1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

FMInf_AlkAlg 1. vizsga 23-01-10 **Neptun:** ________ **Név:** ____________________

A vizsga feladatainak **eredményeit erre** *az oldalra kell írni, a* **mellékszámításokat a hátoldalra** *és ha oda nem fér (egyébként bőven odafér), akkor külön lapra, melynek jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 8.*

1. Igaz–Hamis I|H *(4 pont – hibás válasz −0.5 pont)*

a) Azon $\mathbf{b}$ vektorok, melyre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak. $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ $\boxed{\text{I}}$

b) Az $\mathbf{XY}$ mátrix minden sora az $\mathbf{X}$ sorainak és minden oszlopa az $\mathbf{Y}$ oszlopainak lineáris kombinációja. $\boxed{\text{H}}$

c) Az $\mathbb{R}^2$ téren a $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ formula skaláris szorzást definiál. igen, pozitív definit $\boxed{\text{I}}$

d) Ha egy mátrix irreducibilis de nem primitív, akkor van olyan hatványa, ami reducibilis. $\boxed{\text{I}}$

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján! *(4 pont)*

a) Az $\mathbf{A}$ mátrix PLU-felbontása legyen $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$. Felhasználva e felbontást írjuk fel azt a két egyenletrendszert, amelynek visszahelyettesítésekkel való megoldása megadja az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldását!

$\mathbf{Ly} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

b) Van-e bázisa a zérustérnek, és ha igen, adjuk meg!

van, az üreshalmaz, azaz $\emptyset$

c) Hogyan definiáljuk a $\|.\|_a$ vektornorma által indukált mátrixnormát?

$$\|\mathbf{A}\|_a = \max_{\|\mathbf{x}\|_a = 1} \|\mathbf{Ax}\|_a$$

d) Karikázzuk be azokat a fügvényeket, melyek értelmezve vannak az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Jordan-mátrix spektrumán!

$\underline{\sqrt{x}}$ $\underline{\operatorname{sgn} x}$ $|x-1|$ $\underline{\sin(x)}$

3. Számítsuk ki a következőket! *(4 pont)*

a) A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontásának csak az $\mathbf{U}$ mátrixát ismerjük. Ennek alapján fel tudjuk-e írni a Cholesky-felbontását? Ha nem miért nem, ha igen, mi az? $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$, ahol $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

b) Írjuk fel a pszeudoinverzét annak a mátrixnak, melynek a QR-felbontása $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6\times 8}$ mátrix nullitása 4. Mennyi az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullitása? 2

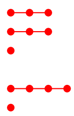
d) Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix bal Perron-vektorát!

$(3/4, 1/4)$

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix Frobenius-, 1, és 2-normáját! *(2 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 4$

5. *(2 pont)* Egy 12×12 méretű $\mathbf{A}$ mátrixnak két sajátértéke van: 0 és 1. Az $\mathbf{A}$ hatványainak nullitásai rendre 3, 5, 7, az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványaié 2, 3, 4, 5. Rajzoljuk le a Jordan-láncok diagramját, és adjuk meg a Jordan-mátrixot.



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|cccc|c}
0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

6. *(2 pont)* Számítsuk ki az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ mátrixot, ha $\mathbf{A}$ Jordan-felbontása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{J}t}\mathbf{C}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix}$$

7. Reducibilis, irreducibilis vagy primitív-e az alábbi mátrix? A választ indokoljuk néhány szóban és/vagy egy alkalmas gráffal és/vagy mátrixszal. *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. mo: reducibilis, mert a $(3,5)$ párba máshonnan nem megy él.
2.mo: a 3-dik és 4-dik sorok és oszlopok cseréje után a jobb felső blokk zérusmátrix