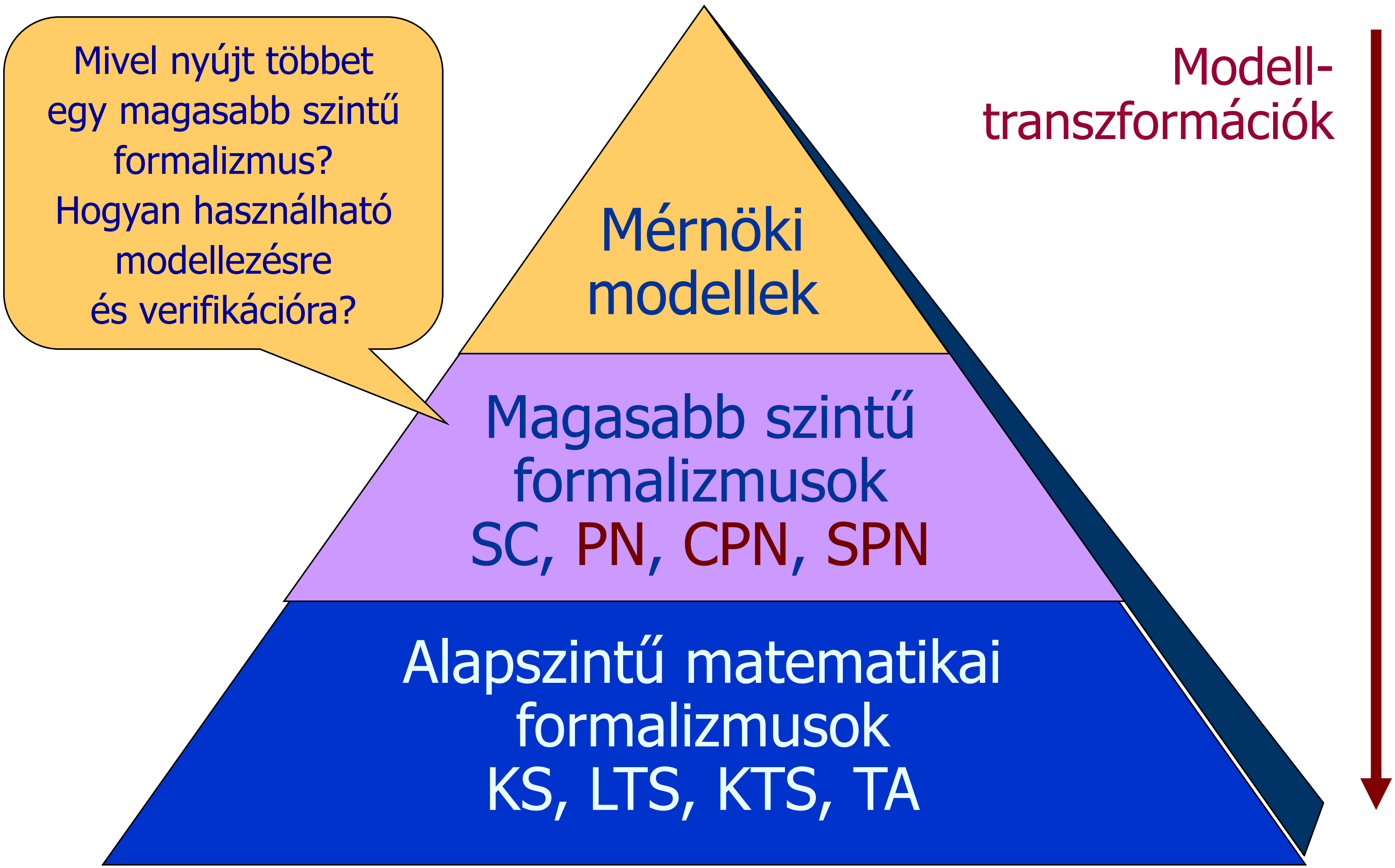
Petri-hálók: Alapelemek és kiterjesztések

dr. Bartha Tamás
dr. Majzik István
dr. Pataricza András
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Modellek a formális ellenőrzéshez



Petri-háló: Mire használható?

Petri-hálók alkalmazási köre:

- Konkurens,
- aszinkron,
- elosztott,
- párhuzamos,
- nemdeterminisztikus

rendszerek modellezése

Vannak erre más formalizmusok is, pl. automaták hálózata.
Miben speciálisak a Petri-hálók?

- Kompaktabb módon fejezik ki az állapotot
- Szemléletesen fejezik ki a szinkronizációt

$\Rightarrow$ Tömörebb, átláthatóbb modellek

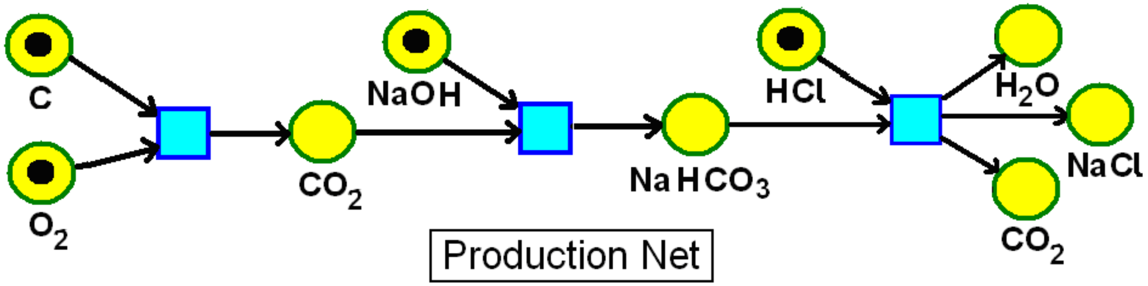
Ezekről a rendszerekről, jellegzetes problémáikról is sokat megtudunk.

A Petri-hálók alapvető tulajdonságai

- Egyidejűleg biztosítja:
  - Grafikus reprezentáció → Áttekinthetőség (+hierarchia)
  - Matematikai formalizmus → Precizitás, egyértelműség
- Struktúrával fejezi ki:
  - Vezérlési struktúra (függések, feltételek, konkurencia)
  - Adatelemek (adatok rendelkezésre állása)
- További előnyök:
  - Könnyen kiterjeszthető
    - Pl. időzített, sztochasztikus, színezett, hierarchikus Petri-hálók
  - Más ábrázolásmódok is leképezhetők Petri-hálóvá
    - Intuitív kiterjesztésekkel minden Turing gép szimulálható

Petri-háló: Honnan ered?

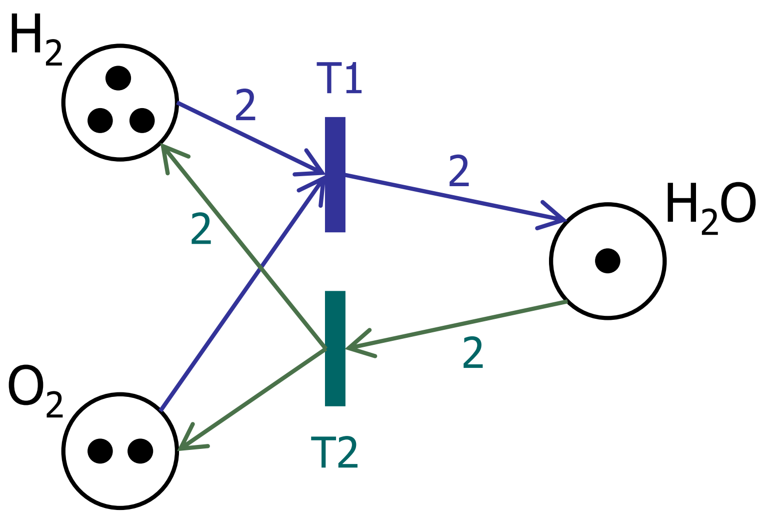
- Carl Adam Petri: német matematikus, 1926-2010
- A jelölésrendszert 1939-ben, 13 évesen találta ki
- Eredetileg kémiai folyamatok leírására szánta



- Később a matematikai alapokat a doktori disszertációjában dolgozta ki (1962)
  - C. A. Petri: Kommunikation mit Automaten. Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn Nr. 2, 1962

Petri-hálók felépítése és működése

Bevezető példa



T1: Hidrogén égése

$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$

T2: Vízbontás

$2\ H_2O \rightarrow 2\ H_2 + O_2$

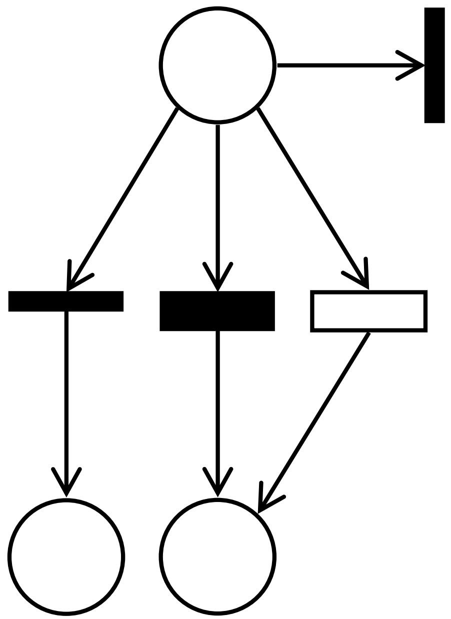
Egy-egy molekula jele: ●

Petri-hálók struktúrája

Struktúra: Irányított, súlyozott, páros gráf

- Két típusú csomópont:
  - Hely: $p \in P$ Jelölése: kör
  - Tranzíció: $t \in T$ Jelölése: téglalap
- Irányított élek:
  - Hely $\rightarrow$ tranzíció
  - Tranzíció $\rightarrow$ hely

  páros gráf!
  - $e \in E, \quad E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$



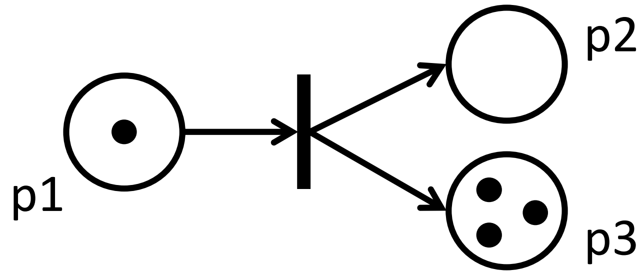
Petri-háló állapota

Helyek: Lehetséges helyzetek, feltételek modellezése

- Pl. processz „Futásra kész”, „Fut”, „Felfüggesztett”, „Terminált”

Lokális helyzet, feltétel fennáll: Ha a helyet „megjelöljük”

- Állapotjelölő: token Jelölése: fekete pont
  - Pl. „Futásra kész” hely jelölése, ha egy processz futásra készen áll
- Hely „jelölése” (állapota): benne levő tokenek száma
  - Pl. „Futásra kész” helyen több token, ha több processz is készen áll
- Háló állapota: az egyes helyek jelöléseinek összessége
  - Állapotvektor: az M tokeneloszlás vektor, minden helyhez egy elem
  - M-nek egy m_i eleme: A p_i helyen található tokenek száma



$$M = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{p1} \\ \leftarrow \text{p2} \\ \leftarrow \text{p3} \end{array} \end{array}$$

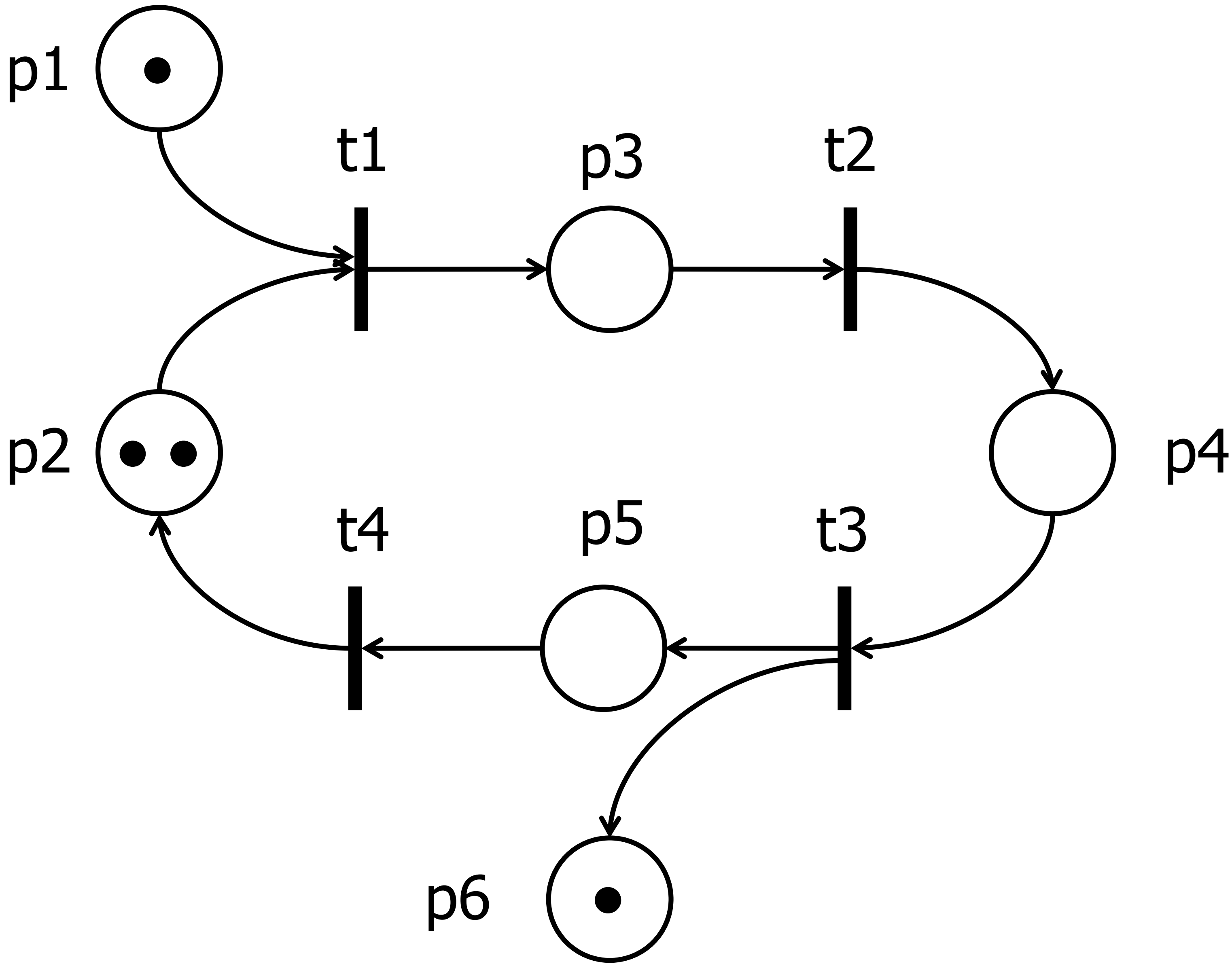
Petri-háló működése (dinamika)

Tranzíciók: Lehetséges változások modellezése

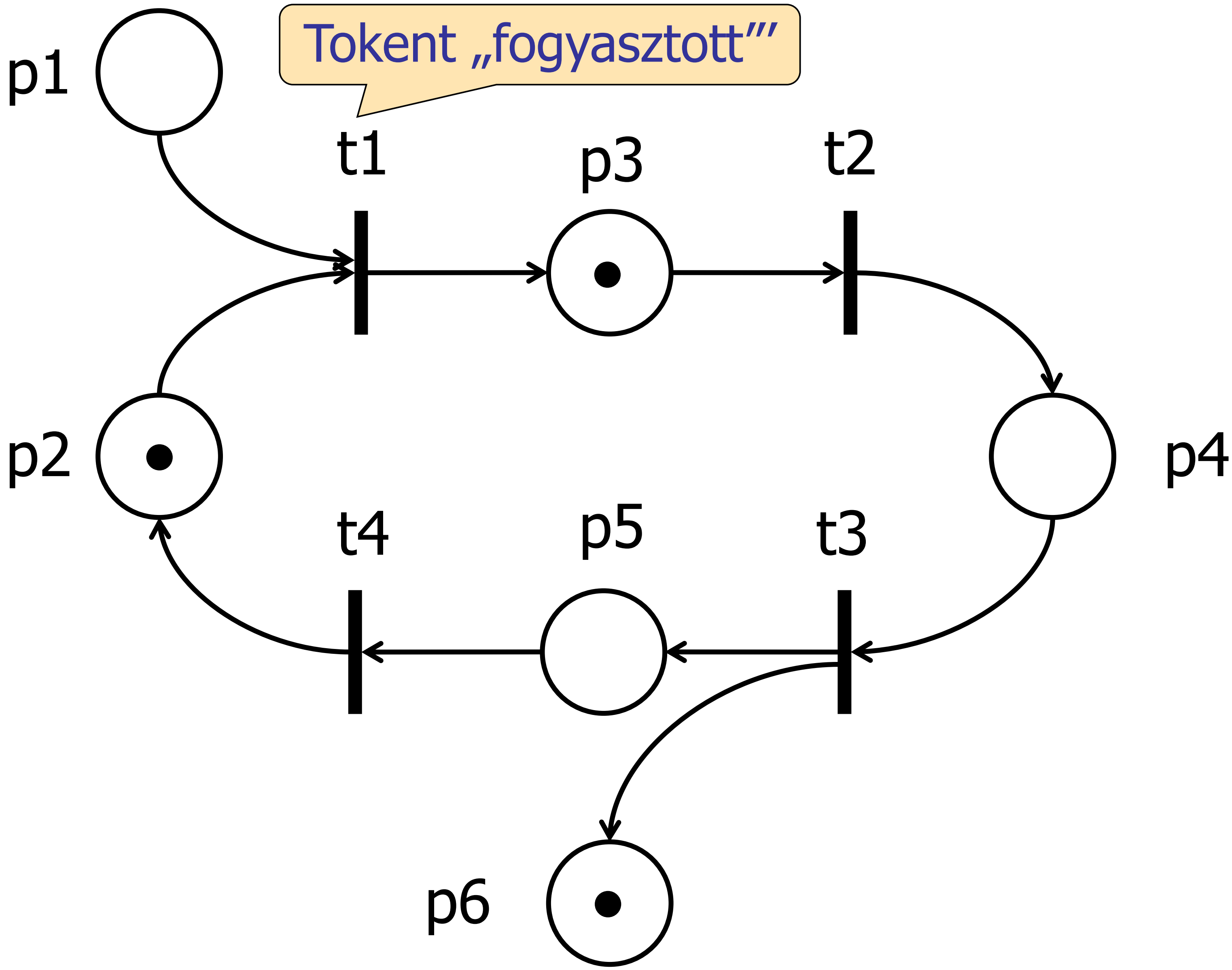
Változás bekövetkezik: Ha a tranzíció „tüzel”

