1	2	3	4	5	6	$\sum$

FMInf_AlkAlg 2. vizsga 23-01-17 **Neptun:** ______ **Név:** ______

A vizsga feladatainak ***eredményeit erre*** *az oldalra kell írni, a* ***mellékszámításokat a hátoldalra*** *és ha oda nem fér (egyébként bőven odafér), akkor külön lapra, melynek jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 8.*

1. Igaz–Hamis I|H *(4 pont – hibás válasz −0.5 pont)*

a) Legyen $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ egy lineáris transzformáció. Ekkor $\mathbb{C}^n$ előállítható annyi invariáns altér direkt összegeként, ahány különböző sajátértéke van L-nek. $\boxed{\text{I}}$

b) Minden unitér és minden önadjungált mátrix unitéren diagonalizálható. $\boxed{\text{I}}$

c) Minden valós pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van. $\boxed{\text{H}}$

d) Ha $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, akkor minden $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ *egyértelműen* előáll egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli elem *lineáris kombinációjaként.* $\boxed{\text{H}}$

2. *(4 pont)* Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

a) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy felsőháromszög-mátrixhoz, feltéve hogy...

minden sajátértéke valós.

b) Azt mondjuk, hogy a valós $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kongruensek ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), ha

van olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

c) A Cayley–Hamilton-tétel szerint bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixra

$\chi_\mathbf{A}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ahol $\chi_\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

d) Karikázzuk be azokat a fügvényeket, melyek értelmezve vannak az $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Jordan-mátrix spektrumán!

$\sqrt{x}$ $\quad x^{\frac{3}{2}}$ $\quad \underline{x^{\frac{5}{2}}}$ $\quad \underline{\sin(x)}$

3. *(4 pont)* Számítsuk ki a következőket!

a) Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $\chi(x) = (x-1)^6$, minimálpolinomja $\mu(x) = (x-1)^3$, a $\lambda = 1$ geometriai multiplicitása 3. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

A 6 csak egyféleképp bontható fel három pozitív egész összegére úgy, hogy a legnagyobbik 3 legyen: $6 = 3+2+1$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right]$$

b) Írjuk fel az $\mathrm{e}^{t\mathbf{J}}$ mátrixot, ha $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) A primitív $\mathbf{A}$ mátrixra és az $\mathbf{x} = (1,2,3)$, $\mathbf{y} = (3,2,1)$ vektorokra $\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = 2\mathbf{y}^\mathsf{T}$. Pusztán ezek alapján kiszámolható-e a következő határérték? Ha nem, röviden indokoljuk, ha igen, számítsuk ki.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)^n = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

ezek pozitív s.v.-ok, így 2 a spektrálsugár, és $\mathbf{p} = \mathbf{x}/6$, $\mathbf{q} = \mathbf{y}/6$

d) Mi a *diagonális alakja* az $\mathbb{R}^n$-et az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ hipersíkra merőlegesen tükröző transzformációnak?

$\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$

4. *(3 pont)* Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az 1-hez tartozó sajátaltér 1-dimenziós, így egyetlen J-blokk tartozik hozzá. (Az ált.s.v-hoz: keresünk egy vektort, amit $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ az $(1,0,0)$-ba, vagy amit $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ a $\mathbf{0}$-ba visz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{J-láncok:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. *(2 pont)* Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixra az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ két sajátvektora $(4,-3)$ és $(3,4)$. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ redukált szinguláris érték szerinti felbontását!

Az adatokból $\mathbf{v}_1 = (4/5, -3/5)$, $\mathbf{v}_2 = (3/5, 4/5)$,
$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (10,0,0) = 10(1,0,0) = \sigma_1\mathbf{u}_1$, és
$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = (0,5,0) = 5(0,1,0) = \sigma_2\mathbf{u}_2$, így

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

6. *(3 pont)* Primitív-e az alábbi mátrix?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igen, mert a harmadik hatványa irreducibilis és van pozitív elem a főátlóján (a gráfján van 3-hosszú kör, így a $\mathbf{A}^3$-ben lesz hurokél). Csak 0-1-esekkel számolva

$$\mathbf{A} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aki négyzetre emelésekkel igazolta a primitivitást, 4-szer kellett hatványoznia: $\mathbf{A}^{16>\mathbf{O}}$.