BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Diagonalizálhatóság

SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTALTÉR, KVADRATIKUS ALAKOK, SPEKTRÁLTÉTEL

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK


Tartalomjegyzék

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Ortogonális és unitér diagonalizálás

Kvadratikus formák

Ismeretek, képességek, célok

- Sajátérték, sajátaltér, sajátfelbontás, spektrálfelbontás, algebrai és geometriai multiplicitás fogalma és kiszámítása „tankönyvi” módszerrel, Gershgorin-körök, domináns sajátérték, domináns főátlójú mátrix, hatványmódszer.
- Speciális mátrixok sajátértékei, mátrix hatványainak sajátértékei, Cayley–Hamilton-tétel.
- A hasonlóságra invariáns újabb tulajdonságok, feltételek a diagonalizálhatóságra, és az ortogonális (unitér) diagonalizálhatóságra, Schur-felbontás.
- Kvadratikus formák, főtengelytranszformáció, definitség, főminorok, kongruencia, Sylvester-féle tehetetlenségi törvény.
- Pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Miért szeretjük a diagonális mátrixokat?

- „úgy” lehet velük számolni, mint a számokkal: összeadás, kivonás, szorzás, osztás (ha nincs a főátlóban 0), hatványozás elemenként:

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\Big/\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0\\0&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}8&0\\0&27\end{bmatrix}.$$

- tetszőleges p polinomra $p\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}p(2)&0\\0&p(3)\end{bmatrix}$.
- a standard egységvektorokat a saját konstansszorosukba viszik, így könnyen „látjuk” a mátrixleképezés hatását:

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Jó bázis választása

P Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!

M A sík egy bázisa $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, a rá merőleges altér egy bázisa $\{\mathbf{c}\}$.

A T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$.

Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

E bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$.

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció. Amh az $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor az L trafó sajátvektora, ha $L\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}$, azaz ha van olyan $\lambda \in \mathbb{F}$ szám, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Az ilyen λ számot az L lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük.

m Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor minden $c\mathbf{x}$ $(c \neq 0)$ is:

$$L(c\mathbf{x}) = cL\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $L(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$.

Á A sajátvektorok alterei: Ha az L lin.trafónak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik a $\mathrm{Ker}(L - \lambda I)$ altérrel.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff L\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (L - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(L - \lambda I)$.

Sajátaltér

D Az L lin.trafó λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a $\mathbf{0}$ alkotta alteret a λ s.é.-hez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

P
1. L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, I az identikus leképezés. Ekkor a tetszőleges $c \in \mathbb{F}$ számra a cI leképezésnek a $\mathcal{V}$ tér minden nemnulla vektora a c számhoz tartozó sajátvektora.
2. L! $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ a valósok halmazán akárhányszor diffható valós függvények tere és $D : \mathcal{V} \to \mathcal{V}; f \mapsto f'$. D sajátvektora $\mathrm{e}^{\lambda x}$, ami épp a λ sajátértékhez tartozik, mert $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$.
3. A sík $\alpha \neq k\pi$ szöggel való elforgatásának nincs sajátvektora.

F Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér?
1. a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre;
2. a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre;
3. a tér vektorainak forgatása egyenes körül $\alpha \neq k\pi$ szöggel;
4. a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
5. a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Mátrixleképezés sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere

D L! $\mathbb{F}$ test. Amh a $\lambda \in \mathbb{F}$ szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, az általuk a $\mathbf{0}$ vektorral alkotott alteret az $\mathbf{A}$ sajátalterének, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.
$\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ bal sajátvektor, ha $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$, azaz ha $\mathbf{y}$ az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sajátvektora.

P $(-1, (2, 1))$ és $(2, (1, 2))$ egy-egy sajátpárja a $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak, míg $(-1, (2, -1))$ és $(2, (1, -2))$ egy-egy bal sajátpárja, mert

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Hogyan találjuk meg a sajátértékeket?

Á λ pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$.

B λ sajátérték, ha $\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff \mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{A}\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{x}$ megoldása $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletnek $\iff$ $\mathbf{x}\in\mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \iff \mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\neq\{\mathbf{0}\} \iff \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$.

D L! $\mathbf{A}\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A $\chi(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ polinomot az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinomnak nev.

