0,0)$ *pontban az* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *függvény?*

121 Megoldás: *Nem differenciálható, mert nem létezik* $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$*, tehát nem teljesül az egyik szükséges feltétel. Ugyanis például:*

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h},$$

ami nem létezik.

3.61. Példa *Legyen*

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sh} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \textit{ha } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \textit{ha } x^2+y^2 = 0! \end{cases}$$

1. *Írja fel* f'_x*-et, ahol az létezik!*

2. *Totálisan deriválható-e* f *a* $(0,0)$*-ban?*

122 Megoldás: 1. $f(x,0) \equiv 0$ *és így* $f'_x(0,0)$ *is létezik. Vagy a definícióval:*

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Ha $(x,y) \neq (0,0)$*, akkor nyilván létezik* $f'_x(x,y)$*, méghozzá*

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 2\dfrac{y(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \operatorname{ch} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \textit{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. *A függvény nem folytonos a* $(0,0)$*-ban, ezért (totálisan) nem deriválható itt. Ugyanis*

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \operatorname{sh}\frac{2\varrho_n^2\cos\varphi_n\sin\varphi_n}{\varrho_n^2} = \operatorname{sh}(\sin 2\varphi_n)$$

függ φ_n*-től, tehát* $\nexists$ *a határérték.*

3.62. Példa *Legyen*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} + 3y, & ha\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & ha\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. $f'_x(0,0) = ?\qquad f'_y(0,0) = ?$
2. $\operatorname{grad} f(0,0) = ?$

123 Megoldás: *1.*

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{3k-0}{k} = 3$$

2. *A szükséges feltétel (parciális deriváltak létezése, illetve* f *folytonossága) teljesül. Ellenőrizhetnénk az elégséges feltételt, de erről kiderülne, hogy nem teljesül, így a definíció alapján próbálkozunk. Azt tudjuk, hogy ha* f *deriválható a* $(0,0)$*-ban, akkor gradiensvektora csak* $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,3)$ *lehet, ezért*

$$f(h,k) - f(0,0) - \operatorname{grad} f(0,0)\cdot(h,k) = \frac{h^2k}{h^2+k^2} + 3k - 0 - (0\cdot h + 3\cdot k).$$

A 3.54. Megjegyzés miatt ekkor

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$$

kellene, hogy teljesüljön, ami például $h=k$ *esetén nem teljesül. Tehát* f *(totálisan) nem deriválható* $(0,0)$*-ban. Bár a parciálisak léteznek, így formálisan felírható* $f'_x(0,0)\underline{i} + f'_y(0,0)\underline{j}$*, de ez* $\neq \operatorname{grad} f(0,0)$*-val!*

3.63. Példa *Hol differenciálható az*

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}, & ha\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & ha\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény?

124 Megoldás:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0,$$

és

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0.$$

Így

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\left(\cos\dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}\right)\cdot\dfrac{6x^2y(x^2+y^2)-2x^3y\cdot2x}{(x^2+y^2)^2}, & ha\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & ha\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

és

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\left(\cos\dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}\right)\cdot\dfrac{2x^3(x^2+y^2)-2x^3y\cdot2y}{(x^2+y^2)^2}, & ha\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & ha\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$|f'_x(x,y)|=\underbrace{\left|\cos\frac{2x^3y}{x^2+y^2}\right|}_{\leq1}\left|\frac{6x^2y(x^2+y^2)-4x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|\leq$$

$$\leq|y|\left(\frac{2x^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{6x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=$$

$$=|y|\left(2\underbrace{\left(\frac{|x|}{|(x,y)|}\right)^4}_{\leq1}+6\underbrace{\left(\frac{|x|}{|(x,y)|}\right)^2}_{\leq1}\underbrace{\left(\frac{|y|}{|(x,y)|}\right)^2}_{\leq1}\right)\leq8|y|$$

miatt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f'_x(x,y)=0,$$

ezért f'_x folytonos a $(0,0)$-ban.

Hasonlóan

$$\left|f'_y(x,y)\right| = \underbrace{\left|\cos\frac{2x^3y}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1}\left|\frac{2x^3(x^2+y^2)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq$$

$$\leq |x|\left|\frac{2x^4}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq |x|\left(\frac{2x^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= |x|\left(2\underbrace{\left(\frac{|x|}{|(x,y)|}\right)^4}_{\leq 1}+2\underbrace{\left(\frac{|x|}{|(x,y)|}\right)^2}_{\leq 1}\underbrace{\left(\frac{|y|}{|(x,y)|}\right)^2}_{\leq 1}\right) \leq 4|x|$$

miatt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0,$$

ezért f'_y folytonos a $(0,0)$-ban.

Ha $x^2+y^2 \neq 0$, akkor f'_x és f'_y nyilván folytonos, így az elégséges feltétel teljesül, vagyis f mindenütt (totálisan) deriválható.

3.3.3. Differenciál és érintő

Differenciál (teljes differenciál, elsőrendű differenciál)

Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek, és f differenciálható $\underline{a}$-ban, tehát:

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \underbrace{\underline{G}\cdot\underline{h}}_{\text{főrész}} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h} =$$

$$= \underbrace{f'_{x_1}(\underline{a})h_1 + f'_{x_2}(\underline{a})h_2 + \cdots + f'_{x_n}(\underline{a})h_m}_{\text{főrész}} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h},$$

ahol $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\varepsilon}(\underline{h}) = \underline{0}$.

3.64. Definíció *Ha f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor azt mondjuk, hogy*

$$df(\underline{a},\underline{h}) = f'_{x_1}(\underline{a})h_1 + f'_{x_2}(\underline{a})h_2 + \cdots + f'_{x_n}(\underline{a})h_n = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{a})h_i$$

az f függvény $\underline{a}$ pontbeli differenciálja $\underline{h}$ megváltozásnál. (A függvénymegváltozás főrésze).

Ez egy $2n$-változós függvény. Rögzített $\underline{a}$ mellett df homogén lineáris függvénye $\underline{h}$-nak. Alkalmazása: Δf-et szokás df-fel közelíteni ($\Delta f \approx df$).

Tehát a totálisan differenciálható függvény megváltozása közelíthető differenciáljával, a független változók megváltozásának homogén lineáris függvényével. Például hibaszámításnál alkalmazzuk. Egyéb jelölések.

$$df(\underline{x}, \underline{\Delta x}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{x})\Delta x_i$$

$$df(\underline{x}, \underline{dx}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{x})dx_i$$

Indoklás az utóbbi jelöléshez: ha az $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ koordináta függvényről van szó, akkor $df = d(x_i) = dx_i = 1 \cdot \Delta x_i$.

Felület érintősíkja

A kétváltozós függvényt felülettel szemléltettük, ezért a $\Delta f \approx df$ közelítésnek kétváltozós függvény esetén geometriai tartalmat adhatunk.

Legyen a kétváltozós $f(x, y)$ függvény (totálisan) deriválható a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban! Tekintsük a $z = f(x, y)$ által meghatározott felület P_0 feletti $P_0^* = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pontját! Az előzőekben láttuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \\ \approx f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = df((x_0, y_0), (h, k)). \end{aligned}$$

Vagy más jelölésekkel:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ jelölés esetén:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Tehát

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ennek geometriai tartalma, hogy a $z = f(x, y)$ felületet a

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

síkkal közelítjük, ha $x - x_0$ és $y - y_0$ kicsi. Tehát az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pont egy elég kicsiny sugarú környezetében f grafikonja közelítőleg ezzel a síkkal helyettesíthető. Ennek a síknak a neve érintősík. Átrendezve a sík egyenletét és összefoglalva az előzőeket:

3.65. Definíció *A totálisan deriválható f kétváltozós függvény* (x_0, y_0) *ponthoz tartozó érintősíkjának nevezzük az*

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

egyenlettel adott síkot.

Kitérő: Az $\underline{n} = (a, b, c) = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ normálvektorú, (x_0, y_0, z_0) ponton áthaladó sík egyenlete:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ezzel összevetve látjuk, hogy az érintősík átmegy a $P_0^* = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi ponton és normálvektora:

$$\underline{n} = f'_x(x_0, y_0)\underline{i} + f'_y(x_0, y_0)\underline{j} - \underline{k} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

3.66. Megjegyzés *Már tudjuk, hogy az érintősík tartalmazza két felületi görbe érintőegyenesét. (Lásd parciális deriváltak geometriai tartalmát!) Az is belátható, hogy minden, a* $P_0^* = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *felületi ponton áthaladó, érintővel rendelkező felületi görbe érintőegyenese benne van ebben a síkban.*

3.67. Megjegyzés *Tehát összefoglalva a* $\Delta f \approx df$ *közelítés geometriai tartalma:* $n = 1$ *esetén érintőegyenessel való közelítés;* $n = 2$ *esetén: érintősíkkal való közelítés.*

3.68. Példa *Legyen* $f(x, y) = y^{2x}$ *és* $P_0 = (-1, 1)$*!*

1. *Írja fel az f függvény* P_0 *pontbeli gradiensét, ha az létezik!*
2. $df((-1, 1), (h, k)) =?$
3. *Írja fel a* P_0 *ponthoz tartozó érintősík egyenletét!*

125 Megoldás: $f(x, y) = y^{2x} = e^{2x \ln y}$, *(*$y > 0$, x *tetszőleges).*

1. $f'_x = e^{2x \ln y} 2 \ln y = y^{2x} 2 \ln y$, *és* $f'_y = 2xy^{2x-1}$. *A parciálisak léteznek és folytonosak* K_{P_0}*-ban, ezért létezik* $\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(-1, 1)\underline{i} + f'_y(-1, 1)\underline{j} = 0\underline{i} - 2\underline{j} = -2\underline{j}$.
2. $df((-1, 1), (h, k)) = f'_x(-1, 1)h + f'_y(-1, 1)k = -2k$
3. $$f'_x(-1, 1)\big(x - (-1)\big) + f'_y(-1, 1)\big(y - 1\big) - \big(z - f(-1, 1)\big) = 0,$$

   behelyettesítve

   $$0 \cdot \big(x + 1\big) + (-2)\big(y - 1\big) - \big(z - 1\big) = 0, \text{ azaz } 2y + z = 3.$$

3.3.4. Iránymenti derivált

Az értelmezési tartomány $\underline{a}$ pontjában az $\underline{e}$ irányban adja meg a függvény változási sebességét. Feltételezzük, hogy $|\underline{e}| = 1$, és $\underline{e} \parallel \underline{v}$ jelölés most nem csak a vektorok azonos állását, hanem azonos irányát is fogja jelenteni. Vagyis, ha $\underline{v} \neq \underline{0}$, akkor

$$\underline{e} \parallel \underline{v} \iff \exists \lambda \geq 0 : \underline{e} = \lambda \underline{v},$$

3.69. Definíció *Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek és $|\underline{e}| = 1$! Ha létezik*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} \in \mathbb{R},$$

akkor azt mondjuk, hogy f deriválható $\underline{a}$-ban az $\underline{e}$ irány mentén.

Ekkor a fenti határértéket az f $\underline{a}$-beli $\underline{e}$ iránymenti deriváltjának nevezzük, és a

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} \quad \textit{illetve} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{\underline{a}}$$

jelöléseket használjuk.

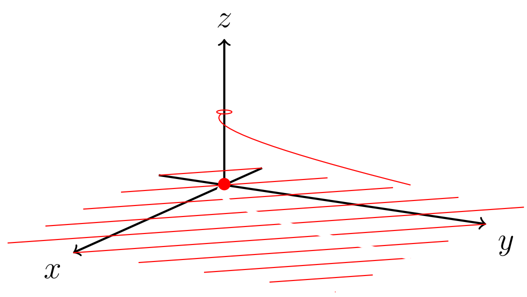
3.70. Megjegyzés *Mi t jobboldali határértékeként definiáltuk, de szokás kétoldali határértékként is definiálni. Ekkor a parciális deriváltak speciális iránymenti deriváltak lennének.*

3.71. Tétel (Elégséges tétel iránymenti derivált létezésére) *Ha f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban, akkor tetszőleges $\underline{e}$ egységvektor mentén létezik az iránymenti derivált, és*

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}.$$

4 Útmutatás: *A bizonyítás megegyezik a 3.55. Tételbeli bizonyítással.*

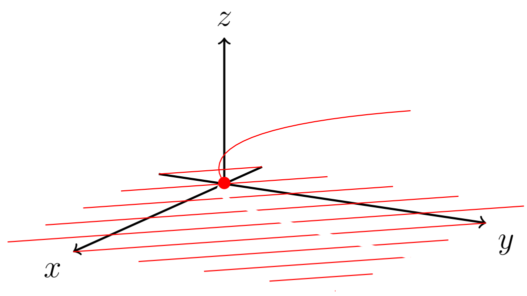
3.72. Megjegyzés *Ha egy pontban minden irányban létezik az iránymenti derivált, akkor sem biztos, hogy a függvény ebben a pontban totálisan deriválható. Például az*



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \textit{ha } 0<x=\sqrt{y},\\ 0, & \textit{máskor}\end{cases}$$

függvény az origóban minden irány mentén deriválható, sőt minden iránymenti deriváltja 0*, de nem folytonos, így nem is deriválható totálisan.*

Jegyezzük meg, hogy az



$$f(x,y)=\begin{cases}x, & \textit{ha } 0<x=\sqrt{y},\\ 0, & \textit{máskor}\end{cases}$$

függvény még folytonos is, mégis hiába 0 *minden iránymenti deriváltja, nem deriválható totálisan.*

Speciális képletek:

1. $n=2$ és $\underline{e}$ α szöget zár be $\underline{i}=(1,0)$-val. Ekkor $f(x,y)$ jelöléssel

$$\underline{e}=\cos\alpha\underline{i}+\sin\alpha\underline{j}=(\cos\alpha,\sin\alpha),$$

$$\mathrm{grad} f=f'_x\underline{i}+f'_y\underline{j}=(f'_x,f'_y),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cdot\sin\alpha.$$

2. $n=3$ és az $\underline{e}$ vektor tengelyekkel bezárt szögei: α,β,γ. Ekkor $f(x,y,z)$ jelöléssel

$$\underline{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\qquad\text{(iránykoszinuszok)}$$

és

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}=f'_x(P_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(P_0)\cdot\cos\beta+f'_z(P_0)\cdot\cos\gamma.$$

3.73. Megjegyzés *Geometriai tartalom $n = 2$ esetén:*

Tekintsük azt a felületi görbét, melyet a $z = f(x, y)$ felületből az (x, y) síkra merőleges sík metsz ki, melynek nyomvonala az (x_0, y_0) ponton áthaladó $\underline{e}$ irányú egyenes. E felületi görbéhez az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pontban húzzunk érintőegyenest, ennek irányát jelölje $\underline{w}$! (Irányítás olyan, hogy $\gamma = (\underline{w}, \underline{e})\measuredangle$ hegyesszög legyen.) Ekkor igaz az alábbi:

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \lim_{t\to 0+} \operatorname{tg}\gamma' = \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

3.74. Megjegyzés *$n = 2$ esetén az érintő benne van az érintősíkban.*

Ugyanis: (x_0, y_0, z_0) pont közös és $\underline{n} \perp \underline{w}$ megmutatható.

$$\underline{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

$$\underline{w} = \underline{e} + \operatorname{tg}\gamma\underline{k} = \left(\cos\alpha, \sin\alpha, \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}\right) =$$
$$= \left(\cos\alpha, \sin\alpha, f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha\right).$$

Így valóban $\underline{nw} = 0$.

A gradiensvektor tulajdonságai

(Két- és háromváltozós esetre, itt geometriai tartalom is van.)

3.75. Tétel *Ha f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor a maximális iránymenti derivált iránya* $\operatorname{grad} f(\underline{a})$*, értéke:* $|\operatorname{grad} f(\underline{a})|$.

Bizonyítás. 3.71. Tételben már láttuk, hogy $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$. Ebből

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot \cos\varphi.$$

Így $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ maximális, ha $\cos\varphi = 1$, azaz ha $\varphi = 0$, tehát $\underline{e} \parallel \operatorname{grad} f(\underline{a})$, pontosabban

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|} \qquad \text{és} \qquad \max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|.$$

□

Tehát a grad vektor irányában elmozdulva nő leggyorsabban a függvényérték.

Hasonló mondható minimumra is, azaz a $-$grad vektor irányában elmozdulva csökken leggyorsabban a függvényérték.

3.76. Megjegyzés *Ha f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor a minimális iránymenti derivált iránya* $-\mathrm{grad} f(\underline{a})$, *értéke:* $-|\mathrm{grad} f(\underline{a})|$.

3.77. Tétel *Legyen f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban. Ekkor*

1. $\mathrm{grad} f(\underline{a})$ *ortogonális az* $f(\underline{x}) = f(\underline{a})$ *szintalakzatra;*
2. *ha* $\mathrm{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{0}$, *akkor a növekvő paraméterű szintalakzatok irányába mutat.*

5 Útmutatás:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$$

1. *Ha $\underline{e}$ párhuzamos a szintalakzat érintőjével, akkor*

$$\Delta f = 0 \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = 0 \Longrightarrow \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} = 0 \Longrightarrow \mathrm{grad} f(\underline{a}) \perp \underline{e}.$$

2. *Ha a növekvő paraméterű szintalakzat felé mozdulunk el:*

$$\Delta f > 0 \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} > 0 \Longrightarrow \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} > 0 \Longrightarrow (\mathrm{grad} f(\underline{a}), \underline{e})\measuredangle < \frac{\pi}{2}$$

tehát $\mathrm{grad} f(\underline{a})$ *is a növekvő paraméterű szintalakzat felé mutat.*

3.78. Példa

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1, \qquad P_0 = (1, -1, 0)$$

1. $\mathrm{grad} f(P_0) = ?$, $\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ *ha* $\underline{e} \parallel \underline{v} = (2, 1, 3)$
2. *Adja meg* $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ *értékét és irányát!*
3. *Írja fel a P_0 ponton áthaladó szintfelület egyenletét és annak P_0-beli érintősíkját!*

126 Megoldás: *1.* $f'_x = 4x^3$, $\quad f'_y = 4y^3$, $\quad f'_z = 4z^3$. *A parciálisak mindenütt léteznek és folytonosak, ezért a gradiens mindenütt létezik:*

$$\mathrm{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} + f'_z \underline{k} \Longrightarrow \mathrm{grad} f(P_0) = 4\underline{i} - 4\underline{j} = (4, -4, 0).$$

Mivel $|\underline{v}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$, *ezért* $\underline{e} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}\underline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{14}}\underline{j} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\underline{k}$ *és*

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} = \left(4\underline{i} - 4\underline{j}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\underline{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\underline{k}\right) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

2. $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = |\mathrm{grad} f(P_0)| = \sqrt{32}$, *és iránya:* $\underline{e} = \frac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = \frac{4}{\sqrt{32}}\underline{i} - \frac{4}{\sqrt{32}}\underline{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.

3. A szintfelület egyenlete:

$$f(x,y,z) = c.$$

Mivel $f(1,-1,0) = 3$*, ezért* $c = 3$*, tehát a kérdezett szintfelület:*

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 3.$$

Mivel a gradiens merőleges a szintalakzatra, az érintősík normálvektorára fennáll, hogy

$$\underline{n} \parallel \mathrm{grad} f(P_0) = 4\underline{i} - 4\underline{j} \Longrightarrow \underline{n} := \underline{i} - \underline{j},$$

és a sík átmegy az adott P_0 *ponton, így egyenlete:*

$$\mathrm{grad} f(P_0)\,(P - P_0) = 0,$$

tehát

$$(x-1) - (y - (-1)) = 0.$$

Lagrange-féle középértéktétel

Lagrange-féle középértéktétel egyváltozós függvényre:

$$\exists 0 < \vartheta < 1 : \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi) = f'(x_0 + \vartheta h),$$

azaz

$$\exists 0 < \vartheta < 1 : f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0+\vartheta h) \cdot h = \mathrm{d}f(x_0 + \vartheta h, h).$$

3.79. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel) *Legyen* D_f konvex*, és* f *(totálisan) deriválható, és legyen* $\underline{a}$ *belső pontja* D_f*-nek. Ekkor* $\forall$ *olyan* $\underline{h}$*-hoz, melyre* $\underline{x}_0 + \underline{h} \in D_f$: $\exists 0 < \vartheta < 1$ *úgy, hogy*

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}) \cdot h_i = \mathrm{d}f(\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}, \underline{h})$$

3.80. Megjegyzés $\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}$ *az* $\underline{x}_0$ *és* $\underline{x}_0 + \underline{h}$ *pontok által meghatározott egyenes szakasz egy pontja, így a konvexitás miatt* $\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h} \in D$.

3.81. Tétel *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt tartomány! Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható D-ben és $\mathrm{d}f(\underline{x},\underline{h}) \equiv 0$, akkor f állandó.*

Bizonyítás. Az előző tétel értelmében $\forall \underline{a}, \underline{b} \in D$-hez van az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő szakaszon olyan $\underline{c}$ pont, hogy $f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \mathrm{d}f(\underline{c}, \underline{b} - \underline{a}) = 0$ mivel D konvexitása miatt $\underline{c} \in D$. □

3.82. Példa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{3x^2+4y^2}, & \textit{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ \dfrac{1}{7}, & \textit{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Mutassa meg, hogy* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *nem létezik!*

2. *Hol differenciálható totálisan az f kétváltozós függvény?* $\mathrm{grad} f =?$

3. *Írja fel a $P = (0,1)$ ponthoz tartozó érintősík egyenletét!*

4. $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,1)} =?$ *ill.* $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)} =?$, *ha* $\underline{e} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}$ *($\underline{e}$ irányú iránymenti derivált).*

127 Megoldás: *1.*

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \textit{tetsz.}}} \frac{\varrho_n^2 \cos\varphi_n \sin\varphi_n}{\varrho_n^2(3\cos^2\varphi_n + 4\sin^2\varphi_n)}$$

függ φ_n-től, ezért a határérték nem létezik.

2. $\mathrm{grad} f(\underline{0})$ *nem létezik, mert f nem folytonos $\underline{0}$-ban. (Szükséges feltétel nem teljesül.) Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor f'_x és f'_y létezik és folytonos* $\Longrightarrow \exists \mathrm{grad} f = f'_x\underline{i} + f'_y\underline{j}$, *ahol*

$$f'_x = \frac{y(3x^2+4y^2) - xy \cdot 6x}{(3x^2+4y^2)^2},$$

és

$$f'_y = \frac{x(3x^2+4y^2) - xy \cdot 8y}{(3x^2+4y^2)^2}.$$

3. *Az érintősík egyenlete:*

$$f'_x(0,1)(x-0) + f'_y(0,1)(y-1) - (z - f(0,1)) = 0.$$

Behelyettesítve $f'_x(0,1) = \dfrac{1}{4}, f'_y(0,1) = 0, f(0,1) = 0,$ *így*

$$\frac{1}{4}(x-0) + 0 \cdot (y-1) - (z-0) = 0 \Longrightarrow z = \frac{1}{4}x.$$

4. $\exists \mathrm{grad} f(0,1) = \dfrac{1}{4}\underline{i} + 0\underline{j} \implies (0,1)$*-ben bármilyen irányban létezik az iránymenti derivált, és* $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad} f(P_0)\cdot \underline{e}$ *képlettel számolható.*

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,1)} = \left(\frac{1}{4}\underline{i} + 0\underline{j}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)}$ *csak a definícióval vizsgálható, mivel itt az előző elégséges tétel nem használható, mert* $\nexists \mathrm{grad} f(0,0)$*. (A kétváltozós függvény folytonossága nem szükséges feltétele az iránymenti derivált létezésének. Csak az adott egyenes mentén való „megfelelő irányú” folytonosság kell, de ezt nem érdemes külön vizsgálni.)*

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0+}\frac{f(\underline{0}+t\underline{e}) - f(\underline{0})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{\frac{1}{2}t^2}{\frac{3}{2}t^2+\frac{4}{2}t^2} - \frac{1}{7}}{t} = \lim_{t\to 0+}\frac{0}{t} = 0$$

3.83. Példa *Legyen*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. *Határozza meg az f függvény parciális deriváltjait az origóban!*
2. *Mutassa meg, hogy f-nek létezik az origóban a $\underline{v}=(1,1)$ irányú iránymenti deriváltja, és értéke nem nulla!*
3. *Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?*
4. *Milyen előjelű az f függvény az origó környezetében? Van-e az f-nek lokális szélsőértéke az origóban?*

128 Megoldás: *1.* $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h} = 0$*, és a szimmetria miatt* $f'_y(0,0)$ *szintén* 0.

2. $\underline{v} = \underline{i} + \underline{j}; \underline{e} = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}.$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\underline{0}+\underline{e}t) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2}}t, \frac{1}{\sqrt{2}}t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin\frac{t^2}{2t}}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\neq 0)$$

3. *Ha f totálisan deriválható lenne, akkor*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}} = \mathrm{grad} f \cdot \underline{e} \quad \textit{miatt} \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = (\underbrace{f'_x(0,0)}_{=0}, \underbrace{f'_y(0,0)}_{=0}) \cdot \underline{e} = 0$$

lenne minden $\underline{e}$ irány esetén, így az előzőek miatt nem totálisan deriválható a $(0,0)$-ban.

Vagy a definícióval:

$$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = A\cdot h + B\cdot k + \varepsilon$$

$$\sin\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 = 0\cdot h + 0\cdot k + \varepsilon$$

$(h := \varrho_n \cos\varphi_n;$ *és* $k := \varrho_n \sin\varphi_n)$ *helyettesítéssel*

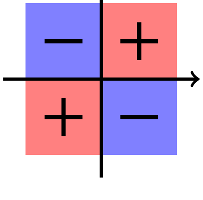
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\varrho_n\to 0} \frac{\sin(\varrho_n\cos\varphi_n\sin\varphi_n)}{\varrho_n} =$$

$$= \lim_{\varrho_n\to 0} \underbrace{\frac{\sin(\varrho_n\cos\varphi_n\sin\varphi_n)}{\varrho_n\cos\varphi_n\sin\varphi_n}}_{\to 1} \cdot \cos\varphi_n\sin\varphi_n \neq 0,$$

így nem totálisan deriválható.

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ *miatt az origó elegendően kis környezetében* $\sin\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *előjele azonos az argumentum előjelével, ezért $f(0,0) = 0$ nem lehet lokális szélsőérték, mert $(0,0)$ bármely környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is a*



függvény.

3.3.5. Magasabbrendű parciális deriváltak

Az n-változós függvény bármely parciális deriváltfüggvénye újból n-változós függvény. Ezért beszélhetünk ennek a függvénynek is a parciális deriváltjairól. Így jutunk el a másodrendű parciális deriváltakhoz.

Példa kétváltozós függvény esetére:

$$f(x, y) = e^{2x} \cos 2y + x^2 - y^2.$$

Ekkor

$$f'_x(x, y) = 2e^{2x} \cos 2y + 2x, \quad f'_y(x, y) = -2e^{2x} \sin 2y - 2y,$$

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x} \cos 2y + 2,$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^{2x} \cos 2y - 2,$$

f''_{xx} és f''_{yy} a tiszta másodrendű parciális deriváltak.

$$f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4e^{2x} \sin 2y,$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4e^{2x} \sin 2y.$$

f''_{xy} és f''_{yx} a vegyes másodrendű parciális deriváltak.

A másodrendű parciálisak újra kétváltozós függvények! Vegyük észre, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, tehát az eredmény nem függ a differenciálás sorrendjétől. Ez nem véletlen. Látni fogjuk, hogy elég "szép" függvény esetén ez mindig így van. (3.87. Young tétel.)

Másrészt vegyük észre, hogy most a tiszta másodrendű parciális deriváltak összege minden (x, y) pontban nullát ad, azaz $f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = 0$. Tehát f megoldása az úgynevezett síkbeli Laplace-differenciálegyenletnek:

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Ha ez a tulajdonság teljesül, a függvényt *harmonikus függvénynek* nevezzük. Tehát a síkbeli Laplace egyenlet megoldásai a harmonikus függvények. Nagy szerepet játszanak az ilyen függvények a komplex függvénytanban és a potenciálelméletben. És most általánosságban is definiáljuk a másodrendű parciális deriváltakat!

3.84. Definíció *A* $g(\underline{x}) = f'_{x_i}(\underline{x}) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}}$ *n-változós függvény* x_j *változó szerinti parciális derivált függvényét az* f *i-edik és j-edik változója szerinti másodrendű parciális deriváltjának nevezzük (ha létezik). A következő jelöléseket használjuk:*

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = D_j D_i f = D_{ij} f.$$

Magasabbrendű parciális deriváltak értelemszerűen definiálhatók.

Ha $i = j$, *akkor tiszta, különben vegyes másodrendű parciális deriváltról beszélünk.*

3.85. Definíció *Ha* f *(totálisan) deriválható valamely* $K_{\underline{a}}$*-ban, és (elsőrendű) parciális deriváltjai (totálisan) deriválhatók* $\underline{a}$*-ban, akkor azt mondjuk, hogy* f *kétszer (totálisan) deriválható* $\underline{a}$*-ban.*

Magasabbrendű deriválhatóság értelemszerűen definiálható.

A következő példa mutatja, hogy a magasabbrendű parciális deriváltak definíciójában fontos a változók sorrendje, ettől függhet a vegyes másodrendű parciális derivált.

3.86. Példa *Legyen*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0)! \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

és

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

így

$$f'_x(0,y) = -y \qquad \text{és} \qquad f'_y(x,0) = x,$$

ezért

$$f''_{xy}(0,0) = -1 \qquad \text{és} \qquad f''_{yx}(0,0) = 1.$$

A következő tétel azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett, nem kell a deriválás sorrendjére figyelni.

3.87. Tétel (Young) *Ha f kétszer (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén*

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\underline{a}}.$$

Az r-szeres folytonos deriválhatóságot az egyváltozós esethez hasonlóan az r-edik derivált folytonosságaként lehetne definiálni, de az ehhez szükséges fogalmakra nincs szükségünk, ha a következő definíciót mondjuk.

3.88. Definíció *Azt mondjuk, hogy f r-szer folytonosan deriválható a $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, ha r-edrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak D-n.*

Jelölés: $f \in C^r_D$.

3.89. Megjegyzés *Ha $D \subset D_f \subset R^n$ nyílt, $f \in C^r_D$, és $\underline{a} \in D$, akkor f r-szer deriválható $\underline{a}$-ban.*

Ha $q \leq r$, akkor $C^r_D \subset C^q_D$.

3.90. Következmény *Ha $f \in C^r_{K_{\underline{a}}}$, akkor f-nek az r-edrendű parciális deriváltjai közül mindazok megegyeznek, amelyek csak a deriválások sorrendjében különböznek egymástól.*

Például, ha f kétváltozós függvény és $f \in C^3_{K_{\underline{a}}}$, akkor

$$f'''_{xxy}(\underline{a}) = f'''_{xyx}(\underline{a}) = f'''_{yxx}(\underline{a}).$$

Vagy ha f háromváltozós függvény és $f \in C^3_{K_{\underline{a}}}$, akkor

$$f'''_{xyz}(\underline{a}) = f'''_{xzy}(\underline{a}) = f'''_{yxz}(\underline{a}) = f'''_{yzx}(\underline{a}) = f'''_{zxy}(\underline{a}) = f'''_{zyx}(\underline{a}).$$

3.3.6. Magasabbrendű differenciálok

Másodrendű esetben fogjuk látni, hogy a Hesse-mátrixot (lásd 3.124.) tekinthetjük másodrendű deriváltnak, de ettől magasabbrendű totális derivált értelmezése nehézkes lenne. Ehelyett a magasabbrendű differenciálokkal foglalkozunk.

Az elsőrendű differenciált a 3.64. Definícióban már láttuk.

Az f $\underline{a}$-ban deriválható függvény $\underline{a}$ pontbeli differenciálja a $\underline{h}$ megváltozásnál:

$$df(\underline{a}, \underline{h}) = f'_{x_1}(\underline{a})h_1 + f'_{x_2}(\underline{a})h_2 + \cdots + f'_{x_n}(\underline{a})h_n = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\underline{a})h_i = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h}.$$

Kétváltozós függvény esetén $\underline{a} = (x, y)$ és $\underline{h} = (h_1, h_2)$ jelöléssel

$$df(\underline{a}, \underline{h}) = f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2.$$

Háromváltozós függvény esetén pedig $\underline{a} = (x, y, z)$ és $\underline{h} = (h_1, h_2, h_3)$ jelöléssel

$$df(\underline{a}, \underline{h}) = f'_x(x, y, z)h_1 + f'_y(x, y, z)h_2 + f'_z(x, y, z)h_3.$$

Például $f(x, y, z) = xy^3 + xyz$ esetén

$$df(\underline{x}, \underline{h}) = (y^3 + yz)h_1 + (3xy^2 + xz)h_2 + xyh_3.$$

Ez egy $2n = 6$-változós függvény.

Másodrendű differenciál

Az elsőrendű differenciálban rögzítsük a $\underline{h}$ vektort! Ekkor ennek az $\underline{a}$-től függő függvénynek is vehetjük az $\underline{a}$-beli differenciálját $\underline{h}$ megváltozás mellett. (Természetesen csak akkor, ha az elsőrendű parciálisak differenciálhatók. Ezt úgy érhetjük el, ha például feltesszük, hogy f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak.) Tehát a másodrendű differenciál az elsőrendű differenciál elsőrendű differenciálja.

3.91. Definíció *Ha f kétszer (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor azt mondjuk, hogy*

$$d^2f(\underline{a}, \underline{h}) = d\left(df(\underline{a}, \underline{h})\right)(\underline{a}, \underline{h})$$

az f függvény $\underline{a}$ pontbeli másodrendű differenciálja $\underline{h}$ megváltozásnál.

Kétváltozós függvény esetén $\underline{a} = (x, y)$ és $\underline{h} = (h_1, h_2)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} d^2f(\underline{a}, \underline{h}) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2\right) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2\right) \cdot h_2 &= \\ = \left(f''_{xx}(x, y)h_1 + f''_{yx}(x, y)h_2\right) \cdot h_1 + \left(f''_{xy}(x, y)h_1 + f''_{yy}(x, y)h_2\right) \cdot h_2 &= \\ = f''_{xx}(x, y) \cdot h_1^2 + 2f''_{xy}(x, y) \cdot h_1h_2 + f''_{yy}(x, y) \cdot h_2^2. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy 3.87. Young-tétele miatt $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$.

Ha (x, y)-t rögzítjük, akkor $d^2f(\underline{a}, \underline{h})$ kvadratikus függvénye (csak másodfokú tagokból álló polinomja) a h_1, h_2 változóknak. A kifejezés mátrixosan felírva jobban átlátható:

$$d^2f(\underline{a}, \underline{h}) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \underline{h}^T \underline{\underline{H}} \underline{h}.$$

$\underline{\underline{H}}$ neve: Hesse-féle mátrix, lásd 3.124. $\underline{\underline{H}}$ szimmetrikus mátrix.

Háromváltozós függvény esetén

$$\begin{aligned}
d^2 f(\underline{a}, \underline{h}) = & \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y,z)h_1 + f'_y(x,y,z)h_2 + f'_z(x,y,z)h_3\right) \cdot h_1 + \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y,z)h_1 + f'_y(x,y,z)h_2 + f'_z(x,y,z)h_3\right) \cdot h_2 + \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left(f'_x(x,y,z)h_1 + f'_y(x,y,z)h_2 + f'_z(x,y,z)h_3\right) \cdot h_3 = \\
& = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \underline{h}^T \underline{\underline{H}}\, \underline{h}.
\end{aligned}$$

3.87. Young tétele miatt $\underline{\underline{H}}$ most is szimmetrikus.

Magasabbrendű differenciál

3.92. Definíció *Ha f k-szor (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor azt mondjuk, hogy*

$$d^k f(\underline{a}, \underline{h}) = d\left(df^{k-1}(\underline{a}, \underline{h})\right)(\underline{a}, \underline{h})$$

az f függvény $\underline{a}$ pontbeli k-adrendű differenciálja $\underline{h}$ megváltozásnál.