- Egy tranzíció csak akkor tüzelhet, ha engedélyezett
  - A tranzíció minden bemeneti élére igaz:
    Az él végén lévő helyen (bemeneti helyen) van token
- Tüzelés végrehajtása
  - Token elvétele minden bemeneti helyről
  - Token kirakása minden kimeneti helyre
- Nem a tokenek „mozgatása”, hanem elvétel és kirakás!
  - Token „elnyelése” és „generálása” is lehetséges
- Megváltozott token eloszlás vektor: új állapot

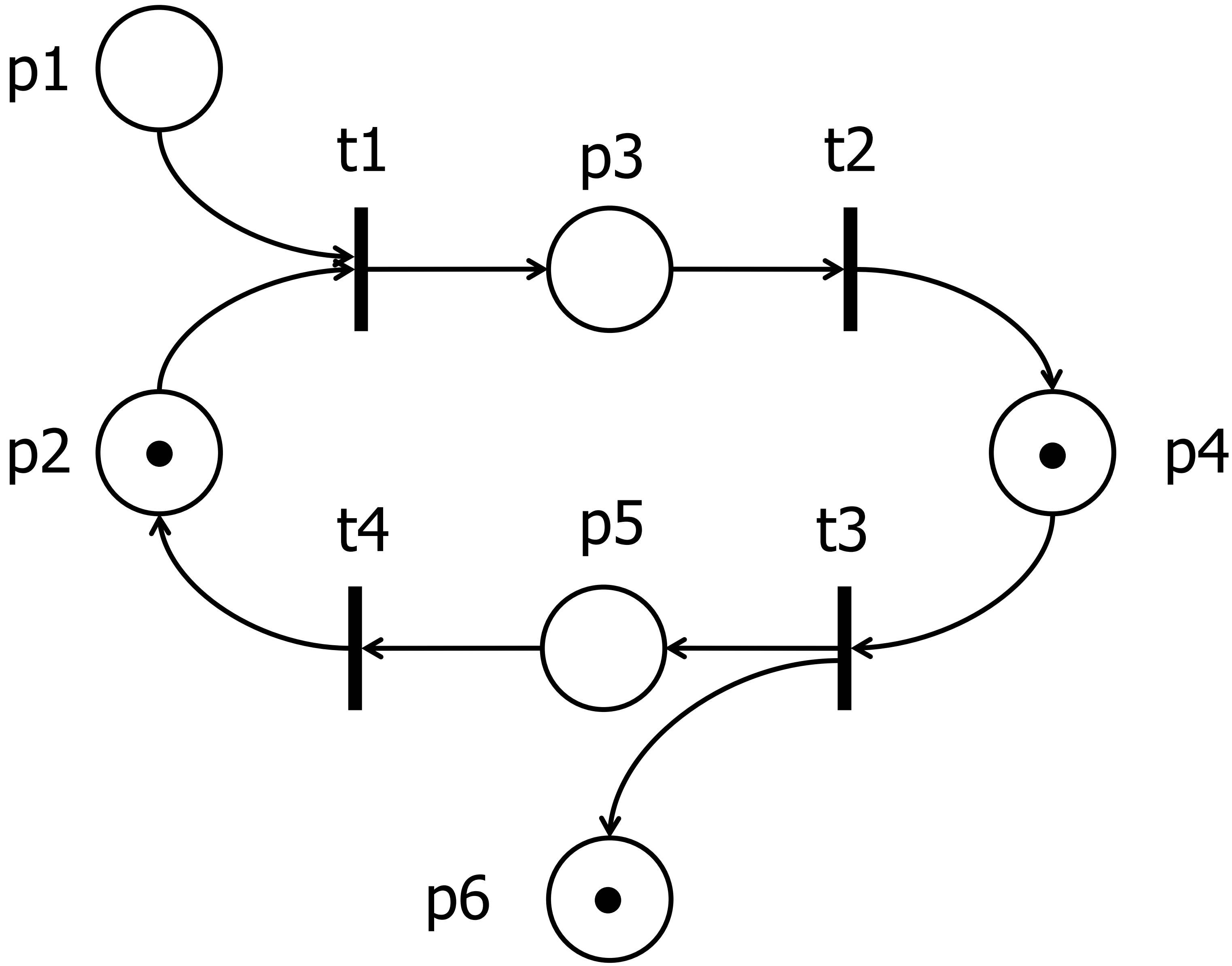
Egyszerű példa a tüzelésekre



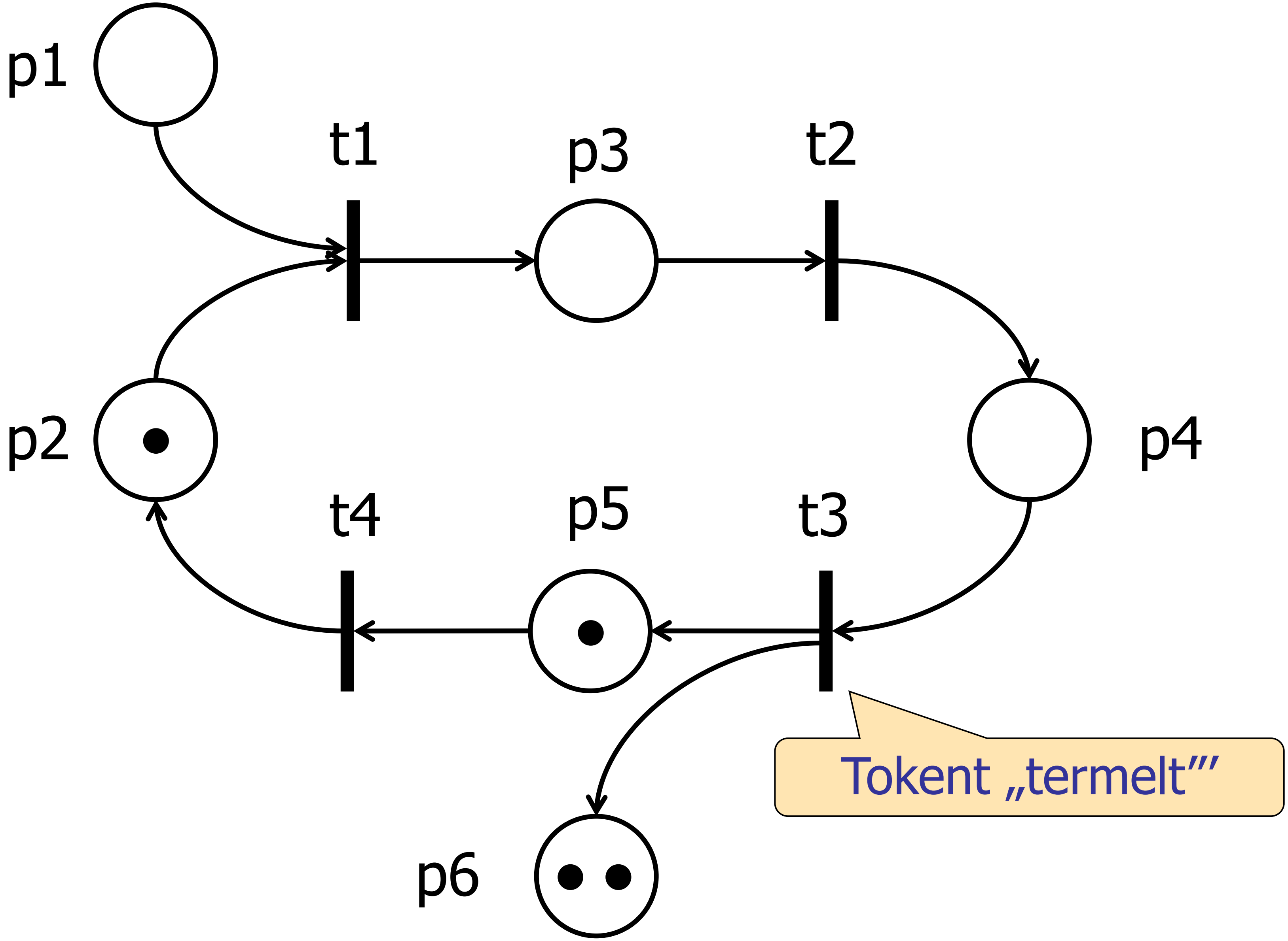
Egyszerű példa a tüzelésekre



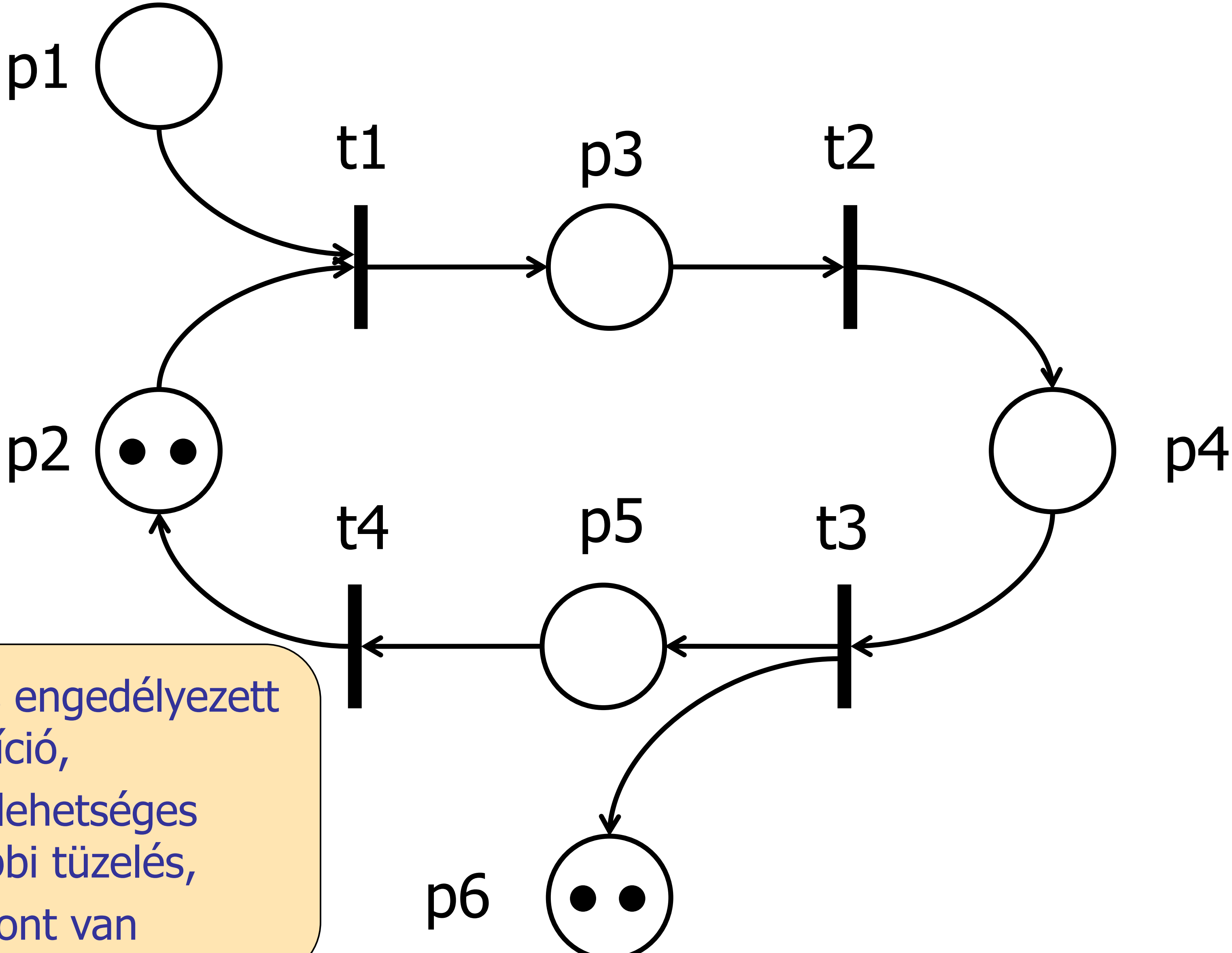
Egyszerű példa a tüzelésekre



Egyszerű példa a tüzelésekre



Egyszerű példa a tüzelésekre

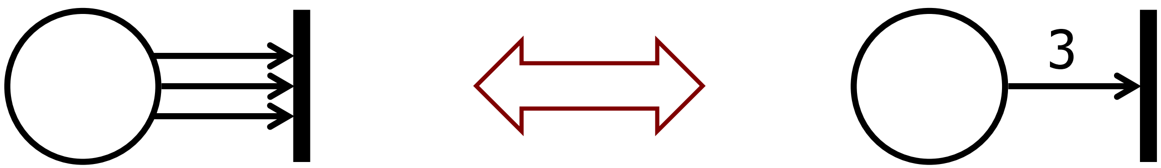


Nincs engedélyezett tranzíció,
nem lehetséges további tüzelés,
holtpont van

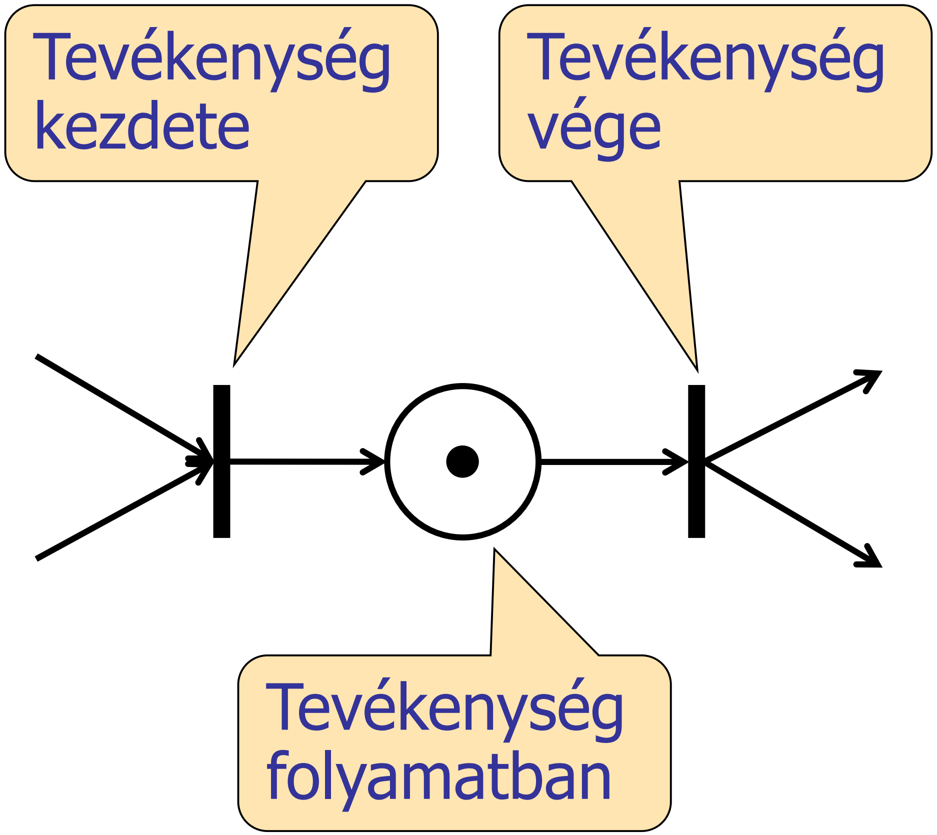
Többszörös élek

Élsúlyok:

- Több párhuzamos él élsúlyokkal jelölhető
- Bármely $e \in E$ élhez $w(e) \in \mathbf{N}^+$ élsúlyt lehet rendelni
  - A $w(e)$ súlyú e él ugyanaz, mint $w(e)$ számú párhuzamos él
  - Nem rajzolunk párhuzamos éleket, élsúlyt használunk
- Nem szokás feltüntetni az egyszeres élsúlyt

