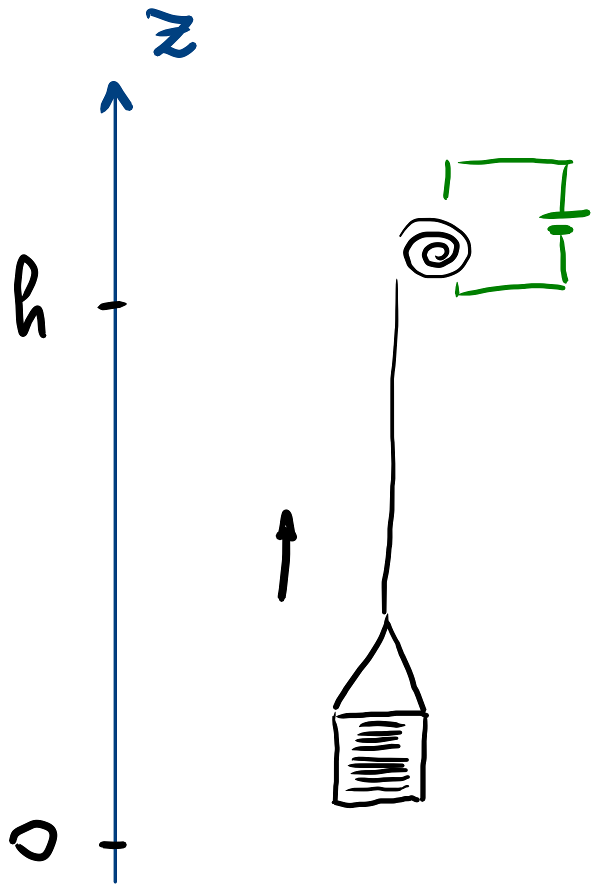
Felhúzás minimális elekt. veszteséggel



$$E_v = \int_0^T R\, I(t)^2\, dt = \kappa R \int_0^T F(t)^2\, dt =$$

motor belső „ohmos" ellenállása

húzási erő

$$= \kappa R \int_0^T \left[m(g + v'(t))\right]^2 dt = \gamma \int_0^T \left[g + v'(t)\right]^2 dt$$

$$z(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau \,, \quad w := v \circ z^{-1} \quad \text{azaz} \quad w(z(t)) = v(t)$$

$z' = v$

Az opt. esetben $\forall t \in (0,T):\ v(t) > 0 \Rightarrow \exists z^{-1}$

peremfeltétel: $w(0) = w(h) = 0$

Két lehetséges feladat:

1) Adott T mellett határozzuk meg az opt. sebesség fgv.-t, mely mellett E_v minimális

2) Határozzuk meg az opt. sebesség fgv.-t, mely mellett E_v minimális

Két lehetséges leírás:

a) A sebességet mint az idő fgv.-ét írjuk le

b) A sebességet mint a magasság fgv.-ét írjuk le

Legegyszerűbb (?):

1.a) $t \mapsto v(t) = ?$ úgy, hogy

- a $v(0) = v(T) = 0$ peremfeltétel és a
- $\int_0^T v(t)\,dt = h$ integrál-feltétel mellett

$$E_v(v) = \gamma \int_0^T (g + v'(t))^2\,dt$$ minimális legyen. (T, h, γ adott paraméterek)

$\rightsquigarrow$ Ez így egy feltételes variációszámítási feladat!

$$v(t) = w(z(t)) \Rightarrow v'(t) = w'(z(t))\,z'(t) = w'(z(t))\,v(t) =$$
$$= w'(z(t))\,w(z(t))$$

$$\hookrightarrow E_v = \gamma \int_{t=0}^{T} \left(g + w'(z(t))\,w(z(t))\right)^2 \underbrace{dt}_{} =$$

" $\frac{dt}{dz} dz = \frac{1}{\frac{dz}{dt}} dz = \frac{1}{w(z(t))} dz$ "

$$= \gamma \int_{z=0}^{h} \left(g + w'(z)\,w(z)\right)^2 \frac{1}{w(z)}\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{h} \mathcal{L}(z, w(z), w'(z))\, dz \quad \text{and} \quad \mathcal{L}(z, w, w') = \gamma \frac{(g + w w')^2}{w}$$

1.b:

$z \mapsto w(z) = ?$ úgy, hogy a

- $w(0) = w(h) = 0$ peremfeltétel és
- $\displaystyle\int_{z=0}^{h} \frac{1}{w(z)}\,dz = T$ integrál-feltétel mellett

$$E_v = \gamma \int_{z=0}^{h} \left(g + w'(z)\, w(z)\right)^2 \frac{1}{w(z)}\,dz$$ minimális legyen.

(T, h, γ adott paraméterek)

$\rightsquigarrow$ Ez is egy feltételes variációszámítási feladat.

1.a kidolgozás

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, v') &= \gamma (g + v')^2 \\ G(t, v, v') &= v - \frac{h}{T} \end{aligned}\right\} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(t, v, v') = \gamma (g+v')^2 - \lambda \left(v - \frac{h}{T}\right)$$

Lag. mult.

$\hookrightarrow$ E-L: $\underbrace{\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial v}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial v'}\right)'}$

$$-\lambda = \left(2\gamma (g + v')\right)' = 2\gamma v''$$

$\hookrightarrow$ $t \mapsto v(t) = At^2 + Bt + C$ alakú. A, B, C konstansok

a 2 perem + 1 int. feltételből meghatározhatók.

2.a vs 2.b ?

2.a = 1.a + 1-paraméter opt.

Ez a lépés után E_v-re mint T fgv.-ére tekinthetünk

2.b = feltétel nélküli var. feladat!

2.b esetén a probléma: legyen

$$\mathcal{L}(z,w,w') := \gamma \frac{(g+ww')^2}{w} = \gamma\left[\frac{g^2}{w} + 2gw' + w(w')^2\right].$$

Ekkor keressük azt a $z \mapsto w(z)$ fgv.-t, amely a

$$w(0) = w(h) = 0 \quad \text{peremfeltétel mellett}$$

minimalizálja az

$$E_v = \int_0^h \mathcal{L}(z, w(z), w'(z))\, dz \qquad \text{int. mennyiséget.}$$

Fizikából: $\exists$ opt. Matek: az opt. kielégíti az E-$\mathcal{L}$ egyenletet.

$$E-L: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'}\right)'$$

$$\hookrightarrow \quad -\frac{g^2}{w^2} + (w')^2 = \left(2g + 2ww'\right)' = 2(w')^2 + 2ww''$$

$$\hookrightarrow \quad 2w''w^3 + (w')^2 w^2 + g^2 = 0$$

2. odrendű diffegyenlet + 2 peremfelt.: $w(0) = w(h) = 0$

Sajnos „csúnya". Szebb:

$$v \longleftrightarrow w$$

$$v' \longleftrightarrow w'w$$

$$v'' \longleftrightarrow w''w^2 + (w')^2 w$$

$$\rightsquigarrow \quad 2v''v - (v')^2 + g^2 = 0$$