A $\chi(\lambda)=0$ egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

m Néhol a kar. pol. $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$, ami mindig 1-főegyütthatójú, de a konstans tag nem mindig a determináns.

P Határozzuk meg az

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját!

M Minden 2×2-es mátrixra:

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathsf{A})\lambda + \det \mathsf{A}. \end{aligned}$$

nyom, determináns!

Karakterisztikus polinom felírása (folyt)

$$\det(\mathsf{B} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{C} - \lambda \mathsf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Háromszögmátrixok sajátértékei

T A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

B A háromszögmátrix $\rightsquigarrow$ $\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}$ is $\rightsquigarrow$

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$. Így ezek az A sajátértékei.

Determináns, nyom és a sajátértékek

T Ha az n-edrendű A mátrix sajátértékei λ_1,..., λ_n, akkor

$$\det(\mathsf{A}) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$$

$$\operatorname{trace}(\mathsf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

A determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója a karakterisztikus polinomban.

B A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy $\det(\mathsf{A}) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$.

\- $(-\lambda)^{n-1}$ szorzat a determináns kígyók determinánsainak összegére bontása alapján csak az $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda)$ szorzatból kapható, onnan pedig az épp $\sum_i a_{ii} = \operatorname{trace}(\mathsf{A})$.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Sajátaltér

Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

m Tankönyvi módszer:

1. $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = 0$ gyökeinek meghatározása (sajátértékek)
2. $\forall\ \lambda$: $\mathcal{N}(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})$ bázisának meghatározása (a nulltér nemzérus vektorai a sajátvektorok)

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M

1. felső háromszögmátrix: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$
2. $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a két sajátaltér $\mathrm{span}((1,0,0))$ és $\mathrm{span}((1/2,1,0),(1/2,0,1))$.

Karakterisztikus polinom és a racionálisgyök-tétel

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

M $|\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6)$

racionálisgyök-tétellel: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$\mathsf{A} + \mathsf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = 6$:

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} x_1 \qquad - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{array}$$

$x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- A sajátalterek: $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$

P Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

M

$$|\mathsf{D} - \lambda \mathsf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

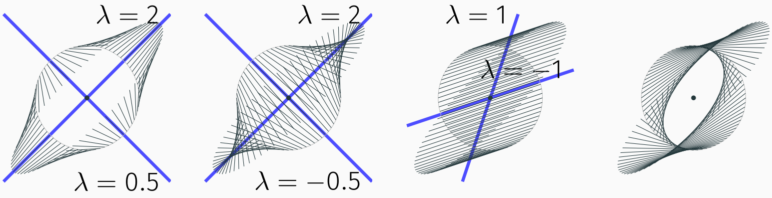
$$\lambda_2 = -\mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \qquad \lambda_1 = \mathrm{i},\ \lambda_2 = -\mathrm{i}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Komplex és többszörös sajátértékek

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei

P Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

M A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$:

$$\mathsf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathsf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x - iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x + iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

D a λ sajátérték algebrai multiplicitása $m_a(\lambda) =$ „a λ multiplicitása a karakterisztikus polinomban”.

D a λ geometriai multiplicitása $m_g(\lambda) =$ „a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója”.

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

M $(4-\lambda)^3$, a 4 algebrai multiplicitása 3.

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

T $\forall\lambda$ sajátértékre: $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

P $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$, gyökei 1 és 2

$$\lambda = 1\colon\ \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$m_g(1) = m_a(1) = 2$

$$\lambda = 2\colon\ \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$m_g(2) = 1$, $m_a(2) = 2$

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Mátrixhatványok és speciális mátrixok

Sajátértékek és a mátrix hatványai

T Az A pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathsf{A} - 0\mathsf{I}) \neq 0 \iff \det(\mathsf{A}) \neq 0 \iff \mathsf{A}$ invertálható

T Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az A-hoz tartozó sajátpár, akkor bármely egész n esetén $(\lambda^n, \mathbf{x})$ az A^n-hez tartozó sajátpár, ha λ^n és A^n is értelmezve van.