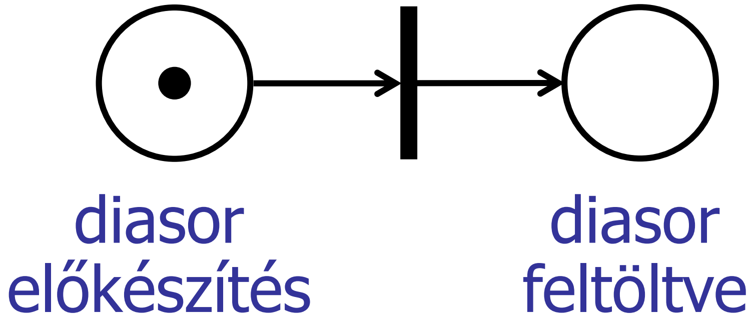


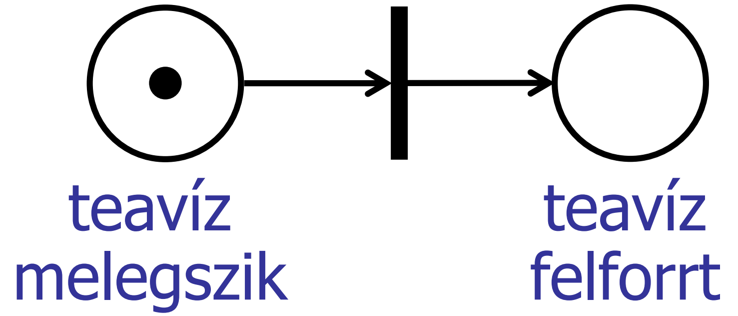
Petri-hálók jellemzői



Petri-háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események

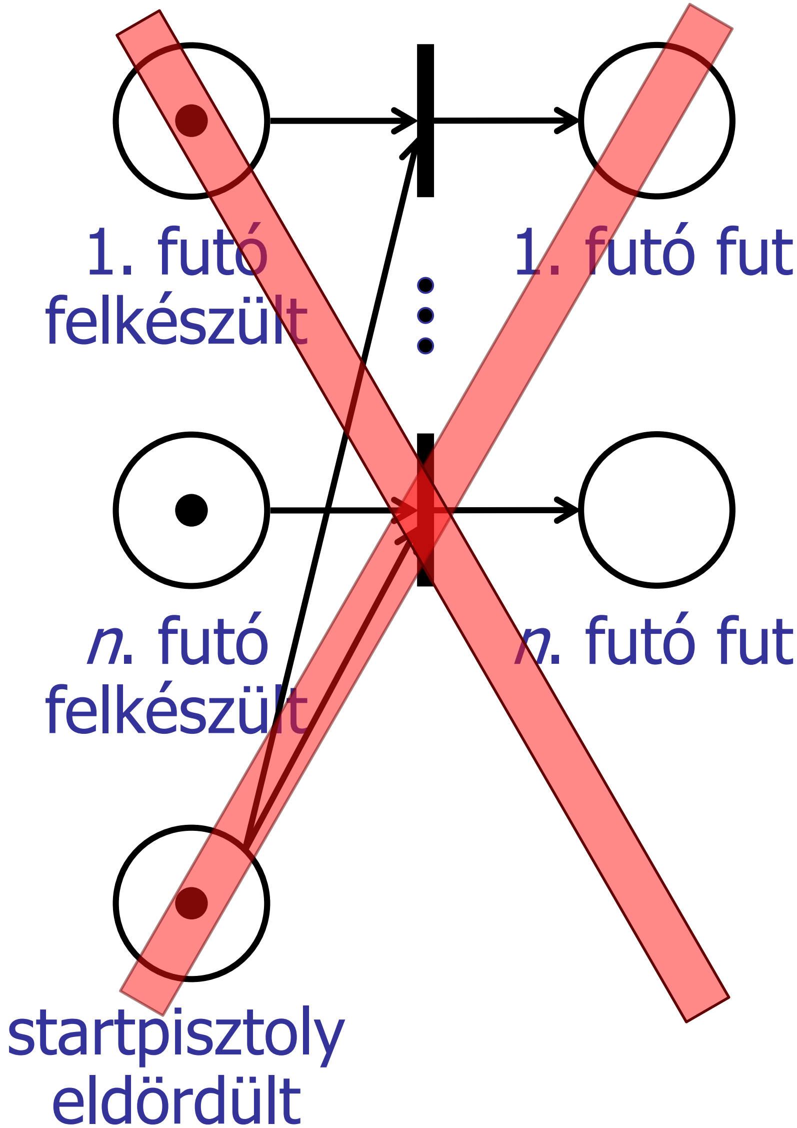
Petri-hálók jellemzői

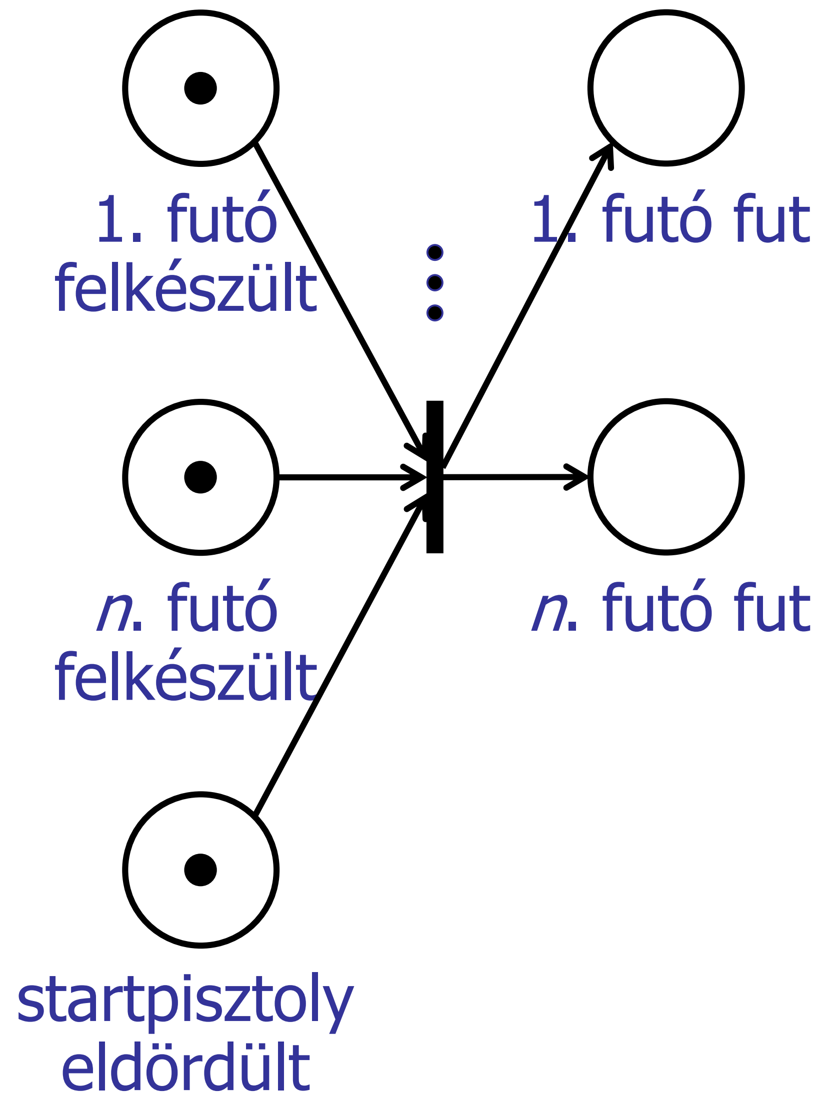




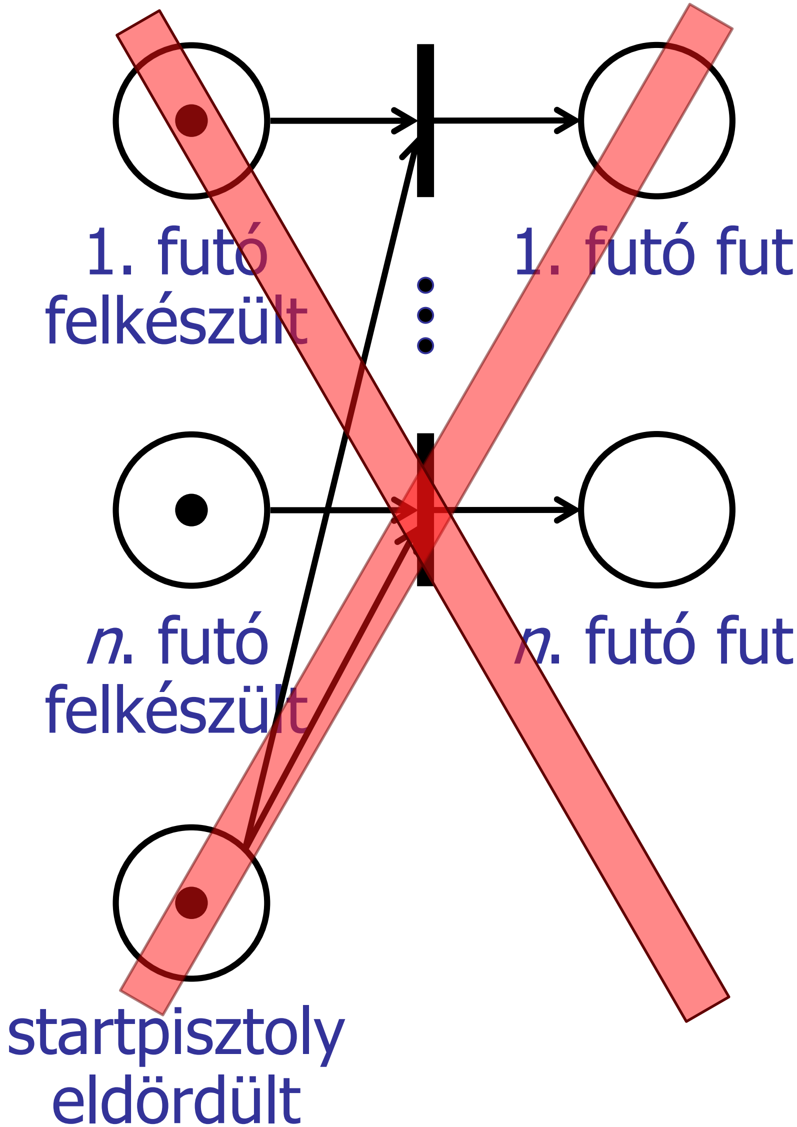
Petri-háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események

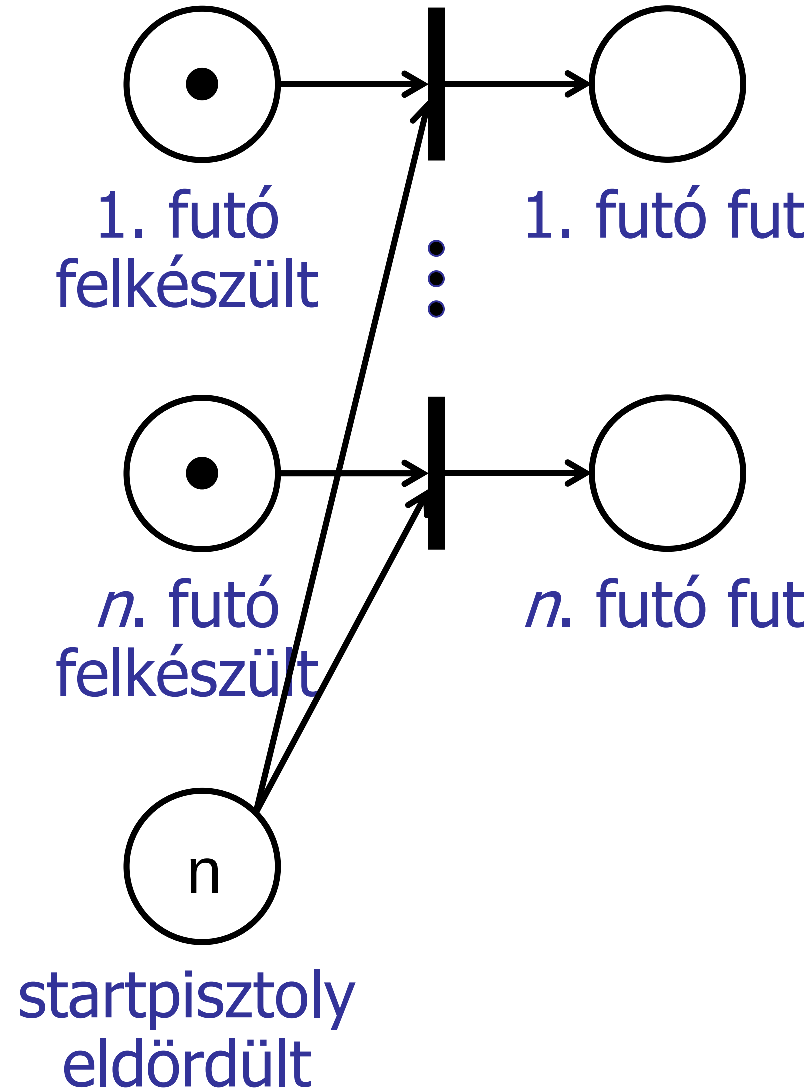
Példa: Egyidejűség, szinkronizáció





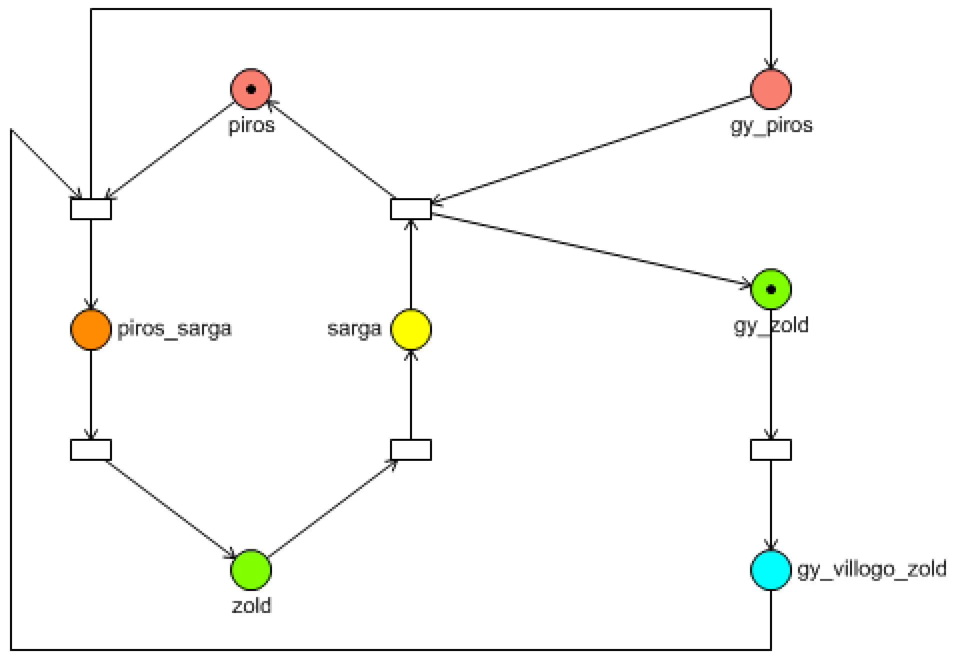
Példa: Egyidejűség, szinkronizáció

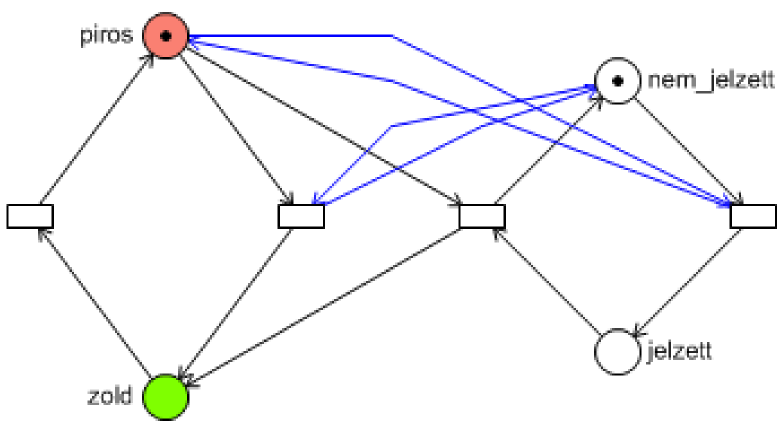




Példa: Szinkronizáció aktivitások között

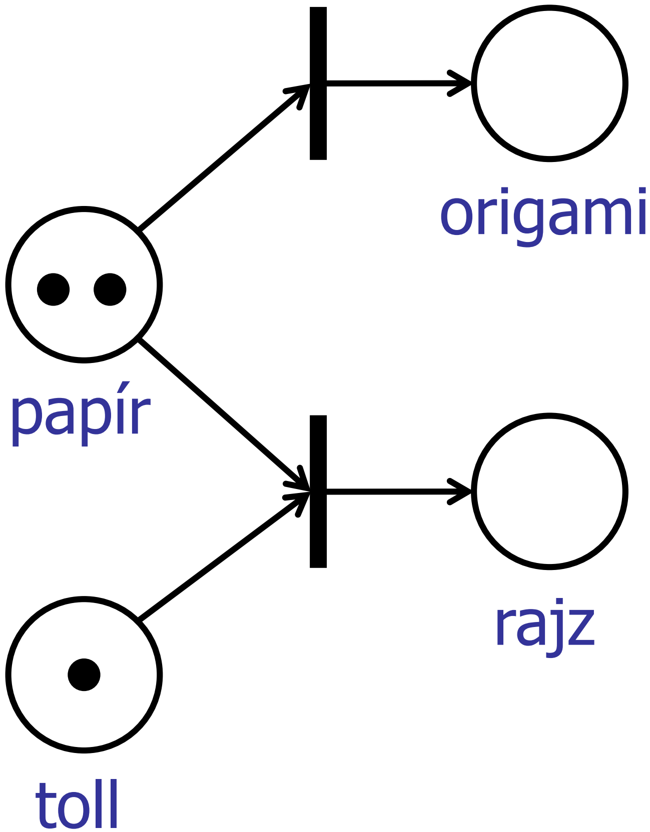
Kereszteződés forgalmi és gyalogos átkelőhely lámpával