3.3.7. Szélsőértékszámítás

3.93. Definíció *Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek! Azt mondjuk, hogy f-nek lokális minimuma (illetve maximuma) van $\underline{a}$-ban, ha $\exists K_{\underline{a}} \subset D$, hogy*

$$f(\underline{a}) \le f(\underline{x}) \qquad (\textit{illetve } f(\underline{a}) \ge f(\underline{x})) \qquad (\underline{x} \in K_{\underline{a}})$$

(Nem szigorú szélsőértéket definiáltunk!)

3.94. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)
Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek! Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, és létezik valamelyik változó szerinti parciális deriváltja, akkor az 0.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists f'_{x_i}(\underline{a})$, és legyen

$$g(x) = f(\underline{a} + x\underline{e_i})!$$

A parciális derivált definíciója szerint g deriválható 0-ban, és

$$g'(0) = f'_{x_i}(\underline{a}).$$

Másrészt g-nek lokális szélsőértéke van 0-ban, így az egyváltozós függvényeknél tanultak szerint

$$g'(0) = 0. \qquad \square$$

3.95. Megjegyzés *Ugyanezt iránymenti deriváltakra is elmondhatjuk.*

3.96. Következmény *Ha f-nek $\underline{a}$-ban lokális szélsőértéke van, és ott (totálisan) deriválható, akkor*

$$\mathrm{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}.$$

Bizonyítás. A 3.55. Tétel szerint f-nek minden parciális deriváltja létezik, az előző tétel miatt ezek mind 0-k, így ismét a 3.55. Tétel szerint

$$\mathrm{grad} f(\underline{a}) = (0, 0, \ldots, 0) = \underline{0}. \qquad \square$$

A következő példa azt mutatja, hogy a feltétel nem elégséges.

3.97. Megjegyzés *Tekintsük az*

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

függvényt!

$$f'_x(x, y) = -2x(y - 2x^2) - 4x(y - x^2), \qquad f'_y(x, y) = (y - 2x^2) + (y - x^2)$$

Mivel mindkettő folytonos, f (totálisan) deriválható, és $\mathrm{grad} f(\underline{0}) = \underline{0}$, mégis f-nek nincs lokális szélsőértéke $(0, 0)$-ban, mert $f(0, 0) = 0$, ugyanakkor a függvény a $(0, 0)$ pont minden környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is.

Ugyanis az $y = 2x^2$ parabola feletti pontokban $f(x, y) > 0 \quad (y > 2x^2 > x^2)$. Az $y = x^2$ parabola alatti pontokban szintén $f(x, y) > 0 \quad (y < x^2 < 2x^2)$. A két parabola között $(x^2 < y < 2x^2)$ viszont $f(x, y) < 0$.

Annak ellenére, hogy ennek a kétváltozós függvénynek az origóban nincs lokális szélsőértéke, mégis, ha a felületből az x,y síkra merőleges, az origón átmenő síkokkal kimetszünk felületi görbéket, akkor f-nek minden ilyen felületi görbe mentén lokális minimuma van. Ugyanis a metszetgörbe pontjaiban a függvényérték pozitív, legalábbis az origó egy átszúrt környezetében.

Az egyváltozós függvényeknél látottakhoz képest most más esetek is lesznek. Ahhoz, hogy ezekről beszéljünk, gondoljuk végig a következőt. Egy n-változós függvény második deriváltja a 3.124. Megjegyzés szerint a Hesse-mátrix lesz. Ez megfelel egy lineáris operátornak, ami egy vektort egyrészt egy nemnegatív számmal szoroz, másrészt pedig forgat. Ha minden vektor esetén a forgatás szöge hegyesszög, akkor a mátrixot pozitív definitnek, ha mindig tompaszög, akkor negatív definitnek nevezzük. Vagyis a szög koszinuszának előjelét vizsgáljuk, ami megegyezik a vektor és képe skaláris szorzatának előjelével.

3.98. Definíció *Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratikus mátrixot pozitív (negatív) definitnek nevezzük, ha minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ esetén*

$$(\underline{x}, \underline{\underline{A}}\underline{x}) > 0 \qquad \big((\underline{x}, \underline{\underline{A}}\underline{x}) < 0\big)\,.$$

Ha a $>$ (illetve $<$) helyett $\geq$ (illetve $\leq$) szerepel, akkor pozitív (illetve negatív) szemidefinitnek nevezzük a mátrixot.

Végül azt mondjuk, hogy a mátrix indefinit, ha nem szemidefinit.

3.99. Megjegyzés *$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor indefinit, ha $\exists \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, amire*

$$(\underline{x}, \underline{\underline{A}}\underline{x}) < 0 < (\underline{y}, \underline{\underline{A}}, \underline{y}).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan adunk elégséges feltételt lokális szélsőértékre. Valójában ez most egy szükséges feltételt is tartalmaz.

A tétel bizonyításához itt nem ismertetett eszközökre lenne szükség, ezért a tétel bizonyítását mellőzzük.

3.100. Tétel *Legyen f kétszer (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban!*

Ha $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ *és a Hesse-mátrix pozitív definit, akkor f-nek $\underline{a}$-ban lokális minimuma van.*

Ha $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ *és a Hesse-mátrix negatív definit, akkor f-nek $\underline{a}$-ban lokális maximuma van.*

Ha a Hesse-mátrix indefinit, akkor f-nek $\underline{a}$-ban nincs lokális szélsőértéke.

A következő, a definitség eldöntéséhez jól használható módszerhez szükséges a sarokminor fogalma.

3.101. Definíció *Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix k-adik sarok determinánsa a bal felső $k \times k$-s aldetermináns, amit D_k val jelölünk.*

3.102. Tétel *Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor pozitív definit (illetve szemidefinit), ha minden sarok determináns pozitív, azaz $D_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$ (illetve ha minden sarok determináns nem negatív, azaz $D_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$).*

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor negatív definit (illetve szemidefinit), ha a sarok determinánsok váltakozó előjelűek, azaz $(-1)^k D_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$ (illetve ha $(-1)^k D_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$).

A fenti tétel könnyen megjegyezhető, ha felhasználjuk, hogy a Hesse-mátrix szimmetrikus, így van sajátvektorokból álló ortonormált bázisa, amiben a mátrix diagonális, átlóban a sajátértékekkel. Ha csupa pozitív (illetve nem negatív) sajátérték van, akkor D_k-k mind pozitívak (illetve nem negatívak). Ha csupa negatív sajátérték van, akkor D_k-k váltakozó előjelűek.

3.103. Példa *Van-e lokális szélsőértéke az*

$$f(x,y) = xy$$

függvénynek?

129 Megoldás:

$$|f''(x,y)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

ezért $f''(x,y)$ indefinit, így sehol sincs lokális szélsőérték.

Az

$$f'_x = y = 0 \qquad f'_y = x = 0$$

egyenletrendszer megoldása az origó, így a szükséges feltétel csak itt teljesül, tehát csak itt lehetne lokális szélsőérték. Azokat a pontokat, ahol az első derivált 0 szokás extremális pontoknak hívni, vagyis az $f(x,y) = xy$ függvénynek az origó extremális pontja. Azokat az extremális pontokat, ahol a második derivált indefinit nyeregpontnak hívjuk, tehát az $f(x,y) = xy$ függvénynek az origó nyeregpontja. Ezt mutatja a 3.8 ábra, és az animáción.

3.104. Példa *Keressük meg az*

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 1$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

130 Megoldás:

$$f'_x = 3x^2 - 3, \qquad f'_y = 3y^2 - 3, \qquad f'_z = 3z^2 - 3$$

A függvény mindenütt értelmezett, és parciálisan deriválható mindhárom változó szerint, így ahol lokális szélsőérték van, ott

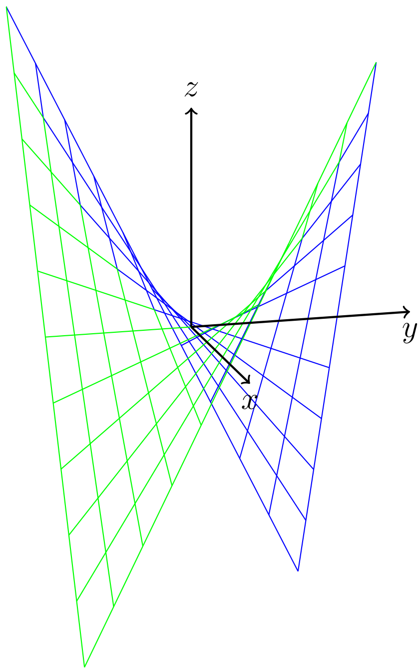
$$f'_x = f'_y = f'_z = 0$$

kell legyen. Az egyenletrendszernek 8 megoldása van, nevezetesen

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Csak ebben a 8 pontban lehet szélsőérték.

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 6y, \quad f''_z z = 6z, \text{ és } f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yx} = f''_{yz} = f''_{zx} = f''_{zy} = 0.$$



3.8. ábra. $f(x, y) = xy$

A másodrendű parciálisak mind folytonosak, így f mindenütt kétszer (totálisan, sőt folytonosan) deriválható, és a Hesse-mátrix

$$f''(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{bmatrix}.$$

Ez szerencsénkre éppen diagonális mátrix. Pozitív definit az $(1, 1, 1)$ pontban, itt lokális minimum van. Negatív definit a $(-1, -1, -1)$ pontban, itt lokális maximum van. Indefinit a másik 6 pontban, így ezekben nincs lokális szélsőérték.

Az előző példában 6 darab nyeregpont volt.

A 3.100. Tétel kétváltozós függvény esetében a következőt adja.

3.105. Tétel *Legyen (x, y) belső pontja D_f-nek úgy, hogy f kétszer (totálisan) deriválható (x, y)-ban, és jelölje $\underline{\underline{H}}$ az f Hesse-mátrixát a-ban!*

Ha $f'(x, y) = 0$ és $\det(\underline{\underline{H}}) > 0$, akkor itt van lokális szélsőérték, méghozzá ha

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) > 0, & \text{akkor lokális minimum} \\ f''_{xx}(x, y) < 0, & \text{akkor lokális maximum.} \end{cases}$$

Ha $\det(\underline{\underline{H}}) < 0$, akkor itt nincs lokális szélsőérték.

3.106. Megjegyzés *A Hesse-mátrix szimmetriája miatt ha* $\det(\underline{\underline{H}}) > 0$*, akkor* $f''_{xx} = 0$ *nem lehet, továbbá ilyenkor* f''_{xx} *és* f''_{yy} *azonos előjelű.*

Ha $f' = 0$ *és* $\det(\underline{\underline{H}}) = 0$*, akkor a tétel alapján nem derül ki, van-e szélsőérték.*

3.107. Példa *Keresse meg az* $f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ *függvény lokális szélsőértékeit!*

131 Megoldás:

$$f'_x = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \qquad f'_y = 3y^2 - 3 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1.$$

$P_1 = (1,1)$ *és* $P_2 = (1,-1)$ *pontokban lehet lokális szélsőérték.*

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 12y$$

$D(1,1) = 12 > 0$ *és* $f''_{xx}(1,1) > 0$*, így* $P_1 = (1,1)$ *lokális minimumhely, a lokális minimum* $f(1,1) = -3$*.*

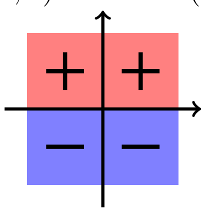
$D(1,-1) = -12 < 0$*, így* $P_2 = (1,-1)$*-ben nincs lokális szélsőérték, ez egy nyeregpont.*

3.108. Példa *Határozza meg az* $f(x,y) = x^2y^3$ *lokális szélsőértékeit!*

132 Megoldás: $f'_x = 2xy^3 = 0$ *és* $f'_y = 3x^2y^2 = 0$ *miatt* $x = 0$ *vagy* $y = 0$*. Tehát az* $(x,0)$ *és a* $(0,y)$ *pontokban lehet lokális szélsőérték*

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{vmatrix} = 12x^2y^4 - 36x^2y^4 = -24x^2y^4$$

$D(x,0) = 0$ *és* $D(0,y) = 0$*, így nem tudunk dönteni.*



Az x tengely pontjaiban nincs lokális szélsőérték A függvényérték itt 0 és e pontok bármely környezetében a függvény felvesz pozitív és negatív értéket is. Az y tengely pontjaiban (az origót kivéve) van lokális szélsőérték:

$(0,y), y > 0$ *pontokban lokális minimum van.*

$(0,y), y < 0$ *pontokban lokális maximum van.*

3.109. Példa $f(x,y) = y^2(1 - x^2 - y^2)$

1. *Határozza meg a lokális szélsőértékhelyeket!*

2. *Határozza meg a függvény minimumát és maximumát – ha létezik – az $x^2 + y^2 \le 1$ tartományon!*

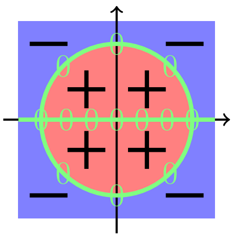
133 Megoldás: 1. $f'_x = y^2(-2x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *vagy* $y = 0$
$f'_y = 2y(1 - x^2 - y^2) - 2y^3 = -4y^3 + 2y - 2yx^2 = 0$. *Ha* $x = 0$*, akkor* $2y(1 - 2y^2) = 0 \Longrightarrow y = 0$ *vagy* $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *Ha* $y = 0$*, akkor* $0 = 0$ *azonosság, tehát ekkor* x *tetszőleges.*

Tehát a szükséges feltétel teljesül: $P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}), P_2(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), P_3(x, 0)$ *pontokban.*

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} -2y^2 & -4xy \\ -4xy & -12y^2 + 2 - 2x^2 \end{vmatrix}$$

$D(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 > 0$ *és itt* $f''_{xx} < 0$*, így* P_1 *és* P_3 *pontok lokális maximumhelyek,* $f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{4}$ *a lokális maximum.*

Az x *tengely mentén:* $D(x, 0) = 0$ *kérdéses.*



$(x, 0), |x| < 1$ *lokális minimum (értéke:* 0*).*

$(x, 0), |x| > 1$ *lokális maximum (értéke:* 0*).*

$(1, 0)$ *ill.* $(-1, 0)$ *pontokban nincs lokális szélsőérték.*

2. f *folytonos a kompakt halmazon, így 3.42. Weierstrass-tétel miatt létezik minimum és maximum.*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Lokális szélsőérték:} & f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4} \\ & f(x,0) = 0 \\ \textit{Határon:} & f = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \min = 0, \\ \max = \frac{1}{4}. \end{array}$$

3.110. Példa $f(x, y) = x^3 + y^3 - x - y$

1. *Határozzuk meg a lokális szélsőértéket!*

2. *Létezik-e* f*-nek legnagyobb és legkisebb értéke az*

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}; 0 \le y \le 1 - x; 0 \le x \le 1\}$$

tartományon? Ha igen, keressük meg!

134 Megoldás: *1. A függvény mindenütt deriválható. (A parciálisak léteznek és folytonosak.)*

$f'_x = 3x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad f'_y = 3y^2 - 1 = 0 \implies y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

$D(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$, *és* $f''_{xx}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$, *tehát* $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ *lokális minimum.*

$D(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ *és* $f''_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$, *tehát* $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ *lokális maximum.*

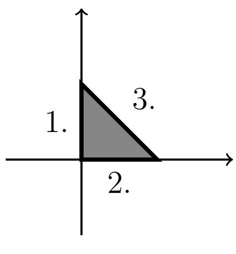
$D(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ *nincs lokális szélsőérték, nyeregpont.*

$D(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ *nincs lokális szélsőérték, nyeregpont.*

2. A tartomány korlátos és zárt (kompakt halmaz), f folytonos, így 3.42. Weierstrass tétele miatt van minimuma és maximuma.

Hol lehet a tartománybeli szélsőérték?

- *ahol f nem deriválható (most ilyen hely nincs).*
- *ahol lokális szélsőérték lehet (nem kell ellenőrizni az elégségességet, ha tudjuk, hogy $\exists$ a minimum és maximum) Most a lokális szélsőértékhelyek nem esnek a tartományba.*
- *a tartomány határán (1 dimenzióval alacsonyabb szélsőértékszámítási feladat).*
  - $\varphi_1(y) := f(0,y) = y^3 - y, \quad y \in [0,1]$
    (Zárt intervallumbeli feladat)
    $\varphi'_1 = 3y^2 - 1 = 0 \implies y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
    $f(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$



    A végpontok: $f(0,0) = 0; f(0,1) = 0$.
  - f *x-ben és y-ban szimmetrikus. Ezt kihasználva:*
    $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $f(1,0) = 0$ *(Végpont; a másik már szerepelt.)*
  - $\varphi_3(x) := f(x, 1-x) = x^3 + (1-x)^3 - x - (1-x) = \cdots = 3x^2 - 3x$
    $\varphi'_3 = 6x - 3 = 0 \implies x = \frac{1}{2}$; $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ *(Végpontok már voltak.)*

A kiszámolt értékek közül kell választani.

Összefoglalva: $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = 0$ *maximum L* $f(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ *minimum.*

3.3.8. Többértékű függvények deriválhatósága (deriváltmátrix)

A differenciálhatóság definíciójában a függvény megváltozását lineáris függvénnyel közelítettük. Most is ilyen lesz a definíció, ezért meg kell értenünk, hogy melyek a lineáris vektor-vektor függvények. A vektor-vektor függvényeket szokás leképezésnek, operátornak vagy transzformációnak is nevezni.

3.111. Megjegyzés $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *leképezést lineárisnak nevezzük, ha* $\forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ *és* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$P(\underline{a} + \underline{b}) = P(\underline{a}) + P(\underline{b}) \qquad \textit{(additív)}$$

és

$$P(\lambda \underline{a}) = \lambda P(\underline{a}) \qquad \textit{(homogén).}$$

A $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineáris leképezéseket mátrixszal lehet megadni:*

$$P(\underline{a}) = \underline{\underline{P}}\, \underline{a},$$

ahol $\underline{\underline{P}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *azaz* $\underline{\underline{P}}$*-nek* n *darab oszlopa és* m *darab sora van.*

3.112. Megjegyzés *Ebben a részben mátrixokat szorzunk össze, ezért nem mindegy, hogy sor- vagy oszlopmátrixról van-e szó. Megállapodunk, hogy* $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ *vektort oszlopmátrixként értelmezünk, azaz* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$ *és* $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^{1 \times n}$, *ha* $n \neq 1$. *Ennek megfelelően az* $\underline{x}^T$ *(*$\underline{x}$ *transzponáltja) pedig sormátrix.*

3.113. Megjegyzés *Egy* $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *leképezést differenciálhatónak nevezünk az* $\underline{a}$ *pontban, ha* $K_{\underline{a},\delta}$*-ban a függvény megváltozása lineáris függvénnyel "jól" közelíthető.*

Ez a valós értékű függvényekhez hasonlóan (3.53. Definíció) is definiálható lenne, de most

$$\Delta \underline{f} = \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \underline{\underline{A}}\, \underline{h} + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{h})\underline{h}$$

adódna, ahol $\lim\limits_{\underline{h} \to \underline{0}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{h}) = \underline{\underline{0}}$. *Itt egy mátrixszal kellene a nullmátrixhoz tartani, amit mi nem definiáltunk. Bár definiálhatnánk, de mi inkább a Fréchet-féle definíciót választjuk.*

3.114. Definíció *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^m$ *és* $\underline{a}$ *belső pontja* D*-nek!*

Azt mondjuk, hogy $\underline{f}$ *(totálisan) deriválható* $\underline{a}$*-ban, és* $\underline{a}$*-beli deriváltja az* $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *mátrix, ha*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{\underline{A}}(\underline{x} - \underline{a})|}{|\underline{x} - \underline{a}|} = 0$$

teljesül.

A deriváltra (deriváltmátrixra) az

$$\underline{f}'(\underline{a}) = \underline{\underline{A}}$$

jelölést vezetjük be.

3.115. Megjegyzés *Ugyanez a definíció $m = 1$ esetén ekvivalens a 3.53. Definícióval, $\underline{\underline{A}} = \underline{G}^T$ mellett, azaz $\underline{f}'(\underline{a}) = \mathrm{grad}^T f(\underline{a})$.*

Ha bevezetjük az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ jelölést, ahol $f_i : D \to \mathbb{R}$ $\forall i$-re, akkor

$$\underline{f} \text{ deriválható } \underline{a}\text{-ban} \iff f_i \text{ deriválható } \underline{a}\text{-ban} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Továbbá, ekkor $\underline{f}'(\underline{a})$ i-edik sora $f_i'(\underline{a})$, aminek transzponáltja $\mathrm{grad} f_i(\underline{a})$, azaz

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} f_1'(\underline{a}) \\ f_2'(\underline{a}) \\ \vdots \\ f_m'(\underline{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{grad}^T f_1 \\ \mathrm{grad}^T f_2 \\ \vdots \\ \mathrm{grad}^T f_m \end{bmatrix}_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{a}}$$

Ha $n = m$, akkor az $\underline{f}$ függvény az n dimenziós euklideszi teret önmagába képezi le. (Lásd új változók bevezetése többes integrálok esetén!) Ilyenkor a deriváltmátrixot Jacobi-mátrixnak nevezzük, determinánsát pedig Jacobi-determinánsnak.

Értelmezhetnénk többértékű függvény parciális deriváltjait, aminek egy pontbeli értéke egy vektor lenne, nevezetesen a k-adik változó szerinti parciális derivált a deriváltmátrix k-adik oszlopa lenne.

Sőt iránymenti deriváltat is értelmezhetnénk, és itt is igaz, hogy ha $\underline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, akkor ott minden $\underline{e}$ irány menti deriváltja is létezik, és

$$\left.\frac{\mathrm{d}\underline{f}}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \underline{f}'(\underline{a}) \cdot \underline{e}.$$

Például, ha $n = m = 3$, akkor $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transzformáció esetén a Jacobi-mátrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{a}} = \left.\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}\right|_{\underline{a}},$$

míg a Jacobi-determináns $\det \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}|$.

3.116. Megjegyzés *A fenti $\underline{f}$ divergenciájának és rotációjának nevezzük rendre az $\underline{\underline{A}}$ Jacobi-mátrix divergenciáját és rotációját, melyeket a következő módon jelölünk, és az alábbi képletekkel értelmezünk.*

$$\mathrm{div}\underline{f} = \mathrm{div}\underline{\underline{A}} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\underline{f} = \mathrm{rot}\underline{\underline{A}} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\underline{k}$$

A $\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ *(ejtsd: nabla) szimbólum segítségével*

$$\mathrm{div}\underline{f} = \underline{\nabla}\underline{f}, \qquad \mathrm{rot}\underline{f} = \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

alakban írható, és könnyebben megjegyezhető.

3.3.9. Összetett függvény deriválhatósága (láncszabály)

3.117. Tétel *Legyen $\underline{g} : D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, illetve $\underline{f} : D_f \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, és $\underline{a}$ belső pontja D_g-nek, illetve $\underline{g}(\underline{a})$ belső pontja D_f-nek. Ha $\underline{g}$ totálisan deriválható $\underline{a}$-ban, és deriváltja $\underline{g}'(\underline{a}) = \underline{\underline{A}}_g$, illetve $\underline{f}$ totálisan deriválható $\underline{g}(\underline{a})$-ban, és deriváltja $\underline{f}'(\underline{g}(\underline{a})) = \underline{\underline{A}}_f$, akkor $\underline{f} \circ \underline{g} : D_{\underline{f}\circ\underline{g}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ totálisan deriválható $\underline{a}$-ban, és deriváltja itt*

$$(\underline{f} \circ \underline{g})'(\underline{a}) = \underline{f}'(\underline{g}(\underline{a}))\underline{g}'(\underline{a}),$$

azaz $\underline{\underline{A}}_{\underline{f}\circ\underline{g}} = \underline{\underline{A}}_f \cdot \underline{\underline{A}}_g$.

Tehát az összetett függvény deriváltja egyenlő a külső függvény deriváltja szorozva a belső függvény deriváltjával. (A mátrixok szorzásánál a sorrend fontos!)

3.118. Példa *Ha a külső függvény $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}$-be képez ($m = 1$), akkor deriváltmátrixa, azaz a gradiensvektor transzponáltja*

$$f' = (\mathrm{grad} f)^T,$$

és az összetett függvény deriváltmátrixa:

$$(f \circ \underline{g})' = (\mathrm{grad} f)^T \cdot \underline{g}'.$$

Alkalmazzuk az $\underline{x} = (x_1, \ldots x_n)$ jelölést $\underline{g}$ változójára, és $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_k) = (g_1(\underline{x}), \ldots, g_k(\underline{x})) = \underline{g}(\underline{x})$ jelölést f változójára.

Ekkor

$$(f\circ \underline{g})'(\underline{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial y_k}\right]_{\underline{g}(\underline{a})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{a}}.$$

Ekkor az összetett függvény deriváltjának (ez egy sormátrix) i-edik eleme az összetett függvény parciális deriváltja az i-edik változója szerint. Ez mátrixok szorzásaként

$$\left.\frac{\partial(f\circ \underline{g})}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = f'(\underline{g}(\underline{a}))\underline{g}'_{x_i}(\underline{a}), \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

vektorok skaláris szorzataként

$$\left.\frac{\partial(f\circ \underline{g})}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \mathrm{grad} f(\underline{g}(\underline{a}))\cdot \underline{g}'_{x_i}(\underline{a}), \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

illetve részletezve

$$\left.\frac{\partial(f\circ \underline{g})}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_{\underline{g}(\underline{a})}\cdot\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial y_k}\right|_{\underline{g}(\underline{a})}\cdot\left.\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \sum_{j=1}^{k}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{\underline{g}(\underline{a})}\cdot\left.\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}}\right).$$

Az összetett függvény parciális deriváltjait felírva rendre $i=1,2,\ldots,n$ esetén, megkaphatjuk a $f\circ \underline{g}$ gradiensét is:

$$\mathrm{grad}(f\circ \underline{g}) = \begin{bmatrix} \mathrm{grad} f\cdot \mathrm{grad} g_1 \\ \mathrm{grad} f\cdot \mathrm{grad} g_2 \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f\cdot \mathrm{grad} g_k \end{bmatrix}.$$

3.119. Példa *Írjuk fel az előző láncszabályt $n=1$ és tetszőleges m esetére. Alkalmazzuk az x jelölést $\underline{g}$ változójára, és $\underline{y}=(y_1,\ldots,y_k)=(g_1(x),\ldots,g_k(x))=\underline{g}(x)$ jelölést f változójára.*

Ekkor

$$\left(\underline{f}\circ \underline{g}\right)'(a) = \underline{f}'(\underline{g}(a))\underline{g}'(a)$$

egy oszlopmátrix, nevezetesen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k} \end{bmatrix}_{\underline{g}(a)} \cdot \begin{bmatrix} g_1'(a) \\ g_2'(a) \\ \vdots \\ g_k'(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} \left(\left.\frac{\partial f_1}{\partial y_j}\right|_{\underline{g}(a)} \cdot g_j'(a) \right) \\ \sum_{j=1}^{k} \left(\left.\frac{\partial f_2}{\partial y_j}\right|_{\underline{g}(a)} \cdot g_j'(a) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} \left(\left.\frac{\partial f_m}{\partial y_j}\right|_{\underline{g}(a)} \cdot g_j'(a) \right) \end{bmatrix}.$$

3.120. Példa *Az előző példák alapján, ha $n = m = 1$, tehát az $f(y_1, \ldots, y_k)$ külső függvénybe az $y_j = g_j(a)$ $(j = 1, \ldots, k)$ belső függvényeket helyettesítjük, akkor $f \circ \underline{g}$ deriváltja*

$$(f \circ \underline{g})'(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_k}\right]_{\underline{g}(a)} \cdot \begin{bmatrix} g_1'(a) \\ g_2'(a) \\ \vdots \\ g_k'(a) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{\underline{g}(a)} \cdot g_j'(a) \right).$$

3.121. Példa *Legyen most $k = 1$ és n és m legyen tetszőleges! Alkalmazzuk az $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ jelölést a g változójára, és $y = g(\underline{x})$ jelölést az $\underline{f}$ változójára. Ekkor*

$$(\underline{f} \circ g)'(\underline{a}) = \begin{bmatrix} f_1'(g(\underline{a})) \\ f_2'(g(\underline{a})) \\ \vdots \\ f_m'(g(\underline{a})) \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n}\right]_{\underline{a}} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_1'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{\underline{a}} & f_1'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\underline{a}} & \cdots & f_1'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{\underline{a}} \\ f_2'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{\underline{a}} & f_2'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\underline{a}} & \cdots & f_2'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{\underline{a}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{\underline{a}} & f_m'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\underline{a}} & \cdots & f_m'(g(\underline{a})) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{\underline{a}} \end{bmatrix}.$$

Felületi görbék

Ha az $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ térgörbe ("út") illeszkedik a $z = f(x, y)$ felületre, akkor

$$z(t) = f\left(x(t), y(t)\right), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Ha f totálisan differenciálható valamint $x'(t), y'(t)$ és $z'(t)$ folytonosak, akkor a láncszabály szerint

$$z'(t) = f'_x x'(t) + f'_y y'(t),$$

azaz

$$f'_x x'(t) + f'_y y'(t) - z'(t) = 0.$$

Tehát a felületi görbe $(x'(t), y'(t), z'(t))$ érintővektora és az érintősík $(f'_x, f'_y, -1)$ normálvektora merőlegesek egymásra (skalárszorzatuk nulla).

Összefoglalva azt kaptuk, hogy ha f totálisan differenciálható, akkor minden folytonosan differenciálható felületi görbe érintőegyenesei valóban a $z = f(x, y)$ felület egy-egy érintősíkjában haladnak.

Síkgörbe mint kétváltozós függvény szintvonala

(Implicit megadású görbe)

Azon (x, y) pontok összességét, amelyek kielégítik az $F(x, y) = c$ egyenletet, az F függvény c-hez tartozó szintvonalának nevezzük. Tehát, ha $y = f(x) = y(x)$ az F függvény c-hez tartozó szintvonala, akkor $F(x, y(x)) \equiv c$.

Ha F, f totálisan deriválható, akkor mindkét oldalt x szerint deriválva és a láncszabályt alkalmazva kapjuk:

$$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0.$$

Ha $F'_y \neq 0$, akkor

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

3.122. Példa

1. *Határozzuk meg az $F(x, y) = xye^y$ függvény $P = (1, -2)$ ponton átmenő szintvonalának az egyenletét!*

2. *Írjuk fel ennek a szintvonalnak az $x_0 = 1$ pontbeli deriváltját!*

135 Megoldás: *1. $xye^y = c$ a szintvonalak egyenlete. Most $xye^y|_P = -\frac{2}{e^2} = c$, ezért a keresett szintvonal egyenlete:*

$$xye^y = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}.$$

(Most x-et tudnánk kifejezni mint az y függvényét könnyedén.)

2. Felhasználva, hogy

$$F'_x = ye^y, \qquad F'_x(P) = -2e^{-2}, \qquad F'_y = xe^y + xye^y, \qquad F'_y(P) = -e^{-2}$$

kapjuk a keresett deriváltat:

$$y'(1) = -\left.\frac{F'_x}{F'_y}\right|_P = -\left.\frac{ye^y}{xe^y + xye^y}\right|_P = -\left.\frac{y}{x+xy}\right|_P = -2.$$

Természetesen az y' értékét az I. félévben látott módon is megkaphatjuk, felhasználva az összetett függvény deriválási szabályát:

$$xye^y = -\frac{1}{e^2} \implies ye^y + xy'e^y + xye^y y' = 0 \implies$$
$$\implies y' = -\frac{ye^y}{xe^y + xye^y} = -\frac{y}{x+xy}.$$

Felület mint 3 változós függvény szintfelülete

(Implicit megadású felület)

Azon (x, y, z) pontok összességét, amelyek kielégítik az $F(x, y, z) = c$ egyenletet, az F függvény c-hez tartozó szintfelületének nevezzük.

Tehát, ha $z = f(x, y)$ az F függvény c-hez tartozó szintfelülete, akkor

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv c, \qquad \forall (x, y) \in D_f.$$

Ha a $z = f(x, y)$ totálisan differenciálható és kielégíti a fenti egyenletet, valamint F is totálisan differenciálható és még feltesszük, hogy $F'_z \neq 0$, akkor $F(x, y, f(x, y)) \equiv c$ mindkét oldalát deriválva a láncszabály értelmében rendre x, illetve y szerint kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Tudjuk, hogy a $z = f(x, y)$ felület P-beli érintősíkjának normálvektora párhuzamos az $(f'_x, f'_y, -1)\big|_P$ vektorral. Ezért

$$\underline{n} \parallel (f'_x, f'_y, -1) \parallel \left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}, -1\right) \implies \underline{n} \parallel (F'_x, F'_y, F'_z)\big|_P .$$

Tehát $\mathrm{grad}F(P)$ merőleges a P-n áthaladó szintfelületre. Így a P-n áthaladó szintfelület P-beli érintősíkjának normálvektora $\mathrm{grad}F(P)$, azaz az $F(x, y, f(x, y)) = c$ szintfelület $P = (x_0, y_0, z_0)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P (z - z_0) = 0.$$

3.123. Példa

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2, \qquad P = (1, 1, -1)$$

1. *Írjuk fel F-nek a P ponton áthaladó szintfelületének az implicit egyenletét!*
2. *Írjuk fel a P ponton áthaladó szintfelület P-beli érintősíkjának az egyenletét!*

136 Megoldás: $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 \quad P = (1, 1, -1)$ *ponton átmenő szintfelülete:*

$$x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \qquad (c = 2),$$

$$\underline{n} = \mathrm{grad}F(P) = [2x, -2y, 4z]_P = 2\underline{i} - 2\underline{j} - 4\underline{k} = (2, -2, -4).$$

Az érintősík egyenlete:

$$2(x - 1) - 2(y - 1) - 4(z + 1) = 0.$$

Másodrendű totális derivált

3.124. Megjegyzés *Legyen most f n-változós valós értékű függvény, amely $\underline{a}$-ban kétszer totálisan deriválható. A fentiek szerint ekkor*

$$f'(\underline{a}) = \mathrm{grad}^T f(\underline{a}) \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Mivel $\mathbb{R}^{1\times n}$ egy n-dimenziós vektortér (ami izomorf $\mathbb{R}^n$-nel), ezért f kétszeres deriválhatósága miatt f' deriválható valamely $K_{\underline{a}}$-n, így f' itt értelmezve van és azonosítható $K_{\underline{a}} \subset \mathbb{R}^n$-t $\mathbb{R}^n$-be képző függvénnyel. Ennek koordinátafüggvényei f parciális deriváltjai, melyek f kétszeres deriválhatósága miatt totálisan deriválhatók $\underline{a}$-ban, így 3.115.

Megjegyzés szerint f' is totálisan deriválható $\underline{a}$-ban. Ekkor f' deriváltja $\underline{a}$-ban (azaz f' Jacobi-mátrixa)

$$f''(\underline{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{\underline{a}} .$$

Ezt f Hesse-mátrixának hívjuk, ami a 3.87. Young-tétel miatt szimmetrikus.

