

Név:

Neptun kód:

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

| 1. | 2. | 3. | 4. | $\Sigma$ |
|----|----|----|----|----------|
|    |    |    |    |          |

**1. feladat** Mikor mondjuk, hogy egy metrikus tér *teljes*? Mondjuk ki a Banach fixpont tételt!

**2. feladat** Legalább mekkora kell, hogy legyen  $\int_0^3 |f(x)|^3 dx$  értéke, ha  $\int_0^3 x^2 f(x)^2 dx = 1$ ?

**3. feladat** Az  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  függvény kielégíti a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)e^{-|2s|} ds = \frac{1}{1+t^2}$$

függvény-egyenletet. Határozzuk meg  $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)f(x)}{x} dx$  értékét! (Segítség: 1) a megadott függvény-egyenlet segítségével határozzuk meg  $f$  Fourier-transzformáltját, 2) gondoljunk az  $I$  integrálra mint egy  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  -ben fölírt skaláris szorzatra!)

**4. feladat** Keressük azt az  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (legalább kétszer folytonosan deriválható) függvényt, melynek grafikonja és a vízszintes koordináta-tengely között bezárt előjeles terület éppen egy előre megadott  $T \in (0, \pi/2)$  paraméter, de ezen megkötés mellett a lehető legrövidebb úton köti össze a  $(-1, 0)$  és  $(1, 0)$  pontokat.

- Fogalmazzuk meg a fentieket mint egy variációszámítási feladatot!
- Mutassuk meg, hogy az optimális út egy körív!