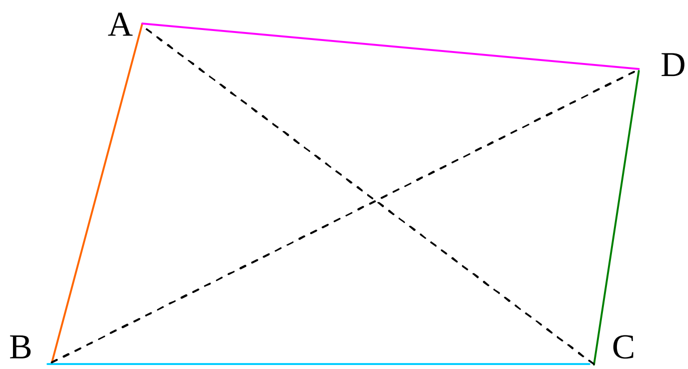
৪। চতুর্ভুজ

চতুর্ভুজ :



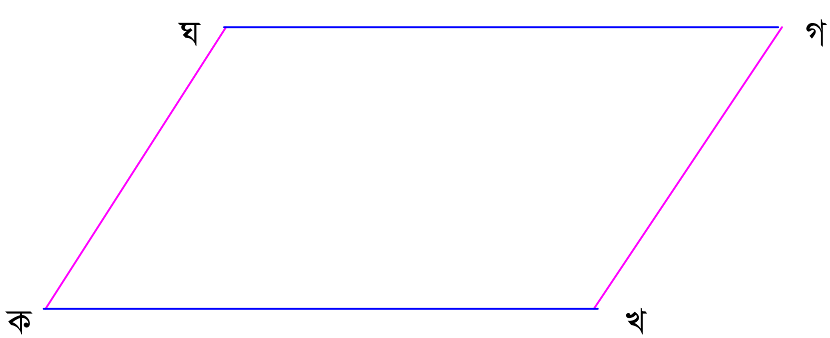
চিত্রঃ চতুর্ভুজ

চারটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি চতুর্ভুজ। উপরের চিত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র। চতুর্ভুজের চারটি বাহু আছে। যে চারটি রেখাংশ দ্বারা ক্ষেত্রটি আবদ্ধ হয়, এ চারটি রেখাংশই চতুর্ভুজের বাহু।

A, B, C ও D বিন্দু চারটির যেকোনো তিনটি সমরেখা নয়। AB, BC, CD ও DA রেখাংশ চারটি সংযোগে ABCD চতুর্ভুজ গঠিত হয়েছে। AB, BC, CD ও DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু। A, B, C ও D চারটি কৌণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু। $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ ও $\angle DAB$ চতুর্ভুজের চারটি কোণ। A ও B শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে C ও D শীর্ষের বিপরীত শীর্ষবিন্দু। AB ও CD পরস্পর বিপরীত বাহু এবং AD ও BC পরস্পর বিপরীত বাহু । এক শীর্ষবিন্দুতে যে দুইটি বাহু মিলিত হয়, এরা সন্নিহিত বাহু। যেমন, AB ও BC বাহু দুইটি সন্নিহিত বাহু। AC ও BD রেখাংশদ্বয় ABCD চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে এর পরিসীমা বলে। ABCD চতুর্ভুজের পরিসীমা (AB + BC + CD + DA) এর দৈর্ঘ্যের সমান। চতুর্ভুজকে অনেক সময় ‘ □ ’ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

চতুর্ভুজের প্রকারভেদ

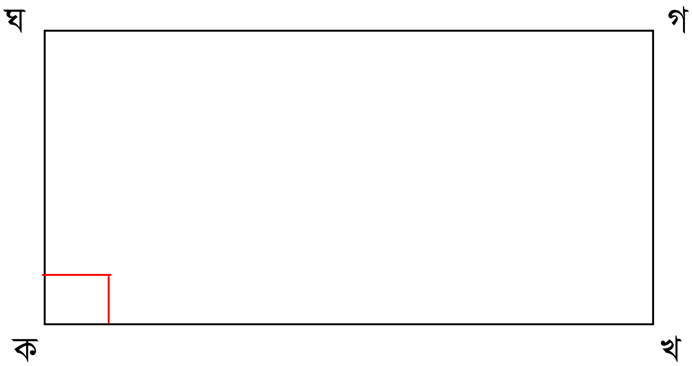
সামন্তরিক :



চিত্রঃ সামান্তরিক

সামান্তরিক : যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান্তরাল, তা সামন্তরিক। সামান্তরিকের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে সামান্তরিকক্ষেত্র বলে।

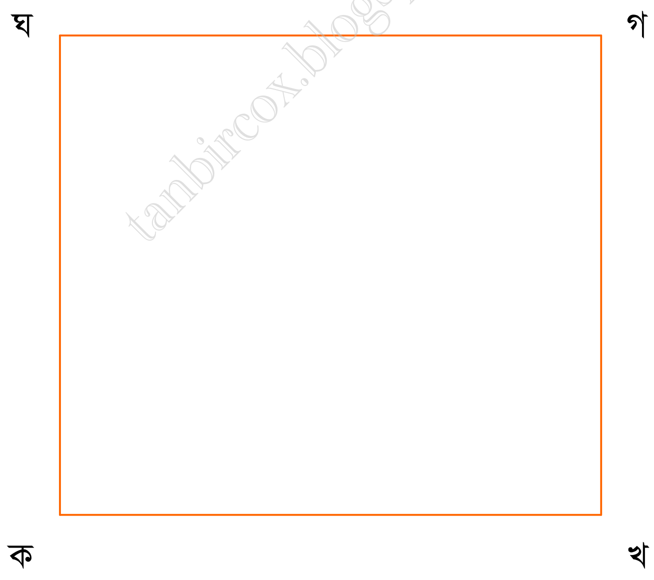
আয়ত :



চিত্রঃ আয়ত

আয়ত : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাই আয়ত। আয়তের চারটি কোণ সমকোণ। আয়তের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলে। উপরের চিত্রে কখগঘ একটি আয়ত।

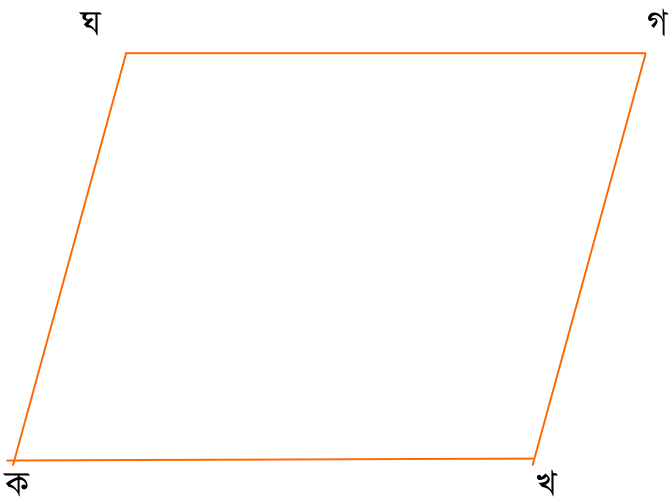
বর্গ :



চিত্রঃ বর্গ

বর্গ : বর্গ এমন একটি আয়ত যার সন্নিহিত বাহুগুলো সমান। অর্থাৎ, বর্গ এমন একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ এবং বাহুগুলো সমান। বর্গের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বর্গক্ষেত্র বলে। উপরের চিত্রে, কখগঘ একটি বর্গ।

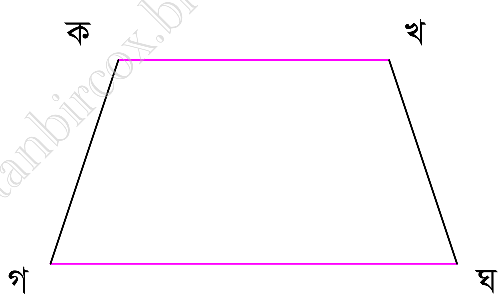
রম্বস :



চিত্রঃ রম্বস

রম্বস : রম্বস এমন একটি সামান্তরিক যার সন্নিহিত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ রম্বসের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল এবং চারটি বাহু সমান। রম্বসের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে রম্বসক্ষেত্র বলে। চিত্রে, কখগঘ একটি রম্বস।

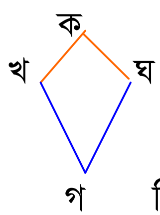
ট্রাপিজিয়াম :



চিত্রঃ ট্রাপিজিয়াম

ট্রাপিজিয়াম : যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল, একে ট্রাপিজিয়াম বলা হয়। ট্রাপিজিয়ামের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র বলে। উপরের চিত্রের কখগঘ একটি ট্রাপিজিয়াম।

ঘুড়ি :

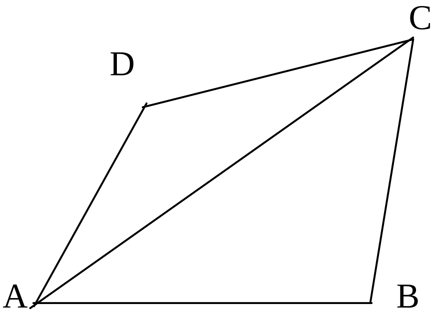


চিত্রঃ ঘুড়ি

ঘুড়ি : যে চতুর্ভুজের দুইজোড়া সন্নিহিত বাহু সমান, একে ঘুড়ি বলা হয়। উপরের চিত্রে একটি ঘুড়ি।

উপপাদ্য ১

চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।



বিশেষ নির্বচন :

মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং AC এর একটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ।

অঙ্কন :

A ও C যোগ করি। AC কর্ণটি চতুর্ভুজটিকে ΔABC ও ΔADC দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে।

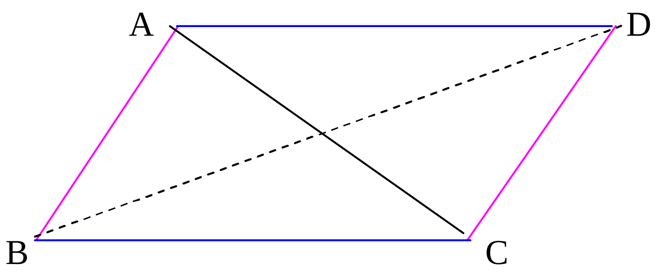
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১। ΔABC এ $\angle BAC + \angle ACB + \angle B = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি ২ সমকোণ]
২। অনুরূপভাবে, ΔDAC এ $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি ২ সমকোণ]
৩। অতএব, $\angle BAC + \angle ACB + \angle B +$ $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = (2+2)$ সমকোণ।	[(১) ও (২) থেকে]
৪। $\angle DAC + \angle BAC = \angle A$ এবং $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$.	[সন্নিহিত কোণের যোগফল] [সন্নিহিত কোণের যোগফল]
৫। সুতারাং , $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ। (প্রমাণিত)	[(৩) নং থেকে]

উপপাদ্য ২
সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন :
মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC ও BD তার দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে,
(ক) AB বাহু = CD বাহু, AD বাহু = BC বাহু
(খ) $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$

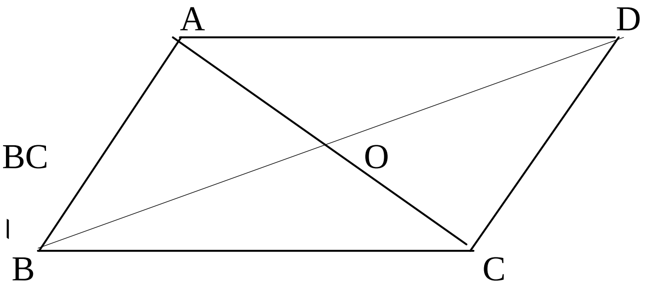


প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB ‖ DC এবং AC তাদের ছেদক, সুতারাং $\angle BAC = \angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(১) BC ‖ AD এবং AC তাদের ছেদক, সুতারাং $\angle ACB = \angle DAC$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন Δ ABC ও Δ ADC এ $\angle BAC = \angle ACD$ $\angle ACB = \angle DAC$ এবং AC বাহু সাধারণ। $\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ অতএব, AB = CD, BC = AD ও $\angle ABC = \angle ADC$ অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta BAD \cong \Delta BCD$ সুতারাং, $\angle BAD = \angle BCD$. (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের কোণ- বাহু- কোণ উপপাদ্য]

কাজ :
১। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে, তা একটি সামান্তরিক।
২। দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজে AB = CD এবং $\angle ABD = \angle BDC$
প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

(১) সমাধান :



বিশেষ নির্বচন :
মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজ এর
AB = CD, AD = BC এবং AB ।। CD, AD ।। BC

প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

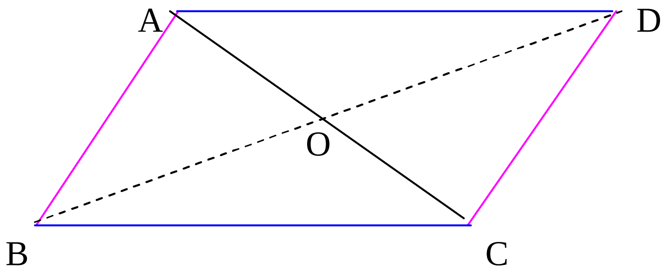
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB ও CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং AC তাদের ছেদক, অতএব, $\angle BAC = \angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(১) AB ও CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং BD তাদের ছেদক, অতএব, $\angle BDC = \angle ABD$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন ΔAOB ও ΔOCD এ $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$	[(১) ও (২) থেকে]
এবং AB = DC	[কল্পনা]
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ তাহলে, OA = OC এবং OB = OD	
(৪) অতএব, ABCD চতুর্ভুজ AB ।। CD, AD ।। BC	[কল্পনা]
AD = BC, AB = CD এবং OA = OC, OB = OD	[কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
সুতারাং, ABCD চতুর্ভুজটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)	

উপপাদ্য ৩
সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন :
মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিকের
AC ও BD কর্ণদ্বয় পরপস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OA = CO, BO = DO.



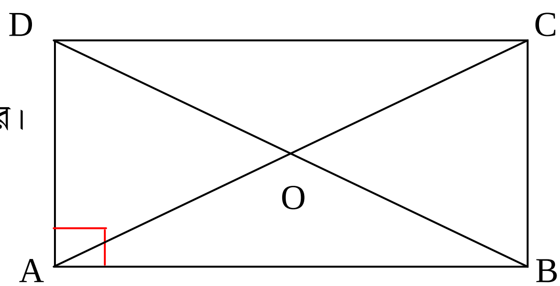
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং AC এদের ছেদক। অতএব, $\angle$ BAC = একান্তর $\angle$DAC	[একান্তর কোণ সমান]
(২) AD ও BC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং BD এদের ছেদক। সুতারাং, $\angle$ BDC = একান্তর $\angle$ABD	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন ΔAOB ও ΔCOD এ $\angle$BAC =$\angle$ACD, $\angle$OBA =$\angle$ODC এবং AB=DC $\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ ADC অতএব, AO = CO, BO = DO. (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের কোণ- বাহু- কোণ উপপাদ্য]

উপপাদ্য ৪
আয়তের কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন :
মনে করি, ABCD একটি আয়তের
AC ও BD কর্ণদ্বয় পরপস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে,
(i) AC = BD
(ii) OA = CO, BO = DO.



প্রমাণ :

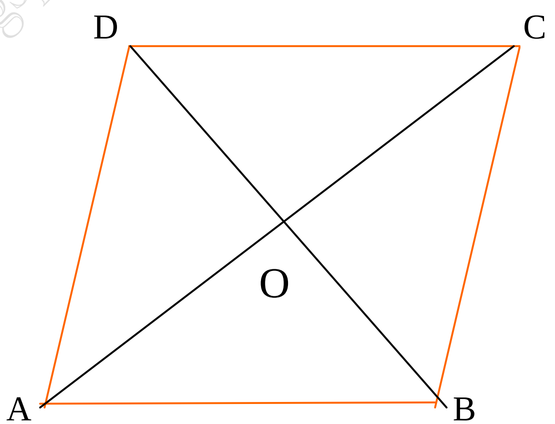
ধাপ	যথার্থতা
(১) আয়ত একটি সামান্তরিক। সুতারাং AO = CO, BO = DO.	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন ΔABD ও ΔACD এ	
$\angle DAB = \angle ADC$,	[প্রত্যেক কোণ সমকোণ]
AB = DC	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরপস্পর সমান]
AD = AD	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	[ত্রিভুজের বাহু- কোণ - বাহু উপপাদ্য]
অতএব, AC = BD. (প্রমাণিত)	

উপপাদ্য ৫

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন :

মনে করি, ABCD একটি রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরপস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 1$ সমকোণ

(ii) OA = CO, BO = DO.

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) রম্বস একটি সামান্তরিক। সুতারাং AO = CO, BO = DO.	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন ΔAOB ও ΔBOC এ	
AB = BC	[রম্বসের বাহুগুলো সমান]
AB = DC	[(১) থেকে]
এবং OB = OB	[সাধারণ বাহু]
অতএব, $\Delta AOB \cong \Delta BOC$	[ত্রিভুজের বাহু - বাহু - বাহু উপপাদ্য]

সুতারাং, $\angle AOB = \angle BOC$

$\angle AOB + \angle BOC = 1$ সরলকোণ = 2 সমকোণ।

$\angle AOB = \angle BOC = 1$ সমকোণ।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle COD = \angle DOA = 1$ সমকোণ। (প্রমাণিত)

কাজ :

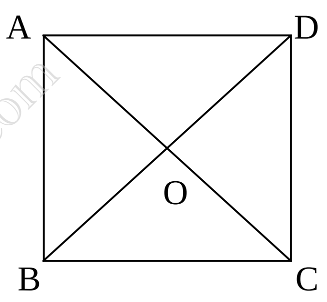
১। দেখাও যে, বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান ও সমদ্বিখণ্ডিত করে।

২। একজন রাজমিস্ত্রী একটি আয়তকার কংক্রিট স্ল্যাব তৈরি করেছেন। তিনি কত বিভিন্ন ভাবে নিশ্চিত হতে পারেন যে তাঁর স্ল্যাবটি সত্যিই আয়তকার?

