BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Jordan-féle normálalak

ÁLTALÁNOSÍTOTT SAJÁTVEKTOROK, MÁTRIXFÜGGVÉNYEK

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK


"The matrix is in Jordan normal form"

Tartalom

Ismeretek, képességek, célok

- invariáns altér, blokkdiagonális mátrix és az invariáns altér kapcsolata,
- általánosított sajátvektor, Jordan-blokk, Jordan-lánc, Jordan-bázis, Jordan-bázis keresése 3×3-as mátrixokra
- Jordan-normálalak, az A Jordan-normálalakjának meghatározása az $\mathrm{r}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})$ értékekből (táblázatos módszer)
- minimálpolinom és tulajdonságai, minimálpolinom megadása a Jordán-alakból
- mátrix spektrumán definiált függvények, mátrixfüggvény a Jordan-alakból és az Hermite-polinomból.

Jordan-féle normálalak

Jordan-féle normálalak

Általánosított sajátvektor

Invariáns alterek

m (1) az $(x, y, z) \mapsto (x + y, y, 2z)$, (2) az $\mathbb{R}^3$ z-tengely körüli forgatása sem diagonalizálható, de mindkéttőben a z-tengely sajátaltér, az xy-sík képe saját maga, direkt összegük $\mathbb{R}^3$. Mátrixuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) invariáns altere, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).

T Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \dots, k)$.

B $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-beli $\rightsquigarrow$ $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \dots, k)$.
$(\Leftarrow)$ $\forall\ \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ és $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k$
$\rightsquigarrow L\mathbf{x} = x_1 L\mathbf{u}_1 + x_2 L\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k L\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}$,

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}((1,-1,2,-1),(1,2,-1,2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak (az $\mathbf{L}$ mátrixnak).

M $L\mathbf{u} = (1,-2,3,-2)$, $L\mathbf{v} = (1,1,0,1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

m $\mathbf{rref}\,([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow L$ mátrixa

$$\mathbf{L}_{\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\}} = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 & * & * \\ -1/3 & 2/3 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \qquad \text{(blokkfelsőháromszög)}$$

Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafónak $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ invariáns alterei. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} \mathsf{U} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{W} \end{bmatrix}.$$

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

m
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \\ \mathcal{U}_2 &= \operatorname{span}(\mathbf{e}_4), \\ \mathcal{U}_3 &= \operatorname{span}(\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6) \\ \mathcal{V} &= \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned}.$$

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \dots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \dots, r$, $j = r+1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Mi van ha a geometriai multiplicitás $<$ algebrai multiplicitás?

- Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

  mátrix hatása a standard bázison: $\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$

  Átrendezés után: $\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatás-diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$
- Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs, viszont

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix (L lineáris trafó) λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen $k \in \mathbb{N}$ számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($(L - \lambda I)^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$). $k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) sorozatot Jordan-láncnak nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Egy tér *diszjunkt Jordan-láncokból* álló bázisát Jordan-bázisnak nevezzük.

Á Az $\mathbf{A}$ mátrix (az L lineáris transzformáció) λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak, mely az $\mathbf{A}$-nak (L-nek) invariáns altere.

B Ha $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\lambda$ ált.sv., azaz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\lambda$, ui.

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k+1}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k(\mathbf{A}\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k(\mathbf{A}\mathbf{x})\end{aligned}$$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (4-x)^3$.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

- $(\mathsf{A} - 4\mathsf{I})^3 = \mathsf{O}$, de $(\mathsf{A} - 4\mathsf{I})^2 \neq \mathsf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathsf{A} - 4\mathsf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$
-
$$\mathsf{A} - 4\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad (\mathsf{A} - 4\mathsf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow (\mathsf{A} - 4\mathsf{I})^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \rightsquigarrow x \neq z$, pl $(1, 0, 0)$

$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$

- A alakja az $\{x_1, x_2, x_3\}$ bázisban

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $(A - 4I)x_1 = 0$, $(A - 4I)x_2 = x_1$, $(A - 4I)x_3 = x_2 \rightsquigarrow$ $Ax_1 = 4x_1$, $Ax_2 = x_1 + 4x_2$, $Ax_3 = x_2 + 4x_3 \rightsquigarrow$ mátrixszorzat alak:

$$A[x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3] = [x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ $X^{-1}AX = J$, ahol $X = [x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3]$ (X az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

P $\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \chi_{\mathbf{C}}(x) = (4-x)^3.$

M Sajátaltér: $\operatorname{span}((1,0,1),(0,2,3))$

$(\mathbf{C}-4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

-

$$\mathbf{C}-4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$ megfelel.

