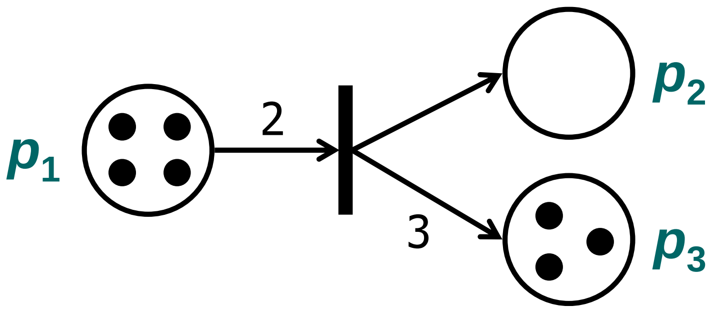
Petri-háló modellek analízise

dr. Bartha Tamás
dr. Majzik István
dr. Pataricza András
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Modellezés Petri-hálókkal

Ismétlés: Petri-hálók

- Alapelemek
  - Helyek, tokenek, tranzíciók, élek (élsúllyal)
  - Állapot: tokeneloszlás-vektor

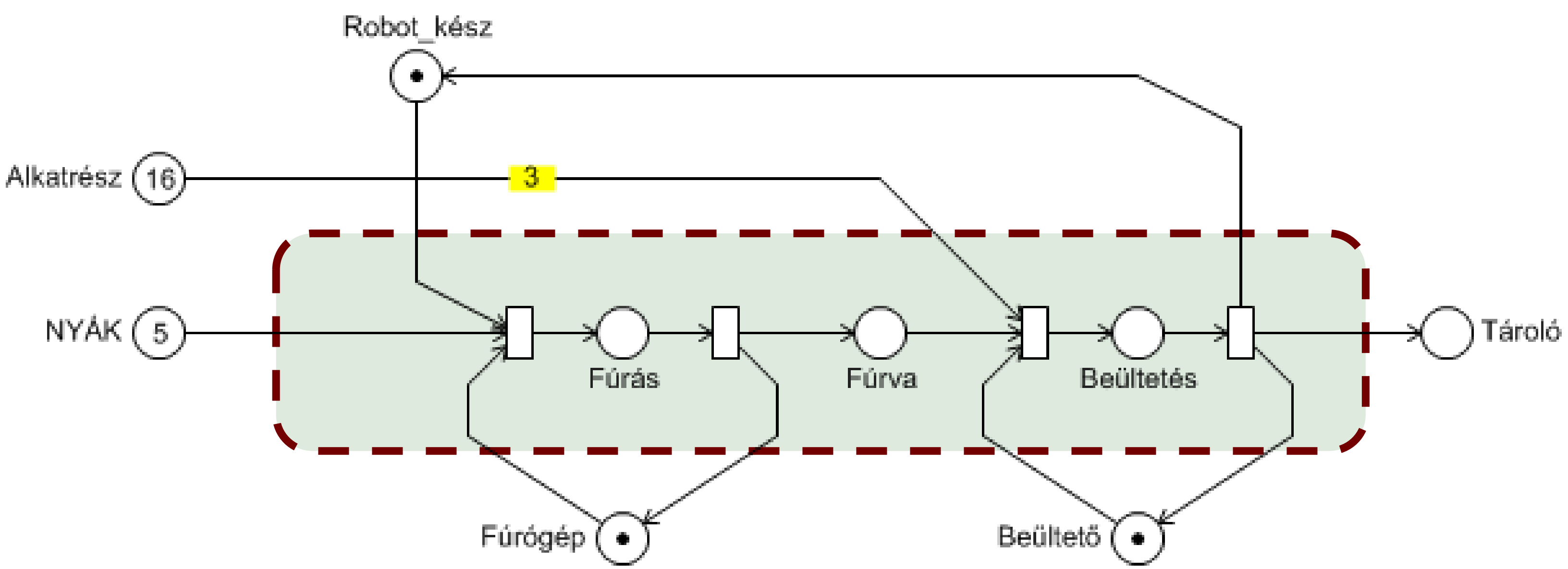


- Szemantika
  - Engedélyezett tranzíció:
    - Bemenő élek végein lévő helyeken legalább annyi token van, mint ami az onnan vezető él súlya
  - Tranzíció tüzelése (engedélyezett tranzíciók közül egy tüzel)
    - Bemenő élek végein lévő helyekről annyi tokent elvesz, mint ami az onnan vezető él súlya
    - Kimenő élek végein lévő helyekre annyi tokent odatesz, mint ami az oda vezető él súlya
- Kiterjesztések
  - Helyek kapacitáskorlátja (nem növeli a kifejezőképességet)
  - Tiltó élek
  - Tranzíciók közötti prioritások

Ismétlés: Petri-hálók és működésük (1)

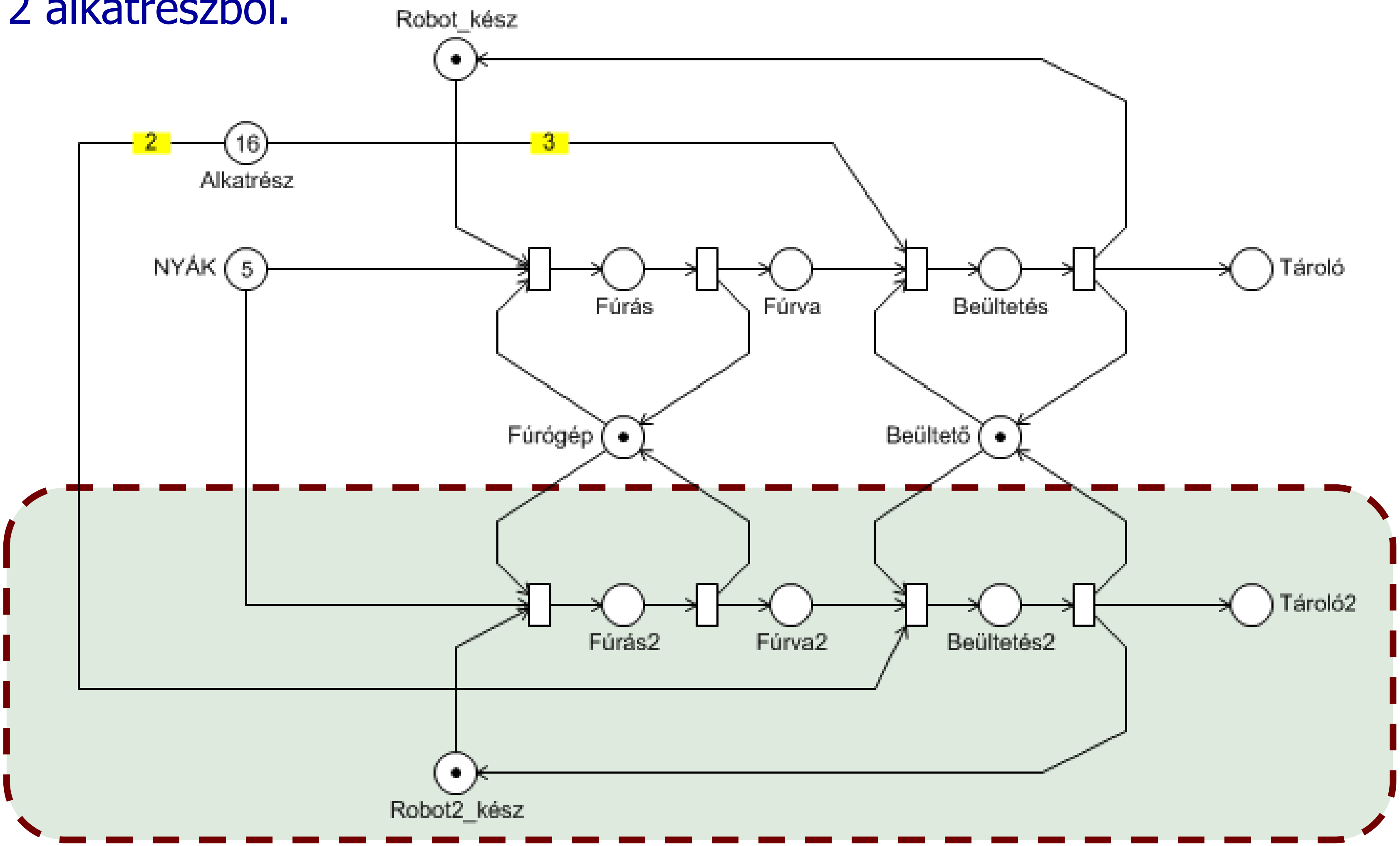
Munkafolyamat modellezése: Kártyagyártás (fúrás és alkatrész beültetés)

- Egy kártyához egy NYÁK és 3 alkatrész szükséges.
- Egy fúrógép és egy beültetőgép áll rendelkezésre, ezeket egy robot kezeli.
- Először a NYÁK-ot ki kell fúrni, majd ebbe beültetni az alkatrészeket.
- A kész kártyákat egy tárolóba kell tenni.
- Egy kártya teljes elkészítése után fog a robot a következő kártyához



Ismétlés: Petri-hálók és működésük (2)

Módosítás: A fúrógépet és a beültetőgépet egy másik robot is használja, ami más konfigurációjú kártyákat készít ugyanazokból a NYÁK lapokból és 2 alkatrészből.

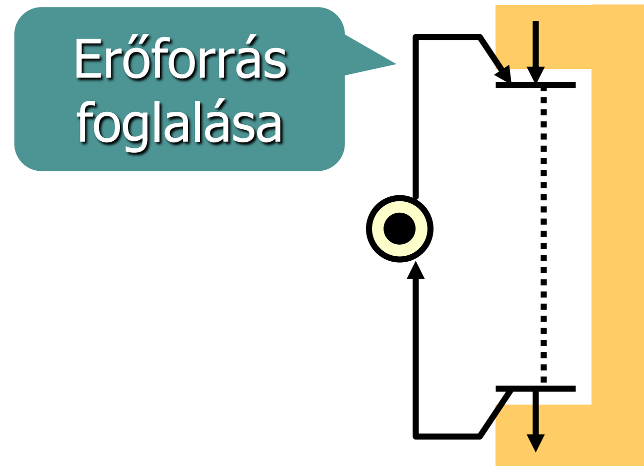


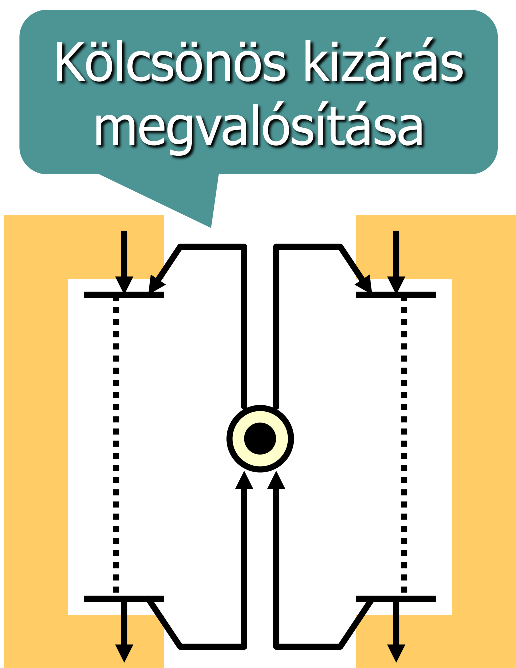
A modellépítés tipikus folyamata

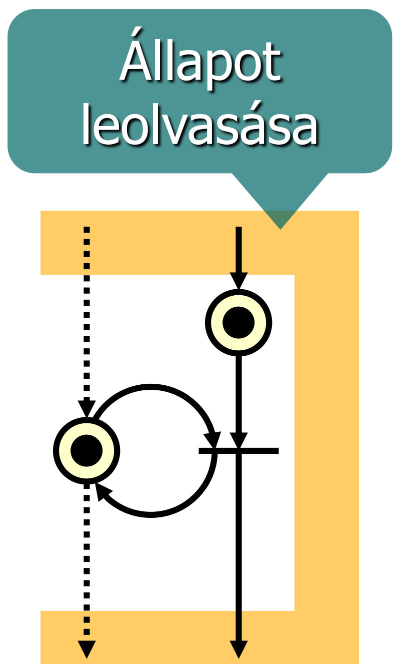
1. A tevékenységek (folyamat) modellje
   - Lépések sorrendezve
   - Erőforrás használat, üzenetváltás feltüntetése nélkül
2. Az erőforrások modellje
   - Állapotok: foglalt, szabad, rendelkezésre áll, …
   - Üzenetek: státusz, tárolás (ha szükséges)
3. Az interakciók szerinti integrálás:
   - Változások hatásának figyelembe vétele:
     Átmenetek összevonása a folyamat és erőforrás modelljében
     - Pl.: „Foglalás” lépés összevonva a „szabad $\rightarrow$ foglalt” átmenettel
   - Tevékenységek feltételeinek figyelembe vétele:
     Élek bekötése az erőforrások és tevékenységek között
     - Pl. „Hibamentes” állapot a tevékenység indításához
     - Társ-folyamat állapota szinkronizációhoz