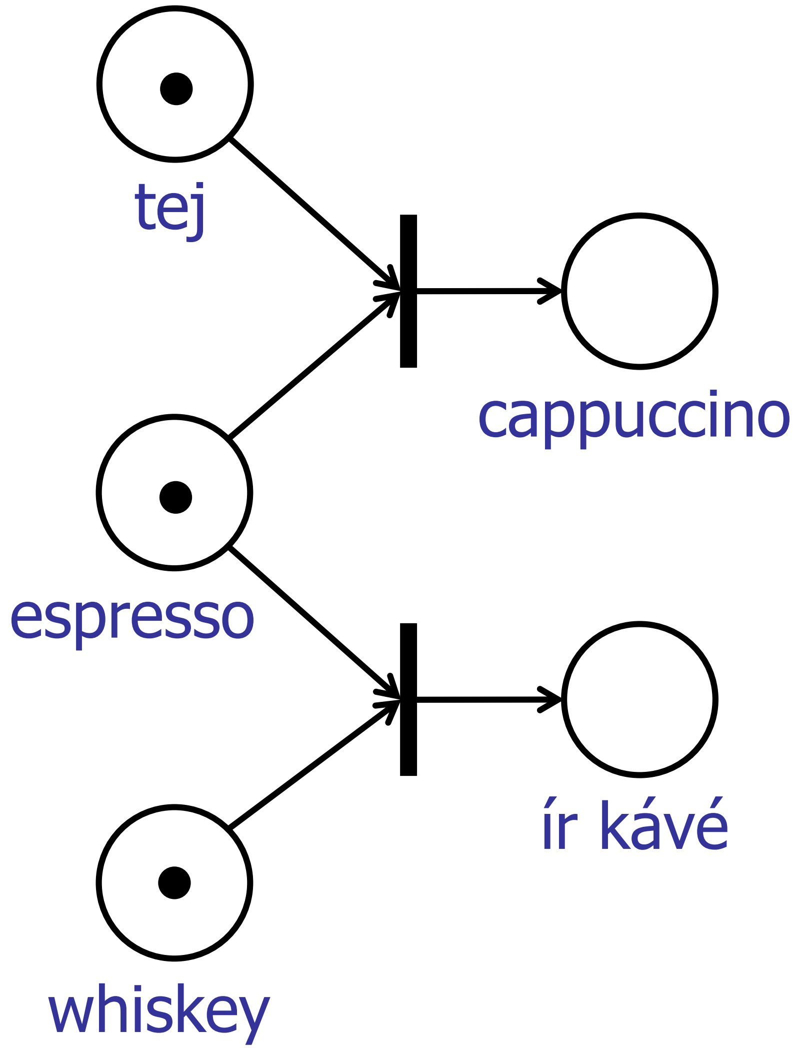
Gyalogos átkelőhely lámpával és nyomógombbal

Petri-hálók jellemzői



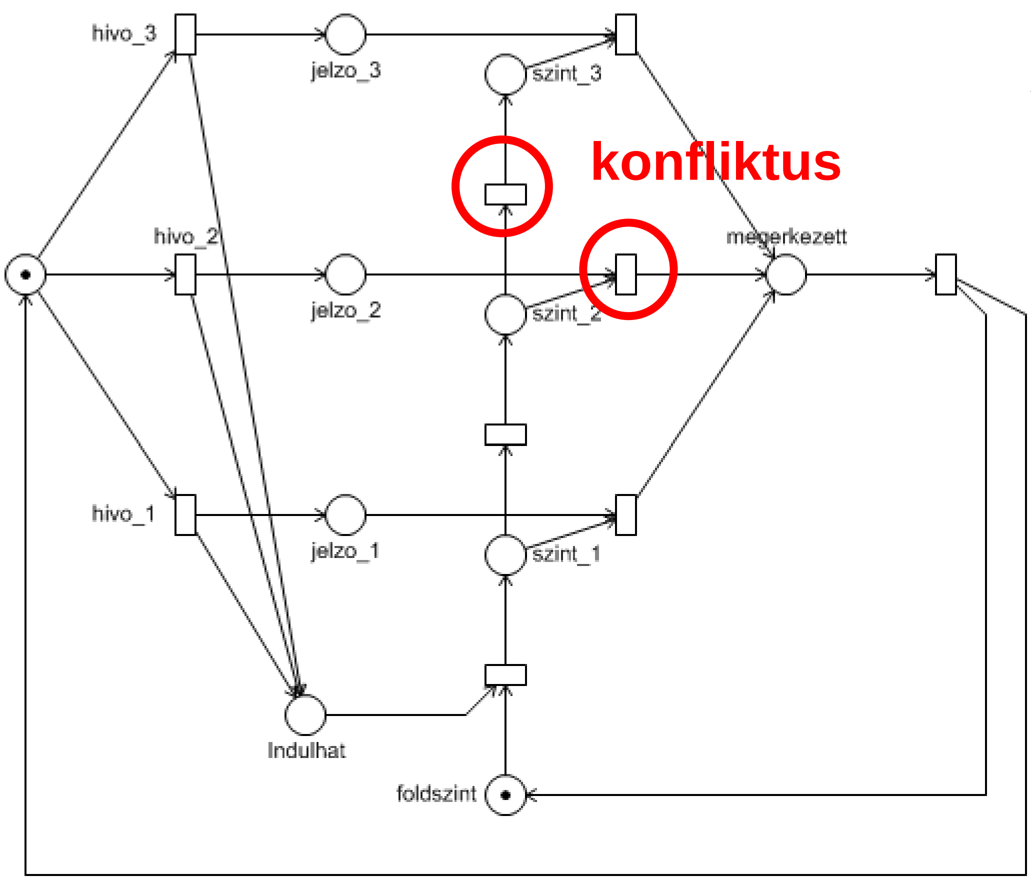
Petri-háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események

Petri-hálók jellemzői



Petri-háló jellemzők	**Modellezési tulajdonságok**
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események
tranzíciók konfliktusban	kizáró események

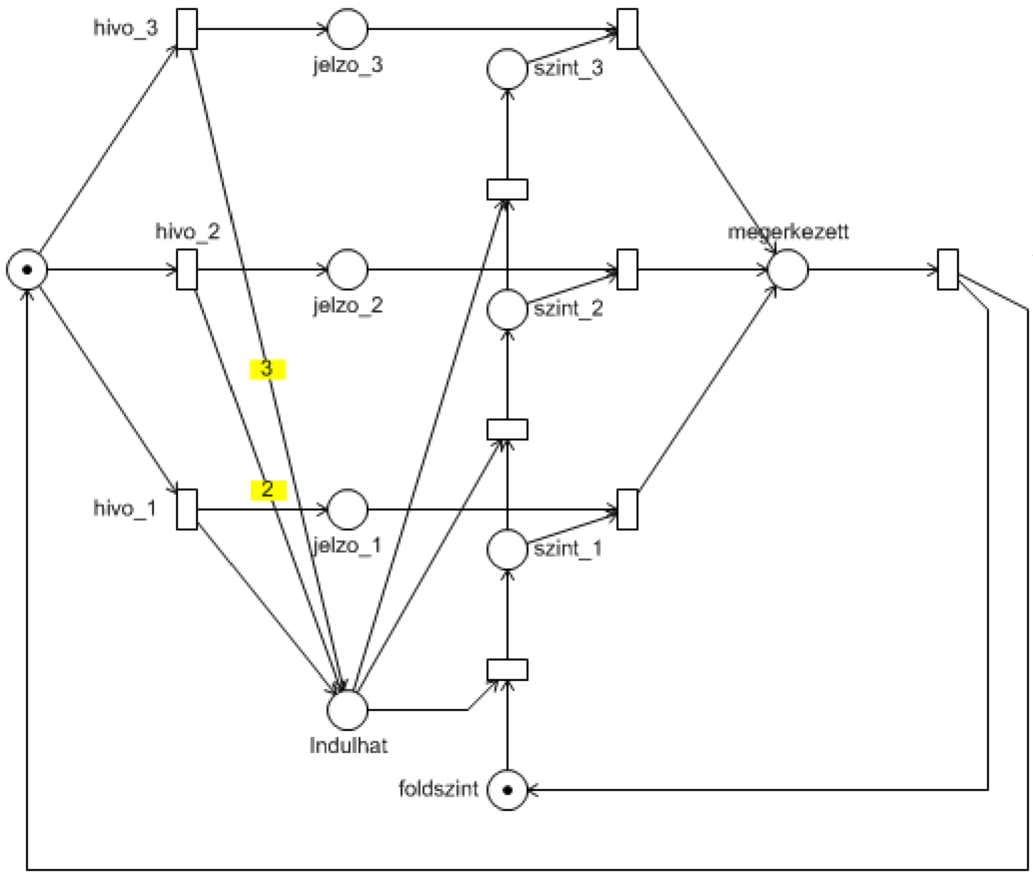
Példa: Konfliktus



Étellift modellje:

- Három szintről hívhatják, az adott szinten megáll
- A modell hibás

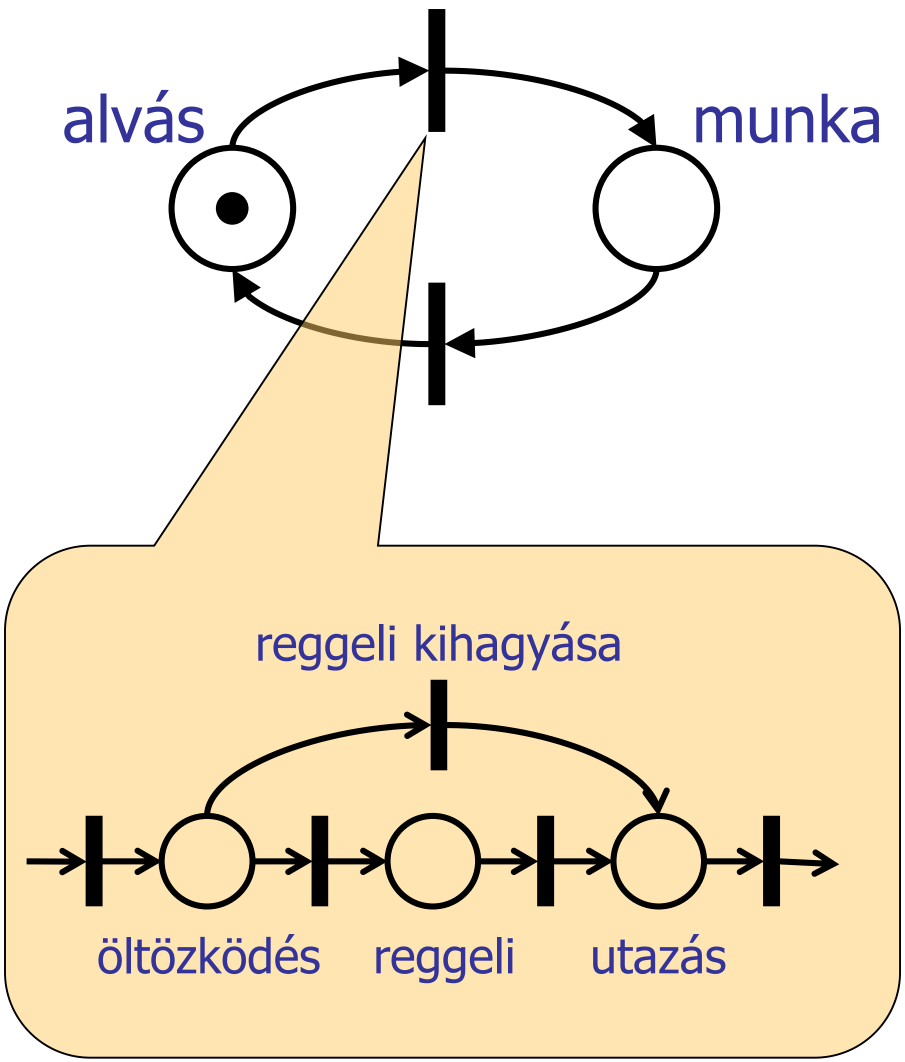
Példa: Konfliktus



A modell javítása:

- Honnan hívták a liftet: Élsúlyokkal beállított hívási tokenszám
- Hívási token fogyasztása továbblépéskor
- Feltétel a továbblépéshez a megmaradt hívási token

Petri-hálók jellemzői



Petri-háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események
tranzíciók konfliktusban	kizáró események
részek finomítása	felbontott események

Alapfogalmak összefoglalása

Petri-háló:

- Alapelemek: helyek, tranzíciók, élek, tokenek
- Állapot: tokeneloszlás vektor
- Állapot változása: tranzíció tüzelése

Modellezés:

- Tranzíció: állapotváltozást modellez
- Hely: feltétel állapotváltozáshoz
- Petri-háló struktúrája: feladat dekompozíciója

Petri-hálók formális szintaxisa

Felépítés összefoglalása

Petri-háló (Petri Net): $PN = (P, T, E, W, M_0)$

- Helyek (places) $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
- Tranzíciók (transitions) $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$

  $P \cap T = \emptyset$
- Élek (edges) $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Élsúly függvény (weight) $W : E \to \mathbf{N}^+$
- Kezdőállapot (initial marking) $M_0 : P \to \mathbf{N}$

PN struktúra: $N = (P, T, E, W)$

PN adott kezdőállapottal: $PN = (N, M_0)$

Topológia és jelölések

- Helyek és tranzíciók bemeneti és kimeneti elemei:

  $t \in T$ bemeneti helyei: $\bullet t = \{p \mid (p,t) \in E\}$

  $t \in T$ kimeneti helyei: $t\bullet = \{p \mid (t,p) \in E\}$

  $p \in P$ bemeneti tranzíciói: $\bullet p = \{t \mid (t,p) \in E\}$

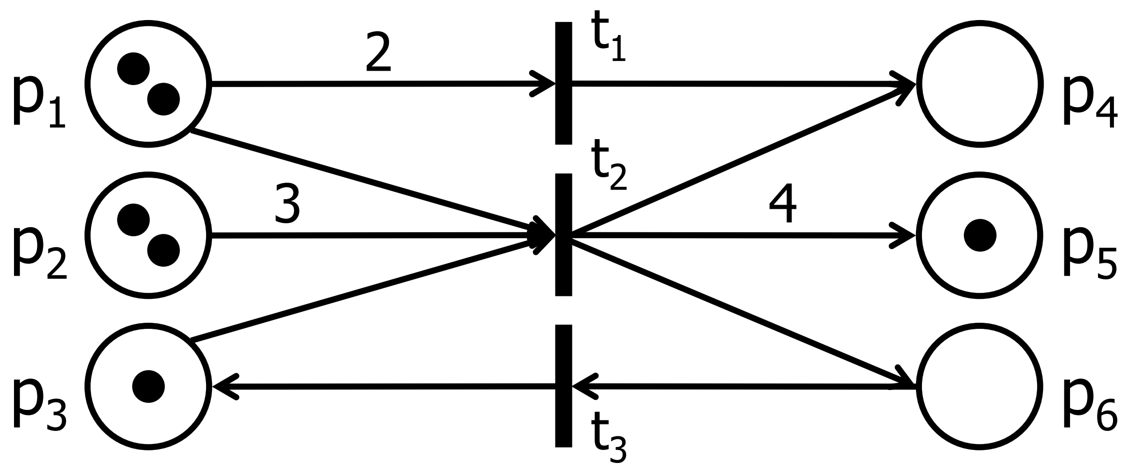
  $p \in P$ kimeneti tranzíciói: $p\bullet = \{t \mid (p,t) \in E\}$

- Tranzíciók $T' \subseteq T$ és helyek $P' \subseteq P$ és részhalmazára:

$$\bullet T' = \bigcup_{t \in T'} \bullet t \qquad \bullet P' = \bigcup_{p \in P'} \bullet p$$

$$T'\bullet = \bigcup_{t \in T'} t\bullet \qquad P'\bullet = \bigcup_{p \in P'} p\bullet$$