(১) সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ABCD বর্গের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে,

AC = BD এবং OA = OC, OB = OD

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) বর্গ একটি সামান্তরিক সুতারাং AO = CO, BO = DO	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন, ΔABD ও ΔACD এ $\angle DAB = \angle ADC$ AB = DC এবং AD = AD	 [প্রত্যেকে সমকোণ] [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান] [সাধারণ বাহু]
সুতারাং, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ অতএব, AC = BD (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের বাহু- কোণ- বাহু উপপাদ্য]

অনুশীলনী ৮.১

১। সামান্তরিকের জন্য নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) বিপরীত বাহুগুলো অসমান্তরাল (খ) একটি কোণ সমকোণ হলে, তা আয়ত
(গ) বিপরীত বাহুদ্বয় অসমান (ঘ) কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান

২। নিচের কোনটি রম্বসের বৈশিষ্ট্য?

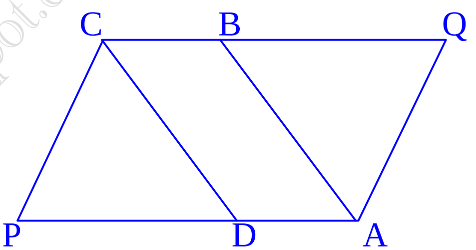
(ক) কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান (খ) প্রত্যেক কোণই সমকোণ
(গ) বিপরীত কোণদ্বয় অসমান (ঘ) প্রত্যেকটি বাহুই সমান

৩। i. চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।
ii. আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান হলে তা একটি বর্গ।
iii. প্রত্যেকটি রম্বস একটি সামান্তরিক।

উপরের তথ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক?

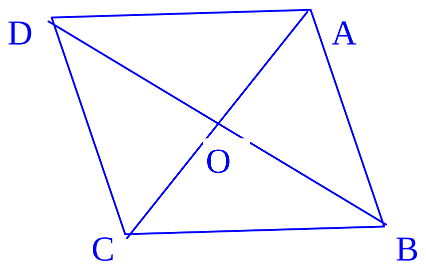
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৪। PAQC চতুর্ভুজের PA = CQ এবং PA ।। CQ.
$\angle A$ ও $\angle C$ সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে AB ও CD হলে
ABCD ক্ষেত্রটির নাম কী?



(ক) সামান্তরিক (খ) রম্বস (গ) আয়ত (ঘ) বর্গ

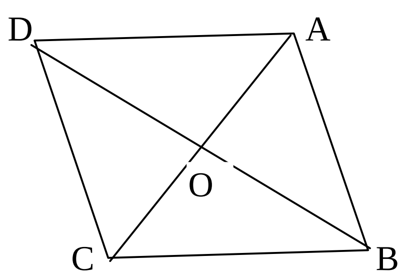
৫। দেওয়া আছে ΔABC এর মধ্যমা BO কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন BO = OD হয়।
প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

দেওয়া আছে, ΔABC এর মধ্যমা BO কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন BO = OD হয়।
প্রমাণ করতে হবে যে,
ABCD একটি সামান্তরিক।



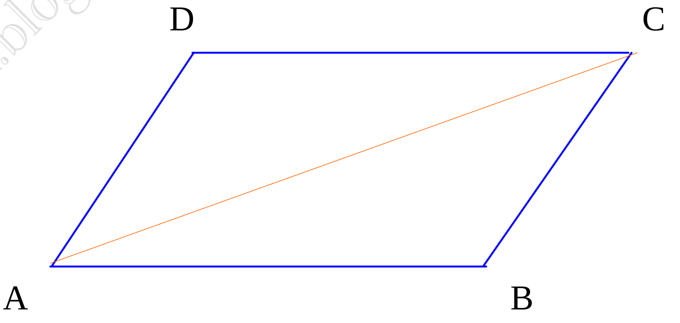
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB ও ΔCOD এর মধ্যে $BO = OD$ $OA = OC$ $\angle AOB =$ বিপরীত$\angle COD$ $\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ সুতারাং, $AB = CD$	 [কল্পনা] [O, AC এর মধ্যবিন্দু] [ত্রিভুজের বাহু - কোণ - বাহু উপপাদ্য]
(২) অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $AD = BC$ $\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)	

৬। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের একটি কর্ণ একে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :
মনেকরি, ABCD একটি সামান্তরিক।
এর একটি কর্ণ AC।
প্রমাণ করতে হবে যে, AC কর্ণটি ABCD সামান্তরিকটিকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে।
অর্থাৎ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$।



প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $AB \parallel CD$ এবং AC তাদের ছেদক $\therefore \angle BAC = \angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(২) আবার, $BC \parallel AD$ এবং AC তাদের ছেদক $\therefore \angle ACB = \angle DAC$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন, ΔABC ও ΔADC এ $\angle BAC = \angle ACD$ $\angle ACB = \angle DAC$ $AC = AC$	 [সাধারণ বাহু]

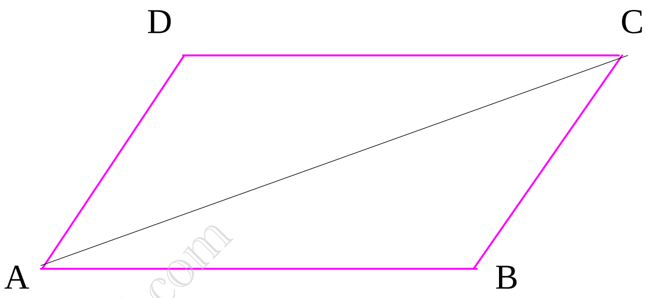
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিকটিকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে। (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের কোণ - বাহু - কোণ উপপাদ্য]

৭। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে তা একটি সামান্তরিক।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ABCD একটি চতুর্ভুজ।
এর AD = BC, AB = CD এবং
AD || BC, AB || CD হলে



প্রমাণ করতে হবে যে,
চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : চতুর্ভুজটির কর্ণ AC অঙ্কন করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AD || BC এবং AC তাদের ছেদক $\therefore \angle ACB = \angle CAD$	[একান্তর কোণ সমান]
(২) অনুরূপভাবে, BC || AD এবং AC তাদের ছেদক $\therefore \angle BAC = \angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন, ΔABC ও ΔADC এ $\angle ACB = \angle CAD$ $\angle BAC = \angle ACD$ AC = AC $\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ $\therefore \angle ABC = \angle ADC$	[সাধারণ বাহু] [ত্রিভুজের কোণ - বাহু - কোণ উপপাদ্য]
(৪) অনুরূপভাবে, $\angle BAC = \angle BCD$ $\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)	

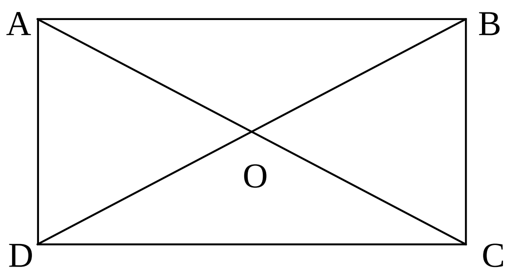
৮। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে, তা একটি আয়ত।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ABCD সামান্তরিকের কর্ণ AC = কর্ণ BD

প্রমাণ করতে হবে যে,
ABCD একটি আয়ত।



প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC ও Δ ADBএর মধ্যে BC = AD	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]
AC = BD	[কল্পনা]
AB = AB	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADB$ $\therefore \angle ABC = \angle BAD$	[কোণ- বাহু- বাহু উপপাদ্য]
(২) আবার, যেহেতু AD ।। BC এবং AB তাদের ছেদক $\angle ABC + \angle BAD = 2$ সমকোণ	[ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ সমান]
$\therefore \angle ABC = \angle BAD = 1$ সমকোণ $\therefore$ ABCD একটি আয়ত (প্রমাণিত)	

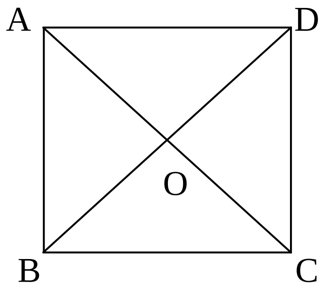
৯। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে এবং পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, তা একটি বর্গ।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণ পরস্পর সমান এবং পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

অর্থাৎ AC = BD, OA = OC, OB = OD এবং
$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD$



প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি বর্গ।

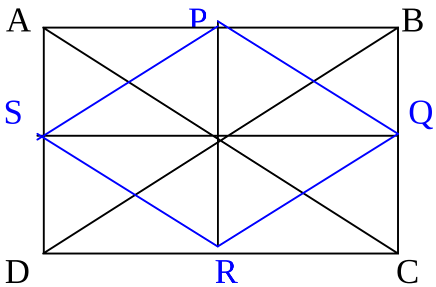
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB ও ΔAOD এতে	
$OB = OD$	[কল্পনা]
অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle AOD$	[সমকোণ]
$AO = AO$	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOD$	[ত্রিভুজের বাহু- কোণ - বাহু উপপাদ্য]
$\therefore AB = AD$	
(২) অনুরূপভাবে, ΔAOB ও ΔBOC এ প্রমাণ করা যায় যে, $AB = BC$	
(৩) এবং ΔBOC ও ΔCOD এ প্রমাণ করা যায় যে, $BC = CD$	
$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজে $AB = BC = CD = AD$	[(১), (২) ও (৩) থেকে]
(৪) আবার, ΔAOB এ $\angle AOB = 90^0$	
এবং $OA = OB$	[কল্পনা]
$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^0$	[সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]
(৫) অনুরূপভাবে, ΔAOD এ $\angle OAD = \angle ODA = 45^0$	
$\therefore \angle BAD = \angle OAB + \angle OAD = 45^0 + 45^0 = 90^0$	
$\therefore$ ABCD একটি বর্গ। (প্রমাণিত)	

১০। প্রমাণ কর যে, আয়তের সন্নিহিত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহের যোগে যে চতুর্ভুজ হয়, তা একটি রম্বস।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :



মনেকরি, ABCD আয়ত। P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও AD এর মধ্যবিন্দু। P, Q; Q, R; R, S ও S, P যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি রম্বস।

অঙ্কন : A, C; B, D; এবং S, Q; P, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABD ও ΔBCD এর সন্নিহিত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ যথাক্রমে PS ও QR। সুতারাং, PS ।। BD এবং QR ।। BD আবার, $PS = \frac{১}{২} BD$ আবার, $QR = \frac{১}{২} BD$	[ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য তার অর্ধেক]
∴ PS = QR এবং PS ।। QR	[সমান্তরাল রেখার সমান্তরাল রেখা পরস্পর সমান্তরাল]
(২) অনুরূপভাবে, ΔABC ও ΔADC নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে, PQ = SR এবং PQ ।। SR ∴ PQRS একটি রম্বস (প্রমাণিত)	

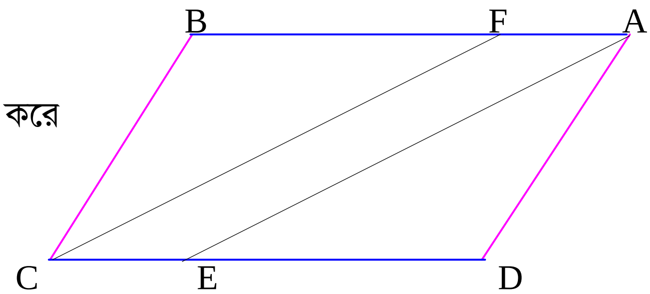
১১। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ABCD একটি সামান্তরিক।
∠A ও ∠C এর সমদ্বিখণ্ডক AE ও CF
যথাক্রমে DC ও AB কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে

প্রমাণ করতে হবে যে, AE ।। CF।



প্রমাণ :

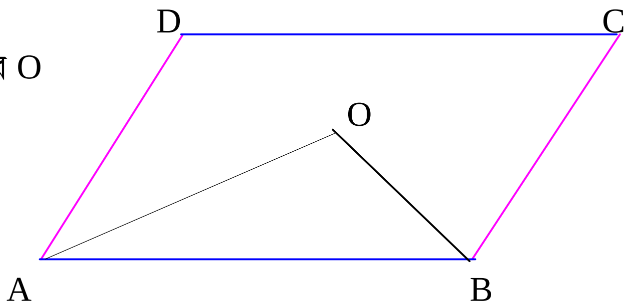
ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AE, ∠BAD এর সমদ্বিখণ্ডক $\therefore \angle EAF = \frac{১}{২} \angle BAD$	[কল্পনা]
(২) অনুরূপভাবে, $\angle ECF = \frac{১}{২} \angle BCD$ $\therefore \angle EAF = \angle ECF$	[কল্পনা]
(৩) আবার, AB ।। CD এবং AE এদের ছেদক $\angle AED = \angle EAF$ $\therefore \angle AED = \angle ECF$ কিন্তু, এরা অনুরূপ কোণ। ∴ AECF একটি সামান্তরিক। ∴ AE ।। FC (প্রমাণিত)	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল] [একান্তর কোণ] [(২) থেকে]

১২। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর $\angle BAD$ ও $\angle ABC$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

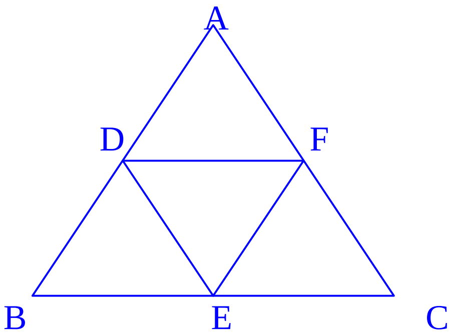


প্রমাণ করতে হবে যে, AO ও BO পরস্পরের উপর লম্ব।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AO, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক $\angle OAB = \frac{১}{২}\angle BAD$	[কল্পনা]
(২) অনুরূপভাবে, $\angle OBA = \frac{১}{২}\angle ABC$	
(৩) আবার, যেহেতু AD ।। BC এবং AB ছেদক। $\therefore \angle BAD + \angle ABC =$ দুই সমকোণ	[ছেদকের একই পাশে অন্তঃস্থ কোণ বলে]
বা $\frac{১}{২}\angle BAD + \frac{১}{২}\angle ABC =$ এক সমকোণ। বা, $\angle OAB + \angle OBA =$ এক সমকোণ।	[(১) ও (২) থেকে]
(৪) এখন, ΔAOB এ, $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 2$ সমকোণ। বা, $\angle AOB + 1$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ। বা, $\angle AOB = 2$ সমকোণ $- 1$ সমকোণ। $\therefore \angle AOB = 1$ সমকোণ। অর্থাৎ, AO ও BO পরস্পরের উপর লম্ব (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

১৩। চিত্রে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। D, E ও F যথাক্রমে AB, BC ও AC এর মধ্যবিন্দু।



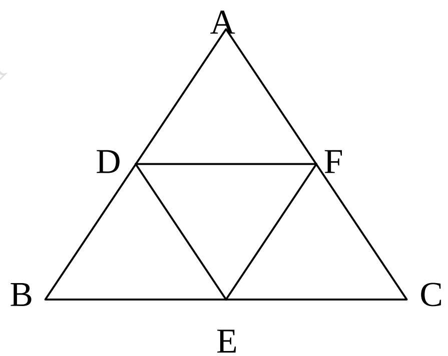
(ক) প্রমাণ কর যে,

$\angle BDF + \angle DFE + \angle FEB + \angle EBD =$ চার সমকোণ।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, চিত্রে ABC একটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ। D, E, F যথাক্রমে AB, BC ও AC এর মধ্যবিন্দু।



প্রমাণ করতে হবে যে,

$\angle BDF + \angle DFE + \angle FEB + \angle EBD =$ চার সমকোণ।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔBDE এ, $\angle BDE + \angle BED + \angle EBD =$ দুই সমকোণ	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
(২) ΔDEF এ, $\angle DEF + \angle DFE + \angle EDF =$ দুই সমকোণ	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
$(\angle BDE + \angle BED + \angle EBD +$ $\angle DEF + \angle DFE + \angle EDF) =$ চার সমকোণ	[(১) ও (২) থেকে]
$\angle BDF + \angle DFE + \angle FEB + \angle EBD =$ চার সমকোণ। (প্রমাণিত)	

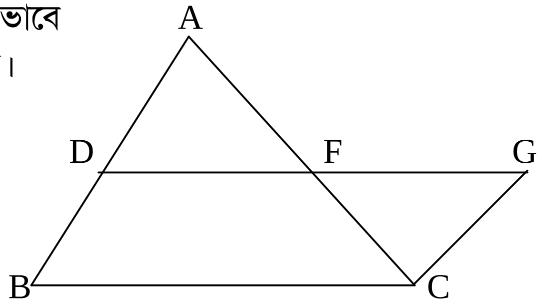
(খ) প্রমাণ কর যে,

DF ।। BC এবং DF = $\frac{১}{২}$BC

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, ΔABC এর D ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্য বিন্দু। D ও F যোগকরে G পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন DF = FG হয়। G, C যোগকরি।