- $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2,4,4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól:
$\mathbf{x}_1 = (-2,4,4) = -2(1,0,1) + 2(0,2,3)$.)

- $\mathbf{y}$ legyen független $\mathbf{x}_1$-től:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2,4,4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1,0,0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y} = (1,0,1)$$

- $\mathbf{C}$ alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$, $(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}$, azaz
$\mathbf{C}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, $\mathbf{C}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{C}\mathbf{y} = 4\mathbf{y}$, azaz

$$\mathbf{C}\,[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{y}] = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{y}] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan-féle normálalak

Jordan-tétel

Jordan-blokk

D Jordan-blokknak: az a négyzetes mátrix, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, másutt 0-k állnak:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

m Egy Jordan-blokknak minden vektor általánosított sajátvektora, de a standard bázisvektorokra ráadásul $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_n$

m Ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis diszjunkt Jordan-láncok uniója.

Jordan-mátrix

D A Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixot Jordan-mátrixnak nevezzük.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

- Egy Jordan-blokk főátlójában is állhatnak 0-k
- Minden diagonális mátrix Jordan-mátrix
- Egy Jordan-mátrixban több Jordan-blokk is tartalmazhatja ugyanazt az értéket a főátlójában

T **Jordan-tétel (1) mátrixra és (2) lineáris transzformációra**

(1) TFH $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, és $\chi_{\mathbf{A}}(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik $\mathbb{F}$ fölött, azaz minden gyöke $\mathbb{F}$-beli. Ekkor $\mathbf{A}$ hasonló egy Jordan-mátrixhoz, azaz létezik $\mathbf{C}$, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma.

(2) L! $\mathcal{V}$ véges dimenziós $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafó és TFH χ_A minden gyöke $\mathbb{F}$-beli. Ekkor $\mathcal{V}$-nek van olyan bázisa, melyben A mátrixa Jordan-mátrix.

D A $\mathbf{J}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjának, az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontást az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontásának nevezzük.

m minden komplex lineáris trafóhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a C oszlopvektoraiból áll).

m Valós mátrix komplex sajátértékkel csak olyan alakra hozható, melyben a „valós Jordan-blokkok” a következő típusúak:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & * & * & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 1 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \qquad \left(\text{ld. pl. a forgatómátrixot: } \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

m A különböző Jordan-blokkok egymástól fgtln sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1-\lambda)^4$.

M $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

m A karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (\lambda - x)^{13}$, a Jordan-láncok:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^2 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]
$$

- Hogy ismerhető fel e struktúra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$-k rangjából?
- e rangok: 13, 8, 5, 2, 0, 0,...
- a leghosszabb Jordan-lánc hossza = s, ha ez a legkisebb kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$ (itt $s = 4$)
- a Jordan-láncok száma = $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nullitása $= 13 - 8 = 5$

k	0		1		2		3		4		5
r	13		8		5		2		0		0
d_k		5		3		3		2		0	
n_k			2		0		1		2		

T **$\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja és nullitása** Jel. $\mathbf{J}$ Jordan-mátrixot, $\mathbf{J}_\lambda$ egy λ-hoz tartozó Jordan-blokkot.