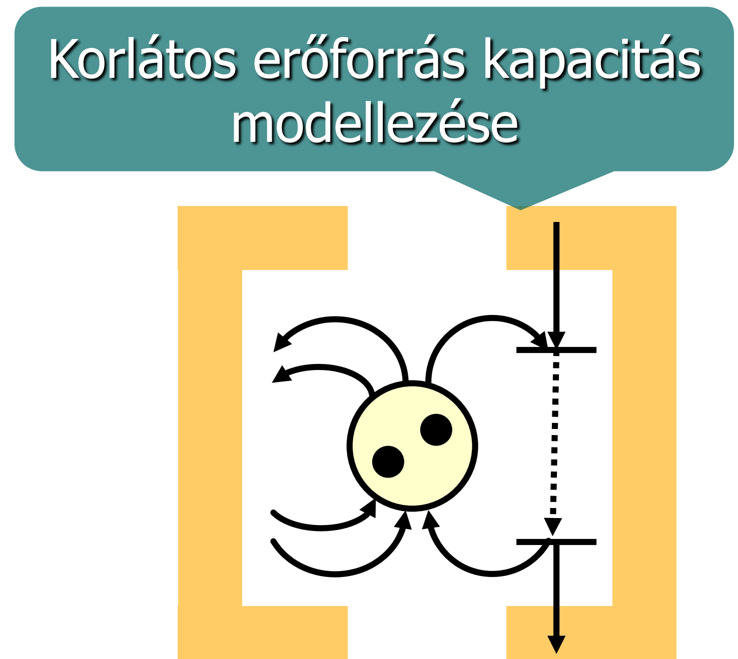
Elemek: Erőforrás allokáció modellezés

- Szükséges erőforrás foglalása
- Kölcsönös kizárás
- Állapot mint feltétel
- Korlátos kapacitású erőforrás igénybe vétele



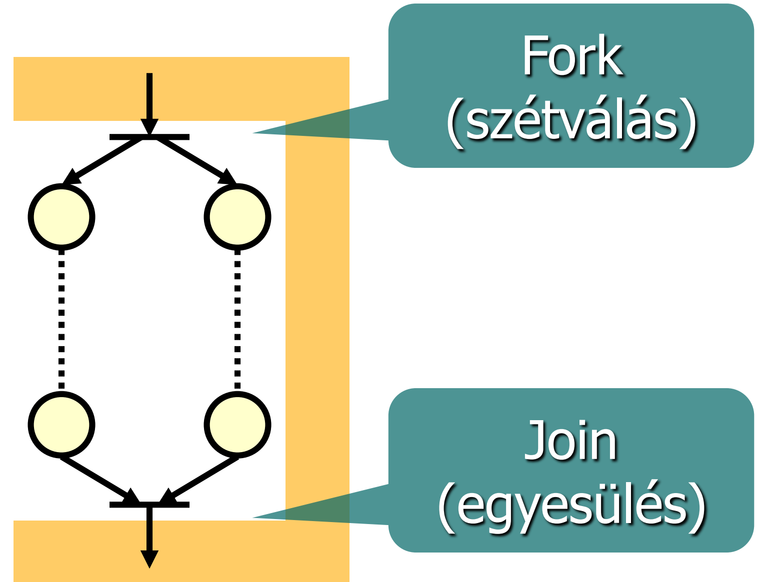


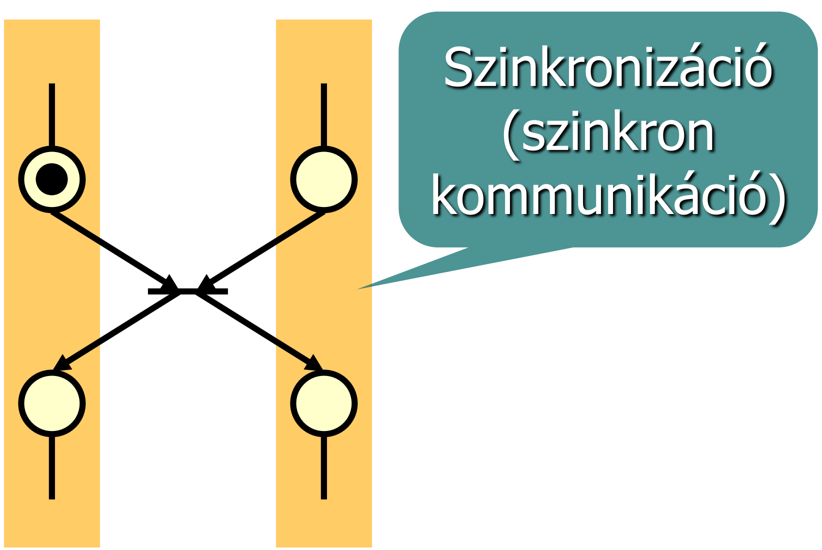


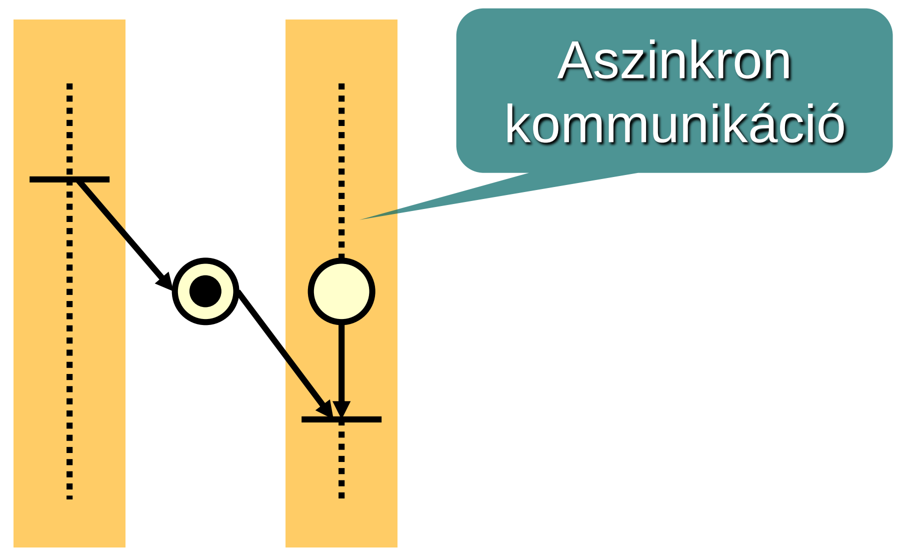


Elemek: Folyamatok közötti kapcsolatok

- Párhuzamosság
  - Fork és join
- Szinkronizáció
  - Egymás bevárása
- Aszinkron kommunikáció
  - Levelesláda jellegű

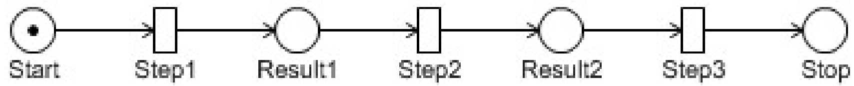




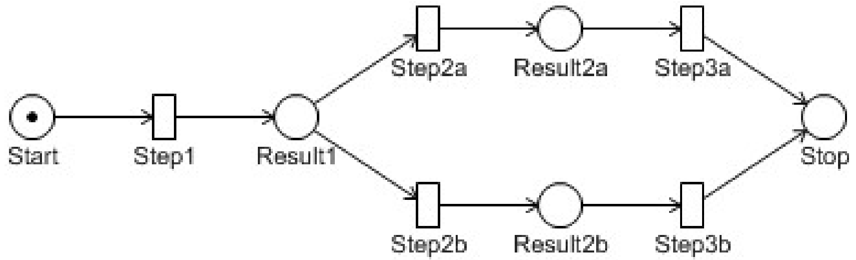


Munkafolyamat minták: Feldolgozás

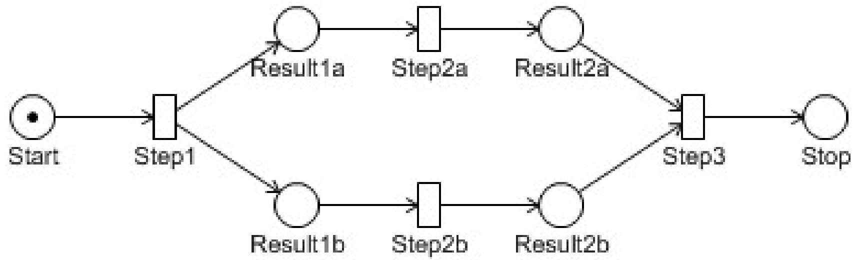
- Szekvenciális feldolgozás:



- Alternatív feldolgozás:

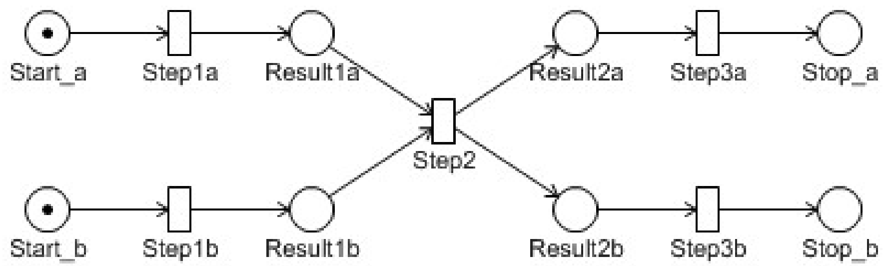


- Párhuzamos feldolgozás:

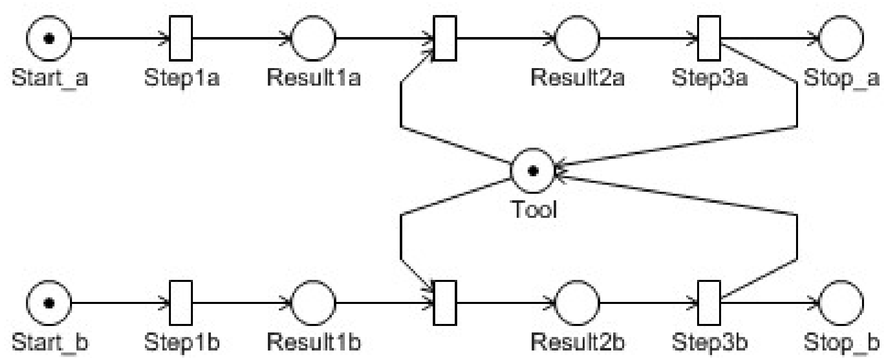


Munkafolyamat minták: Interakciók

- Szinkronizálás (randevú):

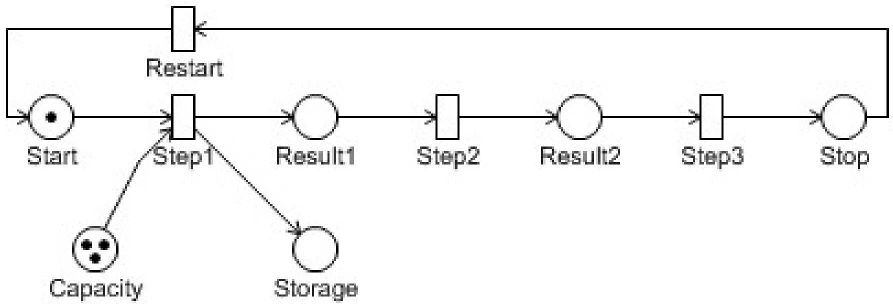


- Megosztott erőforrás (gép, eszköz, munkaerő):

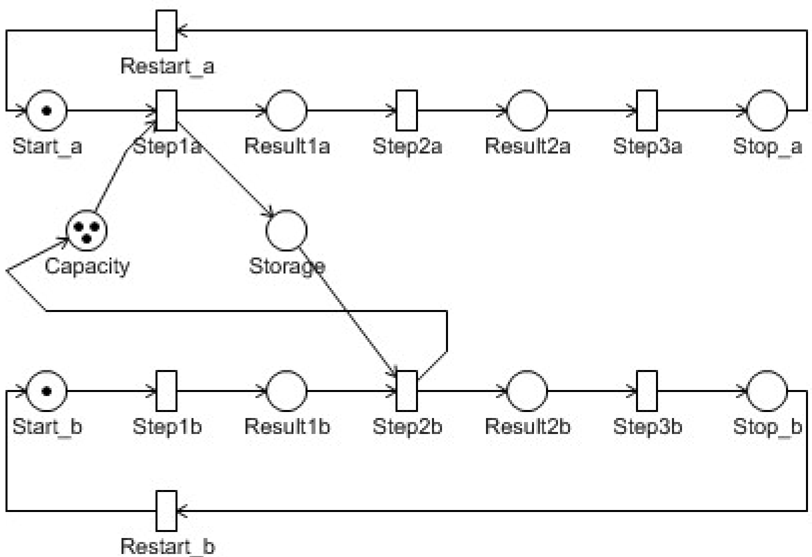


Munkafolyamat minták: Tárolók

- Termelő és véges kapacitású tároló (betelik):

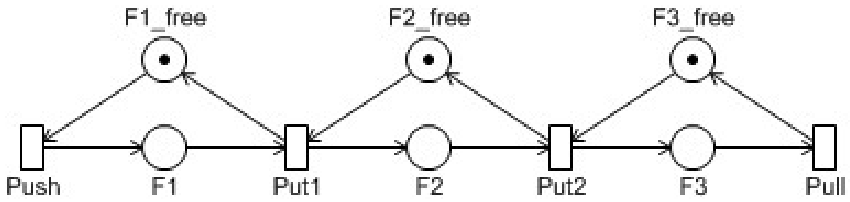


- Termelő és fogyasztó folyamat (interakció a tárolón):

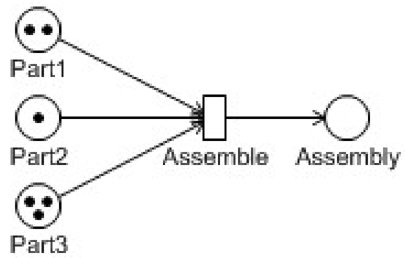


Munkafolyamat minták: Tárolók (folytatás)

- FIFO tároló:

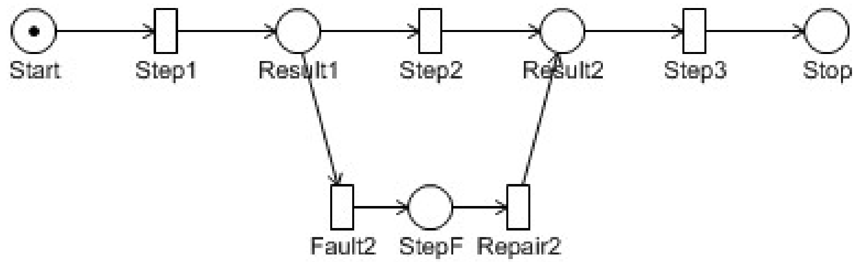


- Szükséges alkatrészek:

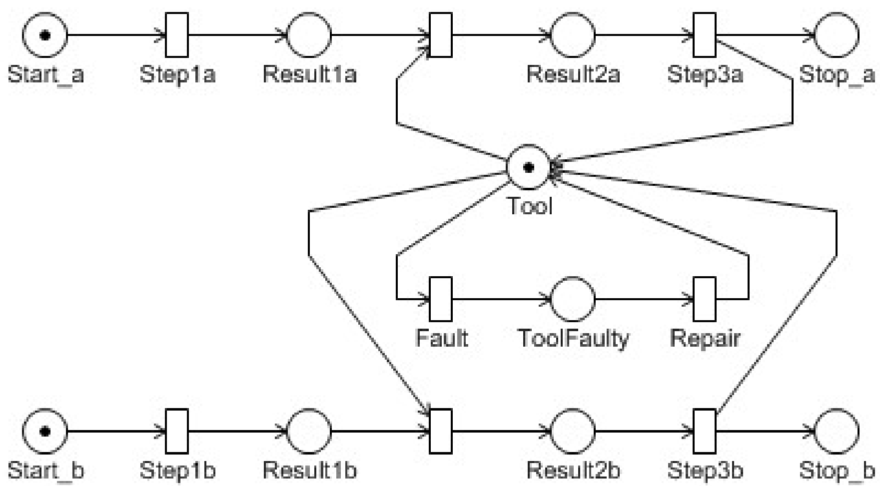


Munkafolyamat minták: Meghibásodások

- Hibás tevékenység és javítás a folyamat során:

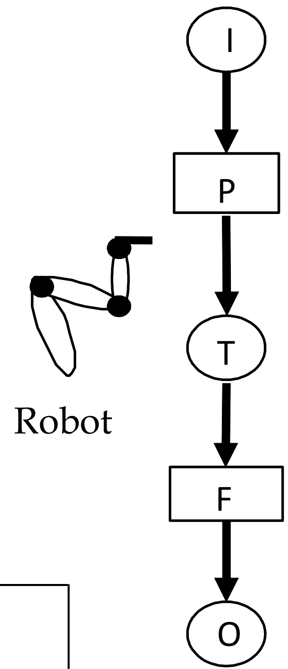


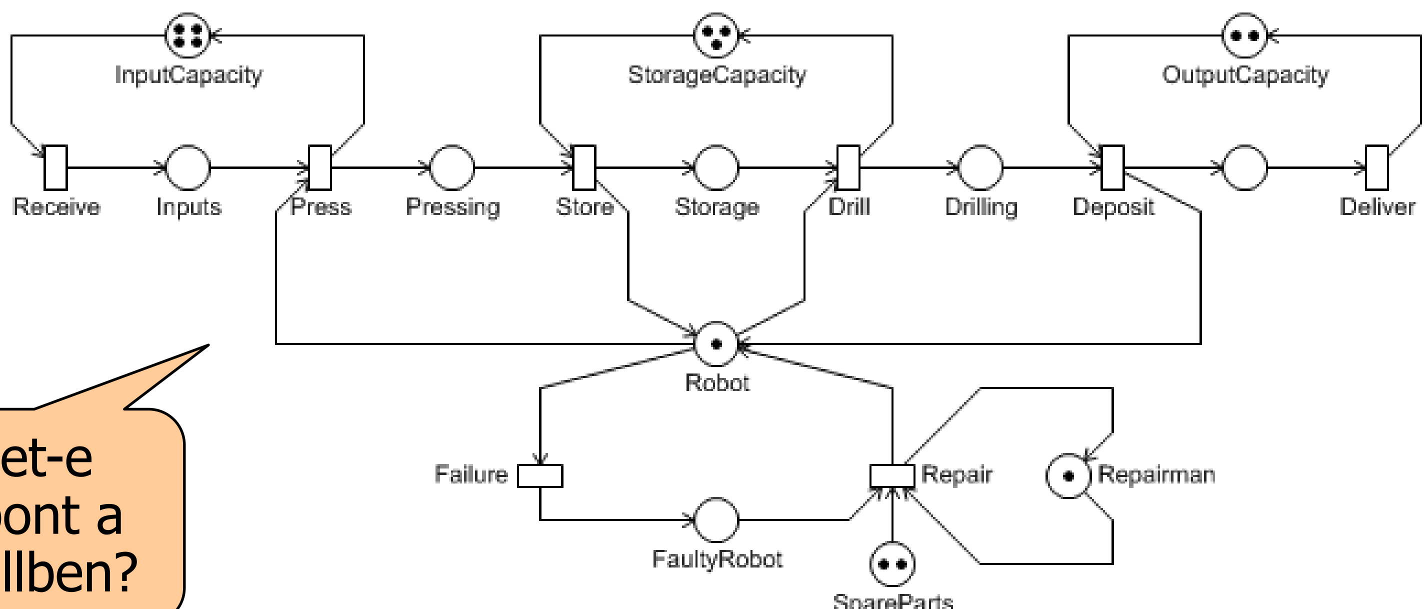
- Erőforrás (itt: megosztott erőforrás) meghibásodása és javítása a feldolgozás során:



Munkafolyamat példa: Robotcella

- Tevékenységek (préselés és fúrás)
- Tárolók (input, tároló, output kapacitáskorláttal)
- Újrahasználható erőforrások (robot, szerelő)
- Meghibásodás (robot)
- Véges erőforrások (alkatrészek)





Lehet-e holtpont a modellben?

Petri-hálók analízise: Áttekintés a módszerekről

Analízis lehetőségek

Az analízis mélysége szerint:

- Szimuláció
- Állapottér teljes bejárása
  - Elérhető állapotok analízise: Dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
  - Modellellenőrzés
- Háló struktúrájának analízise
  - Statikus analízis: Strukturális tulajdonságok
  - Invariáns analízis

ha mindez nem végezhető el

- Részleges döntés (pl. absztrakció)

Egy-egy trajektória bejárása

Minden trajektória bejárása adott kezdőállapotból (kimerítő bejárás)

Bármely kezdőállapotra érvényes tulajdonságok (kezdőállapottól független)

Dinamikus és strukturális tulajdonságok

- Dinamikus tulajdonságok az elérhető állapotok alapján
  - Kezdőállapot függőek (nem általános érvényűek)
  - Jellegzetes dinamikus tulajdonságok (ld. később): Elérhetőség, fedhetőség, élőség, holtpontmentesség, korlátosság, fairség, megfordíthatóság
  - Tulajdonságmegtartó redukciós technikák segítenek az analízisben
- Strukturális tulajdonságok a háló struktúrája alapján
  - Kezdőállapottól függetlenek (minden lehetséges működésre)
  - Jellegzetes strukturális tulajdonságok (ld. később): Strukturális élőség, strukturális korlátosság, vezérelhetőség, konzervativitás, ismételhetőség, konzisztencia
  - Invariánsok: T-invariánsok (tranzíciók tüzeléseire), P-invariánsok (helyek jelöléseire)

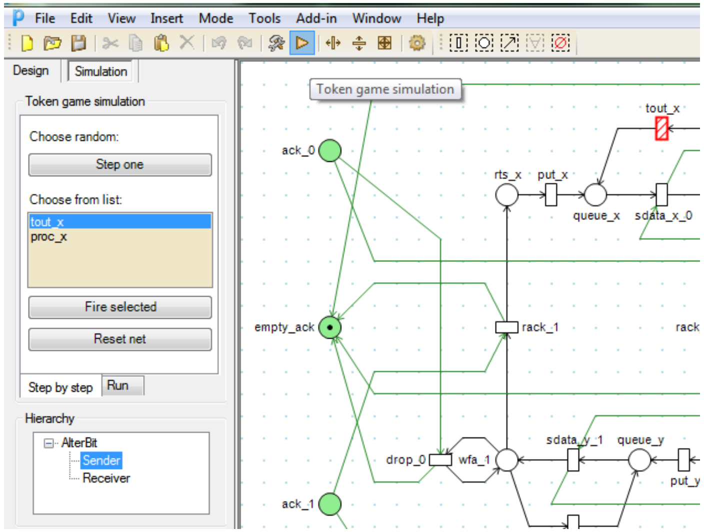
Petri-háló modellek szimulációja

Petri-hálók szimulációja

- A rendszer lehetséges trajektóriáinak vizsgálata
  - Állapot: tokeneloszlás (jelölés)
  - Állapotváltás (esemény): tranzíció tüzelése
  - Trajektóriák az állapottérben: Bejárható állapotsorozatok tüzelési szekvenciák hatására
- Engedélyezett tranzíció meghatározása
  - Engedélyezettség a lokális környezet alapján: $\bullet t$
  - Tüzelés után is lokális hatások a többi tranzícióra: $t\bullet$
- Petri-háló nemdeterminisztikus lehet
  - Interaktív szimuláció (animation, token game)
  - Automatikus szimuláció (large scale simulation): Automatikus választás (ál-)véletlen generálás alapján

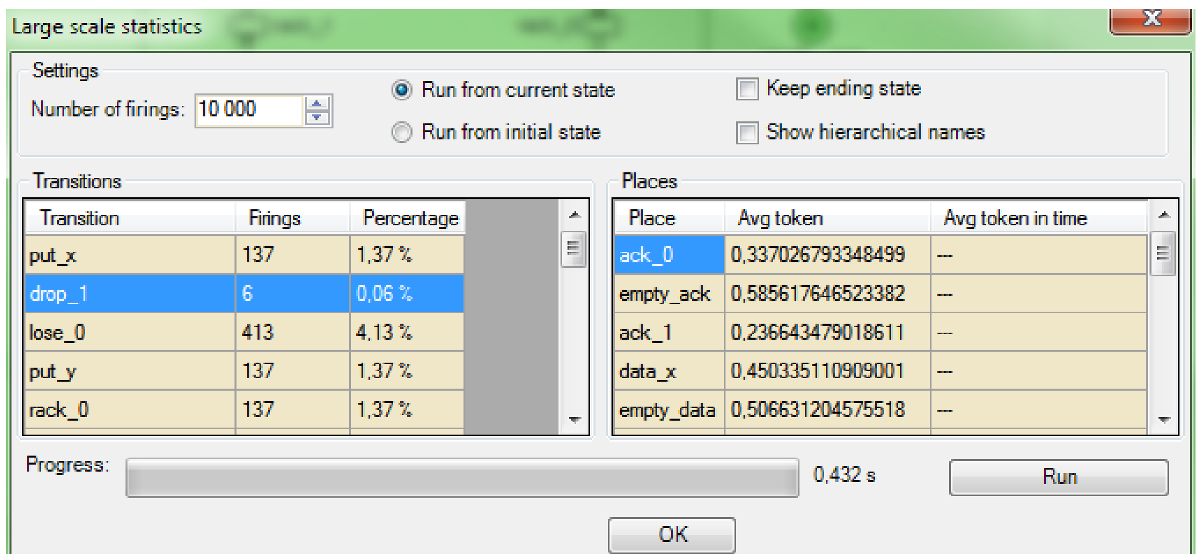
Interaktív és automatikus szimuláció

PetriDotNet



- A modell interaktív ellenőrzése (token game)
  - Engedélyezett átmenetek jelölve; kattintva tüzel
  - Előállítja az új tokeneloszlást

- Automatikus szimuláció
  - Lépések (tüzelések) számának beállítása
  - Statisztika gyűjtése: tüzelések száma és aránya, helyek átlagos tokenszáma



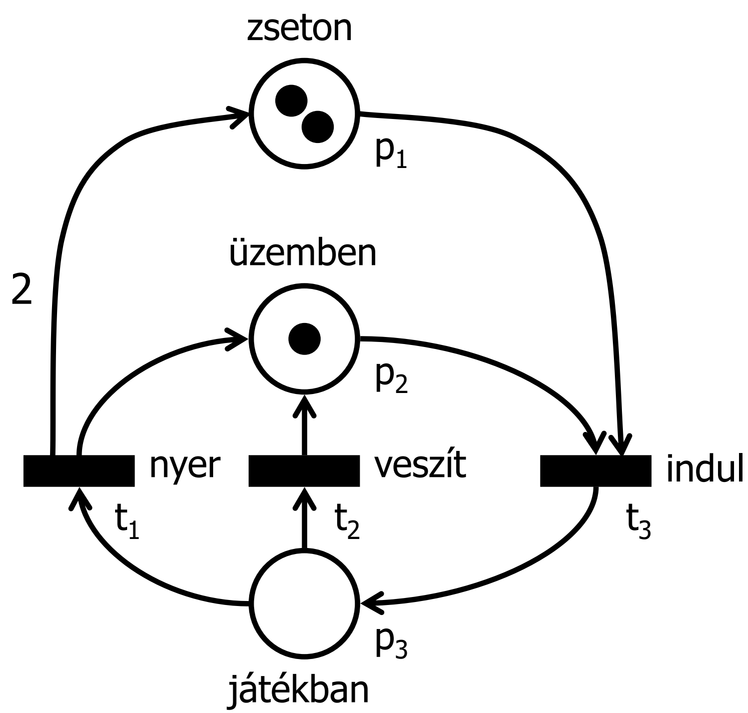
Szimuláció egy lépése: Egy tranzíció tüzelése

Ha t tranzíció tüzel M állapotban

- Új állapot: $M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor
- Itt **W** a súlyozott szomszédossági mátrix
  - Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$ $\leftarrow$ sorok $\times$ oszlopok
  - Elem: $w(t, p)$ $\leftarrow$ t tüzelése hogyan módosítja p jelölését; bemenő és kimenő élsúlyok alapján számítható:

$$w(t,p) = \begin{cases} w^+(t,p) - w^-(p,t) & \text{ha } (t,p) \in E \text{ vagy } (p,t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t,p) \notin E \text{ és } (p,t) \notin E \end{cases}$$