প্রমাণ করতে হবে যে,

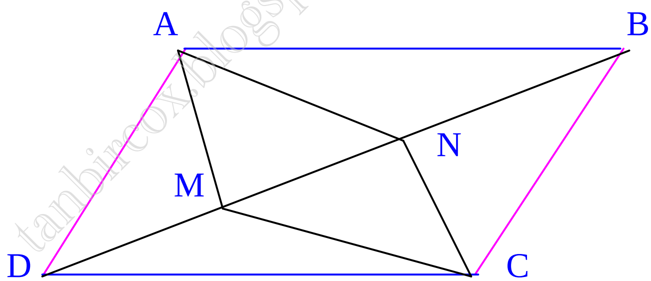
DF ।। BC এবং DF = $\frac{১}{২}$BC

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔADF ও ΔCGF এ,	
DF = FG	[অঙ্কনানুসারে]
AF = CF	[কল্পনা]
এবং অন্তভুক্ত $\angle$DFA = অন্তভুক্ত $\angle$CFG	[বিপ্রতীপ কোণ সমান]
$\therefore$ ΔDEF $\cong$ ΔCGF	[বাহু- কোণ- বাহু উপপাদ্য]
(২) AD = CG	[কল্পনা]
এবং $\angle$DAF =$\angle$FCG	[একান্তর কোণ সমান]
বা, BD = CG	
বা, $\angle$DAC =$\angle$ACG	
কিন্তু কোণদ্বয় AD ও CG বাহুর AC ছেদক দ্বারা উৎপন্ন একান্তর কোণ।	
$\therefore$ DA ।। CG	
বা, BA ।। CG	
(৩) এখন BCGD চতুর্ভুজের BD = CG	
এবং BD ।। CG	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল]
$\therefore$ BCGD একটি সামান্তরিক।	
$\therefore$ DG ।। BC এবং DG = BC	

(৪) DF + FG = BC বা, DF + DF = BC বা, 2DF = BC $\therefore$ DF = $\frac{১}{২}$BC সুতারাং, DF ।। BC এবং DF = $\frac{১}{২}$ BC (প্রমাণিত)	[(১) থেকে]

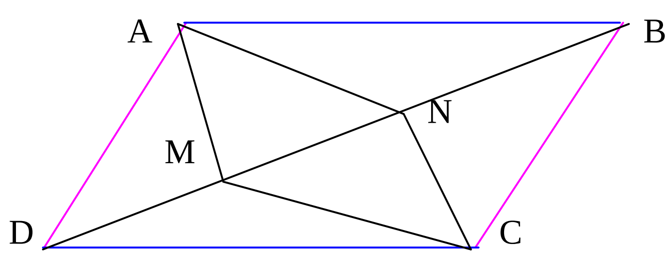
১৪. দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের AM ও CN, DB এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, ANCM একটি সামান্তরিক।



সমাধান :

বিশেষ নির্বচন :
দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিক AM ও CN, BD উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, ANCM একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔADM ও ΔBCN এর, $\angle ADM = \angle NBC$ $\angle AMD = \angle BNC$ এবং $AD = BC$ $\therefore \Delta ADM \cong \Delta BCN$ $\angle MAD = \angle BCN$	 [একান্তর কোণ] [$AM \perp BD, CN \perp BD$] [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান] [কোণ - বাহু - কোণ উপপাদ্য]
(২) অনুরূপভাবে, ΔABN ও ΔCDM এর মধ্যে $\angle BAN = \angle MCD$ $\therefore \angle BAD - (\angle DAM + \angle BAN)$ $= \angle BCD - (\angle NCB + \angle MCD)$ $\therefore \angle MAN = \angle MCN$ $\therefore \angle AMC = \angle ANC$	
(৩) অর্থাৎ ANCM চতুর্ভুজের $\angle MAN = \angle MCN$ $\angle AMC = \angle ANC$ $\therefore$ NCMA একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)	[(১) থেকে]

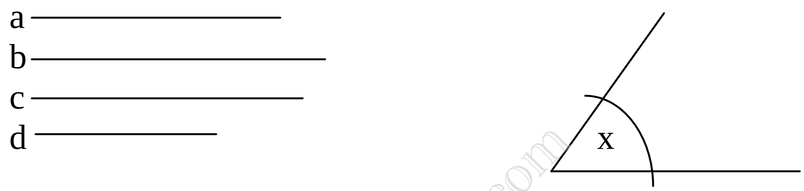
অষ্টম অধ্যায় 8.2 চতুর্ভুজ অঙ্কন

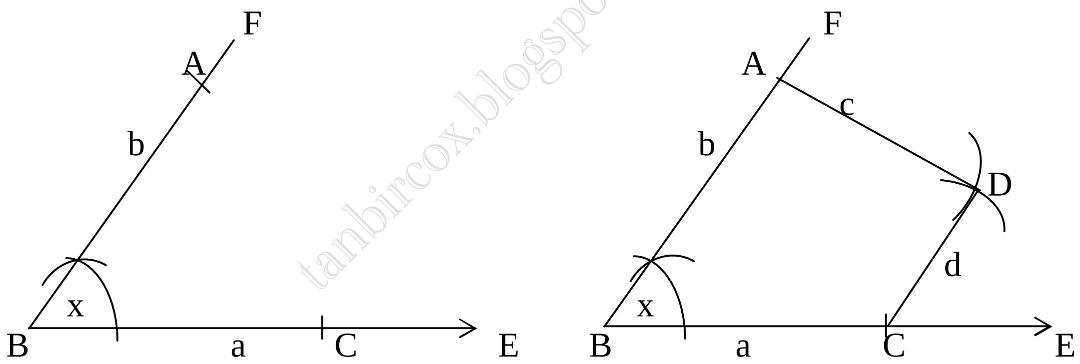
সম্পাদ্য

সম্পাদ্য ১

কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি,
একটি চতুর্ভুজের চার বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং a ও b বাহুদ্বয়ের অন্তভুক্ত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।





অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যে কোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকি।

(২) BF থেকে BA = b নিই। A ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। তারা পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A ও B এবং C ও D যোগ করি। তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ :

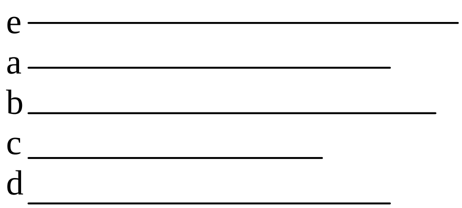
অঙ্কন অনুসারে, $AB = b$, $BC = a$, $AD = c$, $CD = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$
$\therefore ABCD$ - ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

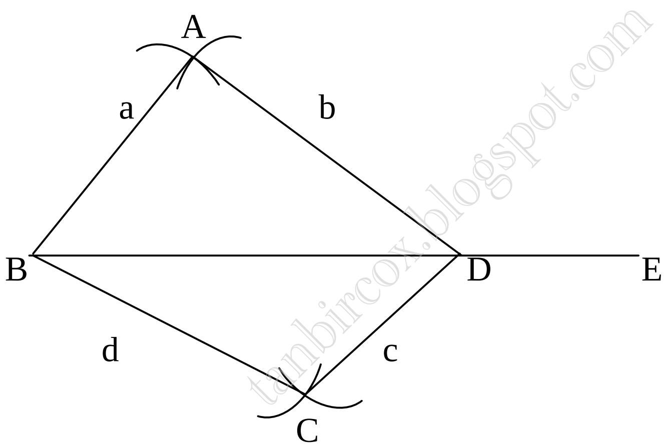
সম্পাদ্য ২

কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি,

একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > e$ এবং $c + d > e$





অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD = e নিই। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) আবার, B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে d ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যেদিকে A আছে তার বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি। তাহলে, ABCD- ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ :

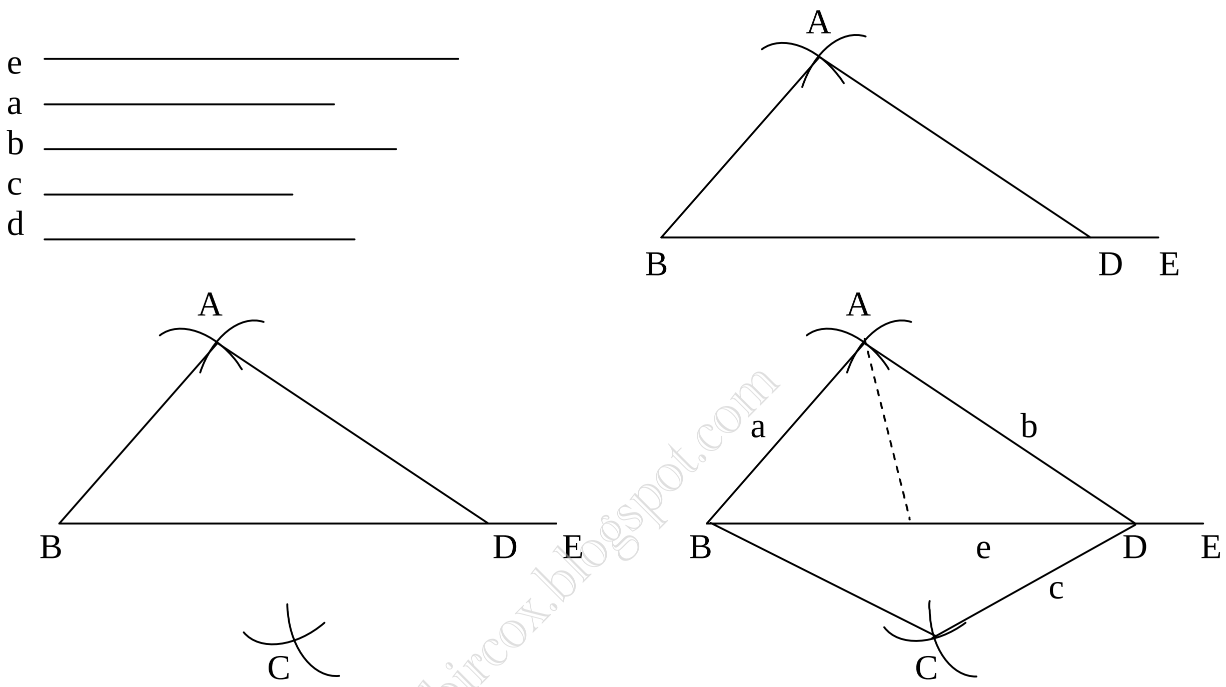
অঙ্কন অনুসারে, AB = a, AD = b, BC = d, CD = c এবং কর্ণ BD = e

সুতারাং, ABCD- ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য ৩

কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি,
একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d, e দেওয়া আছে। যেখানে $a + b > e$ এবং $b + c > d$। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD =e নিই। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) আবার, D ও A কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যেদিকে A রয়েছে এর বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি। তাহলে, ABCD - ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

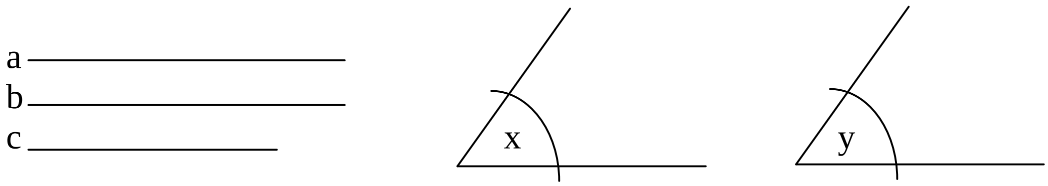
প্রমাণ :

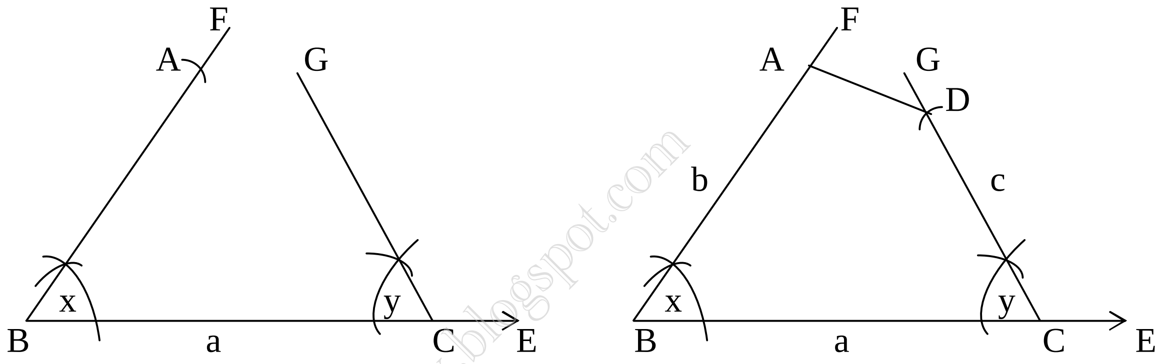
অঙ্কন অনুসারে, AB = a, AD = b, CD = c এবং কর্ণ BD = e ও AC = d
সুতারাং, ABCD - ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য ৪

কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি,
একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a, b, c এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ এবং a ও c বাহুর অন্তরভুক্ত কোণ $\angle y$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।





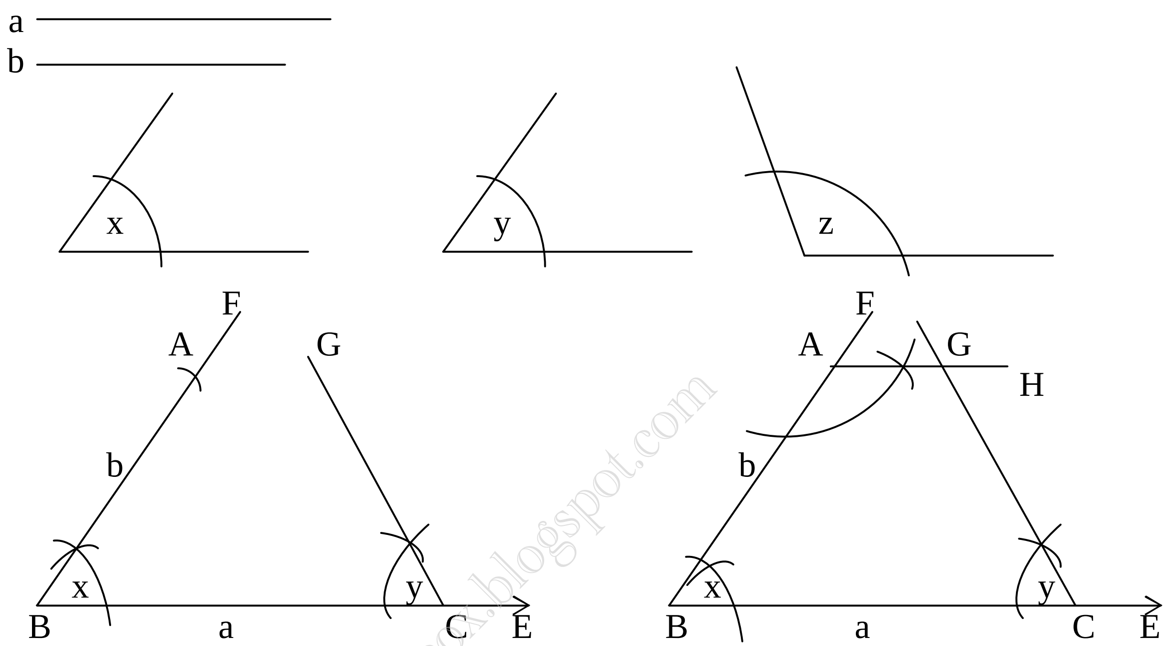
অঙ্কনের বিবরণ :
যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC=a নিই। B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি। BF থেকে BA = b এবং CG থেকে CD = c নিই। A, D যোগ করি। তাহলে, ABCD - ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ :
অঙ্কন অনুসারে, AB = b, BC = a, CD = c, $\angle ABC = \angle x$ ও $\angle DCB = \angle y$
সুতারাং, ABCD - ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য ৫

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি,
একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু a, b এবং তিনটি কোণ $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিই। B ও C $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি। BF থেকে BA = b নিই। A বিন্দুতে $\angle z$ এর সমান করে $\angle BAH$ অঙ্কন করি। AH ও CG পরস্পরকে D ছেদ করে। তাহলে, ABCD - ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

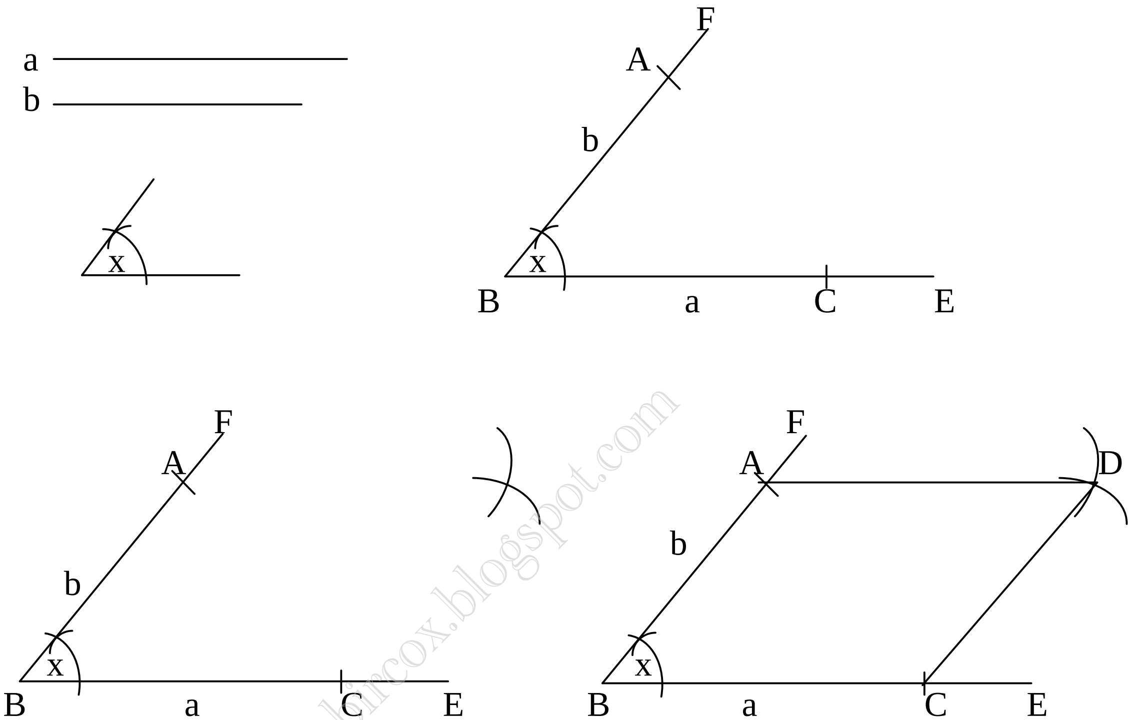
প্রমাণ :

