Felsőbb matematika informatikusoknak – Alkalmazott algebra összefoglaló – 20/21/1

(1.00 változat)

Algebrai struktúrák • test (véges ($\mathbb{Z}_p$ ha p prím, $\mathbb{F}_q = GF(q)$ ha q prímhatvány, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), gyűrű ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, mátrixok $\mathbb{F}^{m\times n}$ gyűrűje, polinomok gyűrűje) • vektortér (tetszőleges test fölött, függvényterek), vektorterek direkt összege, lineáris kombináció (üres halmazé is), bázis, lineáris leképezés, képtér, magtér, altér, affin altér, mátrix 4 kitüntetett altere • valós és komplex euklideszi tér (a skalárszorzat absztrakt definíciójával), terek izomorfiája

Mátrixon végzett manipulációk • redukált lépcsős alak • determináns (elemi sorművelettel, kígyók determinánsainak összegére bontással) • nyom • (Hermite-féle) adjungált • pszeudoinverz • műveletek blokkmátrixokkal • norma

Speciális mátrixok definíciói és tulajdonságaik • elemi, permutáló • ortogonális (hossz-, távolság-, szög-, skalárszorzat-tartás, sajátértékei, determinánsa), [ferdén] szimmetrikus és nilpotens mátrixok (sajátértékei) • önadjungált, unitér, normális • pozitív/negatív [szemi]definit, indefinit • nemnegatív, pozitív, primitív, irreducibilis, reducibilis • [duplán] sztochasztikus • átmenetmátrix, [stacionárius] eloszlásvektor

Egyenletrendszerek megoldhatósága • megoldása redukált lépcsős alakkal, a minimális abszolút értékű megoldás • optimális megoldás és meghatározása normálegyenlettel, QR-felbontással, pszeudoinverzzel (lineáris és polinomiális regresszió) • homogén|inhomogén egyenletrendszek megoldásainak terei

Hasonlóság, [ortogonális] diagonalizálhatóság • hasonlóságra invariáns tulajdonságok (rang, nullitás, determináns, nyom, karakterisztikus és minimálpolinom, sajátértékek és azok algebrai és geometriai multiplicitásai) • diagonalizálhatóság feltételei • diagonalizálhatóság mint a tér sajátalterek direkt összegére bonthatósága • ortogonális diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele • unitér diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele • ortogonális|unitér triangularizálhatóság: Schur-felbontás • Jordan-féle normálalak (a tér sajátalterek helyett invariáns alterek direkt összegére való bonthatósága) • ortogonális diagonalizálhatóság bázispárban = SVD

Kvadratikus alak • főtengelytranszformáció, definitség, [fő]minor, vezető főminor = sarokaldetermináns, kongruencia, tehetetlenség

Mátrixfelbontások • bázisfelbontás, LU-, PLU-, QR-, Schur-, saját-, spektrál-, polár-, Jordan-felbontás, SVD • pozitív [szemi]definit mátrixok faktorizációi, • pozitív szemidefinit mátrix egyetlen pozitív szemidefinit négyzetgyöke, Cholesky-felbontás

Gyakorlati feladatok • sortérbe eső (min.absz.értékű) megoldás meghatározása egyenlet hozzávételével és pszeudoinverzzel • LU-felbontás és használata egyenletrendszer megoldásához • áttérés másik bázisra • lineáris transzformáció mátrixa (vetítés, tükrözés, forgatás, Givens-forgatás, Householder-tükrözés) • altérre való merőleges vetítés mátrixa • egyenletrendszer optimális megoldásainak kiszámítása • pszeudoinverz kiszámítása (teljes rangú mátrixokra és ilyenek szorzatára) • Gram–Schmidt-ortogonalizáció • QR-felbontás G–S-ortogonalizációból • egyenletrendszer megoldása QR-felbontással • sajátfelbontás, spektrálfelbontás, algebrai és geometriai multiplicitás kiszámítása • definitség eldöntése • pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás • szinguláris érték, jobb és bal szinguláris vektorok meghatározása, szinguláris felbontás • legjobb k-rangú közelítés

Nagyobb súllyal szereplő feladattípusok • vektornormák és mátrix 1-, 2- ∞- és Frobenius-normájának kiszámítása • Jordan-bázis keresése 3×3-as mátrixokra • az $\mathbf{A}$ Jordan-normálalakjának meghatározása a $\mathrm{r}((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k)$ vagy a $\mathrm{null}((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k)$ értékekből • mátrixfüggvény a Jordan-alakból és az Hermite-polinomból • a Perron-vektorok és a Perron–Frobenius-tételekben szereplő mátrixhatárértékek kiszámítása • nemnegatív mátrix reducibilitásának és primitívségének eldöntése

Kiemelt tételek • a lineáris algebra alaptétele • a legjobb közelítés tétele • a diagonalizálhatóságra valamint az ortogonális és unitér diagonalizálhatóságra vonatkozó feltételek • Sylvester-féle tehetetlenségi törvény • Cayley–Hamilton-tétel • Jordan-féle normálalak • Perron- és Perron–Frobenius-tételek