Ismétlés: Egy tranzíció tüzelése (példa)



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti kezdőállapotból:

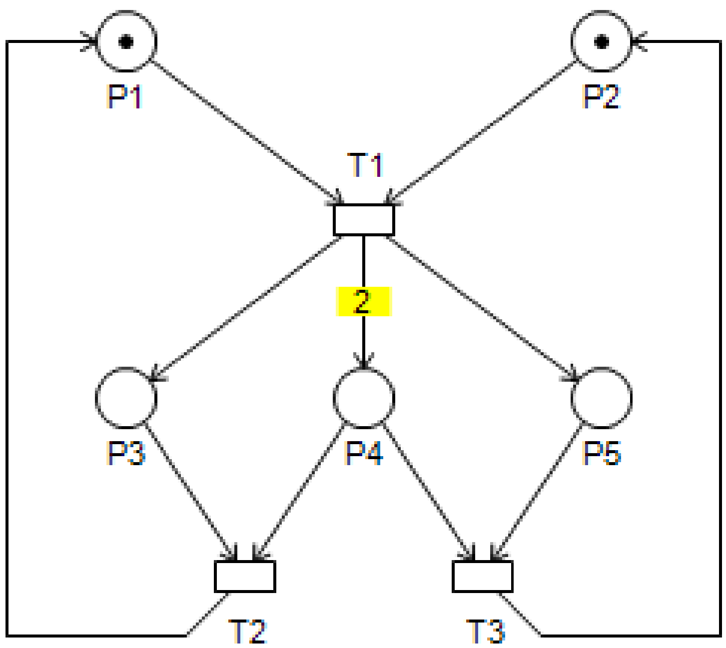
$$M' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

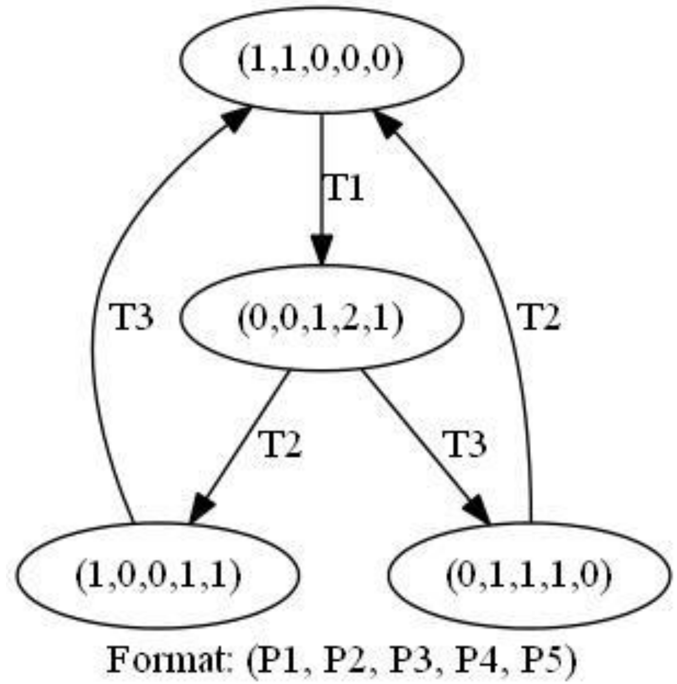
Petri-hálók dinamikus (viselkedési) tulajdonságai

Dinamikus tulajdonságok bevezetése

- Függenek a kiinduló állapottól (kezdő jelöléstől)
- Az állapottér, azaz az elérhetőségi gráf alapján határozhatók meg
  - Elérhetőségi gráf felvétele: A kezdőállapotból indulva a lehetséges tüzelések rögzítése minden elérhető állapotból
- Jelölések:
  - Tüzelési szekvencia: σ
  - Trajektória σ hatására: $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ állapotsorozat
  - Az M_n állapot elérhetősége M_0-ból: $\boxed{\exists\sigma : M_0[\sigma > M_n}$
  - Elérhető állapotok: $\boxed{R(N, M_0) = \{M \mid \exists\sigma : M_0[\sigma > M\}}$

Példa: Elérhetőségi gráf

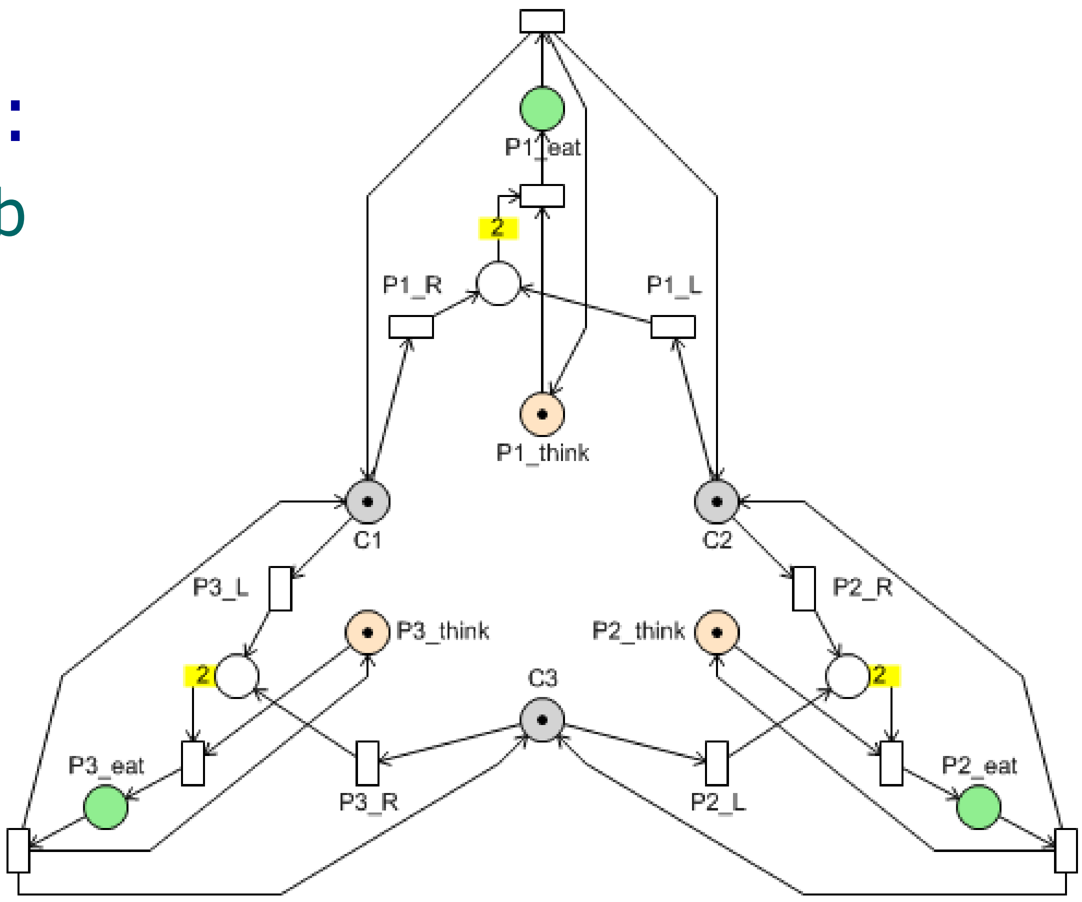




Egyszerű Petri-háló és ennek elérhetőségi gráfja (PetriDotNet eszközből)

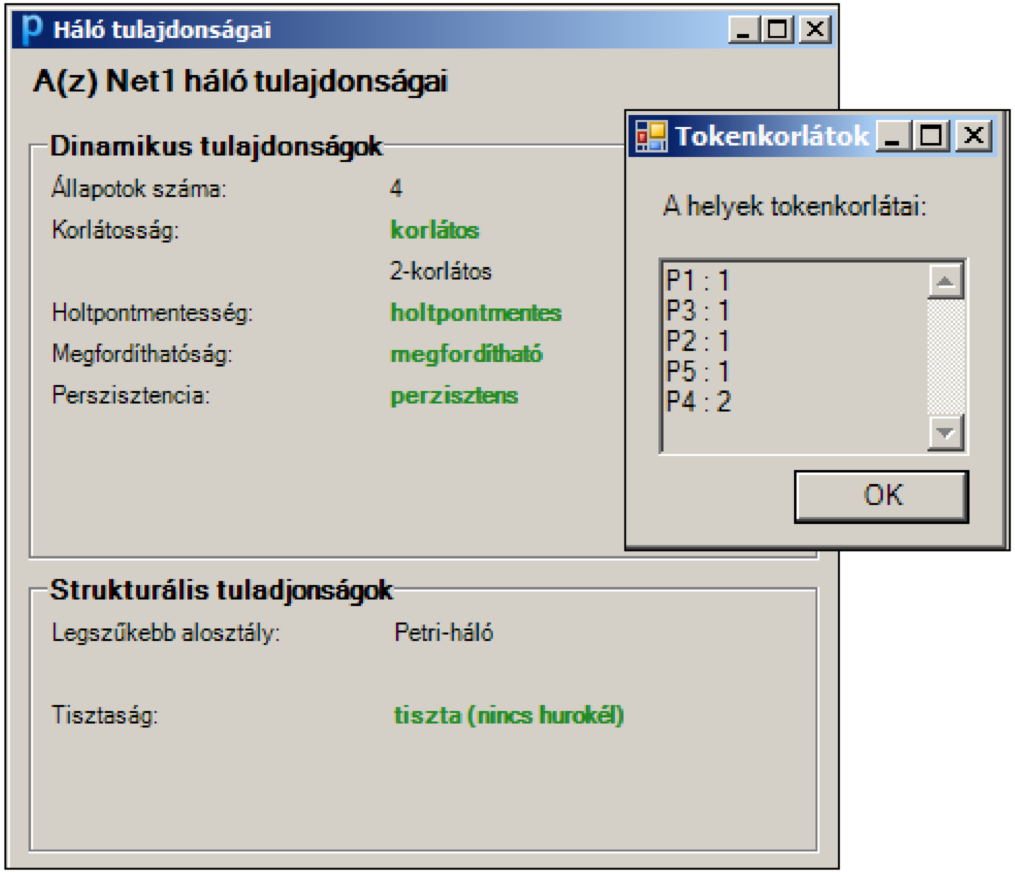
Elérhetőség vizsgálata modellellenőrzéssel

- Étkező filozófusok
- Egy-egy filozófusra:
  - Képes enni legalább egyszer?
  - Mindenképpen fog enni legalább egyszer?
  - Mindig fennáll, hogy előbb-utóbb enni fog?
- A teljes modell
  - Holtpontmentes?

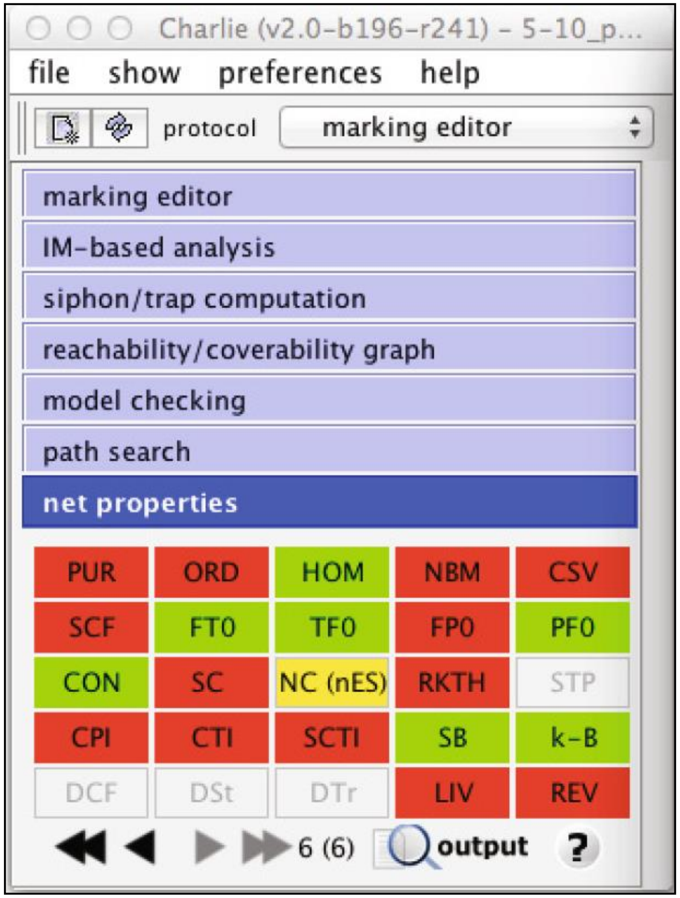


Dinamikus tulajdonságok Petri-háló eszközökben

PetriDotNet:



Snoopy + Charlie:



Dinamikus tulajdonságok áttekintése

1. Korlátosság
2. Élőség
3. Megfordíthatóság
4. Visszatérő állapot
5. Fedhetőség
6. Perzisztencia
7. Fair tulajdonság

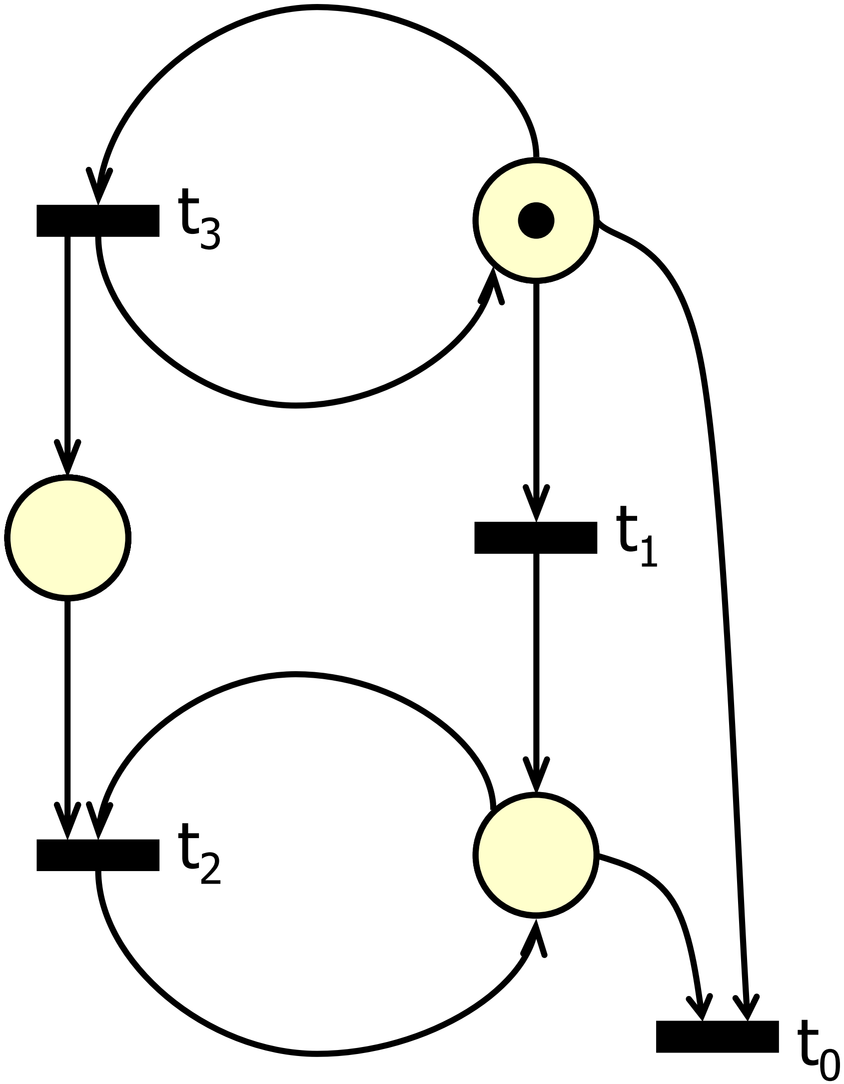
1. Korlátosság

- k-korlátosság (korlátosság)
  - Bármely elérhető állapotban minden helyre: helyenként maximum k token lehet
  - Biztos Petri-háló: korlátosság speciális esete: k=1
  - „Végesség” kifejezése
    - Korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
- Megválaszolható gyakorlati kérdések
  - A rendszerben felgyűlnek-e a feladatok?
  - Megvalósul-e az üzenetek rendszeres feldolgozása?

2. Élőség tranzíciókra

- Általános tüzelési lehetőség:
  - L0-élő (halott): t sohasem tüzelhet
- Tüzelési lehetőségek valamely trajektória mentén: Gyenge élő tulajdonságok
  - L1-élő: t legalább egyszer tüzelhető
  - L2-élő: bármely k>1 egészre t legalább k-szor tüzelhető
  - L3-élő: t végtelen sokszor tüzelhető
- Tüzelési lehetőség bármely elérhető állapotból: Erős élő tulajdonság
  - L4-élő: t legalább egyszer tüzelhető bármely állapotból valamely trajektória mentén

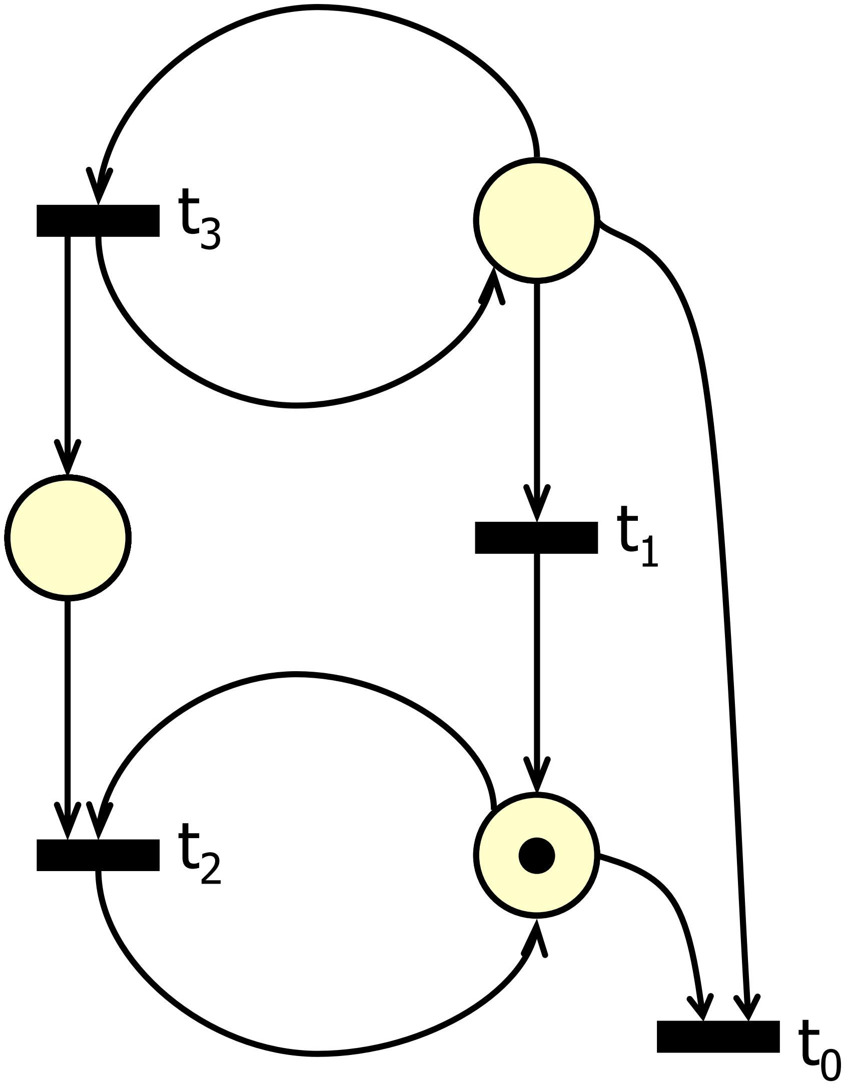
Példa: Élő tulajdonság



- t_0 tranzíció: L0-élő (halott)
- t_1 tranzíció: L1-élő
- t_2 tranzíció: L2-élő
- t_3 tranzíció: L3-élő

Modell: kezdőállapotban

Példa: Élő tulajdonság



- t_0 tranzíció: L0-élő (halott)
- t_1 tranzíció: L1-élő
- t_2 tranzíció: L2-élő
- t_3 tranzíció: L3-élő

Modell: végállapotban

Holtpontmentesség és élőség Petri-hálókra

- Egy Petri-háló holtpontmentes
  - Ha minden állapotban legalább egy tranzíció tüzelhető
- Egy Petri-háló Lx-élő (Lx: L1, L2, L3, L4)
  - Ha minden tranzíciója Lx-élő
  - L4-től L1-ig az élő tulajdonságok tartalmazzák egymást
- Egy Petri-háló élő
  - Ha L4-élő, azaz minden tranzíciója L4-élő
    - L4-élő: Legalább egyszer tüzelhető bármely elérhető állapotból valamely trajektória mentén
  - Bejárási úttól függetlenül garantáltan holtpontmentes
    - Élőség $\Rightarrow$ Holtpontmentesség (de fordítva nem)

Alkalmazási példák

- Munkafolyamat esetén, ahol egy tranzíció egy tevékenységet modellez
  - L0-élő (halott): tevékenység sohasem kerülhet sorra (nem létezik tüzelése)
  - L1-élő: tevékenység legalább egyszer végrehajtható
  - L2-élő: tevékenység tetszőlegesen sokszor végrehajtható
  - L3-élő: tevékenység végtelen sokszor végrehajtható (pl. része egy ciklikus tevékenységsorozatnak)
  - L4 élő: tevékenység bármely állapotból legalább egyszer végrehajtható lesz
    (nincs olyan állapot, hogy abból nem lesz végrehajtható)

3. Megfordíthatóság

- Megfordíthatóság
  - Az M_0 kezdőállapot elérhető bármely őt követő állapotból

$$\boxed{\forall M \in R(N, M_0) : M_0 \in R(N, M)}$$

- Gyakorlati példák a megfordíthatóságra
  - Biztonságos kezdőállapot mindenhonnan elérhető
  - „Reset” hatására mindig a kezdőállapotba vihető rendszer
  - Ciklikus működésű hálózat, a kezdőállapoton keresztül

4. Visszatérő állapot

- Visszatérő állapot
  - Az állapottér adott állapota elérhető bármely őt követő állapotból

$$\boxed{\exists M_n \in R(N, M_0) : \forall M \in R(N, M_n) : M_n \in R(N, M)}$$

- Gyakorlati példák a visszatérő állapotra
  - Inicializáló lépéssorozat után bárhonnan elérhető biztonságos állapot (ez a visszatérő állapot)
  - Inicializáló lépéssorozat után ciklikus működés adott állapotokon keresztül (ezek a visszatérő állapotok)

5. Fedhetőség

- Fedhetőség
  - Létrejön-e korábbi állapotot magában foglaló állapot?
  - M′ állapot fedi az M állapotot: $\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}(p)$
    - Fordított megfogalmazás: M állapot fedhető M′ állapottal
    - Gyenge fedhetőség esetén az azonos állapot is fed
    - Erős fedhetőség: M′ fedi M-et és $\exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}(p)$
- Gyakorlati példák erős fedhetőséghez
  - Gyártott termékek száma nőhet (ugyanakkor az erőforrások nem fogynak)
  - Újabb és újabb üzenetek előállítása lehetséges

6. Perzisztencia

- Perzisztencia tranzíciókra
  - Egy tranzíció perzisztens, ha engedélyezetté válva engedélyezve is marad tüzelésig
  - Azaz nincs olyan engedélyezett tranzíció, amelynek tüzelése letiltja a tranzíció engedélyezettségét („elveszi előle a tokent”)
- Perzisztencia Petri-hálókra
  - Egy (P, T, M_0) Petri-háló perzisztens, ha minden tranzíciója az összes lehetséges tüzelési szekvenciában perzisztens (azaz nincs másik olyan tranzíció, aminek tüzelése letiltaná)
- Gyakorlati példák perzisztencia alkalmazására
  - Párhuzamos működések nem befolyásolják egymást
  - Rendszerbeli funkcionális dekompozíció megmarad

7. Fair tulajdonság

- Korlátozott fair tulajdonság Petri-hálóra: Minden tüzelési szekvenciájára igaz:
  - Bármely tranzíció maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy egy másik engedélyezett tranzíció tüzelne
  - „Nem veheti el folyamatosan a tüzelési lehetőséget a másik engedélyezett tranzíció elől"
- Gyakorlati példák a fair tulajdonság alkalmazására
  - Párhuzamos folyamatok nem éheztetik ki egymást
  - Lehetséges tevékenységek végbemennek előbb-utóbb
  - Kérés kiszolgálása előbb-utóbb megtörténik

Összefoglalás: Dinamikus tulajdonságok

- Korlátosság (boundedness)
- Holtpont (deadlock)
- Élő tulajdonság (liveness)
  - L0, L1, L2, L3
  - L4 élő (∀ állapotból L1)
- Megfordíthatóság (reversibility)
- Visszatérő állapot (home state)
- Fedhetőség (coverability)
  - Gyenge fedhetőség
  - Erős fedhetőség
- Perzisztencia (persistence)
- Fair tulajdonság (fairness)

Mire jók a dinamikus tulajdonságok?

- Példa: Munkafolyamat modellje
  - Teendők + tevékenységek + erőforrások
- Vizsgálandó tulajdonságok
  - Megáll-e a munkafolyamat? Holtpont
  - Végrehajthatók-e egyes tevékenységek? Élőség
  - Felgyűlnek-e a teendők? Korlátosság
  - Visszatérhetünk-e a kezdőállapotba? Megfordíthatóság
  - Kialakul-e feldolgozási ciklus? Visszatérő állapot
  - Letilthatják-e egymást tevékenységek? Perzisztencia
  - Lehet-e erőforráshoz nem jutó tevékenység? Fairség
- Probléma a verifikációhoz
  - Nagy méretű állapottér bejárása szükséges

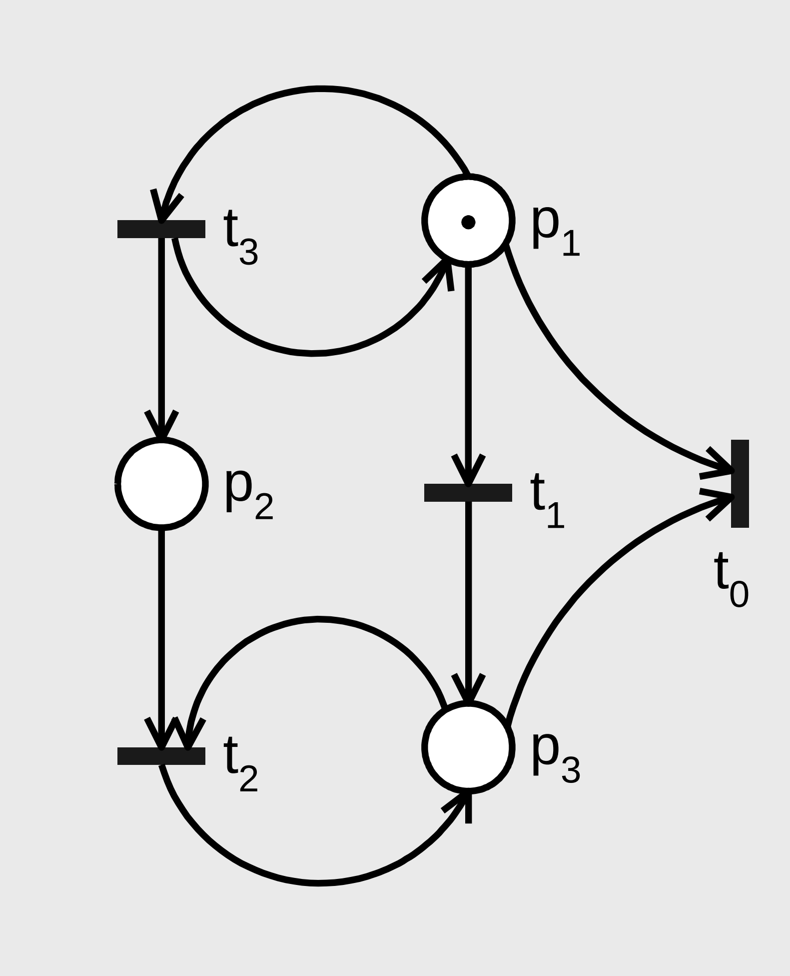
Nem korlátos állapottér: Mit tehetünk?

