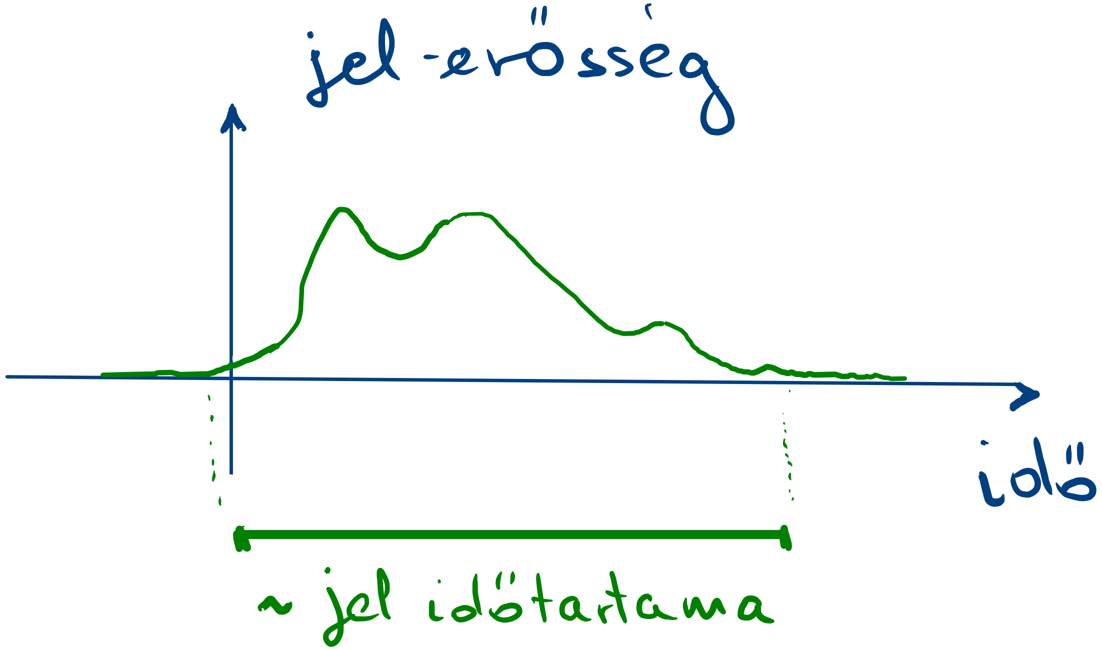
Határozatlansági reláció

Mi egy jel pontos időtartama.. ?!



Mi a „szétfolytság" helyes mértéke?

$$0 \neq f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \implies \mu_f := \frac{|f|^2}{\|f\|_2^2}$$ egy val. sür. fgv.:

- $\mu_f \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mu_f(t)\,dt = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = 1$

$\hookrightarrow$ σ_{μ_f} szórás jól def. mennyiség!

Tétel: Legyen $0 \neq f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ekkor

$$\boxed{\sigma_{\mu_f} \cdot \sigma_{\mu_{\mathcal{F}_1 f}} \geq \frac{1}{2}}$$

Egyenlőség a.cs.a. ha

$$f(t) = C\, e^{i\omega t}\, e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}$$

valamilyen $\underset{\neq 0}{C} \in \mathbb{C}$, $\omega, t_0 \in \mathbb{R}$ és $T > 0$ paraméterekre.

Biz.:

- föltehetjük: $\sigma_{\mu_f}, \sigma_{\mu_{\mathcal{F}_\pm f}} < \infty \rightsquigarrow \exists\, \mathbb{E}(\mu_f), \mathbb{E}(\mu_{\mathcal{F}_\pm f}) \in \mathbb{R}$

- $$\left.\begin{aligned} &\|f\|_2 = \|\mathcal{F}_\pm f\|_2 \\ &\mu_{\lambda f} = \mu_f, \quad \mu_{\mathcal{F}_\pm \lambda f} = \mu_{\mathcal{F}_\pm f} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{föltehetjük: } \|f\|_2 = \|\mathcal{F}_\pm f\|_2 = 1$$

- $f \rightsquigarrow L_a f$: $\quad \mu_{L_a f} = L_a \mu_f \Rightarrow \sigma_{\mu_{L_a f}} = \sigma_{\mu_f}$

  $\mu_{\mathcal{F}_\pm L_a f} = \mu_{\mathcal{F}_\pm f} \Rightarrow \sigma_{\mu_{\mathcal{F}_\pm L_a f}} = \sigma_{\mu_{\mathcal{F}_\pm f}}$

  $\hookrightarrow$ föltehetjük: $\mathbb{E}(\mu_f) = \mathbb{E}(\mu_{\mathcal{F}_\pm f}) = 0$

Ekkor

$$\sigma_{\mu_f}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu_f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx$$

és $$\sigma_{\mu_{\mathcal{F}_\pm f}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\mathcal{F}_\pm f(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |\mp ik \mathcal{F}_\pm f(k)|^2 dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}_\pm(f'))(k)|^2 dk = \|\mathcal{F}_\pm f'\|_2^2 = \|f'\|_2^2$$

$$\hookrightarrow \quad \sigma_{\mu_f}^2 \sigma_{\mu_{\mathcal{F}_\pm f}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \overset{\text{C-Sch}}{\geq}$$

$$\overset{\text{C-Sch}}{\geq} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x\, \overline{f(x)}\, f'(x)}^{z}\, dx \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x\, f(x)\, \overline{f'(x)}}^{\bar{z}}\, dx \right|^2$$

$|z|^2 \geq \mathrm{Re}(z)^2$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\mu_f}^2\, \sigma_{\mu_{\mathcal{F}_\pm f}}^2 \geq \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\overline{f(x)}\, f'(x) + f(x)\, \overline{f'(x)} \right) dx \right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{d}{dx} |f(x)|^2 \right) dx \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{d}{dx} |f(x)|^2 \right) dx \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\Big[x\,|f(x)|^2\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{0,\ \text{mert } \exists \lim\limits_{\pm\infty} x|f(x)|^2=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}x\right)}_{1}|f(x)|^2\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}\|f\|_2^4 = \frac{1}{4}$$

Egyenlőség teljesüléséhez:

- $f'(x) = \lambda x f(x) \rightsquigarrow f(x) = Ce^{\lambda\frac{x^2}{2}}$
- $\lambda \in \mathbb{R}$, söt: $\lambda < \infty$ $\leftarrow f \in \mathcal{L}^2$

Azonban az elején azt is föltettük,

hogy $\mathbb{E}(\mu_f) = \mathbb{E}(\mu_{\tilde{f}\pm f}) = 0$

$\rightsquigarrow$ igazából

$$f \rightsquigarrow \{ t \longmapsto e^{i\omega t} f(t-t_0) \}$$

is oké. $\blacksquare$