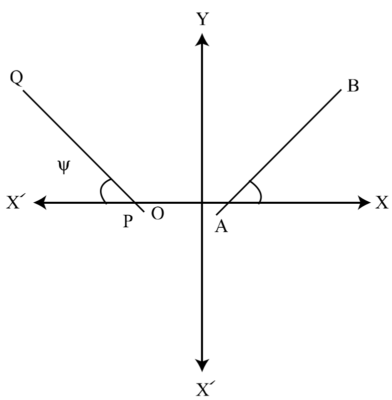
জ্যামিতির সব সূত্র ও টেকনিক

সরলরেখা (The Straight Line)

সরলরেখা : কোন কার্তেসীয় সমতলে দুটি বিন্দুর সমদূরবর্তী বিন্দু সমূহের সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলে।

সরলরেখার ঢাল (Slope of a line) :

কোন সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেনেটর (tan) মানকে সরলরেখাটির ঢাল বলে এবং ঢালকে m দ্বারা সূচিত করা হয়।



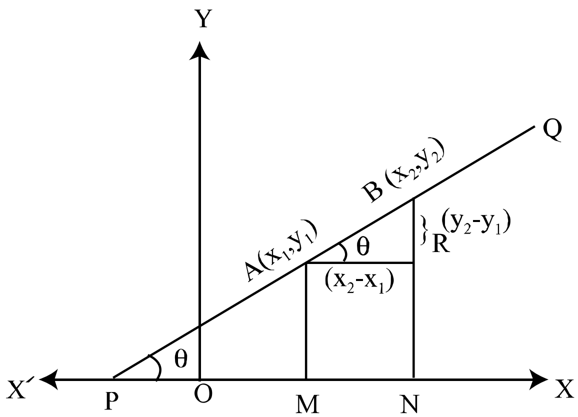
চিত্রে AB রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে। $(0^0 \le \theta < 180^0; \theta \ne 90^0)$ তৈরি করে।

⇨ $\therefore$ AB রেখার ঢাল $m = \tan\theta$.

PQ রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $(180^0 - \varphi)$ কোণ উৎপন্ন করে।

⇨ $\therefore$ PQ রেখার ঢাল, $m = \tan(180^0 - \varphi) = -\tan\varphi$. θ কোণের পরিমাণ $90^0 < \theta < 180^0$ হলে ঢাল ঋণাত্মক হবে।

একটি সরলরেখার ঢাল নির্ণয় যা দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।



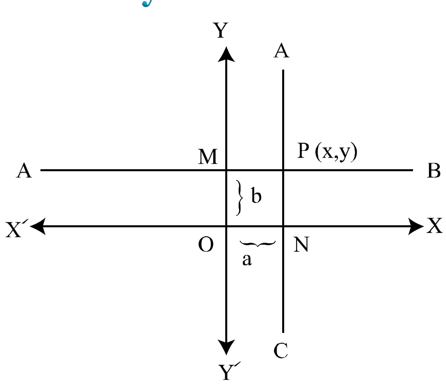
PQ সরলরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে।

➩ $\therefore$ PQ রেখার ঢাল $m = \tan\theta = \tan BAR = \frac{BR}{AR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ =ভূজদ্বয়ের অন্তর/কোটিদ্বয়ের অন্তর

➩ $\therefore$: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখা হওয়ার শর্ত :

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}; x_1 \neq x_2, x_3$$

x অক্ষ ও **y** অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ :



$\therefore$ x অক্ষের সমান্তরাল যেকোন সরলরেখা সমীকরণ $y = b$ এবং

y-অক্ষের সমান্তরাল যেকোন সরলরেখা সমীকরণ $x = a$

মন্তব্য : b ধনাত্মক হলে সরলরেখাটি x অক্ষের b একক উপর এবং b ঋণাত্মক হলে সরলরেখাটি x অক্ষের b একক নীচে অবস্থান করবে। b=0 হলে রেখাটি x অক্ষের সাথে মিলে যাবে।

