



*School of Excellence*  
Crafting Sunshine...

House-452; Lane-8; DOHS Baridhara  
Dhaka-1206; Bangladesh  
Phone : 01714 555 830  
E-mail: soe\_bd@yahoo.com  
Website: www.soebd.org

Math Script

ত্রিভুজ

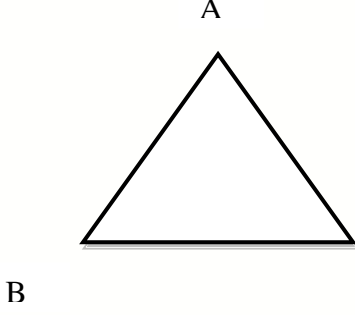
www.bcsourgoal.com.bd

আমরা যদি না জাগি মা, কেমনে সকাল হবে?

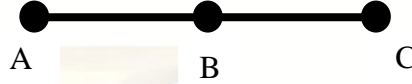
[www.bcsourgoal.com.bd](http://www.bcsourgoal.com.bd)



ত্রিভূজ : তিনটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ত্রিভূজ বলে। যেমন -ABC একটি ত্রিভূজ।



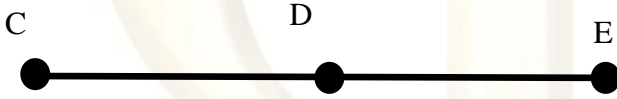
চিত্র ১



চিত্র ২

চিত্র (২) এটি একটি সরল রেখা। যদি বলা হয় চিত্র (২) এ A, B ও C দ্বারা গঠিত ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল কত (চোখ বন্ধ করে বলবেন ০)। কারণ একটি সরলরেখা দ্বারা কোন বদ্ধ ক্ষেত্র তৈরী হতে পারে না।

ধরুন বলা হল C, D, E বিন্দুগুলো একটি সরলরেখার উপর আছে। C, D, E দ্বারা গঠিত ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল কত? (নিজে বলুন)। তিনটি বিন্দু যদি একই সরল রেখার উপর থাকে তবে তাদের দ্বারা ত্রিভূজ গঠন সম্ভব নয়। তাই তার ক্ষেত্রফল ০।

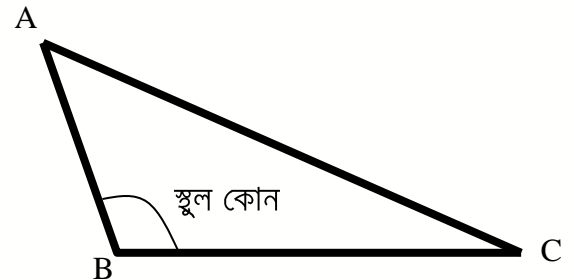
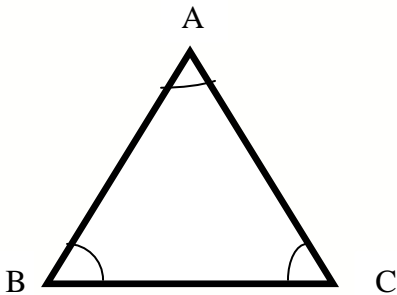


ত্রিভূজের প্রকার ভেদ :

(i) কোন ভেদে - ৩ প্রকার

(i) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভূজ

(ii) স্থূলকোণী ত্রিভূজ



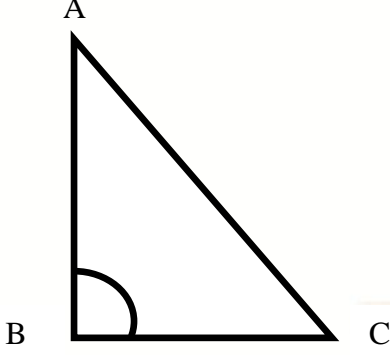
সবগুলো কোণই সূক্ষ্ম কোণ ( $90^\circ$  থেকে ছোট)

যে কোন একটি কোণ স্থূলকোণ ( $90^\circ$  থেকে বড়, বাকি দুইটি সূক্ষ্মকোণ)

আমরা যদি না জাগি মা, কেমনে সকাল হবে?



