Variációszámítás & kinematika:

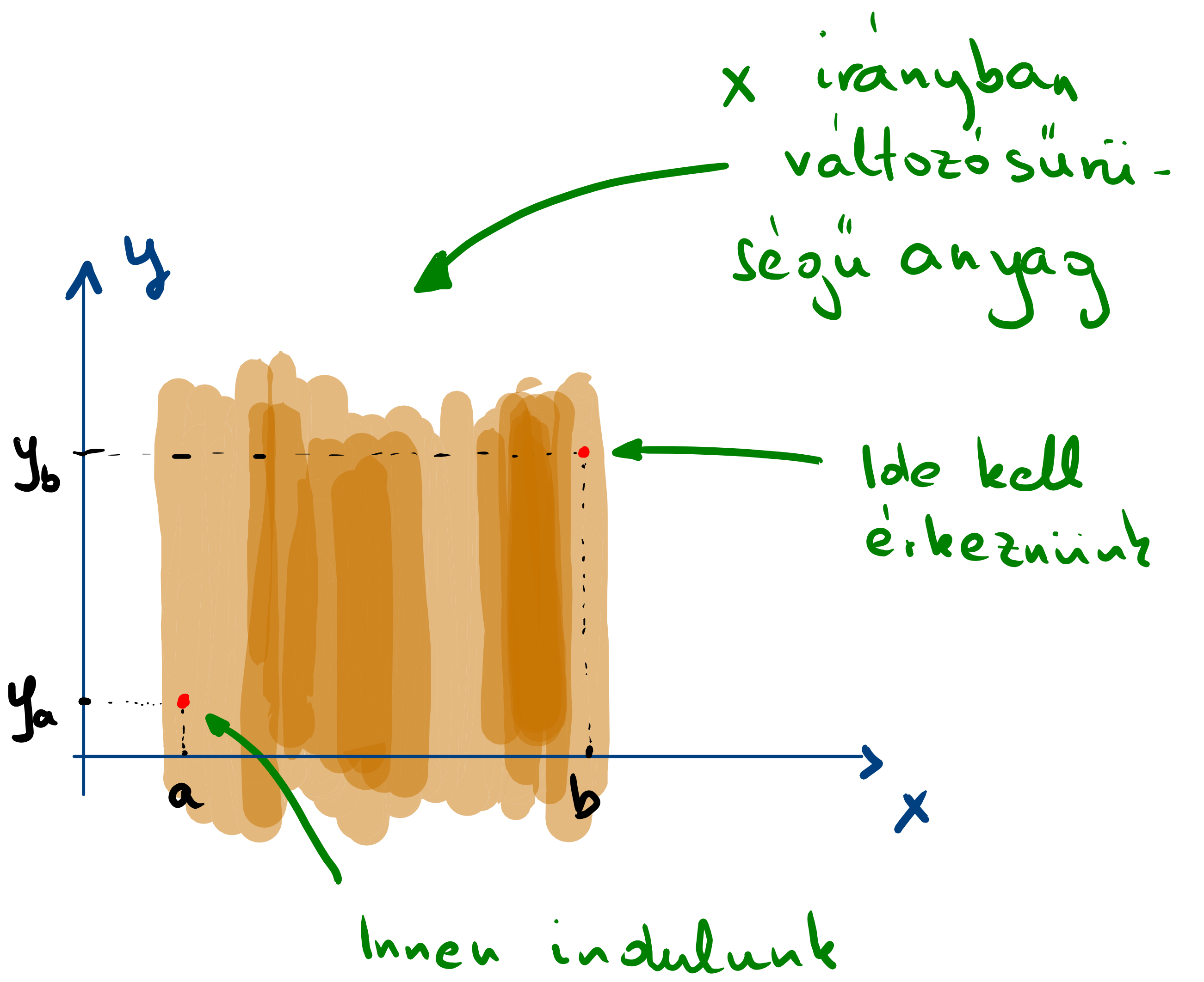
egy érdekes példa.