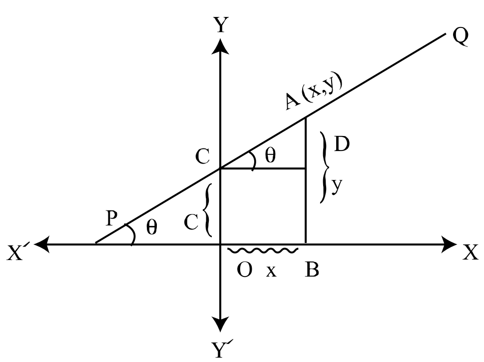
$\therefore$ x অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

আবার a ধনাতম হলে সরলরেখা y অক্ষের a একক ডানে এবং a ঋণাত্মক হলে সরলরেখাটি y অক্ষের a একক বামে অবস্থান করবে।

a = 0 হলে রেখাটি y অক্ষের সাথে মিলে যাবে।

$\therefore$ y অক্ষের সমীকরণ

সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ :



PQ সরলরেখাটি y অক্ষকে c বিন্দুতে ছেদ করে এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। ধরি, A (x,y) বিন্দুটি PQ এর উপর অবস্থিত এবং y অক্ষ থেকে খন্ডিত অংশ OC= C.

$\therefore y = mx + c$ যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

$c = 0$ হলে PQ সরলরেখায় মূলবিন্দুগামী হয়।

$\therefore$ মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx$

(x_1, y_1) বিন্দুগামী **m** ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ পাই $(y - y_1) = m(x - x_1)$

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু (বিন্দু দুইটি স্থানাংক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)) দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

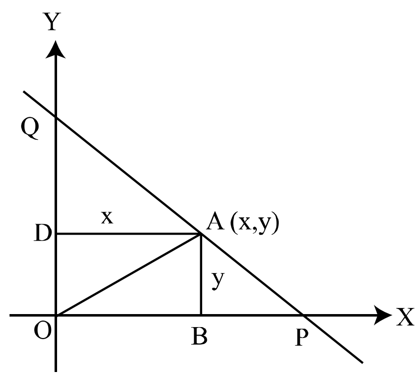
অনুসিদ্ধান্ত :

(i) মূলবিন্দু (0,0) এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগকারী রেখার সমীকরণ :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \Rightarrow y = \frac{y_1}{x_1}x$$

(ii) সরলরেখাটির ঢাল = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

অক্ষদ্বয় হতে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়। (ছেদক আকৃতির সমীকরণ)

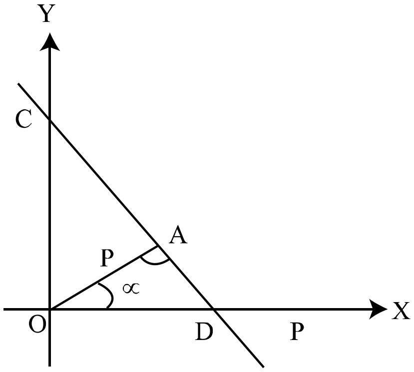


PQ সরলরেখাটি $A(x, y)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষকে P এবং y-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি OP = a এবং OQ = b সরলরেখার সমীকরণ $\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

সমীকরণটি মূলবিন্দুগামী হতে পারে না কারণ (0,0) বিন্দুদ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

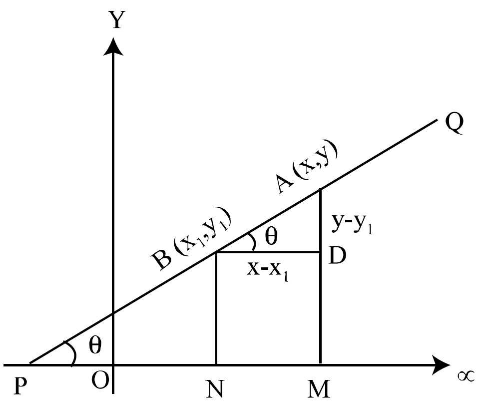
মূলবিন্দু থেকে কোন সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য **P** এবং লম্বটি **x** অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\propto$ কোণ উৎপন্ন করলে: সরলরেখার সমীকরণ $x\cos\propto + y\sin\propto = P$

