



# TEORIA WSPÓŁBIEŻNOŚCI

LABORATORIUM 11

TEORIA ŚLADÓW

ALBERT GIERLACH

26.01.2021

# 1. Zadanie

Dane są:

- Alfabet  $A$ , w którym każda litera oznacza akcję.
- Relacja niezależności  $I$ , oznaczająca które akcje są niezależne (przemienne, tzn. można je wykonać w dowolnej kolejności i nie zmienia to wyniku końcowego).
- Słowo  $w$  oznaczające przykładowe wykonanie sekwencji akcji.

Napisz program w dowolnym języku, który:

1. Wyznacza relację zależności  $D$
2. Wyznacza ślad  $[w]$  względem relacji  $I$
3. Wyznacza postać normalną Foaty FNF( $[w]$ ) śladu  $[w]$
4. Wyznacza graf zależności dla słowa  $w$
5. Wyznacza postać normalną Foaty na podstawie grafu

# 2. Rozwiązanie

Rozwiązanie powyższych zadań zostało wykonane przy użyciu języka Python. Użyte biblioteki to: *matplotlib*, *numpy*, *networkx*, *network\_line\_graph*, *graphviz*. W kodzie zostały dodane komentarze objaśniające poszczególne funkcje i metody.

---

```
import os
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import network_line_graph as nlg

from collections import defaultdict
from itertools import product
from pathlib import Path
from PIL import Image
from graphviz import Source
```

```
OUTPUT_FOLDER = "./output"
```

```

# Klasa przechowująca graf zależności.
# Reprezentacja grafu to lista sąsiedztwa
class Graph:
    def __init__(self, word, independent_operations):
        self.edges = defaultdict(list)
        self.word = word
        self.N = len(word)
        self.independency_rel = independent_operations
        self.node_labels = {i: k for i, k in enumerate(self.word)}
        self.build_edges()

    # zbuduj graf zależności dla danego słowa
    def build_edges(self):
        for pair in self.independency_rel.copy():
            self.independency_rel.add((pair[1], pair[0]))

        for i, l in enumerate(self.word[:-1]):
            edges_found = list(filter(lambda x: x[0] == l, self.independency_rel))
            for j, l2 in enumerate(self.word[i + 1:], i + 1):
                if not any([l2 == e for _, e in edges_found]):
                    self.edges[i].append(j)

    # rysuje półokrągłe strzałki z jednego węzła do innych
    def build_one_stage(self, letter_idx, d):
        a1 = np.zeros((self.N, self.N), dtype=bool)
        for e in self.edges[letter_idx]:
            a1[letter_idx, e] = True

        w1 = np.full((self.N, self.N), 0.6)
        w1[~a1] = np.nan

        if not np.all(np.isnan(w1)):
            nlg.draw(w1,
                    arc_above=d,
                    node_labels=self.node_labels,
                    node_order=np.array(range(self.N))
                    )

    # rysuj graf zależności
    # dla każdego węzła rysuj odpowiednie krawędzie do innych węzłów
    def draw(self, dirs=None):
        if not dirs:
            dirs = [(v + 1) % 2 for v in range(self.N - 1)]

```

```

        for i, d in enumerate(dirs):
            self.build_one_stage(i, d)

# usuwa krawędzie przechodnie
def remove_transitive_edges(self):
    to_remove = set()
    for i in range(self.N):
        for j in self.edges[i]:
            for k in list(set(self.edges[i]) & set(self.edges[j])):
                to_remove.add((i, k))

    self.remove_edges(list(to_remove))

def remove_edges(self, to_remove):
    for a, b in to_remove:
        self.edges[a].remove(b)

# zapisz graf do pliku .png
def save_graph(self, fname):
    self.draw()
    self.save_graph_and_crop(fname, [-2, 2])

def save_graph_and_crop(self, fname, lims=None):
    fname = f"{OUTPUT_FOLDER}/{fname}.png"
    ax = plt.gca()
    ax.set_ylim(lims)
    plt.savefig(fname, bbox_inches='tight')
    plt.clf()

    self.crop_white_space(fname)

# przycina obrazek tak, aby zredukować białe ramki wokół obrazu
def crop_white_space(self, fname):
    im = Image.open(fname)
    pix = np.asarray(im)
    pix = pix[:, :, 0:3]
    idx = np.where(pix - 255)[0:2]
    box = list(map(min, idx))[:, :-1] + list(map(max, idx))[:, :-1]
    region_pix = np.asarray(im.crop(box))
    im = Image.fromarray(region_pix)
    im.save(fname)