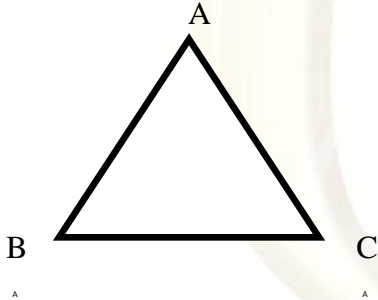
(iii) সমকোণী :



যে কোন একটি কোণ সমকোণ বা  $90^\circ$  এর সমান। [একটি কোণ অপর দুটি কোণের সমষ্টির সমান।]

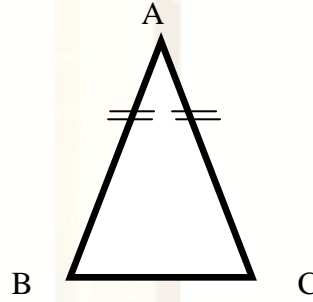
(B) বাহু ভেদে :

(i) সমবাহু



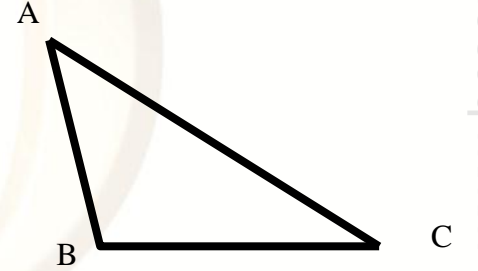
(সবগুলো বাহু এবং কোণ সমান)

(ii) সমদ্বিবাহু



(দুটি বাহু সমান এবং দুটি কোণ সমান)

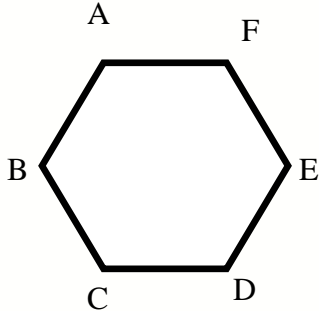
(iii) বিষমবাহু



(তিনটি বাহু এবং কোণ অসমান)

সুষম ভূজ : সুষম ভূজ আমরা তখনই বলব যে ভূজের সবগুলো বাহু এবং কোণ সমান। যেমন

সুষম ষড়ভূজ।



$$\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$$

এবং সবগুলো কোণ সমান)



এ রকম সুষম চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ হতে পারে।

প্রশ্ন হল যদি বলা হয় সুষম পঞ্চভুজের প্রত্যেকটি কোণের মান কত?

সূত্রটি হল : সুষম কোণের মান =  $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$  মুখস্থ  
n=বাহুর সংখ্যা

সূত্রমতে, পঞ্চভুজের জন্য  $n = 5$ ,  $\therefore$  কোণের মান  $\Rightarrow \frac{5-2}{5} \times 180$

$\Rightarrow \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$

ভুজ এর কোণগুলোর সমষ্টি :

মনে রাখতে হবে -

- (i) ত্রিভুজ এর তিন কোণের সমষ্টি  $180^\circ$  বা  $\pi$  বা 2 সমকোণ।
- (ii) চতুর্ভুজ এর চার কোণের সমষ্টি  $360^\circ$  বা  $2\pi$  বা 4 সমকোণ।
- (iii) পঞ্চভুজ এর পাঁচ কোণের সমষ্টি  $540^\circ$  বা  $3\pi$  বা 6 সমকোণ।
- (iv) ষড়ভুজ এর ছয় কোণের সমষ্টি  $720^\circ$  বা  $4\pi$  বা 8 সমকোণ।

তবে যে কোন ভুজের কোণগুলোর সমষ্টি গাণিতিকভাবে সূত্র ব্যবহার করে বের করা যায়-

\* n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ভুজের কোণের সমষ্টি  $\Rightarrow (n-2) \times 180^\circ$  (মুখস্থ)

উদাহারন স্বরূপ পঞ্চভুজের ক্ষেত্রে:

এখানে বাহুর সংখ্যা  $n = 5$

কোন গুলোর সমষ্টি =  $(n-2) \times 180^\circ$

$= (5-2) \times 180^\circ$

$= 3 \times 180^\circ$

$= 540^\circ$  বা 6 সমকোণ বা  $3\pi$

অনুরূপভাবে, ষড়ভুজ বা চতুর্ভুজ এর ক্ষেত্রে কোণ এর সমষ্টি বের করা সম্ভব।



QS: একটি পঞ্চভূজের সমষ্টি কত? (৩৪ বিসিএস প্রিলি.)