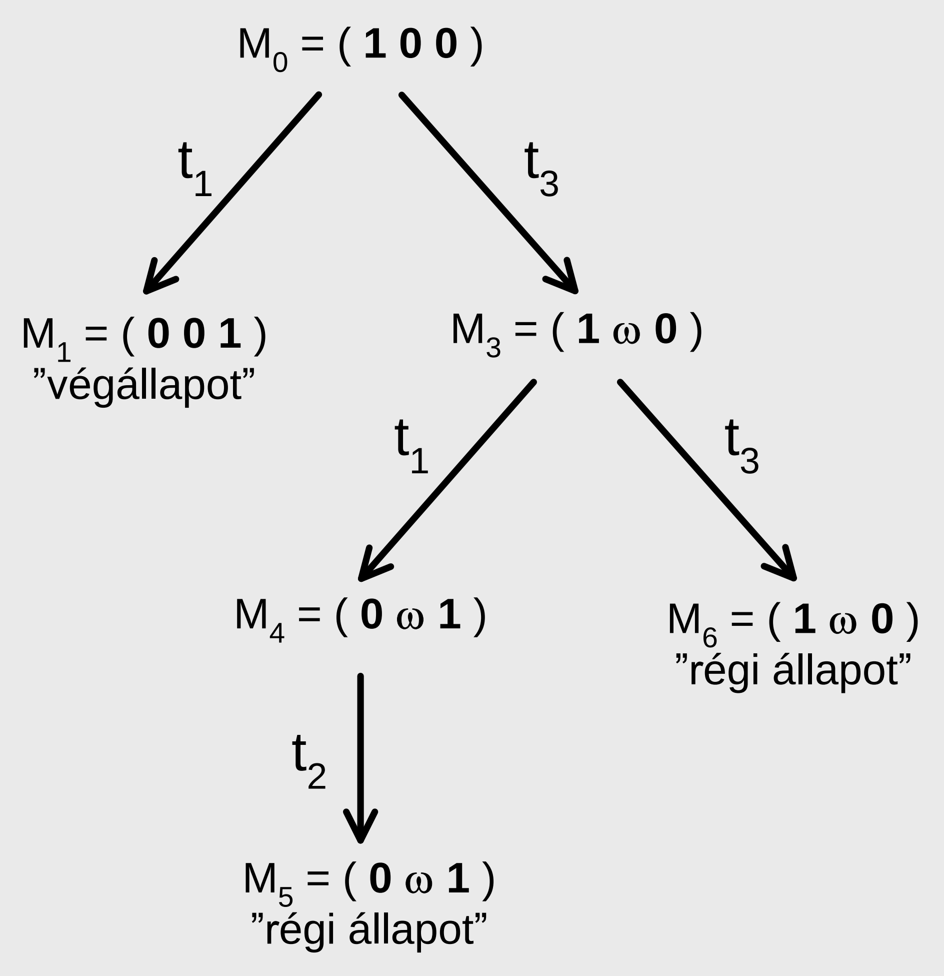
- Elérhetőségi gráf: Ha nem korlátos a háló, akkor a token „túlszaporodás” miatt végtelenné válik
  - Jó lenne tudni: Hol és „milyen módon” lesz végtelen?
- Fedési gráf: Végtelen állapottér leírása
  - Hasonló felépítés: M_0 kezdőállapot, élek: tüzelések
  - Trajektória: M_0, …, M, …, M’
  - Ha megjelenik egy M-et fedő M’ állapot, erős fedéssel:

$$\exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}(p)$$

    akkor az erősen fedett helyekre speciális jel kerül: ω
  - Az ω jelentése: Ezen a helyen tetszőleges sok token összegyűlhet – ld. ami M-ben engedélyezett, az M’-ben is

Példa: Petri-háló és annak fedési fája

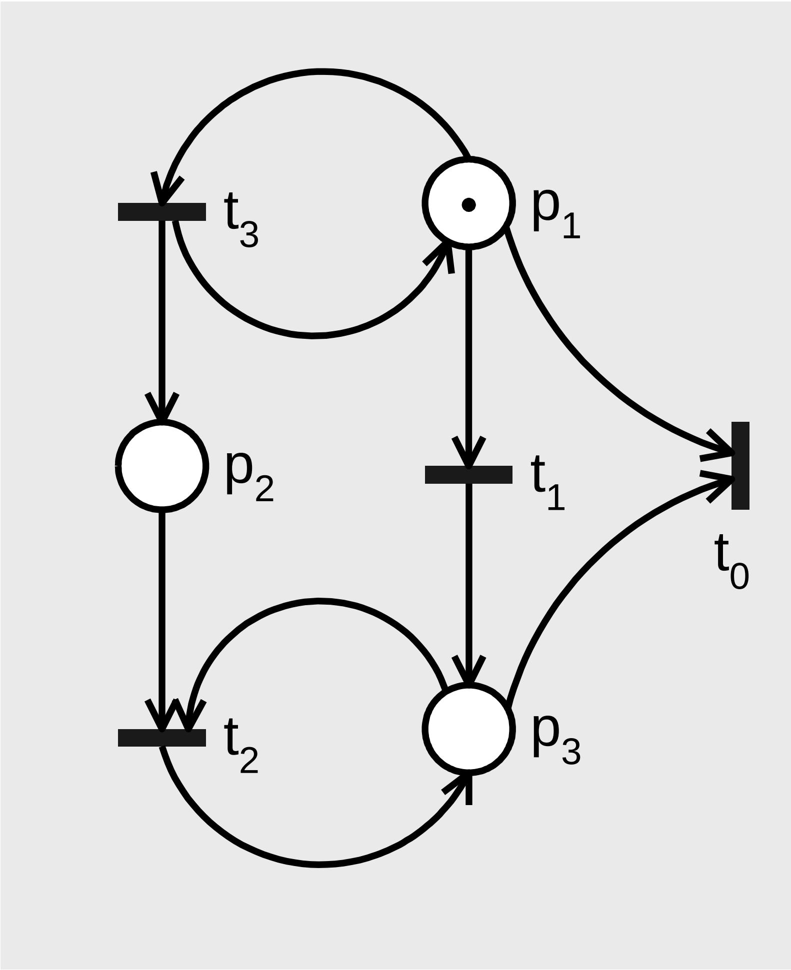


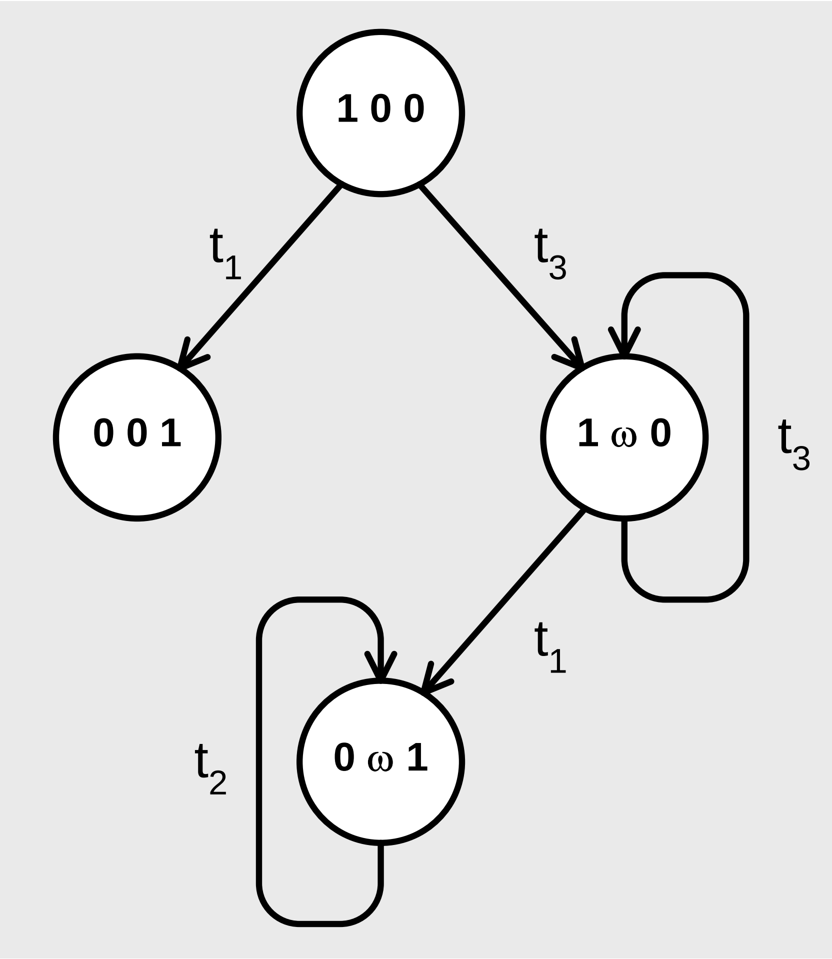


Információvesztés: ω jelölésű helyre token odarakása: ω lesz

ω jelölésű helyről token elvétele: ω marad

Példa: Petri-háló és annak fedési gráfja





Fedési fából fedési gráf: Az azonos jelölést reprezentáló csomópontok összevonása

Fedési fa generáló algoritmus

Építkezés gráfcsomópontokkal:

$L_{vizsgálandó} \leftarrow \{ M_0 \}$

`MAIN:` **`if`** $L_{vizsgálandó} \neq \varnothing$

  A következő $M \in L_{vizsgálandó}$ gráfcsomópont kivétele

  `if` M a gyökértől idáig vezető úton már szerepelt

    `then` M -et „régi csomópontként" jelöljük

    `goto` `MAIN` // ciklus

  `if` M -ben nincs engedélyezett tranzíció

    `then` M -et „végcsomópontként" jelöljük

    `goto` `MAIN` // ciklus

(folytatás a következő lapon)

Fedési fa generáló algoritmus (folytatás)

else // (van M -ben engedélyezett tranzíció)

for all t engedélyezett tranzícióra:

Az M′ rákövetkező csomópont meghatározása: $M\left[e_t > M'\right.$

if létezik az M_0-tól M -ig vezető úton olyan M″, amelyet M′ fed

$$\boxed{M' \neq M'' \wedge \forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}''(p) \wedge \exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)}$$

then M″ fedett csomópont:

az M′ csomópontot jelölő tokeneloszlásban
az erősen fedett helyek jelöléseit ω-val helyettesítjük

$$\boxed{\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p) \rightarrow \mathrm{m}'(p) = \omega}$$

M′ felvétele, vizsgálandók lesznek: $L_{vizsgálandó} \leftarrow L_{vizsgálandó} \cup M'$

M -ből M′ -höz egy t -vel jelölt élet húzunk

goto `MAIN` // ciklus

Fedési gráf: Az azonos jelölést reprezentáló csomópontok összevonása

Petri-hálók strukturális tulajdonságai

A strukturális analízis alapötlete

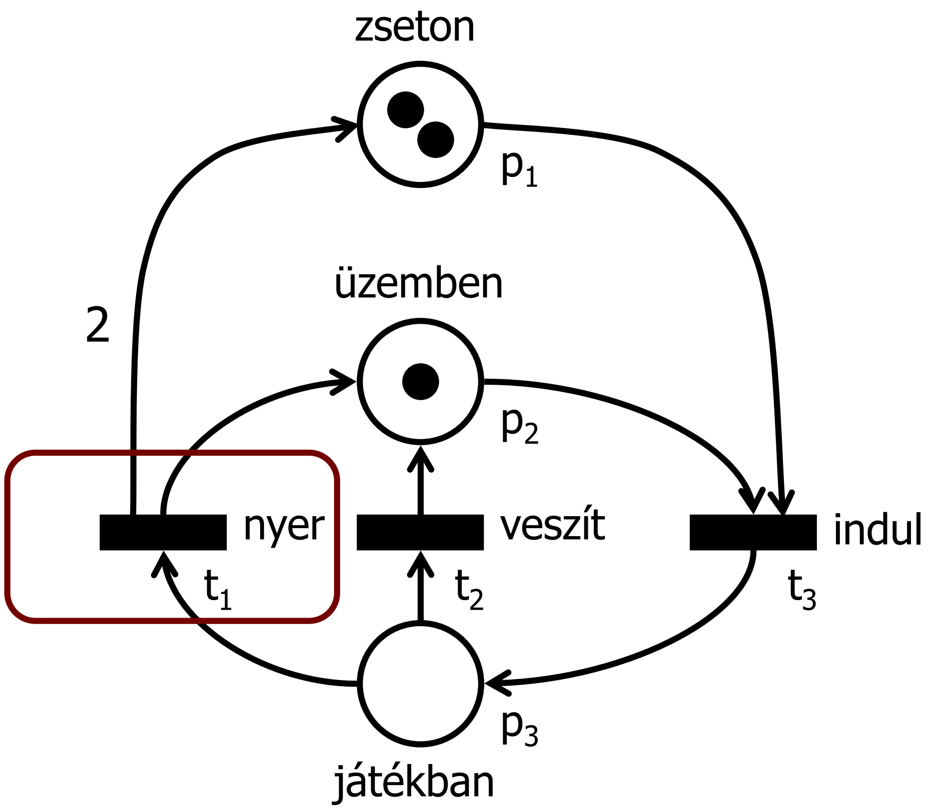
- Tulajdonságok megállapítása az állapottér felvétele és bejárása nélkül
  - Csak a modell struktúra (helyek, tranzíciók, élek) alapján
  - Kezdőállapot-független vizsgálat
  - A modell és a lehetséges végrehajtási szekvenciák jellemzőinek meghatározása
- A tulajdonság definíciójától függően kimondható:
  - vagy minden korlátos kezdő tokeneloszlásra igaz,
  - vagy létezik korlátos kezdő tokeneloszlás, amin igaz
- Egyes esetekben csak közelítő vizsgálat
  - Pl. ismert egy tulajdonság teljesítéséhez, hogy hányszor tüzelnek egyes tranzíciók, de ezek sorrendje nem