B $n = 0$, $n = 1$: trivi, $n > 2$:

$\mathsf{A}^k\mathbf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathsf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathsf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$

invertálható: $\mathsf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$ amiből $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathbf{x},$ azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathbf{x}.$

negatív kitevő: $\mathsf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x},$ amiből $\lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathsf{A}^{-k}\mathbf{x}.$

Sajátértékek és a mátrix hatványai

T **Mátrix hatványainak hatása**

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$, ... $(\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ sajátpárok. Ha $\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$, akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k.$$

B $$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = \mathbf{A}^m\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{A}^m\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} c_i\lambda_i^m\mathbf{x}_i$$

Speciális mátrixok sajátértékei

Á Speciális valós mátrixok: Legyen $\mathbf{A}$ valós mátrix,

- ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- ha $\mathbf{A}$ ferdén szimm., akkor minden s.ért.-e imaginárius,
- ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden s.é. absz. értéke 1,
- $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^H\lambda\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\mathbf{x} = \bar{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2$. L! $\lambda = a + ib$.

- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.
- $\mathbf{A}$ ortogonális: bármely $\mathbf{x}$-re $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$. Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$
- Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor λ^k sajátértéke $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$-nak, így $\mathbf{A}$-nak minden sajátértéke 0. Megfordítás a Cayley–Hamilton-tételből!

Speciális mátrixok sajátértékei 2.

T **Speciális komplex mátrixok sajátértékei**

Ha az n-edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix

- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
- ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Diagonalizálhatóság

Hasonlóság

T Ha $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, akkor A és B karakterisztikus polinomja, sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai megegyeznek.

B $\mathsf{A} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{C}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I} &= \mathsf{C}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{C} - \lambda\mathsf{C}^{-1}\mathsf{I}\mathsf{C} \\ &= \mathsf{C}^{-1}(\mathsf{B}\mathsf{C} - \lambda\mathsf{I}\mathsf{C}) \\ &= \mathsf{C}^{-1}(\mathsf{B} - \lambda\mathsf{I})\mathsf{C},\end{aligned}$$

Hasonló mátrixoknak pedig determinánsuk és nullterük dimenziója is azonos.

K Lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja definiálható.

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ véges dimenziós vektortér, az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja = bármely bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomjával.

Diagonalizálhatóság

D Az $\mathbf{A}$ mátrix (az L lineáris transzformáció) diagonalizálható, ha van olyan bázis, melyben mátrixa diagonális. ($\mathbf{A}$ esetén ez azt jelenti, hogy hasonló egy diagonális mátrixhoz: $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.)

T **A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele**

Az $\mathbf{A}$ mátrix (az L lineáris transzformáció) diagonalizálható $\iff$ van n lineárisan független sajátvektora.

B $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{C}$

$$[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

és e két mátrix i-edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$.

Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja

D Mátrix sajátfelbontása: $\mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1}$ (C oszlopai a sajátvektorok, Λ diagonális elemei a hozzájuk tartozó sajátértékek)

m $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = \det((\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathsf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathsf{I}) \rightsquigarrow$ a bal és jobb sajátértékek azonosak

m $\Lambda\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A} \rightsquigarrow \mathsf{C}^{-1}$ sorvektorai A bal sajátvektorai

D Sajátfelbontás diadikus alakja:

$$\begin{aligned}\mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n^\mathsf{T}\end{aligned}$$

Diagonalizálható mátrix polinomja, Cayley–Hamilton-tétel

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}.$$

B A mátrix diagonalizálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$
$\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\Lambda^2\mathbf{C}^{-1}$...tetszőleges nemnegatív k egészre
$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\Lambda^k\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\Lambda)\mathbf{C}^{-1}$.

T Cayley–Hamilton-tétel: Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

m Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor trivi, ui. ha $\chi_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja, λ egy sajátértéke, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Különböző sajátértékek sajátalterei

T Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B* TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$
$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.
Kivonva: $\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1}$,
Mivel az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lineárisan függetlenek,
$c_1 = \dots = c_{i-1} = 0$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, ellentmondás.

K A diag.-hatóság egy elégséges feltétele: Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diag.-ható.

Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság

K A különböző sajátalterek bázisainak uniója lineárisan független vektorokból áll.

T **Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele**

Egy n-edrendű valós vagy komplex négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

K Egy $\mathbb{F}$ test fölötti n-edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha az $\mathbb{F}^n$ tér előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

P melyik esetben lesz a tér sajátalterek direkt összege?