\* কখনও কখনও বহুভূজের বহিঃকোণ উল্লেখ করে দিয়ে আপনাকে বাহুর সংখ্যা বের করতে বলতে পারে। নিয়মটি খুব সোজা।

$$\text{বহুভূজের বাহুর সংখ্যা} = \frac{360^\circ}{\text{বহিঃকোণ}}$$

যেমন ধরুন একটি সুষম বহুভূজের বহিঃকোণ  $36^\circ$  তার বাহুর সংখ্যা কত?

$$\text{সমাধান, বাহুর সংখ্যা} = \frac{360^\circ}{\text{বহিঃকোণ}} = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10\text{টি}$$

কিন্তু যদি কখনও বহিঃকোণের পরিবর্তে অন্তঃকোণ দেয়া থাকে, এমন ক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে।

$$\text{সুষম বহুভূজের (অন্তঃকোণ + বহিঃকোণ)} = 180^\circ$$

যেমন : সুষম বহুভূজের একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ  $135^\circ$  হলে বাহুর সংখ্যা কত? (১২ বিসিএস)

শর্তমতে, অন্তঃকোণ + বহিঃকোণ =  $180^\circ$

বা,  $135^\circ + \text{বহিঃকোণ} = 180^\circ$

বা, বহিঃকোণ =  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

$$\therefore \text{বাহুর সংখ্যা} = \frac{360^\circ}{\text{বহিঃকোণ}} = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8\text{টি}$$

নিজে করুন:

একটি সুষম বহুভূজের অন্তঃকোণ  $120^\circ$ , তার বাহুর সংখ্যা কত?

**সর্বসম ত্রিভুজ :**

\* দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হওয়ার শর্তগুলো মুখস্থ করুন :

(১) ত্রিভুজ দুইটির তিনবাহু পরস্পর সমান

(২) দুটি অন্তঃস্থ কোণ ও একবাহু

পরস্পর সমান

(৩) দুটি বাহু এবং তাদের দ্বারা গঠিত অন্তঃস্থ কোণদ্বয় পরস্পর সমান।



এখান থেকে প্রশ্ন হতে পারে এ রকম

\*\*নিচের কোনটি দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হওয়ার শর্ত নয়? (বিসিএস ৩০)

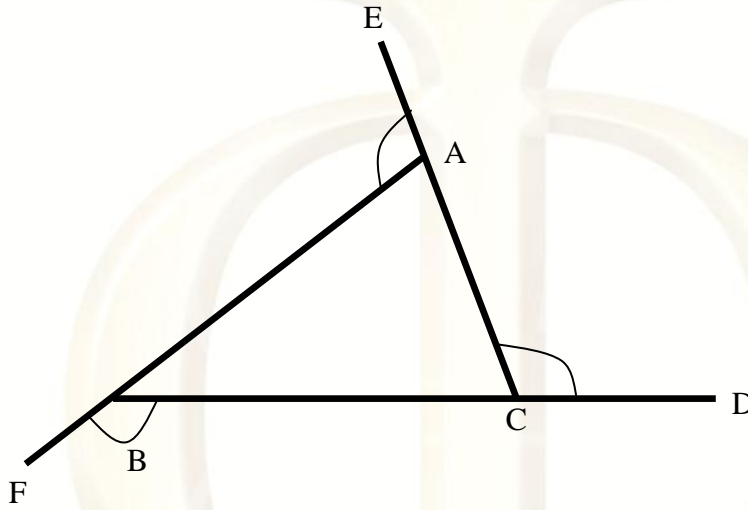
মনে রাখবেন ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন তিনটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি  $360^\circ$

ত্রিভুজ ABC এর AB, CA ও BC বাহু তিনটিকে বর্ধিত করে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোনগুলো যথাক্রমে  $\angle CBF$ ,

$\angle BAE$ , ও  $\angle ACD$

শর্তমতে,

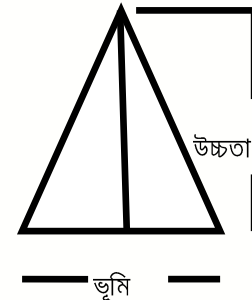
$$\angle ACD + \angle CBF + \angle BAE = 360^\circ$$



ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং আনুষঙ্গিক প্রসঙ্গ :

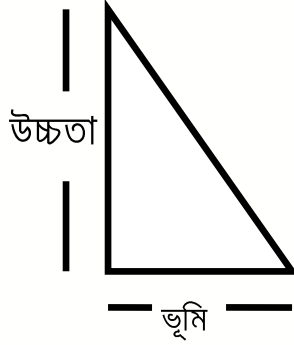
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হলে প্রথমেই আমাদের যে সূত্রটি মুখস্থ করতে হবে তা হল :

