TP1

① montrer que $H[X,Y] = H[Y|X] + H[X]$

on sait que $H[X,Y] = -\sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(x,y)$

$$= -\sum_{x,y} P(x,y)\log_2 [P(y|x)\times P(x)]$$

$$= -\sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(y|x) - \sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(x)$$

or $H[Y|X] = -\sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(y|x)$

$$H[X,Y] = H[Y|X] - \sum_{x,y} P(y|x)\times P(x)\log_2 P(x)$$

$$= H[Y|X] - \sum_{x} P(x)\log_2 P(x) \sum_{y} P(y|x)$$

d'où $\sum_{y} P(y|x) = 1$ et $H[X] = -\sum_{x} P(x)\log_2 P(x)$

donc : $\boxed{H[X,Y] = H[Y|X] + H[X]}$ CQFD

② montrer que $I[X,Y] = H[X] - H[X|Y]$

on sait que $I[X,Y] = -\sum P(x,y)\log_2 \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}$

$$= +\sum_{x,y} P(x,y)\left[\log_2 P(x,y) - \log_2 P(x)P(y)\right]$$

$$= +\sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(x,y) - \sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(x)$$

$$- \sum_{x,y} P(x,y)\log_2 P(y)$$

or $H[X,Y] = -\sum P(x,y)\log_2 P(x,y) = H[Y|X] + H[X] = \cancel{H[X|Y]} + H[X|Y] + H[Y]$

$$I[X,Y] = -H[X,Y] - \sum_x p(x)\log_2 p(x) - \sum_y p(y)\log_2 p(y)$$

$$= -H[X|Y] - \cancel{H[Y]} + H[X] + \cancel{H[Y]}$$

donc $\boxed{I[X,Y] = H[X] - H[X|Y]}$ CQFD

(3) montre que $cov[X,Y] = E_{xy}[xy] - E[x]E[y]$

on sait que $cov[X,Y] = E[(x - E[x])(y - E[y])]$

$$\cancel{= E[x] - E[E[x]] - E[y]}$$

$$= E\left[xy - xE[y] - yE[x] + E[x]E[y]\right]$$

$$= E[x]E[y] - E[xE[y]] - E[yE[x]]$$

$$+ E[E[x]E[y]]$$

or $E[a] = a$ si a constante

$$= E[xy] - E[x]E[y] - E[y]\cancel{E[x]} + E[\cancel{x}]E[y]$$

donc $\boxed{cov[X,Y] = E[xy] - E[x]E[y]}$ CQFD

(4) considérons une variable aléatoire binaire X ayant produit une observation

a- calculons la distribution $p(x)$

on a $p(x_i) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i)$

$P(x=0) = \frac{7}{10} = 0,7$

$P(x=2) = \frac{3}{10} = 0,3$

b) calculons l'esperance mathematique

$E[X] = \sum_{x=1}^{N} X_i P(X_i)$

$\cancel{E[X] = 7 \times 0,7 + 3 \times 0,3}$

$E[X] = 0 \times 0,7 + 1 \times 0,3$

$\boxed{E[X] = 0,3}$

c) calculons la variance

$Var[X] = E[x - E[x]]^2$ or $E[X] = \sum_{x=i}^{N} x_i P(x_i)$

$= (0-(0,3))^2 \times 0,7 + (1-0,3)^2 \times 0,3$

$= (0,3)^2 \times 0,7 + (1 - 2 \times 0,3 + (0,3)^2)\, 0,3$

$= 0,063 + 0,147$

$Var[X] = 0,22$

d) calculons l'entropie de x

$H[X] = - \sum x_i \log_2 P(x_i)$

$= -(0,7 \log_2 (0,7) + 0,3 \log_2 (0,3))$

$H[X] = 0,54$