- vetítés egyenesre, síkra, altérre, hipersíkra,
- tükrözés egyenesre, síkra, hipersíkra,
- forgatás egy egyenes körül a térben (nem diagonalizálható)!

m Blokkosításból:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathsf{I} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \lambda_2 \mathsf{I} & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \lambda_k \mathsf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} \mathsf{X}_1 & \mathsf{X}_2 & \dots & \mathsf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathsf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathsf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathsf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1}$ felbontás:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathsf{X}_1 & \mathsf{X}_2 & \dots & \mathsf{X}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathsf{I} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \lambda_2 \mathsf{I} & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \lambda_k \mathsf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathsf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathsf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathsf{X}_1 \mathsf{Y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2 \mathsf{X}_2 \mathsf{Y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_k \mathsf{X}_k \mathsf{Y}_k^\mathsf{T} \\ &= \lambda_1 \mathsf{P}_1 + \lambda_2 \mathsf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathsf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathsf{P}_i = \mathsf{X}_i \mathsf{Y}_i^\mathsf{T}$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyre:

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

T **Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása**

A $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre vetít $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ mentén.

D A spektruma a $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ halmaz.

B $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ $(i \neq j) \rightsquigarrow \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}$.

$\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i(\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i)\mathbf{Y}_i^T = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i$, azaz $\mathbf{P}_i$ vetítés.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

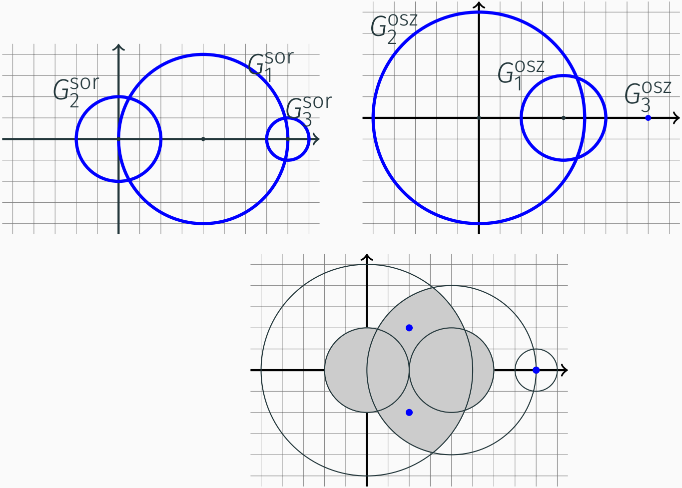
A sajátérték kiszámítása

Gersgorin-körök

D Gersgorin-körök: Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \ldots, n$), ahol

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{1}$$

P Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:



Gersgorin-körök

T A valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B* $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i |x_i| = 1$, tehát $|x_j| \leq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1-r)\,\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, így
$\mathbf{B}(0) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Minden soronként (oszloponként) domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. ($|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ vagy $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$)

B Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót.

P A következő mátrixok biztosan invertálhatóak:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

m $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ha λ_1 szig. dom. s.é., azaz $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, akkor λ_1 valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne.

Legyen $\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\mathbf{x}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k\mathbf{v} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{x}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{x}_m. \end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

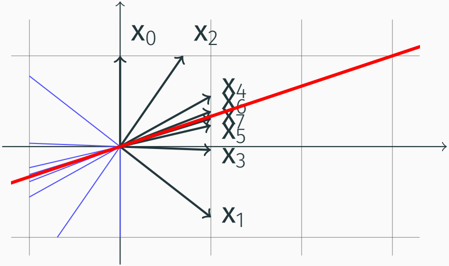
$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_m \to c_1\mathbf{x}_1,$$

Tehát ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k} \to \lambda$ (Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



Ortogonális és unitér diagonalizálás

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha van olyan $\mathcal{Q}$ ortonormált bázis, melyben diagonális alakú, másként fogalmazva ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális Λ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$ (a két megfogalmazás közti kapcsolat: $\mathbf{Q}$ a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ áttérés mátrixa).
L! $L : \mathcal{V}_\mathbb{R} \to \mathcal{V}_\mathbb{R}$ lineáris transzformáció, ahol $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ végesdimenziós valós euklideszi tér. Az L lineáris transzformáció ortogonálisan diagonalizálható, ha van olyan $\mathcal{Q}$ ortonormált bázis, melyben mátrixa diagonális alakú.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

T **Valós spektráltétel (ort. diag–hatóság szüks. és elégs. felt.)**

A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A}^T = (\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{Q}^T)^T\Lambda^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T = \mathbf{A}$.