$$\Delta \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$





\* সমকোণী ত্রিভুজের বেলায় ত্রিভুজ এর লম্বই তার উচ্চতা হিসেবে গণ্য।

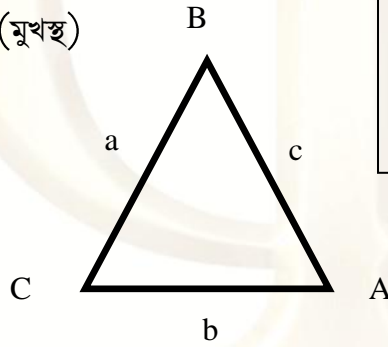


কিন্তু উপরোক্ত সূত্র দিয়ে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব কেবল যদি সরাসরি ত্রিভুজ এর ভূমি ও উচ্চতার মান আপনাদের জানা থাকে। কিন্তু বেশীর ভাগ ক্ষেত্রে এভাবে সরাসরি মান পাওয়া যায় না। তখন আমাদের বিকল্প পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয়। আসুন আমরা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত বিবিধ সমস্যা গভীরভাবে পর্যবেক্ষণ করি।

\* আপনাদের প্রথমেই যেটা জানতে হবে ত্রিভুজের পরিসীমা বলতে আমরা কি বুঝি।

পরিসীমা : ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফলকে তার পরিসীমা বলা হয়। ত্রিভুজ ABC এর

পরিসীমা =  $2S$  (মুখস্থ)



$AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $AC=b$  লিখা হয় কারন AB বাহুর বিপরীত কোণ  $\angle C$ , অনুরূপে BC ও AC এর জন্য  $\angle A$  ও  $\angle B$

∴ সংজ্ঞা হতে,  $\Delta ABC$  এর পরিসীমা,

$$2S = AB + BC + CA$$

$$= c + a + b$$

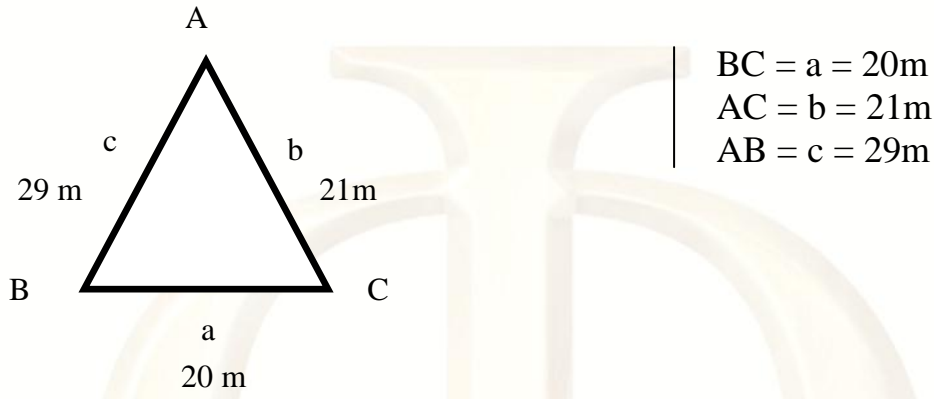




আসুন এবার আমরা একটি সমস্যা পর্যবেক্ষণ করি।

সমস্যা : একটি ত্রিভুজাকৃতি বালুর মাঠের দৈর্ঘ্য 20m, 21m এবং 29m হলে এর ক্ষেত্রফল কত?  
(৩১ বিসিএস শ্রিলি.)

সমাধান : খেয়াল করুন মাঠটাকে যদি একটি ত্রিভুজ কল্পনা করেন তবে 20m, 21m এবং 29m হল তার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য।



এই ধরনের সমস্যার ক্ষেত্রে আপনাকে যে সূত্রটি অবশ্যই মুখস্থ থাকতে হবে তা হল :

$$\Delta \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

আপনাদের প্রথমে বের করতে হবে  $s$  এর মান, যেটা আপনি পাবেন ত্রিভুজের পরিসীমার সূত্র থেকে।

আমরা জানি, ত্রিভুজের পরিসীমা =  $2s$  = ত্রিভুজটির বাহুগুলোর যোগফল

$$2S=BC+CA+AB$$

$$2s = 20 + 21 + 29$$

$$\Rightarrow 2s = 70$$

$$\Rightarrow s = 70/2 = 35$$





তখন আপনি খুব সহজেই ক্ষেত্রফল এর সূত্রটিতে  $s$ ,  $a$ ,  $b$  ও  $c$  এর মান বসিয়ে ক্ষেত্রফল বের করে ফেলতে পারবেন।

$$\begin{aligned}\therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{35(35-20)(35-21)(35-29)} \\ &= \sqrt{35 \times 15 \times 14 \times 6} \\ &= 210 \text{ বর্গমিটার}\end{aligned}$$

এখন চিন্তা করুন সমস্যাটিকে আর একটু দীর্ঘায়িত করলে কেমন হয়?

