Analysis I (AN1 119)

Grado en Ciencias computacionales

20/21 S1

Rix Silverith

Source code on GitHub

Índice general

Tema 1

Definición axiomática del conjunto $\mathbb{R}$

1.1 Números naturales, enteros y racionales. Compatibilidad con las operaciones básicas

Empezando por los números naturales, con la necesidad de hacer operaciones, y sus respectivas inversas, a lo largo de la historia se han ido construyendo conjuntos de números cada vez más grandes, pasando por los enteros, $\mathbb{Z}$, y los racionales,

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{m}{n} m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \tag{1.1}$$

Observación. En algunos libros $\mathbb{N}$ no contiene el cero. En esta asignatura siempre incluiremos el cero en $\mathbb{N}$, de modo que indicaremos con $\mathbb{N} \backslash \{0\} := \mathbb{N}^*$ el conjunto de los naturales, excluido el cero.

Que un conjunto de números *esté cerrado* para cierta operación significa que al hacer dicha operación entre dos elementos del conjunto, el elemento resultante pertenece también al mismo conjunto. Dicho esto, analizamos para que operaciones están cerrados los distintos conjuntos de números.

- Con los naturales, $\mathbb{N}$, es posible sumar, pero no restar.

$$3 - 2 = 1 \in \mathbb{N} \qquad 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N} \tag{1.2}$$

- Con los enteros, $\mathbb{Z}$, es posible sumar y restar. Además, es posible multiplicar, pero no dividir.

$$3 \cdot 2 = 6 \in \mathbb{Z} \qquad (-3) \cdot 2 = -6 \in \mathbb{Z} \qquad \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

- Finalmente, con los racionales, $\mathbb{Q}$, podemos realizar las cuatro operaciones básicas, podemos sumar, restar, multiplicar y dividir.

Puesto que el conjunto $\mathbb{Q}$ está cerrado para las cuatro operaciones básicas, surge la pregunta: ¿Por qué necesitamos also más que los racionales? ¿Existen realmente números que no son fracciones o que no se pueden obtener a partir de ellas mediante las cuatro operaciones?

1.2 Insuficiencia de los números racionales

Para dar una explicación satisfactoria de los principales conceptos del análisis matemático como son la convergencia, la continuidad, la diferenciabilidad y la integrabilidad, es necesario que estos conceptos esten basados en un conjunto de números precisamente definido.

El conjunto de los números racionales es inadecuado para muchos propósitos, como campo y como conjunto ordenado. Por ejemplo, no existe un número racional α tal que $\alpha^2 = 2$. Esto lleva a la introducción de los llamados *números irracionales*, que suelen ser escritos como una sucesión "aproximada" de decimales. Así, la sucesión

$$1,\ 1'4,\ 1'41,\ 1'414,\ 1'4142,\ \dots \tag{1.4}$$

podemos decir que "tiende a $\sqrt{2}$". Sin embargo, a no ser que el número irracional $\sqrt{2}$ haya sido claramente definido, debe surgirnos una pregunta: ¿Qué leches es a lo que "tiende" esta sucesión? Esta pregunta puede ser respondida tan pronto como el *sistema de números reales*, $\mathbb{R}$, sea construido.

Consideremos un problema muy sencillo: calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de la lado 1. Sabemos gracias al teorema de Pitágoras que $a^2 + b^2 = c^2$, en nuestro caso $1^2 + 1^2 = 2$. Por lo tanto, la longitud c de la hipotenusa es tal que $c^2 = 2$, es decir, $c = \sqrt{2}$. Que no existe en $\mathbb{Q}$ ningún número que verifique dicha igualdad es lo que vamos a demostrar a continuación, y que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pero antes definimos el siguiente lema.

Lema 1.1. *Si p^2 es par $\implies$ p es par.*

Demostración. Probamos por contradicción que si p es impar, entonces p^2 también resulta ser impar. Si p es un número impar entonces podemos definirlo como

$$p = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

entonces, si p^2 es también impar debería tener la forma

$$p^2 = 2m + 1, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

Elevando al cuadrado al expresión (1.5) y desarrollando dicho cuadrado tenemos

$$p^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4\left(n^2 + n\right) + 1 = 2m + 1 \tag{1.7}$$

con $m = 2\left(n^2 + n\right)$. En conclusión, si p es impar, p^2 también lo es.

■

Demostración. *Supongamos por absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.*

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{Q}\alpha^2 = 2, \quad \alpha = \frac{p}{q} \tag{1.8}$$

$$\text{entonces} \quad 2 = \alpha^2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \rightarrow \quad p^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad p^2 \text{ es par} \quad \Longrightarrow \quad p \text{ es par,} \tag{1.9}$$

$$\text{entonces, con la expresión (1.9) se tiene} \quad p = 2n \quad \Longrightarrow \quad 4n^2 = p^2 = 2q^2 \tag{1.10}$$

$$\text{simplificando,} \quad 2n^2 = p^2 = q^2, \text{entonces} \quad q^2 = 2n^2 \text{ es par} \quad \Longrightarrow \quad q \text{ es par.} \tag{1.11}$$

Esto es absurdo, ya que implica que p y q tienen 2 como divisor común. ■

1.3 El cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$

1.4 Espacios métricos. Desigualdades y el valor absoluto

1.5 Principio de inducción matemática

Teorema 1.1 (Binomio de Newton). *Dada una potencia de la forma $(a+b)^n$, es posible expandirla como la suma*

$$(a+b)^n = \sum_{n=0}^{k} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}, \tag{1.12}$$

llamada binomio de Newton, donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ son los coeficientes binomiales.