(লম্ব আকৃতি সমীকরণ)



x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং (x_1, y_1) নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\therefore \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = \gamma;$$



দুইটি সমীকরণ $(ax + by + c = 0$.এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0)$ দ্বারা একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত নির্ণয় : সরলরেখাদ্বয়ের ধ্রুবকগুলো শূন্য নয় এবং $a \neq a_1, b \neq b_1, c \neq c_1$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

সরলরেখা (Straight Lines)

সাধারণ ধারণা

➪ 1. A (x_1,y_1) ও B (x_2,y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল(gradient) ,

$$m = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

➪2. ax+by+c=0 সরলরেখার ঢাল, m = -(a/b)

➪3. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি AB এবং AC রেখাদ্বয়ের ঢাল একই হয় ।

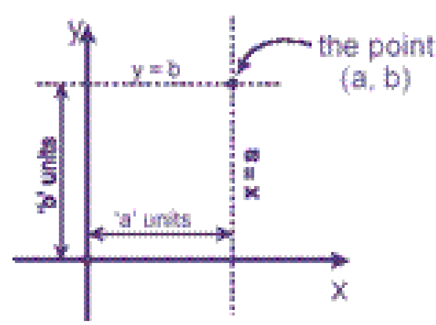
অর্থাৎ যদি, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ হয়

➪ 4. x অক্ষের সমীকরণ, y = 0

➪5. y অক্ষের সমীকরণ, x = 0

➪6. x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, y = b

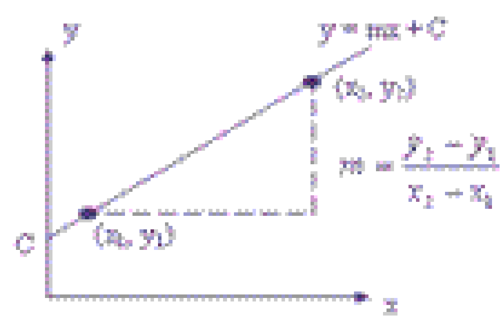
➪7. y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, x = a



➪8. y অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট অংশ c ছেদ করে এবং x অক্ষের সাথে ধনাত্মক কোণ θ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, **y = mx+c** এখানে,

m = সরলরেখার ঢাল = tanθ

c = 0 হলে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হয় এবং সমীকরণটি দাড়ায়, y = mx

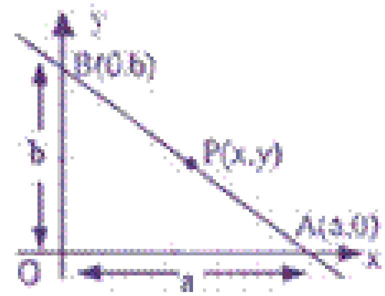


➪9.(x_1,y_1) বিন্দুগামী m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1 = m(x-x_1)$

⇨10.(x_1, y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী এবং y অক্ষের সমান্তরাল নয় এরূপ রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

⇨11.মূলবিন্দু (0,0) এবং (x_1,y_1) বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখার সমীকরণ, $(x/x_1) = (y/y_1)$

⇨12.x অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট অংশ a এবং y অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট অংশ b ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $x/a + y/b = 1$



সরলরেখাটি x অক্ষরেখাকে (a,0) এবং y অক্ষরেখাকে (0,b) বিন্দুতে ছেদ করে

⇨13.মূলবিন্দু থেকে যে সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে Θ কোণ উৎপন্ন করে এবং যার উপর মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p তার সমীকরণ, $x \cos\theta + y\sin\theta = p$

⇨14.দুইটি সরলরেখার সমীকরণ সমাধান করলে তাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় ।

⇨15.$a_1x+b_1y+c_1 = 0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2) = 0$

k-এর বিভিন্ন মানের জন্য সমীকরণটি বিভিন্ন সরলরেখা প্রকাশ করে যার প্রত্যেকেই উক্ত ছেদ বিন্দুগামী ।

⇨16. (x_1, y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুদ্বয় $ax+by+c = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি a_1x+b_1y+c এবং a_2x+b_2y+c রাশিদ্বয় একই চিহ্নবিশিষ্ট হয় ।