- (১) প্রতি বর্গমিটার ঘাস কাটতে যদি 11 টাকা প্রয়োজন হয় তবে সম্পূর্ণ মাঠের ঘাস কাটতে কত টাকা খরচ হবে?
- (২) ত্রিভুজটির শীর্ষ বিন্দু থেকে অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য  $AD$  এর মান কত হবে?

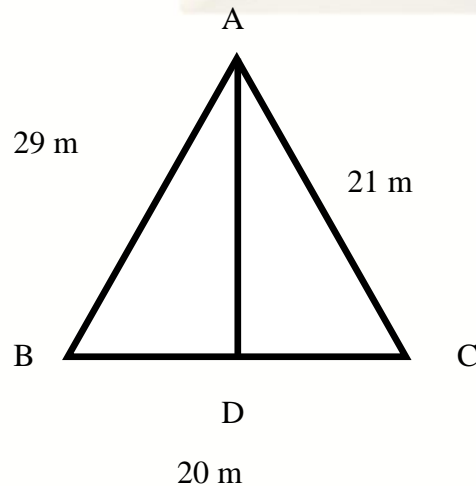
সমাধান :

- (১) ঐকিক নিয়মেই সমাধান বের করা সম্ভব।

1 বর্গমি. ঘাস কাটতে খরচ হয় 11 টাকা

$$\therefore 210 \text{ " " " " " } 11 \times 210 = 2310 \text{ টাকা}$$

- (২)





একটু খেয়াল করুন ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু A থেকে অঙ্কিত লম্ব AD ত্রিভুজটির উচ্চতা নির্দেশ করছে এবং BC বাহু তার ভূমি। আমাদের ক্ষেত্রফল জানা আছে। এক্ষেত্রে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এর Basic formula ব্যবহার করতে পারি।

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$

$$\Rightarrow 210 = \frac{1}{2} \times 20 \times AD$$

$$\Rightarrow 20AD = 210 \times 2$$

$$\Rightarrow AD = \frac{210 \times 2}{20} = \boxed{21m}$$

\* এবার অনুরূপ একটি সমস্যা নিজে করার চেষ্টা করুন:

সমস্যা : একটি ত্রিভুজাকৃতি মাঠের দৈর্ঘ্য 15m, 16m এবং 19m। মাঠটির ক্ষেত্রফল কত? প্রতি বর্গ মিটার ঘাস কাটতে 5 টাকা দরকার হলে সম্পূর্ণ মাঠের ঘাস কাটতে কত টাকা লাগবে।

\*\* এ রকম অনুরূপ বিগত বিসিএস ও সরকারী যে কোন চাকরির পরীক্ষায় আসা সমস্যাগুলো practice করুন। দেখবেন কত সহজেই তার সমাধান বের করতে পারবেন আপনি।

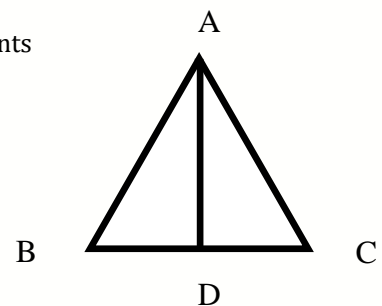
অনুরূপ সমস্যা :

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৫, ৬ ও ৭ মিটার। নিকটতম বর্গমিটারে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত? (২৫ বিসিএস প্রিলি) (নিজে করুন)

\* একটি ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ৮৮ বর্গগজ। ত্রিভুজটির লম্ব বিন্দু হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য ১২ গজ হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য কত? (১৭ বিসিএস প্রিলি)

Hints

AD= অঙ্কিত লম্ব= উচ্চতা



আমরা যদি না জাগি মা, কেমনে সকাল হবে?



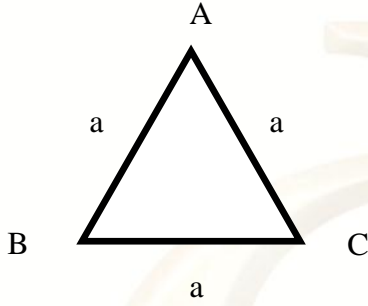
বিশেষ কিছু ত্রিভুজ এর ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত সমস্যা

সমবাহু ত্রিভুজ :

সমবাহু ত্রিভুজের বেলায় ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সহজ সূত্রটি হল :

$$\sqrt{\frac{3}{4}} a^2$$

মুখস্থ



[ a হলো সমান বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য]

সমস্যা : একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য  $(3\sqrt{3})$  মি. হলে ক্ষেত্রফল কত?

