Feltételes variációszámítási probléma:

adott peremfeltételt kielégítő $\phi_1, \phi_2 .. \phi_n$ fgv. n-esek közt keressük

$$I(\phi_1, \phi_2 .. \phi_n) = \int_\Omega \mathcal{L}\left(\underline{x}, \phi_1(\underline{x}), .. \phi_n(\underline{x}), \underline{\nabla}\phi_1(\underline{x}), ... \underline{\nabla}\phi_n(\underline{x})\right) dV(\underline{x})$$

Lagrange sűrűség

minimumát / maximumát a

$$\int_\Omega \mathcal{G}_j\left(\underline{x}, \phi_1(\underline{x}), .. \phi_n(\underline{x}), \underline{\nabla}\phi_1(\underline{x}), ... \underline{\nabla}\phi_n(\underline{x})\right) dV(\underline{x}) = 0 \qquad (j = 1, .. k)$$

integrál-feltételek mellett.

$\hookrightarrow$ E-$\mathcal{L}$ egyenletek a

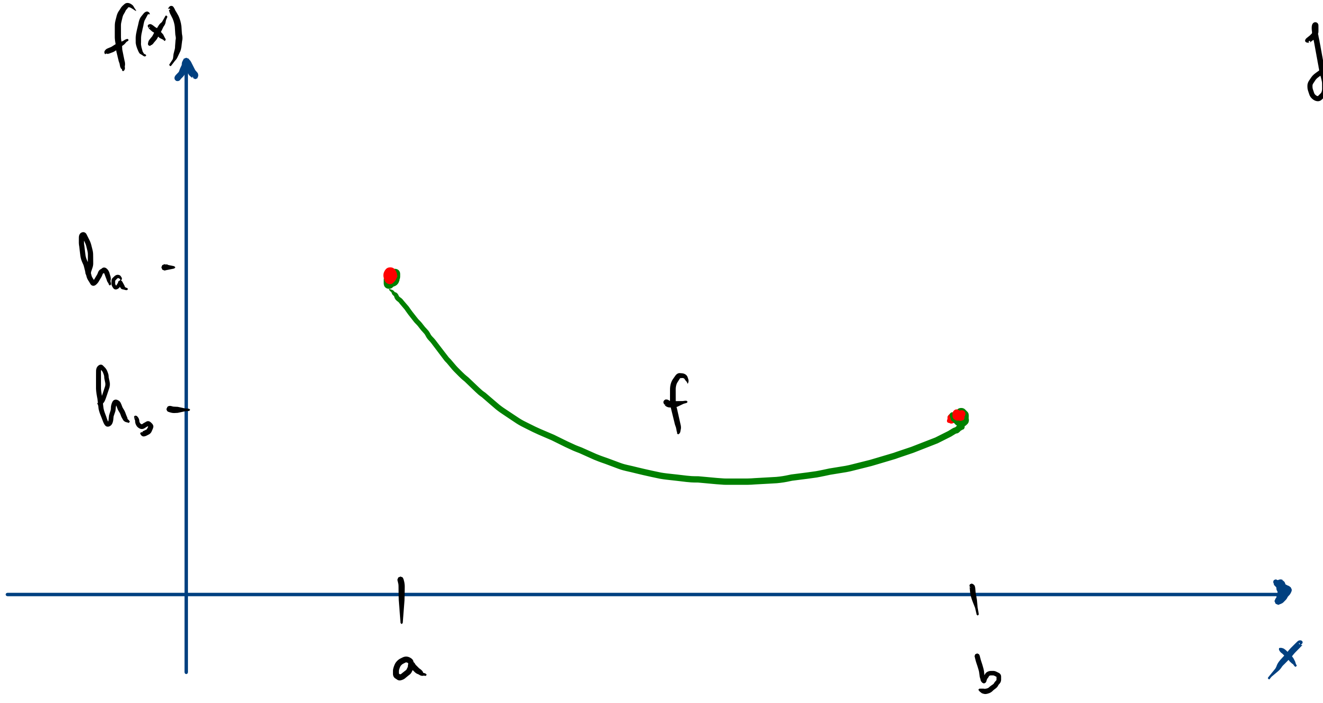
$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 \dots - \lambda_k G_k$$

Lagrange-sűrűségfüggvényre ($\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ paraméterekkel)

+ perem és int. feltételek felírása

(a paraméterek belövésére)

Fizikai példa: láncgörbe meghatározása.



$$\mathcal{H}(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \text{lánchossz}$$

$$\mathcal{E}(f) = \int_a^b \kappa \sqrt{1+(f'(x))^2}\, f(x)\,dx \quad \text{lánc. pot. energiája}$$

Keressük az $f(a) = h_a$, $f(b) = h_b$ peremfeltételt kielégítő fgv. közt azt, melyre

$\mathcal{E}(f)$ minimális a $\mathcal{H}(f) = L$ feltétel mellett.