⇨17. (x_1, y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুদ্বয় $ax+by+c = 0$ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি a_1x+b_1y+c এবং a_2x+b_2y+c রাশিদ্বয় বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয় ।

⇨18. দুইটি সরলরেখার ঢাল যথাক্রমে m_1 ও m_2 হলে তারা পরস্পর লম্ব হবে যদি $m_1 \times m_2 = -1$ হয় এবং তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $m_1 = m_2$ হয় ।

⇨19. $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি $a_1a_2+b_1b_2 = 0$ হয় এবং তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $(a_1/b_1) = (a_2/b_2)$ হয় ।

⇨20. দুইটি সরলরেখার ঢাল যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী/অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

$\tan\theta$ এর ধনাত্মক মান অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ এবং ঋণাত্মক মান অন্তর্ভুক্ত স্থূল কোণ নির্দেশ করে ।

⇨21. $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ এবং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \pm\frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$

$\tan\theta$ এর ধনাত্মক মান অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ এবং ঋণাত্মক মান অন্তর্ভুক্ত স্থূল কোণ নির্দেশ করে ।

⇨22.ax+by+c1 = 0 রেখার সমান্তরাল কোন রেখার সমীকরণ হবে, ax+by+c2 = 0 অর্থাৎ,শুধু ধ্রুবক পদটির পরিবর্তন হবে ।

⇨23.(x1,y1) বিন্দুগামী এবং ax+by+c = 0 রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, a(x-x1)+b(y-y1) = 0

⇨24.$ax+by+c_1 = 0$রেখার লম্ব কোন রেখার সমীকরণ হবে, $bx-ay+c_2 = 0$ অর্থাৎ,x ও y এর সহগদ্বয় পরস্পর স্থান পরিবর্তন করবে,এদের একটির চিহ্ন পরিবর্তিত হবে এবং ধ্রুবক পদটি পরিবর্তিত হবে ।

⇨25. (x_1,y_1) বিন্দুগামী এবং ax+by+c = 0 রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ, $b(x-x_1) - a(y-y_1) = 0$

➪26. $a_1x+b_1y+c_1 = 0$; $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ এবং $a_3x+b_3y+c_3 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে যদি, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ হয় ।

➪ 27. উক্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{D^2}{2C_1C_2C_3}$

যেখানে, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং C_1, C_2 , C_3 যথাক্রমে c_1, c_2, c_3 এর সহগুণক ।

➪28. $ax+by+c = 0$ সরলরেখা থেকে (x1,y1) বিন্দুর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

➪29. দুইটি সমান্তরাল রেখা $ax+by+c_1 = 0$ ও $ax+by+c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

➪30. $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ,

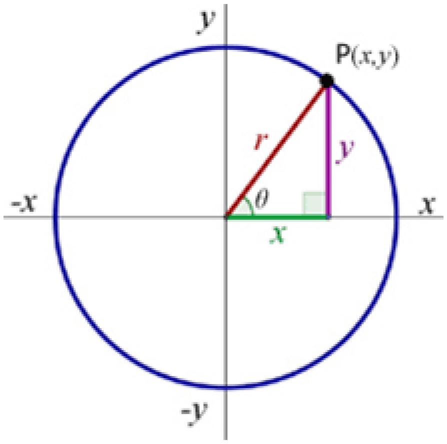
$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

1. $a_1a_2+b_1b_2 > 0$ হলে + চিহ্নধারী সমীকরণটি স্থূলকোণের এবং - চিহ্নধারী সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে ।
2. $a_1a_2+b_1b_2 < 0$ হলে + চিহ্নধারী সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের এবং – চিহ্নধারী সমীকরণটি স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে ।

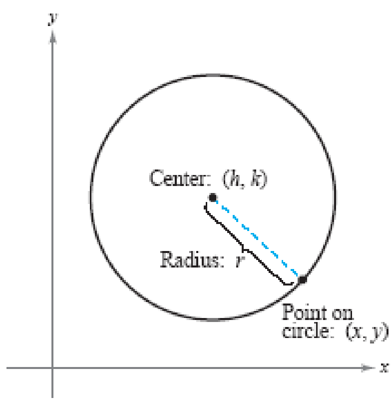
বৃত্ত (Circle)