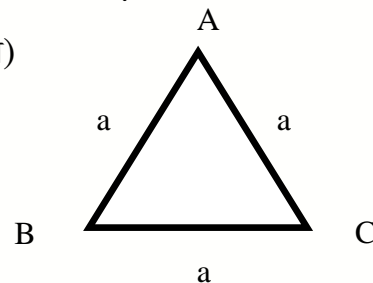
সমাধানঃ সমান বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য  $a = 3\sqrt{3}$  মিঃ

সুত্রমতে, ক্ষেত্রফল =  $\sqrt{\frac{3}{4}} a^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} (3\sqrt{3})^2 = 11.69$  বর্গমি.

অনুরূপ সমস্যা : একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য  $(5\sqrt{2})$  মি. হলে ক্ষেত্রফল কত? (নিজে করুন)

এবার আসুন আমরা বিগত বিসিএস পরীক্ষায় আগত কিছু সমবাহু ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমাধান নিয়ে আলোচনা করি।

সমস্যা : একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য 2মি বাড়ালে ক্ষেত্রফল  $3\sqrt{3}$  বর্গমি. বেড়ে যায়। সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত? (৩২ বিসিএস)



আমরা যদি না জাগি মা, কেমনে সকাল হবে?



ধরে নেয়া যাক প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য  $a$  মি. তাহলে এর ক্ষেত্রফল হবে  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

এখন বাহুর দৈর্ঘ্য 2মি বাড়ালে নতুন বাহুর দৈর্ঘ্য হবে  $(a+2)$  মি. এবং নতুন বাহুর ক্ষেত্রফল হবে

সূত্রমতে  $\frac{\sqrt{3}}{4} (a+2)^2$  যা তার প্রাথমিক ক্ষেত্রফলের  $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$  চেয়ে  $3\sqrt{3}$  বর্গমি. বেশী।

$$\therefore \text{প্রশ্নমতে, } \frac{\sqrt{3}}{4} (a+2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{4} (a+2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + 12)$$

$$\text{বা, } a^2 + 4a + 4 = a^2 + 12 \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ দুই পক্ষ থেকে বাদ দিয়ে}\right]$$

$$\text{বা, } a^2 + 4a + 4 - a^2 - 12 = 0$$

$$\text{বা, } 4a = 12 - 4$$

$$\text{বা, } 4a = 8$$

$$\text{বা, } a = \frac{8}{4} = 2 \text{ মি.}$$

অনুরূপ সমস্যা : নিজে করুন

১. সমবাহ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মি. কমে গেলে এর ক্ষেত্রফল  $2\sqrt{2}$  বর্গমি. কমে যায়। সমবাহ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

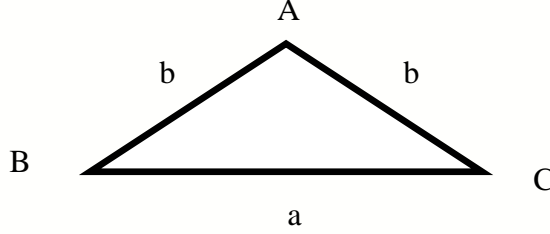
২. একটি সমবাহ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ১৬ মি. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত? (১২ বিসিএস)



সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ :

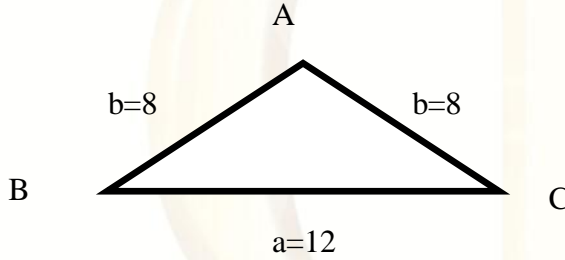
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বেলায় ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সরাসরি সূত্র :

$$\frac{a}{8} (\sqrt{8b^2 - a^2}) \text{ মুখস্থ}$$



$a$  = ভূমি,  $b$  = সমান বাহুদ্বয় এর দৈর্ঘ্য

সমস্যা : একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 12 একক এবং অপর প্রত্যেক বাহুদ্বয় 8 একক হলে এর ক্ষেত্রফল কত?



