IFT 712 - Devoir 1

Régression et notions probabilistes

Ait ichou Yoann

Cai Yunfan

Gaye ElHadji Habib

Faculté des sciences,
Département Informatique

7 octobre 2022

Table des matières

1 Introduction

Au cours de cette courte étude nous allons étudier les différentes propriétés de notions importantes de la théorie de l'information tout en abordant des notions probabilistes. Tout d'abord, nous tâcherons de démontrer certaines propriétés de l'entropie, de l'information mutuelle et enfin de la covariance. Nous terminerons notre étude théorique sur une courte analyse des caractéristiques d'une variable aléatoire qui nous a été fournie.

2 Démonstrations

2.1 Entropie

Démontrons la propriété de l'entropie suivante dans le cas discret :

$$H[x, y] = H[y|x] + H[x]$$

$$P(X, T) = P(X|T)P(T) \tag{1}$$

$$\sum_{y} p(x, y) = p(x) \tag{2}$$

$$H[x] = -\sum_{x} p(x) log_2 p(x) \tag{3}$$

$$H[y|x] = -\sum_{x,y} p(x, y) log_2 p(y|x) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
H[x, y] &= -\sum_{x,y} p(x, y) log_2 p(x, y) && (5)\\
&= -\sum_{x,y} p(x, y) log_2 p\,(y|x)\,p(x) && (6)\\
&= -\sum_{x,y} p(x, y) log_2 p\,(y|x) - \sum_{x,y} p(x, y) log_2 p(x) && (7)\\
&= -\sum_{x,y} p\,(x, y)\, log_2 p\,(y|x) - \sum_{x} p(x) log_2 p(x) \sum_{y} p\,(y|x) && (8)
\end{aligned}$$

Après marginalisation :

$$= -\sum_{x,y} p\,(x, y)\, log_2 p\,(y|x) - \sum_{x} p(x) log_2 p(x) \tag{9}$$

$$= H[y|x] + H[x] \tag{10}$$

2.2 Information mutuelle

Démontrons la propriété de l'information mutuelle suivante dans le cas discret :

$$I\,[x,y] = H[x] - H[x|y]$$

$$P(X,T) = P(X|T)P(T) \tag{1}$$

$$P(X|T) = \frac{P(X,\ T)}{p(T)} \tag{2}$$

$$H[x] = -\sum_{x} p(x)log_2 p(x) \tag{3}$$

$$H[x,y] = H[y|x] + H[y] \tag{4}$$

$$I\,[x,y] = \sum_{x,y} p(x,y)log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \tag{5}$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y)log_2 p(x,y) - \sum_{x,y} p\,(x,y)\,log_2 p(x) - \sum_{x,y} p(x,y)log_2 p(y) \tag{6}$$

$$= -H[x,y] - \sum_{x,y} p(x,y)log_2 p(x) - \sum_{x,y} p(x,y)log_2 p(y) \tag{7}$$

Après marginalisation :

$$= -H[x,y] - \sum_{x} p(x)log_2 p(x) - \sum_{y} p(y)log_2 p(y) \tag{8}$$

D'après (3) et (4) :

$$= -(H[x|y] + H[y]) + H[x] + H[y] \tag{9}$$

$$= H[x] - H[x|y] \tag{10}$$

2.3 Covariance

Démontrons la propriété de la covariance de variable X et Y suivante :

$$Cov(X,Y) = \ E[XY] - E([X]E[Y]$$

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \tag{1}$$

$$= E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \tag{2}$$

E[X] et E[Y] sont constantes. Ainsi par linéarité :

$$= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y] \tag{3}$$

$$= E[XY] - E[Y]E[X] \tag{4}$$

2.4 Application

Soit une variable aléatoire binaire X ayant produit la séquence d'observations suivante : 0,0,0,1,0,1,0,0,0,1.

Evidence

$$P(x=0) = \frac{7}{10}$$
$$P(x=1) = \frac{3}{10}$$

Espérance

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 0 \times \frac{7}{10} + 1 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Variance

$$\begin{aligned} Var(x) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - u)^2 \\ &= \frac{7}{10} \times \left(0 - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^2 = 0,21 \end{aligned}$$

Entropie

$$\begin{aligned} H\left[x\right] &= -\sum_{i=1}^{n} p\left(x\right) log_2(p\left(x\right)) \\ &= -\left(\frac{7}{10} log_2\left(\frac{7}{10}\right)\right) - \left(\frac{3}{10} log_2\left(\frac{3}{10}\right)\right) \\ &= -\frac{7}{10} \times (-0.51) - \frac{3}{10} \times (-1.74) = 0.879 \end{aligned}$$