$(\Leftarrow)$ teljes indukció, $n = 1$ OK.

$\mathbf{A}$ szimmetrikus, így minden sajátértéke valós. $(\lambda, \mathbf{u}_1)$ egy sajátpár, $\mathbf{u}_1$-et kiegészítjük ONB-sá: $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_n]$.

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

- $\mathsf{B}^\mathsf{T} = (\mathsf{Q}_0^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q}_0)^\mathsf{T} = \mathsf{Q}_0^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{Q}_0 = \mathsf{Q}_0^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q}_0 = \mathsf{B}$, $\rightsquigarrow \mathsf{B} = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{A}_1 \end{smallmatrix}\right]$ és A_1 szimm.
- $\mathsf{B} \sim \mathsf{A} \rightsquigarrow$ sajátértékeik megegyeznek $\rightsquigarrow \mathsf{A}_1$ minden sajátértéke A-nak is sajátértéke $\rightsquigarrow$ (teljes indukció miatt) $\mathsf{A}_1 = \mathsf{Q}_1\Lambda_1\mathsf{Q}_1^\mathsf{T}$.
- $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ ortogonális

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q} &= \left(\mathsf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^\mathsf{T} \mathsf{A} \left(\mathsf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \mathsf{Q}_0^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{Q}_1^\mathsf{T}\mathsf{A}_1\mathsf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \Lambda_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Schur-felbontás

T **Valós Schur-felbontás**

Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz: $\exists\mathbf{Q}$ ortogonális: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$.

B Mint az előbb:

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Indukció: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^T$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^T \mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}.$$

P Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Adjuk meg egy Schur-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$$

M Karakterisztikus polinom: $(x-1)^2$

- sajátérték: $\lambda_{1,2} = 1$, sajátaltér: $\mathrm{span}((4,3))$.
- ONB: $\{(4/5, 3/5), (-3/5, 4/5)\}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$
- Innen $\mathbf{Q}^\top\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hessenberg-mátrixok

D Felső Hessenberg-mátrix: a subdiagonális alatt minden elem nulla.

P
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{H}$ felső Hessenberg-mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QHQ}^\mathsf{T}$.

Mátrixok unitér diagonalizálása

D A unitéren diagonalizálható, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér és Λ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \Lambda$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normális, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

T **Unitér diag-hatóság szüks. és elégs. feltétele**

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális.

T **Komplex Schur-felbontás**

Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz: $\exists \mathbf{U}$ unitér: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$.

B* Unitér diag-hatóság szüks. és elégs. feltétel

- $(\Rightarrow)$ $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}}$

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{A} &= (\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}}) = \mathsf{U}\Lambda^{\mathsf{H}}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}} = \mathsf{U}\Lambda^{\mathsf{H}}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}} \\ &= \mathsf{U}\Lambda\Lambda^{\mathsf{H}}\mathsf{U}^{\mathsf{H}} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{U}\Lambda^{\mathsf{H}}\mathsf{U}^{\mathsf{H}} = (\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}})(\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}.\end{aligned}$$

- $(\Leftarrow)$ Schur: $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}$. Ha A normális, T is:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}\mathsf{T} &= (\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U})^{\mathsf{H}}(\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U}) = \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{U}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U} = \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U} \\ &= \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{U} = \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{U} = (\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U})(\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U})^{\mathsf{H}} = \mathsf{T}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}.\end{aligned}$$

$$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} : \text{ ezért } [\mathsf{T}^{\mathsf{H}}\mathsf{T}]_{11} = \|t_{11}\|^2,$$

$[\mathsf{T}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}]_{11} = \|t_{11}\|^2 + \|t_{12}\|^2 + \cdots + \|t_{1n}\|^2$, amiből $t_{12} = \cdots = t_{1n} = 0$.
Hasonlóan a $[\mathsf{T}^{\mathsf{H}}\mathsf{T}]_{22}$ és a $[\mathsf{T}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}]_{22}$ elemekből $t_{23} = \cdots = t_{2n} = 0$, stb. Tehát T diagonális.