➯১. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু (0,0) এবং ব্যাসার্ধ r তার সমীকরণ।

$$x^2+y^2 = ry^2$$



➯২. যে বৃত্তের কেন্দ্র (h,k) এবং ব্যাসার্ধ r তার সমীকরণ। $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$



Definition of a circle

h=0 হলে কেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+(y-k)^2=k^2$

k=0 হলে কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2+y^2=h^2$

➯ ৩. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

→ যেখানে, বৃত্তের কেন্দ্র ≡ (-g,-f)

এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$

g = 0 হলে কেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত

f = 0 হলে কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত

c = 0 হলে বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী

⇨৪. কোন বৃত্ত x অক্ষকে ছেদ করলে **x অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ** = $2\sqrt{(g^2-c)}$
বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2=c$

কোন বৃত্ত y অক্ষকে ছেদ করলে **y অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ** = $2\sqrt{(f^2-c)}$
বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2=c$

⇨ ৫.কোন বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে তার ব্যাসার্ধ হবে কেন্দ্রের কোটির মান এবং

সমীকরণ হবে, $(x-h)^2+(y-k)^2 = k^2$

⇨৬. কোন বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করলে তার ব্যাসার্ধ হবে কেন্দ্রের ভুজের মান এবং

সমীকরণ হবে, $(x-h)^2+(y-k)^2 = h^2$

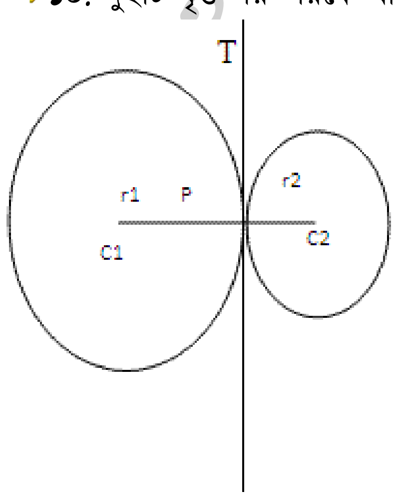
⇨৭, (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত

বৃত্তের সমীকরণ, $(x-x_1)(x-x2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$

⇨৮. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের এককেন্দ্রিক অন্য কোন বৃত্তের সমীকরণ হবে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c_1=0$

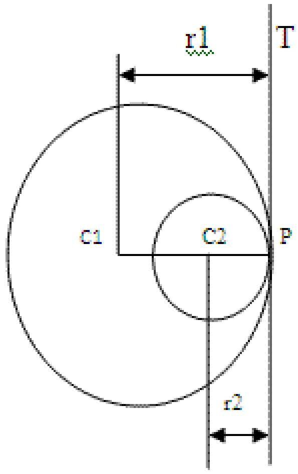
⇨ ৯. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্ত এবং $ax+by+c_1$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2+y^2+2gx+2fy+c+k(ax+by+c_1)=0$

⇨১০. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, তাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল = কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব।



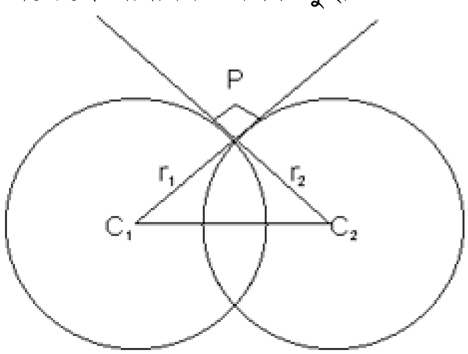
এক্ষেত্রে সাধারণ স্পর্শক তিনটি।

➪১১. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,
তাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরফল = কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

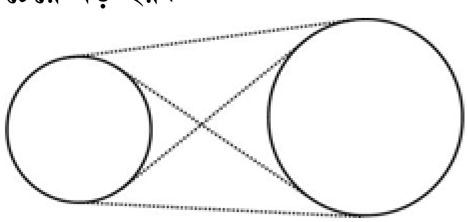


এক্ষেত্রে সাধারণ স্পর্শক একটি।

➪১২. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করবে যদি কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফলের থেকে ছোট হয়।
এক্ষেত্রে সাধারণ স্পর্শক দুইটি।