3.3.10. Gyakorló feladatok

1. $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2-2y}}{x^2+6}$, $\quad f'_x(x,y) =?$, $\quad f'_y(x,y) =?$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad f'_x(x,y) =?$

3. $f(x,y) = \sqrt{2x^2+y^4}$, $\quad f'_x(0,0) =?$, $\quad f'_y(0,0) =?$

4. $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$, $\quad f'_x(x,y) =?$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+3y^2} + 3x, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) $f'_x(x,y) =?$, $\quad f'_y(x,y) =?$

   (b) Folytonos-e f a $(0,0)$ pontban?

6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   $f'_x(x,y) =?$, $\quad f'_y(x,y) =?$

7. Melyik állítás igaz? A hamis állításokra keressen ellenpéldát! Az igaz állításokhoz keresse meg a megfelelő tételt! (A feladatok most csak kétváltozós függvényekre szólnak, de hasonló állítások többváltozós esetre is megfogalmazhatók.)

   (a) f folytonos (x_0,y_0)-ban $\Longrightarrow$ f totálisan differenciálható (x_0,y_0)-ban;

   (b) f folytonos (x_0,y_0)-ban $\Longleftarrow$ f totálisan differenciálható (x_0,y_0)-ban;

   (c) f folytonos (x_0,y_0)-ban $\Longrightarrow$ $\exists f'_x(x_0,y_0)$ és $f'_y(x_0,y_0)$;

(d) f folytonos (x_0, y_0)-ban $\Longleftarrow \exists f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$;

(e) f totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban $\Longrightarrow \exists f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$;

(f) f totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban $\Longleftarrow \exists f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$;

(g) $\exists f'_x, f'_y$ és folytonos $K_{(x_0,y_0)}$-ban $\Longrightarrow f$ totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban.

8. Legyen $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3$!

   (a) Tekintsük azt a térgörbét, melyet a fenti függvény által meghatározott felületből az $y = 1$ sík kimetsz. Írja fel ezen görbe $x = 2$ értékhez tartozó pontjában az érintőegyenes egyenletét!

   (b) Az előzőhöz hasonlóan az $x = 2$ sík által kimetszett felületi görbe $y = 1$ pontbeli érintőegyenesét írja fel!

   (c) Írja fel a $(2, 1)$ ponthoz tartozó felületi pontbeli érintősík egyenletét!

9. Legyen g elegendően sokszor folytonosan differenciálható egyváltozós függvény!

   (a) $u(x, y) = g(x - y), \qquad u'_x =?, u'_y =?$

   (b) $u(x, y) = g(x^2 + y^3), \qquad u'_x =?, u'_y =?$

   (c) $u(x, y) = g(x^2y), \qquad u'_x =?, u'_y =?, u''_{xx} =?, u''_{xy} =?, u''_{yx} =?, u''_{yy} =?$

10. Helyettesítse be az $u(x, y) = g(xy^2)$ függvényt az

$$xyu''_{xy} - y^2u''_{yy} + 2x^2u''_{xx}$$

kifejezésbe és hozza egyszerűbb alakra, ha g kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény, melynek változója helyére az xy^2 kifejezést helyettesítettük.

11. $g_1(x)$ és $g_2(x)$ kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény ($g_1, g_2 \in C^2_{\mathbb{R}}$), $h(x, y) = x \cdot g_1(y - x) + y \cdot g_2(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

    Hozza egyszerűbb alakra a $\quad h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy}$ kifejezést!

12. Hozza egyszerűbb alakra az

$$xyu''_{xx} + 2xyu''_{xy} + xyu''_{yy} - xu'_x - yu'_y = 0$$

differenciálegyenlet bal oldalát, ha $u(x, y) = g(t)|_{t=xy}$, ahol a g egyváltozós függvény kétszer folytonosan differenciálható! Az egyszerűsített kifejezés alapján adja meg azokat a g függvényeket, melyek azonosan kielégítik a differenciálegyenletet!

13. Határozza meg az $F(x, y, z) = e^{2x}y + xe^{y+2z}$ függvény $P = (1, -1, 0)$ ponton átmenő szintfelülete érintősíkjának az egyenletét!

14. Határozza meg az $f(x,y)=\dfrac{x^2+3y}{4x+5y}$ függvény $P=(1,-1)$-hez tartozó érintősíkjának az egyenletét!

15. Hol differenciálhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott írja fel a gradiens vektort!

    (a) $f(x,y)=x\sin(x+y^2)$,

    (b) $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$,

    (c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x+1}$,

    (d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

    (e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

    (f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

16. Legyen $f(x,y)=e^{xy^2}+\cos(x+y^3)$! $\operatorname{grad} f=?$, $\mathrm{d}f\left((x,y),(h,k)\right)=?$

17. Legyen $f(x,y)=x^3+x^{2y}+y^2$! $\mathrm{d}^2 f((e,-1),(h,k))=?$

18. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és az adott irányban!

    (a) $f(x,y)=x^2-2xy+\operatorname{sh}(x+y)$, $\quad P_0(-2,1)$, $\quad \underline{v}=3\underline{i}-\underline{j}$,

    (b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $\quad P_0(1,-1)$, $\quad \underline{v}=3\underline{i}-4\underline{j}$,

    (c) $f(x,y,z)=e^{-x^2-y^2}-z$, $\quad P_0(1,0,1)$ $\quad \underline{v}=4\underline{i}-3\underline{k}$,

    (d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ \dfrac{3}{5}, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$ $\quad P_0=(0,0)$, $\quad \underline{v}=\underline{i}+3\underline{j}$, $\quad$ ill. $\underline{v}=\underline{i}$,

    (e) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad P_0(0,0,0)$, $\quad \underline{v}=3\underline{i}+4\underline{j}$.

19. Határozza meg az alábbi függvények maximális iránymenti deriváltjának értékét és annak irányát a megadott pontban!

(a) $f(x,y) = xy^2 + e^{2x}, \quad P_0 = (0,1)$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}, \quad P_0 = (1,-1)$,

(c) $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2} - z, \quad P_0(1,0,1)$.

20. Írja fel az alábbi – $z = f(x,y)$ egyenletű – felületek érintősíkjainak egyenletét a megadott P_0 ponthoz tartozó felületi pontjukban!

(a) $z = x^3 + y^3 - 9x^2y, \quad P_0 = (1,-1)$,

(b) $z = \dfrac{x+1}{2y-1}, \quad P_0 = (0,1)$.

21. Határozza meg az $u = f(x,y,z)$ függvény P_0 ponton áthaladó szintfelületének egyenletét és írja fel a szintfelület P_0-beli érintősíkjának egyenletét!

(a) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2, \quad P_0(1,2,-1)$,

(b) $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}, \quad P_0(1,0,-1)$.

22. $f(x,y) = \begin{cases} \sin \dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2} + 6x, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

(a) Hol folytonos a függvény?

(b) $f'_x(x,y) = ?, \quad f'_y(x,y) = ?$

(c) Totálisan hol deriválható?

(d) Iránymenti derivált a $\underline{v} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$ irányban a

i. $P_1(0,1)$,

ii. $P_2(0,0)$

pontokban?

(e) Írja fel a $P_1(0,1)$ pontbeli érintősík egyenletét!

23. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x,y) = x^4 - 4x + 2y^2 - 2y$,

(c) $f(x,y) = e^{-x^2-2y^2+3xy}$,

(d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$,

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$.

24. Legyen $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$!
Keresse meg az f függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0,\ ;\ y = 0$ és $x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt halmazban!

25. Legyen $f(x, y) = y^2(1 - x^2 - y^2)$!

    (a) Határozza meg a lokális szélsőértékhelyeket!

    (b) Határozza meg a függvény minimumát és maximumát, ha létezik, az $x^2+y^2 \leq 1$ tartományon!

26. Legyen $f(x, y) = (x - y)^3(x + y - 2)x$!

    (a) Teljesül-e az $y = x$ pontjaiban a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó szükséges feltétel?

    (b) Az $y = x$ egyenes mely pontjaiban van lokális maximuma, illetve lokális minimuma a függvénynek? (A lokális szélsőérték definíciója alapján adja meg a válaszát!)

3.4. Integrál

3.4.1. Kétváltozós függvények integrálja

3.125. Megjegyzés *Kétváltozós függvények integrálját kettős integrálnak is nevezzük.*

Két dimenzióban téglának olyan téglalapokat nevezünk, melyek oldalai tengelypárhuzamosak. Ilyenen az integrált az egyváltozós esethez teljesen hasonlóan értelmezzük.

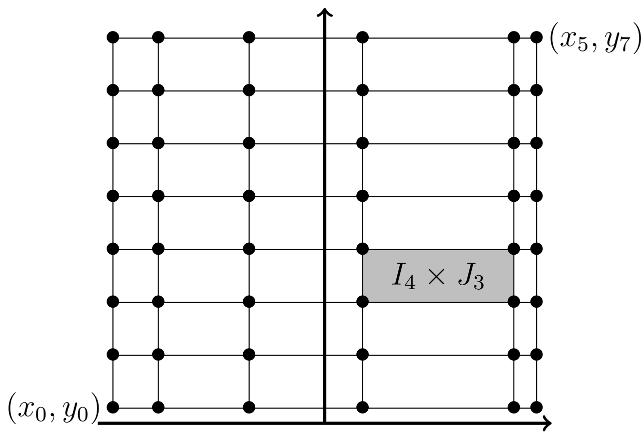
A továbbiakban feltesszük, hogy $a < b$ és $c < d$, illetve $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ és $Q = I \times J \subset \mathbb{R}^2$.

Néhány további definíció.

- Osztópontok: (x_k, y_l), ahol $k = 0, 1, \dots, p$ illetve $l = 0, 1, \dots, q$ úgy, hogy $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$, illetve $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = d$.

- $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ illetve $J_l = [y_{l-1}, y_l]$jelölésekkel a k, l-edik résztégla $I_k \times J_l$ mértéke (területe) $\Delta_{kl} = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) > 0$, ahol $k = 1, \dots, p$, $l = 1, \dots, q$.

- $I \times J$ egy felosztása $F = \{x_0, x_1, \dots, x_p\} \times \{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ az osztópontok halmaza.



- Alsó közelítő összeg, vagy alsó összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} m_{kl} \Delta_{kl}, \text{ ahol } m_{kl} = \inf\{f(x,y) : x \in I_k, y \in J_l\}.$$

- Felső közelítő összeg, vagy felső összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} M_{kl} \Delta_{kl}, \text{ ahol } M_{kl} = \sup\{f(x,y) : x \in I_k, y \in J_l\}.$$

Az egyváltozós esethez hasonló tételeket is kimondhatunk. Ezek bizonyítása megegyezik az ottaniakkal.

- $s_F \leq S_F$.
- $F_1 \subset F_2 \implies s_{F_1} \leq s_{F_2} \leq S_{F_2} \leq S_{F_1}$.
- F_1 és F_2 tetszőleges felosztások esetén $s_{F_1} \leq S_{F_2}$.
- $\exists h = \sup\{s_F\} \in \mathbb{R}$ és $\exists H = \inf\{S_F\} \in \mathbb{R}$. Ezeket rendre alsó illetve felső Darboux-integrálnak nevezzük.
- $h \leq H$.

3.126. Definíció *Legyen $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható Q-n, ha $h = H$. Ezt a közös értéket az f függvény Q-n adott Riemann-integráljának (röviden integráljának) nevezzük és*

$$\iint_Q f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

illetve

$$\int\limits_Q f \ \textit{vagy} \ \int\limits_Q f(x,y) dd(x,y) \ \textit{vagy} \ \iint\limits_Q f \ \textit{vagy} \ \iint\limits_Q f(x,y) dd(x,y)$$

módon jelöljük.

Most is igaz a következő.

3.127. Tétel *Ha $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható Q-n.*

Az integrál kiszámolása. Kettős integrál kétszeres integrállá alakítása.

3.128. Tétel (Fubini-tétel téglán) *Legyen $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I = [a, b]$ és $J = [c, d]$! Ha f Riemann-integrálható Q-n, és minden $x \in I$ esetén az $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrálható J-n, akkor $g(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ is Riemann-integrálható I-n, és*

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tehát ekkor

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{x=a}^b \left(\int\limits_{y=c}^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

3.129. Megjegyzés *Ha f folytonos, akkor minden feltétel teljesül, így ekkor igaz a tétel állítása, sőt ekkor fordított sorrendben is igaz, azaz ekkor*

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{x=a}^b \left(\int\limits_{y=c}^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{y=c}^d \left(\int\limits_{x=a}^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Ha az $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrálható J-n nem teljesül minden x-re, akkor helyette az alsó vagy a felső integrállal számolhatunk, vagyis ekkor

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{x=a}^b \left(\underline{\int\limits_{y=c}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^b \left(\overline{\int\limits_{y=c}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

illetve

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{y=c}^d \left(\underline{\int\limits_{x=a}^b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_{y=c}^d \left(\overline{\int\limits_{x=a}^b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

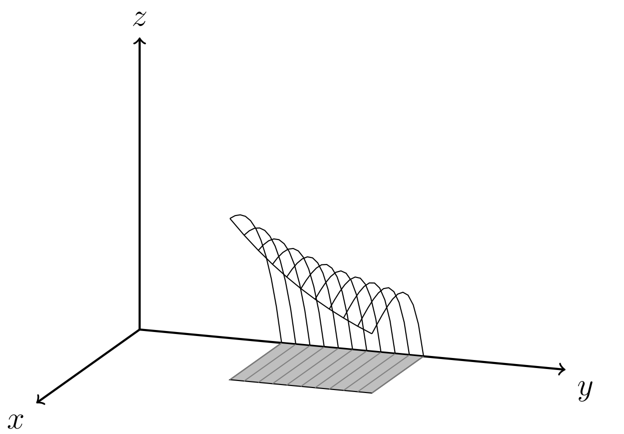
f Riemann-integrálhatósága Q-n ilyenkor is feltétel, de ebből következik például $g(x) = \int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *Riemann-integrálhatósága I-n.*

3.130. Példa *Legyen* $I = [0,1]$, $J = [1,2]$ *és* $T = I \times J$! *Határozzuk meg az*

$$\iint\limits_T 3xe^{-xy} d(x,y)$$

integrált, ha létezik!

137 Megoldás:



Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.

$$\iint\limits_T 3xe^{-xy} d(x,y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_1^2 3xe^{-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = -3 \int\limits_0^1 e^{-2x} - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{3 - 2e + e^2}{2e^2}$$

3.131. Példa *Legyen* $I = [1,2]$, $J = [1,3]$ *és* $T = I \times J$! *Határozzuk meg az*

$$\iint\limits_T y \cos 2xy d(x,y)$$

integrált, ha létezik!

138 Megoldás: *Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.*

$$\iint\limits_T y\cos 2xy d(x,y) = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_1^3 y\cos 2xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Ez y szerint parciális integrál, próbáljuk meg a másik sorrendet.

$$\iint\limits_T y\cos 2xy d(x,y) = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_1^2 y\cos 2xy \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{2} \sin 2xy \right]_{x=1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_1^3 \sin 4y - \sin 2y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos 2y}{2} - \frac{\cos 4y}{4} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{2\cos 6 - \cos 12 + \cos 4 - 2\cos 2}{8}$$

3.132. Következmény *Ha $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ folytonos, és $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x,y) = g(x)h(y)$, akkor*

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_I g \int\limits_J h.$$

Bizonyítás. Legyen $I = [a,b]$ és $J = [c,d]$. Ekkor

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d g(x)h(y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x) \left(\int\limits_c^d h(y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x) \,\mathrm{d}x \int\limits_c^d h(y) \,\mathrm{d}y.$$

Az első egyenlőség a Fubini-tétel miatt igaz.

A második azért mert $g(x)$ nem függ y-tól, azaz konstans szorzó, így kiemelhető az integrálból.

Az utolsó pedig azért, mert $\int\limits_c^d h(y) \,\mathrm{d}y$ nem függ x-től, azaz konstans szorzó, így kiemelhető az integrálból. □

A következőkben használjuk a dT jelölést a $d(x,y)$ helyett, ami a területi integrálra utal.

3.133. Példa *Legyen $T = [0,1] \times [-2,0]$! Határozzuk meg az*

$$\iint\limits_T xye^{3x+y^2} \,\mathrm{d}T$$

integrált, ha létezik!

139 Megoldás: *Mivel T tégla, és az integrandus folytonos, ezért integrálható T-n, és alkalmazható Fubini-tétele. Sőt, mivel az integrandus $(xe^{3x})\left(ye^{y^2}\right)$, ezért*

$$\iint_T xye^{3x+y^2}\,\mathrm{d}T = \int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \int_{-2}^0 ye^{y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\left[x\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x\right)\left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{-2}^0 =$$

$$= \left[x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right]_0^1 \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{-2}^0 = \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{e^4}{2}\right)$$

Most definiáljuk az integrált tetszőleges korlátos halmazon.

3.134. Definíció *Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, és $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor léteznek $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumok, hogy $T \subset I \times J$. Terjesszük ki f-et, azaz legyen*

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in T, \\ 0, & \text{ha } (x,y) \notin T! \end{cases}$$

Ha g integrálható $I \times J$-n, akkor azt mondjuk, hogy f integrálható T-n, és a most definiált integrál értéke a g integrálja lesz.

$$\iint_T f = \iint_{I\times J} g$$

3.135. Megjegyzés *Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrál (és az integrálhatóság) nem függ I és J választásától.*

3.136. Definíció *A $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományt normáltartománynak nevezzük, a következő két esetben.*

- *x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány*

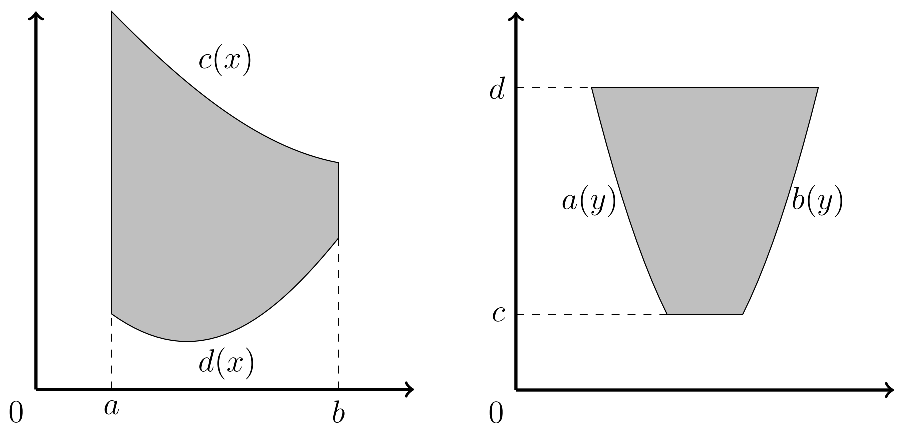
  $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $c, d : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $c(x) \leq d(x)$ minden $x \in I$ esetén és

  $$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$

- *y tengelyre vonatkoztatott normáltartomány*

  $J = [c,d] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $a, b : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $a(y) \leq b(y)$ minden $y \in J$ esetén és

  $$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in J, a(y) \leq x \leq b(y)\}.$$



(a) x tengelyre vonatkoztatott (b) y tengelyre vonatkoztatott

3.9. ábra. normáltartomány

3.137. Megjegyzés *A gyakorlatban akkor alkalmazhatók a következőkben kimondott tételek, ha a definícióban szereplő a, b, c és d függvények elég 'szépek'.*

Most is igaz a következő.

3.138. Tétel *Ha $T \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható T-n.*

Normáltartományon vett integrálra is kimondható Fubini-tétele.

3.139. Tétel (Fubini-tétel normáltartományon) *A definíció jelöléseivel:*

1. *Ha f integrálható a T x tengelyre vonatkoztatott normáltartományon, akkor*

$$\iint_T f = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik minden $x \in [a,b]$ esetén.

2. *Ha f integrálható a T y tengelyre vonatkoztatott normáltartományon, akkor*

$$\iint_T f = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik minden $y \in [c,d]$ esetén.

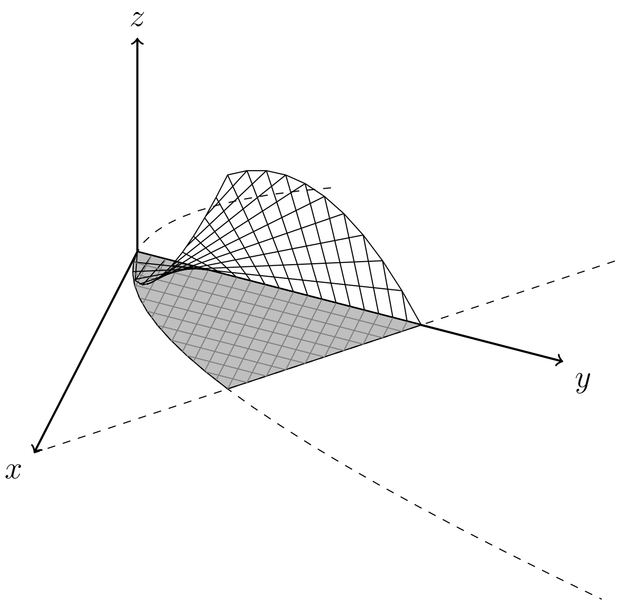
3.140. Megjegyzés *Folytonos függvényre alkalmazható a Fubini-tétel.*

3.141. Példa *Legyen* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, x^2 \leq y \leq 2 - x\}$*! Határozzuk meg az*

$$\iint_T 2xy \, \mathrm{d}T$$

integrált, ha létezik!

140 Megoldás:



T x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele. Mivel az x^2 *és* $2 - x$ *görbék metszete* $x = 1$*-nél van, ha* $x \geq 0$*, ezért*

$$\iint_T 2xy \, \mathrm{d}T = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{2-x} 2xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 4x - 4x^2 + x^3 - x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

3.142. Példa *Legyen T az* $y = 2\sqrt{x}$ *és az* $y = 2x^2$ *görbék által határolt korlátos tartomány!*

1. *Írjuk fel mindkét típusú normáltartományként T-t!*

2. Határozzuk meg az

$$\iint_T x + 2y \, \mathrm{d}T$$

integrált, ha létezik!

141 Megoldás: *1. A görbék metszeteihez a $2\sqrt{x} = 2x^2$ egyenletet kell megoldani. Ennek megoldásai az $x = 0$ és az $x = 1$, amikhez rendre az $y = 0$ és az $y = 2$ tartozik, vagyis a két metszéspont a $(0,0)$ és az $(1,2)$.*

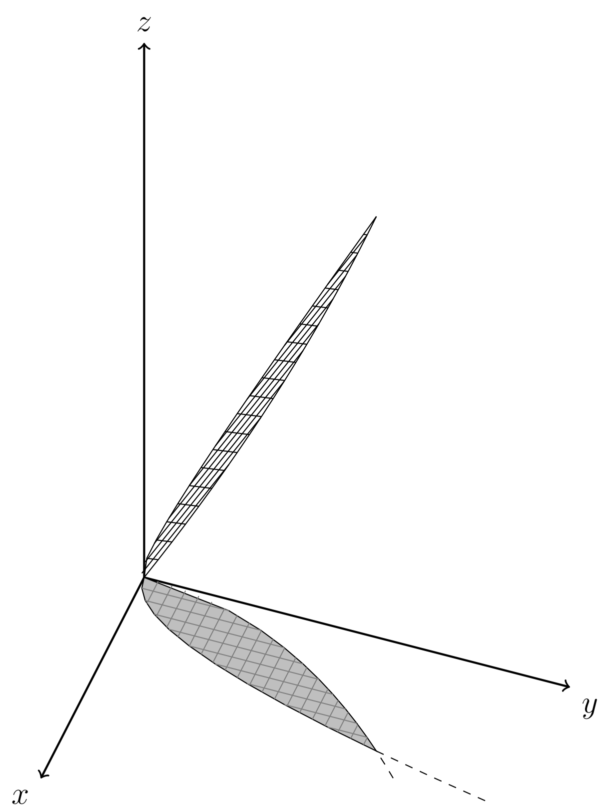
x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 2\sqrt{x}\right\};$$

y tengelyre vonatkoztatott normáltartomány:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2, \frac{y^2}{4} \le x \le \sqrt{\frac{y}{2}}\right\}.$$

2.



T normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele.

$$\iint\limits_T x + 2y \,\mathrm{d}T = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=2x^2}^{2\sqrt{x}} x + 2y \,\mathrm{d}T = \int\limits_0^1 2x\sqrt{x} + 4x - 2x^3 - 4x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

3.143. Példa *Legyen T az $A = (0,0)$, a $B = (5,0)$, a $C = (4,6)$ és a $D = (3,6)$ pontok által meghatározott trapéz!*

1. *Írjuk fel mindkét típusú normáltartományként T-t! Alakítsuk kétféleképpen kétszeres integrállá az*

$$\iint\limits_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T$$

kettős integrált!

2. *Határozzuk meg az integrált, ha létezik!*

142 Megoldás: *1. x tengelyre vonatkoztatott normáltartományként: T normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele.*

$$\iint\limits_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T = \int\limits_{y=0}^{6} \int\limits_{x=y/2}^{5-y/6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{3} \int\limits_{y=0}^{2x} e^{6x+y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=3}^{4} \int\limits_{y=0}^{6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=4}^{5} \int\limits_{y=0}^{30-6x} e^{6x+y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

y tengelyre vonatkoztatott normáltartományként: T normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele.

$$\iint\limits_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T = \int\limits_{y=0}^{6} \int\limits_{x=y/2}^{5-y/6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

2. Most az utóbbival érdemes számolni.

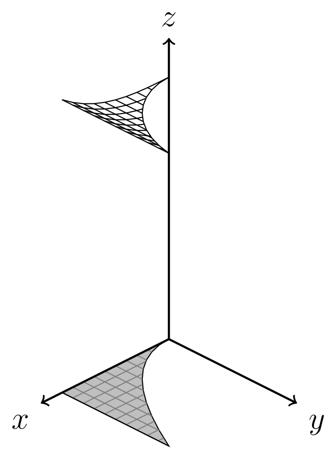
$$\iint\limits_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T = \int\limits_{y=0}^{6} \int\limits_{x=y/2}^{5-y/6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{6} \int\limits_0^6 e^{30} - 3^{4y} \,\mathrm{d}y = e^{30} + \frac{1 - e^{24}}{24}$$

3.144. Példa *Az integrálás sorrendjének felcserélésével határozzuk meg az*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{4+x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

integrált!

143 Megoldás:



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{4+x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{4+x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\sqrt{4+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\left(\sqrt{125}-\sqrt{64}\right)$$

3.145. Megjegyzés *Normáltartományok esetén az integrálás sorrendje kötött. Kívül a határok állandók, csak a belső integrál határai lehetnek függvények, és csak a külső integrál változójától függhetnek. A sorrend felcserélése a határok átalakításával jár.*

Végül, bár nem definiáljuk, mutatunk két példát kétváltozós improprius integrálra. Megjegyezzük, hogy többes integrál esetén az improprius integrál alkalmazhatóságát csak úgy tudjuk eldönteni, ha ismerjük a Lebesgue-integrált, ami ebben a jegyzetben nem szerepel. Lebesgue-integrál esetén a tartomány és a függvény korlátosságának nincs jelentősége.

3.146. Példa *Határozzuk meg az*

$$\iint_T \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}T$$

integrált, ahol

1. T *az első síknegyed,*

2. $T = (-1, 0]^2$*!*

144 Megoldás:

1. A tartomány nem korlátos, ilyenkor bizonyos esetekben alkalmazható a következő.

$$\iint_T \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}T = \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty \frac{1}{(y+1)^2}\,\mathrm{d}y = 1$$

2. Most a függvény nem korlátos.

$$\iint_T \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}T = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \int_{-1}^0 \frac{1}{(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

Mivel mindkét egyváltozós improprius integrál divergens, ezért a kétváltozós is divergens.

3.4.2. Többváltozós függvények integrálja

A továbbiakban feltesszük, hogy $a_i < b_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, illetve $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, és $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ tégla.

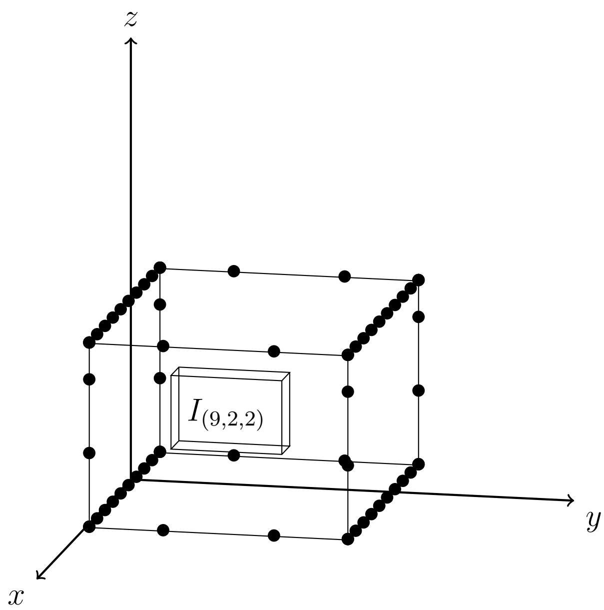
Néhány további definíció

- Osztópontok: $(x_{1k_1}, x_{2k_2}, \dots, x_{nk_n})$, ahol minden $i = 1, \dots, n$ esetén $k_i = 0, 1, \dots, p_i$ úgy, hogy $a_i = x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{ip_i} = b_i$.
- $I_{ik_i} = [x_{ik_i-1}, x_{ik_i}]$ jelölésekkel a $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$-edik résztégla $I_{\underline{k}} = I_{1k_1} \times \dots \times I_{nk_n}$ mértéke $\Delta_{\underline{k}} = (x_{1k_1} - x_{1k_1-1}) \cdot \dots \cdot (x_{nk_n} - x_{nk_n-1}) > 0$.
- $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ egy felosztása

  $$F = \{x_{10}, x_{11}, \dots x_{1p_1}\} \times \dots \times \{x_{n0}, x_{n1}, \dots x_{np_n}\}$$

  az osztópontok halmaza.
- Alsó közelítő összeg, vagy alsó összeg (F felosztáshoz tartozik)

  $$s_F = \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} m_{\underline{k}} \Delta_{\underline{k}}, \text{ ahol } m_{\underline{k}} = \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in I_{\underline{k}}\}.$$



- Felső közelítő összeg, vagy felső összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} M_{\underline{k}} \Delta_{\underline{k}}, \text{ ahol } M_{\underline{k}} = \sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in I_{\underline{k}}\}.$$

Az egyváltozós esethez hasonló tételeket is kimondhatunk. Ezek bizonyítása megegyezik az ottaniakkal.

- $s_F \leq S_F$.
- $F_1 \subset F_2 \implies s_{F_1} \leq s_{F_2} \leq S_{F_2} \leq S_{F_1}$.
- F_1 és F_2 tetszőleges felosztások esetén $s_{F_1} \leq S_{F_2}$.
- $\exists h = \sup\{s_F\} \in \mathbb{R}$ és $\exists H = \inf\{S_F\} \in \mathbb{R}$. Ezeket rendre alsó illetve felső Darboux-integrálnak nevezzük.
- $h \leq H$.

3.147. Definíció *Legyen $f : Q = I_1 \times \dots \times I_n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható Q-n, ha $h = H$. Ezt a közös értéket az f függvény Q-n adott Riemann-integráljának (röviden integráljának) nevezzük és*

$$\int_Q f \text{ vagy } \int_Q f(\underline{x}) d\underline{x}$$

módon jelöljük.

Most is igaz a következő.

3.148. Tétel *Ha $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható Q-n.*

Az integrál kiszámolása. Többes integrál többszörös integrállá alakítása.

3.149. Tétel (Fubini-tétel téglán) *Legyen $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha f Riemann-integrálható Q-n, és minden $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ esetén az $x_n \mapsto f(\underline{x})$ Riemann-integrálható I_n-n, akkor $g(x) = \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\underline{x})\,\mathrm{d}x_n$ is Riemann-integrálható $I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$-n, és*

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in I_1\times\cdots\times I_{n-1}} g(x) d(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

3.150. Megjegyzés *Ha f folytonos, akkor minden feltétel teljesül, így ekkor igaz a tétel állítása. Sőt ekkor $n-1$-szer alkalmazhatjuk a Fubini-tételt, így kapjuk, hogy*

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \left(\int\limits_{x_n=a_n}^{b_n} f(\underline{x})\,\mathrm{d}x_n \right) \ldots \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

3.151. Példa *Legyen $V = [0,1]^3$ az egységkocka! Határozzuk meg az*

$$\iiint\limits_V x + y + zd(x, y, z)$$

integrált, ha létezik!

145 Megoldás: *Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.*

$$\iiint\limits_V x + y + zd(x, y, z) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x + y + z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x + y + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Most definiáljuk az integrált tetszőleges korlátos halmazon.

3.152. Definíció *Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, és $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor létezik $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, hogy $T \subset Q$. Terjesszük ki f-et, azaz legyen*

$$g(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{ha } \underline{x} \in T, \\ 0, & \text{ha } \underline{x} \notin T! \end{cases}$$

Ha g integrálható Q-n, akkor azt mondjuk, hogy f integrálható T-n, és a most definiált integrál értéke a g integrálja lesz.

$$\int\limits_T f = \int\limits_Q g$$

3.153. Megjegyzés *Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrál (és az integrálhatóság) nem függ Q választásától.*

Az n dimenziós normáltartományt rekurzióval definiáljuk.

3.154. Definíció *$T_1 \subset \mathbb{R}$ egydimenziós normáltartomány, ha kompakt intervallum.*
$T_n \subset \mathbb{R}^n$ n-dimenziós normáltartomány, ha

$$T_n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in T_{n-1}, a(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

valamely $T_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $n-1$ dimenziós normáltartomány, és $a, b : T_{n-1} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények esetén, melyekre minden $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in T_{n-1}$ esetén $a(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq b(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Most is igaz a következő.

3.155. Tétel *Ha $T \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható T-n.*

Normáltartományon vett integrálra is kimondható Fubini-tétele.

3.156. Tétel (Fubini-tétel normáltartományon) *A definíció jelöléseivel: Ha f integrálható a T_n normáltartományon, akkor*

$$\int\limits_{T_n} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int\limits_{T_{n-1}} \left(\int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(\underline{x})\, \mathrm{d}x_n \right) d(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik.

3.157. Megjegyzés *Folytonos függvényre alkalmazható a Fubini-tétel akár $n-1$-szer is. Ekkor a következő képletet kaphatjuk, ahol $T \subset \mathbb{R}^n$ normáltartomány, $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.*

$$\int_T f = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \dots \left(\int_{x_n=a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(\underline{x}) \, \mathrm{d}x_n \right) \dots \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Most is fontos az integrálás sorrendje. Valamely integrál határai csak a tőle kijjebbi integrálok változóitól függhetnek.

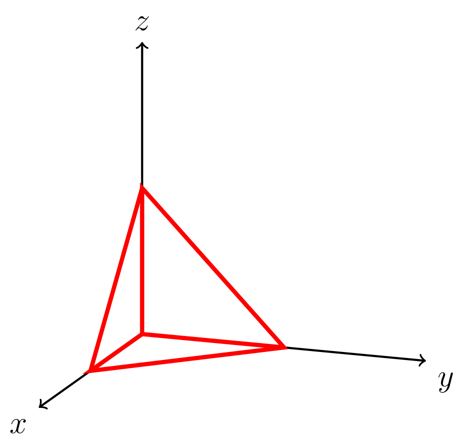
A következő példákban használjuk a $\mathrm{d}V$ jelölést a $d(x,y,z)$ helyett, ami a térfogati integrálra utal.

3.158. Példa *Legyen $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,y,z$ és $x+y+z \le 1\}$! Határozzuk meg az*

$$\iiint_V x + y + z \, \mathrm{d}V$$

integrált, ha létezik!