1.6 Correspondencias y relaciones de orden

Definición 1.2. *Dados dos conjuntos A y B llamamos correspondencia entre A y B a un subconjunto C del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in C \subset A \times B$ diremos que a está en correspondencia con b.*

Definición 1.3. *Cuando $A = B$, las correspondencias se llaman relaciones, $\mathcal{R}$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ diremos que a está relacionado (o en relación) con b, y se denota por $a\mathcal{R}b$.*

Definición 1.4. *Sea A un conjunto dado no vacío y $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en A, entonces se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden**.*

- ***Reflexiva:*** *Todo elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir, $\forall a \in A$ tenemos que $a\mathcal{R}a$.*
- ***Antisimétrica:*** *Si dos elementos de A se relacionan entre sí, entonces ellos son iguales. Es deicr, $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$.*
- ***Transitiva:*** *Si un elemento de A está relacionado con otro, y este otro a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero estará relacionado también con este último. Es decir, $\forall x, y, z \in A,\ x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.*

Notación. Una relación de orden $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A puede denotarse como el par ordenado $(A, \mathcal{R})$.

Definición 1.5. *Si $\forall a, b \in A$ o bien $a\mathcal{R}b$ o bien $b\mathcal{R}a$, $\mathcal{R}$ se llama **relación de orden total**.*

1.7 Aplicaciones y funciones

Definición 1.6. *Una **aplicación** o **función** $f : X \to Y$ es una correspondencia de X en Y tal que a cada elemento de X le corresponde, como máximo, un elemento de Y.*

Definición 1.7. *Si $f(a) = b$ decimos que b es la imagen de a y que a es la pre-imagen de b.*

Definición 1.8. *Llamamos $Im f = f(X) \subseteq Y$ a la imagen de f y decimos que f es*

- ***Injectiva.*** *Si cada elemento de Y tiene a lo sumo una pre-imagen: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.*
- ***Sobreyectiva.*** *Si $Im f = f(X) = Y$, es decir, si cada elemento de Y tiene por lo menos una pre-imagen.*

1.8 Cotas superiores e inferiores. Supremo e ínfimo

Definición 1.9. *Sea $(B, \leqslant)$ un conjunto ordenado y sea $A \subseteq B$.*

- *Un elemento $\overline{b} \in B$ es una **cota superior** de A si $x \leqslant \overline{b}$, $\forall x \in A$.*
- *Un elemento $\underline{b} \in B$ es una **cota inferior** de A si $\overline{b} \leqslant x$, $\forall x \in A$.*

- *Si un conjunto A tiene una cota superior (inferior) se dice que está* ***acotado superiormente*** *(**inferiormente**).*
- *Un conjunto se dice que está acotado si posee una cota superior e inferior.*
- *Si una cota superior $\overline{b}$ (inferior $\underline{b}$) pertenece a A entonces $\overline{b}$ es un* ***máximo*** *para A ($\underline{b}$ es un* ***mínimo*** *para A).*
- *El* ***supremo*** *de A es la más pequeña de las cotas superiores de A, y se denota por* $\sup A$.
- *El* ***ínfimo*** *de A es la más grande de las cotas inferiores de A, y se denota por* $\inf A$.

1.9 Sucesiones de números racionales

Definición 1.10. ***(Sucesión).*** *Llamamos* ***sucesión de números racionales*** *a una aplicación $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto a(n) = a_n$. Se denota el término general de la sucesión con $a_n = a(n) \in \mathbb{Q}$ (imagen de n), y la (imagen de la) sucesión con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$.*

Definición 1.11. ***(Límite de una sucesión).*** *Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ tiene* ***límite*** *$\ell \in \mathbb{Q}$ cuando n tiende a infinito si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0 \tag{1.13}$$

Definición 1.12. ***(Sucesión convegente).*** *Si el límite $\ell \in \mathbb{Q}$ de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ existe y es finito, se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es* ***convergente*** *y se denota por*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n = \lim a_n = \ell \tag{1.14}$$

Demostración. Demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, |a_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall n > n_0 \tag{1.15}$$

Fijamos el valor de $\varepsilon = \frac{1}{2}$. n_0 depende de ε tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$, es decir, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Tenemos que $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{2} = \varepsilon$. Entonces $n > 2$. Si $n_0 = 2 = \frac{1}{\varepsilon}, n_0 = 200$. Al ser $\frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{3} = n_0$ entonces $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 100$.