অঙ্কন অনুসারে, AB = b, BC = a, $\angle ABC = \angle x$ $\angle DCB = \angle y$ ও $\angle BAD = \angle z$
সুতারাং, ABCD - ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য ৬

কোনো সামন্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। সামন্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ অঙ্কন করি। BF থেকে b এর সমান BA নিই। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও C, D যোগ করি। তাহলে ABCD - ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ :

A,C যোগ করি। ΔABC ও ΔADC এ AB = CD = b, AD = BC = a এবং AC বাহু সাধারণ।

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta DCA$

অতএব, $\angle BAC = \angle DCA$ কিন্তু, কোন দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore AB \parallel CD$ অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $BC \parallel AD$

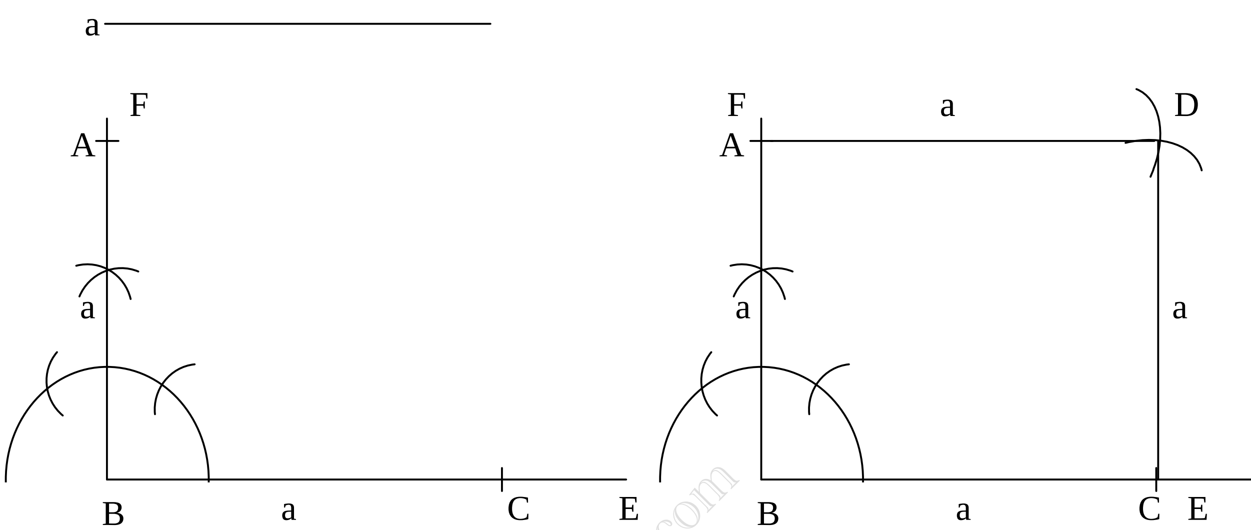
সুতারাং ABCD একটি সামান্তরিক। আবার অঙ্কন অনুসারে $\angle ABC = \angle x$

অতএব, ABCD - ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ৭

কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।

মনে করি, a কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। বর্গটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিই। B বিন্দুতে BF $\perp$ BC আঁকি। BF থেকে BA = a নিই। A ও C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A ও D এবং C ও D যোগ করি। তাহলে ABCD - ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

প্রমাণ :

ABCD চতুর্ভুজের AB = BC = CD = DA =a এবং $\angle ABC$ = এক সমোকোণ। সুতারাং, এটি একটি বর্গ। অতএব ABCD - ই নির্ণেয় বর্গ।

অনুশীলনী ৮.২

১। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে কয়টি অনন্য নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন?

(ক) 3টি (খ) 4টি (গ) 5টি (ঘ) 6টি

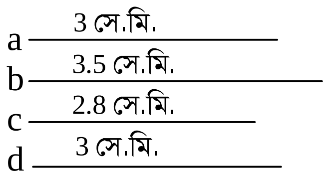
২। i দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকলে আয়ত আঁকা যায়।
ii চারটি কোণ দেওয়া থাকলে একটি চতুর্ভুজ আঁকা যায়।
iii বর্গের একটি বাহু দেওয়া থাকলে বর্গ আঁকা যায়।

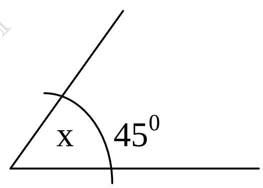
উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩। নিম্নের প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

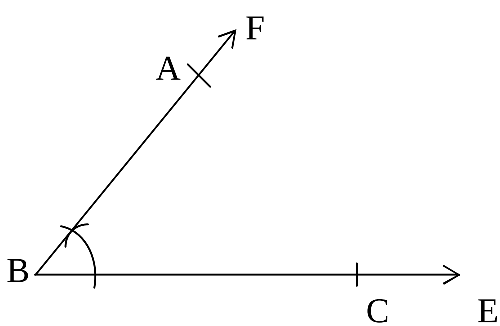
(ক) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.8 সে.মি., ও 3 সে.মি. এবং কোণ 45^o ।





সমাধান :

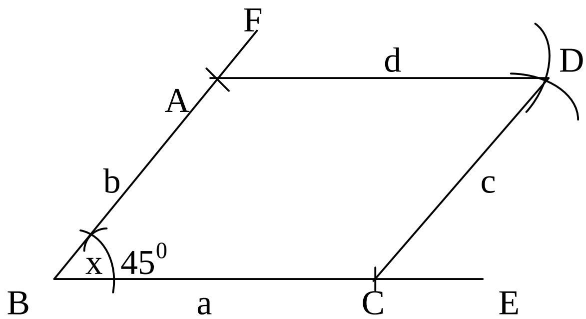
বিশেষ নির্বচন : মনেকরি, চতুর্ভুজের চারটি বাহু a, b, c ও d এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.8 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং a ও b এর অন্তরভুক্ত $\angle x = 45^0$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



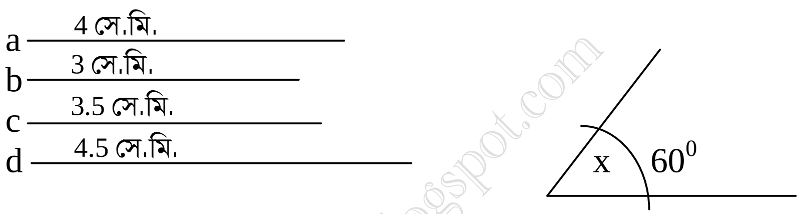
অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC=a কেটে নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকি। BF থেকে BA = b নিই।

(২) এখন A ও C বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

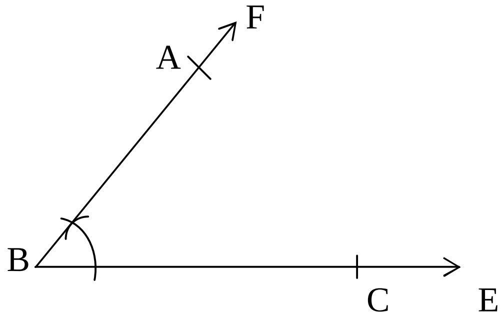


(খ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., ও 4.5 সে.মি. এবং কোণ 60^o ।



সমাধান :

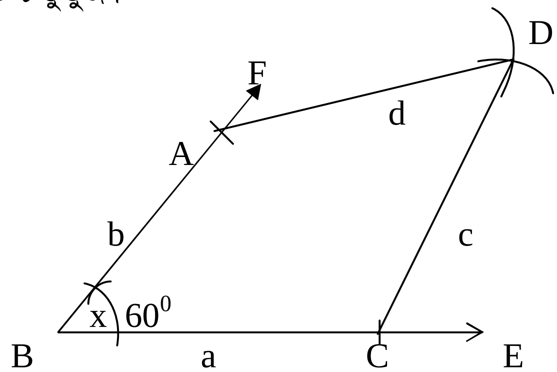
বিশেষ নির্বচন : মনেকরি, চতুর্ভুজের চারটি বাহু a, b, c ও d এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. এবং a ও b এর অন্তরভুক্ত $\angle x = 60^0$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC=a কেটে নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকি। BF থেকে BA = b নিই।

(২) এখন A ও C বিন্দুদ্বয়কে কেদ্র করে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

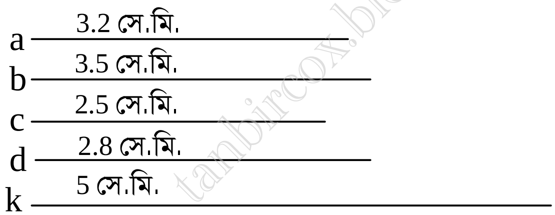


(গ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি., ও 2.8 সে.মি. এবং কর্ণ 5 সে.মি. ।

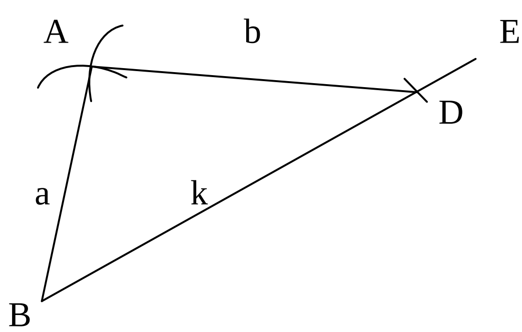
সমাধান :

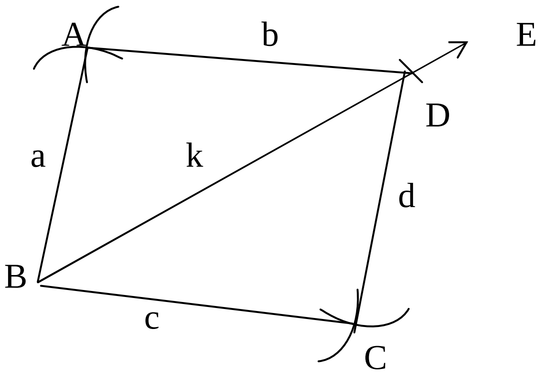
বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, চতুর্ভুজের চারটি বাহু a, b, c ও d এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.2 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 2.8 সে.মি. এবং কর্ণ k এর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :





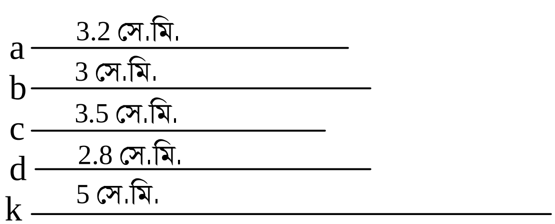
(১) যেকোনো রশ্মি BE হতে BD = k নিই। B ও D বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর এক পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) আবার B ও D বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A আছে তার বিপরীত পাশে আরো দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এ বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। A, B; A, D; C, D এবং B, C যোগ করি। তাহলে ABCD- ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(ঘ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., ও 2.8 সে.মি. এবং কর্ণ 5 সে.মি. ।

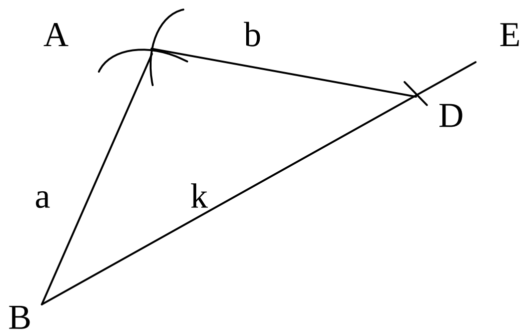
সমাধান :

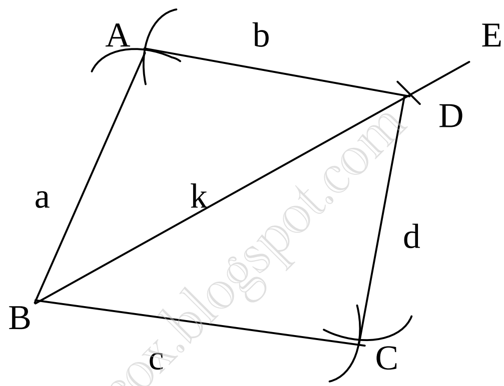
বিশেষ নির্বচন :

মনেকরি, চতুর্ভুজের চারটি বাহু a, b, c ও d এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.2 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি. ও 2.8 সে.মি. এবং কর্ণ k এর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :



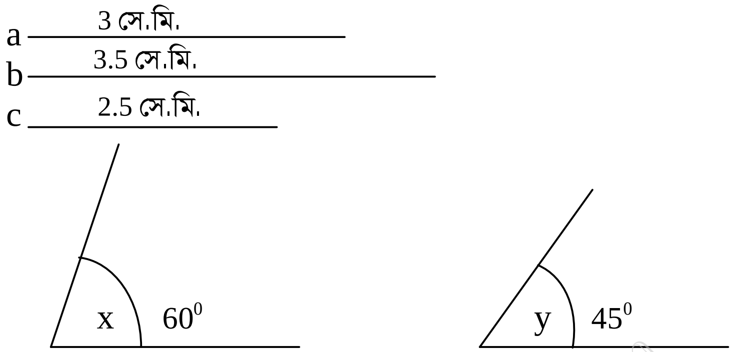


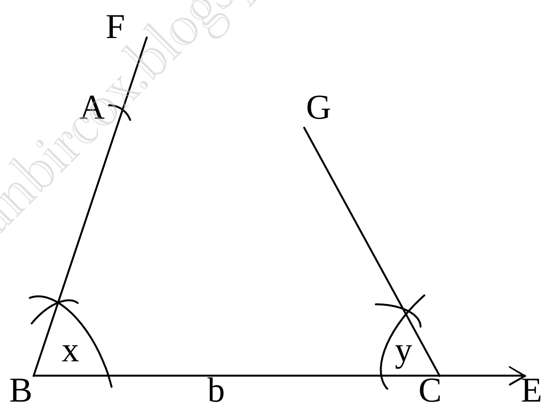
(১) যেকোনো রশ্মি BE হতে BD = k নিই। B ও D বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর এক পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) আবার B ও D বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A আছে তার বিপরীত পাশে আরো দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এ বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। A, B; A, D; C, D এবং B, C যোগ করি। তাহলে ABCD- ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

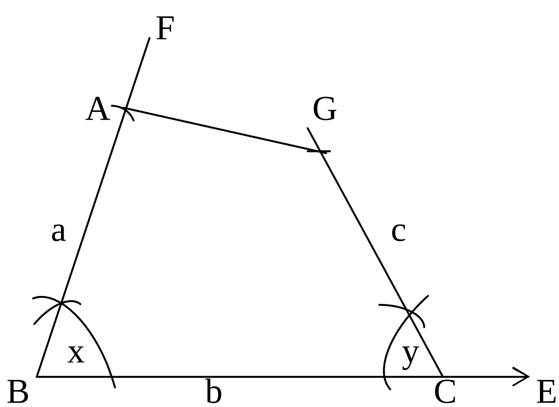
(ঙ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি., এবং কোণ 60^o ও 45^o ।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a, b ও c এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.2 সে.মি., 3 সে.মি. 3.5 সে.মি. ও 2.5 সে.মি. এবং b বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 60^0$ ও $\angle y = 45^0$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।







অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC = b নিই।

(২) B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি।

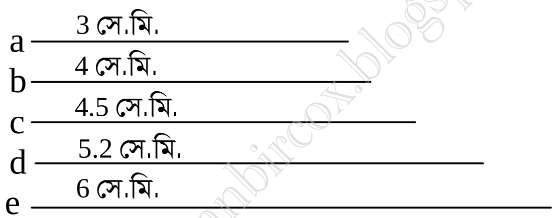
(৩) BF থেকে BA = a এবং CG থেকে CD = c নিই।

(৪) A ও D যোগ করি। তাহলে, ABCD - ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

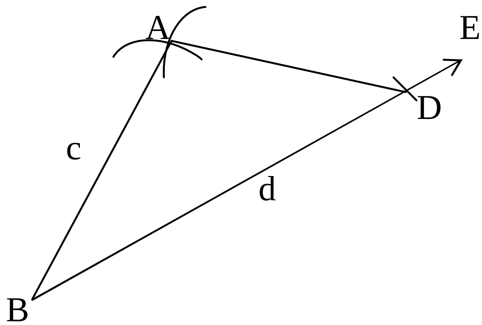
(চ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 4 সে.মি., 4.5 সে.মি., এবং দুইটি কর্ণ 5.2 সে.মি. ও 6 সে.মি. ।

সমাধান :

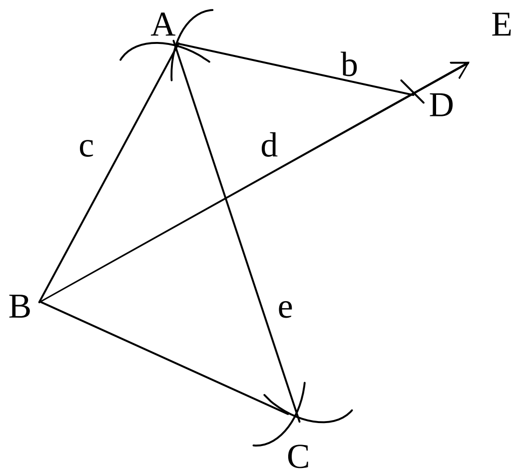
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a, b ও c - এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি., ও 4.5 সে.মি., এবং কর্ণ d ও e - এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5.2 সে.মি. ও 6 সে.মি. দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