Adott:

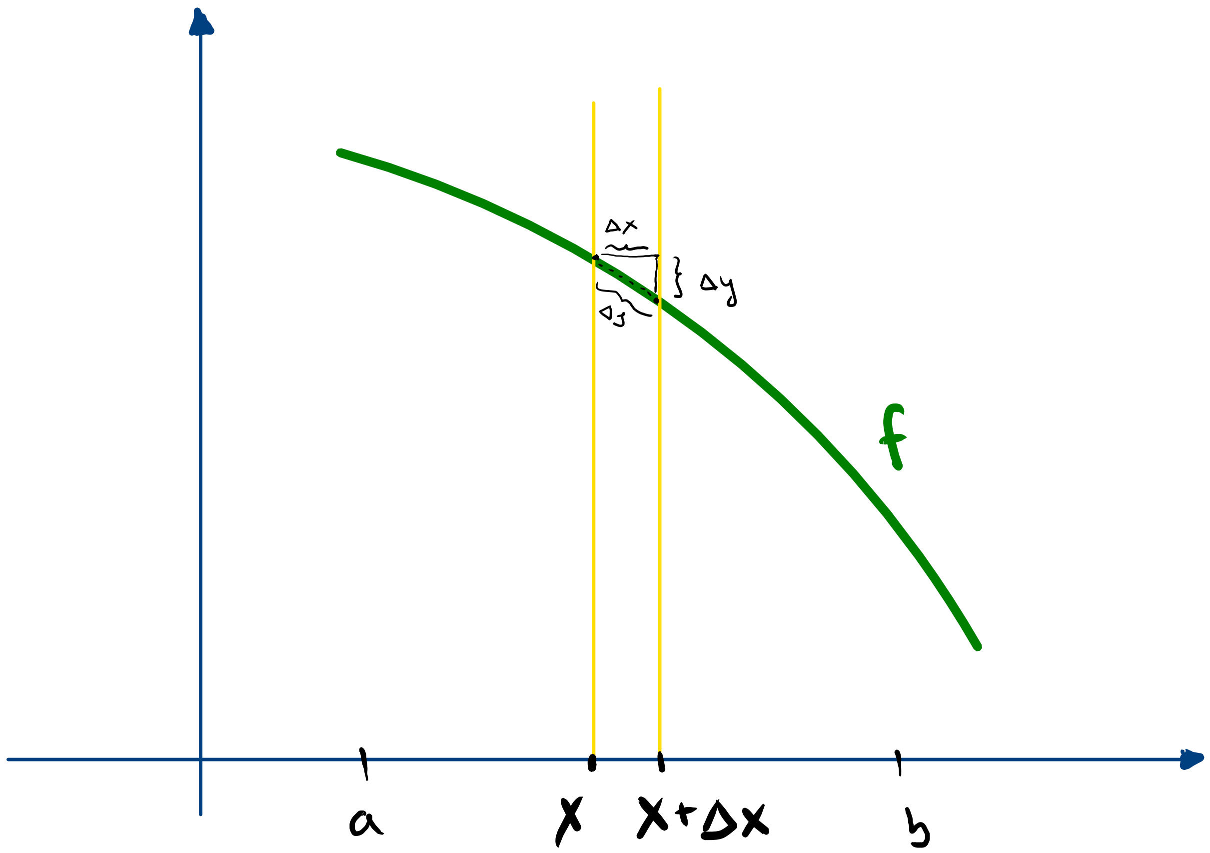
- a, y_a, b, y_b
- $x \mapsto v(x)$ max. sebesség

Kell:

- legrövidebb menetidőt adó pálya $x \mapsto f(x)$ függvénye



<u>Emlékeztető</u>: függvény grafikonjának ívhossza



$$\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2 =$$

$$= \Delta x^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)$$

$$\hookrightarrow \Delta s \sim \sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}\, \Delta x$$

$$\hookrightarrow I = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad \text{és}$$

$$T(f) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{v(x)}\,dx \Rightarrow \mathcal{L}(x, f, f') = \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{v(x)}$$