➪১৩. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ বা স্পর্শ কোনটিই করবে না যদি কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফলের চেয়ে বড় হয়।



এক্ষেত্রে সাধারণ স্পর্শক চারটি।

➪ ১৪. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এবং $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c+k(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)=0}$$

➪১৫. বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে কোন বৃত্তের ওপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

⇨১৬. $y=mx+c$ সরলরেখাটি $x^2+y^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি, $\mathbf{c = \pm r\sqrt{(1+m^2)}}$ হয়

⇨১৭. $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1,y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $\mathbf{xx_1+yy_1=r^2}$

⇨১৮. $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ বৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\mathbf{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_2)+c = 0}$$

⇨ ১৯. বহিঃস্থ কোন বিন্দু (x_1,y_1) থেকে $x^2+y^2 = r^2$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত

স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, $\mathbf{(x^2+y^2-r^2)(x_1{}^2+y_1{}^2-r^2)=(xx_1+yy_1-r^2)^2}$

⇨২০. বহিঃস্থ বিন্দু (x1,y1) থেকে x2+y2+2gx+2fy+c=0 বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\mathbf{(x^2+y^2+2gx+2fy+c)(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c) = \{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c\}}$$

⇨ ২১. বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) থেকে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $= \sqrt{(x^2+y^2-r^2)}$
উক্ত বিন্দু থেকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $= \sqrt{(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)}$

⇨ ২২. $x^2+y^2 = r^2$ বৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $x_1y-y_1x=0$
বৃত্তের অভিলম্ব এর কেন্দ্রগামী।

⇨ ২৩. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$\mathbf{(x_1+g)y-(y_1+f)x+fx_1-gy_1=0}$$

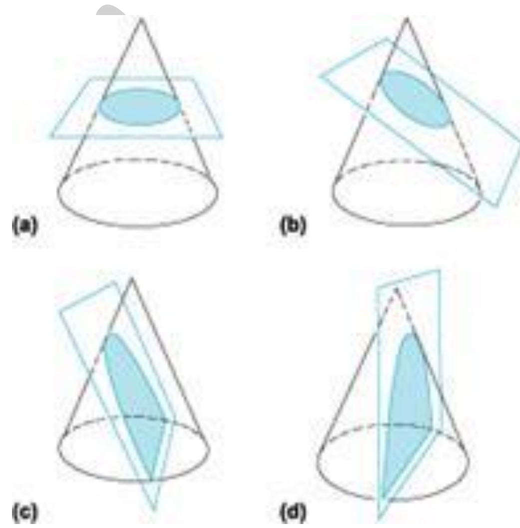
⇨২৪. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$ এবং $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জন্য এর সমীকরণ,

$$\mathbf{(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1) - (x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0}$$

কনিক (Conics)

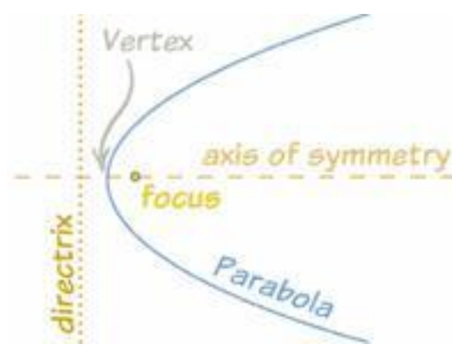
কনিক : কার্তেসীয় সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে যে সব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত একটি ধ্রুবক, তাদের সেই একটি সঞ্চারপথ এবং তাকে কনিক বলা হয় ।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কনিকের উপকেন্দ্র বা ফোকাস (focus) বলে।
নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে কনিকের দিকাক্ষ বা নিয়ামক (directrix) বলে ।
ধ্রুব অনুপাতটিকে উৎকেন্দ্রিকতা (eccentricity) বলা হয় এবং দ্বারা e সূচিত করা হয় ।
e এর বিভিন্ন মানের জন্য সঞ্চারপথের আকৃতি ভিন্ন হয় ।