146 Megoldás:



Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-

tétel.

$$\iiint\limits_V x+y+z\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\int\limits_0^{1-x-y} x+y+z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left[xz+yz+\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{1-x-y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \frac{1-(x+y)^2}{2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{y}{2} - \frac{(x+y)^3}{6} \right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

3.4.3. A Jordan-mérték és a Riemann-integrál tulajdonságai

Kezdjük annak megjegyzésével, hogy szokásos mértékelméleti szempontból a Jordan-mérték nem mérték.

3.159. Definíció *A $T \subset R^n$ korlátos halmaz. Ha a konstans* 1 *függvény integrálható T-n, akkor a T halmazt Jordan-mérhetőnek nevezzük, az integrál értékét a T Jordan-mértékének hívjuk, és $\mathcal{J}(T)$-vel jelöljük.*

3.160. Megjegyzés *Röviden*

$$\mathcal{J}(T) = \int\limits_T 1,$$

ha létezik.

3.161. Megjegyzés *Könnyű megmutatni, hogy minden tégla Jordan-mérhető, és Jordan-mértéke az egy csúcsból induló n él hosszának szorzata. Így például egy szakasz 2 dimenziós Jordan-mértéke* 0.

Az alszakasz elején felsorolt definíciókban szereplő $I_{\underline{k}}$ résztégla mértékét $\Delta_{\underline{k}}$-val jelöltük. Ez éppen $\mathcal{J}(I_{\underline{k}})$.

Kicsit nehezebben, de szintén belátható, hogy minden normáltartomány is Jordan-mérhető.

3.162. Megjegyzés *A kétdimenziós Jordan-mérték a terület általánosítása. Ha például $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ folytonos, akkor az $y = 0$, $x = a$, $x = b$ és $y = f(x)$ által határolt korlátos síkidom Jordan-mértéke*

$$\mathcal{J} = \int\limits_a^b \int\limits_0^{f(x)} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b [y]_0^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.163. Megjegyzés *A definícióból következően* $\mathcal{J}(T) = 0$ *azt jelenti, hogy* $\forall\varepsilon > 0$ *esetén* $\exists Q_1, Q_2 \ldots Q_p$ *tégláknak olyan véges rendszere, melyre* $\sum\limits_{k=1}^{p} \mathcal{J}(Q_k) < \varepsilon$*, és* $T \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} Q_k$.

Ehhez hasonlót jelent a Lebesgue-mérték szerinti nullmértékűség is.

3.164. Definíció *Azt mondjuk, hogy a* $T \subset \mathbb{R}^n$ *halmaz Lebesgue-szerint nullmértékű, ha* $\forall\varepsilon > 0$ *esetén* $\exists Q_1, Q_2 \ldots$ *tégláknak olyan (végtelen) sorozata, melyre* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}(Q_k) < \varepsilon$*, és* $T \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$.

3.165. Tétel (Lebesgue-kritérium) *Egy* $T \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha határa Lebesgue-szerint nullmértékű.*

Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ *Jordan-mérhető halmaz,* $f : T \to \mathbb{R}$ *korlátos, akkor* f *pontosan akkor Riemann-integrálható* T*-n, ha* T*-beli szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-szerint nullmértékű.*

3.166. Megjegyzés *A tétel első felében a Lebesgue szerinti nullmértékűséget kicserélhetnénk Jordan szerintire, azaz egy* $T \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha* $\mathcal{J}(\mathrm{front}\, T) = 0$.

A tétel második felében azonban nem. Például a $H = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *halmaz Lebesgue-szerint nullmértékű, de Jordan-szerint nem, ugyanis nem Jordan-mérhető. Van olyan függvény, ami pont a* H *pontjaiban szakad, de nincs olyan halmaz aminek a határa éppen* H *lenne.*

3.167. Tétel (A Riemann-integrál monoton) *Ha* $T \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos és* $f, g : T \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható* T*-n úgy, hogy* $f(\underline{x}) \le g(\underline{x})$ *minden* $\underline{x} \in T$ *esetén, akkor*

$$\int\limits_T f \le \int\limits_T g.$$

3.168. Következmény (A Jordan-mérték monoton) *Ha* $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ *Jordan-mérhetőek úgy, hogy* $T_1 \subset T_2$*, akkor*

$$\mathcal{J}(T_1) \subset \mathcal{J}(T_2).$$

3.169. Tétel (A Riemann-integrál lineáris funkcionál) *Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $f, g : T \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható T-n, akkor $f+g$ is Riemann-integrálható T-n, és*

$$\int_T (f+g) = \int_T f + \int_T g.$$

Ha még $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor αf is Riemann-integrálható T-n, és

$$\int_T (\alpha f) = \alpha \int_T f.$$

3.170. Tétel (A Riemann-integrál a tartomány szerint additív) *Legyen $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ korlátos úgy, hogy* $\operatorname{int}(T_1) \cap \operatorname{int}(T_2) = \emptyset$*! Ha f Riemann-integrálható T_1-en és T_2-n, akkor $T_1 \cup T_2$-n is az, és*

$$\int_{T_1 \cup T_2} f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f.$$

.

3.171. Következmény (A Jordan-mérték additív) *Legyen $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető úgy, hogy* $\operatorname{int}(T_1) \cap \operatorname{int}(T_2) = \emptyset$*! Ekkor $T_1 \cup T_2$ is Jordan-mérhető, és*

$$\mathcal{J}(T_1 \cup T_2) = \mathcal{J}(T_1) + \mathcal{J}(T_2).$$

Az integrál-transzformáció segítségével a Jordan-mérték eltolás-invarianciáját is beláthatjuk.

3.172. Tétel *Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $f : T \to \mathbb{R}$ integrálható T-n, akkor $|f|$ is integrálható T-n, és*

$$\left| \int_T f \right| \le \int_T |f|.$$

3.4.4. Integrál-transzformáció

Az egyváltozós függvényeknél tanult helyettesítéses integrált szeretnénk általánosítani. Emlékeztetőül.

3.173. Tétel (Helyettesítéses integrál) *Legyen $a < b$, $g \in C^1_{[a,b]}$, és $f \in C^0_{g([a,b])}$. Ekkor*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Az első fontos változás, hogy a többváltozós esetre kiterjeszthető alaknál nincs irányítva az integrálási tartomány.

Ha g szigorúan monoton növő, akkor ez semmilyen változást nem jelent, mert ekkor $g(a) < g(b)$, azaz ekkor $g([a,b]) = [g(a), g(b)]$. Ha viszont szigorúan monoton csökkenő, akkor $g(a) > g(b)$, azaz ekkor $g([a,b]) = [g(b), g(a)]$. Viszont ekkor $g'(t) \leq 0$, ezért általánosan a formula

$$\int\limits_{g([a,b])} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f(g(t))\,|g'(t)|\,\mathrm{d}t$$

alakba írható szigorúan monoton, azaz kölcsönösen egyértelmű g esetén.

n-változós esetben $[a,b]$ helyett írhatunk $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazt (ilyen például egy normáltartomány), és ekkor $\underline{g} : A \to \mathbb{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű, folytonosan deriválható transzformáció. Ekkor $\underline{g}$ deriváltja a Jacobi-mátrix, a képletbe pedig a Jacobi-determináns abszolút értékét írjuk.

3.174. Tétel (Integrál-transzformáció) *Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\underline{g} : E \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható, kölcsönös egyértelmű leképezés, melynek Jacobi-determinánsa sehol sem nulla! Ha $A \subset E$ kompakt és $f : \underline{g}(a) \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor a következő integrálok léteznek és egyenlőek.*

$$\int\limits_{\underline{g}(A)} f(\underline{x})d\underline{x} = \int\limits_{A} f(\underline{g}(\underline{t}))\left|\det \underline{g}'(\underline{t})\right| d\underline{t}.$$

A Jordan-mérték eltolás-invariáns.

3.175. Következmény *Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető és $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, akkor $T + \underline{c}$ is Jordan-mérhető, és*

$$\mathcal{J}(T + \underline{c}) = \mathcal{J}(T).$$

6 Útmutatás: *A $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{c}$ eltolás Jacobi-mátrixa az egységmátrix, így Jacobi-determinánsa* 1.

3.176. Megjegyzés *A Tételben elég f Riemann-integrálhatósága $\underline{g}(A)$-n a folytonosság helyett.*

3.177. Példa *Határozzuk meg az $xy = 1$ és $xy = 2$ hiperbolák, és az $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek által határolt H korlátos tartomány területét.*

147 Megoldás: *A terület*

$$T = \int\limits_{H} 1.$$

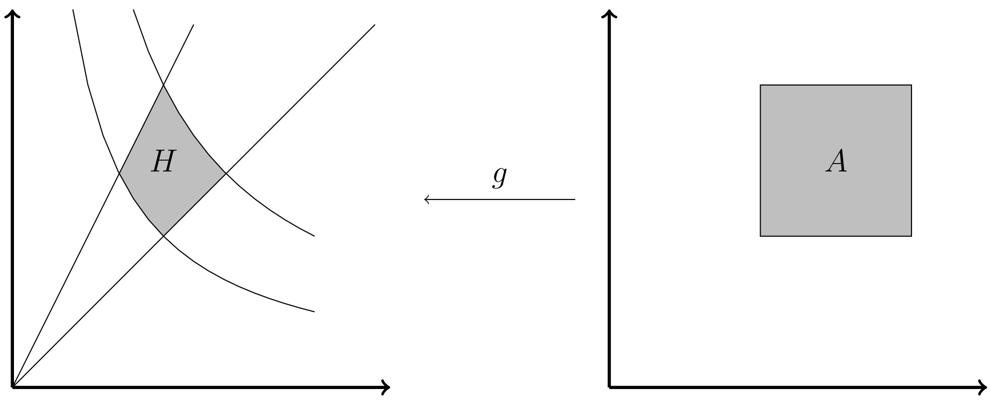
Mindkét tengely szerinti normáltartományként sok számolással járna az integrálás. Ugyanis az integrált két közös belső pont nélküli normáltartományon vett integrál összegeként számolhatnánk ki.

$$T = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \int_{1/x}^{2x} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{x}^{2/x} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} 2x - \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x} - x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x^2 - \ln x\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} + \left[2 \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{\sqrt{2}} =$$

$$= (1 - \ln 1) - \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(2 \ln \sqrt{2} - 1\right) - \left(2 \ln 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Oldjuk meg a feladatot másképp is. Alkalmazzuk az integrál-transzformációt. Legyenek az új változók $u(x, y) = xy$ *és* $v(x, y) = \dfrac{y}{x}$.



Ekkor $\underline{g}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$*, a Jacobi-determináns*

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{1}{4uv}} & -\sqrt{\frac{u}{4v^3}} \\ \sqrt{\frac{v}{4u}} & \sqrt{\frac{u}{4v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v},$$

és

$$A = \underline{g}^{-1}(H) = [1, 2]^2$$

Ekkor

$$T = \int_H 1 \, \mathrm{d}(x,y) = \int_{\underline{g}(A)} 1 \, \mathrm{d}(x,y) = \int_A \frac{1}{2v} \, \mathrm{d}(u,v) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2v} u \right]_{u=1}^2 \mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{1}{2v} \, \mathrm{d}v = \left[\frac{1}{2} \ln v \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

A feladat megoldása közben nem ellenőriztük az integrál-transzformáció feltételeit, de teljesülnek. Az alábbiakban három gyakori transzformációt vizsgálunk.

Polártranszformáció

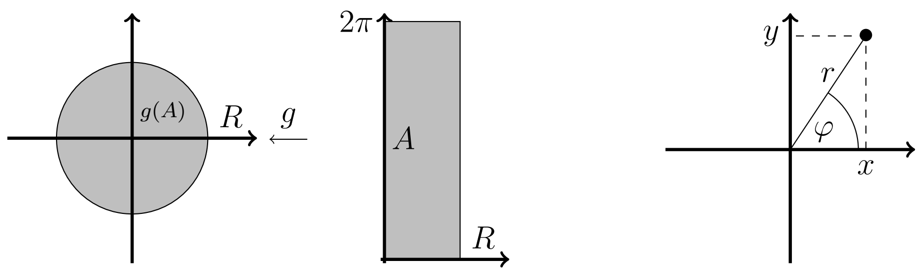
Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $x^2 + y^2 \leq R^2$, ha $(x,y) \in T$, és legyenek az új változók r és φ úgy, hogy $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$, ahol $r \in [0, R]$ és $\varphi \in [0, 2\pi]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és

$$\underline{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Ekkor a Jacobi-determináns

$$\det \underline{g}'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Lásd 3.10 ábra.



(a) (b) (c) (d)

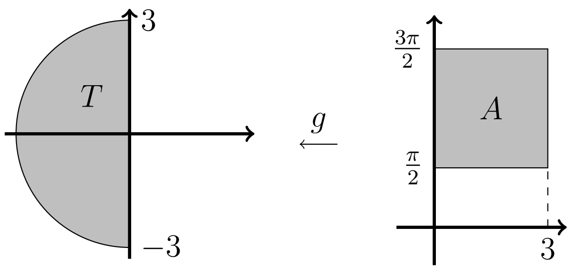
3.10. ábra. Polárkoordináták

3.178. Megjegyzés *A tétel feltételei nem teljesülnek. Nevezetesen* $\underline{g}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ *nem kölcsönösen egyértelmű, ugyanis* $\underline{g}(x, 0) = \underline{g}(x, 2\pi)$*, illetve* $\underline{g}(0, \varphi) = (0, 0)$ *minden* φ*-re. De a* $[0, R] \times \{0\}$ *kétdimenziós Jordan-mértéke* 0*, így ez nem okoz gondot. (Valójában az integrál-transzformációban, ha* A *Jordan-mérhető, akkor elég feltenni a kölcsönösen egyértelműséget* A *belsején.)*

3.179. Példa *Legyen* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 9\}$*!*

$$\int_T \cos(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}T = ?$$

148 Megoldás: *T most normáltartomány, de az integrandus problémás, ezért alkalmazzunk polártranszformációt.*



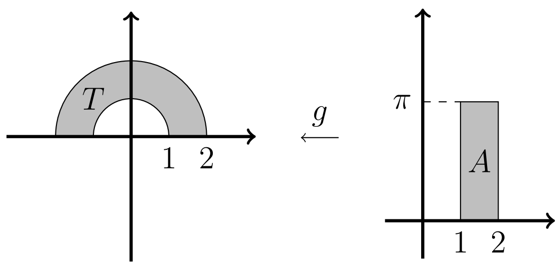
$$\int_T \cos(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}T = \int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \cos r^2 \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^3 \left[\cos r^2 \cdot r \cdot \varphi\right]_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^3 \cos r^2 r\pi\,\mathrm{d}r = \left[\frac{\sin r^2 \pi}{2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}\sin 9.$$

3.180. Példa *Legyen* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$*!*

$$\int_T \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\,\mathrm{d}T = ?$$

149 Megoldás: *T most normáltartomány, de az integrandus problémás, ezért alkalmazzunk polártranszformációt.*



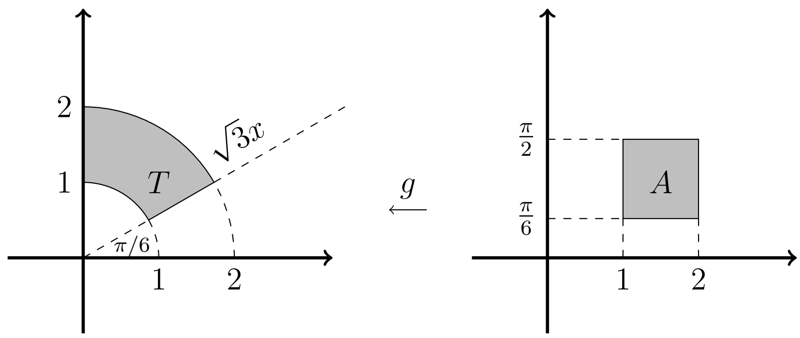
$$\int_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}T = \int_{r=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{(r^2)^2} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_1^2 \left[r^{-3}\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi}\mathrm{d}r =$$

$$= \int_1^2 r^{-3}\pi\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^{-2}\pi}{-2}\right]_1^2 = \frac{3\pi}{8}.$$

3.181. Példa *Legyen* $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$*!*

$$\int_T 4xy^3\,\mathrm{d}T = ?$$

150 Megoldás: *Alkalmazzunk polártranszformációt.*



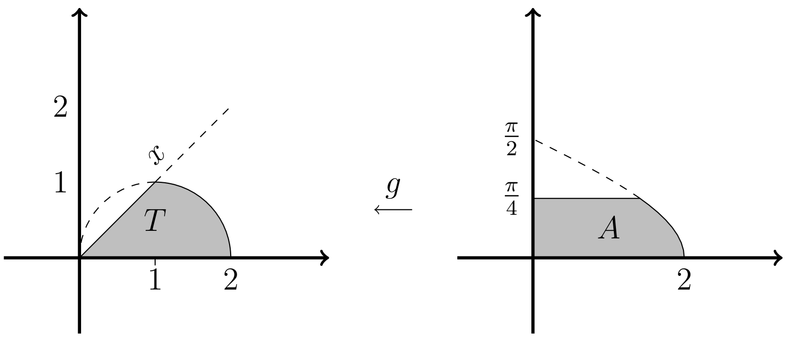
$$\int_T 4xy^3\,\mathrm{d}T = \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2}\int_{r=1}^{2} 4r\cos\varphi r^3\sin^3\varphi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2}\left[4\cos\varphi\sin^3\varphi\frac{r^6}{6}\right]_{r=1}^{2}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 42\int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2}\cos\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 42\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2} = \frac{315}{32}.$$

3.182. Példa *Legyen* $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x, x^2+y^2-2x \le 0\}$*!*

$$\int_T 2+y\,\mathrm{d}T = ?$$

151 Megoldás: *Alkalmazzunk polártranszformációt.*



$$\iint_T 2+y\,\mathrm{d}T = \int_{\varphi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{2\cos\varphi} (2+r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/4}\left[r^2+\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right]_{r=0}^{2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} 4\cos^2\varphi + \frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[2\varphi+\sin 2\varphi - \frac{8}{12}\cos^4\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi/4} = \frac{\pi+3}{2}.$$

Végül mutatunk egy példát arra, hogy bizonyos esetekben improprius integrál esetén is alkalmazható a polártranszformáció. Ez a példa fontos a valószínűségszámításban. Újra megjegyezzük, hogy többes integrál esetén az improprius integrál alkalmazhatóságát csak úgy tudjuk eldönteni, ha ismerjük a Lebesgue-integrált.

3.183. Példa *Mutassuk meg, hogy*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}!$$

152 Megoldás: *Az e^{-x^2} primitív függvénye sajnos nem elemi függvény, így nem tudunk ezzel számolni. Mivel $x \geq 1$ esetén $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, és $\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ könnyen láthatóan konvergens, ezért a feladatban szereplő imprórius integrál is az. Jelöljük értékét I-vel. Ekkor*

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Alkalmazzuk most Fubini-tételét fordítva, azaz kétszeres integrált alakítsunk kettős integrállá! Ehhez jelölje T az első síknegyedet!

$$I^2 = \iint_T e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}T$$

Most alkalmazzuk a polártranszformációt!

$$I^2 = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^{-r^2} r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Mivel tudjuk, hogy $I > 0$, ezért $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.184. Megjegyzés *Az e^{-x^2} egyik primitív függvényének konstansszorosát szokás Gauss-féle hibafüggvénynek nevezni.*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Az előző példa szerint

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$

Henger koordináták

Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x^2 + y^2 \leq R^2$ és $z_1 \leq z \leq z_2$, ha $(x, y, z) \in T$, és legyenek az új változók r, φ és z úgy, hogy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ és $z = z$, ahol $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $z \in [z_1, z_2]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [z_1, z_2]$ és

$$\underline{g}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi,z) \\ y(r,\varphi,z) \\ z(r,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

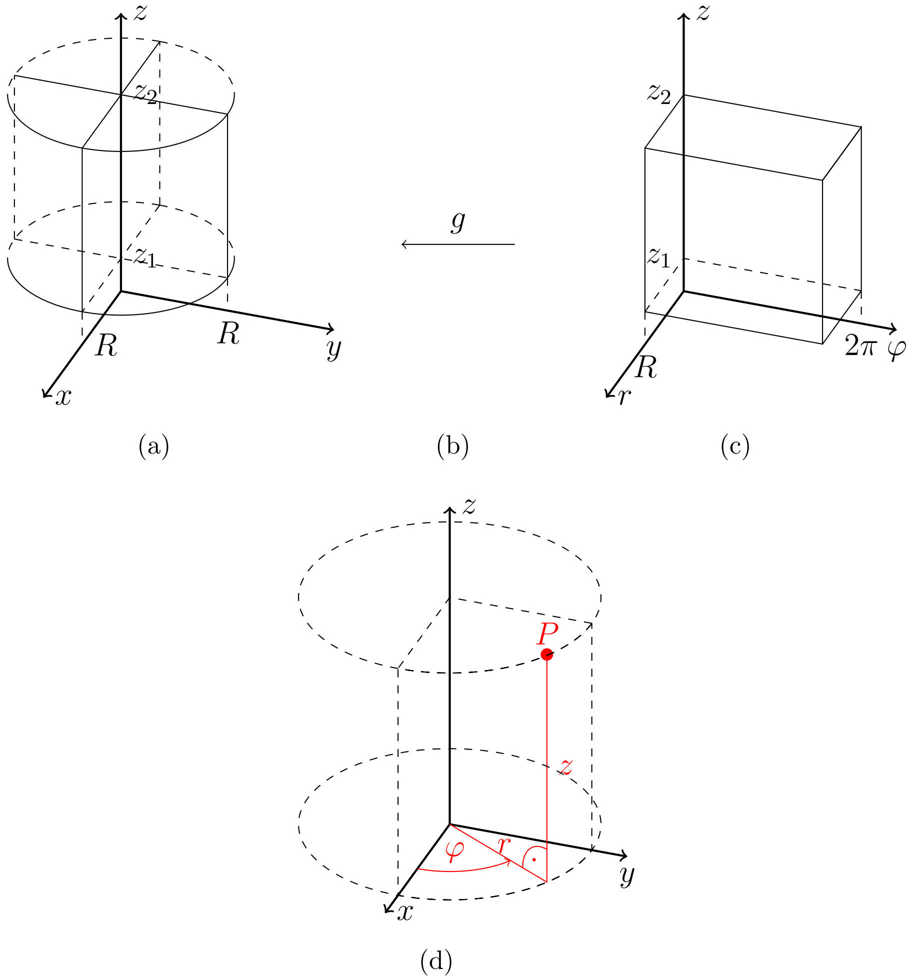
Ekkor a Jacobi-determináns

$$\det \underline{g}'(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi) + 0 + 0 = r.$$

Tulajdonképpen a Fubini-tétel alkalmazásával, az integrált egy z szerinti, és egy (x, y) szerinti integrálból rakjuk össze, majd utóbbit polárkoordintátázzuk. Lásd 3.11 ábra.

3.185. Példa *Legyen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$!*

$$\iiint_V x^2\,\mathrm{d}V = ?$$



3.11. ábra. Henger koordináták

153 Megoldás:

$$\iiint_V x^2 \,\mathrm{d}V = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{8-r^2} r^2 \cos^2 \varphi r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \left[r^3 \cos^2 \varphi z\right]_{z=0}^{8-r^2} \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (8r^3 - r5) \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_1^2 \left[(8r^3 - r5)\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}r =$$

$$= \int_1^2 (8r^3 - r^5)\pi \,\mathrm{d}r = \left[\left(2r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\pi\right]_{r=1}^2 = \frac{39}{2}\pi$$

3.186. Példa *Legyen* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, 1 \leq z \leq e\}$*!*

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}V =?$$

154 Megoldás:

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}V = \int_{\sqrt{2}}^R \int_0^{2\pi} \int_1^e \frac{1}{r^4} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_{\sqrt{2}}^R \int_0^{2\pi} \int_1^e \left[r^{-3} z\right]_{z=1}^e \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^R \left[(e - 1)r^{-3}\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}r = \int_{\sqrt{2}}^R 2\pi(e - 1)r^{-3} \,\mathrm{d}r = \left[2\pi(e - 1)\frac{r^{-2}}{-2}\right]_{r=\sqrt{2}}^R =$$

$$= \pi(1 - e)\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{2}\right)$$

Gömbi koordináták

Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, ha $(x, y, z) \in T$, és legyenek az új változók r, φ és ϑ úgy, hogy $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$ és $z = r \sin \vartheta$, ahol $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $\vartheta \in [0, \pi]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ és

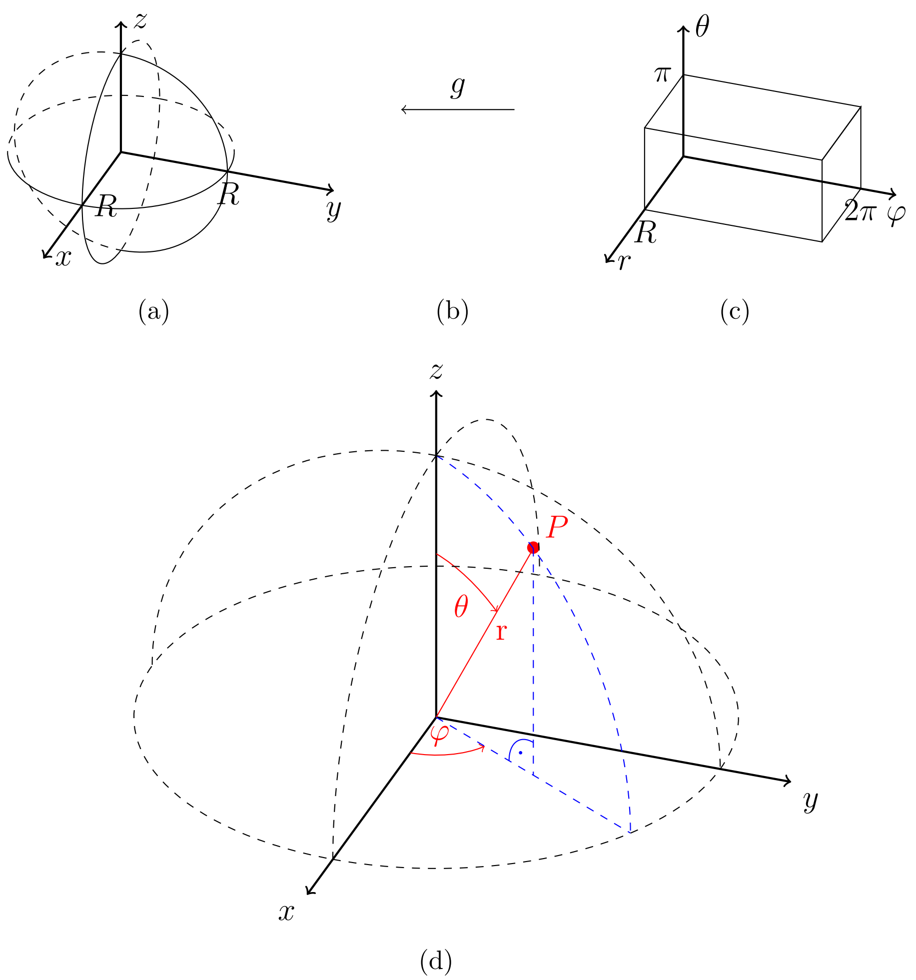
$$\underline{g}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

A változók sorrendjét azért cseréltük fel, hogy a Jacobi-determináns pozitív legyen. Ez csak esztétikai kérdés, hiszen nekünk úgyis a Jacobi-determináns abszolút értéke kell. A

Jacobi-determináns

$$\det \underline{g}'(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\vartheta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\vartheta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\vartheta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \cos\vartheta(r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta) -$$
$$-(-r\sin\vartheta)(r\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r\sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + 0 =$$
$$= r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta + r^2\sin\vartheta\sin^2\vartheta = r^2\sin\vartheta.$$

Lásd 3.12 ábra.



3.12. ábra. Gömbi koordináták

3.187. Példa *Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát!*

155 Megoldás: *Legyen V az origó középpontú R sugarú gömb, azaz*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

A keresett térfogat

$$\iiint\limits_V 1 \, \mathrm{d}V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-r^2 \cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^R 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \left[4\pi \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{R} = 4\pi \frac{R^3}{3}$$

3.4.5. Gyakorló feladatok

1. $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]^2} x\sqrt{y} \, \mathrm{d}T = ?$

2. $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[-1,0]} ye^{xy} \, \mathrm{d}T = ?$

3. $\displaystyle\iiint\limits_{[-1,2]\times[-1,0]\times[0,2]} \left(\frac{z}{1-|x|y}\right)^2 \mathrm{d}V = ?$

4. $\displaystyle\iint\limits_{[0,\alpha]\times[0,1]} \sqrt{1 - y\cos^2 x} \, \mathrm{d}T = ? \qquad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

5. Legyen T az $y = x$, $y = x + a$, $y = 0$ és $y = 3a$ egyenesekkel határolt korlátos tartomány! $\displaystyle\iint\limits_T x^2 + y^2 \, \mathrm{d}T = ?$

6. Legyen $a > 0$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a\}$! $\displaystyle\iint\limits_T x^2 + y^2 \, \mathrm{d}T = ?$

7. Legyen $p > 0$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{p}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}$! $\displaystyle\iint\limits_T xy^2 \, \mathrm{d}T = ?$

8. Legyen $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$! $\displaystyle\iint\limits_T x^2 + y \,\mathrm{d}T = ?$

9. Legyen $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$! $\displaystyle\iint\limits_T \cos(x+y) \,\mathrm{d}T = ?$

10. Legyen V az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és $x+y+z = 1$ egyenletű síkok által meghatározott tetraéder! $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \,\mathrm{d}V = ?$

11. Legyen $R > 0$ és $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$! $\displaystyle\iint\limits_T e^{x^2+y^2} \,\mathrm{d}T = ?$

12. Legyen $R > 0$ és $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + y^2 \leq R^2\}$! $\displaystyle\iiint\limits_V x^2 + y^2 + z^2 \,\mathrm{d}V = ?$

13. Számítsa ki az $xy = 4$ és az $x + y = 5$ görbékkel határolt korlátos síkidom Jordan-mértékét!

14. Legyen $a > 0$! Számítsa ki az $xy = a^2$ és az $x + y = \frac{5}{2}a$ görbékkel határolt korlátos síkidom Jordan-mértékét!

15. Legyen $p, q > 0$! Számítsa ki az $y^2 = 2px + p^2$ és az $y^2 = -2qx + q^2$ görbékkel határolt korlátos síkidom Jordan-mértékét!

16. Legyen $0 < a < b$ és $0 < c < d$! Számítsa ki az $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^2 = cy^2$ és az $x^2 = dy^2$ görbékkel határolt korlátos síkidom Jordan-mértékét!

17. Számítsa ki a $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$ és az $y = 0$ feltételekkel határolt korlátos test Jordan-mértékét!

18. Számítsa ki a $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$ és a $z = 0$ feltételekkel határolt korlátos test Jordan-mértékét!

19. Legyen $R > 0$ és $a > R\sqrt{2}$! Számítsa ki a $x+y+z = a$, $x^2+y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$ és a $z = 0$ feltételekkel határolt korlátos test Jordan-mértékét!

4. fejezet

Komplex függvénytan

4.1. Bevezetés

Különböző műveletekre való zártság igénye a számhalmazok fokozatos bővítéséhez vezet:

Művelet	$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$	$\subset$	$\mathbb{C}$
$+, \cdot$	$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$
$-$	$\emptyset$		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$
$/$	$\emptyset$		$\emptyset$		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$
lim	$\emptyset$		$\emptyset$		$\emptyset$		$\checkmark$		$\checkmark$
$\sqrt{\ }$	$\emptyset$		$\emptyset$		$\emptyset$		$\emptyset$		$\checkmark$

A komplex számok halmaza ($\mathbb{C}$) a valós számoknak a j *imaginárius egységgel* való bővítésével kapható meg:

4.1. Definíció *A* $\mathbb{C}$ komplex számsík *vagy* Gauss-féle számsík*:*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + j\mathbb{R}, \qquad \textit{ahol} \qquad j^2 = -1.$$

A komplex számok aritmetikáját ismertnek tekintjük. Tömören összefoglaljuk a legfontosabb jelöléseket, azonosságokat.

A komplex számok megadásai

- Algebrai (kanonikus) alak: $z = x + j\,y$

$$x = \operatorname{Re} z\,, \quad y = \operatorname{Im} z\,, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad |z|^2 = z\overline{z}$$

- Trigonometrikus alak: $z = r\,(\cos\varphi + j\,\sin\varphi)$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc} z \quad (\text{főérték: } -\pi \le \varphi < \pi\,)$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}$$

- Exponenciális alak: $z = r\,\mathrm{e}^{j\varphi}$

Euler-féle összefüggés (φ szögű egységvektor):

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

4.2. Megjegyzés *Sok könyvben az imaginárius egységet i-vel és a z komplex szám szögét (argumentumát)* $\arg(z)$*-vel jelölik. Ebben a jegyzetben a mérnöki körökben elterjedt j és* $\operatorname{arc}(z)$ *jelölést használjuk.*

Műveletek komplex számok körében

- Összeadás, kivonás:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1+jy_1) \pm (x_2+jy_2) = \underbrace{(x_1 \pm x_2)}_{\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2)} + j\,\underbrace{(y_1 \pm y_2)}_{\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2)}$$
$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2, \qquad \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2.$$

- Szorzás:

$$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{r_1 r_2}_{|z_1 z_2|} e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\operatorname{Re}(z_1z_2)} + j\,\underbrace{(x_1y_2 + y_1x_2)}_{\operatorname{Im}(z_1z_2)}$$
$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \operatorname{arc}(z_1z_2) = \operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2.$$

- Osztás: $(z_2 \ne 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{r_1}{r_2}}_{|z_1/z_2|} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} = \underbrace{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\operatorname{Re}(z_1/z_2)} + j\,\underbrace{\frac{-x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\operatorname{Im}(z_1/z_2)}$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{arc}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{arc} z_1 - \operatorname{arc} z_2.$$

- Konjugálás:

$$z = x + jy = re^{j\varphi}, \qquad \overline{z} = x - jy = re^{-j\varphi}$$

- Gyökvonás:

$$z = re^{j\varphi}, \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j(\varphi/n + 2k\pi/n)}, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots, \quad k = 0, 1 \ldots n-1)$$

4.3. Példa *Határozzuk meg a $z = \frac{1+2j}{3-4j}$ szám valós és képzetes részét!*

156 Megoldás: *A nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:*

$$z = \frac{1+2j}{3-4j} \cdot \frac{3+4j}{3+4j} = \frac{(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + j(2 \cdot 3 + 1 \cdot 4)}{3^2 + 4^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j.$$

4.4. Példa *Határozzuk meg a $z = -1 + \sqrt{3}j$ szám ötödik hatványát!*

157 Megoldás: *Célszerű először átírni z-t exponenciális alakba:*

$$|z| = \sqrt{1^2 + 3} = 2, \qquad \operatorname{arc}(z) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$z^5 = 2^5 \cdot e^{5j\frac{2\pi}{3}} = 32 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -16 - j \cdot 16 \cdot \sqrt{3}.$$

4.5. Példa *Határozzuk meg a $z^3 = \frac{2}{1+j}$ egyenlet megoldásait!*

158 Megoldás: *Először meghatározzuk a jobboldal szögét és abszolútértékét:*

$$w = \frac{2}{1+j} = \frac{2-2j}{2} = 1 - j \quad \Longrightarrow \quad |w| = \sqrt{2}, \quad \operatorname{arc}(w) = -\frac{\pi}{4}.$$

A megoldásokat legkönnyebben $z = r \cdot e^{j\varphi}$ exponenciális alakban írhatjuk föl:

$$r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt[6]{2}, \qquad \varphi_1 = -\frac{\pi}{12}, \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}, \qquad \varphi_3 = \frac{15\pi}{12}.$$

A komplex számsík lezárása

Sok esetben (például határértékek vizsgálatakor) célszerű a komplex számsíkot egy ideális elemmel, a ∞-nel bővíteni, melynek szöge tetszőleges, nagysága minden határon túl nő. Az így kapott $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ halmaz a *Riemann-féle számgömb*.