```

```

# konwertuj graf do postaci DOT oraz wygeneruj plik .png z grafem
def to_dot_format(self):
    output_string = ["digraph g{"]

    for k, e_list in self.edges.items():
        for v in e_list:
            output_string.append(f"\t{k} -> {v}")

    for k, label in self.node_labels.items():
        output_string.append(f"\t{k} [label={label}]")

    output_string.append("}")

    fname = f"{OUTPUT_FOLDER}/{self.word}_dot.txt"
    with open(fname, "wt") as f:
        f.write('\n'.join(output_string))

    g = Source.from_file(filename=fname)
    g.render(format='png')
    os.rename(f"{fname}.png", f"{OUTPUT_FOLDER}/{self.word}_dot.png")

# wyznacz postać normalną na podstawie grafu
# Algorytm:
# 1) Znajdź wierzchołki, do których nie wchodzi żadna krawędź
# 2) Ze znalezionych wierzchołków stwórz klasę Foaty
# 3) Usuń znalezione wierzchołki oraz krawędzie z nich wychodzące
# 4) Powtarzaj kroki 1-3 dopóki graf istnieje
def to_foata(self):
    foata_normal = []
    in_degrees = {k: 0 for k in self.edges.keys()}
    for edge_list in self.edges.values():
        for e in edge_list:
            in_degrees[e] += 1

    while len(in_degrees):
        tops = []
        for k, v in in_degrees.items():
            if v == 0:
                tops.append(k)

        for letter in tops:
            for edge in self.edges[letter]:
                in_degrees[edge] -= 1

```

```

        del in_degrees[letter]

        foata_normal.append(''.join(sorted(map(self.node_labels.get, tops))))

    return foata_normal

class Problem:
    def __init__(self, alphabet, word, independency_relation):
        self.alphabet = alphabet
        self.word = word
        self.dependency_rel = None
        self.independency_rel = independency_relation
        self.independency_rel |= {(b, a) for a, b in self.independency_rel} # symmetry

    # wyznacz relacje zależności
    # 1) Wygeneruj wszystkie możliwe pary z liter alfabetu
    # 2) Usuń wszystkie pary, które są w relacji niezależności
    def calculate_dependency_relation(self):
        return set(product(list(self.alphabet), repeat=2)) - self.independency_rel

    # wyznacza ślad słowa
    # 1) stwórz pusty zbiór wygenerowanych słów i dodaj do niego początkowe słowo
    # 2) dla każdego słowa ze zbioru zamieniaj pozycjami sąsiednie litery w słowie
    #    jeśli są w relacji niezależności
    # 3) każde nowo dodane słowo dodaj do zbioru wynikowego
    # 4) powtarzaj kroki 2-3 dopóki są generowane nowe słowa
    def calculate_trace(self):
        word_set = {self.word}

        while True:
            next_set = set(word_set)
            for w in word_set:
                for i in range(len(w) - 1):
                    prev, c1, c2, rest = w[:i], w[i], w[i + 1], w[min(i + 2, len(w)):]
                    if (c1, c2) in self.independency_rel:
                        next_set.add(prev + c2 + c1 + rest)

            if word_set == next_set:
                break
            word_set = next_set

```

```

    return word_set

# przekształca słowo do postaci normalnej Foaty
# Algorytm:
# 1) dla każdej litery alfabetu stwórz pusty stos
# 2) dla każdej litery w słowie czytany od prawej do lewej wykonaj:
#     - dodaj literę (l1) na odpowiadający jej stos
#     - dla każdej litery (l2) będącej w relacji zależności z rozważaną literą (l1)
#       dodaj pusty znacznik na stos tej litery (l2)
# 3) zdejmij wszystkie litery, które są na wierzchołkach stosu
# 4) ze zdjętych liter utwórz klasę Foaty
# 5) dla każdej zdjętej litery ściągnij ze stosów odpowiadające im znaczniki
# 6) powtarzaj 3-5 dopóki każdy stos nie jest pusty
def foata_normal_form(self):
    stacks = defaultdict(list)
    for letter in reversed(self.word):
        stacks[letter].append(letter)
        for c in self.alphabet:
            if c != letter and (letter, c) in self.dependency_rel:
                stacks[c].append(None)

    foata_normal = []
    while any([len(s) for s in stacks.values()]):
        tops = [s[-1] for s in stacks.values() if len(s) and s[-1] is not None]
        for letter in tops:
            stacks[letter].pop()
            for c in self.alphabet:
                if c != letter and (letter, c) in self.dependency_rel:
                    stacks[c].pop()

        foata_normal.append(''.join(sorted(tops)))

    return foata_normal

def generate_graph(self, fname):
    graph = Graph(self.word, self.independency_rel)
    graph.remove_transitive_edges()
    graph.save_graph(fname + "_reduced")
    return graph

def solve(self):
    def tuple_to_str(t):
        return "(" + ', '.join(t) + ")"