Por tanto, tenemos que $\forall \varepsilon$ encontramos $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 100 \frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. ■

Proposición 1.13. *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones racionales, y ℓ y m sus límites, con $\ell, m \in \mathbb{Q}$, el límite de la suma de ambas sucesiones es la suma de sus límites.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \ell + m \tag{1.16}$$

Proposición 1.14. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones racionales, $\ell, m \in \mathbb{Q}$ sus límites, y un número $\lambda \in \mathbb{Q}$, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda\ell \tag{1.17}$$

Proposición 1.15. ***(Multiplicidad del límite).*** *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones racionales, y $\ell, m \in \mathbb{Q}$ sus límites, el límite del producto de ambas sucesiones es el producto de sus límites.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \ell m \tag{1.18}$$

Observación. La multiplicación de sucesiones implica la multiplicación de una sucesión por una número si se toma una de ellas como la sucesión constante.

Proposición 1.16. ***(Divisibilidad del límite).*** *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones racionales, y $\ell, m \in \mathbb{Q}$ sus límites, el límite del cociente de ambas sucesiones es el cociente de sus límites.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\ell}{m}, \quad m \neq 0 \tag{1.19}$$

Proposición 1.17. ***(Unicidad del límite).*** *El límite de una sucesión, cuando existe, es único.*

Las dos primeras proposiciones se pueden agrupar en la siguiente.

Proposición 1.18. ***(Linealidad del límite).*** *El límite es lineal. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones racionales, y $\ell, m \in \mathbb{Q}$ sus límites, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n = \lambda\ell + \mu m \tag{1.20}$$

Teorema 1.2. ***(Principio de comparación / Teorema del Sandwich).*** *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y c_n tres sucesiones con $n \in \mathbb{N}$. Si sabemos que a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ las sucesiones están ordenadas*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall n \geqslant n_0, \tag{1.21}$$

entonces también los límites, existan o no, estarán ordenados.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to\infty} c_n \tag{1.22}$$

1.9.1 Sucesiones de Cauchy

Lema 1.19. *Una sucesión convergente es acotada, es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ entonces existe $M > 0\, |a_n| \leqslant M$.*

Demostración.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\, |a_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall n > n_0 \tag{1.23}$$

Sea $\varepsilon = 1$, encontramos que $n_0(1)$, entonces $\ell - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant l + \varepsilon$ resulta en $\ell - 1 \leqslant a_n \leqslant \ell + 1$, $\forall n > n_0(1)$. Finalmente, $-\max|a_k| + \ell - 1 \leqslant \max|a_k| + \ell + 1$, con $0 \leqslant k \leqslant n_0$. ■

Lema 1.20. ***(Sucesión de Cauchy).*** *Una sucesión convergente es de Cauchy, es decir,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, |a_n - a_m| < \varepsilon,\ \forall m, n > n_0 \tag{1.24}$$

Demostración. Por la definición de límite de una sucesión, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0\, |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > n_0$ y $|a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall m > n_0$. Entonces $|a_n - a_m| = |a_n - \ell - (a_m - \ell)| \leqslant |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. ■

Definición 1.21. ***(Sucesión de Cauchy).*** *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, |a_n - a_m| < \varepsilon,\ \forall m, n > n_0 \tag{1.25}$$

1.10 Definición de $\mathbb{R}$

Podemos definir el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, de tres maneras equivalentes, *completando* el cuerpo de los números racionales, $\mathbb{Q}$.

- Toda sucesión de Cauchy tiene límite en $\mathbb{R}$.
- Todo conjunto acotado tiene supremo e ínfimo.
- El límite de una sucesión monótona creciente y acotada es el supremo. Respectivamente, el límite de una sucesión monótona decreciente y acotada es el ínfimo.

Definición 1.22. ***(Cuerpo).*** *Un cuerpo, o campo, $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$, es un conjunto de números $\mathbb{K}$ con dos operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ que satisfacen las propiedades asociativa y conmutativa, y está cerrado para sus operaciones inversas $(-, /)$.*

Definición 1.23. *Un cuerpo $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, \leqslant)$ se dice (completamente) ordenado respecto a la relación de orden $\leqslant$ cuando $a \leqslant b$, o bien $b \leqslant a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$.*

Definición 1.24. *Un cuerpo $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, \leqslant)$ se dice arquimediano si el conjunto de los números naturales no está acotado, es decir, si $\forall a \in \mathbb{K}, \exists\, n \in \mathbb{N} a \leqslant n$.*

Definición 1.25. *Un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice **completo** (por sucesiones) si y solo si todas las sucesiones de Cauchy de elementos de $\mathbb{K}$ tienen límite en $\mathbb{K}$.*

1.10.1 $\mathbb{R}$ como completamiento de $\mathbb{Q}$ por sucesiones de Cauchy

Sea $\mathcal{C} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q}$ y a_n es de Cauchy$\}$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy racionales. $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo que contiene a $\mathbb{Q}$.