A ∞ szimbólummal a következő számolási szabályok szerint számolhatunk:

$$\begin{aligned}
z + \infty &= \infty & & \\
\infty \cdot z &= \infty, & \text{ha} \quad & z \neq 0 \\
\frac{\infty}{z} &= \infty, & \text{ha} \quad & z \neq \infty \\
\frac{z}{0} &= \infty, & \text{ha} \quad & z \neq 0 \\
\frac{z}{\infty} &= 0, & \text{ha} \quad & z \neq \infty
\end{aligned}$$

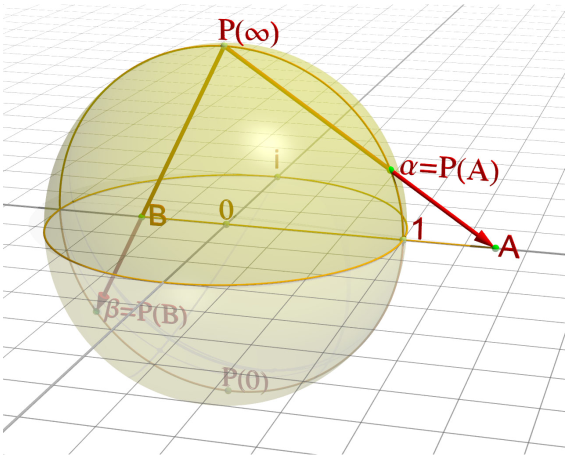
De vannak határozatlan alakok is:

$$0 \cdot \infty = ?, \qquad \frac{\infty}{\infty} = ?\,, \qquad \frac{0}{0} = ?$$

4.6. Megjegyzés *Míg a bővített valós számegyenesen különbséget tehetünk $+\infty$ és $-\infty$ között, a Riemann-féle számgömbön ez nem tehető meg.*

Ábrázolás

A $\mathbb{C}$ komplex számsík és a $\mathbb{C}^{\infty}$ Riemann-féle számgömb elemei között az 4.1 ábra illetve animáció szerinti sztereografikus projekció teremt kapcsolatot.



4.1. ábra. A P sztereografikus projekció a Gauss-féle sík A pontjához a Riemann-féle gömb $P(A)$ pontját rendeli. A végtelen távoli, ideális pont $P(\infty)$ képe a gömb északi pólusa.

4.2. Komplex tagú számsorozatok, számsorok

A komplex számsík pontjait a $\mathbb{C} \ni z = x + jy \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ megfeleltetéssel azonosíthatjuk a kétdimenziós euklideszi sík pontjaival. Ez a megfeleltetés normatartó, $|z| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ezért ebben a fejezetben lényegében minden állítás közvetlenül következik az $\mathbb{R}^n$-ben tanult megfelelő tételből.

4.2.1. Számsorozatok

4.7. Definíció *A z_n komplex számsorozat* határértéke *z_0, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

ha $\forall\varepsilon > 0$ *esetén* $\exists N(\varepsilon)$*, melyre*

$$|z_n - z_0| < \varepsilon\,, \ \textit{ha } n > N(\varepsilon).$$

4.8. Definíció *A* z_n *komplex számsorozat* határértéke végtelen*, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \quad \textit{ha} \quad |z_n| \to \infty.$$

4.9. Lemma *Egy komplex számsorozat pontosan akkor konvergens, ha a sorozat valós, illetve képzetes része tart a határérték valós, illetve képzetes részéhez, azaz:*

$$(z_n = x_n + j\,y_n \longrightarrow z_0 = x_0 + j\,y_0 \neq \infty) \iff ((x_n \to x_0) \wedge (y_n \to y_0))\,.$$

4.10. Lemma *Egy komplex számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, azaz:*

$$(z_n \to z_0) \quad \iff \quad (z_n) \textit{ Cauchy-sorozat.}$$

Most is igaz a végtelen geometriai sorozat határértékére vonatkozó, valósban megismert formula.

4.11. Lemma *Legyen* z_0 *tetszőleges komplex szám. Ekkor:*

$$\lim_{n\to\infty} z_0^n = \begin{cases} 0, & \textit{ha } |z_0| < 1, \\ 1, & \textit{ha } z_0 = 1, \\ \nexists \textit{ (divergens)} & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

4.2.2. Számsorok

Hasonlóan a valós számsorokhoz, most $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ jelöl egy komplex tagú végtelen sort, és $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ ennek részletösszeg-sorozatát.

4.12. Definíció *A* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *komplex tagú* sor összege*:*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

Tehát az $s = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplex sor pontosan akkor konvergens, ha a $z_k = x_k + jy_k$ tagok valós és képzetes részéből képzett sorok is konvergensek, és ekkor

$$\operatorname{Re} s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Im} s = \sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

4.13. Tétel (Cauchy-kritérium) *A* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *sor pontosan akkor konvergens, ha* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, melyre*

$$|s_{n+k} - s_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}.$$

4.14. Tétel (Konvergencia szükséges feltétele) *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *sor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

4.15. Tétel *Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens, azaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{konvergens.}$$

4.16. Lemma (Geometriai sor összege) *Végtelen geometriai sor összegét a valósban megismerthez hasonló formula adja meg:*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} z_0^{k-1} = \frac{1}{1-z_0},$$

ha $|z_0| < 1$*, egyébként pedig a sor divergens.*

4.3. Komplex függvények folytonossága, differenciálása

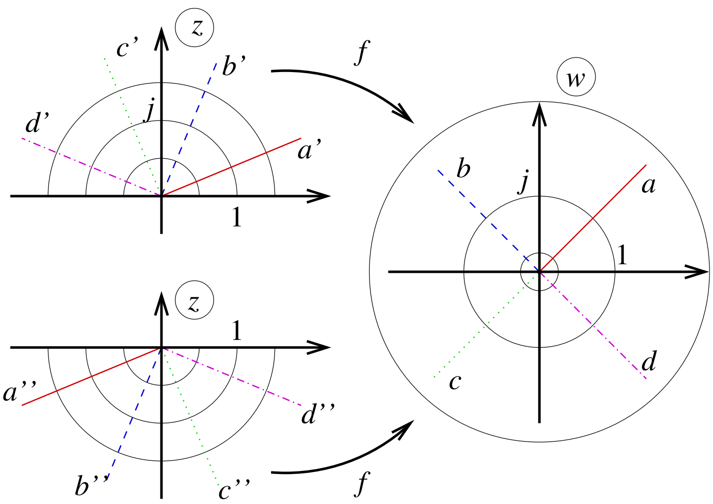
Ebben és a további fejezetekben az $f : D_f \to \mathbb{C}$ ($D_f \subset \mathbb{C}$) komplex függvény független változóját $z = x + jy = re^{j\varphi}$-vel, értékét $f(z) = w = u + jv = \rho e^{j\theta}$-val jelöljük, ahol u-t, v-t, ρ-t és θ-t kétváltozós valós függvényeknek tekintjük:

$$w = f(z) = u(x,y) + j\, v(x,y) = \rho(r,\varphi)\, \mathrm{e}^{j\,\theta(r,\varphi)}.$$

Az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény megadása ekvivalens a valós és képzetes részének, azaz az $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvénynek a megadásával. Sokszor érdemes az f függvény tulajdonságait „átfogalmazni az u és v függvények „nyelvére”.

4.17. Példa *Az* $f(z) = z^2 = (x + j\,y)^2 = x^2 - y^2 + j\,2xy = r^2\,\mathrm{e}^{j\,2\varphi}$ *(kétrétű) leképezés esetén:*

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy,$$
$$\rho(r,\varphi) = r^2, \qquad \theta(r,\varphi) = 2\varphi.$$



4.2. ábra. Az $f(z) = z^2$ *kétrétű* leképezés az origóból kiinduló, felső félsíkon levő a', b', c', d' illetve az alsó félsíkon levő a'', b'', c'', d'' félegyeneseket a képsík a, b, c, d félegyeneseire képezi. A leképezés a z félsíkokon berajzolt félköröket a w síkra berajzolt körökre képezi.

Valós függvénytanban a függvényeket sokszor grafikonjukkal szemléltetjük az $x-y$ síkon. Komplex függvénytanban erre nincs mód, azonban sok esetben célszerű a z független változó síkján fölvett speciális halmazok, görbék képét ábrázolni a $w = f(z)$ függő változó síkján.

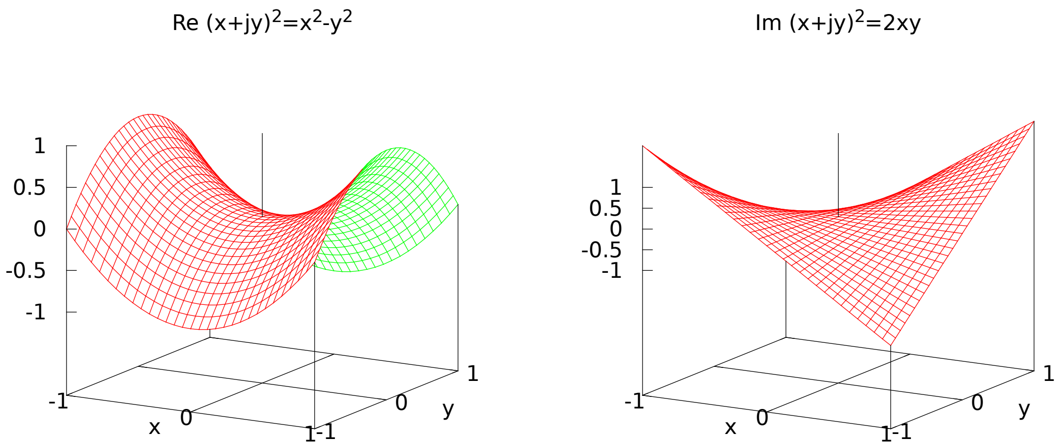
4.18. Példa *Ábrázoljuk az origóból kiinduló félegyenesek valamint az origó középpontú körök $f(z) = z^2$ függvény általi képét!*

159 Megoldás: *Az origótól r távolságban, a φ szögű félegyenesen levő $z = re^{j\varphi}$ pont képe $w = z^2 = r^2e^{2j\varphi}$, tehát a pont a 2φ szögű félegyenesre kerül. Az f leképezés a 4.2 ábrán látható módon „legyezőszerűen szétnyitja" a komplex számsík alsó és felső félsíkját is, és mindkettőt a teljes síkra képezi. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a $z \mapsto z^2$ leképezés (az origó kivételével mindenütt)* kétrétű. *Minden $w \neq 0$ képpontnak pontosan két ősképe van.*

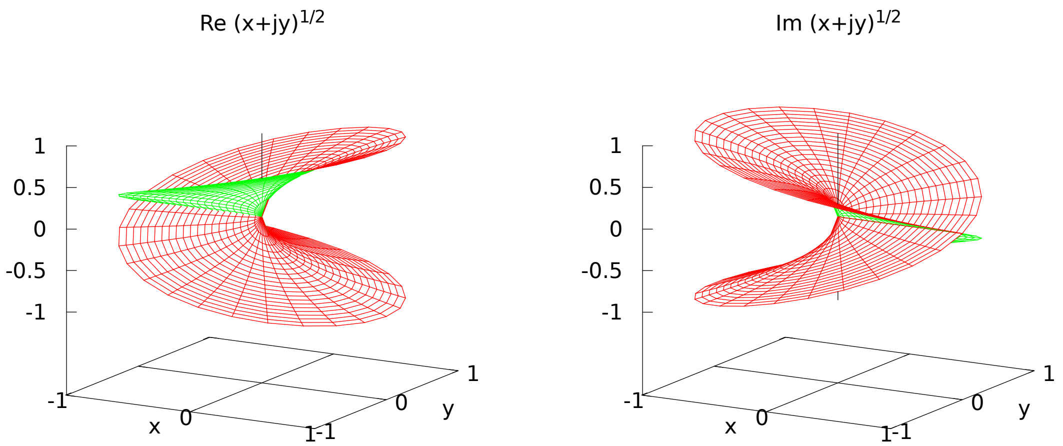
Az r sugarú, origó középpontú kör képe r^2 sugarú (kétszer körbejárt) kör.

Látványos ábrákat kaphatunk, ha az $f(z) = f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ komplex függvény esetén külön ábrázoljuk az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ kétváltozós függvényeket. Az előzőekben tárgyalt $f(z) = z^2$ leképezés valós és képzetes részét a 4.3 ábra mutatja.

Még érdekesebb a többértékű relációk esetén a hasonló ábrázolás. Például a kétértékű $\sqrt{z}$ reláció valós és képzetes része a 4.4 ábrán látható.



4.3. ábra. Az $f(z) = z^2$ függvény valós és képzetes része. Animáció.



4.4. ábra. Az $f(z) = \sqrt{z}$ *kétértékű* reláció valós és képzetes része Animáció.

4.3.1. Határérték, folytonosság

Komplex függvények határértékére, folytonosságára vonatkozó definíciók, tételek a valós függvénytanból megismert fogalmak közvetlen átfogalmazásai, és lényegében semmi „újdonságot” nem tartalmaznak.

4.19. Definíció (Függvény határértéke) *Legyen z_0 a D_f belső pontja! Az f* függvény határértéke a z_0 pontban w_0*, azaz* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$*, ha* $\forall\varepsilon > 0$ *esetén* $\exists\delta(\varepsilon) > 0$*, melyre*

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \qquad ha \qquad 0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon).$$

4.20. Tétel (Átviteli elv) *Legyen f komplex függvény, z_0 pedig értelmezési tartományának egy torlódási pontja. Ekkor:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \forall z_n \to z_0 \text{ -ra} \quad (z_n \in D_f,\ z_n \neq z_0) \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0.$$

A következő tétel értelmében komplex függvény határértéke számolható külön a valós és képzetes rész határértékeként.

4.21. Tétel *Legyen $z_0 = x_0 + jy_0$, $w_0 = u_0 + jv_0$. Ekkor*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{és} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

A folytonosság definíciója megfelel a valós függvénytanban megismerttel.

4.22. Definíció *Az f függvény* folytonos *az értelmezési tartomány z_0 belső pontjában, ha*

$$\lim_{z\,\to\,z_0} f(z) = f(z_0).$$

4.3.2. Deriválhatóság, regularitás

Bár a komplex függvények differenciálhányadosát formálisan ugyanúgy értelmezzük, mint a valós függvényekét, a komplex értelemben vett differenciálhatóság jóval erősebb megszorítást jelent egy függvényre, mint a valós differenciálhatóság. Ez a komplex függvénytan egyik sarkalatos pontja, melynek messzemenő következményei vannak.

4.23. Definíció (Komplex derivált) *Legyen z_0 a D_f belső pontja! Az f függvény* differenciálható z_0-ban*, ha létezik*

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

4.24. Példa *Az $f(z) = z^3$ komplex függvény deriváltja:*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3z_0^2 \Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = 3z_0^2.$$

4.25. Példa *Az $f(z) = \overline{z}$ függvény komplex értelemben nem differenciálható, ugyanis:*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{e}^{-j2 \operatorname{arc} \Delta z} = \nexists.$$

(A határérték függ $\varphi = \operatorname{arc} \Delta z$ értékétől.)

A következő három tétel és bizonyításuk is analóg a valós függvénytanban megismertekkel.

4.26. Tétel *A valós függvényekre tanult differenciálási szabályok – beleértve az összetett és az inverzfüggvényre vonatkozó differenciálási szabályokat is – érvényesek a komplex változós függvényekre is. Ugyancsak érvényes marad a L'Hospital szabály is.*

4.27. Tétel (Szükséges és elégséges tétel differenciálhatóságra) *Az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány z_0 belső pontjában, ha*

$$\Delta f \;=\; f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = D \cdot \Delta z + \varepsilon(\Delta z) \cdot \Delta z\,,$$

ahol $D = f'(z_0)$ független $\Delta z \;= \Delta x + j\,\Delta y$- tól, az $\varepsilon(\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta z) + j\,\varepsilon_2\,(\Delta z)$ mennyiségre pedig fennáll, hogy $\lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$.

4.28. Tétel *Ha az f komplex függvény differenciálható z_0-ban, akkor f folytonos z_0-ban.*

A következő tétel, melyet be is bizonyítunk, a komplex függvénytan egyik alaptétele. A 4.3 fejezet elején láttuk, hogy az f komplex függvény egyenértékű két kétváltozós valós függvény, $u = \operatorname{Re} f$ és $v = \operatorname{Im} f$ ismeretével. Most f differenciálhatóságára adunk szükséges és elégséges feltételt az u és v függvények ismeretében.

4.29. Tétel (Szükséges és elégséges feltétel deriválhatóságra) *Az $f(z) = u(x, y) + j\,v(x, y)$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány $z_0 = x_0 + jy_0$ belső pontjában, ha u és v totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban és parciális deriváltjaikra ugyanitt teljesülnek az*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = u'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} = v'_y(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = u'_y(x_0, y_0) = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -v'_x(x_0, y_0)$$

úgynevezett Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek. *Ekkor*

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + j\;v'_x(x_0, y_0).$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy f differenciálható z_0-ban, és a differenciálhányadost jelölje $D = D_1 + jD_2 = f'(z_0)$. Ekkor

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = D \cdot (z - z_0) + \varepsilon \cdot (z - z_0); \qquad \lim_{z \to z_0} \varepsilon(\Delta z) = 0,$$

ahol

$$z - z_0 = \Delta z = (x - x_0) + j\,(y - y_0) = \Delta x + j\,\Delta y, \quad \text{és} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2.$$

Mindkét oldalt felírjuk algebrai alakban. A bal oldal:

$$\Delta f = \big(u(x,y) - u(x_0,y_0)\big) + j\,\big(v(x,y) - v(x_0,y_0)\big).$$

A jobb oldal:

$$\begin{aligned} &(D_1 + j\,D_2)(\Delta x + j\,\Delta y) + (\varepsilon_1 + j\,\varepsilon_2)(\Delta x + j\,\Delta y) = \\ &= \big(D_1\Delta x - D_2\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y\big) + j\big(D_2\Delta x + D_1\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y\big) \end{aligned}$$

Az egyeztetésből:

$$\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0) = \underset{\underset{u'_x}{\uparrow}}{D_1}\ \Delta x + \underset{\underset{u'_y}{\uparrow}}{(-D_2)}\ \Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + (-\varepsilon_2)\,\Delta y$$

$$\Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0) = \underset{\underset{v'_x}{\uparrow}}{D_2}\ \Delta x + \underset{\underset{v'_y}{\uparrow}}{D_1}\ \Delta y + \varepsilon_2\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta y$$

Tehát u-nak és v-nek totálisan deriválhatónak kell lenni (x_0, y_0)-ban és

$$u'_x = D_1 = v'_y; \qquad\qquad -u'_y = D_2 = v'_x.$$

Vagyis

$$f'(z_0) = D_1 + jD_2 = u'_x(x_0,y_0) + j\ v'_x(x_0,y_0).$$

A bizonyítás gondolatmenete megfordítható, így visszafelé is igaz. □

4.30. Megjegyzés *A Cauchy-Riemann egyenletek miatt az $f'(z_0)$ derivált még három más módon is kefejezhető u és v parciális deriváltjaival:*

$$\begin{aligned} f'(z_0) = D_1 + j\,D_2 &= u'_x(x_0,y_0) + j\ \big(-u'_y(x_0,y_0)\big) = \\ &= v'_y(x_0,y_0) + j\ \big(-u'_y(x_0,y_0)\big) = \\ &= v'_y(x_0,y_0) + j\ v'_x(x_0,y_0) \end{aligned}$$

4.31. Tétel (Elégséges tétel $f'(z_0)$ létezésére) *Ha az $f(z) = f(x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ komplex függvény esetén*

- *u és v parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az (x_0, y_0) pont egy $K_{(x_0,y_0)}$ környezetében, és*
- *a Cauchy–Riemann egyenletek teljesülnek az (x_0, y_0) pontban,*

akkor f differenciálható $z_0 = x_0 + jy_0$-ban, azaz létezik $f'(z_0)$.

Bizonyítás. A bizonyítás a többváltozós függvények totális deriválhatóságára tanult elégséges feltételből (3.56. tétel) és az előző, 4.29. tételből következik. □

4.32. Definíció (Regularitás) *Az f függvény* reguláris z_0-ban, *ha $\exists\ \delta > 0$, hogy f differenciálható $K_{z_0,\delta}$-ban.*

4.33. Definíció (Szingularitás) *A z_0 pont az f komplex függvény* szinguláris pontja, *ha f nem reguláris z_0-ban.*

Komplex függvénytanban sokszor hivatkozunk összefüggő nyílt halmazokra, ezért bevezetjük a következő két fogalmat:

4.34. Definíció (Tartomány) *A $T \subset \mathbb{C}$ halmazt a komplex számsík egy* tartományának *nevezzük, ha T összefüggő és nyílt.*

4.35. Definíció (Egyszeresen összefüggő tartomány) *A $T \subset \mathbb{C}$* egyszeresen összefüggő tartomány, *ha T tartomány, és benne minden zárt görbe folytonos deformációval egy pontt́á zsugorítható.*

Szemléletesen, a T tartomány egyszeresen összefüggő, ha nem „lukas".

4.36. Definíció *Az f függvény* reguláris a T tartományon, *ha minden pontjában reguláris.*

4.37. Megjegyzés (Holomorf függvény) *Ha egy $T \subset \mathbb{C}$ tartományon értelmezett komplex függvény T minden pontjában reguláris, akkor szokás azt is mondani, hogy a függvény* holomorf.

4.38. Példa *Tekintsük az*

$$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$$

függvényt! Megmutatjuk, hogy f mindenütt differenciálható:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2 \\ v(x, y) &= 2xy \end{aligned}\right\} \text{parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak}$$

$$u'_x = 2x \qquad u'_y = -2y \qquad v'_x = 2y \qquad v'_y = 2y$$

Így az $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ Cauchy-Riemann egyenletek mindenütt teljesülnek $\Longrightarrow$ f mindenütt deriválható $\Longrightarrow$ f mindenütt reguláris, és $f'(z) = u'_x + j\,v'_x = 2x + j\,2y\,(= 2z)$.

4.39. Példa *Tekintsük az*

$$f(z) = \overline{z}\, z^2 = (\overline{z}\, z)\, z = |z|^2\, z = (x^2 + y^2)\,(x + jy) = (x^3 + xy^2) + j\,(x^2y + y^3)$$

függvényt! Ekkor

$$u(x, y) = x^3 + xy^2, \qquad\qquad v(x, y) = x^2y + y^3.$$

Az u és v parciális deriváltjai mindenütt léteznek és folytonosak, és

$$\begin{array}{llllll} u'_x = 3x^2 + y^2, & v'_y = x^2 + 3y^2; & u'_x = v'_y : & 2x^2 = 2y^2 & \longrightarrow & |x| = |y| \\ u'_y = 2xy, & v'_x = 2xy; & u'_y = -v'_x : & xy = 0 & \longrightarrow & x = 0 \,\vee\, y = 0 \end{array}$$

Mindkét feltétel teljesül, ha

$$(\,|x| = |y|\,) \,\cap\, (\,x = 0 \,\cup\, y = 0\,) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ csak } z = 0\text{-ban deriválható.}$$

Így f sehol sem reguláris.

4.40. Definíció (Harmonikus függvény) *A $g \in C^2_H$ kétváltozós függvény* harmonikus a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazon, *ha kielégíti a*

$$\Delta g = g''_{xx} + g''_{yy} = 0$$

Laplace-féle parciális differenciálegyenletet.

(Itt Δ a Laplace-operátort jelöli, ami a másodrendű, tiszta parciális deriváltak összege.)

A következő két tétel arra mutat rá, hogy egy komplex függvény regularitása valóban erős megszorítás. A 4.41. tétel értelmében egy reguláris függvénynek sem valós, sem képzetes része nem választható meg tetszőlegesen, a 4.43. tétel értelmében pedig e két rész bármelyike konstans erejéig egyértelműen meghatározza a másikat.

4.41. Tétel *Ha $f = u + jv$ reguláris $K_{z_0,\delta}$-ban (vagy egy T tartományon), akkor ott valós és képzetes része harmonikus függvény.*

Bizonyítás. Az $f(z) = u + jv$ függvényre felírjuk a Cauchy–Riemann egyenleteket, és ezek alkalmas parciális deriváltjait összeadjuk, illetve kivonjuk:

$$u'_x = v'_y \qquad (1)$$

$$u'_y = -v'_x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1): \quad u''_{xx} = v''_{yx} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial y}(1): \quad u''_{xy} = v''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2): \quad u''_{yy} = -v''_{xy} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x}(2): \quad u''_{yx} = -v''_{xx}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -$$

$$\Delta u = 0 \qquad\qquad\qquad \Delta v = 0$$

Felhasználtuk, hogy a regularitás miatt f (és így u és v is) akárhányszor differenciálható, amit később bizonyítunk (4.132. tétel 4.133. következménye). □

4.42. Definíció *Ha* $f(z) = u + jv$ *reguláris* $K_{z_0,\delta}$ *-ban, akkor* u *és* v harmonikus társak.

4.43. Tétel *Ha* u *harmonikus* $K_{z_0,\delta}$ *-ban* $(\Delta u = 0, \quad x + jy \in K_{z_0,\delta})$, *akkor* $\exists\, v$ *harmonikus függvény (harmonikus társ) úgy, hogy*

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

reguláris függvény.

A tételt általánosan nem bizonyítjuk, azonban a 4.47. példából látszik a konstrukció.

4.44. Megjegyzés *A tétel egyszeresen összefüggő tartományon is igaz.*

4.45. Megjegyzés *Hasonlóan* $v = \operatorname{Im} f$ *-hez is található* $u = \operatorname{Re} f$ *harmonikus társ.*

4.46. Példa *Határozzuk meg* $\alpha \in \mathbb{R}$ *értékét úgy, hogy az*

$$u(x, y) = x^2 + \alpha\, y^2$$

egy reguláris, komplex változós f *függvény valós része legyen! Határozzuk meg ekkor az* $f'(1 + 3j)$ *deriváltat is!*

160 Megoldás: *Ha* f *reguláris, akkor* u *harmonikus. Tehát* $\Delta u \equiv 0$ *-nak kell teljesülnie!*

$$u'_x = 2x, \qquad u''_{xx} = 2, \qquad u'_y = 2\,\alpha\, y, \qquad u''_{yy} = 2\,\alpha$$

Tehát

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 2 + 2\,\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -1, \quad \textit{vagyis} \quad u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Az f' *meghatározásához elegendő* u *ismerete, hiszen van olyan képletünk, melyben csak* u *parciálisai szerepelnek:*

$$f'(1 + 3j) = u'_x(1, 3) - j\, u'_y(1, 3) = 2 - j(-6) = 2 + j6.$$

4.47. Példa *Igazoljuk, hogy a*

$$v(x,y) = x^3 - x^2 - 3x\,y^2 + y^2$$

függvény lehet egy komplex változós, reguláris f függvény képzetes része, és írjuk fel az f függvényt!

161 Megoldás: *A v függvény harmonikusságát kell ellenőriznünk!*

$$v'_x = 3x^2 - 2x - 3y^2, \qquad v''_{xx} = 6x - 2, \qquad v'_y = -6xy + 2y, \qquad v''_{yy} = -6x + 2$$

Tehát $\Delta v \equiv 0$, v mindenütt harmonikus. Így létezik harmonikus társa. A két függvényt a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenletek kapcsolják össze, vagyis

$$u'_x = v'_y = -6xy + 2y, \qquad (1)$$
$$u'_y = -v'_x = -3x^2 + 2x + 3y^2. \qquad (2)$$

Az (1) egyenletből:

$$u(x,y) = \int (-6xy + 2y)\,\mathrm{d}x \;=\; -3x^2\,y + 2xy + C(y).$$

Ennek y szerinti parciális deriváltját behelyettesítve (2)-be:

$$-3x^2 + 2x + C'(y) = -3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad C(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + K.$$

Tehát

$$u(x,y) = -3x^2\,y + 2xy + y^3 + K \qquad (K \in \mathbb{R}),$$

így a keresett f függvény

$$f(z) = -3x^2\,y + 2xy + y^3 + K + j\,\left(x^3 - x^2 - 3x\,y^2 + y^2\right).$$

(Könnyen ellenőrizhető, hogy $f(z) = jz^3 - jz^2 + K$.)

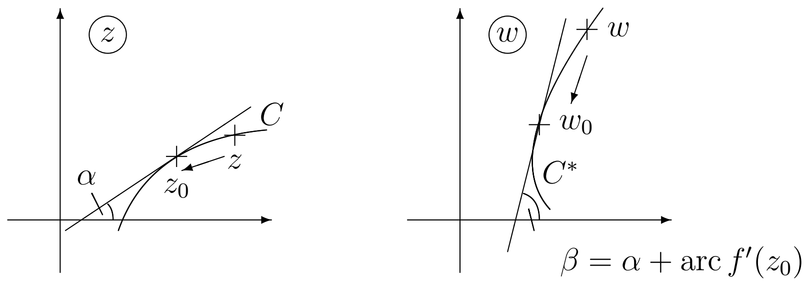
4.3.3. A differenciálhányados geometriai jelentése

A következő lemmában azt mutatjuk meg, hogy a komplex értelemben differenciálható függvények egy z_0 pont „kicsiny környezetét” egy forgatással és nyújtással viszik át a $w_0 = f(z_0)$ pont „kicsiny környezetébe”. Az $f'(z_0)$ derivált abszolút értéke és szöge éppen ezt a forgatva nyújtást jellemzi.

4.48. Lemma *Legyen f differenciálható K_{z_0}-ban, $f'(z_0) \neq 0$. Ekkor*

$\lvert f'(z_0)\rvert :$	*a z_0 pontbeli nyújtási együttható;*
$\operatorname{arc} f'(z_0) :$	*a z_0 pontbeli elfordulási szög.*

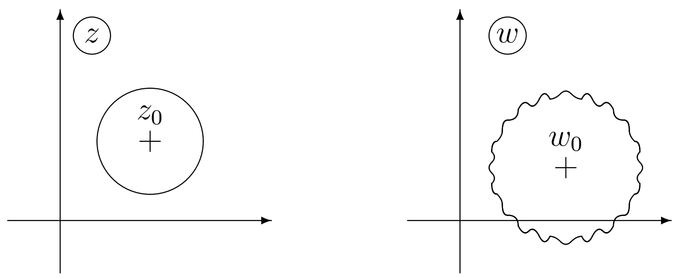
Bizonyítás. Legyen $w = f(z)$!



Ekkor $\Delta w \approx f'(z_0)\Delta z$ (=differenciál) $\quad (\Delta w = w - w_0,\ \Delta z = z - z_0)$.
Ezért $|\Delta w| \approx |f'(z_0)|\,|\Delta z|$

$$\frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \approx |f'(z_0)|,$$

tehát közelítőleg állandó, vagyis független a konkrét C-től.



Tehát egy elegendően kis sugarú kör képe „lényegében kör”.
Másrészt $\Delta w \approx f'(z_0)\Delta z$ miatt:

$$\operatorname{arc} \Delta w \approx \operatorname{arc} f'(z_0) + \operatorname{arc} \Delta z.$$

Ha $z \to z_0$, akkor $w \to w_0$ és

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{arc} \Delta z = \alpha, \qquad\qquad \lim_{w\to w_0} \operatorname{arc} \Delta w = \beta.$$

Tehát

$$\lim_{w\to w_0} \operatorname{arc} \Delta w = \beta = \operatorname{arc} f'(z_0) + \alpha.$$

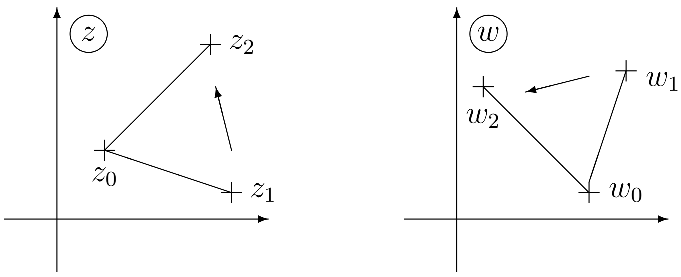
Vagyis az elfordulás minden, a z_0 ponton átmenő görbére ugyanaz. $\square$

4.4. Konform (konformis) leképezés

A „konform" szó arra utal, hogy „a formát változatlanul megtartó". A precíz matematikai definíció a következő:

4.49. Definíció *Az f komplex függvény által létesített leképezés a z_0 pontban* lokálisan konform*, ha ott*

- *iránytartóan szögtartó,*
- *kismértékben aránytartó.*



„Lényegében" (lokálisan) hasonlósági transzformáció.

Vagyis $z_2 z_0 z_1\measuredangle = w_2 w_0 w_1\measuredangle$ és

$$\frac{|w_2 - w_0|}{|z_2 - z_0|} \approx \frac{|w_1 - w_0|}{|z_1 - z_0|}.$$

4.50. Tétel *Az f reguláris komplex függvény akkor és csak akkor képezi le a z sík valamely z_0 pontjának egy környezetét a w sík $w_0 = f(z_0)$ pontjának egy környezetére kölcsönösen egyértelműen és konformisan, ha $f'(z_0) \neq 0$.*

A bizonyításhoz az 4.48. lemmát kell fölhasználnunk.

4.4.1. Tartományon konform leképezések

Elevenítsük föl a *tartomány* (4.34. definíció) és az *egyszeresen összefüggő tartomány* (4.35. definíció) fogalmát!

4.51. Definíció *Az f komplex függvény által létesített leképezés a T* tartományon konform*, ha annak minden pontjában konform.*

A következő – bizonyítás nélkül közölt – tételek a konform leképezések elméletének igen mély és fontos tételei.

4.52. Tétel (A tartomány megmaradásának elve) *Ha az f komplex függvény nem konstans, és reguláris, akkor a tartomány képe tartomány. (Határpontokat határpontokba visz.)*

4.53. Tétel *Ha az f komplex függvény egy T tartományon egyrétű, reguláris és $f'(z) \neq 0$, akkor a T tartományt kölcsönösen egyértelműen és konform módon képezi le egy T^* tartományra.*

Az előzőek megfordítása:

4.54. Tétel *Ha T és T^* egyszeresen összefüggő tartomány, akkor $\exists f(z)$, mely kölcsönösen egyértelműen és konformisan leképezi T-t T^*-ra.*

4.55. Tétel (Kerületek irányítása) *A T és T^* tartományok kölcsönösen egyértelmű és konform leképezésénél kerületeik körüljárási iránya változatlan marad. Ennek következménye: hogy ha a T tartomány kerületének körüljárásánál a tartomány például balkéz felé esik, akkor a T^* képtartomány kerületének azonos irányú körüljárásánál T^* is balkéz felé esik.*

A következő alfejezetekben speciális, az egész Riemann-gömbön értelmezett konform leképezésekkel, az úgynevezett lineáris törtfüggvényekkel foglalkozunk részletesen.

4.4.2. Néhány alapfogalom

4.56. Definíció Lineáris egész függvénynek *nevezzük a*

$$w = az + b, \qquad\qquad a, b \in \mathbb{C}$$

alakú leképezéseket.

4.57. Definíció Lineáris törtfüggvénynek *nevezzük a*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad\qquad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{4.1}$$

alakú leképezéseket. ($c = 0$ esetén lineáris egész függvényről van szó.)