1. $\forall\, m \times m$-es $\mathbf{J}_\lambda$ Jordan-blokk hatványai rangjának sorozata
   $\lambda = 0$ esetén: $m, m-1, m-2, \ldots, 2, 1, 0$;
   $\lambda \neq 0$ esetén: $m, m, \ldots, m$.
2. $d_k := r_{k-1} - r_k = \mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}) - \mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{k})$
   = a λ-hoz tartozó *legalább k-adrendű* Jordan-blokkok száma
   = a λ-hoz tartozó *legalább k-hosszú* Jordan-láncok száma
3. $n_k = d_k - d_{k+1}$
   = a λ-hoz tartozó *k-adrendű* Jordan-blokkok száma
   = λ-hoz tartozó *k-hosszú* Jordan-láncok száma
4. A legnagyobb λ-blokk mérete pontosan akkor s, ha s az a legkisebb kitevő, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{s}) = \mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{s+1})$.
5. A λ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkok száma $\mathrm{null}(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = n - \mathrm{r}(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})$, ahol n a $\mathbf{J}$ rendje.

m 1.-hez: $\mathbf{J}_\lambda$ hatványai, ha $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

m 4.-hez: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, a $\lambda_1 = 2$-höz legnagyobb blokk mérete 5, mert 5 a legkisebb kitevő, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{A}-2\mathbf{I})^5) = \mathrm{r}((\mathbf{A}-2\mathbf{I})^6) = 4$:

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c} 0 & 1 & & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & & & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 3 & \\ \hline & & & & & & & & & & & 3 \end{array}\right] \qquad (\mathbf{A}-2\mathbf{I})^5 = \left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & & * & * & * & \\ & & & & & & & & & * & * & \\ & & & & & & & & & & * & \\ \hline & & & & & & & & & & & * \end{array}\right]$$

m 5.-hez: az előző $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $r(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 10$, csak 2 0-sor van, minden $\lambda_1 = 2$-höz tartozó blokkban pontosan egy, tehát a 2-höz tartozó blokkok száma $= n - r(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 12 - 10 = 2$.

A Jordan-alak egyértelműsége

T Ha egy mátrixnak létezik Jordan-normálalakja, akkor az a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

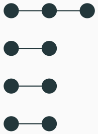
B Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

Egy λ-hoz tartozó Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával, azaz a sajátaltér dimenziójával – ez invariáns.

A λ-hoz tartozó $k \times k$-as blokkok száma Jordan-mátrix esetén csak a $\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangjától függ, ami invariáns.

P Egy 9×9-es $\mathbf{A}$ mátrixnak a 2 kilencszeres algebrai multiplicitású sajátértéke. Az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^k$ nullterének dimenziója $k = 1, 2, 3$ esetén rendre $4, 8, 9$.

M A nullitásokból grafikusan



- vagy a rangok kiszámításán keresztül

k	0		1		2		3	
nullitás	0		4		8		9	
rang	9		5		1		0	
d_k		4		4		1		0
n_i			0		3		1	

Így három 2×2-es és egy 3×3-as Jordan-blokkból áll a normálalak.

$$
J = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc}
2 & 1 & & & & & & & \\
 & 2 & & & & & & & \\
\hline
 & & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & \\
\hline
 & & & & 2 & 1 & & & \\
 & & & & & 2 & & & \\
\hline
 & & & & & & 2 & 1 & \\
 & & & & & & & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & 2
\end{array}\right]
$$

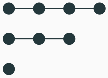
P Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{13\times 13}$-as mátrix sajátértékei $\lambda = 1, 2$.

$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: $10, 8, 6, 5$

$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: $11, 9, 8$

Írjuk fel a Jordan-féle normálalakját!

M A $\lambda = 1$ multiplicitása legalább $13 - 5 = 8$, a $\lambda = 2$ multiplicitása legalább $13 - 8 = 5$, de ez ki is adja a 13-adfokú polinomot. A nullitások sorozatai: $3, 5, 7, 8$ és $2, 4, 5$.