Supongamos que definimos $\mathbb{R}$ como límites de sucesiones de Cauchy racionales. Si la sucesión a_n define el número real $\alpha = \lim a_n$, b_n define el número real $\beta = \lim b_n$, c_n define el número real $\gamma = \lim c_n$, las operaciones entre elementales entre dichos elementos no son más que las propiedades fundamentales de los límites de una sucesión.

Esta definición de los números reales conlleva un problema: las sucesiones $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n^2}, c_n = \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$ todas convergen en 0, lo que da lugar a que un mismo número real estaría definido por varias sucesiones distintas, es decir, los números reales no están unívocamente determinados con esta definición. Por tanto, podemos definir $\mathbb{R}$ como una clase de equivalencia de límites.

Sea la relación de equivalencia $a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Por poner un ejemplo, el número real 0 es la clase de equivalencia de las sucesiones que tienen límite cero, es decir, el conjunto de todas las sucesiones nulas; extrapolando, cada número real está determinado por la clase de equivalencia de las sucesiones de Cauchy que convergen a ese mismo número. Entonces, el conjunto de los números reales quedaría definido como

$$\frac{(\mathcal{C}, +, \cdot)}{\sim} = \mathbb{R} \tag{1.26}$$

Corolario 1.26. *En $\mathbb{R}$, una sucesión es convergente $\iff$ es de Cauchy.*

Podemos realizar las cuatro operaciones elementales entre los números reales utilizando las propiedades fundamentales de los límites de una sucesión, y pueden ser comparados mediante el teorema del Sandwich.

1.10.2 $\mathbb{R}$ como sucesiones minimizantes/maximizantes

Lema 1.27. ***(GAP Lemma).*** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y no vacío, y sea $\bar{a} = \sup A$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a = a(\varepsilon) \in A\, |\bar{a} - a| < \varepsilon, \forall a \in A$.*

Demostración. $\exists \bar{\varepsilon} > 0 \forall a \in A$ *tenemos que* $|\bar{a} - a| > \bar{\varepsilon}$ ■

Dado un conjunto A queremos construir una sucesión maximizante, es decir, $\{a_n\} \subseteq A \lim_{n\to\infty} a_n = \sup A = \bar{a}$. Por el lema del GAP, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a_\varepsilon = a(\varepsilon) \in$

$A\,|\overline{a} - a_\varepsilon| < \varepsilon$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists\, a_n \in A\,|\overline{a} - a_n| < \frac{1}{n}$. Vemos que a_n es una sucesión de Cauchy, aplicando la desigualdad triangular

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \overline{a}) + (\overline{a} - a_m)| \leqslant |a_n - \overline{a}| + |\overline{a} - a_m| \Longrightarrow \tag{1.27}$$

$$\Longrightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{\text{mín}\,(n, m)} < \varepsilon \Longrightarrow n_0 = \text{mín}\,(n, m) > \frac{2}{\varepsilon} \tag{1.28}$$

Por tanto, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0\,(\varepsilon)\,|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m > n_0$, entoces la sucesión maximizante es de Cauchy.

Teorema 1.3. ***(Teorema de la densidad de los racionales).*** *Entre dos números reales distintos existe siempre un racional y un irracional.*

Tema 2

Sucesiones y series reales

En esta sección volveremos a dar la definición de una sucesión y de su convergencia en pero en $\mathbb{R}$ en vez de en $\mathbb{Q}$, aunque realmente sea la misma.

2.1 Sucesiones de números reales

Definición 2.1 (Sucesión). *Se llama sucesión de números reales a una aplicación* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $n \longmapsto a(n) = a_n$. *Se denota el término general de la sucesión con* $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ *y a la sucesión con* $a_{n\, n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 2.2 (Límite de una sucesión). *Se dice que la sucesión real* a_n *tiene límite* $L \in \mathbb{R}$ *cuando* n *tiende a infinito si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geqslant n_0,\ |a_n - L| \leqslant \varepsilon. \tag{2.1}$$

Definición 2.3 (Sucesión convergente). *Si el límite* $L \in \mathbb{R}$ *de la sucesión real* a_n *existe y es finito, se dice que* a_n *es convergente y se denota por*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n = \lim a_n = L. \tag{2.2}$$

Nota. Las propiedades de estos límites en $\mathbb{R}$ son las mismas que en $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.1 (Principio de comparación / Teorema del sandwich). *Sean* a_n, b_n *y* c_n *tres sucesiones reales. Si se sabe que a partir de un cierto* $n_0 \in \mathbb{N}$ *las sucesiones están ordenadas tal que*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall n \geqslant n_0, \tag{2.3}$$

entonces también sus límites, existan o no, estarán ordenados de la misma forma

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to\infty} c_n. \tag{2.4}$$

Lema 2.4. *Una sucesión real convegente a_n es acotada, es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leqslant M$.*