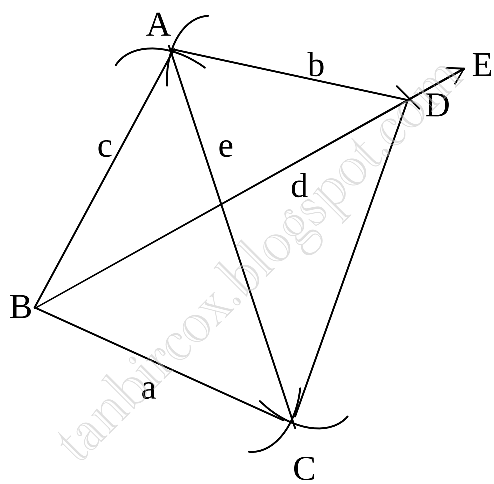


অঙ্কনের বিবরণ :



(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BD = d নিই। B ও D বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র কর যথাক্রমে c ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও A, D যোগ করি।





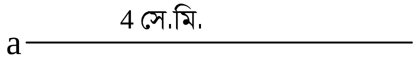
(২) আবার, B ও A কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও e এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD- এর যে দিকে A আছে তার বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।

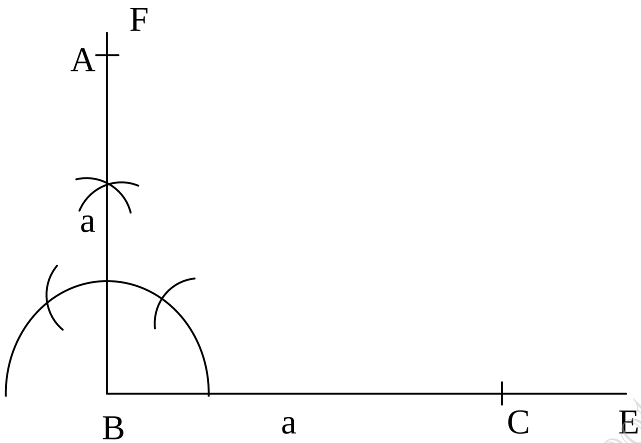
(৩) এখন B, C; D, C ও A, C যোগকরি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

৪। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. বর্গটি আঁক।

সমাধান :

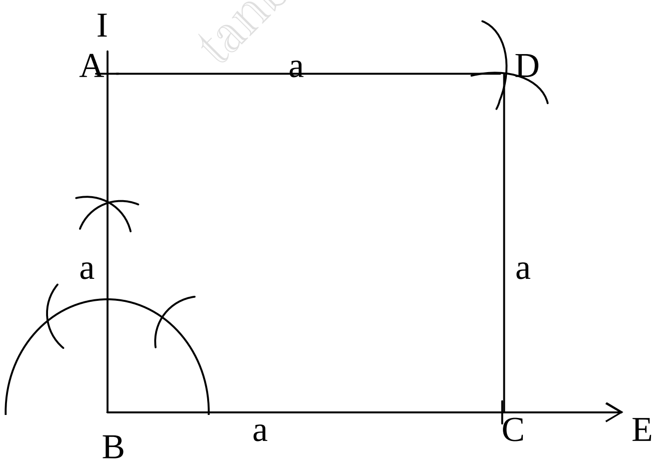
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4 সে.মি. দেওয়া আছে। বর্গটি আঁকতে হবে।





অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC = a নিই। B বিন্দুতে BF ⊥ BC আঁকি। BF থেকে BA = a নিই।

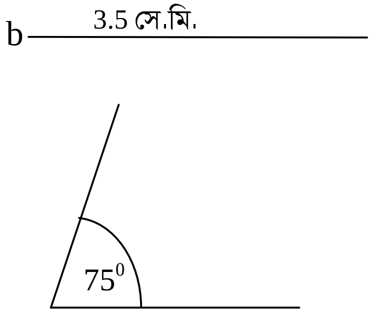


(২) A ও C বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ - এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। তারা পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A ও D এবং C ও D যোগ করি। তাহলে, ABCD- ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

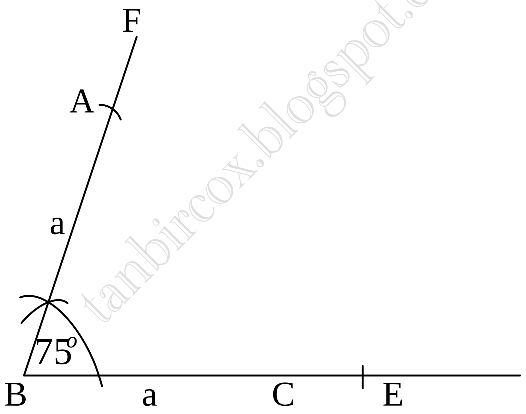
৫। রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি. 75^{o} রম্বসটি আঁক।

সমাধান :

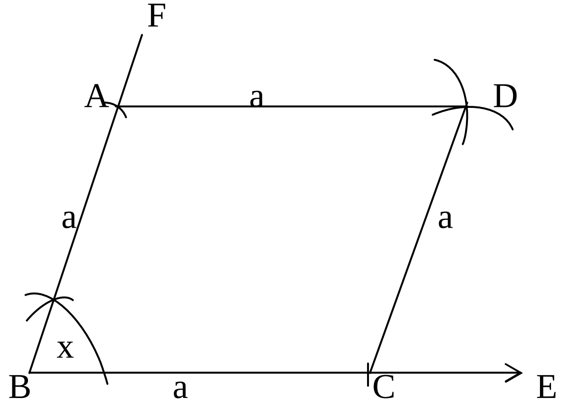
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি. এবং একটি কোণ $\angle x = 75^{o}$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :



(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC = a নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকি । BF থেকে BA =a নিই।

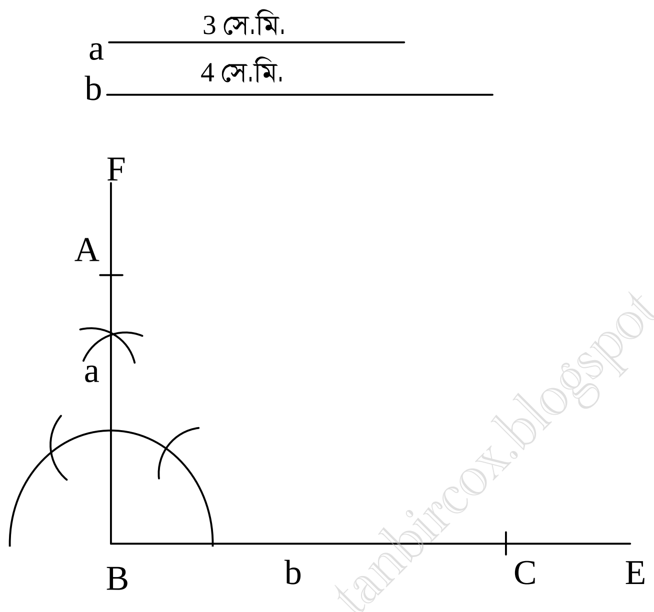


(২) A ও C বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ - এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্ত চাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

৬। আয়তের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি. ও 4 সে.মি.; আয়টি আঁক।

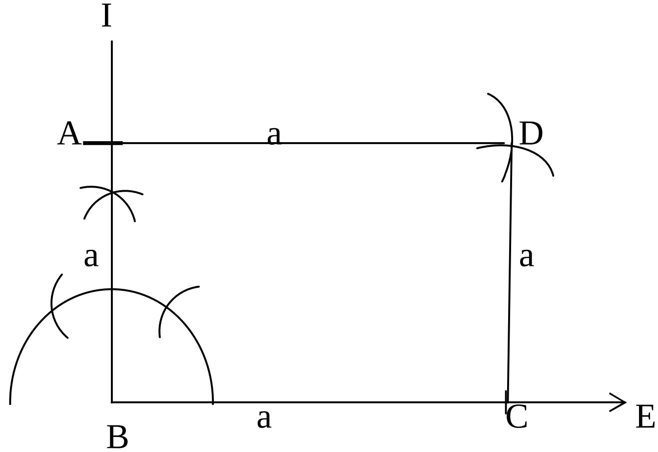
সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি আয়তের সন্নিহিত বাহু a ও b- এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. ও 4 সে.মি. দেওয়া আছে। আয়তটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC = b নিই। B বিন্দুতে BF $\perp$ BC আঁকি। BF থেকে BA = a নিই।



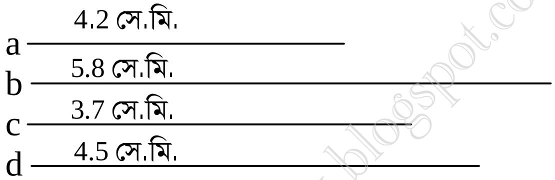
অঙ্কনের বিবরণ :

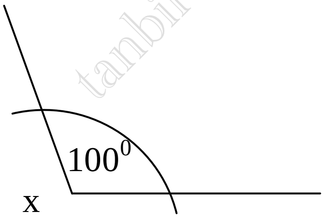
(২) A ও C বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে b ও a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ - এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্ত চাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট আয়ত।

৭। চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দুতে কর্ণ দুইটির চারটি খন্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক। OA = 4.2 সে.মি., OB = 5.8 সে.মি., OC = 3.7 সে.মি., OD = 4.5 সে.মি. ও $\angle AOB = 100^o$

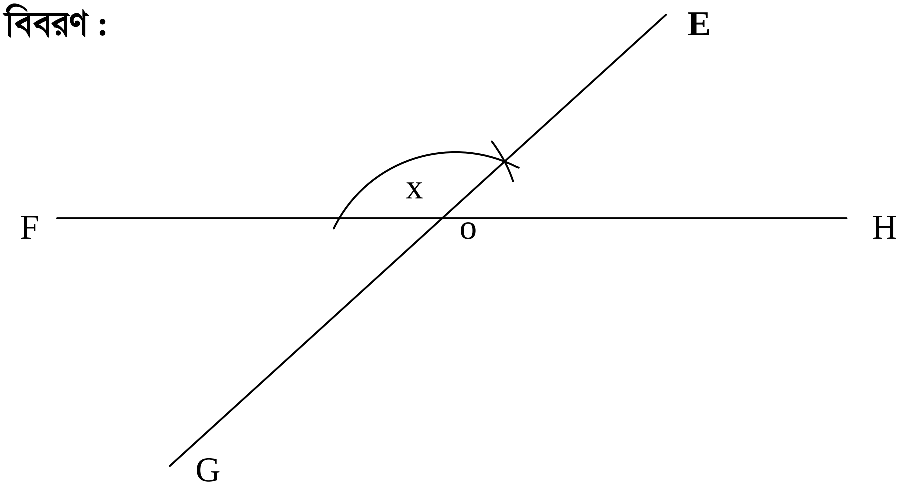
সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে a = OA = 4.2 সে.মি. ও c = OC = 3.7 সে.মি. এবং b = OB = 5.8 সে.মি. ও d = OD = 4.5 সে.মি. অংশে বিভক্ত করে এবং কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন একটি কোণ $\angle x = \angle AOB = 100^o$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

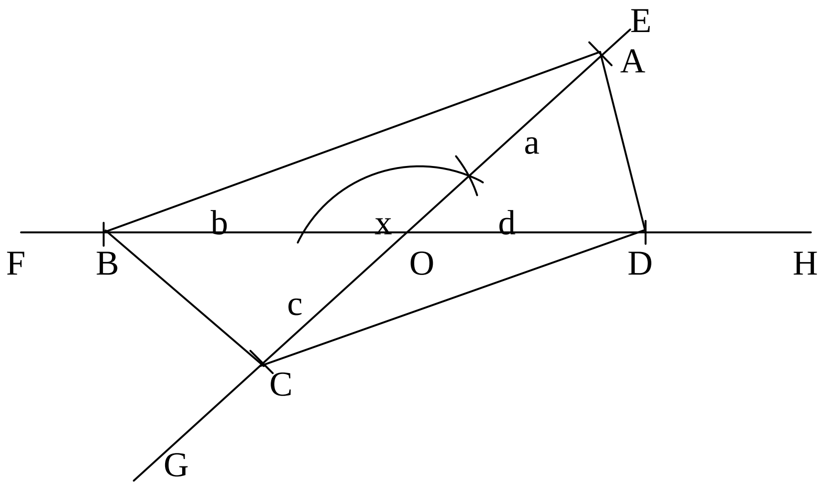




অঙ্কনের বিবরণ :



(১) যেকোনো রেখা FH-এর একটি বিন্দু O নিই এবং O বিন্দুতে $\angle FOE = \angle x$ আঁকি EO রেখাকে G বর্ধিত করি।

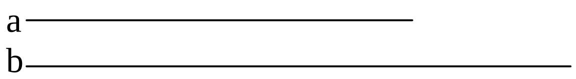


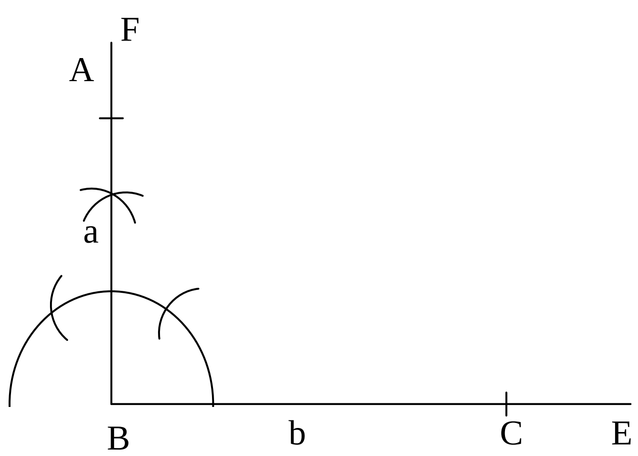
(২) FH রেখার O বিন্দুর দুই পাশে Bও D বিন্দু নিই যেন OB = b, OD = d হয় এবং OE রেখা হতে OA = a এবং OG হতে OC = c নিই। A ও B, B ও C, C ও D এবং D ও A যোগ করি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

৮। দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। আয়তটি আঁক।

সমাধান :

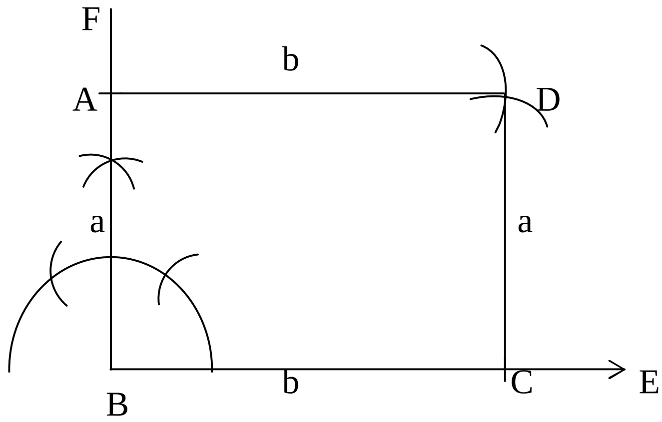
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b দেওয়া আছে। আয়তটি আঁকতে হবে।





অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রেখা BE থেকে BC = b নিই। B বিন্দুতে BF ⊥ BC আঁকি। BF থেকে BA = a নিই।

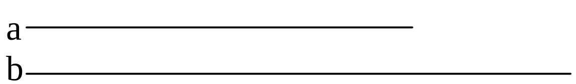


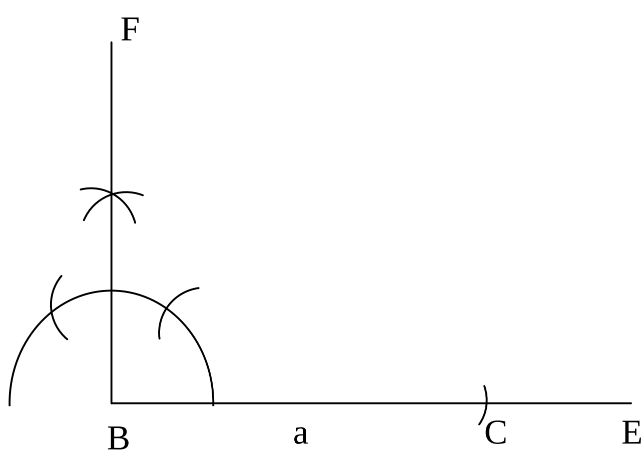
(২) A ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে b ও a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ - এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD - ই উদ্দিষ্ট আয়ত।

৯। কর্ণ এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। আয়তটি আঁকতে হবে।

সমাধান :

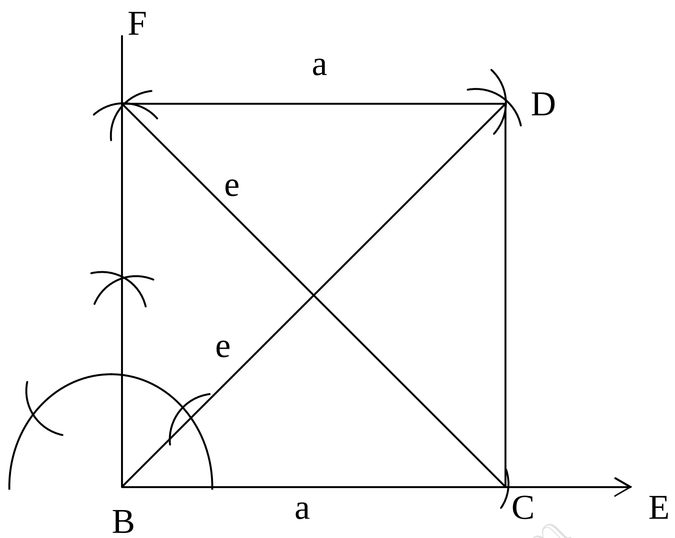
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি আয়তের কর্ণ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে e ও a দেওয়া আছে। আয়তটি আকতে হবে।