$\lambda = 1$: 

k	0		1		2		3		4	
r_k	13		10		8		6		5	
d_k		3		2		2		1		0
n_i			1		0		1		1	

$\lambda = 2$: 

k	0		1		2		3	
r_k	13		11		9		8	
d_k		2		2		1		0
n_i			0		1		1	

$$
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc|cc}
1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
& 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
& & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & & & & \\
\hline
& & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
& & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
& & & & & & & 1 & & & & & \\
\hline
& & & & & & & & 2 & 1 & & & \\
& & & & & & & & & 2 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & 2 & & \\
\hline
& & & & & & & & & & & 2 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & 2
\end{array}\right]
$$

Mátrixfüggvények

Mátrixfüggvények

Minimálpolinom

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (ill. $L : \mathcal{V}_\mathbb{F} \to \mathcal{V}_\mathbb{F}$, ahol $\mathcal{V}_\mathbb{F}$ véges dimenziós vt). Minimálpolinomnak nevezünk egy olyan minimális fokszámú $\mu_\mathbf{A}$ (ill. μ_L) főpolinomot (1 főegyütthatójú), melyre $\mu_\mathbf{A}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ (ill. $\mu_L(L) = O$).

D AMH a p polinom az $\mathbf{A}$ mátrix (L lin. trafó) annullátora, vagy hogy annullálja azt, ha $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. A minimálpolinom tehát egy legkisebb fokú annullátor főpolinom.

K Lehet-e konstanspolinom minimálpolinom?

M A 0 nem lehet, mert nem 1 a főegyütthatója, az 1 sem lehet, mert bármely mátrix behelyettesítése után $\mathbf{I}$ lesz (nem $\mathbf{O}$).

K Az $\mathbf{I}$ egységmátrixra mi a $\mu_\mathbf{I}(x)$ polinom?

M $\mu_\mathbf{I}(x) = x - 1$, ui. $\mu_\mathbf{I}(\mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$.

Á $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mu_\mathbf{A} = \mu_\mathbf{B}$

\- ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$, így minden p polinomra $p(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{B})$ egyszerre $\mathbf{O}$, illetve egyszerre nem.

m $\mu_L =$ bármely bázisban fölírt $\mathbf{M}$ mátrixának $\mu_\mathbf{M}$ min.pol.-jával.

Minimálpolinom tulajdonságai

T **Minimálpolinom tulajdonságai**

L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

1. $\mathbf{A}$-nak pontosan egy $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinomja van.
2. Bármely p polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \iff \mu_{\mathbf{A}} \mid p$.
3. $\mu_{\mathbf{A}} \mid \chi_{\mathbf{A}}$
4. $\mathbf{A}$ minden sajátértéke gyöke $\mu_{\mathbf{A}}$-nak.

m Ha $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_i (\lambda_i - x)^{a_i}$, akkor 3. és 4. miatt $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$, ahol $1 \leqslant m_i \leqslant a_i$, és a_i a λ_i algebrai multiplicitása.

m Ha $\mathbf{A}$ nilpotens, ahol $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^k$, ugyanis x^k annullátor, így a minimálpolinom csak valamely osztója lehet. Az osztói viszont mind x^m alakúak, ahol $m \leqslant k$, de azok $m < k$ esetén nem annullátorok.

Minimálpolinom tulajdonságai

B 1. $\exists$ annullátor $\rightsquigarrow$ $\exists$ főpolinom annullátor
Tfh p és q két különböző minimális fokszámú főpolinom, melyekre $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow (p-q)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) - q(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow p = q$.
2. $\mu_\mathbf{A} \mid p \rightsquigarrow p = \mu_\mathbf{A} q$ vmilyen q pol.-ra $\rightsquigarrow p(\mathbf{A}) = \mu_\mathbf{A}(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.
$p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ és $p = \mu_\mathbf{A} q + r$, ahol r foka kisebb, mint $\mu_\mathbf{A}$ foka, másrészt $\mathbf{O} = p(\mathbf{A}) = \mu_\mathbf{A}(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) \rightsquigarrow r(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow r = 0$.
3. az előzőekből
4. $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár $\rightsquigarrow \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$ $(k \in \mathbb{N}_0) \rightsquigarrow \forall$ p-re $p(\mathbf{A})\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}$.
$\mu_\mathbf{A}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mu_\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x}$, de $\mu_\mathbf{A}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ezért $\mu_\mathbf{A}(\lambda) = 0$.

T **Diagonalizálhatóság és minimálpolinom**

$\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja különböző lineáris tényezők szorzata.