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সূত্রমতে,  $\Rightarrow \frac{a}{8} (\sqrt{8b^2 - a^2})$

$$= \frac{12}{8} (\sqrt{8 \times 8^2 - 12^2})$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{512 - 144}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{368}$$



$$= \frac{3}{2} \times 4\sqrt{23}$$

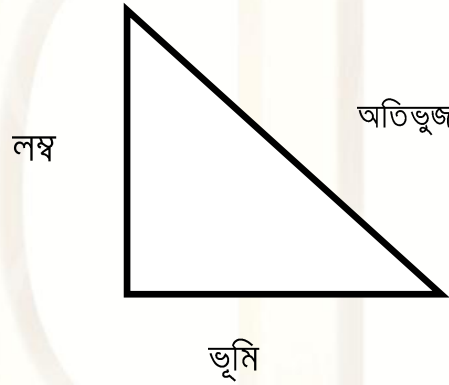
$$= 6\sqrt{23} \text{ বর্গ মি.}$$

অনুরূপ সমস্যা : নিজে করুন

একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ১৬ একক এবং অপর প্রত্যেক বাহুদ্বয় ১০ একক। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক। (২৩ বিসিএস প্রিলি. ২০ বিসিএস প্রিলি.)

### \*\*\* সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যা : (Most Important)

সমকোণী ত্রিভুজ তখনই বলব যার একটি কোণ সমকোণ। তীর্থক বৃহত্তর বাহুটাকে বলি এর অতিভুজ। যা সব সময় লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য থেকে বড়।



সমকোণী ত্রিভুজ দুই ধরনের হতে পারে।

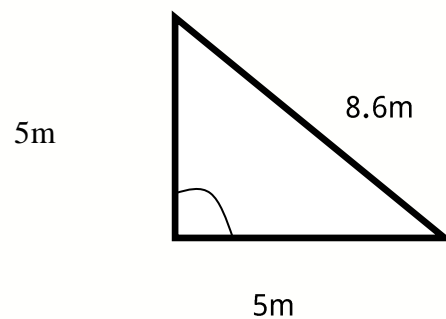
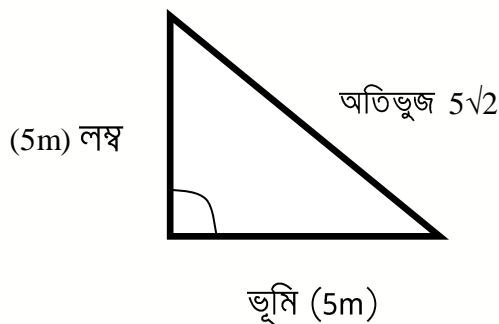
(i) সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ :

:

(লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য সমান)

(ii) সমকোণী বিষমবাহু ত্রিভুজ

(তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য অসমান)



আমরা যদি না জাগি মা, কেমনে সকাল হবে?



এবার একটা সমস্যার কথা ধরুন :

একটি বিষমবাহু ত্রিভুজের দুটি কোণ  $40^\circ$  ও  $50^\circ$ । তৃতীয় কোণটি কত?

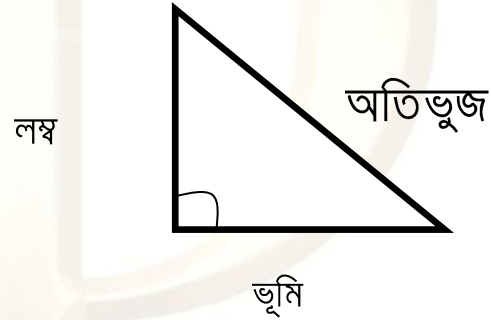
সমাধান : ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি  $180^\circ$ ।

$$\begin{aligned}\therefore \text{তৃতীয় কোণ} &= 180^\circ - (40^\circ + 50^\circ) \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

উত্তর সঠিক। কারণ সমকোণী ত্রিভুজ ও বিষমবাহু ত্রিভুজ হতে পারে, যখন তার লম্ব, ভূমি ও অতিভূজের দৈর্ঘ্য আলাদা অথবা ভিন্ন ভিন্ন মানের।

\* সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন ধরনের সমস্যা সমাধান করতে গেলে আপনাকে যে সূত্রটি মনে রাখতে হবে তা হল, পীথাগোরাসের উপপাদ্য। উপপাদ্যটি এ রকম (মুখস্থ করে রাখতে হবে)

$$(\text{অতিভূজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$$



সমস্যা : একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ও ভূমি যথাক্রমে 6m ও 8m। অতিভূজের দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান : পীথাগোরাসের উপপাদ্য

$$(\text{অতিভূজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 6^2 + 8^2 \text{ [ধরা হল অতিভূজ} = x \text{ মি.]}$$





$$\Rightarrow x^2 = 36 + 64$$

$$\Rightarrow x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{100} = 10m$$

সমস্যা: একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজের দৈর্ঘ্য  $6\sqrt{2}m$ । লম্বের দৈর্ঘ্য কত? ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : যেহেতু সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ।

সেহেতু লম্বের দৈর্ঘ্য = ভূমির দৈর্ঘ্য =  $x$  মি.