Demostración. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que para todo $n > n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Sea $\varepsilon = 1$, encontramos $n_0(1)$, entonces $L - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant L + \varepsilon$ resulta en $L - 1 \leqslant a_n \leqslant L + 1$, $\forall n > n_0(1)$. Finalmente, $-\max|a_k| + L - 1 \leqslant \max|a_k| + L + 1$, con $0 \leqslant k \leqslant n_0$.* ■

Lema 2.5 (Sucesión de Cauchy). *Una sucesión convergente es de Cauchy, es decir,*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall m, n > n_0,\ |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Demostración. *Por la definición de límite de una sucesión tenemos que $\forall\varepsilon > 0, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)\, \forall n > n_0$, $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\forall m > n_0$, $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $|a_n - a_m| = |a_n - L - (a_m - L)| \leqslant |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.* ■

2.2 Subsucesiones. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definición 2.6 (Subsucesión). *Consideramos una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y una sucesión creciente de índices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. La sucesión obtenida seleccionando los elementos $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se llama subsucesión, o sucesión parcial, de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Ejemplo. *Subsucesión de índices impares: $a_{2k+1} : a_1, a_3, a_5, \ldots$*

Proposición 2.7. *Si la sucesión $a_n \subseteq \mathbb{R}$ tiene límite $\ell \in \mathbb{R}$, entonces cualquier subsucesión a_{n_k} de a_n converge al mismo límite, es decir*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell. \tag{2.6}$$

Teorema 2.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión real acotada tiene, al menos, una subsucesión convergente.*

Corolario 2.8. *Toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathbb{R}$.*

2.3 Límites superiores e inferiores

Definición 2.9 (Límite superior). *Existe una subsucesión $\{\overline{a}_{n_k}\}$ con límite $\overline{L} \in \mathbb{R}$ tal que para toda subsucesión que tiene límite L, se tiene $L \leqslant \overline{L}$. Se dice que $\overline{L}$ es el límite superior:*

$$\overline{L} := \lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{k\to\infty} \overline{a}_{n_k}. \tag{2.7}$$

Definición 2.10 (Límite inferior). *Existe una subsucesión* $\underline{a}_{n_k}$ *con límite* $\underline{\ell}$ *tal que para toda subsucesión que tiene límite* ℓ*, se tiene que* $\ell \geqslant \underline{\ell}$*. A este número se le llama límite inferior:*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\ell} = \lim_{k\to\infty} \underline{a}_{n_k}. \tag{2.8}$$

Observación. Una sucesión $a_n \subseteq \mathbb{R}$ acotada siempre tiene límites superiores e inferiores finitos, y además

$$-\infty < \lim_{n\to\infty} \inf\ a_n \leqslant \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{\text{Puede no existir!}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup\ a_n < \infty. \tag{2.9}$$

Proposición 2.11. *El límite superior e inferior coinciden si y solo si el límite existe.*

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\ a_n. \tag{2.10}$$

2.4 Series de números reales

Definición 2.12 (Serie). *Sea una sucesión de infinitos términos reales,* a_n*, se define una serie infinita (o simplemente serie) de razón o término general* a_n *como la suma de los infinitos términos* a_i *de la sucesión* a_n*.*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + a_{i+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{2.11}$$

Dicho de una manera más precisa, dada una sucesión a_n, se puede formar a partir de ella otra sucesión, A_n, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de la sucesión a_n, es decir,

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ \ldots, A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots \tag{2.12}$$

En otras palabras, partimos de $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$. El número

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{2.13}$$

se llama suma parcial de orden n de la serie $\sum a_n$, o la suma de los n primeros términos.

Observación. Puesto que, por definición, una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión, los conceptos y resultados vistos para sucesiones son los mismos aplicados a series.

2.4.1 Propiedades básicas de las series convergentes

A rellenar con los apuntes de Javier Pérez.

Definición 2.13 (Serie convergente). *Se dice que la serie de término general a_n es convergente si y solo si lo es la sucesión S_k de sumas parciales, es decir, si las sumas parciales se acercan cada vez más a un número cuando se incrementa el número de términos de la sucesión. Además, llamamos suma de la serie, S, al límite finito de la sucesión de sumas parciales S_k*

$$S \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{2.14}$$

Si por el contrario, el límite de la sucesión de sumas parciales no existe, se dice que la serie diverge, o es divergente.

Cabe destacar que la naturaleza de convergencia de una serie no es alterada si se modifica una cantidad finita de términos de la serie.

Ejemplo. *Son ejemplos de series convergentes:*

- *La suma de los k primeros números naturales:*

$$S_k = 0+1+2+3+4+\ldots+k = \sum_{n=0}^{k} n = \frac{k\,(k+1)}{2} \longrightarrow_{k\to+\infty} +\infty. \tag{2.15}$$

- *El número e:*

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}. \tag{2.16}$$

Definición 2.14 (Convergencia absoluta). *Se dice que una serie con término general a_n es absolutamente convergente si la serie de término general $|a_n|$ es convergente.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty. \tag{2.17}$$

Además, se tiene que

$$-\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,. \tag{2.18}$$

Definición 2.15 (Convergencia condicional). *Se dice que una serie con término general a_n es condicionalmente convergente si la serie de término general $|a_n|$ es divergente.*

Teorema 2.3 (Teoría de Riemann). *Sea una serie convergente de término a_n pero no absolutamente convergente, entonces para todo $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es posible reordenar los términos de la serie de manera que converga a L.*

En las dos siguientes secciones se muestran varios criterios por los que demostrar la convergencia o divergencia de una serie.