Példák minimálpolinomra

P Határozzuk meg a χ_{A} és μ_{A} polinomokat!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathsf{A}}(x) = \mu_{\mathsf{A}}(x) = x^6$.

Példák minimálpolinomra

P

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-1)^4$ Minimálpolinom lehet $(x-1)^k$, ahol $1 \leqslant k \leqslant 4$. Mivel

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és $(A - I)^2 = O$, de $A - I \neq O$, $\rightsquigarrow \mu_A(x) = (x-1)^2$.
$(B - I)^2 = O$, de $B - I \neq O$, $\rightsquigarrow \mu_B(x) = (x-1)^2$.

Példák minimálpolinomra

P Mi az $\mathbb{R}^3$ térbeli alábbi transzformációk minimálpolinomja?

(1) egy síkra való vetítés

(2) egy egyenes körüli α szögű forgatás

(3) egy pontra való tükrözés

(4) egy síkra való tükrözés

M Ezek mind diagonalizálható transzformációk!

(1) $\chi(x) = (1-x)^2(-x)$, $\mu(x) = (x-1)x = x^2 - x$

(2) $\chi(x) = \mu(x) = (1-x)(1-2x\cos\alpha + x^2)$, ui.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(1-2x\cos\alpha + x^2)$$

(3) $\chi(x) = (-1-x)^3$, $\mu(x) = x+1$

(4) $\chi(x) = (1-x)^2(-1-x)$, $\mu(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

Á Bármely $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ főpolinomhoz létezik olyan $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix, melynek $\chi_{\mathbf{C}} = p$ (vagy $\chi_{\mathbf{C}} = -p$ ha n páratlan) és $\mu = p$. Egy ilyen mátrix a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mátrix.

D E mátrixot a polinom kísérő mátrixának nevezzük.

B* A karakterisztikus polinomot adó determinánsban alulról minden sor x-szeresét a fölötte lévőhöz adva kapjuk, hogy

$$\chi_{\mathbf{C}}(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ? \\ 0 & 1 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

$\rightsquigarrow \chi_{\mathbf{C}}(x) = (-1)^n p(x)$.

- Tetszőleges, de nem csupa zérus c_j konstansokra

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{C}^j\right) \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix},$$

azaz nincs n-nél alacsonyabb fokú annullátor, tehát $\mu_{\mathbf{C}}(x) = p(x)$.

Mátrixfüggvények

Diagonalizálható mátrixok függvényei

m Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és D diagonális, és D főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$f(\mathsf{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{D}^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k\right) = \operatorname{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)).$$

Így pl. bármely diag.-ható A mátrixra értelmezhető az e^{A}:

$$e^{\mathsf{A}} = \mathsf{I} + \mathsf{A} + \frac{\mathsf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathsf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathsf{I} + \mathsf{A})$ mátrixfüggvény is, az

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad |x| < 1$$

felhasználásávak kapjuk, hogy

$$\ln(\mathsf{I} + \mathsf{A}) = \mathsf{A} - \frac{\mathsf{A}^2}{2} + \frac{\mathsf{A}^3}{3} - \frac{\mathsf{A}^4}{4} + \dots,$$

ahol $\varrho(\mathsf{A}) < 1$ (a spektrálkör sugara < 1, azaz $\forall\lambda$ s.ért.: $|\lambda| < 1$).

m Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvett értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.

m A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

Á Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1},$$

m TFH az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x-\lambda)^m + \ldots$$

és legyen $\mathbf{J}_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J}_\lambda = \lambda\mathbf{I}+\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}_\lambda) = f(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)\mathbf{N} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{N}^{n-1} \quad (1)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J}_\lambda)$ kifejezésnek. Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

Mátrixfüggvények

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

Spektrumon definiált függvény

D Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i. Azt mondjuk, hogy f definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1,\ i = 1, \dots, s$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az $\mathbf{A}$ spektrumán.

m Minden függvény, mely $\mathbb{C}$ minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.