Kvadratikus formák

Kvadratikus formák

Multi- és bilineáris függvények

Multilineáris függvények

D Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Az $m : \mathcal{V}^n \to \mathbb{F}$ multilineáris függvény, ha minden változójában lineáris a többi rögzítése mellett. $n = 2$ esetén bilineárisnak nev. Tehát a $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ függvény bilineáris, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

$$b(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = c\, b(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \qquad b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = c\, b(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

P
1. Az n-edrendű determináns a sorvektorainak multilineáris függvénye, mivel minden sorában homogén és additív. A 2×2-es $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$ determináns így bilineáris, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.
2. a skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben bilineáris: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_iy_i$,
3. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ bilineáris, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Szeszkvilineáris (komplex bilineáris) függvény és mátrixa

D Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{C}$ fölötti vektortér. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ függvényt komplex bilineáris függvénynek vagy szeszkvilineáris függvénynek nevezzük, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{C}$ esetén

$$b(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bar{c}\, b(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \qquad b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = c\, b(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

azaz b „konjugált lineáris” az első változóban, a 2. rögzítése mellett és lineáris a 2. változóban, az első rögzítése mellett.

P
1. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{B}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$,
2. skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-ben: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$,

Bilineáris függvény mátrixa – Gram-mátrix

D Legyen a $\mathcal{V}_\mathbb{F}$ vektortér egy bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ (komplex) bilineáris függvény $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó mátrixán, vagy Gram-mátrixán azt a $\mathbf{B}$ mátrixot értjük, melyre

$$[\mathbf{B}]_{ij} = b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j).$$

P Mi az $\mathbb{R}^2$-beli skaláris szorzás – mint bilineáris függvény – mátrixa a standard és a $\mathcal{C} = \{(1,1),(2,-1)\}$ bázisokra nézve!

M $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, stan.bázis: $b(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \rightsquigarrow$ a Gram-mátrix $\mathbf{I}$.

- A $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozóan $\mathbf{B} = [b(\mathbf{c}_i,\mathbf{c}_j)]_{ij} = [\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j]_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

F Mi a 2×2-es determináns – mint sorvektorainak bilineáris függvénye – mátrixa a fenti bázisokban ($b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v})$)

M $[b(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ill. $\mathbf{B} = [b(\mathbf{c}_i,\mathbf{c}_j)]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

T Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ egy bázisa, egy $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakját jelölje $\mathbf{x}_\mathcal{C}$. Ha $\mathbf{B}$ a $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozóan, akkor $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}$ (szeszkvilin.: $\mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{H} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}$).

P A 2×2-es det: $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

K A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvényhez annak $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó Gram-mátrixát rendelő $b \to \mathbf{B}$ leképezés bijekció a bilineáris függvények és az $\mathbb{F}^{n \times n}$ között, ahol

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}.$$

(szeszkvilineáris függvényekre is, ahol $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{H} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}$).

Bilineáris függvény mátrixa báziscsere után

Á Legyen $\mathbf{M}$ a $\mathcal{B}$-ről $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixa, azaz $\mathbf{x}_\mathcal{C} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x}_\mathcal{B}$, $\mathbf{y}_\mathcal{C} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{y}_\mathcal{B}$. Ekkor

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}_\mathcal{C} = \mathbf{x}_\mathcal{B}^\mathsf{T}\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{y}_\mathcal{B}$$

D Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kongruensek, jelölése $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, ha van olyan invertálható $\mathbf{M}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{M}$.

Á $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \iff$ van olyan bilineáris függvény, melynek a két mátrix a Gram-mátrixa két bázisban.

m Míg a lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, addig bilineáris függvény mátrixa egy vele kongruensre.

m Komplex bilineáris függvény esetén $\mathbf{A} = \mathbf{M}^\mathsf{H}\mathbf{B}\mathbf{M}$.

Szimmetrikus bilineáris függvények

D $\mathcal{V}$ $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris fv. szimmetrikus, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

T Egy bilineáris $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szimmetrikus, ha mátrixa szimmetrikus (bármely bázisban),

B $(\Rightarrow)$ b szimmetrikus $\rightsquigarrow b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = b(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i) \rightsquigarrow b_{ij} = b_{ji} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ szimmetrikus

- $(\Leftarrow)$ $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [b(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^\mathsf{T} = \left(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

Szimmetrikus bilineáris alak diagonalizálhatósága

T **Főtengelytétel bilineáris függvényekre**

Egy b bilineáris függvény pontosan akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus!