Vagyis:

$$\mathcal{L}(x,f,f') = \kappa\sqrt{1+(f')^2}\, f$$

$$\mathcal{G}(x,f,f') = \sqrt{1+(f')^2} - \frac{L}{b-a}$$

$$\hookrightarrow \tilde{\mathcal{L}}(x,f,f') = \kappa\sqrt{1+(f')^2}\, f - \lambda\left[\sqrt{1+(f')^2} - \frac{L}{b-a}\right]$$

$$= \kappa\sqrt{1+(f')^2}\left(f - \frac{\lambda}{\kappa}\right) + \text{konst.}$$

$$\hookrightarrow \text{E-L}: \quad \kappa\sqrt{} = \kappa\left(\frac{f'}{\sqrt{}}\left(f-\frac{\lambda}{\kappa}\right)\right)'$$

$$\tilde f := f - \frac{\lambda}{\kappa} \Rightarrow \tilde f' = f' \quad \text{és így E-L:}$$

$$\sqrt{1+(\tilde f')^2} = \left(\frac{\tilde f'}{\sqrt{1+(\tilde f')^2}}\,\tilde f\right)' = \frac{\left(\tilde f''\tilde f + (\tilde f')^2\right)\sqrt{1+(\tilde f')^2} - \tilde f'\tilde f\,\frac{\tilde f'}{\sqrt{1+(\tilde f')^2}}\,\tilde f''}{1+(\tilde f')^2}$$

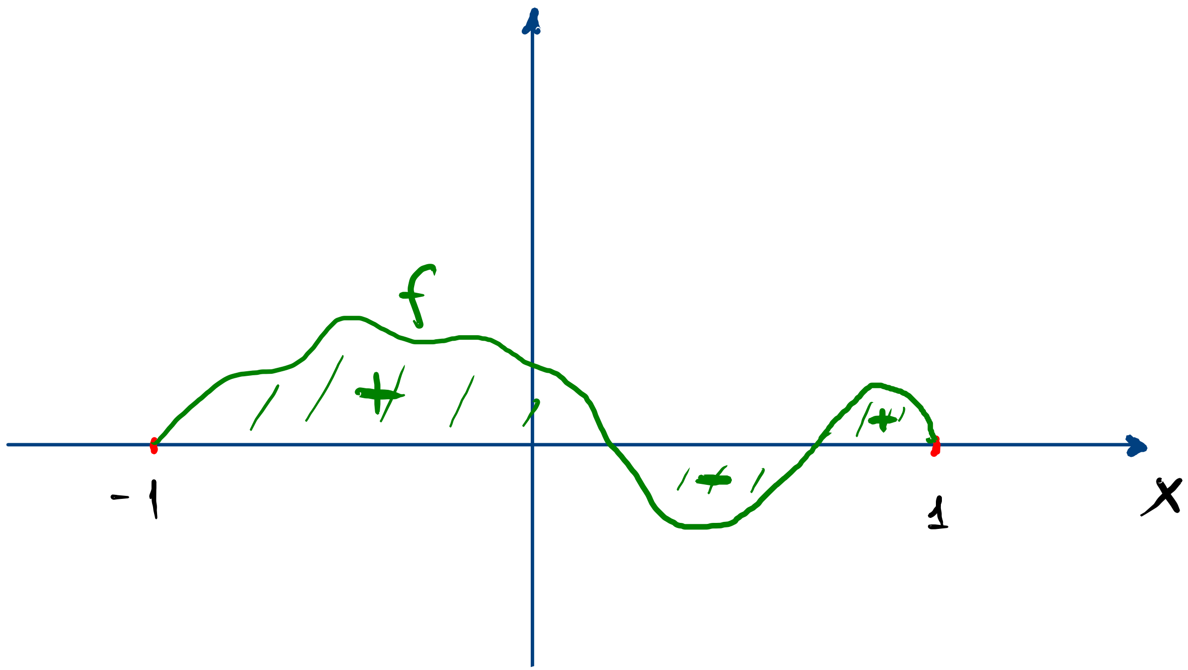
$$\hookrightarrow \quad 1+\cancel{(\tilde f')^2} = \tilde f''\tilde f + \cancel{(\tilde f')^2} - \frac{(\tilde f')^2}{1+(\tilde f')^2}\,\tilde f''\tilde f = \frac{1}{1+(\tilde f')^2}\,\tilde f''\tilde f + \cancel{(\tilde f')^2}$$

$$\hookrightarrow \quad \tilde f''\tilde f - (\tilde f')^2 = 1 \Rightarrow \tilde f(x) = A\cdot \mathrm{ch}\left(\frac{x}{A}+B\right)$$

$$\hookrightarrow \quad f(x) = A\cdot \mathrm{ch}\left(\frac{x}{A}+B\right) + \frac{\lambda}{\kappa}$$

3 szabad paraméter!

Feladat



Találjuk meg azt az f fgv.-t, melynek grafikonja a lehető legrövidebb úton köti össze a (-1,0) és (1,0) pontokat az a feltétel mellett, hogy a fgv. grafikon és a vízszintes koordinátatengely által közrefogott előjeles teljes terület pontosan $T = 1/2$!