Példák

P Definiálva vannak-e az $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ és $\sin x$ függvények az alábbi mátrixok spektrumán?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M A: $\lambda_1 = 0$, $m_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$; $\rightsquigarrow f, g, \sin$ ✓

B: $\lambda_1 = 0$, $m_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$; $\rightsquigarrow \sin$ ✓

C: $\lambda_1 = -1$, $m_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$; $\lambda_3 = 0$, $m_3 = 1$; $\rightsquigarrow g, \sin$ ✓

ugyanis:

$\exists f(0), f(1), f'(1); \quad \nexists f(-1), f'(0)$

$\exists g(0), g(1), g'(1), g(-1); \quad \nexists g'(0)$

$\sin$ összes deriváltja értelmezve van mindenütt

D Legyen $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Jordan-felbontása $\mathsf{A} = \mathsf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathsf{J} = \mathrm{diag}(\mathsf{J}_1, \ldots, \mathsf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és n_i jelöli a J_i blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathsf{A}) = \mathsf{C}f(\mathsf{J})\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}\,\mathrm{diag}(f(\mathsf{J}_1), \ldots, f(\mathsf{J}_k))\mathsf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathsf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ldots & \ldots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

P Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

P Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az e^{A} mátrixot!

M $\chi_{\mathsf{A}}(x) = -x^3 - 10x^2 - 32x - 32 = -(x+2)(x+4)^2$,

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \ \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathrm{e}^{\mathsf{J}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-4} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathsf{A}} = \mathsf{X}e^{\mathsf{J}}\mathsf{X}^{-1} = \frac{1}{2e^4} \begin{bmatrix} e^2+1 & 2e^2-2 & e^2-1 \\ e^2-1 & 2e^2 & e^2-1 \\ 1-e^2 & 2-2e^2 & 3-e^2 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

M $\chi(\lambda) = (2-\lambda)^2(-5-\lambda)$. A 2-höz tartozó s.v.: $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7, 0, 1) \rightsquigarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

A 2-höz tartozó másik általánosított sajátvektor:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{3}, 0) \rightsquigarrow$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$\mathsf{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{\mathsf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathsf{J}} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

- Innen az $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{C}\mathsf{J}^{100}\mathbf{C}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}} = \mathbf{C}e^{3\mathsf{J}}\mathbf{C}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

P Számítsuk ki az $\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ mátrixot, ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

M Részletes megoldás az online tananyag „Mátrixszor változó exponenciális függvénye” című feladatban.
A karakterisztikus polinom $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (2-\lambda)^3$, így a sajátértékek $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.
Mivel $\mathbf{rref}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ összes vektora, azaz az összes sajátvektor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s.$$

Így a $\lambda = 2$-höz tartozó sajátaltér $\operatorname{span}((1,0,0),(0,2,1))$.

- Mivel $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) \neq \mathbf{O}$, ezért van olyan $\mathbf{x}_2 = (x, y, z)$ vektor, hogy $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, például $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0)$ ilyen.
- Az $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}_2$ jelöléssel a következő láncot kapjuk:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (4, -2, -1) \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0)$$

  A másik lánc egy hosszú, egyetlen vektora lehet például az $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$ sajátvektor.
- Az $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$, $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_3,$$

  mátrixszorzat alakja

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{CJ}.$$

- Innen a Jordan-felbontás

$$\mathsf{A} = \mathsf{CJC}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Először $\mathrm{e}^{t\mathsf{J}}$-t számoljuk ki. A deriválás x szerint történik, tehát t-t paraméternek kell tekintenünk: $(\mathrm{e}^{tx})' = t\mathrm{e}^{tx}$.
- Mivel a sajátérték 2, ezért $(\mathrm{e}^{tx})'\big|_{x=2} = t\mathrm{e}^{2t}$, és így

$$\mathrm{e}^{t\mathsf{J}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Innen

$$\mathrm{e}^{t\mathsf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 4t & -8t \\ 0 & 1-2t & 4t \\ 0 & -t & 2t+1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixfüggvények

Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

Á Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei A spektrumán azonosak.

B Ha $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja A-t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az A spektrumán.

Ha p és q értékei A spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát h annullálja A-t, így $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$.

Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

D Legyen A minimálpolinomja μ_{A}, és tegyük fel, hogy az f függvény definiálva van A spektrumán. Ekkor $f(\mathsf{A}) := p(\mathsf{A})$, ahol p az a polinom, melynek foka kisebb μ_{A} fokánál, és amely eleget tesz a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\ i = 1, \ldots, s \tag{2}$$

feltételeknek, ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli. E polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük Hermite-polinomnak.

T A mátrixfüggvény kiszámítására adott fenti két definíció ekvivalens.

- Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i-re, akkor az Hermite-polinom az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \tag{3}$$

  Ha **A**-nak csak egyetlen sajátértéke λ, melynek n az algebrai multiplicitása ($s = 1$, $m_1 = n$), akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x - \lambda)^j}{j!}.$$

- Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nehéz meghatározni, ha nem ismerjük a minimálpolinom fokát. Bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (2) feltételeket, azaz kereshetjük a karakterisztikus polinom fokánál kisebb fokúak közt.

P L! $f(x) = x^3$, $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $f(\mathsf{A}) = ?$.

1M Mivel $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x-2)^2$, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely A-ban azonos értéket ad mint f. Az Hermite-féle interpolációs polinom $p(x) = ax + b$, $p'(x) = a$:

$$\left.\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) &= 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) &= a. \end{aligned}\right. \quad \rightsquigarrow \quad a = 12, b = -16,$$

tehát $p(x) = 12x - 16$, így

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

2M A keresett elsőfokú polinom az $x^3 : \mu_{\mathsf{A}}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x-2)^2(x+4) + (12x - 16)$, a maradék $12x - 16$.

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $e^{\mathsf{A}} =?$

M $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x-2)^3 \rightsquigarrow$ Hermite-polinom: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} e^x\big|_2 &= e^2 = p(2) = 4a + 2b + c \\ (e^x)'\big|_2 &= e^2 = p'(2) = 4a + b \\ (e^x)''\big|_2 &= e^2 = p''(2) = 2a. \end{aligned}\right. \quad \rightsquigarrow \; a = e^2/2, b = -e^2, c = e^2, \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} e^{\mathsf{A}} &= p(\mathsf{A}) = \frac{e^2}{2}\mathsf{A}^2 - e^2\mathsf{A} + e^2\mathsf{I} \\ &= \frac{e^2}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + e^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy ez azonos a Jordan-normálalak alapján fölírt alakkal!

Exponenciális függvény Hermite-polinommal

P Számítsuk ki az e^{A} mátrixot ha

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (-2-x)(-4-x)^2$, Jordan-alakja $\mathrm{diag}(-2,-4,-4)$, a minimálpolinom $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x+2)(x+4) = x^2+6x+8$.
olyan elsőfokú $p(x) = ax+b$ alakú polinomot keresünk, melyre

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2} &= p(-2) = -2a+b \\ \mathrm{e}^{-4} &= p(-4) = -4a+b. \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}), \\ b &= 2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = a\mathsf{A} + b\mathsf{I} = \frac{1}{2\mathrm{e}^4}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & 2\mathrm{e}^2-2 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2-1 \\ 1-\mathrm{e}^2 & 2-2\mathrm{e}^2 & 3-\mathrm{e}^2 \end{bmatrix}.$$

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $e^{\mathsf{A}} = ?$

M $\chi(x) = (4-x)^3$, $\mu(x) = (4-x)^2 = (x-4)^2$ (korábbi feladatból)

Keresünk egy $p(x) = ax + b$ polinomot, melyre

$$\begin{aligned} \exp(4) = e^4 = p(4) = 4a + b \\ \exp'(4) = e^4 = p'(4) = a \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a = e^4,\ b = -3e^4$$

- Tehát

$$e^{\mathsf{A}} = e^4\mathsf{A} - 3e^4\mathbf{I} = e^4 \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

m A Matlab/Octave programokban az `exp(A)` parancs az A mátrix elemeire fogja alkalmazni az exponenciális függvényt, tehát nem az e^{A} mátrixot számolja. Viszont az `expm(A)` és az `e^A` parancsok jó választ adnak. Hasonlóan működnek az `sqrtm(A)` és a `logm(A)` mátrixfüggvények.