অঙ্কনের বিবরণ :

যেকোনো রেখা BE থেকে BC = a নিই। B বিন্দুতে BF ⊥ BC আঁকি।



(২) C বিন্দুকে কেন্দ্র করে e- এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। এটি BF কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

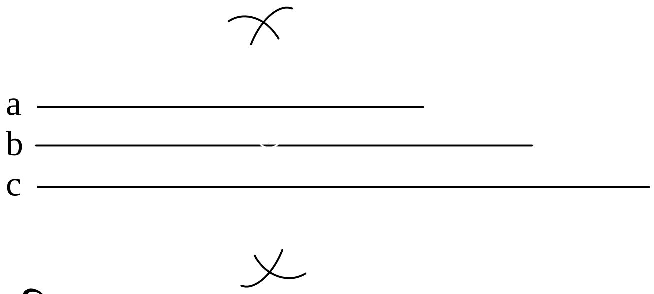
(৩) এখন A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও e- এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) A ও D এবং C ও D যোগ করি। তাহলে ABCD উদ্দিষ্ট আয়ত।

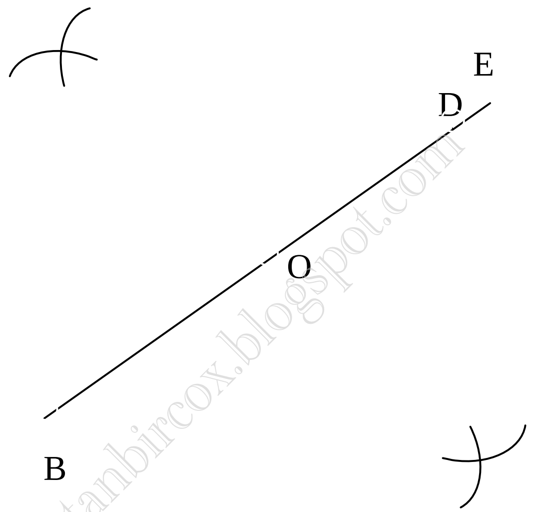
১০। একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

সমাধান :

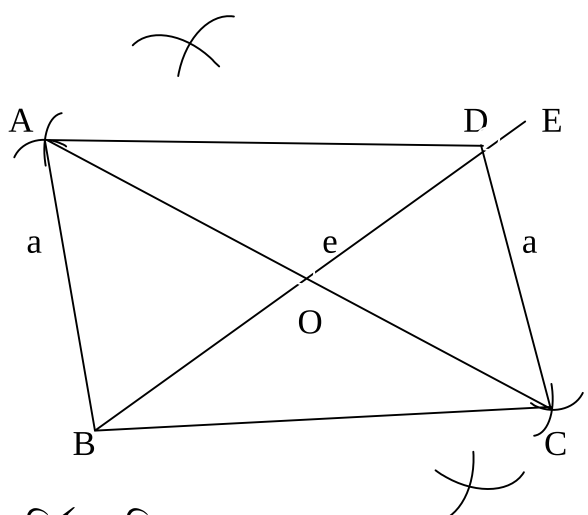
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সামান্তরিকের একটি বাহু a এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d ও e দেওয়া আছে, সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :



(১) যেকোনো রেখা BE থেকে e- এর সমান করে BD অংশ কেটে নিই।



(২) BD - এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি।

(৩) B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD- এর উভয় পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

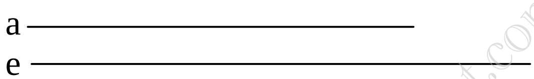
(৪) আবার O- কে কেন্দ্র করে d-এর অর্ধেকের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD - এর উভয় পাশে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই চাপদ্বয় পূর্বের চাপদ্বয়কে যথাক্রমে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৫) এখন A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি। তাহলে, ABCD- ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

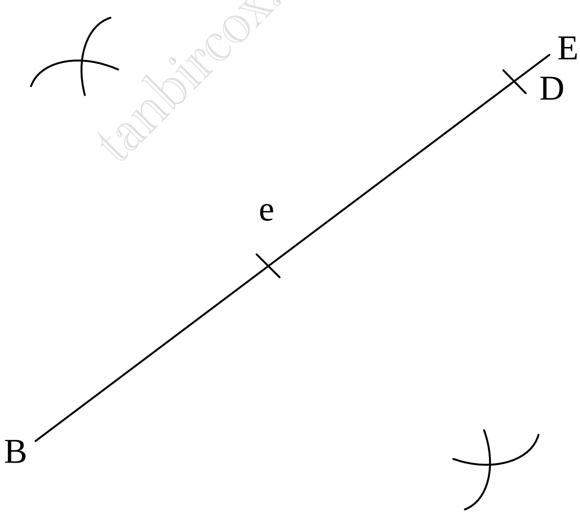
১১। একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি রম্বসের একটি বাহু a ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে, রম্বসটি আঁকতে হবে।

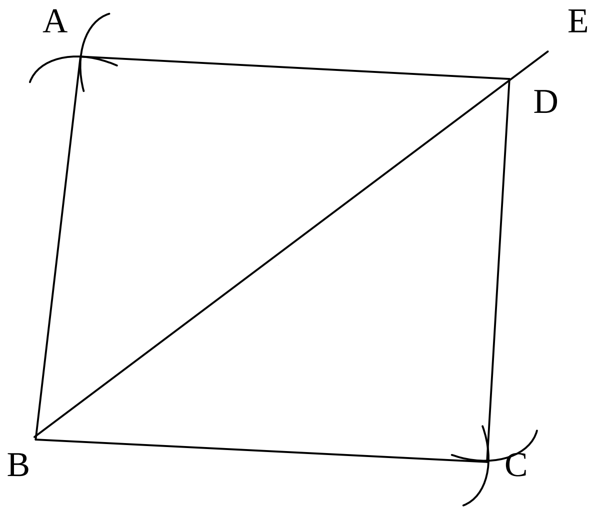


অঙ্কনের বিবরণ :



(১) যেকোনো রেখা BE থেকে e-এর সমান করে BD অংশ কেটে নিই।

(২) এখন B বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD- এর উভয় পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।



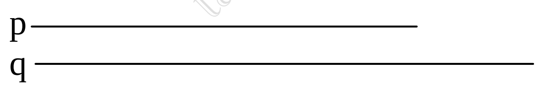
(৩) আবার, D বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঐ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে BD- এর উভয় পাশে আরো দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই চাপদ্বয় পূর্বের চাপদ্বয়কে যথাক্রমে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) এখন, A ও B, B ও C, C ও D এবং D ও A বিন্দুগুলো যোগ করি। তাহলে ABCD- ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

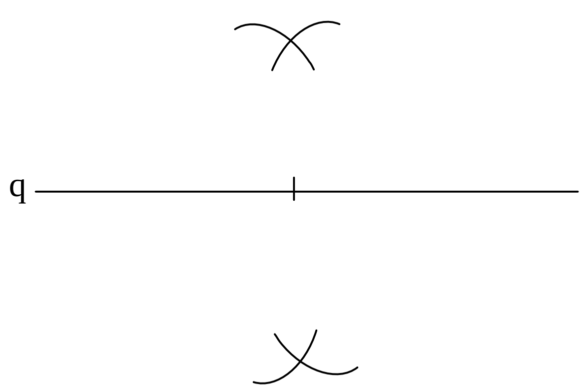
১২। দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

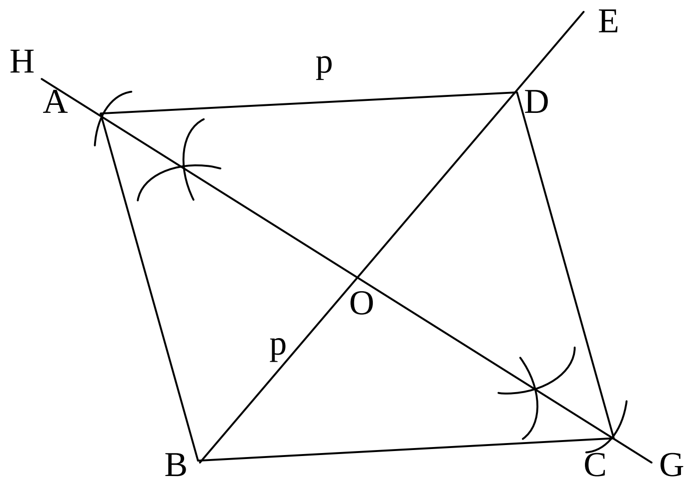
সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি রম্বসের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য p ও q দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :





(১) যেকোনো রেখা BE থেকে কর্ণ p- এর সমান করে BD অংশ কেটে নিই।

(২) BD রেখাকে O বিন্দুতে GH রেখা দ্বারা সমদ্বিখন্ডিত করি। এখন O কে কেন্দ্র করে q এর অর্ধেকের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর উভয় পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) এই বৃত্ত চাপদ্বয় GH রেখাকে যথাক্রমে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

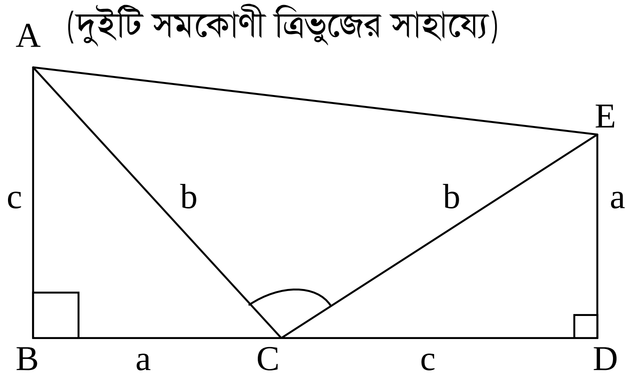
(৪) এখন A ও B, B ও C, C ও D এবং D ও A বিন্দুগুলো যোগ করি। তাহলে ABCD - ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

নবম অধ্যায় ৯ পিথাগোরাসের উপপাদ্য

৯.২ পিথাগোরাসের উপপাদ্য

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

(দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে)



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^0$ অতিভুজ AC = b, AB = c ও BC = a। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ অর্থাৎ $b^2 = c^2 + a^2$

অঙ্কন : BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন CD = AB = c হয়। D বিন্দুতে বর্ধিত BC এর উপর DE লম্ব আঁকি, যেন DE = BC = a হয়। C, E ও A, E যোগ করি।

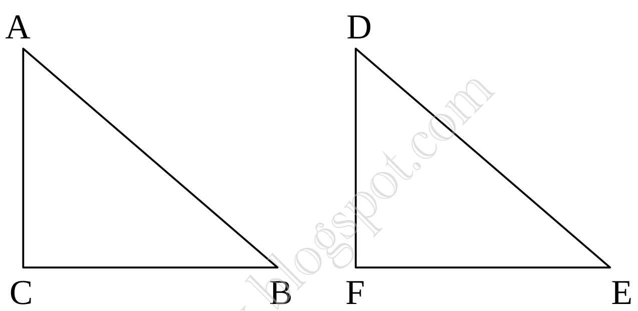
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC ও ΔCDE এ AB = CD = c, BC = DE = a এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$ [প্রত্যেকে সমকোণ] সুতারাং, $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ $\therefore$ AC = CE = b এবং $\angle BAC = \angle ECD$	[বাহু- কোণ- বাহু উপপাদ্য]
(২) আবার, $AB \perp BD$ এবং $ED \perp BD$ বলে AB ॥ ED সুতারাং, ABDE একটি ট্রাপিজিয়াম।	[ছেদকের দুই অন্তঃস্থ কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
(৩) তদুপরি, $\angle ACB + \angle BAC = \angle ACB + \angle ECD$ = এক সমকোণ। $\therefore \angle ACE$ = এক সমকোণ। ΔACE সমকোণী ত্রিভুজ। এখন ABDE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (Δ ক্ষেত্র ABC + Δ ক্ষেত্র CDE + Δ ক্ষেত্র ACE) বা, $\frac{1}{2}$ BD(AB + DE) = $\frac{1}{2}$ ac + $\frac{1}{2}$ ac + $\frac{1}{2}$ b^2	[ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের যোগফল ×

বা, $\frac{1}{2}(BC+CD)(AB+DE) = \frac{1}{2}[\, 2ac + b^2 \,]$	সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব]
বা, $(a + c)(a + c) = 2ac + b^2$ [2 দ্বারা গুণ করে]	
বা, $a^2 + 2ac + c^2 = 2ac + b^2$	
বা, $a^2 + c^2 = b^2$ **(প্রমাণিত)**	

৯.৩ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

যদি কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর $AB^2 = AC^2 + BC^2$. প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle C$ = এক সমকোণ।

অঙ্কন : এমন একটি ত্রিভুজ DEF আঁকি, যেন $\angle F$ এক সমকোণ, EF = BC এবং DF = AC হয়।

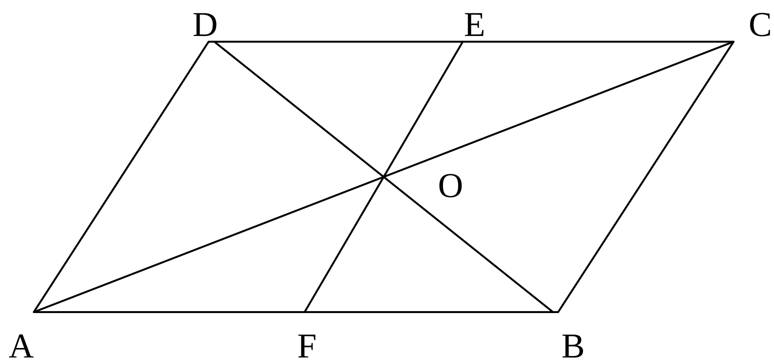
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $DE^2 = EF^2 + DF^2$ $= BC^2 + AC^2$ $= AB^2$	[কারণ ΔDEFএক সমকোণ]
এখন ΔABC ও ΔDEF এ BC = EF, AC = DF AB = DE	[কল্পনা]
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	[বাহু- বাহু- বাহু সর্বসমতা]
$\therefore \angle C = \angle F$	
$\therefore \angle F$ = এক সমকোণ	
$\therefore \angle C$ = এক সমকোণ । **(প্রমাণিত)**	

অনুশীলনী ৯

১। ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে O যেকোনো একটি বিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র AOB + Δ ক্ষেত্র COD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্রে ABCD)

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন :
দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে O যেকোনো একটি বিন্দু। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AOB + Δ ক্ষেত্র COD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্রে ABCD)

অঙ্কন : O বিন্দু হতে AB- এর উপর OF লম্ব টানি। FO কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন তা CD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

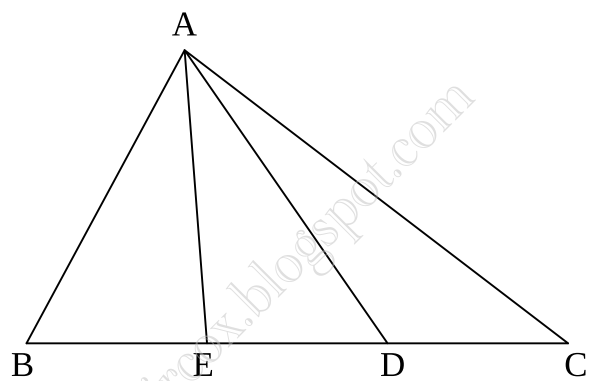
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AB ।। CD এবং EF তাদের ছেদক। ∴ ∠DEF = ∠ EFB = এক সমকোণ	[একান্তর কোণ এবং EF⊥ AB বলে]
∴ ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা EF সুতারাং ABCD = AB × EF	[যেহেতু সামান্তরিক ক্ষেত্র = ভুমি × উচ্চতা]
এখানে, ΔAOB এ ভূমি AB এবং উচ্চতা OF ∴ Δ ক্ষেত্র AOB = $\frac{1}{2}$ × AB × OF	[∵ $\angle OFB$ = এক সমকোণ]
(২) অনুরূপভাবে, Δ ক্ষেত্র COD = $\frac{1}{2}$ × CD × OE	[∵ $\angle OED$ = এক সমকোণ তাই OF উচ্চতা]
= $\frac{1}{2}$ × AB × OE	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]
(৩) Δ ক্ষেত্র AOB + Δ ক্ষেত্র COD	[(১) ও (২) থেকে]

$=\frac{1}{2}\times AB\times OF+\frac{1}{2}\times AB\times OE$ $=\frac{1}{2}AB(OF+OE)$ $=\frac{1}{2}AB.EF$ $=\frac{1}{2}$(সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD) **(প্রমাণিত)**	

২। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC- এ AD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD

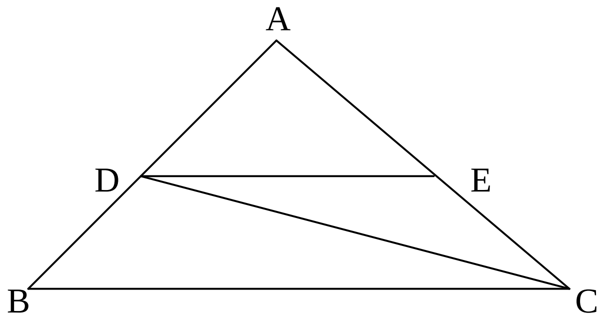
অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC - এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AD মধ্যমা, সেহেতু BD = CD Δ ক্ষেত্র ABD- এর ক্ষেত্রফল = $=\frac{1}{2}\times BD\times AE$	[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ভুমি$\times$উচ্চতা]
(২) আবার, Δ ক্ষেত্র ACD- এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times CD\times AE$ $=\frac{1}{2}\times BD\times AE$ $\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD। **(প্রমাণিত)**	[(১) থেকে]

৩। ΔABC এ AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র $CDE = \frac{1}{2}$ (Δক্ষেত্র ABC).