4.58. Megjegyzés *Mindkét függvénycsoport természetes módon kiterjeszthető $\mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ leképezéssé. Lineáris egész függvény esetén $\infty \mapsto \infty$. A 4.1 formulával megadott lineáris törtfüggvény esetén pedig $\infty \mapsto \frac{a}{c}$, és $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$.*

A következőkben szükségünk lesz a komplex számsíkon az egyenes és a kör egyenletére.

Egyenes komplex egyenlete:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2j}.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{\alpha}{2}(z + \overline{z}) + \frac{\beta}{2j}(z - \overline{z}) + \gamma = 0$$
$$\underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} - j\frac{\beta}{2}\right)}_{:=a} z + \left(\frac{\alpha}{2} + j\frac{\beta}{2}\right) \overline{z} + \gamma = 0.$$

Így az egyenes komplex egyenlete:

$$az + \overline{a}\,\overline{z} + c = 0 \quad \text{vagy} \quad az + \overline{a}\,\overline{z} = c. \tag{4.2}$$

Kör komplex egyenlete:

$$|z - z_0|^2 = r^2 \qquad \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\right)$$
$$(z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2$$

Így a z_0 középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} - r^2 = 0. \tag{4.3}$$

4.4.3. Lineáris egész függvény

Ebben a részben a

$$w(z) = az + b = \varrho_0\, r\, \mathrm{e}^{j(\varphi+\varphi_0)} + b \qquad a, b \in \mathbb{C} \ \text{ adott}, \ \ a = \varrho_0\, \mathrm{e}^{j\varphi_0}$$

lineáris egész függvény (4.56. definíció) legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk meg.

4.59. Lemma *A w leképezés kölcsönösen egyértelmű a teljes z és a teljes w sík között. ($w(\infty) = \infty$)*

4.60. Lemma *A w leképezés hasonlósági transzformációt létesít a teljes z síkon.*

Bizonyítás. A leképezés az

$$\begin{array}{ll} az = \varrho_0 r e^{j(\varphi+\varphi_0)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{– nyújtás vagy zsugorítás } (\varrho_0) \\ \text{– forgatás } (\varphi_0 \ \circlearrowleft) \end{array} \right. \\ +b & \quad \text{– eltolás} \end{array}$$

szuperpozíciója. Tehát a z sík bármely T tartományát a w sík egy hozzá hasonló T^* tartományára képezi le, amely a T-ből nagyítással (vagy kicsinyítéssel), elforgatással és párhuzamos eltolással jön létre. □

4.61. Lemma *A w leképezés körtartó a teljes z síkon.*

A fentiek miatt w kört körbe, egyenest egyenesbe visz át.

4.62. Lemma *A w leképezés konform a teljes z síkon.*

Bizonyítás. $w'(z) = a \neq 0 \implies$ mindenütt konform. □

4.63. Lemma *A w leképezés fix (helyben maradó) pontjai:*

$z = \infty\,,$ *illetve* $(z = az + b$*-ből:*$)$ $z = \dfrac{b}{1-a},$ *ha* $a \neq 1$.

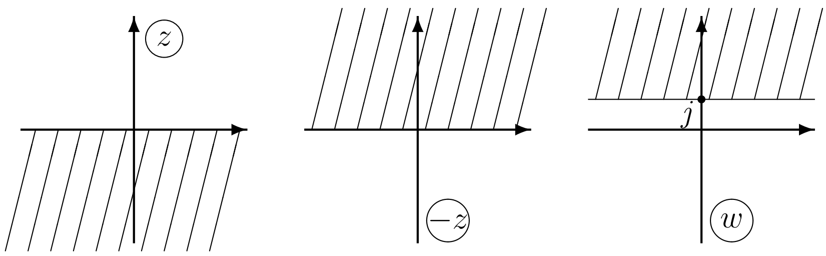
4.64. Példa *Mibe viszi át a $w = -z + 1 + j$ leképezés az*

a.) $\operatorname{Im} z < 0$ *b.)* $\operatorname{Im} z = 0$ *c.)* $\operatorname{Im} z > 0$

ponthalmazt?

162 Megoldás: *a) 1. megoldás:*

$\operatorname{Im} z = y < 0$ $\qquad -z = e^{j\pi} \cdot z$ $\qquad \operatorname{Im} w > 1$



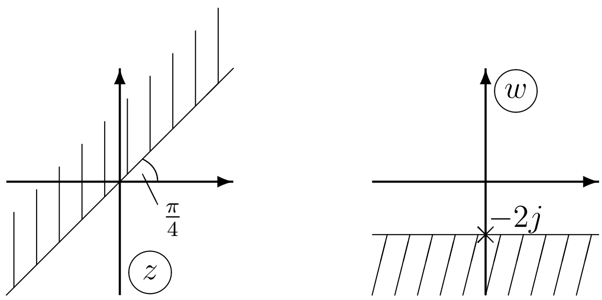
2. megoldás:

$$\begin{array}{lll} w = u + jv = -(x+jy) + 1 + j & \longrightarrow & u = -x + 1,\ v = 1 - y \\ \operatorname{Im} z = y < 0 \longrightarrow -y > 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} w = v = 1 - y > 1 \\ & & x \text{ tetsz.} \longrightarrow u = -x + 1 \text{ tetsz.} \end{array}$$

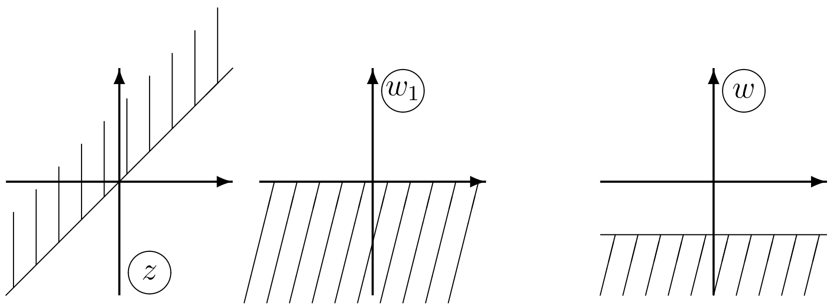
b) $\operatorname{Im} z = 0$ *képe* $\operatorname{Im} w = 1$ *(határt határba visz).*

c) Az előzőek miatt: $\operatorname{Im} z > 0$ *képe* $\operatorname{Im} w < 1$.

4.65. Példa *Határozzuk meg azt a $w = az + b$ lineáris egész függvényt, amely a z sík bejelölt tartományát a w sík bejelölt tartományába viszi!*



163 Megoldás:



$$w_1 = \varrho_0 \, \mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}} \, z \quad (\varrho_0 > 0) \quad w = w_1 - 2j$$

$$\Longrightarrow \quad w = \varrho_0 \, \mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}} \, z - 2j \qquad \varrho_0 \in \mathbb{R}^+$$

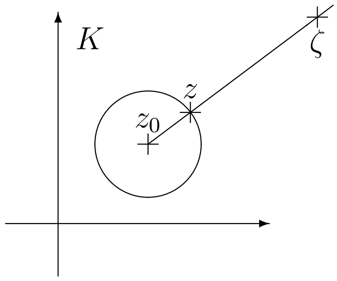
4.4.4. Reciprok függvény

A $w(z) = 1/z$ függvény egy igen egyszerű lineáris törtfüggvény (4.57. definíció).

4.66. Lemma *A $w = \frac{1}{z}$ függvény* kölcsönösen egyértelmű *a teljes z és a teljes w sík között. (Kiterjesztés ehhez: $w(0) = \infty$, $w(\infty) = 0$.)*

4.67. Definíció (Inverzió) *Legyen adott egy K kör, melynek középpontja z_0, sugara R. Ekkor a z pontnak a K alapkörre vett* inverzió *általi képe az a ζ pont, mely a z_0-ból induló, z-n áthaladó félegyenesen helyezkedik el, és*

$$|z - z_0| \, |\zeta - z_0| = R^2.$$



A z_0 középpont inverze legyen ∞.

4.68. Lemma *A $w = \frac{1}{z}$ leképezés a $|z| = 1$ egységkörre való inverzió és a valós tengelyre vonatkozó inverzió (tükrözés) egymásutánja.*

Bizonyítás.

$$\underbrace{w = \overline{w_1},}_{\text{inverzió a valós tengelyre}} \qquad \text{ahol} \qquad \underbrace{w_1 = \frac{1}{\overline{z}}}_{\text{inverzió a } |z|=1 \text{ körre}}$$

A mi esetünkben:

$$w_1 = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|\,\mathrm{e}^{-j\operatorname{arc} z}} = \frac{1}{|z|}\,\mathrm{e}^{j\operatorname{arc} z}.$$

Tehát $z_0 = 0$, $R = 1$ mellett

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a.)} & |w_1|\,|z| = |w_1 - 0|\,|z - 0| = 1^2 \\ \text{b.)} & \operatorname{arc} w_1 = \operatorname{arc} z \end{array}\right\} \text{Inverzió a } |z| = 1 \text{ körre.}$$

Az egységkör ($|z| = 1$) pontjai helyben maradnak. □

4.69. Lemma *A $w = \frac{1}{z}$ leképezés* konform *a z sík minden pontjában.*

Bizonyítás. A függvény deriváltja: $w' = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \neq 0$, ha $z \neq \infty$. (A $z = 0$-ra és $z = \infty$-re is kiterjeszthető a fogalom.) □

4.70. Lemma *A $w = \frac{1}{z}$ leképezés* „kögyenes" tartó leképezés*, azaz kör képe egyenes vagy kör, és egyenes képe egyenes vagy kör*

Röviden „körtartó" leképezésnek nevezzük az ilyen leképezést.

Bizonyítás. Felhasználjuk az egyenes és a kör komplex egyenletét (4.2 és 4.3 egyenletek).

a) *Kört körbe vagy egyenesbe visz:*

$$z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z + z_0\overline{z}_0 = r^2; \qquad w = \frac{1}{z} \longrightarrow z = \frac{1}{w}; \qquad \overline{z} = \frac{1}{\overline{w}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w\overline{w}} - z_0\,\frac{1}{\overline{w}} - \overline{z}_0\,\frac{1}{w} + z_0\,\overline{z}_0 &= r^2 && /\cdot w\overline{w}\\
1 - z_0 w - \overline{z}_0\overline{w} + z_0\overline{z}_0 w\overline{w} &= r^2 w\overline{w}\\
\left(r^2 - z_0\overline{z}_0\right) w\overline{w} + z_0 w + \overline{z}_0\overline{w} &= 1
\end{aligned}
$$

Ha $r^2 - z_0\overline{z}_0 = 0$, vagyis $z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z = 0$ volt az egyenlet, tehát origón átmenő kör:

$$z_0 w + \overline{z}_0\overline{w} = 1\ :\qquad \text{egyenes a képgörbe}$$

Ha $r^2 - z_0\overline{z}_0 \neq 0$:

$$w\overline{w} + \underbrace{\frac{z_0}{r^2 - z_0\overline{z}_0}}_{:=c}\,w + \underbrace{\frac{\overline{z}_0}{r^2 - z_0\overline{z}_0}}_{=\overline{c}}\,\overline{w} = \frac{1}{r^2 - z_0\overline{z}_0}\ :\qquad \text{kör}$$

($r^2 - z_0\overline{z}_0$ valós)

b) *Egyenest körbe vagy egyenesbe visz:*

$$az + \overline{a}\,\overline{z} = c\quad (c\ \text{valós});\qquad z = \frac{1}{w},\quad \overline{z} = \frac{1}{\overline{w}}$$

$$
\begin{aligned}
a\,\frac{1}{w} + \overline{a}\,\frac{1}{\overline{w}} &= c && /\cdot w\overline{w}\\
c\,w\,\overline{w} - a\,\overline{w} - \overline{a}\,w &= 0
\end{aligned}
$$

Ha $c = 0$ (origón átmenő egyenes):

$$a\overline{w} + \overline{a}w = 0\ :\qquad \text{egyenes a képgörbe (szintén origón átmenő)}$$

Ha $c \neq 0$: mindkét oldalhoz $\dfrac{a\overline{a}}{c} = \dfrac{|a|^2}{c}$-t hozzáadva és c-vel végigosztva az egyenletet:

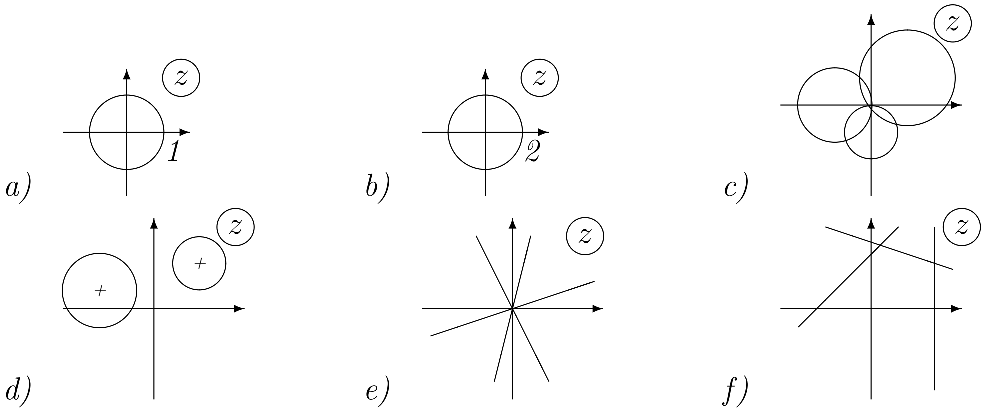
$$w\overline{w} - \frac{a}{c}\overline{w} - \frac{\overline{a}}{c}w + \frac{a\overline{a}}{c^2} = \frac{|a|^2}{c^2}\ :\qquad \text{origón átmenő kör}$$

□

4.71. Lemma *A $w = \frac{1}{z}$ leképezés fix pontjai az 1 és −1 pontok.*

Bizonyítás. A $z = \frac{1}{z}$, azaz $z^2 = 1$ egyenlet megoldásairól van szó. □

4.72. Példa *Határozzuk meg a $w = \frac{1}{z}$ leképezésnél az alábbi görbékhez rendelt képgörbék jellegét!*



164 Megoldás: *A leképezés körtartó, tehát kör vagy egyenes képe minden esetben kör vagy egyenes.*

a)

$$|z| = 1 \quad \textit{és} \quad w = \frac{1}{z} \qquad \Longrightarrow \qquad |w| = \frac{1}{|z|} = 1$$

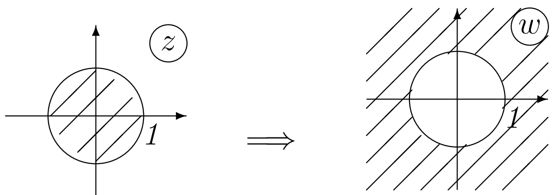
Tehát az origó középpontú egységkör képe önmaga. (De nem pontonként.)

Vagy exponenciális alakot használva, $w = \frac{1}{|z| e^{j \operatorname{arc} z}} = \frac{1}{|z|} \mathrm{e}^{-j \operatorname{arc} z}$, így

$$|w| = \frac{1}{|z|}, \qquad\qquad \operatorname{arc} w = -\operatorname{arc} z.$$

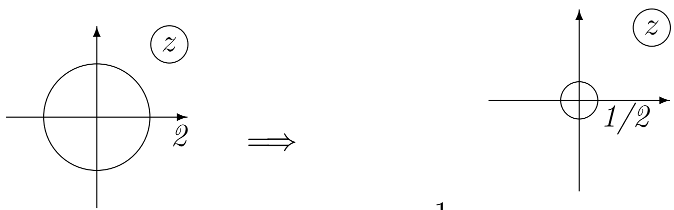
(Az utóbbi képletből látszik – amit persze tudunk –, hogy a kör a valós tengelyre tükrözött.)

Mibe viszi át a leképezés a $|z| < 1$ tartományt?



$$|z| < 1 \qquad\qquad |w| = \frac{1}{|z|} > 1$$

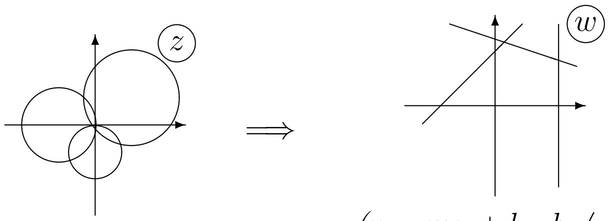
b) Az origó középpontú, 2 sugarú kör képe az origó középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör (tükrözve).



$$|z| = 2 \qquad\qquad w = \frac{1}{|z|} \mathrm{e}^{j \operatorname{arc} z} \quad \Longrightarrow \quad |w| = \frac{1}{2}$$

c) Origón átmenő kör képe origón át nem menő egyenes.

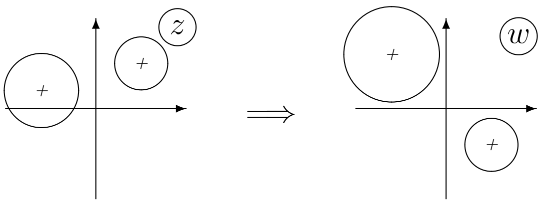
Mivel $z = 0$ rajta van az ősképen, ehhez $w = \frac{1}{z}$ a ∞-t rendeli, ezért a képgörbe csak egyenes lehet (kör nem). A $z = \infty$ pont nincs rajta az ősképen, így az egyenes nem megy át az origón.



$(v = mu + b;, \ b \neq 0)$

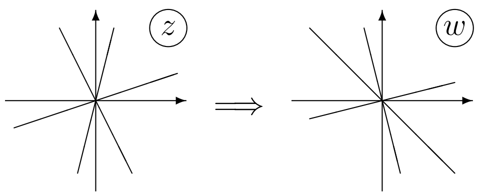
d) Origón át nem menő kör képe origón át nem menő kör.

$$\begin{array}{ccc} z = 0 \text{ nincs rajta} & \Longrightarrow & \text{a képgörbe kör} \\ z = \infty \text{ nincs rajta} & \Longrightarrow & \text{a kör nem megy át az origón} \end{array}$$



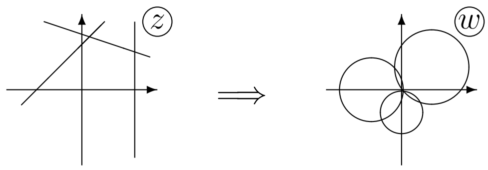
e) Origón átmenő egyenes képe origón átmenő egyenes.

$$\begin{array}{ccc} z = 0 \text{ rajta van} & \Longrightarrow & \text{egyenes } (w = \infty \text{ rajta van}) \\ z = \infty \text{ rajta van} & \Longrightarrow & w = 0 \text{ rajta van} \end{array}$$



f) Origón át nem menő egyenes képe origón átmenő kör.

$$\begin{array}{ccc} z = 0 \text{ nincs rajta} & \Longrightarrow & w \neq \infty \text{ (kör)} \\ z = \infty \text{ rajta van} & \Longrightarrow & w = 0 \text{ rajta van} \end{array}$$



4.73. Példa *Hogyan kapható meg a $w = \frac{1}{z}$ leképezésnél a képgörbe egyenlete, ha adott a kiindulási görbe egyenlete (x és y közti összefüggés)?*

165 Megoldás: *a) Az* $(w =)\, u + jv = \frac{1}{x+jy} \left(= \frac{1}{z}\right)$ *összefüggésből megkapható, hogy*

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2+v^2}. \tag{4.4}$$

Ezt behelyettesítve az őskép egyenletébe megkapjuk a keresett egyenletet.

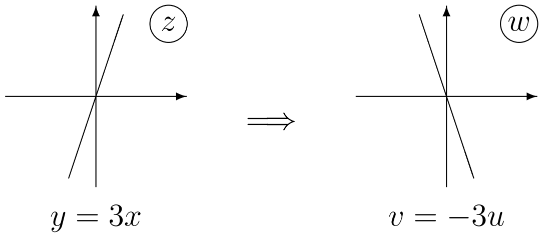
b) „3 pontos módszer”: *Ha a kiindulási görbe kör, akkor három pontjának a képe meghatározza a képgörbét, ami szintén kör.*

4.74. Példa *Határozzuk meg az $y = mx$ egyenesnek ($m \in \mathbb{R}$) a $w = \frac{1}{z}$ leképezés általi képét!*

166 Megoldás: *A (4.4) egyenleteket használjuk:*

$$\frac{-v}{u^2+v^2} = m\frac{u}{u^2+v^2} \implies v = -mu.$$

Az egyenes tükröződik az imaginárius tengelyre.



4.75. Példa *Határozzuk meg az $y = mx + b$ egyenesnek ($m, b \in \mathbb{R}$) a $w = \frac{1}{z}$ leképezés általi képét!*

167 Megoldás: *Mot is a (4.4) egyenleteket alkalmazzuk:*

$$\frac{-v}{u^2+v^2} = m\frac{u}{u^2+v^2} + b \qquad \textit{rendezve}$$

$$u^2 + \frac{m}{b}u + v^2 + \frac{1}{b}v = 0 \qquad \textit{origón átmenő kör}$$

4.76. Példa *Határozzuk meg az $x^2 + 2x + y^2 + 6y = 0$ körnek a $w = \frac{1}{z}$ leképezés általi képét!*

168 Megoldás: *Mivel a kör átmegy az origón, egyenest várunk, mely nem megy át az origón. Behelyettesítve:*

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + 2\frac{u}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{6v}{u^2+v^2} = 0.$$

Beszorozva a nevezővel és rendezve:

$$(u^2+v^2)(1+2u-6v) = 0 \implies 1 + 2u - 6v = 0.$$

4.4.5. Általános lineáris törtfüggvény

Az előző alfejezetekben a lineáris egész függvényekről és a reciprok függvényről láttuk be, hogy körtartó. Ezek segítségével egyszerűen látható, hogy az általános lineáris törtfüggvények (4.57. definíció) is hasonló tulajdonságúak.

4.77. Lemma *A $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ lineáris törtfüggvények „körtartó” leképezések.*

Bizonyítás. Ha $c = 0$, akkor lineáris egész függvényről van szó. Ha $c \neq 0$, akkor:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = K_1 + \frac{K_2}{z + K_3},$$

tehát a $z \mapsto w$ leképezés a következő egyszerűbb leképezések kompozíciója:

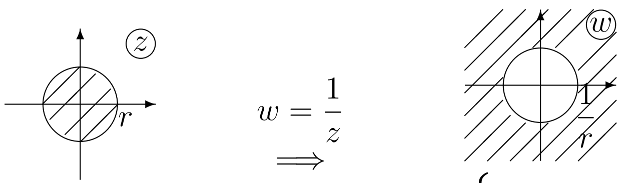
$$\begin{aligned}
w_1 &= z + K_3 : && \text{eltolás;}\\
w_2 &= \frac{1}{w_1} : && \text{inverzió egységkörre és a valós tengelyre;}\\
w_3 &= K_2 w_2 : && \text{forgatás + nyújtás (zsugorítás);}\\
w &= K_1 + w_3 : && \text{eltolás.}
\end{aligned}$$

Mivel ezek egyenként körtartóak, ezért kompozíciójuk is az. □

4.78. Példa *Határozzunk meg* egy olyan *leképezést, mely az A halmazt a B halmazra képezi le!*

$$\begin{array}{llll}
a) & A = \{z:\ |z| \le r\}, & & B = \left\{w:\ |w| \ge \frac{1}{r}\right\}\\
b) & A = \{z:\ |z| \le r_1\}, & & B = \{w:\ |w| \ge r_2\}\\
c) & A = \{z:\ |z-a| \le r_1\}, & & B = \{w:\ |w-b| \ge r_2\}\\
d) & A = \{z:\ |z-a| \ge r_1\}, & & B = \{w:\ |w-b| \le r_2\}
\end{array}$$

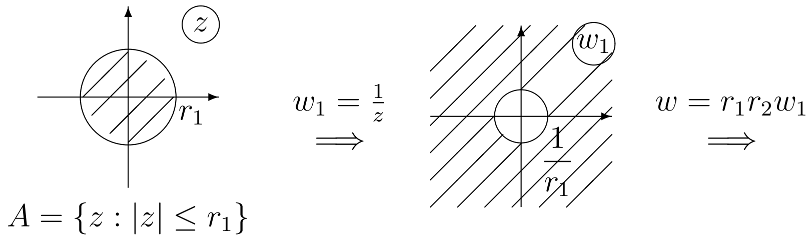
169 Megoldás: *a)*

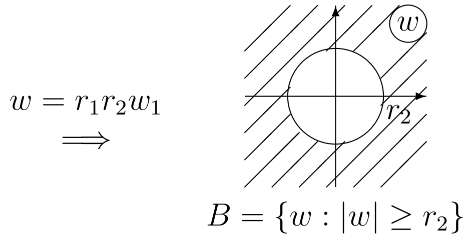


$A = \{z:\ |z| \le r\}$ $\qquad$ $B = \left\{w:\ |w| \ge \frac{1}{r}\right\}$

Tehát az $w = \frac{1}{z}$ leképezés megfelel. (De például a $w = e^{j\varphi_0} \cdot \frac{1}{z}$ is jó.)

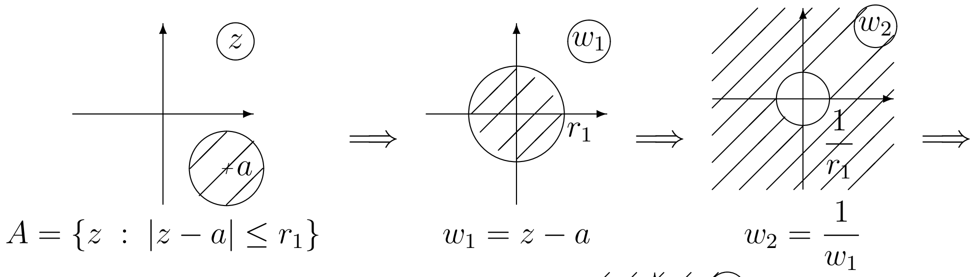
b) A leképezést két részre bontjuk, közbülső lépésként az előző pont eredményét használjuk föl.

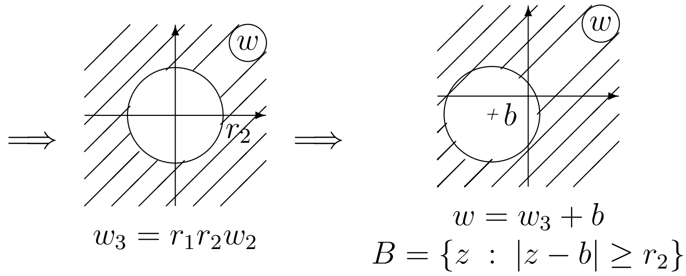




Tehát $w = r_1 r_2 \frac{1}{z}$ *egy ilyen leképezés.*

c) A leképezést most is több lépésből rakjuk össze:

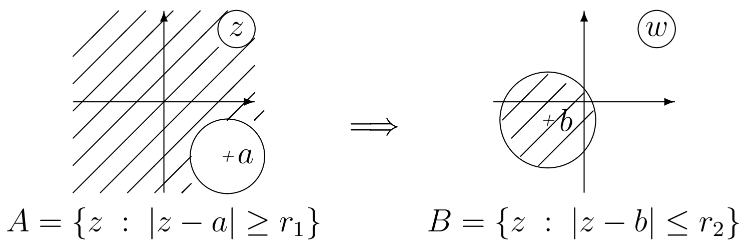




Egy megfelelő függvény:

$$w = r_1 r_2 \frac{1}{z-a} + b$$

d)



Ez ugyanaz, mint az előző:

$$w = r_1 r_2 \frac{1}{z-a} + b.$$

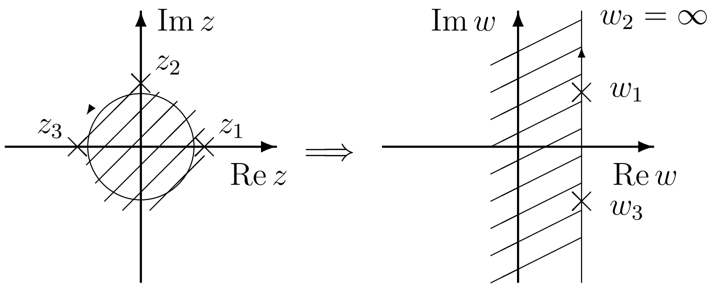
4.79. Példa *Mibe viszi át a $w = \frac{z}{z-2j}$ függvény a $|z| < 2$ tartományt?*

170 Megoldás: *Lineáris törtfüggvényről van szó, tehát a leképezés kört körbe vagy egyenesbe visz. A $|z| = 2$ körön kijelölt három tetszőleges pont képe meghatározza a $|z| \leq 2$ tartomány képének határát.*

$$z_1 = 2 \qquad w_1 = \frac{2}{2-j2} \cdot \frac{2+j2}{2+j2} = \frac{4+4j}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$z_2 = 2j \qquad w_2 = \infty \qquad \operatorname{Re} w \leq \frac{1}{2}$$

$$z_3 = -2 \qquad w_3 = \frac{-2}{-2-j2} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$



4.5. Elemi függvények

4.5.1. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

4.80. Definíció *Legyen $z = x + jy \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám! ($x, y \in \mathbb{R}$) Ekkor:*

$$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + j \sin y),$$

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{jz} - \mathrm{e}^{-jz}}{2j}, \qquad \cos z := \frac{\mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz}}{2},$$

$$\operatorname{sh} z := \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z := \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

4.81. Lemma *Tetszőleges* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *komplex számokra teljesülnek a következő (valósban már megismert) összefüggések:*

1. $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$
2. $\mathrm{e}^{z+2\pi j} = \mathrm{e}^{z}$ $\quad$ (e^{z} $2\pi j$ *szerint periodikus)*
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
4. $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$
5. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
6. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
7. $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$
8. $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

Bizonyítás. Az azonosságok a definíciók felhasználásával könnyen beláthatóak. □

4.82. Lemma *Tetszőleges* $z \in \mathbb{C}$ *komplex számra teljesülnek a következő azonosságok:*

a)	$\sin jz = j \operatorname{sh} z,$	*b)*	$\operatorname{sh} jz = j \sin z,$
c)	$\cos jz = \operatorname{ch} z,$	*d)*	$\operatorname{ch} jz = \cos z.$

Bizonyítás. a) bizonyítása a szinusz függvény definíciójával:

$$\sin jz = \frac{\mathrm{e}^{j(jz)} - \mathrm{e}^{-j(jz)}}{2j} = \underbrace{\frac{1}{j}}_{=-j} \frac{\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z}}{2} = j\frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} = j \operatorname{sh} z.$$

A többi hasonlóan látható be. □

4.83. Példa $\cos(2 - j\pi) = \cos 2 \cos j\pi + \sin 2 \sin j\pi = \cos 2 \operatorname{ch} \pi + j \sin 2 \operatorname{sh} \pi.$

4.84. Példa *Írjuk fel*

$$u(x, y) + jv(x, y)$$

alakban a $\sin z,\ \cos z,\ \operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} z$ *függvényeket!*

171 Megoldás:

$$\sin z = \sin(x + jy) = \sin x \cdot \cos jy + \cos x \cdot \sin jy = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y.$$

Tehát

$$u(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, \qquad\qquad v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + jy) = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh} z &= \operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y \\ \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(x + jy) = \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y. \end{aligned}$$

4.85. Példa *A Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek segítségével vizsgáljuk meg az*

$$e^z, \ \sin z, \ \cos z, \ \operatorname{sh} z, \ \operatorname{ch} z$$

függvényeket differenciálhatóság és regularitás szempontjából!

172 Megoldás: *Mivel* $e^z = e^x \cos y + je^x \sin y$, *ezért*

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y \\ v(x, y) &= e^x \sin y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\textit{totálisan deriválhatók, mert a} \\ &\textit{parciálisok léteznek és folytonosak.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_x &= e^x \cos y \\ u'_y &= -e^x \sin y \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} v'_y &= e^x \cos y \\ v'_x &= e^x \sin y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned} \qquad \forall\,(x, y) \ \textit{esetén.}$$

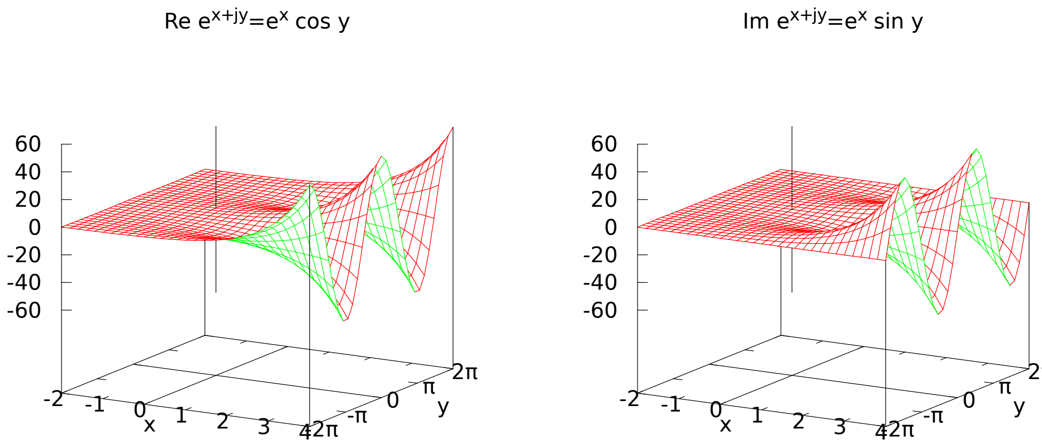
Tehát mindenütt deriválható $\Longrightarrow$ *mindenütt reguláris.*

$$(e^z)' = u'_x + jv'_x = e^x \cos y + je^x \sin y = e^z$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\left.\begin{aligned} (\sin z)' &= \cos z \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z \\ (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z \end{aligned}\right\} \textit{mindenütt regulárisak.}$$

Az utóbbi deriváltak a függvények definíciójából a láncszabály segítségével is levezethetők.



4.5. ábra. Az e^z függvény valós és képzetes része. Jól látható, hogy a függvény $2\pi j$ szerint periodikus.

4.5.2. Exponenciális függvény

A komplex exponenciális függvényt a 4.80. definícióban adtuk meg. Bármely $z = x+jy \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén $(x, y \in R)$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + j \sin y),$$

tehát

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{arc}\left(\mathrm{e}^z\right) = y.$$

Az exponenciális függvény valós és képzetes része a 4.5 ábrán látható.

4.86. Példa *Meghatározzuk* $\mathrm{e}^{j\pi}$ *értékét:*

$$\mathrm{e}^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1.$$

4.87. Példa *Meghatározzuk* e^{-1-2j} *értékét:*

$$\mathrm{e}^{-1-2j} = \mathrm{e}^{-1}\big(\cos(-2) + j\sin(-2)\big) = \frac{1}{\mathrm{e}}(\cos 2 - j\sin 2).$$

A valós kitevőkre tanult azonosságok érvényben maradnak, tehát jogos a definíció.

