| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**FMInf_AlkAlg 3. vizsga 23-01-24** **Neptun:** ____________ **Név:** ______________________________

*A vizsga feladatainak* ***eredményeit erre*** *az oldalra kell írni, a* ***mellékszámításokat a hátoldalra*** *és ha oda nem fér (egyébként bőven odafér), akkor külön lapra, melynek jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 8.*

**1.** Igaz–Hamis I|H *(4 pont – hibás válasz −0.5 pont)*

*a)* Ha **A** irreducibilis nemnegatív mátrix, akkor spektrálkörén egyetlen sajátérték van, maga a spektrálkör sugara. $\boxed{\text{H}}$

*b)* Ha **A** tetszőleges valós mátrix, akkor az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrixnak egyetlen pozitív szemidefinit négyzetgyöke van. $\boxed{\text{I}}$

*c)* Egy pozitív szemidefinit mátrix minden sajátfelbontása egyben szinguláris érték szerinti felbontás is. $\boxed{\text{I}}$

*d)* A nilpotens mátrixok diagonalizálhatók, de ortogonálisan nem! $\boxed{\text{H}}$

**2.** *(4 pont)* Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

*a)* A lineáris algebra alaptétele szerint bármely valós **A** mátrixra

$\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

*b)* Mátrixok kongruenciája osztályozást ad meg a szimmetrikus mátrixok terén (két mátrix egy osztályba tartozik, ha kongruensek). Hány osztályba sorolódnak így a $2\times 2$-es valós szimmetrikus mátrixok?

6: $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$.

*c)* Mi az $n\times n$-es egységmátrix minimálpolinomja?

$\mu(x) = x - 1$

*d)* Kapcsoljuk össze az alábbi ítéletpárokat a legerősebb állítást adó módon a $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ jelek valamelyikével!

| | | | |
|---|---|---|---|
| *(a)* | **A** diagonalizálható | $\Leftarrow$ | **A** sajátértékei különbözőek |
| *(b)* | **A** ortogonálisan diagonalizálható | $\Leftrightarrow$ | **A** szimmetrikus |
| *(c)* | **A** unitéren diagonalizálható | $\Leftrightarrow$ | **A** normális |

**3.** *(4 pont)* Számítsuk ki a következőket!

*a)* Mi a diagonális alakja az $\mathbb{R}^4$ teret egy síkja mentén egy másik síkra vetítő leképezésnek (a két sík altér, és közös vektoruk csak a zérusvektor).

$\mathrm{diag}(1,1,0,0)$

*b)* Írjuk fel a $\cos(\mathbf{J})$ mátrixot, ha $\mathbf{J} = \begin{bmatrix}\pi&1&0\\0&\pi&1\\0&0&\pi\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}-1&0&\frac12\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, ui. $\cos\pi = -1$, $\cos'\pi = 0$, $\cos''\pi = 1$

*c)* Egy nemnegatív $4\times 4$-es irreducibilis mátrix spektrálsugara 1, és az egyik sajátértéke $-\mathrm{i}$. Mik a sajátértékei?

$1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$, ui. a spektrálkörön lévő sajátértékek szabályos sokszöget alkotnak

*d)* Az $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{5\times 9}$ mátrix nullitása 5. Mennyi az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullitása?

1

**4.** *(2 pont)* Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$ mátrix Frobenius- és 2-normáját!

$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{20}$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 4$ (2-norma a legnagyobb szinguláris érték, ami az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének négyzetgyöke, ami szimmetrikus mátrix esetén a legnagyobb absz.értékű sajátérték absz.értéke)

**5.** *(2 pont)* A $8\times 8$-as **A** mátrix sajátértékei 3 és 1. Az $\mathbf{A}-3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 6, 4, 3, míg $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 5. Írjuk fel **A** Jordan-féle normálalakját!

$$\begin{array}{c|cccccccc}
k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & \\
\hline
r_k & 8 & & 6 & & 4 & & 3 & \\
 & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccccccc}
k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & \\
\hline
r_k & 8 & & 7 & & 6 & & 5 & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 \\
 & & & 0 & & 0 & & 1 & \\
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc}
3&1&0&0&0&0&0&0\\
0&3&1&0&0&0&0&0\\
0&0&3&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&3&1&0&0&0\\
0&0&0&0&3&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right]$$

**6.** *(2 pont)* Adjuk meg az **A** mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Az 1-hez tartozó sajátaltér 1-dimenziós, így egyetlen J-blokk tartozik hozzá. (Az ált.s.v-hoz: keresünk egy vektort, amit $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ a **0**-ba visz

$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ J-lánc: $\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

**7.** *(2 pont)* Döntsük el, hogy primitív-e az alábbi mátrix, és tömören igazoljuk.

$$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Irreducibilis, de nem primitív, mert a négyzete reducibilis.