Példa: Egy Petri-háló topológiája



$\bullet p_1 = \emptyset$

$\bullet p_2 = \emptyset$

$\bullet p_3 = \{t_3\}$

$\bullet p_4 = \{t_1, t_2\}$

$\bullet p_5 = \{t_2\}$

$\bullet p_6 = \{t_2\}$

$p_1 \bullet = \{t_1, t_2\}$

$p_2 \bullet = \{t_2\}$

$p_3 \bullet = \{t_2\}$

$p_4 \bullet = \emptyset$

$p_5 \bullet = \emptyset$

$p_6 \bullet = \{t_3\}$

$\bullet t_1 = \{p_1\}$

$\bullet t_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$

$\bullet t_3 = \{p_6\}$

$t_1 \bullet = \{p_4\}$

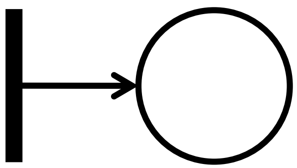
$t_2 \bullet = \{p_4, p_5, p_6\}$

$t_3 \bullet = \{p_3\}$

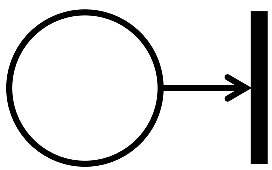
Speciális csomópontok és hálók

Forrás illetve nyelő tranzíciók:

- Egy $t \in T$ forrás tranzíció:
  - Bemenő hely nélküli, azaz $\bullet t = \emptyset$
  - Forrás tranzíció minden esetben tud tüzelni

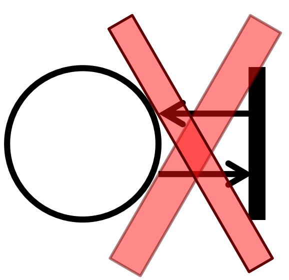


- Egy $t \in T$ nyelő tranzíció:
  - Kimenő hely nélküli, azaz $t \bullet = \emptyset$



Tiszta Petri-hálók:

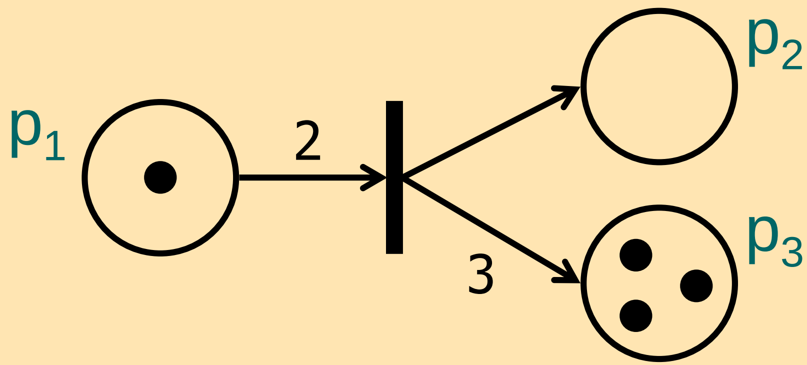
- Egy PN tiszta, ha nincs benne önhurok, azaz $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$



Tokeneloszlás vektor (állapotvektor)

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\pi \end{bmatrix}$$

- Kezdő tokeneloszlás: M_0



$$M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{array}$$

Petri-hálók formális szemantikája: Dinamikus viselkedés (engedélyezettség, tüzelés)

Dinamikus viselkedés informálisan

Petri-hálók működésének egy lépése (állapotváltozás):

Tranzíció „tüzelése”

- Eredeti állapot: eredeti tokeneloszlás
  - Engedélyezettség fennállása feltétel a tüzeléshez
- Tüzelés végrehajtása (atomi művelet)
  - Tokenek elvétele a bemeneti helyekről
  - Tokenek kirakása a kimeneti helyekre
- Új állapot: megváltozott tokeneloszlás

Engedélyezettség feltétele

- Egy $t \in T$ tranzíció engedélyezett, ha minden bemeneti helyét legalább annyi token jelöli,
  mint onnan a tranzícióba vezető él súlya
  - Azaz egy $t \in T$ tranzíció engedélyezett, ha minden bemeneti helyét legalább $w^{-}(p, t)$ token jelöli
  - Itt $w^{-}(p, t)$ a p-ből t-be vezető $e=(p, t)$ él $w(e)$ súlya
- Formálisan felírva:
  - Egy t tranzíció tüzelése engedélyezett, ha

$$\boxed{\forall p \in \bullet t : m_p \geq w^{-}(p,t)}$$

Tüzelés meghatározása

- Engedélyezett tranzíció „tetszés szerint tüzelhet”
  - Azaz tüzel vagy nem tüzel („fire at will”)
  - Implicit időfogalom: Nincs időzítés, a tüzelés bármikor megtörténhet
  - Az időzítetlen Petri-háló minden lehetséges konkrét időzítés szerinti viselkedést lefed
- Egyszerre csak egy tranzíció tüzelhet
- Ha több tranzíció engedélyezett:
  - Engedélyezett tranzíciók közül ki kell választani egyet, ami tüzelhet
  - A választás nemdeterminisztikus

Az állapotváltozás nagysága

A t tranzíció tüzelése:

- Elvesz $w^-(p, t)$ tokent a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
  - Itt $w^-(p, t)$ nem más, mint a $p \to t$ él súlya
- Kitesz $w^+(t, p)$ tokent a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
  - Itt $w^+(t, p)$ nem más, mint a $t \to p$ él súlya

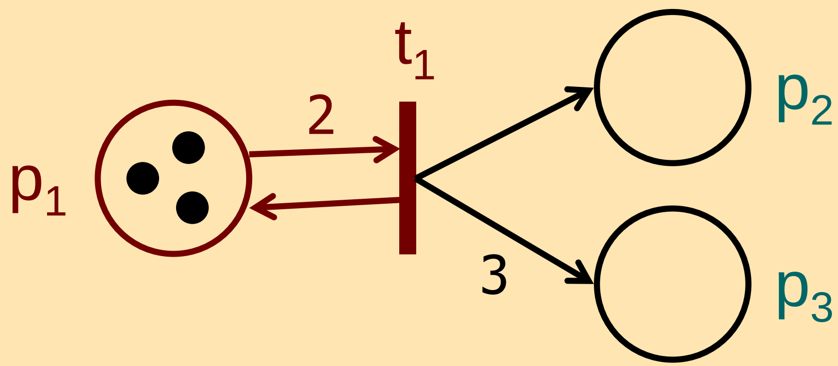
Ha t tranzíció tüzel M állapotban (tokeneloszlásban):

- Új állapot: $\boxed{M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t}$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor
  - ahol $\mathbf{W}^T$ a transzponált súlyozott szomszédossági mátrix

Súlyozott szomszédossági mátrix

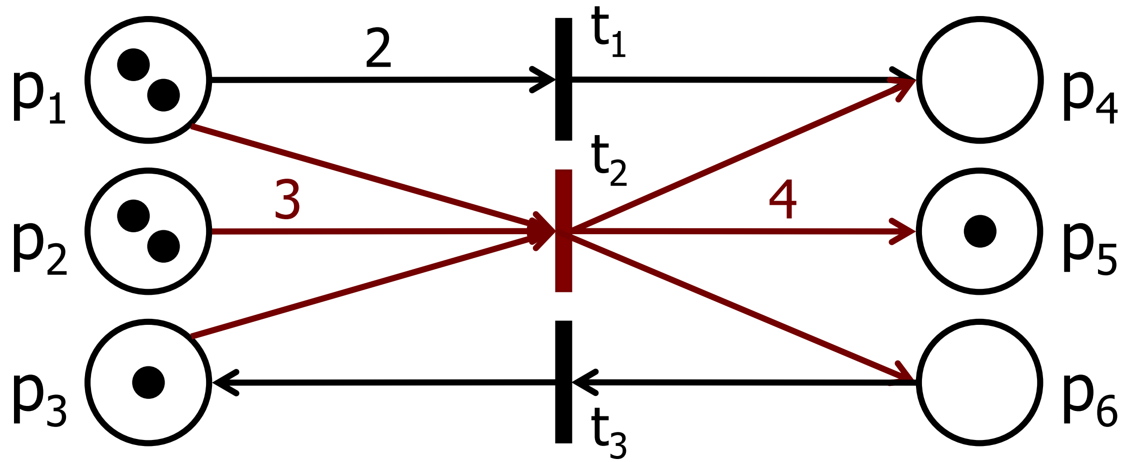
- Súlyozott szomszédossági mátrix: $\mathbf{W} = [w(t, p)]$
  - Élsúlyok alapján vehető fel
  - Dimenziója: tranzíciók x helyek, $\tau \times \pi = |T| \times |P|$
- Szerepe: $w(t, p)$ megadja, hogy ha t tüzel, mennyit változik a p-beli tokenszám:

$$w(t,p) = \begin{cases} w^+(t,p) - w^-(p,t) & \text{ha } (t,p) \in E \text{ vagy } (p,t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t,p) \notin E \text{ és } (p,t) \notin E \end{cases}$$



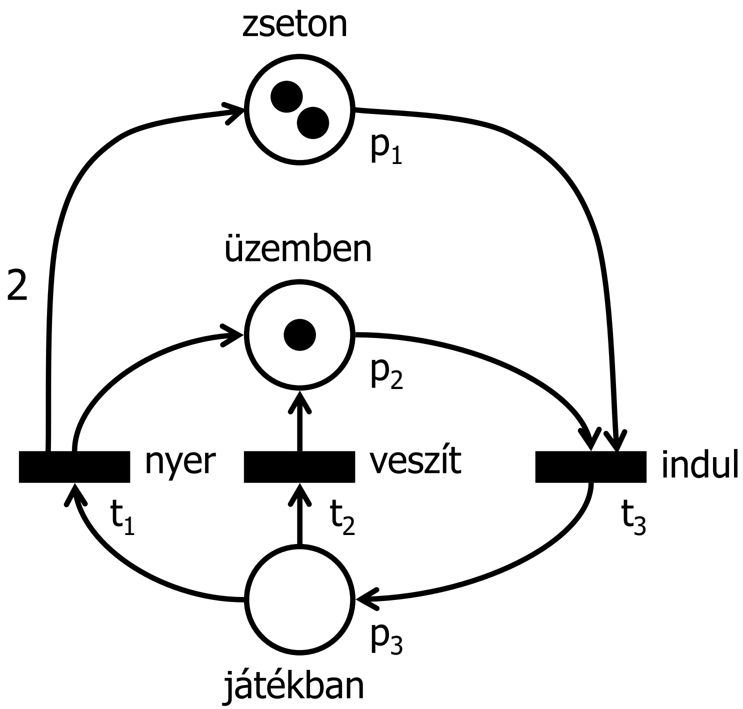
$w(t_1, p_1) =$
$w^+(t_1, p_1) - w^-(p_1, t_1) =$
$1 - 2 = -1$

Példa: Súlyozott szomszédossági mátrix



$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} & \\
W = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array}
\end{array}
$$

Példa: Egy tranzíció tüzelése



Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti kezdőállapotból:

$$M' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tüzelési szekvencia

- Állapotátmeneti trajektória
  - Egymást követő tüzelések hatására felvett állapotok
- Tüzelési szekvencia

$$\sigma = \langle M_0\ t_1\ M_1 \ldots t_n\ M_n \rangle \text{ vagy } \sigma = \langle t_1 \ldots t_n \rangle$$

- Ha σ összes tranzíciója kielégíti a tüzelési szabályt:

M_0-ból elérhető a σ tüzelési szekvencia által az M_n állapot

$$M_0\ [\sigma >\ M_n$$

Kiterjesztett Petri-hálók:
A tüzelési szemantika módosítása

Petri-hálók kiterjesztései

Célok:

- Modellezési erő növelése
- A működés nemdeterminizmusának korlátozása

A formalizmus kiterjesztései:

- Kapacitáskorlát rendelése a helyekhez
- Tiltó élek használata
- Prioritás rendelése a tranzíciókhoz

Helyek kapacitáskorlátja

- Idáig: végtelen kapacitású helyek
  - Nincs korlátozva a tokenek száma egy-egy helyen
  - Végtelen kapacitások, erőforrások megjelenítése
    - Pl. „futó” hely jelölése nem korlátozott: tetszőleges számú processz lehet futó állapotban
- Véges kapacitású Petri-háló
  - Minden p helyhez opcionálisan K(p) kapacitás: Az adott helyen elhelyezhető tokenek maximális száma
  - Véges erőforrások megjelenítése
    - Pl. „futó” hely kapacitása: a futó állapotban lévő processzek maximális száma

Tüzelés véges kapacitású Petri-hálóban

- Egy $t \in T$ tranzíció tüzelése akkor engedélyezett, ha
  1. Elegendő token van a bemeneti helyeken:

     $$\forall p \in \bullet t: \quad m_p \geq w^-(p,t)$$

  2. Fennáll a kapacitáskorlát tüzelés után:

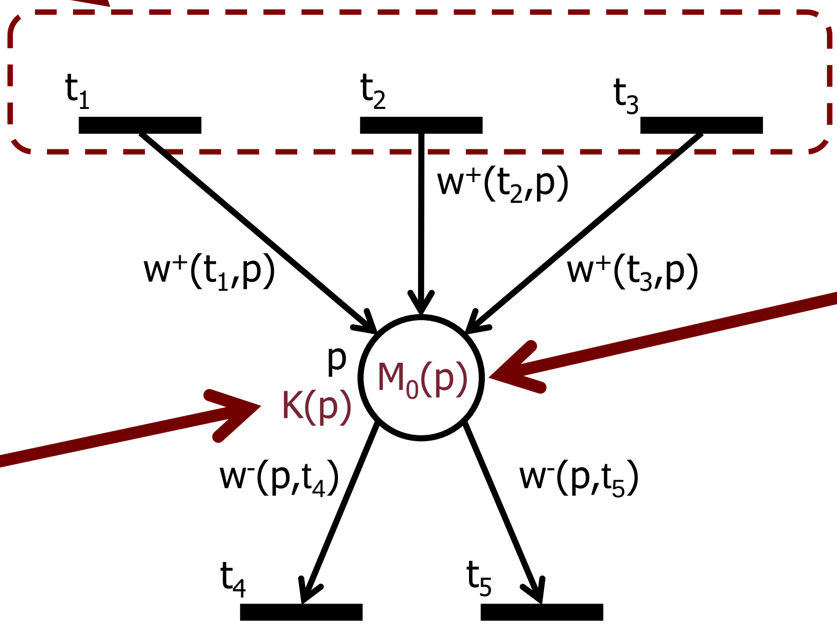
     $$\forall p \in t\bullet: \quad m'_p = m_p + w(t,p) \leq \mathbf{K(p)}$$

     azaz a tranzíció tüzelése egyetlen kimenő p helyre sem juttathat a hely K(p) kapacitásánál több tokent
- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzelhet
- A tüzelés után: $\forall p \in P: \; m'_p = m_p + w^+(t,p) - w^-(p,t)$

Korlátos kapacitású hely és közvetlen környezete

Feltételhez kötöm a tüzelésüket: K(p) kapacitás-korlátot ne lépje túl M(p). Feltétel: legyen $w^+(t_i,p)$ „kihasználatlan kapacitás" p-ben

El lehet-e kerülni a kapacitáskorlát bevezetését a p hely esetén?



Kezdő jelölés a p hely esetén

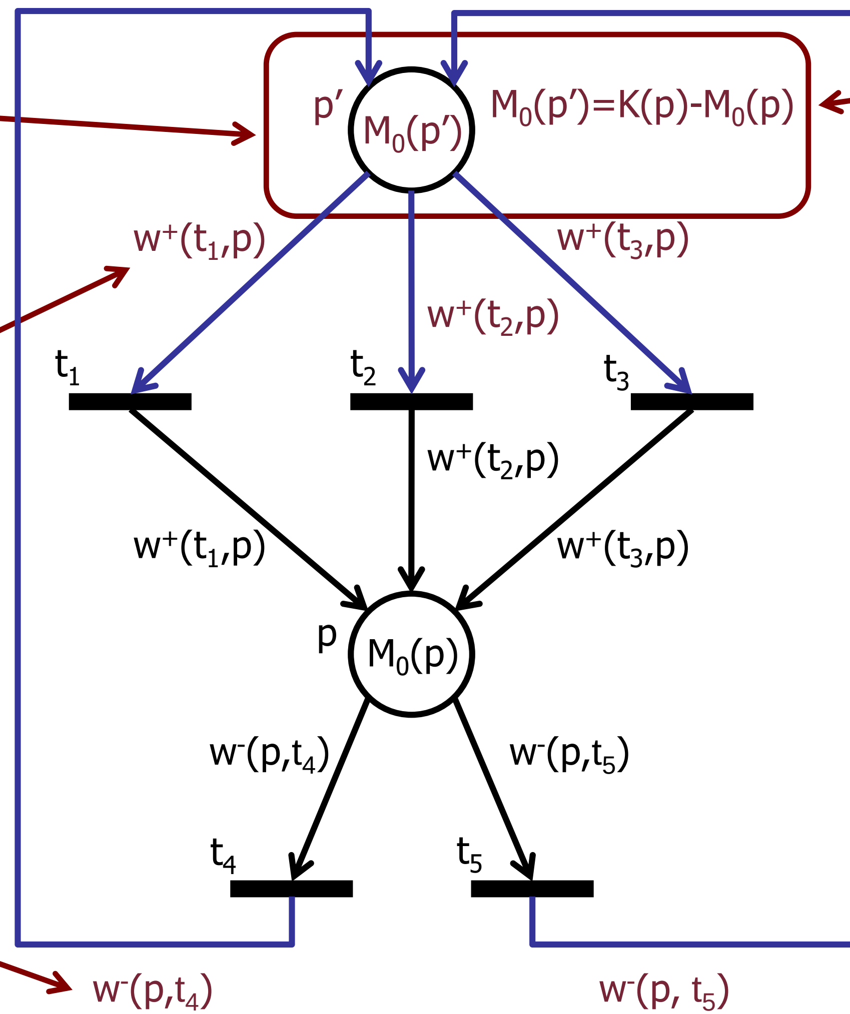
Kapacitáskorlát a p hely esetén

Ekvivalens végtelen kapacitású háló (tiszta PN)

Csak akkor rakható a p helyre token, ha a kihasználatlan kapacitás megengedi.