B ($\Rightarrow$) Ha b diagonalizálható, azaz valamely bázisban diagonális a mátrixa, akkor szimmetrikus, hisz diagonális mátrix szimmetrikus!

\- ($\Leftarrow$) Ha b szimmetrikus, akkor a $\mathbf{B}$ Gram-mátrixa is az

$\rightsquigarrow$ $\exists$ $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{Q}^\top\mathbf{B}\mathbf{Q}$ diagonális.

$\rightsquigarrow$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{Q}}^\top\mathbf{Q}^\top\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y}_{\mathcal{Q}} = \sum_i \lambda_i x_i y_i$, ahol a λ_i értékek $\mathbf{B}$ sajátértékei.

Á Ha a b bilineáris függvény diagonalizálható, akkor diagonalizálható úgy is, hogy mátrixának főátlójában csak ± 1-esek és 0-k állnak!

B Legyen Λ a b egy mátrixának diagonalizálásából származó diagonális mátrixa. Legyen

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ A $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mátrixszal $\mathbf{D}^\top \Lambda \mathbf{D}$ diagonális és minden diagonális eleme ± 1 vagy 0, másrészt kongruens Λ-val.

$\mathbf{D}^\top \Lambda \mathbf{D}$-ben az i-edik főátlóbeli elem $\mathrm{sgn}(\lambda_i)$

P $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2$. Hozzuk diagonális alakra!

M A standard bázisban $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

E mátrix sajátértékei 2, 2, 5 (korábban meghatároztuk a sajátvektorokból álló $\mathbf{Q}$ mátrixot is)

$\mathbf{Q}$ a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ áttérés mátrixa, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ koordinátás alakja a $\mathcal{Q}$ bázisban $\mathbf{x}_\mathcal{Q} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, $\mathbf{y}_\mathcal{Q} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ (tehát $\mathbf{x}_\mathcal{Q} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathcal{E}$).

$\rightsquigarrow$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2\tilde{x}_1\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}_2\tilde{y}_2 + 5\tilde{x}_3\tilde{y}_3$

$\rightsquigarrow$ de van olyan bázis is, melyben $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1 + \tilde{x}_2\tilde{y}_2 + \tilde{x}_3\tilde{y}_3$

D A b szimmetrikus bilineáris függvény valamely **D** diagonális mátrixában jelölje n_+ a pozitív előjelű, n_- a negatív előjelű és n_0 a zérus értékű diagonális elemek számát. A b szimmetrikus bilineáris függvény tehetetlenségén (inerciáján) vagy szignatúráján az (n_+, n_-, n_0) hármast értjük. Hasonlóan: egy szimmetrikus mátrix tehetlenségén/szignatúráján egy vele kongruens diagonális mátrix (n_+, n_-, n_0) hármasát értjük.

T **Sylvester-féle tehetetlenségi tétel**

Két valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor kongruens, ha azonos a tehetetlenségük.

m Mindegy, hogy b mátrixát melyik bázisban diagonalizáltuk, mindegyik mátrixhoz ugyanaz a (n_+, n_-, n_0) hármas tartozik, azaz a tehetetlenség invariáns a kongruenciára nézve.

Kvadratikus formák

A kvadratikus forma és a főtengelytétel

Homogén másodfokú polinomok = kvadratikus alakok

P Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja: Írjuk fel az $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!

M A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\
&= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

D L! b egy bilineáris függvény. A $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ függvényt kvadratikus alaknak vagy kvadratikus formának nevezzük.

Á Másik bázisra való áttéréskor a $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilineáris függvény $\mathbf{B}$ mátrixa $\mathbf{M}^T\mathbf{B}\mathbf{M}$-re változik, így ez igaz a belőle képzett $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alakra is.

P Írjuk fel a $q(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$ kvadratikus alakot a $\mathcal{C} = \{(2, 1), (3, 1)\}$ bázisban!