2.5 Criterios de convergencia de series

Lema 2.16 (Condición necesaria de convergencia / Criterio del límite). *Sea una serie de término general a_n. Si el límite del término general a_n es distinto de cero o si no existe dicho límite, la serie no será convergente.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.19}$$

Demostración. No es restrictivo suponer que el límite de a_n es positivo: $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Entonces, fijando $\varepsilon = L/2$ existe un n_0 tal que $|a_n - L| < \varepsilon = L/2$, para todo $n \geqslant n_0$. Por lo tanto tenemos que

$$a_n \geqslant \frac{L}{2},\ \forall n \geqslant n_0. \tag{2.20}$$

Entonces, por comparación,

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_k} = \sum_{n=n_0}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=n_0}^{k} \frac{L}{2} = \frac{L}{2}(k - n_0) \longrightarrow +\infty. \tag{2.21}$$

Por lo tanto la serie no es convergente. (La demostración se realiza análogamente cuando $L < 0$, de ahí que suponer que el límite sea positivo no es restrictivo). ■

Observación. Remarcar que esta condición es necesaria para la convergencia de series, pero no es suficiente. Por lo tanto, que el término general de la sucesión que conforma la serie sea cero no implica directamente que dicha serie vaya a ser convergente.

Teorema 2.4 (Criterio de condensación de Cauchy). *Sea una serie monótona de término general $a_n \geqslant 0$ y decreciente, $a_{n+1} \leqslant a_n$, tal que*

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{2.22}$$

Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}. \tag{2.23}$$

Demostración. To be done. ■

Teorema 2.5 (Criterio de Leibniz). *Sea una serie alternada*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{2.24}$$

con $a_n \leqslant 0$. Esta serie converge si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0$.
- *La serie es absolutamente decreciente, es decir, $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$.*

Si esto se cumple, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente, de lo contrario la serie diverge.

Nota. Antes de utilizar el criterio de Liebniz se debe descartar primero la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ usando los criterios para series positivas.

2.6 Criterios de convergencia comparativos

Estos son aplicables en caso de disponer de otra serie de término general b_n tal que se conozca su condición de convergencia o divergencia.

Proposición 2.17 (Criterio de comparación directa). *Sean a_n y b_n dos sucesiones reales tales que $0 < a_n \leqslant b_n$, $\forall n \geqslant n_0$. Entonces,*

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty, \tag{2.25}$$

es decir, las sumas parciales series de a_n y b_n se encuentran ordenadas,

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{k} b_n < +\infty. \tag{2.26}$$

Además, se tiene que

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty. \tag{2.27}$$

A partir del criterio de comparación directa se puede concluir que el comportamiento de una serie de términos positivos tiene solo dos casos por ser esta monótona creciente: o bien la serie es convergente a un número estrictamente positivo, o bien es divergente a $+\infty$.

Nota. Este criterio es básicamente una versión para series del Principio de comparación o teorema del sandwich para sucesiones.

Definición 2.18 (Sucesiones asintóticas). *Dos sucesiones reales a_n y b_n son asintóticamente equivalentes (o simplemente asintóticas), y se escribe $a_n \sim b_n$, si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \tag{2.28}$$

Si el límite L del cociente entre ambas sucesiones converge a $L \neq 0$, se dice que $a_n \sim Lb_n$.

Proposición 2.19 (Criterio de comparación asintótica). *Sean dos series de términos generales positivos asintóticos, $a_n \sim b_n$. Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty. \tag{2.29}$$

Proposición 2.20 (Criterio de comparación por paso al límite del cociente). *Sean dos series de términos generales positivos. Si existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty), \tag{2.30}$$

entonces se tiene que:

- *Si $L = 0$ y la serie $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.*
- *Si $L = +\infty$ y $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.*
- *Si $0 < L < +\infty$ entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ comparten la misma condición de convergencia (ambas convergen o ambas divergen).*

2.7 Otros criterios de convergencia

Realmente estos criterios no lo son en sí, sino que resultan de aplicar el criterio de comparación con la serie geométrica (descrita en la siguiente sección).

