$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\sigma_1 = \sqrt{5} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sigma_2 = 2 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 5 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$

$\lambda = 4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = t \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{5} & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 2/\sqrt{5} & 0 & \cdot \end{array}\right]}_{U_1} \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{\Sigma_1} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = U \qquad \Sigma \qquad V^T$$

$Av = \sigma u \qquad A^T u = \sigma v$

$\frac{1}{\sigma_1} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= V_1 \Sigma_1^{+} U_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad /\!/$$

②

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0P_1 + 2P_2 \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 = P_1 + P_2 \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac12 & -\frac12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac12 & -\frac12 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \frac12 s + \frac12 t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & -\frac12 & -\frac12 \\ & 1 & & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 \end{array}\right]$$

$$A = C \Lambda C^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac12 & -\frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac12 & -\frac12 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 1 & -\frac12 & -\frac12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ e^A

$$A = C \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$e^A = C \begin{bmatrix} e^3 & e^3 & \frac{e^3}{2} \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_1} A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{Q_2} A' = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{Q_3} A'' = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} = R$$

$$Q_3 Q_2 Q_1 A = R$$

$$A = \underbrace{(Q_3 Q_2 Q_1)^T}_{Q} R$$

(5) $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots \right\}$$

$$\underset{\mathcal{C}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$