Az odarakott tokenek csökkentik a kihasználatlan kapacitást.

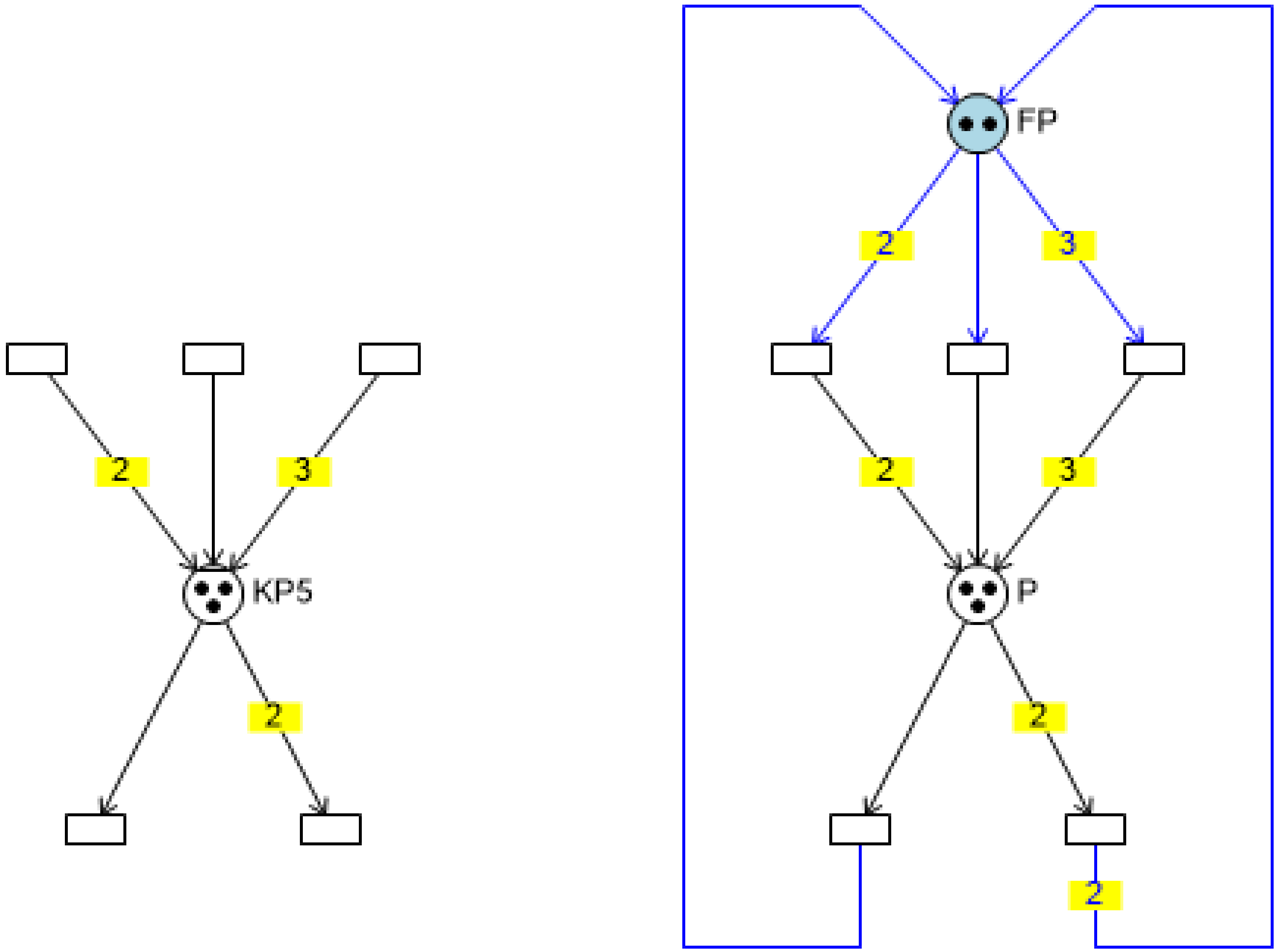
A levett tokenek növelik a kihasználatlan kapacitást.



Adminisztrációs hely p′: Kihasználatlan kapacitás p-hez

Annyi token rakható a p helyre, amennyit a kapacitáskorlát és a kezdő jelölés különbsége (azaz a kihasználatlan kapacitás) megenged.

Példa: Ekvivalens végtelen kapacitású háló



Kiegészítő helytranszformáció 1/2

Kiegészítő helytranszformáció:

- Véges kapacitású Petri-hálóból ekvivalens működésű nem véges kapacitású háló képzése

Tiszta Petri-hálók esetén a transzformáció menete:

1. Minden egyes véges kapacitású p helyhez
   - Rendeljünk hozzá egy járulékos p′ adminisztrációs helyet
   - A p′ adminisztrációs hely kezdőállapota legyen

$$M_0(p') = K(p) - M_0(p)$$

azaz a p hely még kihasználatlan kapacitása

Kiegészítő helytranszformáció 2/2

2. Kiegészítő éleket húzunk be a p′ hely és a $t \in \bullet p \cup p \bullet$ tranzíciók között
   - Ha $w(t, p) > 0$, azaz a tüzelés berak tokent a p helyre, akkor a p′ hely és a t tranzíció között
     (p', t) élet húzunk be $w(t, p)$ súllyal
   - Ha $w(t, p) < 0$, azaz a tüzelés elvesz tokent a p helyről, akkor a t tranzíció és p′ hely között
     (t, p′) élet húzunk be $|w(t, p)|$ súllyal

A transzformált háló ekvivalenciája

- Belátható, hogy a kiegészítő helytranszformáció az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
  - Ha van egy (N, M_0) tiszta, véges kapacitású Petri-háló, és alkalmazzuk rá a szigorú tüzelési szabályt (azaz a kapacitáskorlát figyelembevételét),
  - valamint van a fenti transzformáció által létrehozott (N', M'_0) társhálója ennek a Petri-hálónak, amelyben a szokásos (gyenge) tüzelési szabályt alkalmazzuk,
  - akkor a két háló tüzelési szekvenciái azonosak.

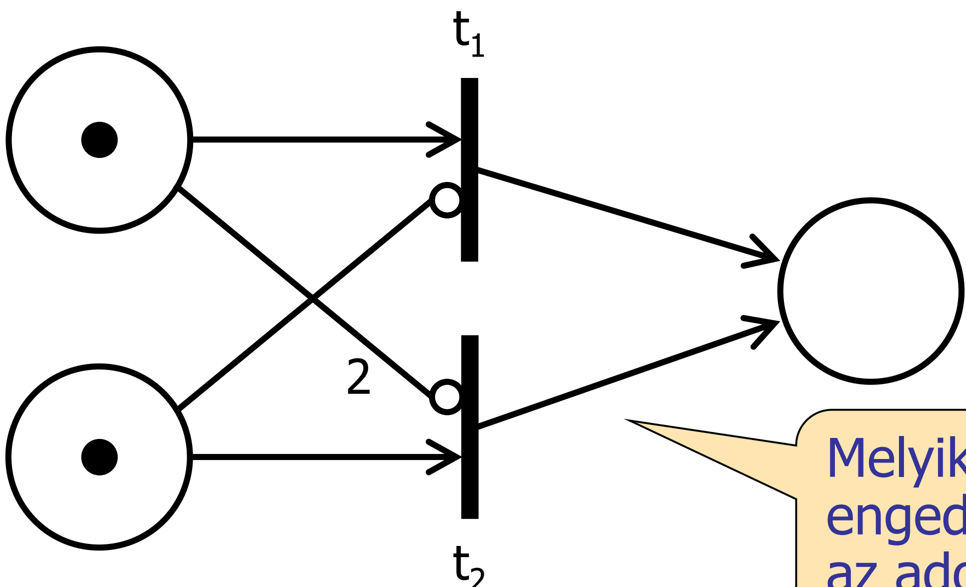
Tiltás és a tiltó él bevezetése

- Klasszikus Petri-háló
  - „Ponált” tüzelési feltételek: A tüzelés a feltétel megléte (bemeneti hely jelölése) esetén hajtódjon végre, tehát a feltétel teljesülése vizsgált
- Tiltás kifejezése
  - „Negált” tüzelési feltétel: A tüzelés a feltétel megléte esetén ne hajtódjon végre
  - A bemenő helyeken lévő feltétel negáltja vizsgált
  - Modell kiterjesztése: tiltó él ← Jelölés: kör az él végén
- Tiltó élek használata
  - A Petri-hálók kifejezőerejét növelik (Turing gép szintjére)
  - De az analízist bonyolultabbá teszik

Tüzelési szabály tiltó él esetén

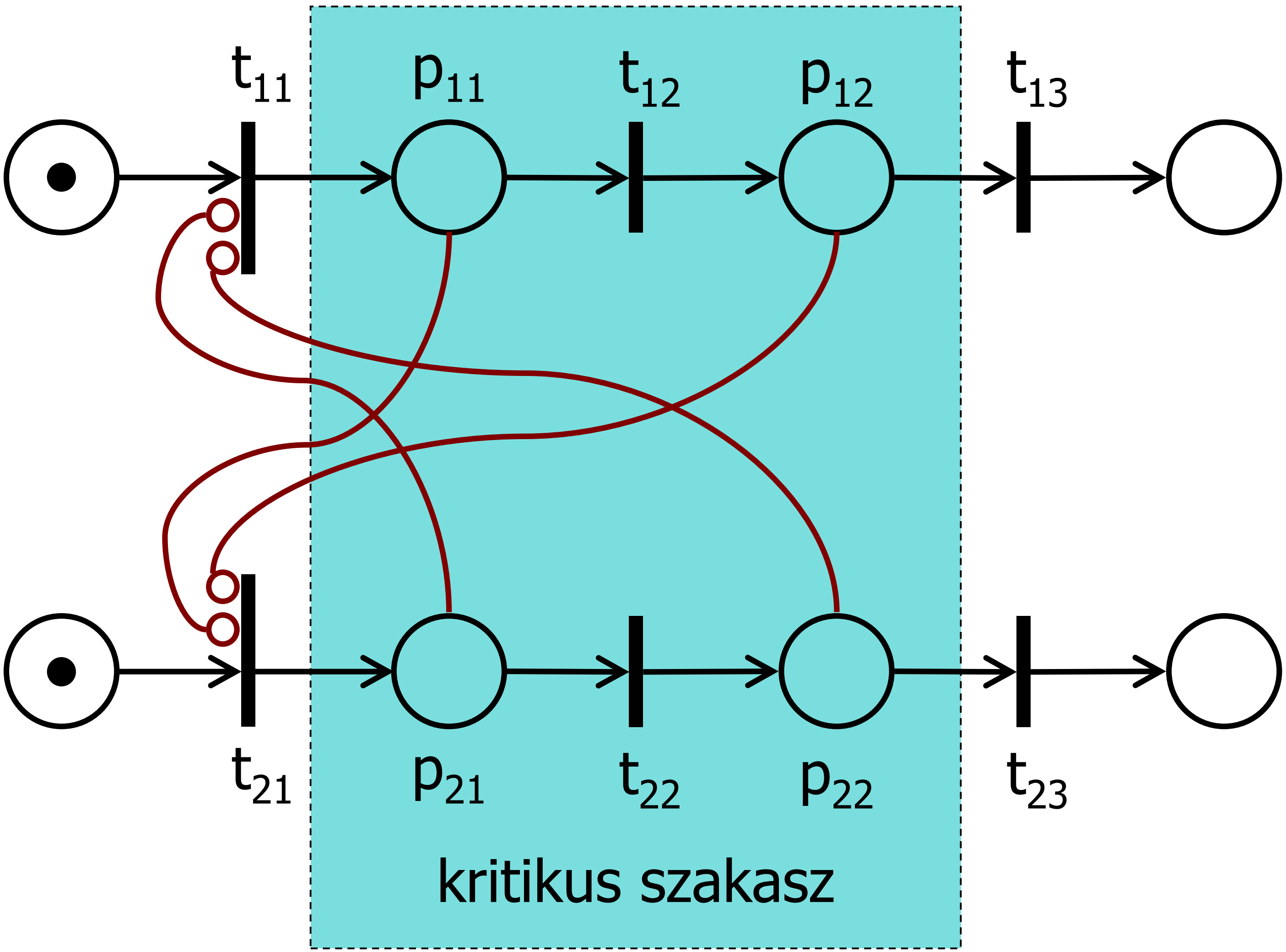
- Tüzelési szabály kiegészítése:

  Ha a t tranzícióhoz kapcsolódó bármely (p, t) tiltó él p bemenő helyén a $w^{-}(p, t)$ élsúlynál nagyobb vagy egyenlő számú token van,
  akkor a tüzelés nem hajtható végre (tiltja a tüzelést)

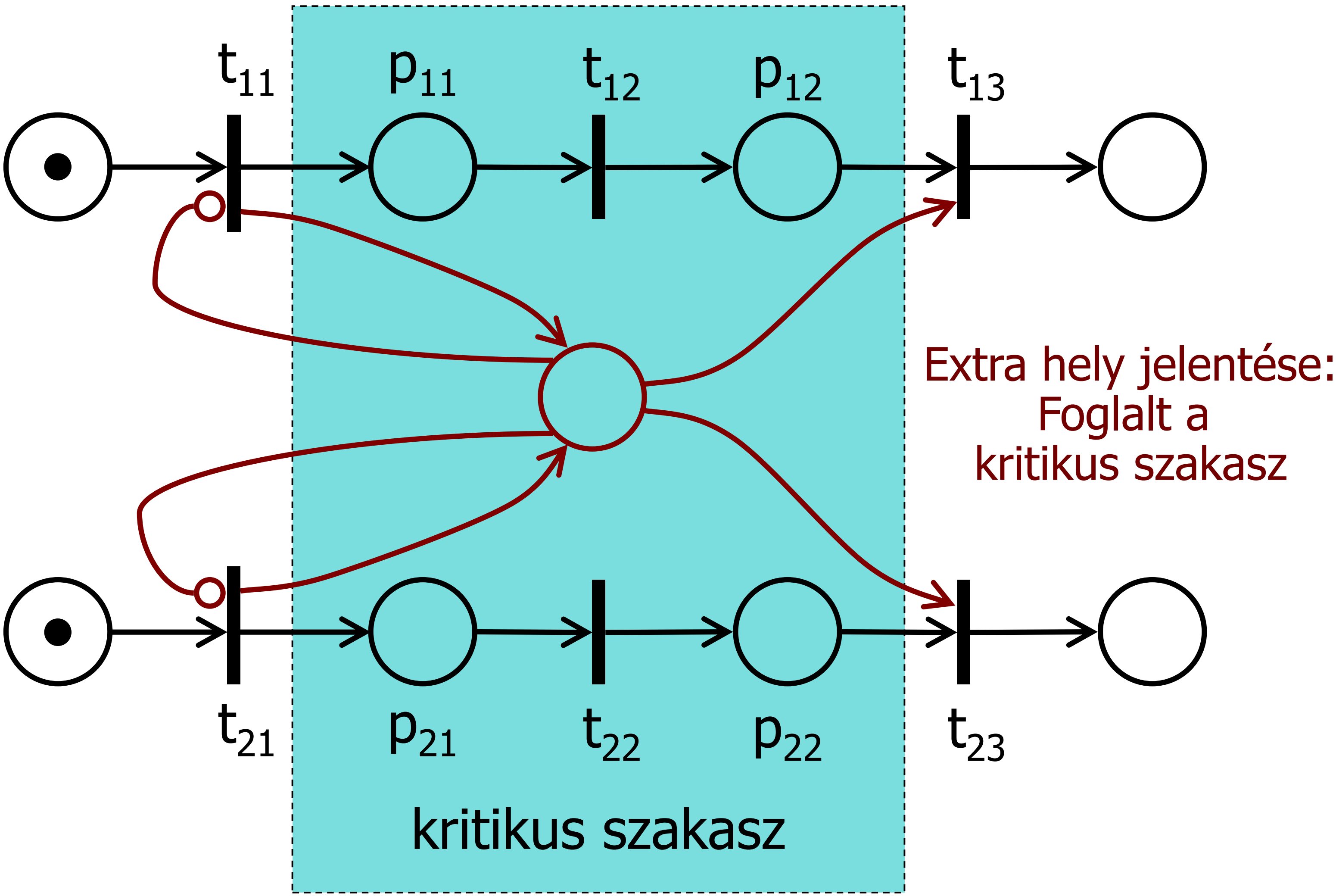


Melyik tranzíció engedélyezett az adott jelölésben?