```

```

print("Relacja niezależności I = ", end='')
print(f"{{{', '.join(map(tuple_to_str, sorted(self.independency_rel))))}}}")

self.dependency_rel = self.calculate_dependency_relation()
print("Relacja zależności D = ", end='')
print(f"{{{', '.join(map(tuple_to_str, sorted(self.dependency_rel))))}}}")

print("Ślad [w] względem relacji I: ", end='')
traces = self.calculate_trace()
print('[' + ', '.join(sorted(traces)) + ']')

print("Postać normalna Foaty śladu [w]: ", end='')
foata_normal = self.foata_normal_form()
print(''.join(map(lambda s: f"({s})", foata_normal)))

print("Generowanie grafu zależności... ", end='')
G = self.generate_graph(f"{self.word}_graph")
print("wygenerowano")

print("Postać normalna Foaty na podstawie grafu: ", end='')
print(''.join(map(lambda s: f"({s})", G.to_foata()))))

print("Generowanie grafu w formacie DOT... ", end='')
G.to_dot_format()
print("wygenerowano")

if __name__ == '__main__':
    Path(OUTPUT_FOLDER).mkdir(exist_ok=True)

    Problem(
        {'a', 'b', 'c', 'd'},
        'baadcb',
        {('a', 'd'), ('b', 'c')})
    ).solve()

    Problem(
        {'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f'},
        'acdcfbbe',
        {('a', 'd'), ('b', 'e'), ('c', 'd'), ('c', 'f')})
    ).solve()

```

---



```

Relacja zależności I = {(a, d), (b, c), (c, b), (d, a)}
Relacja zależności D = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, d), (c,
↪ a), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)}
Ślad [w] względem relacji I: [baadbc, baadcb, badabc, badacb, bdaabc, bdaacb]
Postać normalna Foaty śladu [w]: (b)(ad)(a)(bc)
Generowanie grafu zależności... wygenerowano
Postać normalna Foaty na podstawie grafu: (b)(ad)(a)(bc)
Generowanie grafu w formacie DOT... wygenerowano

```

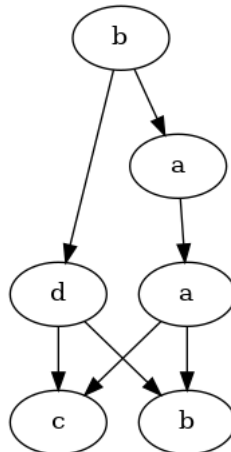
9

Graf słowa baadcb w formacie DOT:

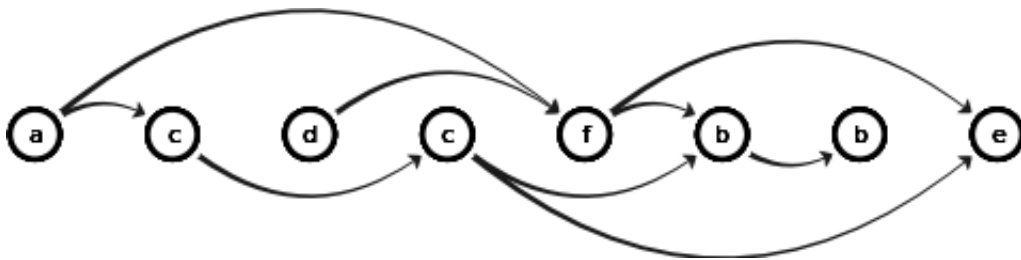
---

```
digraph g{
  0 -> 1
  0 -> 3
  1 -> 2
  2 -> 4
  2 -> 5
  3 -> 4
  3 -> 5
  0[label=b]
  1[label=a]
  2[label=a]
  3[label=d]
  4[label=c]
  5[label=b]
}
```

---



**Rysunek 2:** Zminimalizowany graf zależności słowa baadcb wygenerowany przy pomocy graphviz



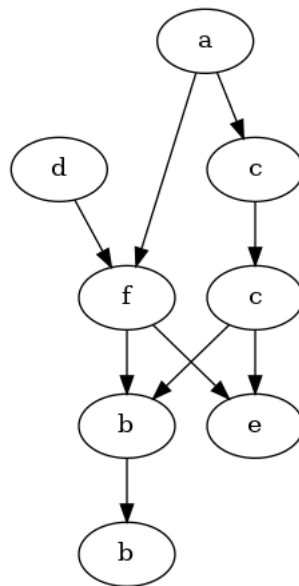
**Rysunek 3:** Zminimalizowany graf zależności słowa acdcfbbe

Graf słowa acdcfbbe w formacie DOT:

---

```
digraph g{
    0 -> 1
    0 -> 4
    1 -> 3
    2 -> 4
    3 -> 5
    3 -> 7
    4 -> 5
    4 -> 7
    5 -> 6
    0[label=a]
    1[label=c]
    2[label=d]
    3[label=c]
    4[label=f]
    5[label=b]
    6[label=b]
    7[label=e]
}
```

---



**Rysunek 4:** Zminimalizowany graf zależności słowa acdcfbbe wygenerowany przy pomocy graphviz

Przedstawione wyniki są poprawne i zgadzają się z ręcznie wyliczonymi wynikami z poprzednich laboratoriów.

### 3. Bibliografia

- <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.38.4401&rep=rep1&type=pdf>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Trace\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Trace_theory)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/DOT\\_\(graph\\_description\\_language\)](https://en.wikipedia.org/wiki/DOT_(graph_description_language))