$$= \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))$$

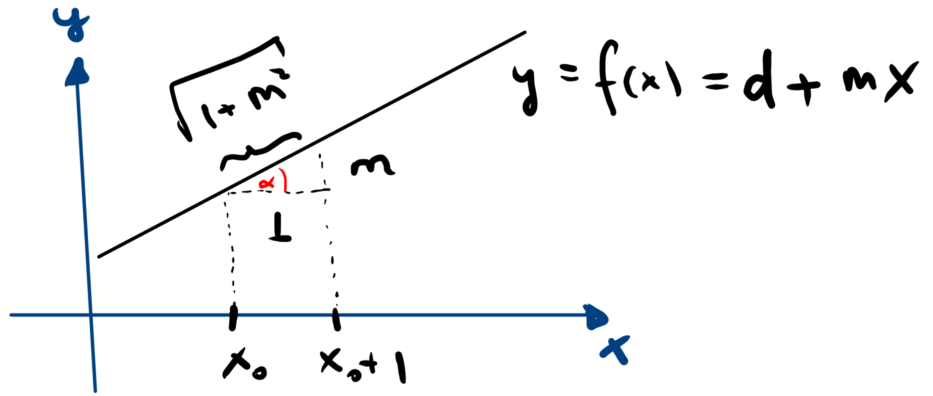
mint szimbólumok,
nem mint fgv.

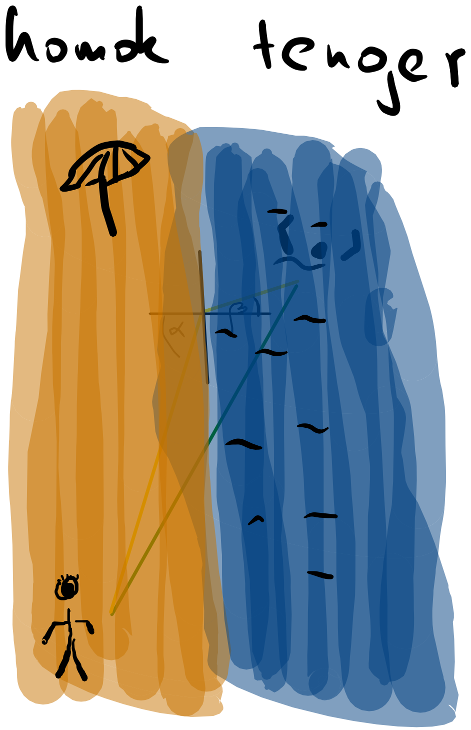
$$\hookrightarrow \text{E-L}: \quad 0 = \left(\frac{f'}{v\sqrt{1+(f')^2}}\right)'$$

$$\hookrightarrow \frac{f'}{v\sqrt{1+(f')^2}} = \text{konst.} =: c \Longrightarrow \frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}} = cv$$

diffegyenlet + peremfeltételek

Extrém eset:



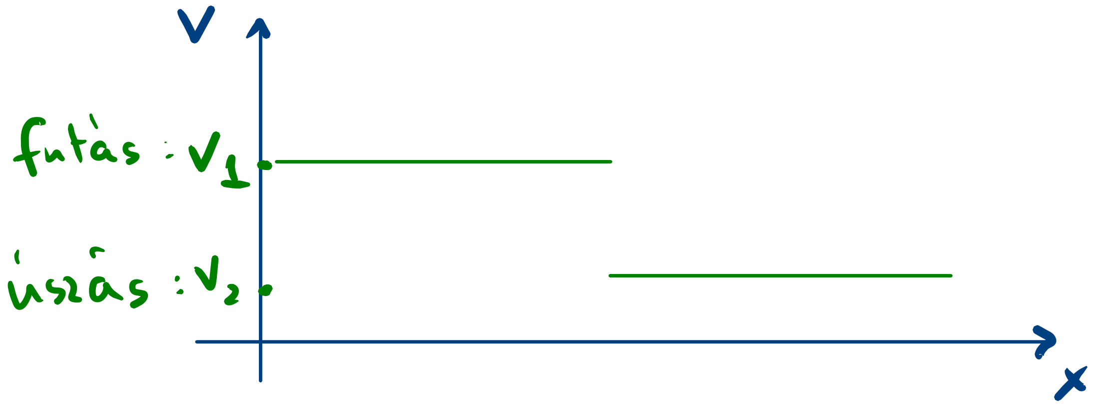


— : legrövidebb út

— : optimális út

$$\hookrightarrow \frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \sin(\alpha)$$

$$\hookrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{v_1} = c = \frac{\sin(\beta)}{v_2}$$



$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}}$$

<u>Fontos</u>: az E-$\mathcal{L}$ egyenletek az optimum szükséges, de nem feltétlen elégséges feltételei!