Ismétlés: A struktúra leírása

Súlyozott szomszédossági mátrix: **W** = [w(t, p)]

Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$ sor × oszlop

w(t, p): Ha t tüzel, mennyit változik a p -beli tokenszám



$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

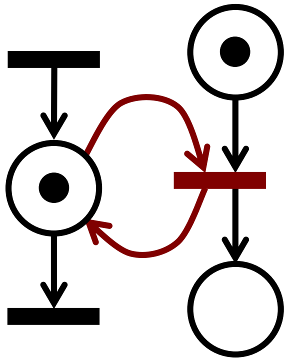
Példa: t_1 tranzíció tüzelése hogyan módosítja a tokenek számát

Ismétlés: Az állapotegyenlet

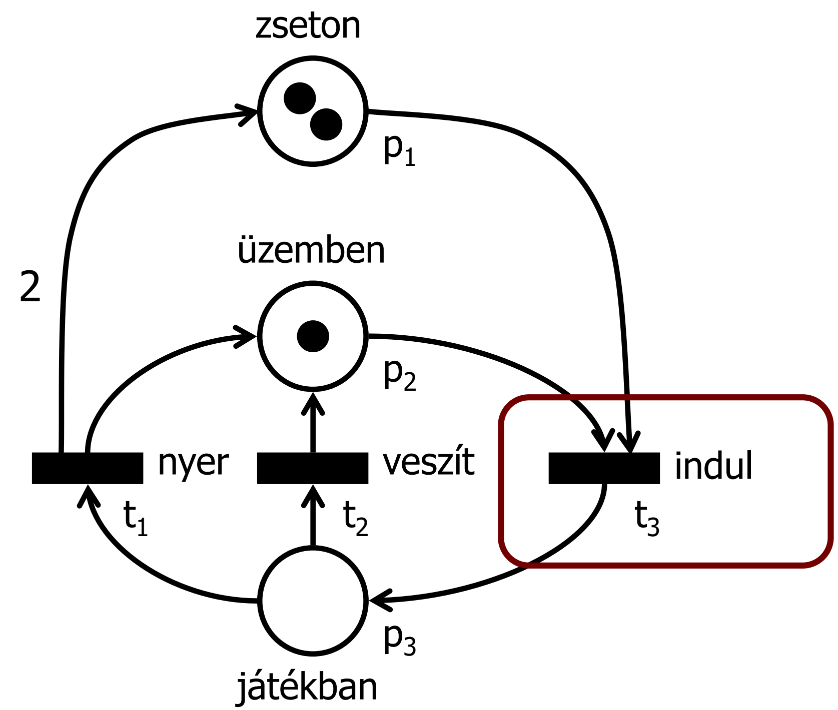
- Petri-háló dinamikája: tokeneloszlás módosulása
  - Az új tokeneloszlás egyenlettel felírható:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

- Előfeltétel (egyértelműséghez): tiszta Petri-háló
  - Nincs olyan tranzíció, amely egyazon helynek egyszerre bemenő és kimenő tranzíciója: $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \varnothing$
  - Ebbe beletartozik: Nincs „hurokél”
    - A tüzeléskor a tokeneloszlás nem változik (szomszédossági mátrixban 0)
    - De a tüzelési feltételben szerepet játszik (van-e ott token)



Példa: Egy tranzíció tüzelése



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti $(2\ 1\ 0)^T$ állapotból:

$$\mathbf{M'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ismétlés: Tüzelési szekvencia

- Jelölés: Tüzelési szekvencia

$$\sigma = \langle M_i, t_i, M_{i+1}, \ldots, t_{i+n}, M_{i+n} \rangle \text{ vagy } \langle t_i, \ldots, t_{i+n} \rangle$$

- Jelölés: Állapot (tokeneloszlás) elérhetősége

$$M_i [\sigma > M_{i+n}$$

- Tüzelési szekvencia végrehajthatósága:
  - $\forall t_j$ tranzícióhoz minden $p \in \bullet t_j$ bemenő helyen elég token

$$\forall t_j \in \sigma, \forall p \in \bullet t_j : M_j(p) \geq w^-(p, t_j)$$

Állapotegyenlet alkalmazása

- Tokeneloszlás módosulása a tüzelési szekvenciában
  - Engedélyezett t_j tranzíció tüzelése M_i állapotból:
    - Az állapotegyenlet adja meg a tokeneloszlás módosulását:

$$\boxed{M_{i+1} = M_i + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_j}$$

  - Végrehajtható σ tüzelési szekvencia esetén M_0 állapotból:
    - Tüzelések hatását összeadva adódik a tokeneloszlás módosulása:

$$\boxed{M_n = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T}$$

- Itt σ_T a tüzelési szám vektor: az egyes tranzíciók tüzeléseinek száma a tüzelési szekvenciában
  - Az állapotegyenlet alapján az elért állapotra kiszámolható

Állapotegyenlet alkalmazása tüzelési szekvenciára

$$M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_1}$$

$$M_2 = M_1 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_2} = \overbrace{M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_2}}^{M_1 \text{ behelyettesítésével}}$$

$$\ldots$$

$$M_i = M_{i-1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_i} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_i}$$

$$\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$M_n = M_0 + \underbrace{\mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} e_{t_n}}_{\text{összevonva}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{n} e_{t_i}$$

$$M_n = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T$$

Tüzelési szám vektor: A tüzelő tranzíciók egységvektorainak összege

Tüzelési szám vektor

- Tüzelési szekvencia: tüzelő tranzíciók sorozata

$$\sigma = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$$

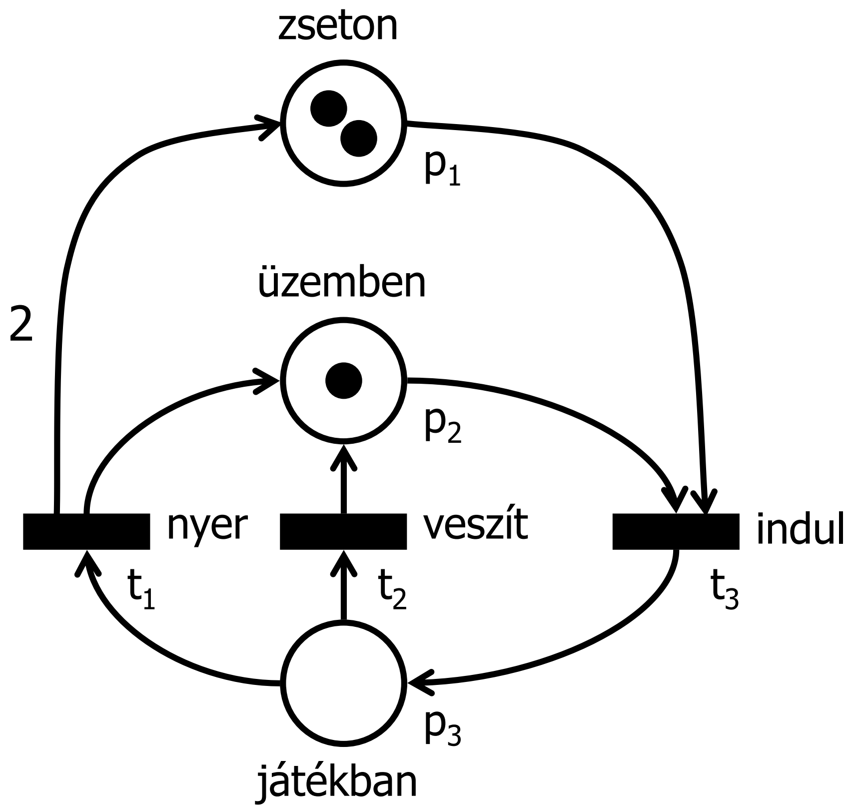
- Tüzelési szám vektor: mely tranzíció hányszor tüzel

$$\sigma_T = e_{t_1} + e_{t_2} + \ldots + e_{t_n}$$

Kevesebb információ σ_T, mint a tüzelési szekvencia:

- Tüzelések sorrendje nincs benne
- Adott kezdőállapotból
  az adott tüzelési szám vektor szerinti tüzelések
  nem minden sorrendben lesznek végrehajthatók
- De minden sorrendhez lehet megfelelő kezdőállapotot rendelni

Példa: A tüzelési szám vektor szerinti tüzelés



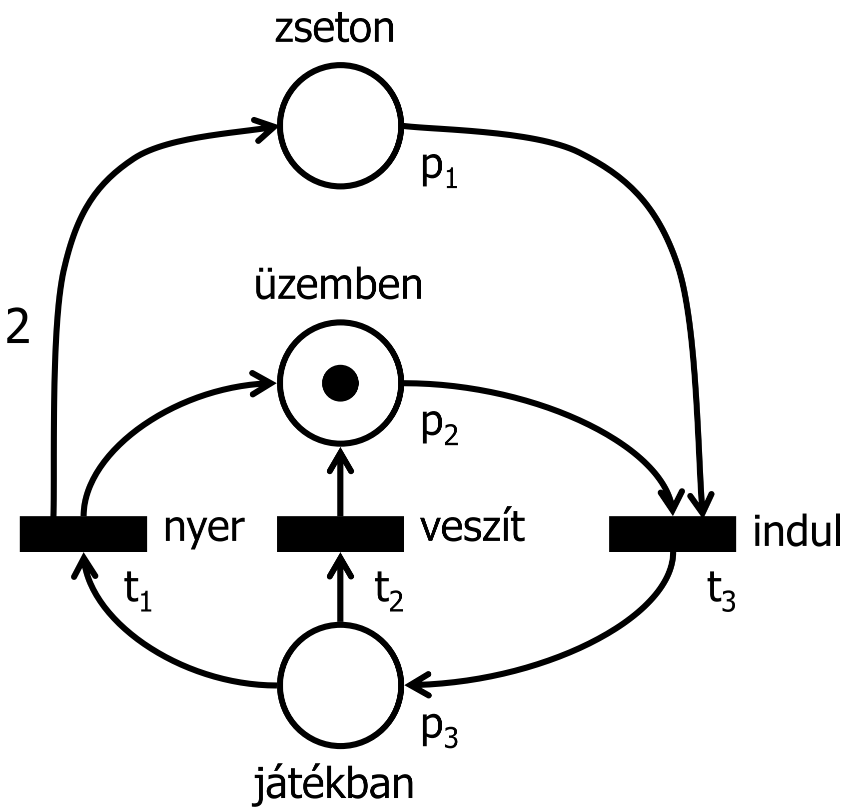
$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Állapotváltozás:

$$M_n = M_0 + \mathbf{W}^T \cdot \sigma_T$$

- $(2,1,0)^T$ kezdőállapotból egy $(0,2,2)^T$ tüzelési szám vektorra:
  - Új állapot az egyenlet alapján: $(2,1,0)^T + W^T \cdot (0,2,2)^T = (0,1,0)^T$
  - $<t_3, t_2, t_3, t_2>$ szekvencia tüzelhet
  - $<t_3, t_3, t_2, t_2>$ szekvencia nem tüzelhet

Példa: A tüzelési szám vektor elérhetőséghez



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline p_1 & 2 & 0 & -1 \\ p_2 & 1 & 1 & -1 \\ p_3 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Állapotváltozás:

$$M_n = M_0 + \mathbf{W}^T \cdot \sigma_T$$

Kiszámolható egy tüzelési szám vektor $(0,1,0)^T$ állapotból $(1,1,0)^T$ eléréséhez:

$$(1,1,0)^T = (0,1,0)^T + W^T \cdot (1,0,1)^T$$

- Tüzelési szám vektor: $(1,0,1)^T$ csak egy lehetőséget ad
- Itt: sem t_1, sem t_3 nem tüzelhető a (0,1,0) kezdőállapotban!