4.88. Lemma *Tetszőleges $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén fennállnak a következő, valósban is érvényes azonosságok:*

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \qquad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \qquad (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}.$$

Bizonyítás. Az azonosságok közvetlen számolással igazolhatók. Például az első:

$$e^{-z} = e^{-x}(\cos(-y) + j\sin(-y)) = e^{-x}(\cos y - j\sin y) = \frac{1}{e^z}. \qquad \square$$

4.89. Lemma *A komplex exponenciális függvény periodikus, periódusa $2\pi j$.*

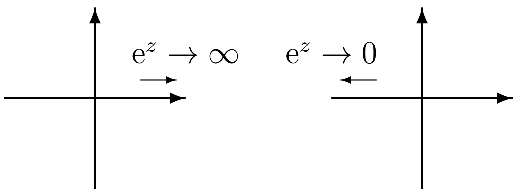
Bizonyítás.

$$e^{z+2k\pi j} = e^{x+j(y+2k\pi)} = e^z$$

Tehát e^z végtelen sokrétű leképezés (4.5 ábra). $\square$

4.90. Lemma *A komplex exponenciális függvény a 0-át ill. ∞-t soha nem veszi fel, minden más értéket igen.*

Bizonyítás. Tetszőleges $z = x + jy \in \mathbb{C}$ esetén $e^z \neq 0$, mert $|e^z| = e^x > 0$. Továbbá $e^z \neq \infty$, mert csak a ∞-ben vehetné fel, de $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} e^z$.



(Két úton mást kapunk.)

De $\forall w_0$-hoz $\exists z_0 :$ $e^{z_0} = w_0$, ha $w_0 \neq 0$ és $w_0 \neq \infty$.
Ugyanis adott $w_0 = \varrho_0 e^{j\theta_0}$ esetén az

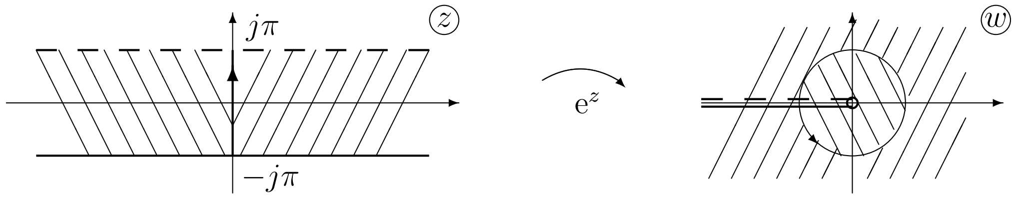
$$e^{z_0} = e^{x_0}\, e^{jy_0} = w_0 = \varrho_0\, e^{j\Theta_0}$$

egyenlőségnek kell teljesülniük, ahonnan

$$e^{x_0} = \varrho_0, \qquad \text{vagyis} \qquad x_0 = \ln \varrho_0,$$
$$\text{és} \qquad y_0 = \Theta_0 + 2k\pi.$$

Tehát $z_0 = \ln \varrho_0 + j(\Theta_0 + 2k\pi)$.

Ha leszűkítjük az értelmezési tartományt a *fősávra*, akkor a leképezés már kölcsönösen egyértelmű.
Fősáv: $-\pi \leq \operatorname{arc} e^z = y < \pi$



$|w| = \mathrm{e}^x$, tehát

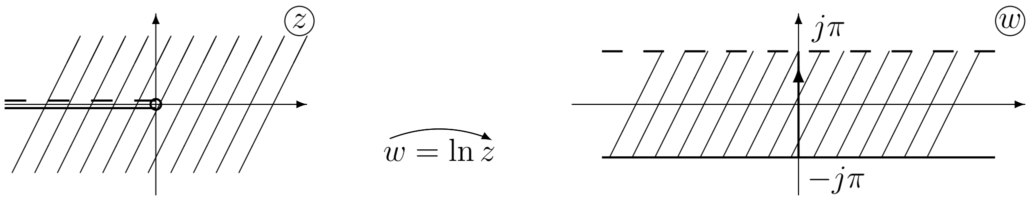
$$\begin{aligned} x &< 0 && \text{esetén} && |w| < 1, \\ x &= 0 && \text{esetén} && |w| = 1, \\ x &> 0 && \text{esetén} && |w| > 1. \end{aligned}$$ □

4.91. Lemma *A komplex exponenciális függvény mindenütt reguláris és mindenütt konform.*

Bizonyítás. Már láttuk: $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z \neq 0$. □

4.5.3. Logaritmus függvény ill. reláció

A *logaritmus reláció* az exponenciális függvény inverze. Akkor válik egyértékűvé, ha az e^z függvény értelmezési tartományát leszűkítjük úgy, hogy ott az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű legyen. Például a *fősávban* fennáll az invertálhatóság:

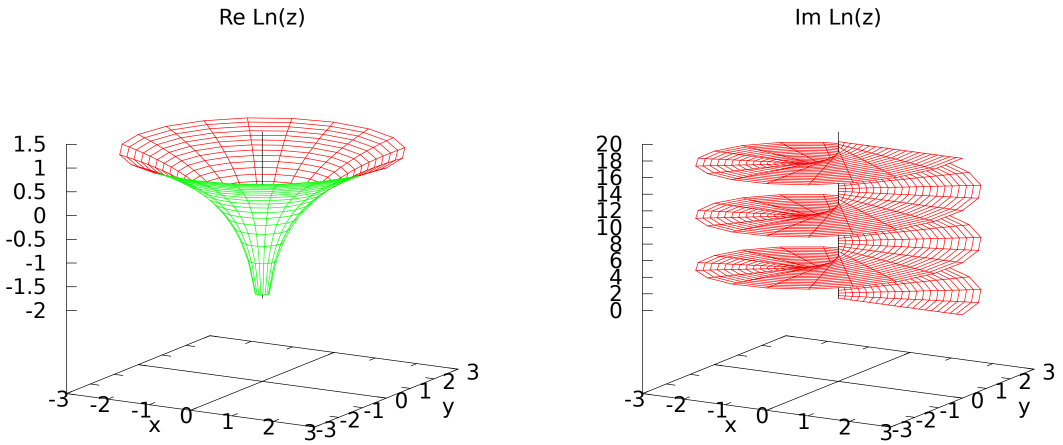


Értelmezési tartomány: $\mathbb{C} - \{0\}$. Adott $z \neq 0$ esetén keressük azt a fősávba eső $w = u + jv$ értéket (azaz $-\pi \leq \operatorname{Im} w = v < \pi$), melyre

$$w = \ln z \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} z &= \mathrm{e}^w \\ |z|\, \mathrm{e}^{j \operatorname{arc} z} &= \mathrm{e}^{u+jv} = \mathrm{e}^u\, \mathrm{e}^{jv}. \end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u &= \ln |z| && \text{(ez a valósból ismert függvény)} \\ v &= \operatorname{arc} z && -\pi \leq \operatorname{arc} z < \pi. \end{aligned}$$



4.6. ábra. Az $\operatorname{Ln} z$ reláció valós és képzetes része. Animáció.

4.92. Definíció (Komplex logaritmus függvény) *Legyen z tetszőleges, nem nulla komplex szám. Ekkor:*

$$\ln z = \ln |z| + j \operatorname{arc} z \qquad (z \neq 0,\ -\pi \leq \operatorname{arc} z < \pi)$$

A többi sávban is elvégezhető az invertálás, így jutunk el az $\operatorname{Ln} z$ végtelen sokértékű *relációhoz.*

4.93. Definíció (Komplex logaritmus reláció) *Legyen z tetszőleges, nem nulla komplex szám. Ekkor:*

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

$\operatorname{Ln}_k z$: ennek a k-adik ága, tehát $\ln z = \operatorname{Ln}_0 z$. ($\operatorname{Arc} z = \operatorname{arc} z + 2k\pi$ jelölést is használjuk.)

A logaritmus reláció valós és képzetes része a 4.6 ábrán látható.

4.94. Lemma *A komplex logaritmus függvény a negatív valós tengely és a 0 kivételével mindenütt reguláris, és itt*

$$\ln'(z) = \frac{1}{z}.$$

Bizonyítás. Az origóban a logaritmus nincs értelmezve, a negatív valós tengelyen pedig (a definíció alapján) nem folytonos, így ezekben a pontokban a deriváltja sem létezik.

A többi pontban a logaritmus függvény deriváltja – a valós esethez hasonlóan – az inverz függvény deriválási szabályából megkapható:

$$\ln'(z) = \left.\frac{1}{(e^w)'}\right|_{w=\ln(z)} = \frac{1}{z}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk a Cauchy–Riemann egyenletek (4.29. tétel) felhasználásával is. A valós rész és parciális deriváltjai:

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad u'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u'_y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

A képzetes rész a tangens és/vagy a kotangens függvény segítségével többféleképpen is fölírható (figyelembe kell venni, hogy $-\pi \le \operatorname{arc} z < \pi$):

$$v(x,y) = \operatorname{Im}\ln(z) = \operatorname{arc} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{ha } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y \le 0, \\ \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}, & \text{ha } y > 0, \\ \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} - \pi, & \text{ha } y < 0. \end{cases}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy bármelyik formulát használva a parciális deriváltakra

$$v'_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -u'_y, \qquad v'_y = \frac{x}{x^2+y^2} = u'_x$$

adódik, tehát teljesülnek a Cauchy–Riemann egyenletek. □

4.95. Példa *Negatív valós számoknak is létezik komplex értelemben a logaritmusa:*

$$\begin{aligned} \ln(-6) &= \ln 6 + j(-\pi), \\ \operatorname{Ln}(-6) &= \ln 6 + j(-\pi + 2k\pi), \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

A következő példákban meghatározunk néhány komplex logaritmust, iletve logaritmus relációt.

4.96. Példa

$$\ln(1-j) = \ln\sqrt{2} + j\left(-\frac{\pi}{4}\right); \qquad (1 - j = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\pi/4})$$

4.97. Példa

$$\operatorname{Ln}(1-j) = \ln\sqrt{2} + j\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

4.98. Példa

$$\ln j = \ln 1 + j\frac{\pi}{2} = j\frac{\pi}{2}; \qquad \operatorname{Ln} j = j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z};$$

$$\ln 3j = \ln 3 + j\frac{\pi}{2}; \qquad \operatorname{Ln} 3j = \ln 3 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

4.99. Példa *Határozzuk meg az*

$$e^{3j\bar{z}} + 5j = 0$$

egyenlet összes komplex megoldását!

173 Megoldás: *A valósban megismerthez hasonlóan rendezzük az egyenletet, csak a logaritmálásnál a 4.93. logaritmus relációt használjuk:*

$$e^{3j\bar{z}} = -5j \quad \Longrightarrow \quad 3j\bar{z} = \operatorname{Ln}(-5j) = \ln 5 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{z} = -j\frac{\ln 5}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{\pi}{3}\left(2k - \frac{1}{2}\right) + j\frac{\ln 5}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4.100. Példa *Határozzuk meg a*

$$\sin 3z + 2 = 0$$

egyenlet összes komplex megoldását!

174 Megoldás: *Először felhasználjuk a* sin *függvény 4.80. definícióját, majd az $u = e^{3jz}$ új változóra adódó másodfokú egyenletet megoldjuk, végül a logaritmus relációval (4.93. definíció) visszatérünk z-re:*

$$\frac{e^{3jz} - e^{-3jz}}{2j} + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{e^{3jz}}_{u} - \underbrace{e^{-3jz}}_{1/u} + 4j = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^2 + 4ju - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{1,2} = e^{3jz} = -2j \pm \sqrt{(-2j)^2 + 1} = j(-2 \pm \sqrt{3})$$

$$\Longrightarrow \quad 3jz = \operatorname{Ln} j\,\underbrace{(-2 \pm \sqrt{3})}_{<0} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{-j}{3}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + \frac{1}{3}\left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

4.5.4. A hatványfüggvény általánosítása a komplex síkra

Komplex alap komplex kitevős hatványát – némileg önkényesen – úgy definiáljuk, hogy áttérünk az e alapú exponenciális függvényre.

4.101. Definíció

$$z^{\lambda} := \mathrm{e}^{\lambda \ln z} \qquad z \neq 0\,;\; z\,,\; \lambda \in \mathbb{C}$$

A következő példákban kiszámolunk néhány komplex hatványt.

4.102. Példa $j^j = \mathrm{e}^{j \ln j} = \mathrm{e}^{j(\ln 1 + j\frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

4.103. Példa $j^{2j} = \mathrm{e}^{2j \ln j} = \mathrm{e}^{2j(\ln 1 + j\frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{-\pi}$

4.104. Példa $j^{1+j} = \mathrm{e}^{(1+j)\ln j} = \mathrm{e}^{(1+j)\,j\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} = j\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

4.105. Példa

$$\begin{aligned}(1+j)^{1-j} &= \mathrm{e}^{(1-j)\ln(1+j)} = \mathrm{e}^{(1-j)(\ln\sqrt{2}+j\frac{\pi}{4})} = \\ &= \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\big)+j\sin\big(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\big)\Big)\end{aligned}$$

4.6. Komplex vonalintegrál

Bár a komplex vonalintegrál 4.111. definíciója formálisan hasonlít a valós függvények Riemann-integráljára, a komplex vonalintegrál tulajdonságai lényegesen különböznek a valós Riemann-integrál tulajdonságaitól.

4.6.1. Alapvető definíciók, tulajdonságok

Megállapodások

T-vel tartományt jelölünk (mely a 4.34. definíció értelmében összefüggő, nyílt ponthalmaz)
L, G: a komplex sík egy irányított, rektifikálható görbeszakasza

4.106. Definíció (Jordan-görbe) *A* $\gamma(t) = x(t) + jy(t);\quad \alpha \le t \le \beta$ *síkbeli ponthalmaz* Jordan-görbe *(többszörös pont nélküli görbe), ha*

1. $\gamma(t)$ *folytonos* $t \in [\alpha, \beta]$*-n,*
2. $\gamma(t)$ *kölcsönösen egyértelműen képezi le az* $[\alpha, \beta]$ *bármely nyílt részintervallumát a komplex sík egy ponthalmazára (tehát* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *akkor és csak akkor, ha* $t_1 = t_2$*).*

A Jordan-görbe zárt*, ha* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$*, egyébként* nyílt.

4.107. Definíció (Sima Jordan-görbe) *Egy Jordan-görbe* sima Jordan-görbe*, ha érintője folytonosan változik, azaz* $x, y \in C^1_{[\alpha,\beta]}$.

4.108. Definíció (Szakaszonként sima görbe) *Véges sok sima görbe folytonos csatlakozással.*

A szakaszonként sima görbe mérhető ívhosszúságú:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \, \mathrm{d}t.$$

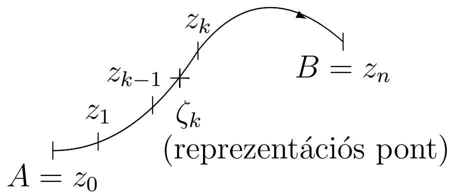
4.109. Definíció (Egyszerű görbe) *Szakaszonként sima, irányított Jordan-görbe. Lehet zárt és nyílt. Jelölése: $L \subset \mathbb{C}$ egyszerű.*

4.110. Megjegyzés *Bár a fenti definíciókban a görbe paraméterezésére történik hivatkozás, maga a* görbe *egy paraméterezés nélküli puszta ponthalmaz $\mathbb{C}$-ben. Ugyanaz a görbe többféle paraméterezéssel is megadható.*

A komplex vonalintegrál definíciója

A valós esethez hasonlóan az integrált most is véges felosztáshoz tartozó integrálközelítő-összegek határértékeként definiáljuk, azonban most nem egy valós intervallumot, hanem egy egyszerű görbét osztunk fel.

Legyen $L \subset \mathbb{C}$ egyszerű görbe, f az L görbén értelmezett függvény, melyre $|f(z)|$ korlátos L-en.



Jelölje $F_n = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ az L egy *véges felosztását* (a befutás sorrendjében), és legyen ΔF_n az F_n a *felosztás finomsága*, azaz a szomszédos osztópontokat összekötő görbeszakaszok ívhosszainak a maximuma! Jelöljük ki még a $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ *reprezentációs pontokat* az F_n felosztás osztópontjai közti görbeszakaszokon!

4.111. Definíció (Komplex vonalintegrál) *Az f függvény* komplex vonalintegrálja *az L görbe mentén:*

$$\int_L f(z) \, \mathrm{d}z = \lim_{\Delta F_n \to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})}_{\textit{integrálközelítő-összeg}} \in \mathbb{C}$$

Jelölés: $\int_L f(z) \, \mathrm{d}z$; $\oint_L f(z) \, \mathrm{d}z$ *(zárt görbénél).*

Elégséges feltétel az integrál létezésére például f folytonossága.

4.112. Lemma *Konstans függvény bármely zárt görbére vett körintegrálja zérus, azaz*

$$\oint c\,\mathrm{d}z = 0\,, \qquad\qquad c \in \mathbb{C}.$$

Bizonyítás. Minden integrálközelítő-összegre:

$$\sum_{k=1}^{n} c\,(z_k - z_{k-1}) = c\,((z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_n - z_{n-1})) =$$

$$= c(z_n - z_0) = 0.$$

(Felhasználtuk, hogy a görbe zártsága miatt $z_n = z_0$.) □

A komplex vonalintegrál néhány tulajdonsága

4.113. Lemma *Legyen L, L_1, L_2 egyszerű görbe, f és g integrálható L, L_1, L_2-n. Ekkor*

a) $$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-L} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (-L:\ \ L \textit{ ellentétes irányítással})$$

b) $$\int_L c\,f(z)\,\mathrm{d}z = c\int_L f(z)\,\mathrm{d}z$$

c) $$\int_L (f(z) + g(z))\,\mathrm{d}z = \int_L f(z)\,\mathrm{d}z + \int_L g(z)\,\mathrm{d}z$$

d) $$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

e) $$\left|\int_L f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le M \cdot s\,, \qquad L\textit{-en } |f(z)| \le M,\ \textit{ és } s \textit{ az } L \textit{ görbe ívhossza}$$

Bizonyítás. Az összefüggések közvetlenül következnek a komplex vonalintegrál 4.111. definíciójából. □

4.6.2. Az integrál kiszámítása

4.114. Tétel *Legyen az L görbe paraméteres alakja:*

$$L:\ z(t) = x(t) + j\,y(t) \quad \textit{vagy} \quad z(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{j\varphi(t)}, \qquad z \in C^1_{[\alpha,\beta]},$$

és legyen f folytonos L-en. Ekkor

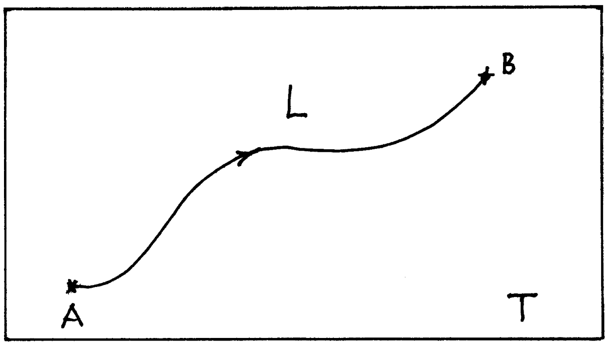
$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.115. Tétel (Newton–Leibniz-formula általánosítása) *Ha f-nek létezik F primitív függvénye egy olyan T tartományon, melyre $L \subset T$, azaz*

$$\exists T \text{ és } \exists F, \text{ hogy } \forall z \in T \text{ esetén } F'(z) = f(z),$$

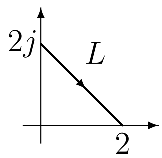
akkor

$$\int\limits_{\substack{L \\ \overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A).$$



4.116. Megjegyzés *Az első, paraméterezésen alapuló módszer általános, minden esetben használható komplex vonalintegrálok kiszámítására, azonban nehézkes. A második, Newton–Leibniz formulán alapuló módszer egyszerű, azonban csak akkor alkalmazható, ha létezik primitív függvény. Adott feladatban mérlegelnünk kell, hogy melyik módszert alkalmazzuk.*

4.117. Példa *Legyen L a következő görbe:*



Határozzuk meg a következő integrálokat!

a) $\displaystyle\int\limits_L \mathrm{e}^{jz}\,\mathrm{d}z = ?$ *b)* $\displaystyle\int\limits_L \mathrm{e}^{j\bar{z}}\,\mathrm{d}z = ?$

175 Megoldás: *a) Létezik primitív függvény, tehát a Newton–Leibniz formulával dolgozunk.*

$$\int\limits_L \mathrm{e}^{jz}\,\mathrm{d}z = \left.\frac{\mathrm{e}^{jz}}{j}\right|_{2j}^{2} = -j\left(\mathrm{e}^{2j} - \mathrm{e}^{-2}\right)$$

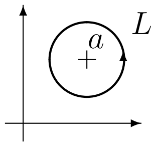
b) Most nem létezik primitív függvény, tehát a görbe paraméterezésével dolgozunk.

$$x+y=2 \quad\Longrightarrow\quad z(t)=t+j(2-t) \quad t\in[0,2], \qquad \dot{z}(t)=1-j$$

$$f(z(t))=\mathrm{e}^{j(t-j(2-t))}=\mathrm{e}^{2-t+jt}=\mathrm{e}^{2}\mathrm{e}^{(-1+j)t}$$
$$f(z(t))\cdot\dot{z}(t)=(1-j)\mathrm{e}^{2}\,\mathrm{e}^{(-1+j)t}$$

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^2 f(z(t))\cdot\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 (1-j)\mathrm{e}^{2}\,\mathrm{e}^{(-1+j)t}\,\mathrm{d}t=$$
$$=(1-j)\mathrm{e}^{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{(-1+j)t}\,\mathrm{d}t=(1-j)\mathrm{e}^{2}\left.\frac{\mathrm{e}^{(-1+j)t}}{-1+j}\right|_0^2=-\mathrm{e}^{2}\left(\mathrm{e}^{-2+j2}-1\right)$$

4.118. Példa *Legyen L az $a\in\mathbb{C}$ középpontú, r sugarú kör:*



Mutassuk meg, hogy egész n esetén

$$\oint_L (z-a)^n\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \text{ha } n\neq -1\\ 2\pi j, & \text{ha } n=-1\end{cases}$$

176 Megoldás: *A kört a következőképpen paraméterezzük:*

$$z(t)=a+r\mathrm{e}^{jt}\ \ (=(a_1+r\cos t)+j(a_2+r\sin t))\,; \qquad \dot{z}(t)=jr\,\mathrm{e}^{jt}.$$

Ha $n=-1$, akkor a Newton–Leibniz formula (közvetlenül) nem alkalmazható, mert az $\ln(z-a)$ *függvény a 4.94. lemma értelmében az L görbe* egyetlen *pontjában nem reguláris. Paraméterezéssel számolunk:*

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+r\mathrm{e}^{jt}-a}\,jr\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} j\,\mathrm{d}t=2\pi j.$$

Ha $n\neq -1$ $(n\in\mathbb{Z})$, akkor is számolhatunk paraméterezéssel:

$$\oint_L (z-a)^n\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi} r^n\,\mathrm{e}^{jnt}\,jr\,\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{d}t=$$
$$=jr^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{j(n+1)t}\,\mathrm{d}t=jr^{n+1}\left.\frac{\mathrm{e}^{j(n+1)t}}{j(n+1)}\right|_0^{2\pi}=0.$$

De most a Newton–Leibniz formula is célra vezet:

$$\oint_L (z-a)^n \,\mathrm{d}z = \left[\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=z_0}^{z_0} = 0.$$

(A zárt görbe kezdő és egyben végpontja is z_0.)

4.6.3. Cauchy-féle alaptétel

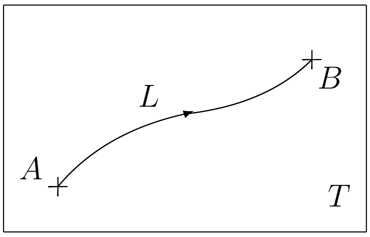
4.119. Tétel (Cauchy-féle alaptétel) *Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor minden T-beli egyszerű zárt görbére:*

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(A tétel Cauchy–Goursat néven is ismert.)

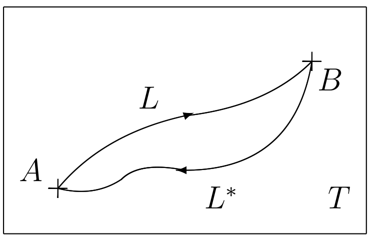
A Cauchy-féle alaptétel következményei

4.120. Tétel *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, f reguláris függvény T-n, $A, B \in T$ két pont, és $L \subset T$ egyszerű görbe A és B között.*



Ekkor az $\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z$ integrál értéke független L-től, értéke csak az A és B végpontoktól függ.

Bizonyítás. Legyen L^* egy B-től A-ig haladó egyszerű görbe a T tartományban.



A Cauchy-féle alaptételt alkalmazva az $L \cup L^*$ zárt görbére:

$$\int\limits_{L_{\overset{\frown}{AB}} \cup L^*_{\overset{\frown}{BA}}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{L_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{L^*_{\overset{\frown}{BA}}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{L_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{L^*_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{L_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{L^*_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

4.121. Tétel *Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor létezik primitív függvénye.*

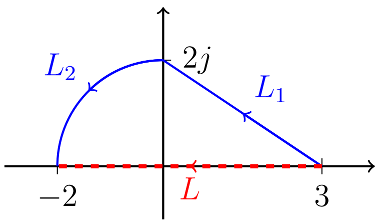
Bizonyítás ötlet. A tételt nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy a primitív függvényt az

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

formula adja meg, ahol az integrálás tetszőleges T-beli $L_{\overset{\frown}{z_0 z}}$ egyszerű görbére végezhető. □

4.122. Példa *Határozzuk meg az alábbi integrál értékét az ábrán látható $L_1 \cup L_2$ görbén!*

$$I = \int\limits_{L_1 \cup L_2} \frac{z-1}{e^{2z}}\,\mathrm{d}z = ?$$



177 Megoldás: *Az integrálandó $f(z) = \frac{z-1}{e^{2z}}$ függvény mindenütt reguláris (a nevező sehol sem nulla), ezért a 4.120. tétel értelmében az integrál független az úttól. Tehát az $L_1 \cup L_2$ görbe helyett integrálhatunk a kezdő és végpontot közvetlenül összekötő L egyenes szakasz mentén is. Az L görbe paraméterezése: $z(x) = x$, $\dot{z}(x) = 1$, így*

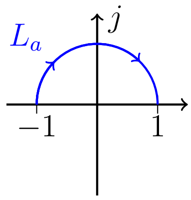
$$I = \int\limits_{L_1 \cup L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{x=3}^{-2} (x-1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \quad \textit{(parciálisan integrálunk)}$$

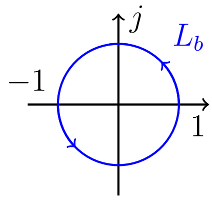
$$= \left[(x-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_3^{-2} + \int_{x=3}^{-2} \frac{e^{-2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3e^4}{2} + e^{-6} - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_3^{-2} = \frac{5}{4}(e^4 + e^{-6}).$$

4.123. Példa *Határozzuk meg az*

$$I(L) = \int_L \left(|z|^2 - z^2 \right) \mathrm{d}z$$

integrál értékét, ha az integrálási görbe:

a) 

b) 

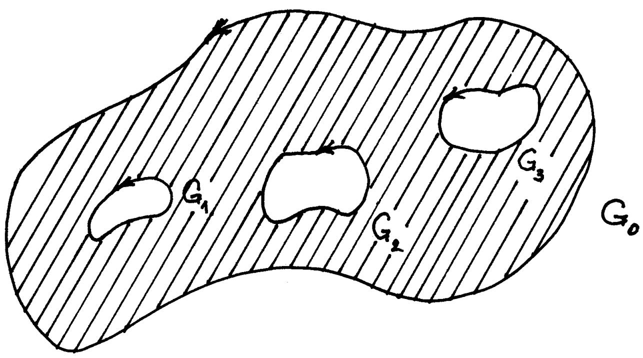
178 Megoldás: *a) Az integrált két tagra bontjuk, az elsőt paraméterezéssel, a másodikat a Newton–Leibniz formulával számoljuk ki. A paraméter a* $z \in L_a$ *pont* $\varphi = \operatorname{arc} z$ *szöge (argumentuma), tehát* $z(\varphi) = e^{j\varphi}$, *(ahol* $\varphi = \pi ... 0$*),* $\dot{z}(\varphi) = je^{j\varphi}$, *így*

$$I(L_a) = \int\limits_{\varphi=\pi}^{0} \underbrace{\left| e^{j\varphi} \right|^2}_{1} \cdot je^{j\varphi} \, \mathrm{d}\varphi - \int_{L_a} z^2 \, \mathrm{d}z = \left[e^{j\varphi} \right]_{\pi}^{0} - \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) Most is két tagra bontjuk az integrált. Az első tagban kihasználjuk, hogy $z \in L_b$ *esetén* $|z|^2 = 1$. *Ezután mindkét integrálra alkalmazható a 4.119. Cauchy-féle alaptétel.*

$$I(L_b) = \oint_{L_b} |z|^2 \, \mathrm{d}z - \oint_{L_b} z^2 \, \mathrm{d}z = \oint_{L_b} 1 \, \mathrm{d}z - 0 = 0 - 0 = 0.$$

4.124. Tétel (Cauchy-tétel többszörösen összefüggő tartományon) *Legyenek* G_i*-k (*$i = 0, 1, \dots, n$*) egyszerű, zárt görbék úgy, hogy* G_0 *„körülveszi”* $G_1, \dots, G_n$*-et, legyen továbbá* f *reguláris függvény egy, a görbék közti vonalkázott zárt tartományt tartalmazó többszörösen összefüggő tartományon.*

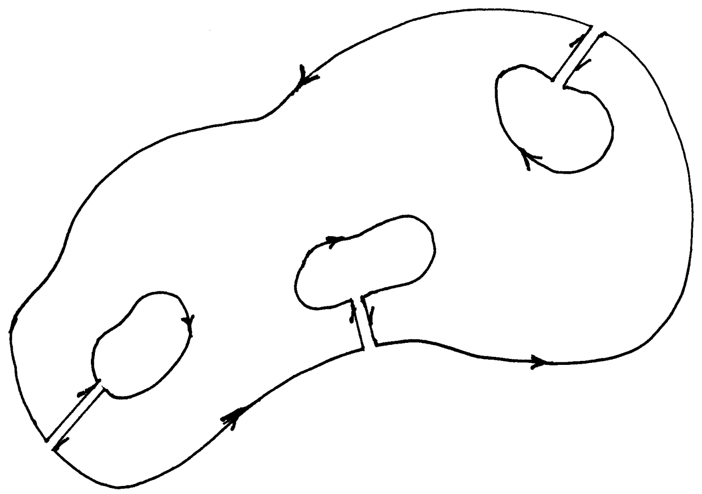


($G_0, G_1, \ldots, G_n$ azonos irányítású, egyszerű, zárt görbék.)

Ekkor

$$\oint\limits_{G_0^+} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{G_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \textit{vagyis} \qquad \oint\limits_{G_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{G_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Bizonyítás vázlat. A bizonyítás alapötlete a Cauchy-féle alaptétel (4.119. tétel) alkalmazása az ábrán látható L görbére.



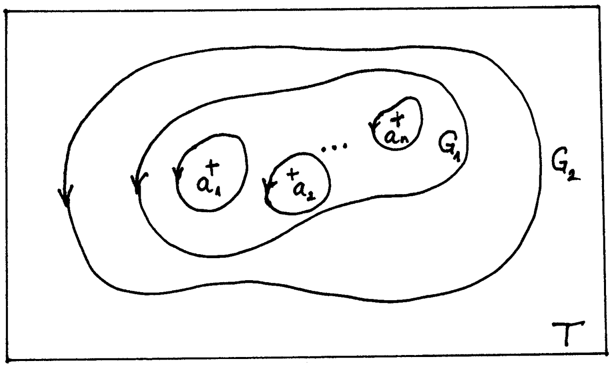
Az L görbe pozitív irányítással végigjárja G_0-t, negatív irányítással végigjárja a $G_1 \ldots G_n$ görbéket, és oda-vissza végigjárja a $G_0 - G_k$ összekötő szakaszokat. Képzeljük úgy, hogy ez utóbbi szakaszokat *kicsit* eltávolítjuk egymástól. Ez a vonalintegrál értékét alig befolyásolja, de lehetővé teszi, hogy L-et befoglaljuk egy *egyszeresen összefüggő* tartományba, melyen f reguláris. (Az előző ábrán besatírozott, többszörösen összefüggő tartományt „felvágtuk" n helyen, így egyszeresen összefüggő lett.) Erre az L görbére alkalmazható a Cauchy-féle alaptétel. Mivel a görbék közti szakaszokat oda-vissza bejárjuk, az itteni vonalintegrálok kiejtik egymást. Tehát:

$$\int\limits_{L} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{G_0^+} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{G_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

4.125. Megjegyzés *A Cauchy-alaptétel akkor is igaz, ha L olyan zárt görbe, amely véges sok egyszerű görbe egyesítése.*

4.126. Tétel *Legyen f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pontok (izolált szingularitások) kivételével. Legyen továbbá $G_1, G_2 \subset T$ két azonos irányítású, egyszerű, zárt görbe, mely „körülveszi" az $a_1, \ldots, a_n$ pontokat.*



Ekkor, az adott feltételek mellett:

$$\oint_{G_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{G_2} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \underbrace{\left(= \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z \right)}_{a\ bizonyításhoz}.$$

Bizonyítás. Az előző tételt alkalmazzuk a G_1 illetve G_2 és a szinguláris pontokat egyesével körülvevő $L_1 \dots L_n$ görbékre. □

4.127. Példa *Határozzuk meg az*

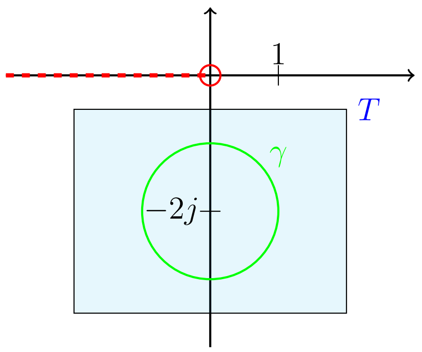
$$I = \oint_{|z+2j|=1} \left(e^{jz^2+3} + \ln 3z\right) \mathrm{d}z$$

körintegrál értékét! (A kört egyszer járjuk be pozitív irányban.)

179 Megoldás: *Az integrált két részre bontjuk. Mindkét tag a Cauchy-féle alaptétel (4.119. tétel) értelmében zérus. Az első integrálban szereplő függvény mindenütt reguláris, tehát körintegrálja nulla.*

$$I = \underbrace{\oint_{|z+2j|=1} \overbrace{e^{jz^2+3}}^{\text{reguláris } \mathbb{C}\text{-n}} \mathrm{d}z}_{=0} + \underbrace{\oint_{|z+2j|=1} \overbrace{\ln 3z}^{\text{reguláris } T\text{-n}} \mathrm{d}z}_{=0} = 0$$

A második tagban szereplő logaritmus függvény az origóban és a negatív valós tengelyen nem reguláris (4.94. lemma), de ezek a pontok nem esnek a γ integrálási görbén belülre, így az ábrán látható módon választható egy T egyszeresen összefüggő tartomány, melyre alkalmazható a Cauchy-alaptétel.



4.128. Példa *Határozzuk meg az*

$$I = \oint\limits_{|z|=2} \left(\frac{1}{\bar{z}} + z \cos z \right) \mathrm{d}z$$

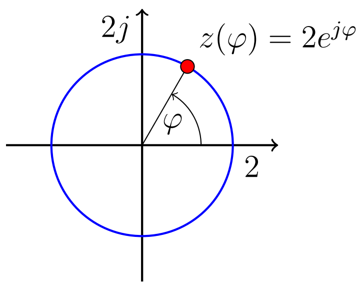
körintegrál értékét! (A kört egyszer járjuk be pozitív irányban.)

180 Megoldás: *A két tagot külön integráljuk:*

$$I = \underbrace{\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{\bar{z}} \,\mathrm{d}z}_{I_1} + \underbrace{\oint\limits_{|z|=2} z \cos z \,\mathrm{d}z}_{I_2} .$$

A 4.119. Cauchy-féle alaptétel értelmében a második integrál $I_2 = 0$, hiszen az integrandus mindenütt reguláris függvény.