Egy érdekes példa: legyen $T > 0$. Az

- $f(0) = 0$, $f(T) = \sin(T)$ peremfeltételek mellett
- mikor lesz min. $I(f) := \int_0^T \left((f')^2 - f^2\right)$?

Most a Lagrange: $\mathcal{L}(f, f') = (f')^2 - f^2$

$\hookrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = -2f \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = 2f'$ és

E–L: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right)' \Longleftrightarrow -f = f'' \Longleftrightarrow f(t) = A\sin(t+\varphi)$

Peremfeltétel: $\left.\begin{array}{l} 0 = f(0) = A\sin(\varphi) \\ \sin(T) = f(T) = A\sin(T+\varphi) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right.$

$T/\pi \notin \mathbb{Z}$

Vagyis tetszőleges $T > 0$, $T/\pi \notin \mathbb{Z}$ esetén

$$\epsilon\text{-}\mathcal{L} \rightsquigarrow f(t) = \sin(t)$$

Kérdés:

- ez valóban optimum?

$$\Updownarrow$$

- van egyáltalán optimum?

Tfh. $\tilde{f}(0)=0$, $\tilde{f}(T)=\sin(T)$. Ekkor

$$I(\tilde{f}) = I(\sin + \underbrace{\tilde{f}-\sin}_{=:g}) = I(\sin + g) =$$

$$= \int_0^T \left[(\sin'+g')^2 - (\sin+g)^2\right] = \int_0^T \left[(\sin')^2 - \sin^2 + (g')^2 - g^2 + 2(g'\sin' - g\sin)\right] =$$

$$= I(\sin) + I(g) + 2\int_0^T (g'\sin' - g\sin) \quad \text{ahol}$$

$$\int_0^T (g'\sin' - g\sin) = \underbrace{\left[g\sin'\right]_0^T}_{0} - \int_0^T \underbrace{\left[g\sin'' + g\sin\right]}_{g(\sin''+\sin)=0} = 0 \quad \text{vagyis}$$

$0 \leftarrow$ mert $g(0) = g(T) = 0$

$$I(\tilde{f}) = I(\sin) + I(g) \qquad \text{ahol} \quad g = \tilde{f} - \sin.$$

$\hookrightarrow$ A kérdés $I(g)$ előjele!

$$I(g) \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \int_0^T g^2 \leq \int_0^T (g')^2 =: c$$

Egy trükkös becslés:

$$\int_0^x g' = [g]_0^x = g(x) - g(0) = g(x) \quad \Rightarrow \quad g(x)^2 = \left|\int_0^x 1 \cdot g'\right|^2 \overset{\text{C-Sch}}{\leq} \Bigg(\overbrace{\int_0^x 1^2}^{x}\Bigg) \int_0^x (g')^2$$

Azaz $\forall x \in [0, T]$:

$$g(x)^2 \leq x \int_0^x (g')^2 \leq x \underbrace{\int_0^T (g')^2}_{c} = cx$$

$$\hookrightarrow \int_0^T g(x)^2 \, dx \leq c \int_0^T x \, dx = \frac{1}{2} T^2 c = \frac{1}{2} T^2 \int_0^T (g'(x))^2 \, dx$$

$\hookrightarrow$ $T^2 \leq 2$ esetén $\int_0^T g^2 \leq \int_0^T (g')^2$

$\hookrightarrow$ $I(g) \geq 0$ ⇒ $\boxed{f = \sin \text{-nál min. van}}$

De ha pl. $T = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$?

↳ peremfeltétel: $f(0) = 0, \quad f\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$

Legyen $f(t) = \underbrace{\frac{t}{\frac{5}{2}\pi}} + A \cdot \underbrace{t \cdot \left(t - \frac{5}{2}\pi\right)}$

Ez a végpontokon 0,1

Ez a végpontokon mindig 0

↳ Ez az f fgv. tetszőleges „A" paraméter esetén kielégíti a peremfeltételeket, viszont :

$$I(f) = \int_0^{5/2\pi} \left[(f')^2 - f^2\right] = \dots = \left(\frac{2}{5\pi} - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{(5\pi)^3}{48} A + (5\pi)^3 \underbrace{\left(\frac{1}{24} - \frac{5\pi^2}{192}\right)}_{\text{negatív}} A^2$$

$I(f)$ értéke – még a megfelelő peremfeltételek mellett is – „akármennyire negatív" tud lenni

↪ most nincs minimum!