M A q mátrixszorzatos alakja $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Az áttérés mátrixa $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, így

$$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Tehát a kvadratikus alak a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = -7\xi^2 - 16\xi\eta - 8\eta^2.$$

T

Főtengelytétel

$\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós szimmetrikus mátrix, $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$ ortogonális diagonalizálása. Az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus formát az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\Lambda\mathbf{y}$ kvadratikus formába transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\Lambda\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

ahol λ_1, λ_2,..., λ_n az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. Választható $\mathbf{Q}$ úgy, hogy $\det(\mathbf{Q}) = 1$ legyen.

Kvadratikus formák

Kvadratikus alak jellege/definitsége

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

Példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

P $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - 2y^2$, $h(x,y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x,y,z) = x^2 + 2y^2$

M f pozitív definit, hisz az $(x,y) \neq (0,0)$ esetén értéke pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$)

\- szignatúráik: $(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,2,0)$, $(2,0,1)$

m Ha $\mathbf{A}$ negatív (szemi)definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív (szemi)definit.

m Ha $\mathbf{A} = [a]$, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.

m $\mathbf{I}$ pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Á Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, és pontosan akkor pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú.

B $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 \geqslant 0$.

\- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \iff \mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív definit $\iff \mathbf{A}$ teljes oszloprangú

Mátrix sajátértékei és definitsége

T A valós szimmetrikus A mátrix ($x^\top A x$ kvadratikus forma) pontosan akkor

- pozitív definit, ha A minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha A minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha A minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha A minden sajátértéke nempozitív;
- indefinit, ha A-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

m Hasonló állítás igaz bármely A-val kongruens diagonális mátrix főátlóbeli elemeire.

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;
- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden vezető főminora pozitív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixok jellegét (definitségének típusát)!

M Az **A** mátrix sajátértékei 1, 1 és 4 $\rightsquigarrow$ pozitív definit.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \xi^2+\eta^2+4\zeta^2$$

- **B** sajátértékei -1, -1 és 2 $\rightsquigarrow$ indefinit ($(1,0,0)$-ben negatív, $(0,0,1)$-ben pozitív), a főtengely-transzformáció után: $-\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2$
- **C** sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció után kapott alak $-3\xi^2 - 3\eta^2 + 0\zeta^2 = -3\xi^2 - 3\eta^2$ $\rightsquigarrow$ negatív szemidefinit ($(0,0,1)$ helyen 0, és pozitív értéket nem vesz fel).

Kvadratikus formák

(Szemi)definit mátrixok faktorizációja

Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja

T **Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja**

L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. A köv. ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit,
2. $\exists$ pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.
3. $\exists$ $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$.

$\mathbf{B}$ egyértelmű, azaz egy pozitív szemidefinit mátrixnak egy négyzetgyöke van a pozitív szemidefinit mátrixok közt.

B (1. $\Rightarrow$ 2.) $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\top$ $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit $\rightsquigarrow$ $\forall i$: $\lambda_i \geqslant 0$ $\rightsquigarrow$ Λ főátlóbeli elemeiből négyzetgyök vonható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\Lambda^{\frac{1}{2}})\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{B}\mathbf{B}$, ahol $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.

- (2. $\Rightarrow$ 3.) $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ vagy $\mathbf{C} = \Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\top$ jó: ($\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^\top\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$).
- (3. $\Rightarrow$ 1.) korábban láttuk
- $\mathbf{B}$ egyértelműségének igazolása technikai.

P Van-e olyan $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$?

M Sajátértékek: 25, 0, a sajátvektorok mátrixa $\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, így a sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \Lambda^{1/2}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\Lambda^{1/2}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{B}$ is jó.

T **Pozitív definit mátrixok faktorizációja**

L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit,
2. az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ LU-felbontásban $\mathbf{U}$ minden főátlóbeli eleme pozitív,
3. van olyan valós $\mathbf{R}$ felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$.
4. van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$,

A 3. pont szerinti $\mathbf{R}$ egyértelmű!

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$ felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.

P Adjuk meg az A mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B A mátrix pozitív definit ($\chi_{\mathsf{A}}(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$) Az LU-felbontás

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathrm{diag}(1, 4, 1) = \mathrm{diag}(1, 2, 1)\,\mathrm{diag}(1, 2, 1)$ és az $\mathsf{R} = \mathrm{diag}(1, 2, 1)\mathsf{L}^{\mathsf{T}} \rightsquigarrow$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$