- ⇨ $e = 0$ হলে সঞ্চারপথ হয় বৃত্ত (circle)
- ⇨ $0 < e < 1$ হলে সঞ্চারপথ হয় উপবৃত্ত (ellipse)
- ⇨ $e = 1$ হলে সঞ্চারপথ হয় পরাবৃত্ত (parabola)
- ⇨ $e > 1$ হলে সঞ্চারপথ হয় অধিবৃত্ত (hyperbola)

- ⇨ পরাবৃত্ত (Parabola) সম্পর্কিত কিছু সংজ্ঞা:



অক্ষরেখা (Axis of symmetry): উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে দিকাক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব রেখাটিকে পরাবৃত্তের অক্ষরেখা বলা হয়।

শীর্ষবিন্দু (Vertex): পরাবৃত্ত ও অক্ষরেখার ছেদ বিন্দুকে পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলা হয়।

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব (Focal distance): উপকেন্দ্র থেকে পরাবৃত্তের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বকে উপকেন্দ্রিক দূরত্ব বা ফোকাস দূরত্ব বলা হয়।

উপকেন্দ্রিক জ্যা (Focal chord): পরাবৃত্তের যে জ্যা উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে তাকে উপকেন্দ্রিক জ্যা বলে।

উপকেন্দ্রিক লম্ব (Latus rectum): উপকেন্দ্রিক জ্যা অক্ষের উপর লম্ব হলে তাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বা নাভিলম্ব বলে।

ভেক্টর (Vector)

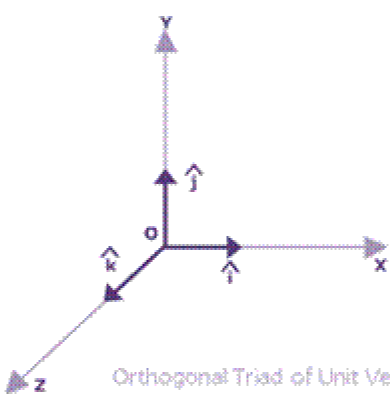
ভেক্টর রাশির নির্দেশনা (Representation of vectors) :

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ কোন ভেক্টর হলে একে নির্দেশ করার জন্য $\vec{r}, \bar{r}, \underline{r}$ প্রভৃতি প্রতীক ব্যবহৃত হয় এবং এর মান যথাক্রমে $|\vec{r}|, |\bar{r}|, \underline{r}$ ইত্যাদি দ্বারা নির্দেশিত হয় । অনেক সময় শুধু r দিয়ে ও $\bar{r}$ ভেক্টরের মান প্রকাশ করাহয় ।

- ⇨ একক ভেক্টর (Unit vector) : কোন ভেক্টর রাশিকে তার মান (Magnitude) দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে বা তার সমান্তরাল দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায় ।

$\bar{A}$ কোন ভেক্টর ও তার দিকে বা সমান্তরালে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\hat{a} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

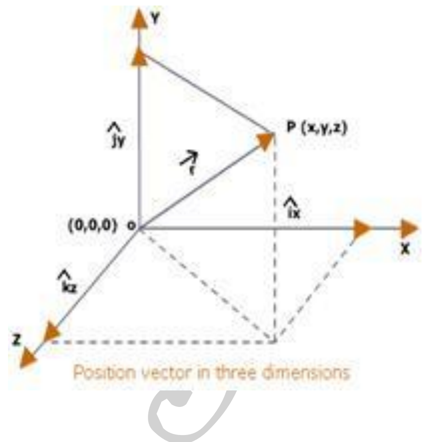
- ⇨ আয়ত একক ভেক্টর (Rectangular unit vectors) : ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় ধনাত্মক x, y এবং z অক্ষের দিকে যথাক্রমে ব্যবহৃত $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে ।



Orthogonal Triad of Unit Vectors

অবস্থান ভেক্টর (Position vector) : প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে ।

O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করেছে $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ অবস্থান ভেক্টর ।



লক্ষণীয়,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k};$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\hat{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