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র $CDE = \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC)

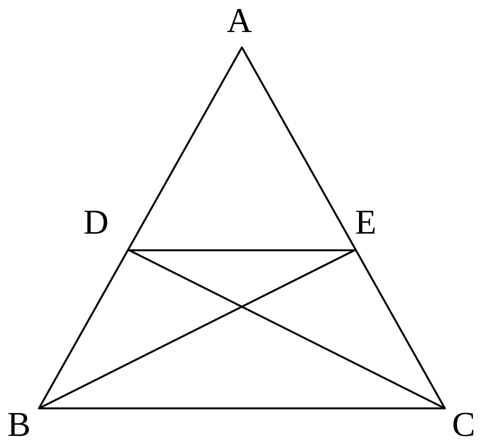
অঙ্কন : C, D এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু, D, AB- এর মধ্যবিন্দু। সেহেতু CD, ΔABC- এর মধ্যমা। $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র $CDE = \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ABC)	[ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে দুইটি সমান অংশে বিভক্ত করে]
(২) আবার, যেহেতু ΔACD- এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু E সুতারাং DE, ΔACD- এর মধ্যমা $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র $CDE = \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ACD) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) $= \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC) অর্থাৎ Δক্ষেত্র $CDE = \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC) **(প্রমাণিত)**	[ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে] [(১) থেকে]

৪। ΔABC এ BC ভূমির সামান্তরাল যেকোণ সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র DBE = Δক্ষেত্র EBC এবং = Δক্ষেত্র CDE

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর ভূমি BC - এর সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র DBC = Δক্ষেত্র EBC এবং Δক্ষেত্র BDE = Δক্ষেত্র CDE

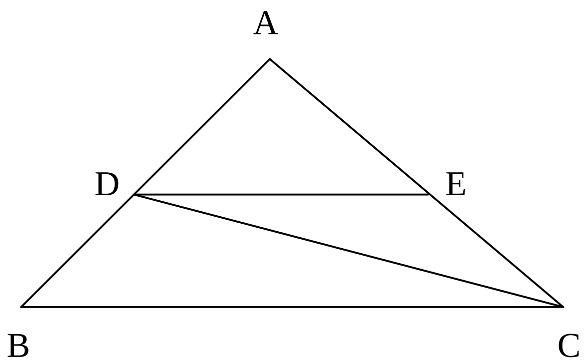
অঙ্কন :

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔDBC ও ΔEBC - এ ভূমি BC = ভূমি BC, BD = CE এবং $\angle EBC = \angle DCB$ $\therefore$ Δক্ষেত্র DBC = Δক্ষেত্র EBC	[ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত]
(২) ΔBDE ও ΔCDE- এ ভূমি DE = ভূমি DE, BD = CE এবং $\angle BED = \angle CDE$ অতএব, Δক্ষেত্র BDE = Δক্ষেত্র CDE **(প্রমাণিত)**	[ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি DE এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল DE ও BC এর মধ্যে অবস্থিত।]

৫। ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। প্রমাণ কর যে, Δক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{4}$(Δক্ষেত্র ABC)

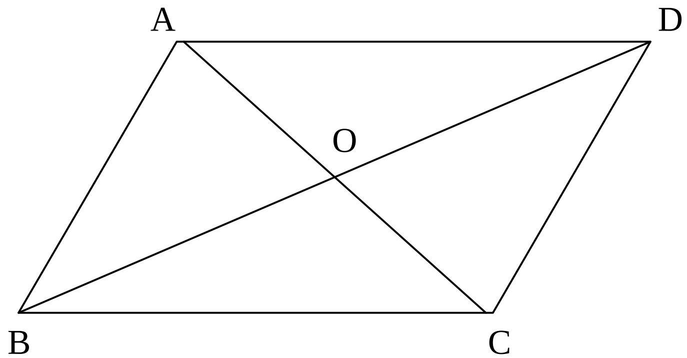
অঙ্কন : C, D এবং D, E যোগ করি

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু, D, AB- এর মধ্যবিন্দু সেহেতু CD, ΔABC-এর একটি মধ্যমা। $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র ACD $= \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ABC)	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি অংশে ভাগ করে]
(২) যেহেতু Δ ক্ষেত্র ACD- এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু E. সেহেতু DE, ΔACD- এর মধ্যমা। $\therefore \Delta$ক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ACD) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$($\Delta$ক্ষেত্র ABC) $= \frac{1}{4}$(Δক্ষেত্র ABC) অর্থাৎ Δক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{4}$(Δক্ষেত্র ABC). (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি অংশে ভাগ করে] [(১) থেকে]

৬। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



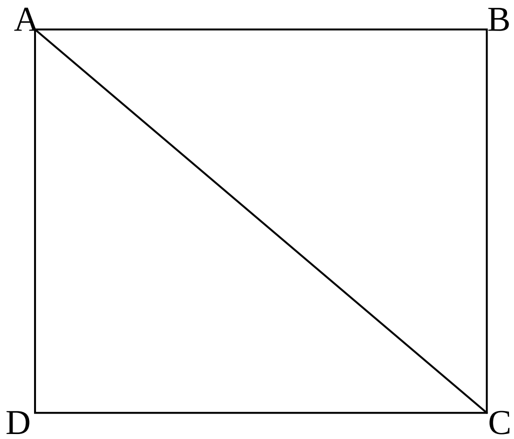
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র ΔAOB = Δক্ষেত্র BOC = Δক্ষেত্র COD = Δক্ষেত্র AOD.

প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) AO = CO এবং BO = DO	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(২) এখন, ΔABC- এ BO মধ্যমা $\therefore$ Δক্ষেত্র AOB = Δক্ষেত্র BOC $= \frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ABC	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি অংশে বিভক্ত করে]
(৩) ΔADC- এ DO মধ্যমা $\therefore$ Δক্ষেত্র COD = Δক্ষেত্র AOD $= \frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ADC $\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$	[সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিক ক্ষেত্রকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে]
বা, Δক্ষেত্র ABC = Δক্ষেত্র ADC $\therefore \frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ABC = $\frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ADC	[সর্বস্ব ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান]
(৪) Δক্ষেত্র AOB = Δক্ষেত্র BOC = Δক্ষেত্র COD = Δক্ষেত্র AOD **(প্রমাণিত)**	[ধাপ (২) ও (৩) হতে]

৭। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধান :



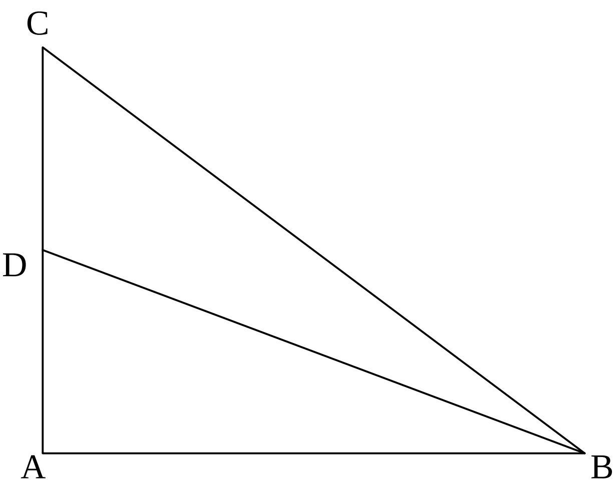
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। এর AC কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC- এ $\angle B$ = এক সমকোণ $\therefore \Delta ABC$ সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ।	[বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ]
(২) এখন, ΔABC- এ $AC^2 = AB^2 + BC^2$	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$	[বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো পরস্পর সমান]
বা, $2AB^2 = AC^2$	
$\therefore AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$ **(প্রমাণিত)**	

৮। ABC ত্রিভুজের ∠A = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,
$BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

সমাধান :



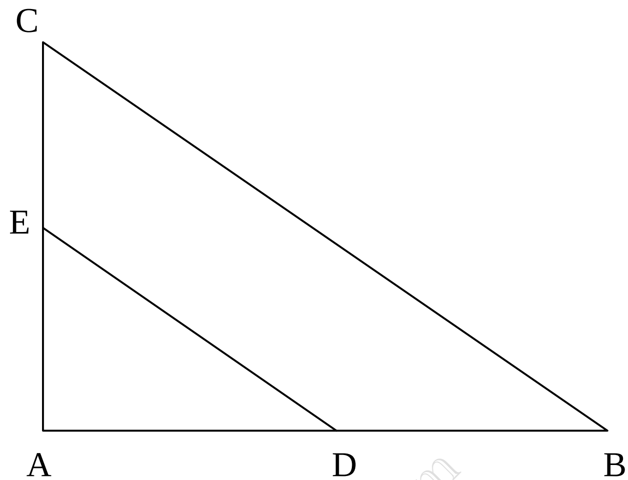
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের ∠A = এক সমকোণ এবং D, AC- এর উপস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) যেহেতু, ABC সমকোণী ত্রিভুজে ∠A = এক সমকোণ এবং BC এর অতিভুজ। $BC^2 = AB^2 + AC^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(২) অনুরূপভাবে, ABD সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BD $\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$ বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(৩) এখানে, $BC^2 + AD^2$ $= AB^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2$ সুতারাং, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**	[(১) ও (২) থেকে]

৯। ΔABC ত্রিভুজের $\angle A$ = একসমকোণ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $DE^2 = CE^2 + BD^2$।

সমাধান :



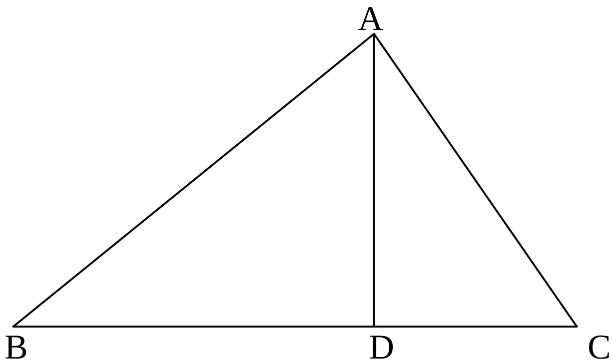
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর $\angle A$ = এক সমকোণ। D ও E যথাক্রমে AB ও AC- এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE^2 = CE^2 + BD^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) এখানে, AD = BD এবং AE = CE	[D ও E যথাক্রমে AB ও AC- এর মধ্যবিন্দু।]
(২) এখন ADE সমকোণী ত্রিভুজে, $DE^2 = AE^2 + AD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
$\therefore DE^2 = CE^2 + BD^2$ **(প্রমাণিত)**	[(১) থেকে]

১০। ΔABC এ BC এর উপর লম্ব AD এবং AB > AC প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

সমাধান :



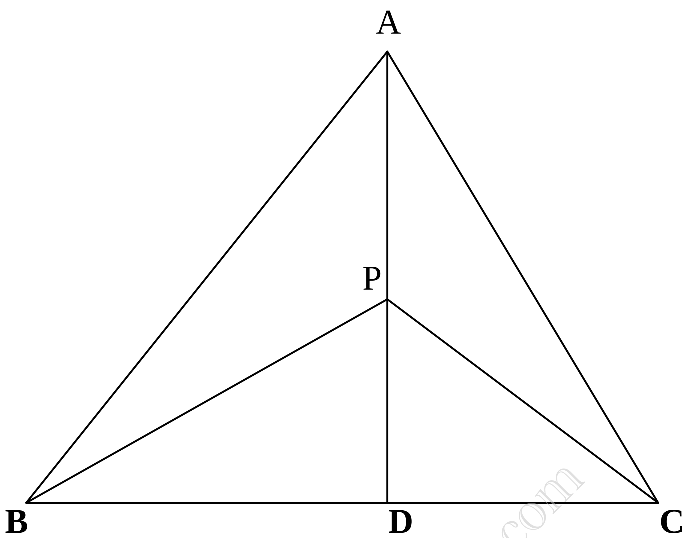
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এ BC এর উপর লম্ব AD এবং AB > AC প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC এ AD, BC- এর উপর লম্ব। $\therefore$ ΔABC ও ΔACD উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	
(২) এখন ABD সমকোণী ত্রিভুজে AB অতিভুজ $\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$ বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(৩) আবার, ACD সমকোণী ত্রিভুজে $AD^2 + CD^2 = AC^2$ বা, $AD^2 = AC^2 - CD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(৪) $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ **(প্রমাণিত)**	[(২) ও (৩) থেকে]

১১। ΔABC এ BC এর উপর AD লম্ব এবং AD এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও AB > AC প্রমাণ কর যে, $AB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$

সমাধান :

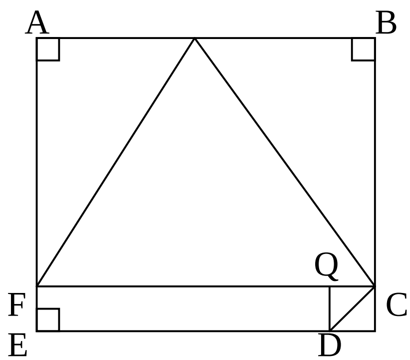


বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এ BC- এর উপর লম্ব AD এবং AD- এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও AB > AC । P, B ও P, C যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে $AB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC - এ $AD \perp BC$, ΔABD, ΔACD, ΔBPD এবং ΔCPD প্রত্যেকেই সমকোণী ত্রিভুজ	
(২) এখন ΔABD- এ, $AB^2 = BD^2 + AD^2$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান]
(৩) ΔACD- এ $AC^2 = AD^2 + CD^2$	[একই কারণে]
(৪) $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$	[(২) ও (৩) থেকে]
(৫) আবার, ΔBPD - এ $PB^2 = BD^2 + PD^2$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান]
(৬) ΔPCD - এ $PC^2 = PD^2 + CD^2$	[একই কারণে]
(৭) $PB^2 - PC^2 = BD^2 - CD^2$	[(৫) ও (৬) থেকে]
$PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$ (প্রমাণিত)	[(৪) থেকে]

১২। ABCD বহুভুজে AE ।। BC, CF ⊥ AE এবং DQ ⊥ CF, ED =10 মি.মি. EF = 2 মি.মি. BC = 8 মি.মি. AB = 12 মি.মি.



উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের (১- ৪) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

১। ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ মি.মি.?

(ক) 64 (খ) 96 (গ) 100 (ঘ) 144

২। নিচের কোনটি FPC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর?

(ক) 32 (খ) 48 (গ) 72 (ঘ) 60

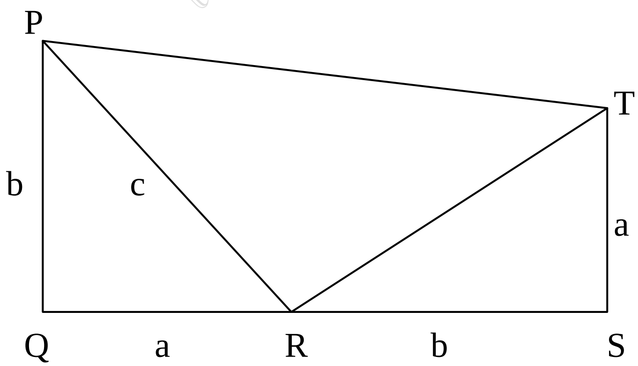
৩। CD - এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটিতে প্রকাশ পায়?

(ক) $2\sqrt{2}$ (খ) 4 (গ) $4\sqrt{2}$ (ঘ) 8

৪। নিচের কোনটিতে ΔFPC ও ΔDQC এর ক্ষেত্রফলের অন্তর নির্দেশ কর?

(ক) 46 বর্গ একক (খ) 48 বর্গ একক (গ) 50 বর্গ একক (ঘ) 52 বর্গ একক

১৩।



(ক) PQST কী ধরনের চতুর্ভুজ? স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(খ) দেখাও যে, ΔPRT সমকোণী।

(গ) প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

সমাধান :

(ক) PQST চতুর্ভজটি ট্রাপিজিয়াম। কারণ PQST চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু PQ ও TS বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং অপর বিপরীত PT ও QS বাহুদ্বয় অসমান্তরাল।

(খ) ΔPQR ও ΔRST এ $PQ = RS = b$, $QR = ST = a$ এবং $\angle PQR = \angle RST$ [প্রত্যেক 90^0]

$\Delta PQR \cong \Delta RST$ $\therefore PR = RT = c$ এবং $QPR = TRS$

আবার, $PQ \perp QS$ এবং $TS \perp QS$ বলে, $PQ \parallel TS$ সুতারাং, PQST একটি ট্রাপিজিয়াম.