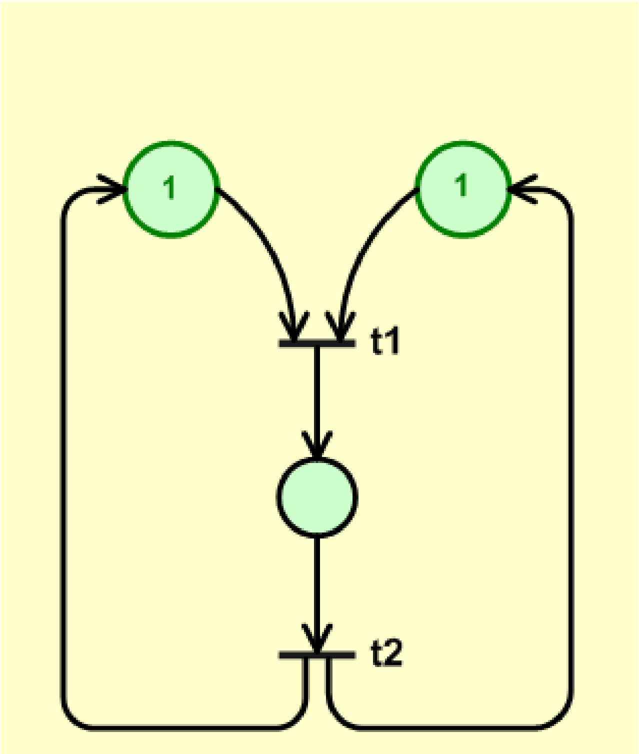
Tüzelési invariáns (T-invariáns): Definíció

- A σ_T tüzelési szám vektor T-invariáns, ha végrehajtása nem változtatja meg a tokeneloszlást
  - A σ_T -nek megfelelő σ tüzelési szekvenciák végrehajtása esetén ciklus van az állapottérben: $M_i[\sigma > M_i$
- T-invariáns számítása:

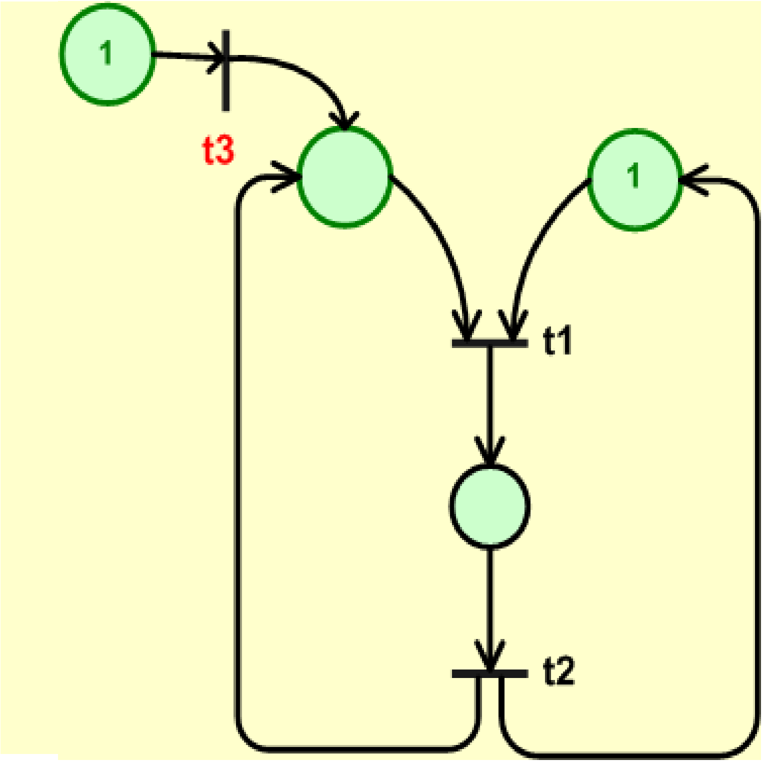
  $M_j = M_i + W^T\sigma_T$ alapján, ha $M_j = M_i$: $\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sigma_T = 0}$
- Jellemzők:
  - Nem minden, a σ_T tüzelési szám vektornak megfelelő σ tüzelési szekvencia végrehajtható adott kezdőállapotból
  - De: bármely σ tüzelési szekvenciához megadható olyan M_0 kezdőállapot, amelyből σ végrehajtható
    - Pl. annyi token van, hogy σ minden tranzíciója tüzelhető

Példa: T-invariáns

T-invariáns: $(1,1)^T$
t_1, t_2 után a tokeneloszlás ugyanez



Nem T-invariáns: $(1,1,1)^T$
t_3, t_1, t_2 után a tokeneloszlás nem ugyanez



T-invariánsok halmaza

- Egyenletrendszer megoldásaiként számíthatók ki

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sigma_T = 0}$$

  - Egy megoldás többszöröse is megoldás
    - Ha végrehajtható, akkor többször is befuthatja a ciklust
  - Megoldások összege is megoldás
    - Ha végrehajtható, akkor több ciklus kombinációját is befuthatja

  $\rightarrow$ Megoldások lineáris kombinációi is megoldások
- A megoldásokhoz bázis kereshető
  - Az összes megoldást előállító minimális halmaz

Hely invariáns (P-invariáns): Definíció

- A μ_P nemnegatív egész súlyvektor által kijelölt helyek, ahol a tokenek súlyozott összege nem változik a működés során

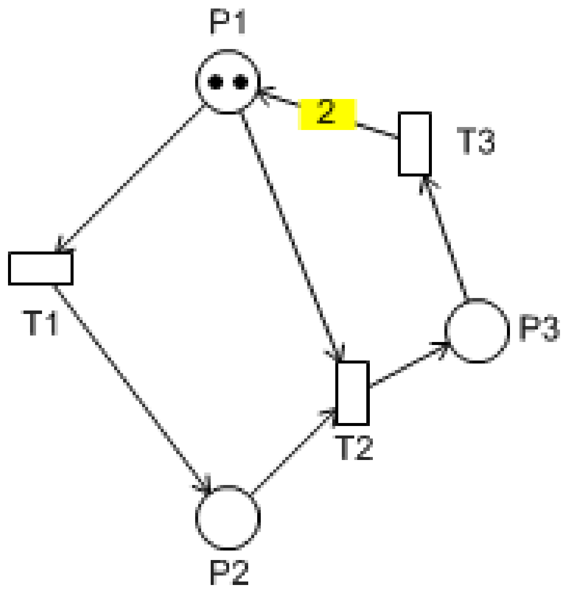
$$\boxed{\mu_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}}$$

A tokenek súlyozott száma a helyek egy részhalmazában állandó (pl. a tokenek által reprezentált erőforrások nem fogynak/keletkeznek)

- P-invariánsok számításának levezetése:

$$\left.\begin{aligned}
&M_j = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sigma_T \\
&\underbrace{\mu_P^{\mathrm{T}} M_j = \mu_P^{\mathrm{T}} M_0}_{\substack{\text{legyen } \mu_P^{\mathrm{T}} M_j = \mu_P^{\mathrm{T}} M_0 \\ \text{minden } \sigma \text{ esetén}}} + \mu_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T \\
&\forall \sigma_T : \mu_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T = 0 \Rightarrow \mu_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \equiv 0
\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathbf{W}\mu_P = 0}$$

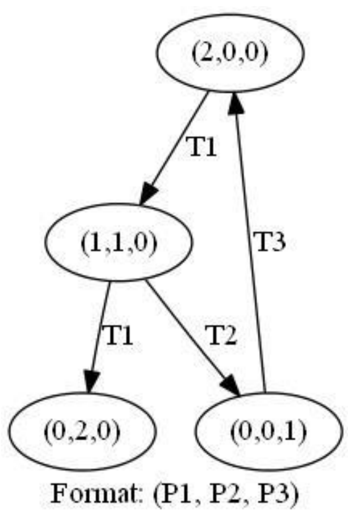
Példa: P-invariáns

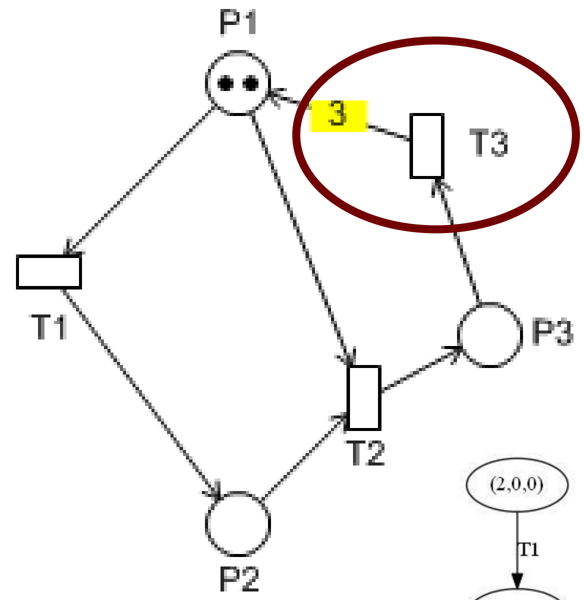


Itt P-invariáns:

$(1\ 1\ 2)^T$

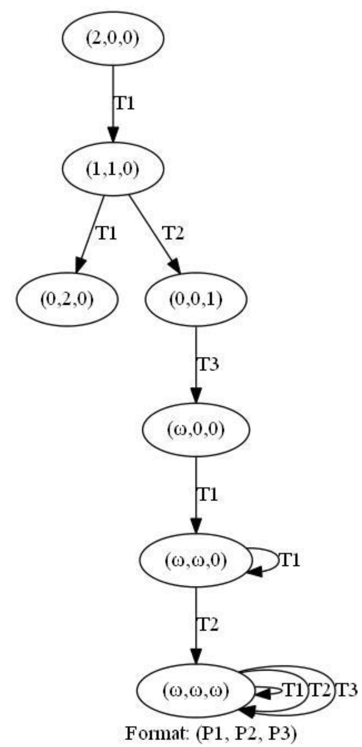
Lásd az elérhetőségi gráfot:





Itt nincs P-invariáns

Lásd a fedési gráfot (nem korlátos a háló):



Összefoglalás: Invariánsok alkalmazásai

- T-invariánsok alkalmazásai $\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sigma_T = 0}$
  - Folyamatok modellje esetén: Ciklikusság
    - Lehetséges végrehajtási szekvenciák azonosítása
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Ciklikusan tüzelhető $\rightarrow$ megfordíthatóság, visszatérő állapot
    - Később is tüzelhető $\rightarrow$ élő tulajdonság, holtpontmentesség
- P-invariánsok alkalmazásai $\boxed{\mathbf{W}\mu_P = 0}$
  - Folyamatok modellje esetén: Erőforrások állandósága
    - Végrehajtás során megőrzött elemek
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Token nem termelődik $\rightarrow$ korlátosság
    - Token nem vész el

Strukturális tulajdonságok: Áttekintés

Eddig: Invariánsok

- Hely invariáns (P-invariáns)
- Tüzelési invariáns (T-invariáns)

További strukturális tulajdonságok:

- Strukturális élőség
- Strukturális korlátosság
- Vezérelhetőség
- Konzervativitás
- Ismételhetőség

Strukturális élőség, strukturális korlátosság

- Egy N Petri-háló strukturálisan élő, ha létezik olyan M_0 kezdőállapota, amelyben élő
  - Egy Petri-háló élő, ha minden tranzíciója L4-élő, azaz bármely elérhető állapotból legalább egyszer tüzelhető valamely trajektória mentén

- Egy N Petri-háló strukturálisan korlátos, ha bármely korlátos M_0 kezdőállapotra korlátos

Vezérelhetőség

- Egy N Petri-háló teljesen vezérelhető,
  ha bármely korlátos M_0 kezdőállapot esetén:

  ha két állapot elérhető M_0-ból,
  akkor egyikük elérhető a másikból és viszont

$$\boxed{\forall M_i, M_j : M_i, M_j \in R(N, M_0) \Rightarrow M_i \in R(N, M_j) \wedge M_j \in R(N, M_i)}$$

Konzervativitás

- Egy N Petri-háló konzervatív, ha bármely korlátos M_0-ból elérhető állapotokra minden helyhez található egy μ_p pozitív egész súlytényező, hogy

$$\boxed{M_0\mu = M\mu = \text{állandó}}$$

  - Példa: Bármely kezdőállapot esetén, bármely elérhető állapotra minden hely eleme egy P-invariánsnak
- Részlegesen konzervatív, ha a fentiek csak néhány helyre vonatkoznak
  - Példa: Bármely kezdőállapot esetén, bármely elérhető állapotra néhány hely eleme egy P-invariánsnak

Ismételhetőség

- Egy N Petri-háló ismételhető, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és ebből induló σ tüzelési szekvencia, hogy minden tranzíció végtelen sokszor tüzel σ -ban
  - Példa: Létezik olyan kezdőállapot, hogy minden tranzíció eleme egy visszatérő tüzelési szekvenciának (ciklusnak, T-invariánsnak)
- Részlegesen ismételhető, ha a fentiek csak néhány tranzícióra vonatkoznak
  - Példa: Létezik olyan kezdőállapot, hogy néhány tranzíció eleme egy visszatérő tüzelési szekvenciának

Kitekintés: Néhány tulajdonság feltételei

	Tulajdonság	Szükséges és elégséges feltétel
SB	Strukturálisan korlátos	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \le 0 \; (\text{vagy} \nexists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\ge} 0)$
CN	Konzervatív	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0 \quad (\text{vagy} \nexists \vec{\sigma}, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\ge} 0)$
PCN	Részlegesen konzervatív	$\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\ge} 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
RP	Ismételhető	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \ge 0$
PRP	Részlegesen ismételhető	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\ge} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \ge 0$

Kitekintés: Néhány tulajdonság levezetése

Ha …	akkor …
N strukturálisan korlátos és strukturálisan élő	N konzervatív.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 N -hez.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0$	(N, M_0) nem korlátos egy élő M_0 esetén.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 strukturálisan korlátos N –hez.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$	N nem strukturálisan korlátos.

Összefoglalás: Strukturális analízis

- Strukturális analízis alapötlete
- T-invariánsok
  - Definíció: Tüzelési szám vektor tranzíciókra;
    T-invariáns tüzelésével a tokeneloszlás nem változik
  - Ciklikus végrehajtás lehetőségeit adja meg
  - Számítás: $\mathbf{W}^T \cdot \sigma_T = 0$ megoldásával
- P-invariánsok
  - Definíció: Súlyvektor helyekre;
    súlyozott tokenösszeg állandó marad a tüzelések során
  - Tokenek „megmaradásának” lehetőségeit adja meg
  - Számítás: $\mathbf{W} \cdot \mu_P = 0$ megoldásával
- Strukturális tulajdonságok definíciói