Teorema 2.6 (Criterio de Cauchy o de la raíz). *Consideramos una serie de términos positivos y término general $a_n \geqslant 0$ tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = L. \tag{2.31}$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} < +\infty & si\ L < 1. \\ = +\infty & si\ L > 1. \end{cases} \tag{2.32}$$

Teorema 2.7 (Criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea una serie decreciente de términos estrictamente positivos y término general $a_n \geqslant 0$, tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty], \tag{2.33}$$

entonces el criterio de D'Alembert establece que

- *si $L < 1$, la serie converge,*
- *si $L > 1$, la serie diverge,*
- *si $L = \infty$, la serie diverge,*
- *si $L = 1$, el criterio no establece nada respecto a su convergencia.*

2.8 Serie geométrica

Definición 2.21 (Serie geométrica). *Dado un número $r \in [0, \infty)$, la sucesión $\{1 + r + r^2 + \ldots + r^n\}$ recibe el nombre de serie geométrica de razón r,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^k + \ldots \tag{2.34}$$

Esta serie converge si, y solo si, $|r| < 1$, en cuyo caso se verifica que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}. \tag{2.35}$$

Este hecho se deduce de que si $r \neq 1$, las sumas parciales de la serie geométrica tienen la expresión

$$\sum_{k=0}^{n} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \tag{2.36}$$

que se demuestra fácilmente por inducción. Si $|r| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0$ y obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1}{1-r}. \tag{2.37}$$

Por contra, si $|r| > 1$ o $r \in \{-1, 1\}$ la serie es divergente.

A modo de resumen,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\to\infty}^{k} r^k = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - r^{k+1}}{1-r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \\ \frac{1}{1-r} < +\infty & \text{si } 0 < r < 1. \end{cases} \tag{2.38}$$

2.9 La serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}. \tag{2.39}$$

Esta serie armónica, es convergente? Como el término general $\frac{1}{n} \to 0$ podría ser convergente.Analicemos las sumas parciales:

$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{2^{k-1}}{2^k}=\frac{1}{2}} \tag{2.40}$$

Agrupando (Principio de condensación) tenemos

$$S_{2^k}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^k}=1+\frac{k}{2}\longrightarrow+\infty. \tag{2.41}$$

Resulta que, a pesar que de la serie armónica cumple la condición necesaria de convergencia, diverge a $+\infty$.

2.9.1 Serie armónica alternada

Sabemos que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}=+\infty$. Si queremos estudiar

$$\log(2)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{2.42}$$

es absolutamente divergente. Sin embargo, por el criterio de Leibniz, es convergente, ya que $\frac{1}{n}=a_n\to 0$ y a_n es decreciente.

Tema 3

Continuidad de funciones de variable real

Definición 3.1 (Función). *Sean dos conjuntos X y Y, una relación $f \subset X \times Y$ es función si $\forall x \in X,\ \exists!\ y \in Y$, y se denota por $f : X \longrightarrow Y$.*

Definición 3.2 (Antiimagen). *Sea $f : X \longrightarrow Y$, la antiimagen de un conjunto $B \subset Y$ es $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.*

Observación. No se debe confundir la antiimagen con la función inversa. La antiimagen es solo con conjuntos, la inversa con elementos. Por ejemplo, si x es un elemento y X es un conjunto, $f^{-1}(f(x)) = x$, pero $f^{-1}(f(X))$ no tiene por qué ser igual a X.

Por ejemplo, sea $X = [0, 2]$ y $f(x) = x^2$. La imagen de X es $[0, 4]$, mientras que la antiimagen de $[0, 4]$ es $[-2, 2] \neq X$.

Definición 3.3 (Función inyectiva). *Una función $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si elementos distintos tienen imágenes distintas, es decir, $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.*

Definición 3.4 (Función sobreyectiva). *Una función $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva si $f(X) = Y$, es decir, si $\forall y \in Y,\ \exists x \in X \mid f(x) = y$.*

Definición 3.5 (Función biyectiva). *Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 3.6 (Función inversa). *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. La inversa es $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, y si es función, se dice que f^{-1} es la inversa de f.*

Proposición 3.7. *Una función f es invertible $\iff$ es inyectiva.*

> *Demostración. Para que $f : X \longrightarrow Y$ sea invertible, $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ tiene que ser una función, es decir, que $\forall y \in Y, \exists!\ x \in X$. Comprobamos primero la existencia de imagen para cualquier elemento de Y. Si f es sobreyectiva, entonces se tiene que $Y = f(X)$. Por tanto, cualquier elemento de Y tiene una imagen en X. Si no fuese sobreyectiva existiría algún elemento en Y que no fuese imagen de un elemento de X, asi que f^{-1} no sería función.*
>
> *Ahora demostramos la unicidad de la imagen para cualquier elemento de Y. Si f es inyectiva, tenemos que $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \iff x = x'$. Cada elemento de X está relacionado con un sólo elemento de Y, por lo que cada elemento de Y tiene solo una imagen. Si no fuera inyectiva, algún elemento de Y tendría dos imágenes en X y la relación inversa no sería función.* ■

Definición 3.8 (Composición). *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : W \longrightarrow Z$ con $f(X) \subset W$, se define la composición f compuesto con g como $g \circ f : X \longrightarrow Z$, tal que $(g \circ f) = g(f(x)), x \in X$.*

- *La composición de funciones cumple la propiedad asociativa $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*
- *Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*

Definición 3.9 (Límite). *Sea una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f tiene límite L cuando x tiende a $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \mid \forall ||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x - L)|| < L$, y se denota por*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L. \tag{3.1}$$

Observación. No es necesario que $x_0 \in X$.