এখন, $\angle PRO + \angle QPR = \angle PRO + \angle TRS = 1$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle PRT$ = এক সমকোণ। সুতারাং ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

(গ) এখন, PQST ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র PQR + Δ ক্ষেত্র RST Δ ক্ষেত্র PRT

বা, $\frac{1}{2}QS(PQ+TS) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$

বা, $\frac{1}{2}(QR+RS)(PQ+TS) = \frac{1}{2}(2ab+c^2)$

বা, $\frac{1}{2}(a+b)(b+a) = \frac{1}{2}(2ab+c^2)$

বা, $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$

বা, $a^2+b^2 = c^2$

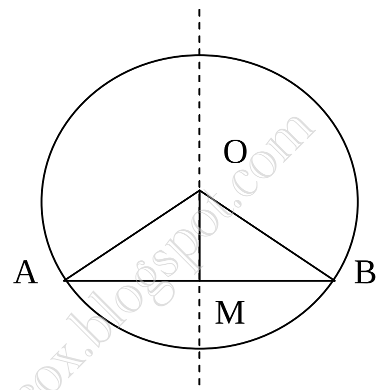
বা, $c^2 = b^2+a^2$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (প্রমাণিত)

দশম অধ্যায় ১০ বৃত্ত

উপপাদ্য ১। বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা- এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা- এর উপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা এবং M এই জ্যা- এর মধ্যবিন্দু। O, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, OM রেখাংশ AB জ্যা- এর উপর লম্ব।



অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

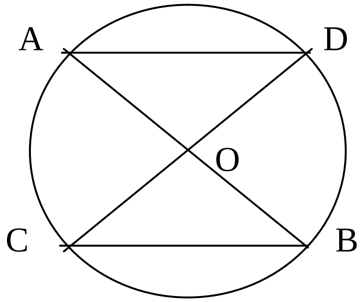
প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔOAM এবং ΔOBM এ	
$AM = BM$	M, AB এর মধ্যবিন্দু]
$OA = OB$	[উভয় একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং $OM = OM$	[সাধারণ বাহু]
$\Delta OAM \cong \Delta OBM$	[বাহু - বাহু - বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle OMA = \angle OMB$	
(২) যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান,	
সুতারাং $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ।	
অতএব, $OM \perp AB$(প্রমাণিত)	

অনুশীলনী ১০.১

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করে। অর্থাৎ AO = BO এবং CO = DO। প্রমাণ করতে হবে যে, O বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।

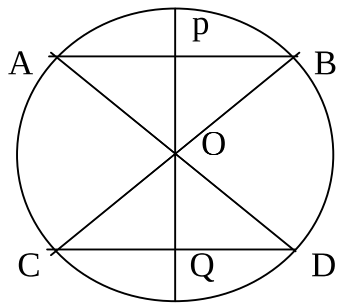
অঙ্কন : A, D এবং B, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔBOC- এ, CO = BO এবং ΔAOD- এ, DO = AO $\therefore$ AO = BO = CO = DO অর্থাৎ O বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ A, B, C, D বিন্দুর দূরত্ব সমান। তাই বলা যায় O বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব সমান $\therefore$ O বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র। **(প্রমাণিত)**	[AB ও CD রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়েছে।]

২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা- এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। AB ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, P, Q এর সংযোজক সরলরেখা O বিন্দুগামী। অর্থাৎ P, O, Q একই সরলরেখয় অবস্থিত প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

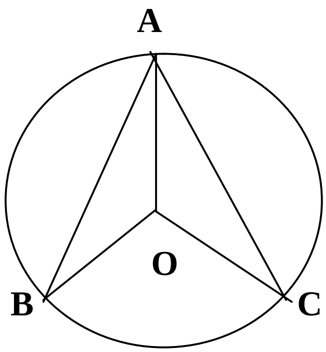
অঙ্কন : P, Q যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOP ও ΔBOP এর মধ্যে	
$AO = BO$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$BP = AP$	[P, AB এর মধ্যবিন্দু]
এবং OP সাধারণ বাহু	
$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$	[বাহু- বাহু- বাহু উপপাদ্য]
(২) $\angle APO = \angle BPO = 1$ সমকোণ	[রৈখিক যুগল কোণ বলে]
$\therefore OP \perp AB$	
অনুরূপে $\angle CQO = \angle DQO = 1$ সমকোণ	[রৈখিক যুগল কোণ বলে]
$\therefore OQ \perp CD$	
(৩) আবার, $OP = OQ$	
$\therefore AO = BO = CO = DO$	
অর্থাৎ P, Q, O বিন্দুগামী **(প্রমাণিত)**	

৩। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC.

সমাধান :



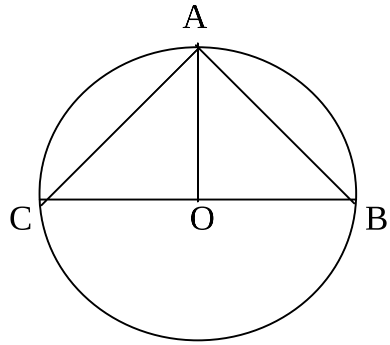
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB ও ΔAOC এর মধ্যে	
$BO = CO$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle BAO = \angle CAO$	[কল্পনা]
এবং $OA = OA$	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$	[বাহু - বাহু- বাহু উপপাদ্য]
$\therefore AB = AC$ **(প্রমাণিত)**	

৪। চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC.
প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAO = \angle CAO$

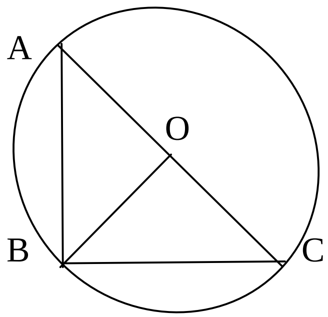
অঙ্কন : O,B এবং O,C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB ও ΔAOC এর মধ্যে	
AB = AC	[কল্পনা]
OB = OC	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
এবং OA = OA	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$	[বাহু- বাহু- বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle BAO = \angle CAO$ **(প্রমাণিত)**	

৫। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, বৃত্তটি ABC সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A দিয়ে যায়। AB এর মধ্যবিন্দু O বৃত্তটির কেন্দ্র অর্থাৎ $BO = \frac{১}{২} AC$

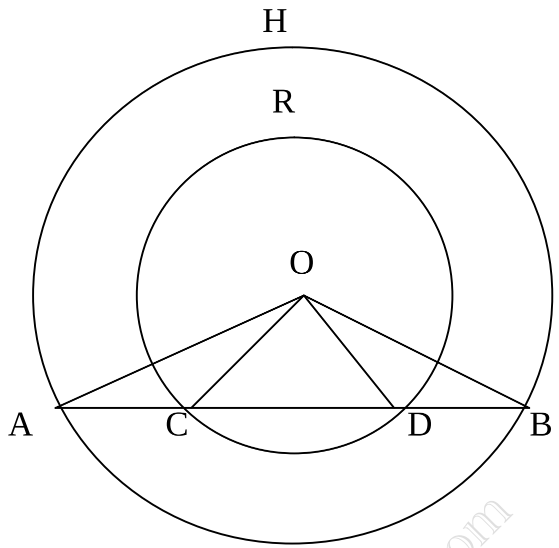
অঙ্কন : O, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AC বৃত্তের ব্যাস এবং ∠ABC = এক সমকোণ।	[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক- সমকোণ]
সুতারাং A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটি বৃত্তস্থ হবে। অর্থাৎ A, B, C বৃত্তের পরিধির উপর তিনটি বিন্দু। O বৃত্তের কেন্দ্র হওয়ায় BO = CO = AO	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
(২) এখন, AO + CO = AC	
বা, BO + BO = AC	[(১) থেকে]
বা, 2BO = AC $\therefore BO = \frac{১}{২} AC$ **(প্রমাণিত)**	

৬। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত ABH ও CDR। ABH বৃত্তের একটি জ্যা AB, CDR বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD

অঙ্কন : A, O; C, O; D, O ও B, O যোগ করি।

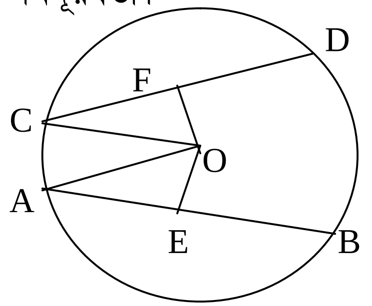
প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔAOC ও ΔBOD-এ	
AO = BO,	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
CO = DO	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
এবং $\angle OAC = \angle OBD$	
$\therefore \Delta AOC \cong \Delta BOD$	[বাহু- কোণ- বাহু উপপাদ্য]
$\therefore AC = BD$ **(প্রমাণিত)**	

10.2 বৃত্ত

উপপাদ্য ২। বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।



অঙ্কন : O থেকে AB এবং CD জ্যা- এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, A এবং O,C যোগ করি।

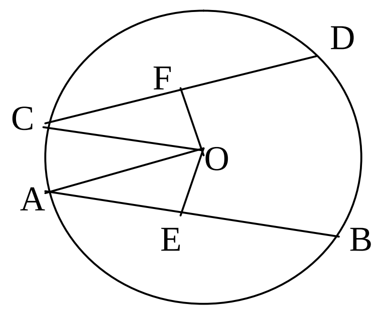
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$ সুতারাং, AE = BE এবং CF = DF $AE = \frac{১}{২} AB$ এবং $CF = \frac{১}{২} CD$	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা- এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) কিন্তু AB = CD $\therefore$ AE = CF	[কল্পনা]
(৩) এখন ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে। অতিভুজে OA = অতিভুজ OC এবং AE = CF $\therefore \Delta OAE \cong \Delta OCF$ $\therefore$ OE = OF	 [উভয় একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [ধাপ ২] [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ- বাহু সর্মসমতা উপপাদ্য]
(৪) কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা- এর দূরত্ব। সুতারাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। **(প্রমাণিত)**	

উপপাদ্য ৩। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

সমাধান :

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে ও OE ও OF লম্ব। তাহলে OE ও OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD জ্যা- এর দূরত্ব নির্দেশ করে। OE = OF হলে প্রমাণ করতে হবে যে, AB = CD.



অঙ্কন : O, A এবং O,C যোগ করি।

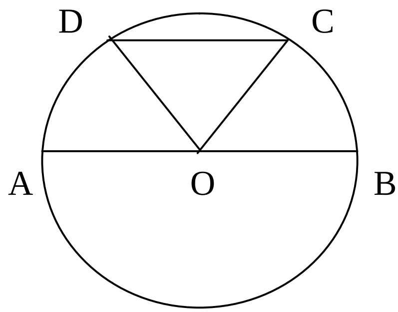
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$	[সমকোণ]
সুতারাং $\angle OEA = \angle OFC$ = এক সমকোণ	
(২) এখন, ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে	
অতিভুজ OA = অতিভুজ OC এবং	[উভয় একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
OE = OF	[কল্পনা]
$\therefore \Delta OAE \cong \Delta OCF$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ- বাহু সর্মসমতা উপপাদ্য]
$\therefore AE = CF$	
(৩) $AE = \frac{১}{২}AB$ এবং $CF = \frac{১}{২}CD$।	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা- এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(৪) সুতারাং $\frac{১}{২}AB = \frac{১}{২}CD$	
অর্থাৎ AB = CD	

উদাহরণ ৪। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

সমাধান :

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।
প্রমাণ করতে হবে যে, AB CD > CD



অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন ΔOCD এ

OC + CD > CD

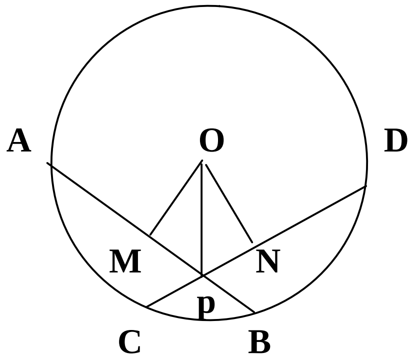
বা, OA + OB > CD

অর্থাৎ AB > CD

অনুশীলনী ১০.২

১। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, এদের একটি অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুইটি সমান জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, PA = PD এবং PB = PC

অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OM এবং ON লম্ব অঙ্কন করি। O, P যোগ করি।

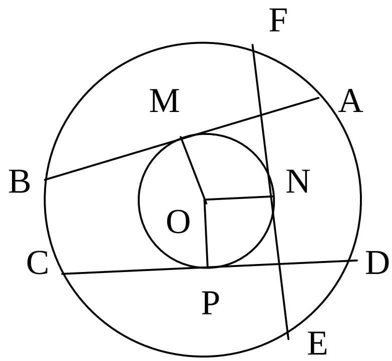
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) Δ MOP ও Δ NOP সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে	
OM = ON	[সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]
OP = OP	[সাধারণ বাহু]
$\Delta MOP \cong \Delta NOP$	[অতিভুজ- বাহু উপপাদ্য]
∴ PM = PN	
(২) এখন, OM, AB এর উপর লম্ব হওয়ায়,	
$AM = \frac{১}{২} AB$	[কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
এবং ON, CD এর উপর লম্ব হওয়ায়,	
$DN = \frac{১}{২} CD$	[কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(৩) যেহেতু AB = CD	[কল্পনা]
∴ AM = DN	[ধাপ- ২ হতে]
∴ PM + AM = PN+DN	
সুতারাং PA = PD	
(৪) আবার, AB = CD	[ধাপ- ৩ হতে]
বা, AB – PA = CD – PD	
∴ PB = PC	
অতএব, PA = PD এবং PB = PC **(প্রমাণিত)**	
সুতারাং $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ।	
অতএব, $OM \perp AB$ **(প্রমাণিত)**	

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা- এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O। AB, CD ও EF তিনটি পরস্পর সমান জ্যা। M, N এবং P যথাক্রমে AB, EF ও CD এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, M, N এবং P সমবৃত্ত।

অঙ্কন : O, M; O, N এবং O, P যোগ করি।

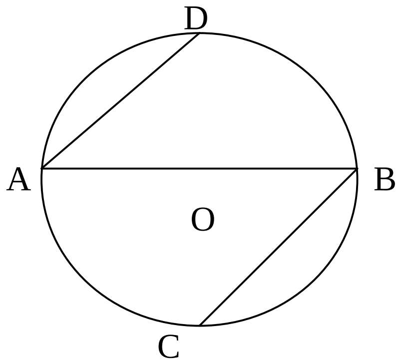
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং OM কেন্দ্রগামী রেখাংশ। ∴ OM, AB এর উপর লম্ব। OP, CD এর উপর লম্ব এবং ON, EF এর উপর লম্ব। সেহেতু OM = OP = ON	[বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা- এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা- এর উপর লম্ব] [উপপাদ্য - ২] [বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]
(২) সুতারাং O কে কেন্দ্র করে OM বা OP বা ON এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে M, N ও P বিন্দু দিয়ে যাবে। অতএব, M, N ও P সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**	

৩। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে এর বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে এরা সমান্তরাল হয়।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : দেখতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস। AB ব্যাসের A প্রান্ত থেকে AD জ্যা এবং B প্রান্ত থেকে BC জ্যা অঙ্কন করা হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AD । । BC

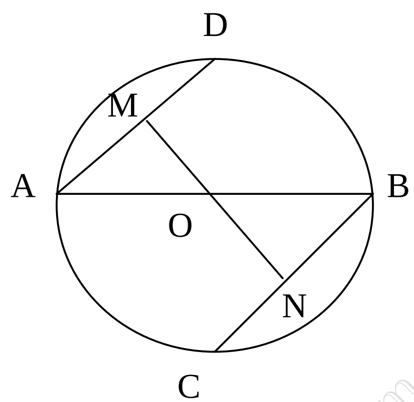
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AD = BC এবং AB তাদের ছেদক $\therefore \angle BAD = \angle ABC$	[কল্পনা] [একান্তর কোণ বলে]
(২) ছেদকের উভয় পাশের একান্তর কোণগুলো সমান হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল। $\therefore$ AD । । BC **(প্রমাণিত)**	

৪। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে এর বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে এরা সমান হয়।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ব্যাস। AB এর A প্রান্ত থেকে AD জ্যা আঁকা হল এবং B প্রান্ত থেকে BC জ্যা আঁকা হল এবং AD|| BC। প্রমাণ করতে হবে যে, AD = BC



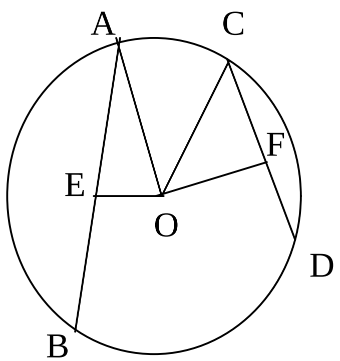
অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে AD ও BC এর উপর যথাক্রমে OM ও ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) সমকোণী ΔAOM ও ΔBON এ, AO = BO এবং AM = BN $\therefore \Delta AOM \cong \Delta BON$ $\therefore OM = ON$	[কল্পনা] [অতিভুজ- বাহু উপপাদ্য]
(২) সুতারাং AD = BC **(প্রমাণিত)**	[বৃত্তের কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী সকল জ্যা সমান]

৫। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা- এর মধ্যে বৃহত্তম জ্যা- টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা এবং AB > CD। AB ও CD এর উপরে লম্বদ্বয় যথাক্রমে OE ও OF। দেখাতে হবে যে, OE < OF

অঙ্কন : O, A ও O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$ $AE = \frac{১}{২} AB$, $CF = \frac{১}{২} CD$ বৃত্তের	[বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন জ্যা এর উপর অঙ্কিত জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) কিন্তু AB > CD $\therefore$ AE > CF	
(৩) এখন, ΔOAE ও ΔOCF এর মধ্যে $OA^2 = AE^2 + OE^2$ এবং $OC^2 = CF^2 + OF^2$ কিন্তু OA = OC $\therefore OA^2 = OC^2$ $\therefore AE^2 + OE^2 = CF^2 + OF^2$	[অতিভুজ উপর অঙ্কিত বর্গ অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টির সমান] [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
(৪) এখন, AE > CF হওয়ায় $AE^2 > CF^2$ $\therefore OE^2 < OF^2$ বা, $OE < OF$ অর্থাৎ বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর। **(দেখানো হলো)**	[ধাপ (৩) হতে]