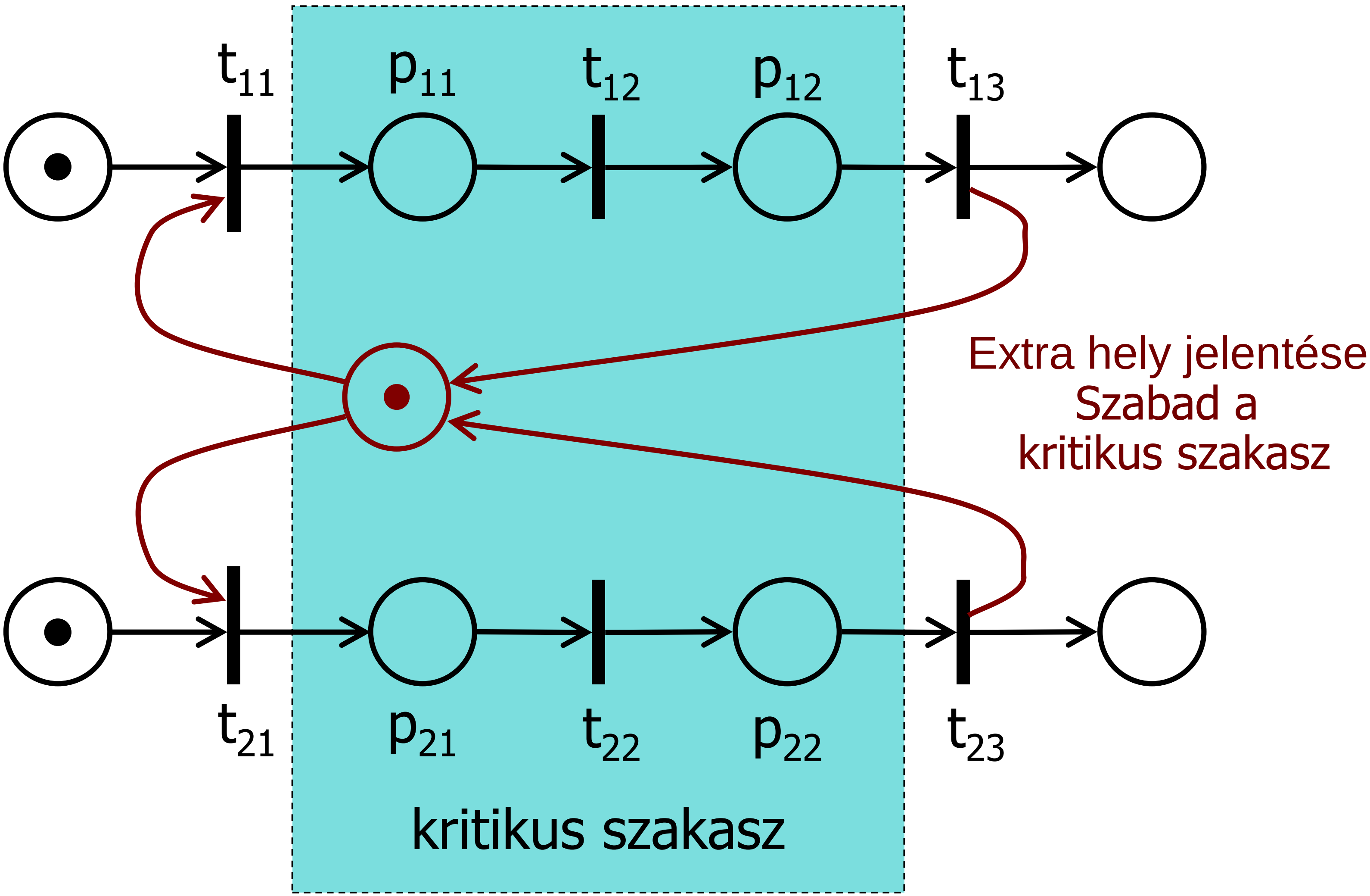
Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élekkel



Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élekkel, elegánsabban

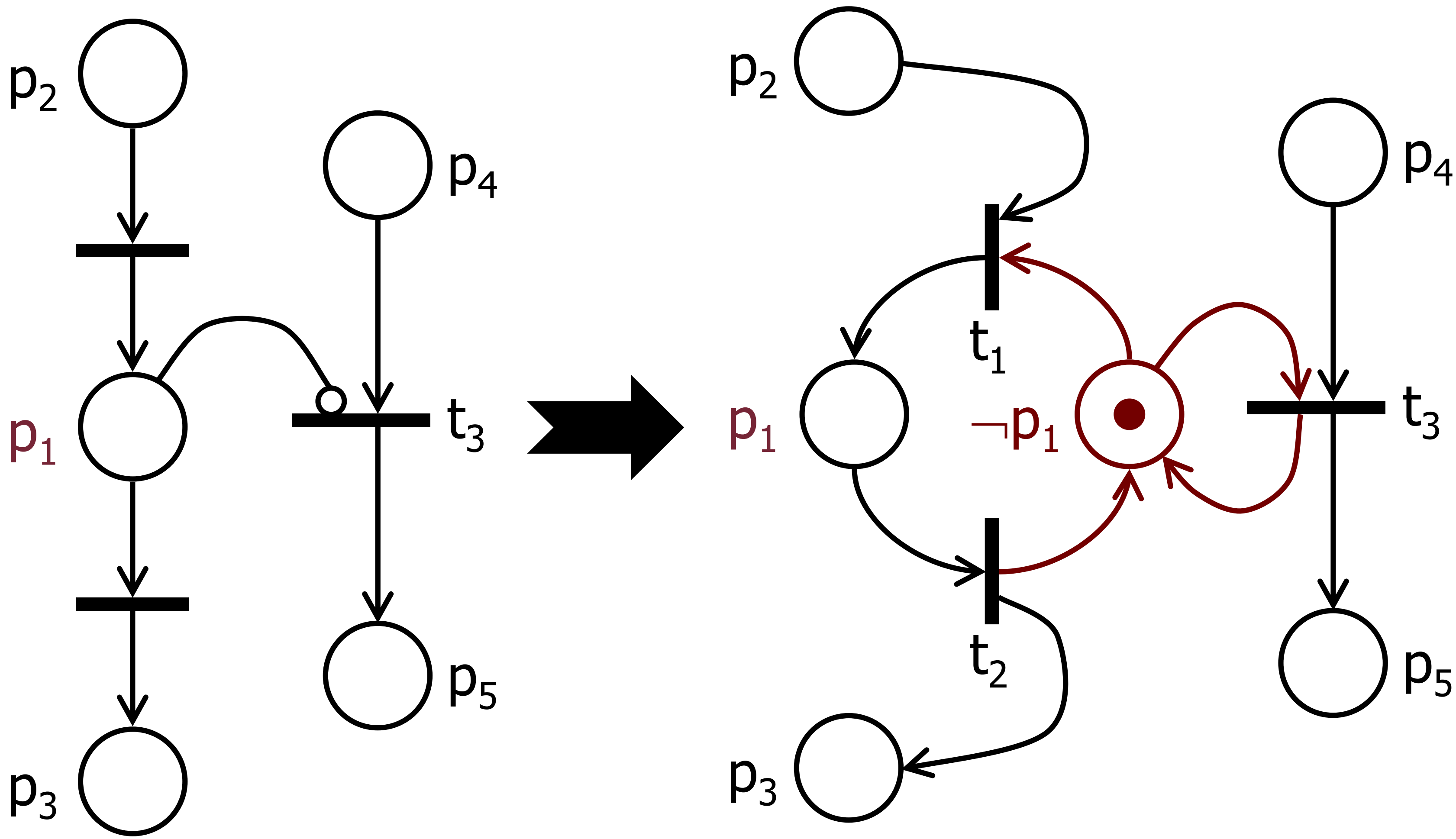


Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élek nélkül



Tiltó él kiváltása egyszerű esetben

Itt a példában: p_1 egyszerű logikai feltételt modellez (0 vagy 1 token)
Nem általánosan használható megoldás (ha nem előre ismert p_1 tokenszáma)



Prioritás bevezetése

- Egyszerre engedélyezett tranzíciók: melyik tüzeljen?
  - Nemdeterminisztikus választás helyett prioritás legyen
- Kiterjesztés: Tranzíciókhoz rendelt prioritás
- Tüzelési szabály módosítása:
  - Az engedélyezett tranzíciók közül egy alacsonyabb prioritású mindaddig nem tüzelhet, amíg van engedélyezett ÉS magasabb prioritású tranzíció
  - Azonos prioritási szinten belül továbbra is nemdeterminisztikus a választás

Bővítések a formális definícióban

Petri-háló (PN): $PN = \langle P, T, \Pi, E, H, W, M_0 \rangle$

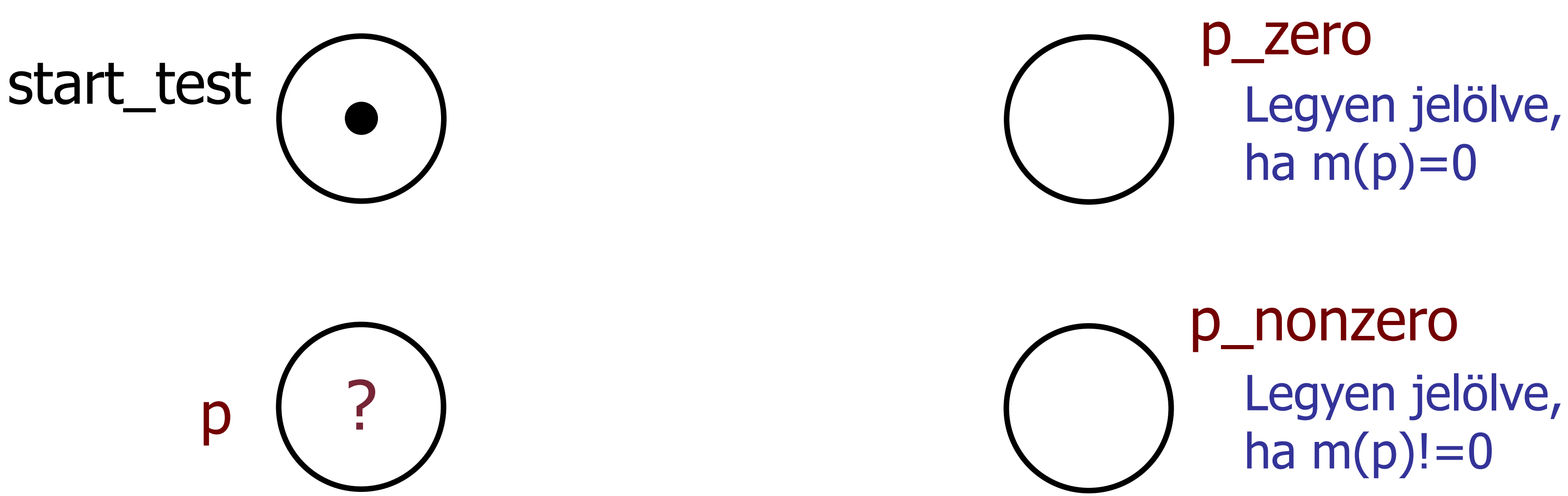
- Helyek: $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
- Tranzíciók: $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$

  $P \cap T = \emptyset$
- Prioritások: $\Pi : T \to \mathbf{N}$
- Normál élek: $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Tiltó élek: $H \subseteq (P \times T)$
- Súlyfüggvény: $W: E \to \mathbf{N}^+$
- Kezdőállapot: $M_0 : P \to \mathbf{N}$

Klasszikus Petri-hálók egy problémája

- Hely ürességének vizsgálata: „Zero testing”

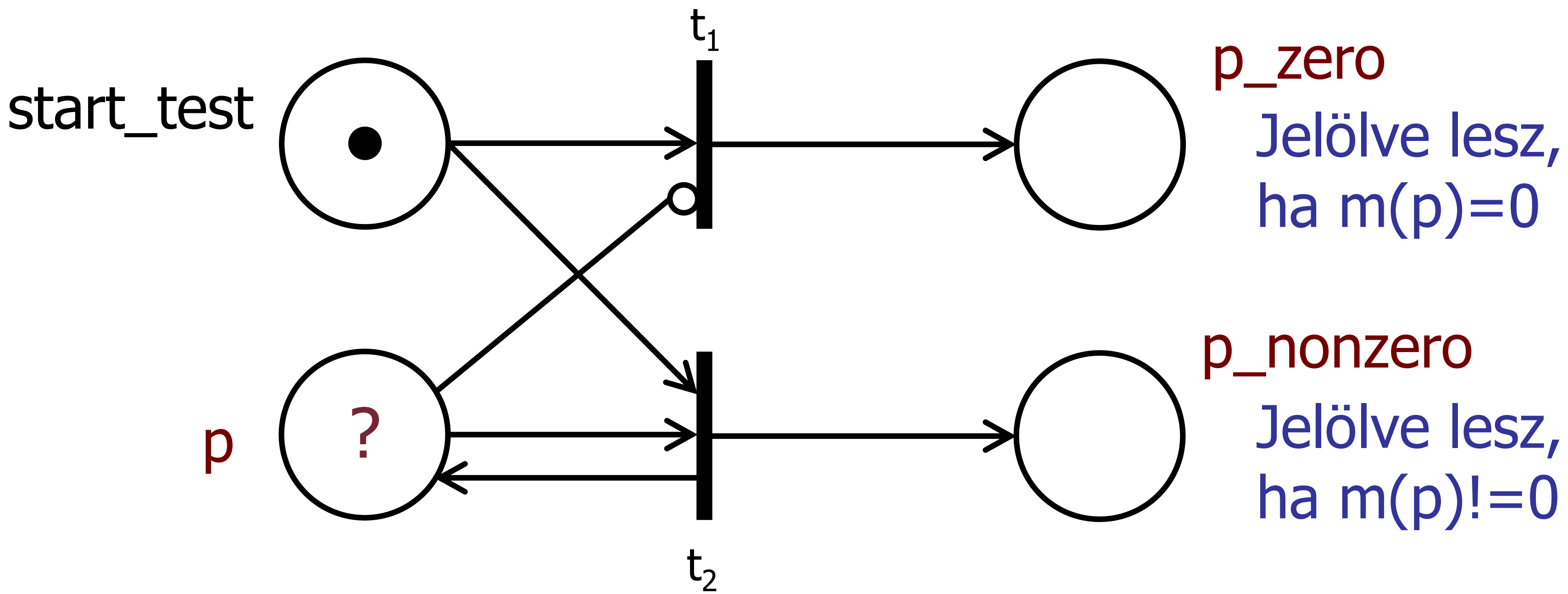
  Szeretnénk a hálóban egy p_zero hely jelölésében látni, hogy m(p)=0 fennáll-e egy általános p helyre, illetve p_nonzero jelölésében látni, hogy m(p)!=0 fennáll-e adott állapotban (start_test jelölése esetén)



Kifejezőerő tiltó éllel

- Tiltó él képes „zero testing”-re: m(p)=0 vizsgálata

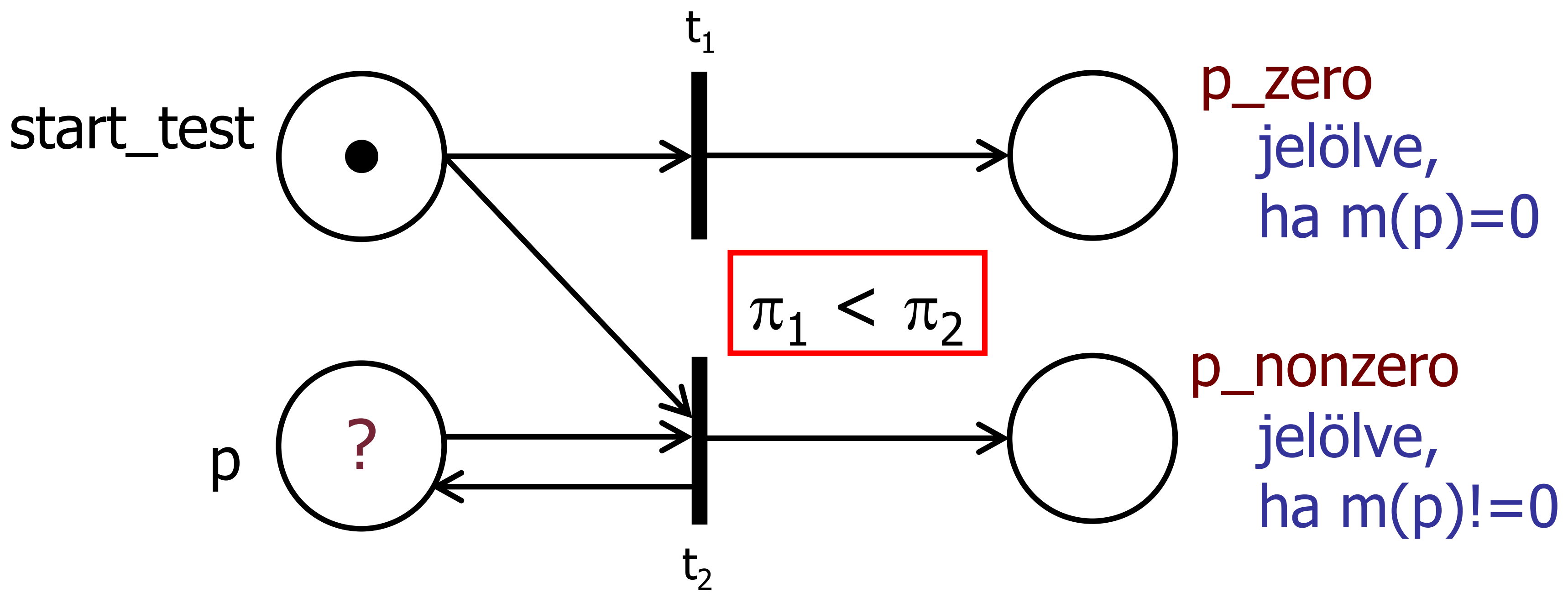
  A hálóban egy p_zero hely jelölésében látjuk, hogy m(p)=0 fennáll-e, illetve p_nonzero jelölésében látjuk, hogy m(p)!=0 fennáll-e adott állapotban (start_test jelölése esetén)