লব্ধি (Resultant) : দুই বা ততোধিক ভেক্টরের সমষ্টিকে একটি ভেক্টর রূপে প্রকাশ করা যায় যাকে ঐ ভেক্টরগুলোর লব্ধি বলে ।

$\bar{A} = Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}$; ও $\bar{B} = Bx\hat{i} + By\hat{j} + Bz\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি

$\bar{A} + \bar{B} = (Ax+Bx)\,\hat{i} + (Ay+By)\,\hat{j} + (Az+Bz)\,\hat{k}$

$\Rightarrow \bar{C} = Cx\,\hat{i} + Cy\hat{j} + Cz\hat{k}$ [$\bar{C}$ = লব্ধি ভেক্টর] $\therefore |\vec{C}| = \sqrt{C_x{}^2 + C_y{}^2 + C_z{}^2}$

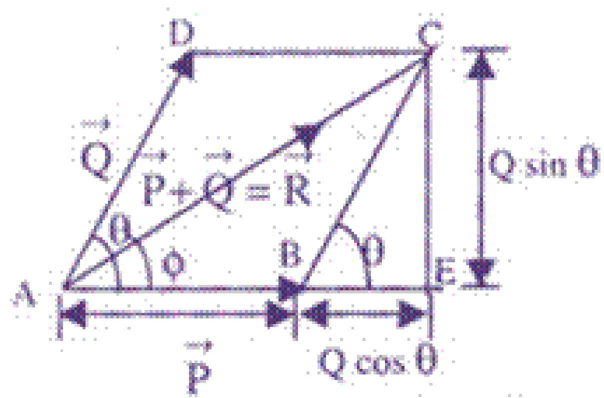
লব্ধির সামান্তরিক সূত্র (Law of parallelogram) : কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর উপর পরস্পর θকোণে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর $\bar{P}$ ও $\bar{Q}$ হলে, তাদের লব্ধি

$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$$

$\bar{R}, \bar{P}$ এর সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}\right)$$



ভেক্টরের স্কেলার বা উট গুণন (Scalar or dot product) : $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ দুটি ভেক্টর ও তাদের মধ্যবর্তী কোণ Θ হলে, তাদের স্কেলার গুণন,

$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB\cos\theta$ $\quad [\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}]$

আবার, $\bar{A} = Ax\hat{i} + Ay\,\hat{j} + Az\hat{k}$;

$\bar{B} = Bx\hat{i} + By\hat{j} + Bz\hat{k}$ হলে, ও $\bar{A} \cdot = AxBx + AyBy + AzBz$

$\bar{A}$ ও $\bar{B}$ পরস্পর লম্ব হলে $\theta = 90°$

$\therefore \bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos 90° = 0$ $\quad [\cos 90° = 0]$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হবে ।

ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন (Vector or cross product) : $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ দুটি ভেক্টর এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, ভেক্টর গুণন

$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B} = \hat{\eta} AB\sin\theta$ $\quad [\bar{A} \times \bar{B} \neq \bar{B} \times \bar{A}]$

$\hat{\eta}$ একটি একক ভেক্টর যা $\bar{C}$ এর দিক নির্দেশ করে ।

আবার, $\bar{A} = Ax\hat{i} + Ay\,\hat{j} + Az\hat{k}$; ও $\bar{B} = Bx\hat{i} + By\hat{j} + Bz\hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & B_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{matrix}$

$\bar{A}$ ও $\bar{B}$ সমান্তরাল হলে, $\theta = 0°$ $\quad \therefore \bar{A} \times \bar{B} = AB \sin 0° = 0$ $\quad [\sin 0° = 0]$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হবে ।

মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় : $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ দুটি ভেক্টর এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \sin^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ বা অভিক্ষেপ (Orthogonal projection) : $\overrightarrow{OP} = \vec{A}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{B}$ পরস্পর θ কোণে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর হলে,

$\Rightarrow \bar{A}$ এর উপর $\bar{B}$ এর অভিক্ষেপ $= B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{A}$

$\Rightarrow \bar{B}$ এর উপর $\bar{A}$ এর অভিক্ষেপ $= A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{B}$