Definición 3.10 (Límite lateral). *Se define el límite lateral por la derecha, L_d, de una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como el que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \mid \forall ||x - x_0|| < \delta \wedge x > x_0 \implies ||f(x) - L_d|| < \varepsilon$.*

La definición de límite por la izquierda es análoga, salvo que $x < x_0$. Los límites por la derecha e izquierda se denotan, respectivamente, por

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_d \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_i \tag{3.2}$$

Definición 3.11 (Límite en el infinito). *Se dice que la función $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene límite L para $x \longrightarrow +\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \mid (x > M \wedge x \in X) \implies ||f(x) - L|| < \varepsilon$.*

La definición es análoga cuando $x \longrightarrow -\infty$, salvo que $x < -M$.

Teorema 3.1. *Una función $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a $x_0 \Longleftrightarrow$ toda sucesión $x_n \subset \mathrm{Dom}(f)$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ cumple que $f(x_n)$ forma una sucesión convergente a L, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L. \tag{3.3}$$

Proposición 3.12 (Propiedades fundamentales de los límites). *Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, con límites finitos $L, M \in \mathbb{R}$ cuando $x \longrightarrow x_0$.*

1. *El límite, cuando existe, es único.*
2. *El límite es lineal, es decir, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) + \mu \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda L + \mu M. \tag{3.4}$$

3. *El límite es compatible con el producto y con la división.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = LM. \tag{3.5}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)}{=} \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \tag{3.6}$$

Teorema 3.2 (Principio de comparación / Teorema del sandwich). *Sean tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tal que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \wedge x \neq x_0 \wedge \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L$.*

> *Demostración. Sea x_n una sucesión tal que $\overline{x_0} \in x_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Entonces, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = L$. Por el principio de comparación para las sucesiones, se llega a $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n) \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} g(x_n) = L \Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g(x_n) = L$.* ■

Definición 3.13 (Continuidad en un punto). *Una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0 \in X \Longleftrightarrow x_0 \in X \wedge \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Definición 3.14 (Función continua). *Una función es continua si lo es en todos los puntos de su dominio.*

Definición 3.15 (Función de Dirichlet). *Sea $\mathbb{D}$ una función discontinua en cada punto definida por*

$$\mathbb{D}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}. \tag{3.7}$$

$\mathbb{D}$ es llamada función de Dirichlet.

Nota. Se puede demostrar que la función de Dirichlet es discontinua en cada punto usando el teorema de densidad de $\mathbb{Q}$.

Definición 3.16 (Acotación). *Se dice que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada superiormente si $\exists M \mid f(x) \leqslant M,\ \forall x \in X$. La definición es análoga cuando está acotada inferiormente.*

Teorema 3.3 (Teorema de Weierstrass de los máximos y mínimos). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada y tiene máximo y mínimo, es decir, $\exists M, m \in \mathbb{R}, x_M, x_m \in [a,b] \mid \forall x \in [a,b]$*

$$m = f(x_m) = \min_{z\in[a,b]} f(z) \leqslant f(x) \leqslant \max_{z\in[a,b]} f(z) = f(x_M) = M. \tag{3.8}$$

Teorema 3.4 (Teorema de los ceros de Bolzano). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y tal que $f(a) f(b) \leqslant 0$. Entonces existe, al menos, un $x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) = 0$.*

Lema 3.17 (Lema del signo). *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo abierto (a,b). Si $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno de x_0 en (a,b) tal que f tiene signo constante.*

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 3.5 (Teorema de los valores intermedios de Bolzano). *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el cerrado $[a,b]$, entonces es sobreyectiva, es decir, $\forall y \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists$, al menos, un $x \in [a,b] \mid f(x) = y$.*

Nota. Este último teorema 3.5 puede considerarse un corolario del teorema 3.4.

Teorema 3.6 (Teorema de los valores intermedios de Bolzano-Weierstrass). *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el cerrado $[a,b]$, entonces toma todos los valores entre su máximo $M = f(x_M)$ y su mínimo $m = f(x_m)$, es decir, $\forall y \in [m,M]$, $\exists$, al menos, un $x \in [a,b] \mid f(x) = y$.*

Con el teorema 3.4 podemos resolver todas las ecuaciones $f(x) = g(x)$ con f y g continuas.

Tema 4

Derivadas

Ahora la cosa va de derivar. Pero derivar mucho. Va a estar divertido.

Apéndice A

Problem Sets

A.1 Problem Set 1: Mathematical induction

A.2 Problem Set 2: Sequences and limits

A.3 Problem Set 3: Series

List of Theorems

Bibliografía

[Gon] F. J. Pérez González. Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf.

[Spi94] M. Spivak. *Calculus*. Editorial Reverté, 2 edition, 1994.