Az első integrált a $|z| = 2$ görbe paraméterezésével számoljuk ki. A φ paraméter legyen a görbén levő z pont szöge. Ekkor:

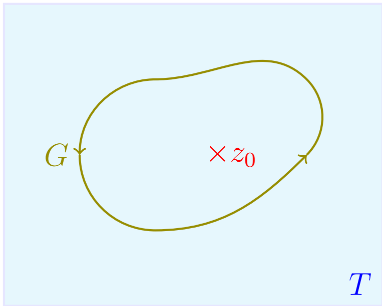


$$z(\varphi) = 2e^{j\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$
$$\dot{z}(\varphi) = 2je^{j\varphi},$$
$$\frac{1}{\bar{z}(\varphi)} = \frac{1}{2e^{-j\varphi}} = \frac{e^{j\varphi}}{2},$$

tehát

$$I_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\bar{z}(\varphi)} \dot{z}(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{e^{j\varphi}}{2} \cdot 2je^{j\varphi} \,\mathrm{d}\varphi = j \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{2j\varphi} \,\mathrm{d}\varphi = j \left. \frac{e^{2j\varphi}}{2j} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Az integrál eredménye így $I = I_1 + I_2 = 0$.



4.7. ábra. A T egyszeresen összefüggő tartományban a G görbe egyszer járja körbe pozitív irányban a $z_0 \in T$ pontot.

4.129. Tétel *Legyen f a z_0 pont kivételével reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, és tegyük fel, hogy létezik $\dot{K}_{\delta_0}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - z_0| < \delta_0\} \subset T$ környezet, melyben f korlátos. Legyen továbbá $G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, mely „körülveszi" z_0-t (4.7 ábra). Ekkor*

$$\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

(Megjegyezzük, hogy itt mindegy, hogy G hányszor és milyen irányban járja körbe z_0-t.)

Bizonyítás.

$$\left|\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot \underbrace{2\delta\pi}_{s} < \varepsilon, \qquad \text{ha} \;\; \delta < \frac{\varepsilon}{2M\pi}$$

Itt K a z_0 középpontú, $\delta < \delta_0$ sugarú kör. Mivel ε tetszőlegesen kicsiny pozitív szám lehet, ezért:

$$\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

4.6.4. Cauchy-féle integrálformulák

Egyszeresen összefüggő tartományon reguláris függvény előállítható egy körintegrál segítségével.

4.130. Tétel (Cauchy-féle integrálformula) *Legyen f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, $G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, mely „egyszer futja körbe" a $z_0 \in T$*

pontot pozitív körüljárással (4.7 ábra). Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z. \tag{4.5}$$

Bizonyítás.

$$\oint_G \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_G \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_G \underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{\Phi(z)}\,\mathrm{d}z + \oint_G \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z =$$

$$= f(z_0) \oint_G \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0)\cdot 2\pi j$$

Felhasználtuk, hogy a $\Phi(z)$ differenciahányados a z_0 környezetében korlátos, hiszen létezik az $f'(z_0)$ derivált, és z_0 kivételével reguláris, ezért a 4.129. tétel miatt

$$\oint_G \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

4.131. Megjegyzés *A tételben szereplő (4.5) egyenlőséget két irányban is olvashatjuk. Egyrészt, balról jobbra olvasva azt kapjuk, hogy az f reguláris függvény z_0-ben felvett értékét meghatározzák a G görbe mentén felvett értékei, hiszen az egyenlőség jobb oldalán szereplő vonalintegrál csak ezektől függ. Ez egyben azt is mutatja, hogy a* regularitás *borzasztó erős megszorítás egy komplex függvényre nézve.*

Az egyenlőséget jobbról balra olvasva lehetőség nyílik a jobb oldalon álló komplex körintegrálnak a nagyon egyszerű kiszámolására.

A következő tétel egy reguláris függvény magasabb deriváltjainak adja meg integrál előállítását. A tétel feltételei megegyeznek az előző tételével.

4.132. Tétel (Általánosított Cauchy-féle integrálformula) *Legyen f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon; $z_0 \in T$, $G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, mely „egyszer futja körbe" pozitív körüljárással a z_0 pontot (4.7 ábra). Ekkor f a z_0-ban akárhányszor deriválható függvény, és*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Útmutatás. A bizonyításhoz az első Cauchy-féle integrálformulát ((4.5) egyenletet) kell z_0-szerint deriválni n-szer, és ki kell használni, hogy a z_0-szerinti differenciálás és a z szerinti integrálás sorrendje felcserélhető. □

4.133. Következmény *Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor ott akárhányszor differenciálható.*

4.134. Megjegyzés *A (4.6) egyenletet is két irányban olvashatjuk. Egyrészt, az f reguláris függvénynek az integrálási görbén felvett értékei a görbén belüli pontokban meghatározzák f összes deriváltját, másrészt, az egyenlet segítségével egyszerűen számolhatunk ki komplex körintegrálokat.*

4.135. Példa *Határozzuk meg a következő körintegrál értékét!*

$$I = \oint\limits_{|z-2|=1} \left(\frac{\operatorname{sh} jz}{z-2} + \frac{\operatorname{ch} jz}{(z-2)^2} \right) \mathrm{d}z = ?$$

181 Megoldás: *A két tagot külön integráljuk. Az első tag számlálója mindenütt reguláris, így ott alkalmazható a (4.5) formula, $z_0 = 2$ helyettesítéssel:*

$$I_1 = \oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\operatorname{sh} jz}{z-2} \mathrm{d}z = 2\pi j \operatorname{sh}(2j) = -2\pi \sin 2.$$

A második tagban a (4.6) egyenlet alkalmazható, $n = 1$ és $z_0 = 2$ mellett:

$$I_2 = \oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\operatorname{ch} jz}{(z-2)^2} \mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{1!} (\operatorname{ch} jz)'\big|_{z=2} = 2\pi j^2 \operatorname{sh}(2j) = -2\pi j \sin 2.$$

Tehát az integrál értéke: $I = I_1 + I_2 = -2\pi(1+j)\sin 2$.

4.136. Példa *Határozzuk meg az*

$$\oint_L \underbrace{\frac{e^{2z+1}}{z^2+\pi^2}}_{g(z)} \mathrm{d}z = ?$$

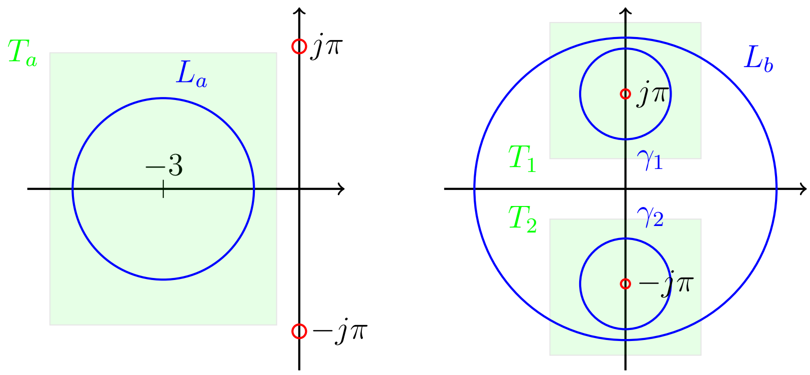
körintegrál értékét a következő zárt görbékre:

$$a) \quad L_a: \ |z+3| = 2, \qquad\qquad b) \quad L_b: \ |z| = 5.$$

182 Megoldás: *Jelöljük az integrálandó függvényt g-vel. A g számlálója és nevezője is mindenütt reguláris, tehát a tört csak a nevező zérushelyein szinguláris. A nevező szorzat alakja és zérushelyei:*

$$z^2 + \pi^2 = (z - j\pi)(z + j\pi), \qquad z_1 = j\pi, \quad z_2 = -j\pi.$$

Az integrálási kontúrok és a szinguláris pontok:



a) *b)*

a) A z_1, z_2 szinguláris pontok az L_a körön kívül esnek, tehát az ábrán T_a-val jelölt tartományon g reguláris, így a Cauchy-alaptétel (4.119. tétel) értelmében $\oint_{L_a} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

b) Most a z_1 és a z_2 pont is az L_b görbén belül esik. A 4.126. tétel értelmében először az integrálási útvonalat változtatjuk meg úgy, hogy a γ_1, γ_2 görbék már csak egy-egy szinguláris pontot futnak körbe:

$$\oint_{L_b} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} g(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Mindkét integrált alkalmas átalakítás után a (4.5) Cauchy-féle integrál formulával számoljuk ki:

$$I_1 = \oint_{\gamma_1} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} \frac{\overbrace{\left(\dfrac{e^{2z+1}}{z+j\pi}\right)}^{\text{reguláris } T_1\text{-en}}}{z-j\pi}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\, \left.\frac{e^{2z+1}}{z+j\pi}\right|_{z=j\pi} = 2\pi j \frac{e^{2\pi j+1}}{2\pi j} = e,$$

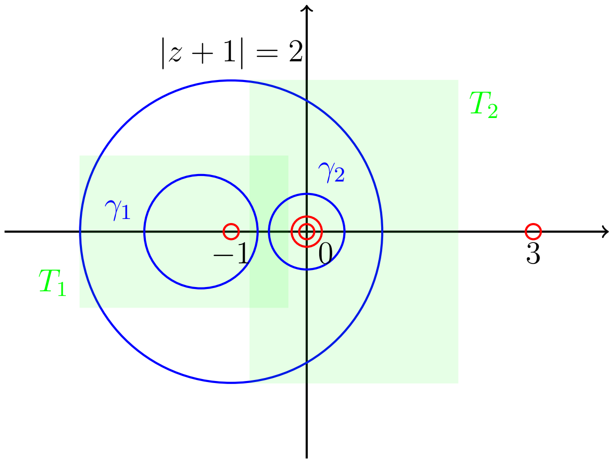
$$I_2 = \oint_{\gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} \frac{\overbrace{\left(\dfrac{e^{2z+1}}{z-j\pi}\right)}^{\text{reguláris } T_2\text{-n}}}{z+j\pi}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\, \left.\frac{e^{2z+1}}{z-j\pi}\right|_{z=-j\pi} = 2\pi j \frac{e^{-2\pi j+1}}{-2\pi j} = -e.$$

Látható, hogy a „trükk" mindkét esetben az volt, hogy a γ görbén belüli szingularitáshoz tartozó gyöktényezőt a nevezőben hagytuk, a többi gyöktényezőt pedig „hozzácsaptuk" a számlálóhoz. Az integrál értéke: $\oint_{L_b} g(z)\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2 = 0$.

4.137. Példa *Határozzuk meg a következő körintegrál értékét!*

$$I = \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin jz}{z^2(z+1)(z-3)}\,\mathrm{d}z = ?$$

183 Megoldás: *Először azt vizsgáljuk meg, hogy az integrandus hol nem reguláris, és a szinguláris pontok közül melyek esnek az integrálási görbén belül. Külön a számláló és a nevező mindenhol reguláris, tehát csak a nevező zérushelyeinél szinguláris az integrálandó függvény. Ezek: $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ (kétszeres) és $z_3 = 3$. Látható, hogy az integrálási kontúr ezek közül csak z_1-et és z_2-t fogja körbe.*



A 4.126. tétel felhasználásával a $|z+1| = 2$ körre való integrálásról áttérünk a γ_1 és γ_2 görbékre való integrálásra, amelyek már csak egy-egy szinguláris pontot futnak körbe. Az első esetben a (4.5) Cauchy-féle integrálformulát alkalmazzuk $z_0 = -1$ mellett, a második esetben pedig a (4.6) általánosított Cauchy-féle integrálformulát alkalmazzuk $z_0 = 0$, $n = 1$ mellett:

$$I = \oint_{\gamma_1} \frac{\overbrace{\left(\frac{\sin jz}{z^2(z-3)}\right)}^{\textit{reguláris } T_1\textit{-en}}}{z+1}\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2} \frac{\overbrace{\left(\frac{\sin jz}{(z+1)(z-3)}\right)}^{\textit{reguláris } T_2\textit{-n}}}{z^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi j \left.\frac{\sin jz}{z^2(z-3)}\right|_{z=-1} + \frac{2\pi j}{1!}\left.\left(\frac{\sin jz}{(z+1)(z-3)}\right)'\right|_{z=0} =$$

$$= 2\pi j \frac{\sin(-j)}{-4} + 2\pi j \left.\frac{j\cos jz\cdot(z+1)(z-3) - \sin jz\cdot(2z-2)}{(z+1)^2(z-3)^2}\right|_{z=0} =$$

$$= -\frac{\pi\,\mathrm{sh}\,1}{2} + \frac{6\pi}{9} = \pi\Big(-\frac{\mathrm{sh}\,1}{2} + \frac{2}{3}\Big).$$

4.7. Komplex hatványsor (általánosított hatványsor)

4.7.1. Pozitív kitevőjű hatványok végtelen összege

4.138. Tétel *A $z_0 \in \mathbb{C}$ középpontú, $a_k \in \mathbb{C}$ együtthatókkal felírt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

hatványsor konvergens, ha $|z - z_0| < R$, és divergens, ha $|z - z_0| > R$, ahol

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad \text{illetve} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

($|z - z_0| = R$ esetén konvergencia, divergencia is lehetséges. $R = \infty$ esetén a sor minden $z \in \mathbb{C}$-ben konvergens, $R = 0$ esetén a sor csak $z = z_0$-ban konvergens.)

Bizonyítás. A bizonyítás a valós esethez hasonlóan végezhető el. □

4.139. Példa *Határozzuk meg a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2j}{2-j}\right)^n$ *sor konvergenciatartományát!*

184 Megoldás: *Geometriai sorról van szó, mely pontosan akkor konvergens, ha a hányados abszolútértéke kisebb, mint egy.*

$$|q| = \left|\frac{z+2j}{2-j}\right| = \frac{|z+2j|}{\sqrt{5}} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z+2j| < \sqrt{5}$$

Tehát a $z_0 = -2j$ pont $\sqrt{5}$ sugarú környezetében konvergens a sor.

4.7.2. Negatív kitevőjű hatványok végtelen összege

4.140. Tétel *A $z_0 \in \mathbb{C}$ középpontú, $b_k = c_{-k} \in \mathbb{C}$ együtthatókkal felírt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \, \frac{1}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \, (z - z_0)^{-k}$$

negatív kitevőjű hatványsor konvergens, ha $|z - z_0| > r$, divergens, ha $|z - z_0| < r$, ahol

$$r = \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|b_n|}, \qquad \text{illetve} \qquad r = \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}.$$

($|z - z_0| = r$ esetén konvergencia és divergencia is lehetséges. $r = 0$ esetén a sor z_0 kivételével minden pontban konvergens; $r = \infty$ esetén pedig a sor mindenütt divergens.)

Bizonyítás. A konvergencia vizsgálatot $u = \frac{1}{z-z_0}$ helyettesítéssel visszavezetjük az előző esetre:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\, u^k \ \text{ konvergens, ha } |u| < R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < R$$

$$\Longrightarrow \quad r := \frac{1}{R} < |z - z_0|\,.$$

Tehát most a konvergencia tartomány egy kör (r sugarú) külseje, a belső pontokban divergencia van, a körvonal pontjai kérdésesek. (Az R sugarat itt is a valósból ismert képlettel számolhatjuk.) □

4.7.3. Általánosított komplex hatványsor

4.141. Definíció (Általánosított komplex hatványsor) *A $z_0 \in \mathbb{C}$ középpontú, $c_k \in \mathbb{C}$ együtthatójú ($k \in \mathbb{Z}$)* általánosított komplex hatványsor *a*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k =$$

$$= \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1\,(z-z_0) + c_2\,(z-z_0)^2 + \ldots$$

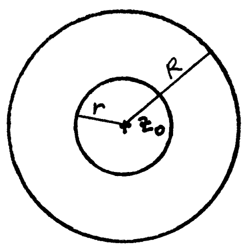
formulával definiált végtelen összeg.

Az általánosított hatványsort felfoghatjuk úgy is, mint egy pozitív és egy negatív kitevős sor összegét:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\frac{1}{(z-z_0)^k}.$$

Az általánosított hatványsor konvergencia tartománya az előző típusú konvergencia tartományok közös része, tehát a konvergencia tartomány belseje egy z_0 középpontú G nyílt körgyűrű:

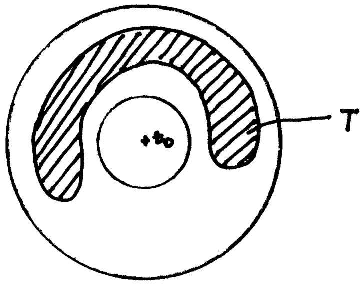
$$\begin{aligned} G_{z_0,r,R} &= \{z:\ r < |z-z_0| < R\}, \text{ ahol} \\ r &= \text{a belső kör sugara,} \\ R &= \text{a külső kör sugara.} \end{aligned}$$



A gyűrű határpontjaiban a konvergencia kérdéses.
Speciális esetek: $K_{z_0,R}$, $\dot{K}_{z_0,R}$, $\mathbb{C}$, $\emptyset$

Az általánosított hatványsor tulajdonságai

4.142. Tétel *A* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ *általánosított komplex hatványsor* egyenletesen konvergens *bármely korlátos, zárt* T *halmazon, mely a konvergenciatartomány belsejében található. (*$T \subset G_{z_0,r,R}$*, ahol* $G_{z_0,r,R}$ *az* r *és* R *sugár közti nyílt gyűrű.)*



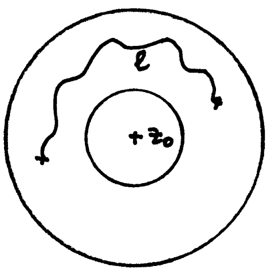
4.143. Tétel *Ha* $z \in G_{z_0,r,R}$ *nyílt gyűrűnek, akkor* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ folytonos z*-ben.*

4.144. Tétel *Ha* $z \in G_{z_0,r,R}$ *nyílt gyűrűnek, akkor* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ akárhányszor differenciálható z*-ben (azaz reguláris* z*-ben) és az összegfüggvény deriváltját tagonkénti deriválással kaphatjuk meg.*

4.145. Tétel *Ha* L *egyszerű görbe,* $L \subset G_{z_0,r,R}$*, akkor*

$$\int_L \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k\,\mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_L (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z,$$

azaz tagonként szabad integrálni.

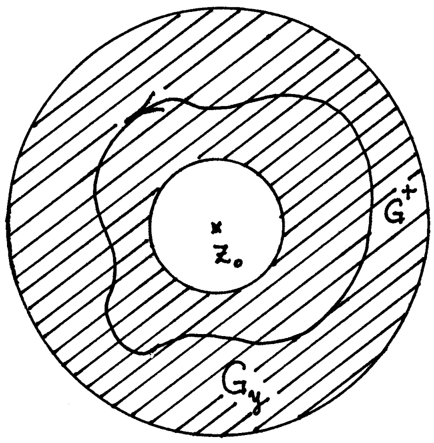


Kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és az együtthatók között

4.146. Tétel *Tekintsük az*

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

hatványsort, és egy $G^+ \subset Gy$ *zárt görbét, mely a* z_0 *pontot egyszer kerüli meg pozitív körüljárással, és a konvergencia tartomány belsejében (a* G *nyílt gyűrűben) halad.*



Ekkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Bizonyítás vázlat. Felhasználjuk, hogy $\oint_G \ldots = \oint_{K_{z_0,\varrho}} \ldots$, ha $r < \varrho < R$ (lásd 4.124.. tétel), és mivel a konvergencia egyenletes (4.142.. tétel), tagonként integrálhatunk (4.145.. tétel).

1.

$$\oint_K f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\oint_K (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z}_{= \begin{cases} 2\pi j, & \text{ha } n = -1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}} = c_{-1} \cdot 2\pi j$$

Tehát $n = -1$- re igaz az állítás.

2. Osszuk el a sort a $(z - z_0)$ kifejezéssel:

$$\oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = c_0 \cdot 2\pi j + 0 + \cdots$$

Tehát $n = 0$- ra is igaz.

3. Osszuk el például a $(z - z_0)^{-1}$ hatvánnyal:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1}} = f(z) \cdot (z - z_0) = \cdots + c_{-2} \frac{1}{z - z_0} + c_{-1} + c_0 (z - z_0) + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \oint\limits_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1}}\,\mathrm{d}z = c_{-2}\cdot 2\pi j$$

Tehát $n=-2$- re is igaz.
Ehhez hasonlóan igazolható az állítás tetszőleges $n\in\mathbb{Z}$-re. $\square$

4.147. Definíció (Reziduum) *Legyen f reguláris a z_0 egy $\dot{K}(z_0)$ pontozott környezetében. Ekkor f* reziduuma (maradványa) z_0-ban

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) := \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{G^+} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

ahol G^+ tetszőleges zárt görbe $\dot{K}(z_0)$-ban, mely egyszer pozitív irányban körbejárja z_0-t.

4.148. Megjegyzés *Az előző (4.146..-es) tétel értelmében*

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1},$$

ahol c_{-1} az f függvény z_0 körül konvergens általánosított hatványsorában a $(z-z_0)^{-1}$ tag együtthatója.

4.8. Laurent-sor

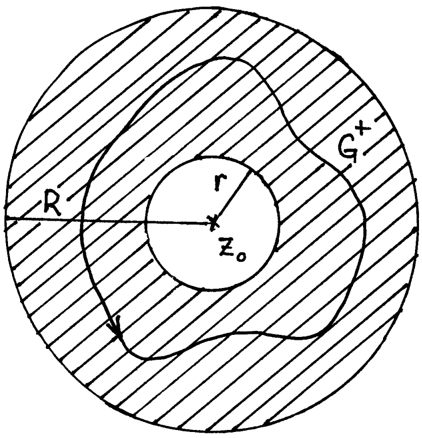
4.149. Tétel *Legyen f reguláris a $G: r<|z-z_0|<R$ gyűrűben. Ekkor*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{4.7}$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

és $G^+\subset G$ tetszőleges zárt görbe a konvergencia gyűrűben, mely egyszer járja körbe z_0-t pozitív irányban.



4.150. Definíció *Az előző tételben szereplő* (4.7) *függvénysor az f függvény G gyűrűben konvergens* Laurent-sora.

Ha f reguláris $|z - z_0| < R$-en, akkor:
$n < 0$ esetén:

$$c_n = 0, \quad \text{hiszen} \quad \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{is reguláris;}$$

$n \geq 0$ esetén:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi j} \cdot 2\pi j \, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{(Taylor-együtthatók).}$$

Tehát ekkor speciális esetként Taylor-sort kapunk.

4.151. Definíció *A H nem üres nyílt halmaz bármely pontja körül hatványsorba fejthető komplex függvények a H halmazon* analitikus függvények.

4.152. Tétel *Az f komplex függvény akkor és csak akkor analitikus egy H halmazon, ha ott reguláris.*

4.8.1. Izolált szingularitások

Elevenítsük föl a *szinguláris pont* 4.33. definícióját!

4.153. Definíció (Izolált szingularitás) *Az f függvénynek* izolált szingularitása *van z_0-ban, ha f a z_0-ban nem differenciálható, de $\exists \delta > 0$, melyre f reguláris $\dot{K}_{z_0,\delta} = K_{z_0,\delta} \setminus \{z_0\}$-ban.*

4.154. Példa *Adjuk meg az*

$$f(z) = \frac{e^{2jz^2} + 3z^5}{\sin 3z + 2}$$

komplex függvény összes izolált szingularitását!

185 Megoldás: *A tört számlálója és nevezője is az egész komplex síkon reguláris, tehát csak a nevező zérushelyeiben szinguláris (nem értelmezett) a függvény. Ez a*

$$\sin 3z + 2 = 0$$

egyenletre vezet, amit a 4.100. példában már megoldottunk.

Izolált szingularitások osztályozása

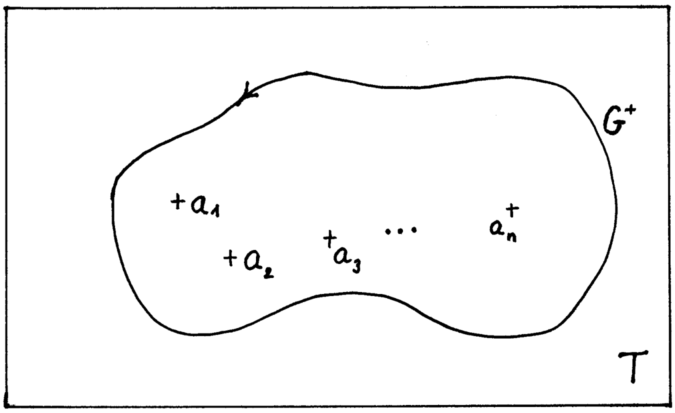
4.155. Definíció (Izolált szingularitások osztályozása) *Jelölje z_0 az izolált szinguláris pontot.*

1. Megszüntethető szingularitás*:* $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \ \ (= c_0)$
   (A z_0 közvetlen környezetében konvergens, $(z - z_0)$ hatványait tartalmazó sorban nincs negatív kitevőjű tag.)
2. Pólus*:* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$
   A pólus n-ed rendű, *ha* $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0 \ \ (= c_{-n})$
   (A Laurent-sorban véges sok negatív kitevőjű tag van.)
3. Lényeges szingularitás*:* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \nexists \quad (\nrightarrow \infty$ *sem!)*
   (A megfelelő sorban végtelen sok negatív kitevőjű tag van.)

4.8.2. Reziduum-tétel

Emlékeztetünk a *reziduum* 4.147. definíciójára.

4.156. Tétel (Reziduum) *Legyen T egyszeresen összefüggő tartomány, és f reguláris függvény T minden pontjában, kivéve az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izolált szingularitási pontokat.*

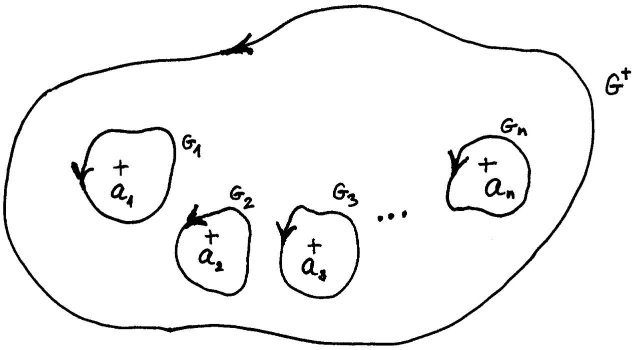


Ekkor

$$\oint_{G^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z),$$

ahol G^+ bármely olyan zárt görbe T-ben, mely egyszer kerüli meg a szingularitási pontokat pozitív irányban.

Bizonyítás. A bizonyítás közvetlenül adódik a többszörösen összefüggő tartományon érvényes Cauchy-tétel (4.124.) és a reziduum 4.147. definíciójának felhasználásával.



$$\oint_{G^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{G_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

□

4.8.3. Reziduumok meghatározása

1. Sorfejtéssel (lásd 4.148. megjegyzés).

2. Elsőrendű pólus esetén:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)\, f(z) \right).$$

3. Ha $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, ahol g és h reguláris a $z = z_0$ pont egy környezetében, $h(z_0) = 0$ és $h'(z_0) \neq 0$:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

4. Ha z_0-ban f-nek n-ed rendű pólusa van:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z - z_0)^n\, f(z) \right).$$

4.8.4. Néhány kidolgozott feladat

4.157. Példa *Legyen*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

a) Állítsuk elő a függvény $z_0 = j$ bázispontú összes Laurent-sorfejtését!

b) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2j|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = ?$

186 Megoldás: *a) Látható, hogy $f(z) = \frac{1}{z-j} \cdot \frac{1}{z+j} = \frac{1}{z-j} \cdot g(z)$, tehát a $g(z)$ függvény sorfejtését kell előállítani a megfelelő körgyűrűn, és minden tagot megszorozni $\frac{1}{z-j}$-vel.*

$$g(z) = \frac{1}{z+j} = \frac{1}{z - j + 2j}$$

α)

$$g(z) = \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{-(z-j)}{2j}} = \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-(z-j)}{2j} \right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2j} \right)^{k+1} (z-j)^k =$$

$$= \frac{1}{2j} - \frac{1}{(2j)^2}(z-j) + \frac{1}{(2j)^3}(z-j)^2 + \cdots$$

$q = -\dfrac{z-j}{2j}$

$KT.$: $|q| = \left|-\dfrac{z-j}{2j}\right| = \dfrac{|z-j|}{2} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z-j| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{z-j}\, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2j}\right)^{k+1} (z-j)^{k-1} =$$
$$= \frac{1}{2j}\,\frac{1}{z-j} - \frac{1}{(2j)^2} + \frac{1}{(2j)^3}\,(z-j) + \cdots$$

$KT.$: $0 < |z-j| < 2$

β)

$$g(z) = \frac{1}{z-j}\,\frac{1}{1-\frac{-2j}{z-j}} = \frac{1}{z-j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2j}{z-j}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-2j)^k\,\frac{1}{(z-j)^{k+1}} =$$
$$= \frac{1}{z-j} - 2j\,\frac{1}{(z-j)^2} + (2j)^2\,\frac{1}{(z-j)^3} - \cdots$$

$q = \dfrac{-2j}{z-j} \qquad KT.$: $|q| = \left|\dfrac{-2j}{z-j}\right| = \dfrac{2}{|z-j|} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z-j| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{z-j}\, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2j)^k}{(z-j)^{k+2}} = \frac{1}{(z-j)^2} - \frac{2j}{(z-j)^3} + \cdots$$

$KT.$: $|z-j| > 2$

Másik lehetőség:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-j)(z+j)} = \frac{A}{z-j} + \frac{B}{z+j} = f_1(z) + f_2(z)$$

A és B meghatározása után $f_1(z)$ sorfejtése kész, és csak $f_2(z)$ sorfejtése van hátra.

b)

$$\oint_{|z-2j|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\ \operatorname{res}_{z=j} f(z) = 2\pi j \cdot \frac{1}{2j} = \pi$$

Vigyázat! A $\operatorname{res}_{z=j} f(z)$ értéke a j pont közvetlen környezetében konvergens, $(z-j)$ hatványait tartalmazó Laurent-sor c_{-1} együtthatója, tehát az α sorból kell leolvasni!

Természetesen a Cauchy-féle integrálformula alkalmazásával is megkapható az integrál értéke.

4.158. Példa *Adjuk meg az*

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)^2\,(z+1)}$$

függvény $z_0 = 2$ bázispontú Laurent-sorfejtéseit!

187 Megoldás: *A függvény $(z-2)$ hatványait tartalmazó konvergens Laurent-sorba fejthető az*
α) $0 < |z-2| < 3$

β) $|z-2| > 3$

körgyűrűkön.

Útmutató:

$$\frac{z-1}{(z-2)^2\,(z+1)} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+1}$$

A, B, C meghatározható. Az első két tag sorfejtése önmaga, KT.: $|z-2| > 0$. Csak a harmadik tag sorfejtését kell elvégezni.

Vagy:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\,\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)^2}\,g(z).$$

Tehát a $g(z)$ függvény sorfejtését kell elvégezni, és minden tagot $\dfrac{1}{(z-2)^2}$-nel beszorozni.

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{z+1-2}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

Az első tag kész, a második tagot kell sorba fejteni:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)+3} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{1-\frac{-(z-2)}{3}} = \cdots & \qquad q = -\dfrac{z-2}{3} \\[3ex] \dfrac{1}{z-2}\,\dfrac{1}{1-\frac{-3}{z-2}} = \cdots & \qquad q = -\dfrac{3}{z-2} \end{cases}$$

4.159. Példa *Állapítsuk meg a szingularitás jellegét és a reziduumot a szinguláris pontban!*

a) $\qquad f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}},$

b) $\qquad g(z) = \dfrac{1}{z^2}\,\mathrm{e}^z.$

188 Megoldás: *Felhasználjuk, hogy*

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \qquad \forall u \in \mathbb{C}.$$

a)

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\, z^4} + \cdots + \frac{1}{n!\, z^{2n}} + \cdots \qquad |z| > 0$$

Tehát $\operatorname{res}_{z=0} \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}} = c_{-1} = 0$*, és* 0*-ban lényeges szingularitása van a függvénynek, mivel a sorfejtésben végtelen sok negatív kitevőjű tag van.*

b)

$$\frac{1}{z^2}\,\mathrm{e}^z = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \cdots \qquad |z| > 0$$

Tehát $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\mathrm{e}^z = c_{-1} = 1$*, és* 0*-ban másodrendű pólusa van a függvénynek.*

4.160. Példa *Határozzuk meg a következő körintegrál értékét!*

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^{2z} - 1}{8z^3}\,\mathrm{d}z = I \ = ?$$

189 Megoldás: *1. megoldás:*
Alkalmazzuk a Cauchy-féle általánosított integrálformulát (4.132. tétel, (4.6) egyenlet) a következő „szereposztásban”:

$$f(z) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2z} - 1\right) \quad \textit{mindenütt reguláris}; \quad n + 1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad n = 2; \quad z_0 = 0.$$

Ezért:

$$I = \frac{2\pi j}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2z} - 1\right)\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{2\pi j}{2!}\cdot\frac{1}{8}\,2^2\,\mathrm{e}^{2z}\Bigg|_{z=0} = j\frac{\pi}{2}.$$

2. megoldás:
Dolgozhatunk a 4.156. reziduum tétellel is, mert most könnyen meghatározható sorfejtéssel a reziduum.

$$\mathrm{e}^{2z} = 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \cdots \qquad \forall z \in \mathbb{C}\textit{-re}$$

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{2z} - 1}{8z^3} = \frac{2}{8}\,\frac{1}{z^2} + \frac{2^2}{8\cdot 2!}\,\frac{1}{z} + \frac{2^3}{8\cdot 3!} + \frac{2^4}{8\cdot 4!} + \cdots$$

KT.: $|z| > 0$

$$\operatorname{res}_{z=0} g(z) = c_{-1} = \frac{2^2}{8\cdot 2!} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad I = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} g(z) = 2\pi j \cdot \frac{1}{4} = j\frac{\pi}{2}$$

Egyébként a sorfejtésből az is leolvasható, hogy a $z_0 = 0$ *szingularitás másodrendű pólus.*

4.161. Példa *Legyen*

$$f(z) = \frac{\sin(z+2j)}{(z+2j)^2\, z}\ !$$

a) Hol és milyen szingularitása van f-nek?

b) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = ?$

190 Megoldás: *a) Szinguláris pontok: $-2j$, 0. Mindkettő elsőrendű pólus, mert:*

$$\lim_{z\to -2j} (z+2j)^1 f(z) = \lim_{z\to -2j} \underbrace{\frac{\sin(z+2j)}{z+2j}}_{\downarrow \atop 1}\, \frac{1}{z} = \frac{1}{-2j} = j\,\frac{1}{2} \neq 0,$$

illetve

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z+2j)}{(z+2j)^2} = \frac{\sin 2j}{(2j)^2} = \frac{j\,\mathrm{sh}\,2}{(2j)^2} = \frac{j\,\mathrm{sh}\,2}{-4} = -j\,\frac{\mathrm{sh}\,2}{4}.$$

b) Mivel elsőrendű pólus esetén

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \mathrm{res}_{z=z_0} f(z),$$

az előbb megkaptuk a reziduumokat, és így célszerű a reziduum tételt alkalmazni.

$$\oint\limits_{|z-1|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left(\mathrm{res}_{z=-2j} f(z) + \mathrm{res}_{z=0} f(z)\right) =$$

$$= 2\pi j\left(j\,\frac{1}{2} - j\,\frac{\mathrm{sh}\,2}{4}\right) = -\pi + \frac{\pi\,\mathrm{sh}\,2}{2}$$