Kifejezőerő prioritással

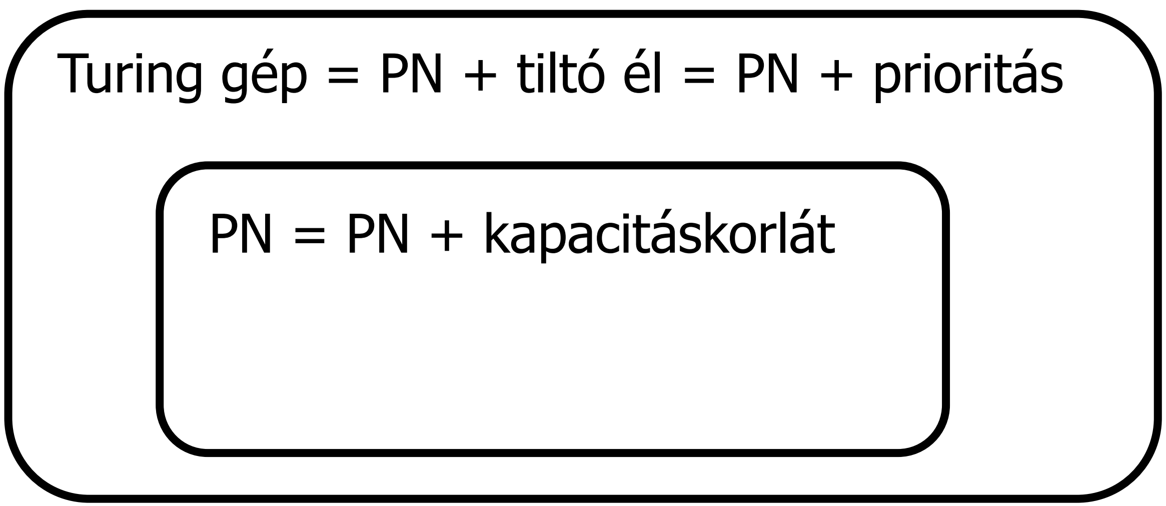
- Prioritás képes „zero testing”-re: m(p)=0 vizsgálata

  A hálóban egy p_zero hely jelölésében látjuk,
  hogy m(p)=0 fennáll-e,
  illetve p_nonzero jelölésében látjuk, hogy m(p)!=0 fennáll-e
  adott állapotban (start_test jelölése esetén)



Kifejezőerő összefoglalása

- „Zero testing” képesség lehetővé teszi, hogy minden Turing gép szimulálható Petri-hálóval
  - Következmény: nehéz analízis, eldönthetetlen problémák
- A kapacitáskorlát csak szintaktikus konstrukció



J.L. Peterson, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice-Hall, 1981.

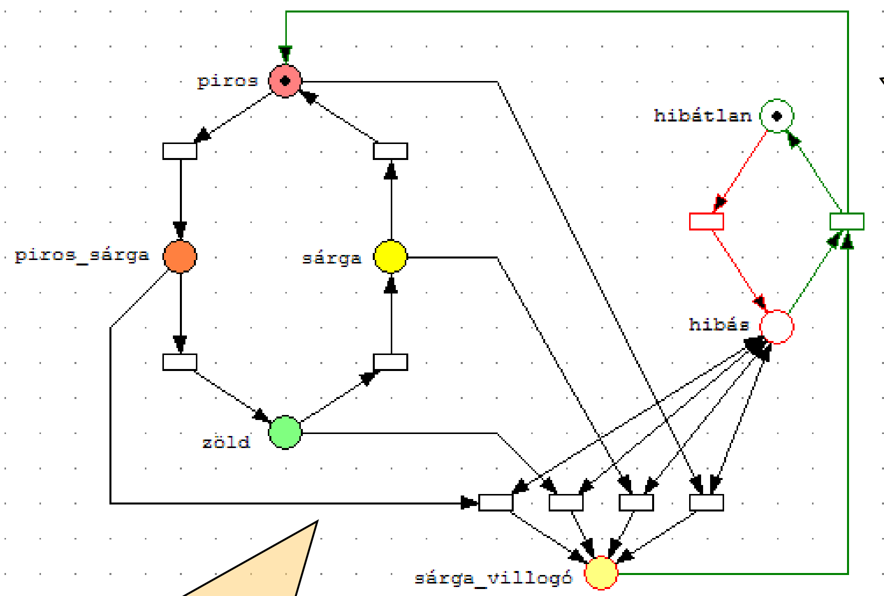
Kiterjesztés nélküli PN kifejező ereje

- Vannak-e olyan rendszerek, amelyek nem modellezhetőek Petri-hálóval, ha egyik kiterjesztést sem használhatjuk?

  IGEN
- A „nem modellezhetőség” kulcsa:
  - Nem korlátos kapacitású hely esetén nem tesztelhető, hogy a helyen adott k számú token van-e vagy sem
  - Speciális esetként k=0, ami „zero testing” probléma néven ismert
    - Belátható, hogy egy megoldás a „zero testing” problémára megoldást ad az általános k-val paraméterezett esetre

Példák: Petri-háló modellek

Egyszerű modellek: Forgalmi lámpa meghibásodással

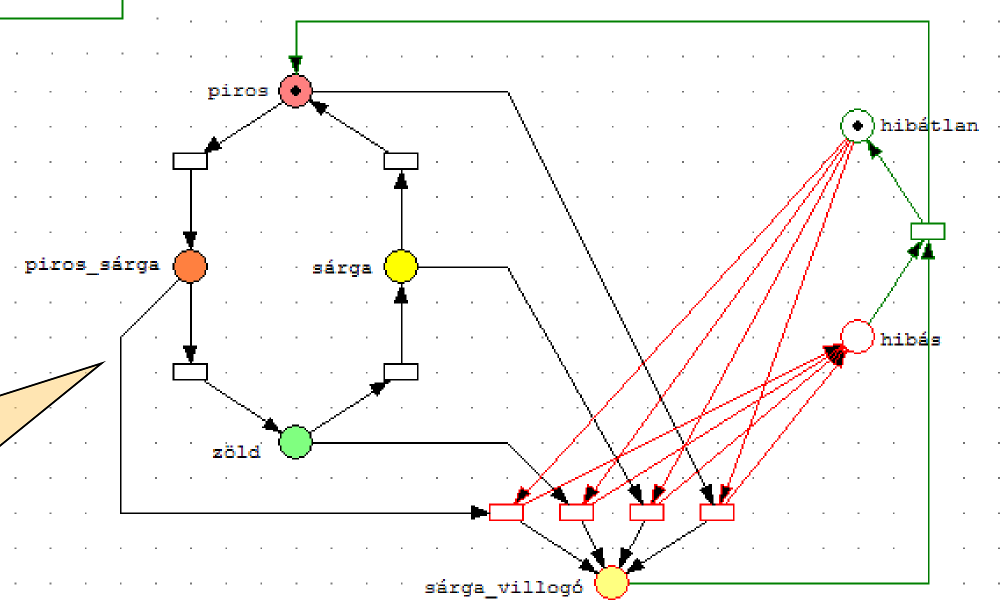


Modellezési konstrukciók:

- Véletlen esemény
- Szinkronizáció
- Állapotváltozó

Hibás modell: A meghibásodás hatása csak egy alternatíva

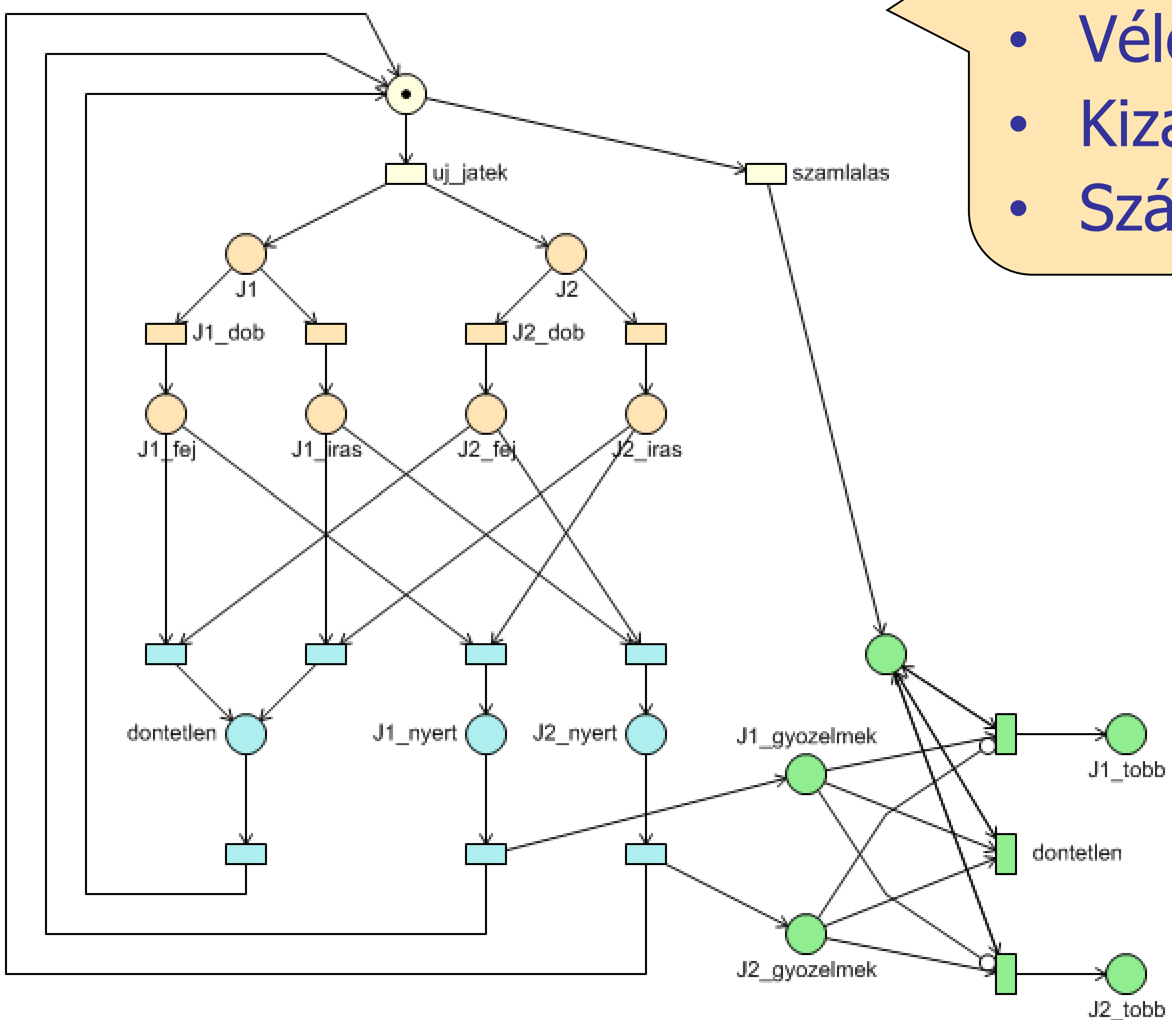
Javított modell: A meghibásodás állapotváltást jelent



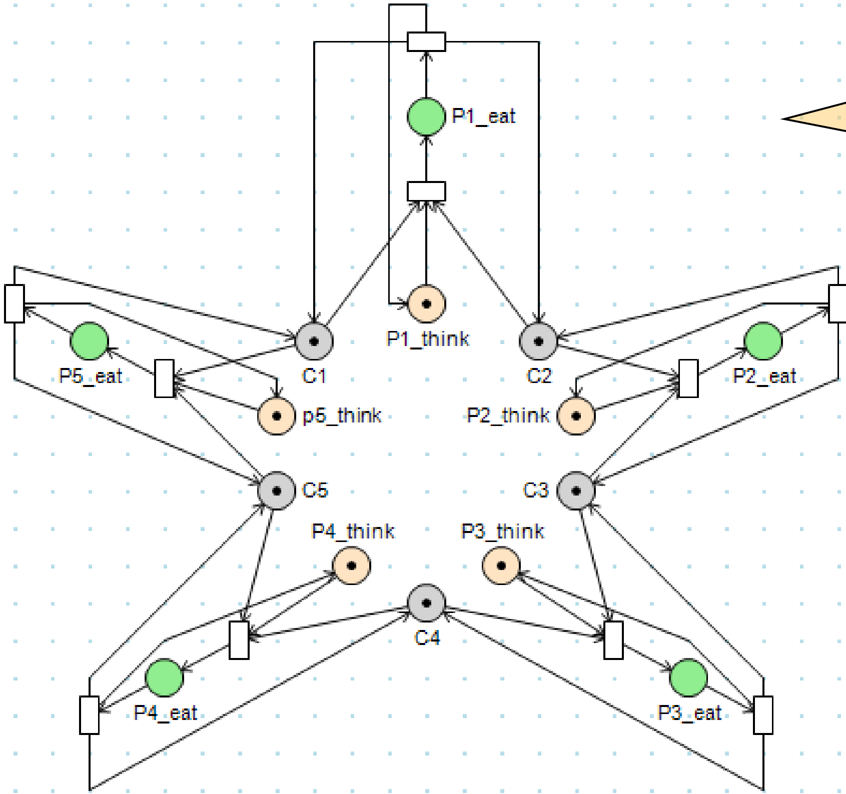
Egyszerű modellek: Pénzfeldobós játék

Modellezési konstrukciók:

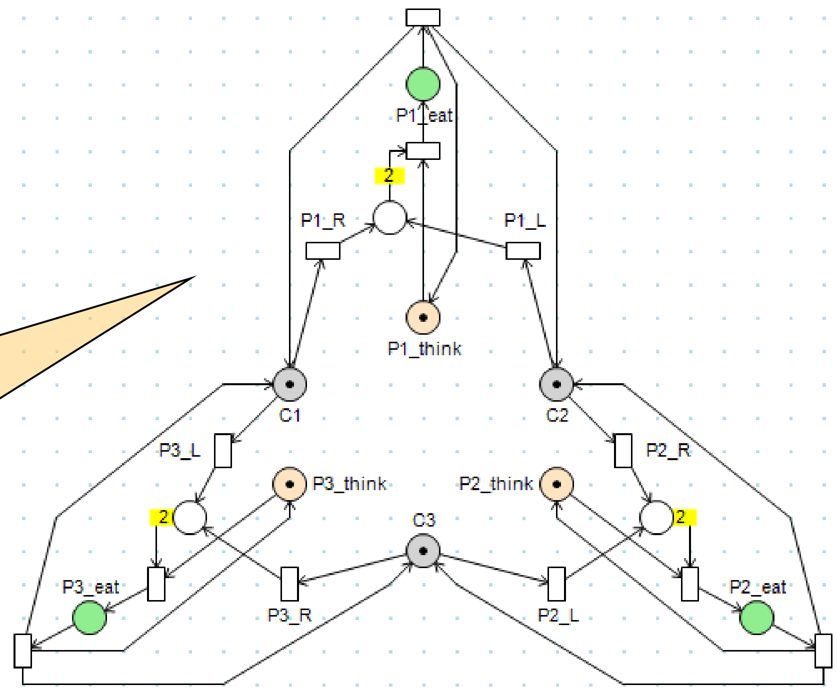
- Véletlen választás
- Kizárások (alternatívák)
- Számlálás (döntéshez)



Egyszerű modellek: Étkező filozófusok



Modellezési konstrukciók:
- Atomi esemény: Két villa felvétele



Modellezési konstrukciók:
- Egy villa felvétele egy független esemény
- Holtpont lehetőség

Összefoglalás

- Petri-hálók felépítése és működése
  - Alapelemek
  - Szintaxis
  - Szemantika
- Kiterjesztések
  - Kapacitáskorlát
  - Tiltó élek
  - Prioritások
- Modellezési példák
  - Konkurens, aszinkron rendszerek