জানা আছে  $\Rightarrow$  (অতিভূজ) $^2$  = (লম্ব) $^2$  + (ভূমি) $^2$

$$\Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 72$$

$$\Rightarrow x^2 = 72 = 36$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{36} = 6m$$

$\therefore$  লম্ব = ভূমি =  $6m$

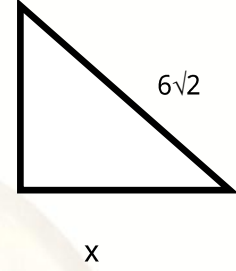
এখন, ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে Basic Formula ব্যবহার করা হতে পারে।

$$\Delta \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা} [\text{সমকোণী ত্রিভুজে লম্বই এর উচ্চতা}]$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

$$= 18m^2$$



মনে রাখুন, সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের সেটগুলি এরকম

$$4, 4, 4\sqrt{2} : 5, 5, 5\sqrt{2} : 6, 6, 6\sqrt{2} : 7, 7, 7\sqrt{2}$$

এখন আপনাকে যদি বলা হয় একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ও ভূমি  $9m$ । তাহলে অতিভূজ এর দৈর্ঘ্য কত?

এটা সমাধান না করেই কি বলে দেয়া সম্ভব নয়?



আবার ধরুন, একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজ এর দৈর্ঘ্য  $12\sqrt{2}m$ । বলুন তো এর লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

\*প্রসঙ্গ আমরা আলোচনা করলাম যখন সমকোণী ত্রিভুজ এর লম্ব ও ভূমি দৈর্ঘ্য সমান। এবার একটু আলোচনা করি যখন লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য সমান নয়।

সমস্যা: একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমি অপেক্ষা 2 সে.মি ছোট; কিন্তু অতিভূজ ভূমি অপেক্ষা 2 সে.মি বড়। অতিভূজের দৈর্ঘ্য কত? (৩৩ বিসিএস)

সমাধান : ধরুন, ভূমির দৈর্ঘ্য  $x$  সে.মি

তাহলে প্রশ্নমতে, লম্বের দৈর্ঘ্য  $= (x - 2)$  সে.মি

অতিভূজের দৈর্ঘ্য  $= (x + 2)$  সে.মি

শর্তমতে,  $(\text{অতিভূজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 = (x - 2)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4x - x^2 - x^2 = 4 - 4$$

$$\Rightarrow -x^2 + 8x = 0$$

$$\Rightarrow -x(x-8) = 0$$

অথবা,  $x-8 = 0$

$$\Rightarrow x-8 = 0$$

$$\Rightarrow x = 8 = \text{ভূমির দৈর্ঘ্য}$$

$$\therefore \text{অতিভূজের দৈর্ঘ্য} = 8 + 2 = \boxed{10 \text{ সে.মি}}$$

$$\text{লম্বের দৈর্ঘ্য} = 8 - 2 = 6 \text{ সে.মি}$$

খেয়াল করুন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর ব্যবধান 2 তখন বাহুগুলো এরকম 6,8,10। যখন ব্যবধান 1 তখন 3,4,5 এবং যখন ব্যবধান 3 তখন 9,12,15



এখন যদি অনুরূপ সমস্যা বলা হয়, তাহলে মুখে মুখেই তার উত্তর দেয়া সম্ভব।

\* একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভূমি থেকে 3 সে.মি বড়। লম্ব ভূমি থেকে 3 সে.মি ছোট।

বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য কত?

মুখস্থ করে লিখে ফেলুন 9,12,15 । এখানে অতিভুজ 15 সে.মি. (বৃহত্তর বাহু)। প্রশ্নে লম্ব ভূমি অপেক্ষা ছোট। তাই লম্ব 9 সে.মি ও ভূমি 12 সে.মি.।

\*\* মুখস্থ করে রাখতে না পারলে গাণিতিক উপায়েও করতে পারেন। মুখস্থ করে রাখলে আপনার সময় বেচে যাবে।

কিছু সমকোণী ত্রিভুজের সেট চিনে রাখুন :

3,4,5   6,8,10   9,12,15   5,12,13

7,24,25   8,15,17

\* বেশীর ভাগ সময়ই উপরোক্ত সেট সংক্রান্ত প্রশ্ন করা হয় সরকারী পরীক্ষায়।

পীথাগোরাসের উপপাদ্য সংক্রান্ত সমস্যা :

অনেক সময় পরীক্ষায় পীথাগোরাসের উপপাদ্য সংক্রান্ত কিছু সমস্যা দেয়া হয়। যা সমাধান করার পদ্ধতি আপনাকে জানতে হবে। এবার আসুন এরকম একটা সমস্যা নিয়ে আলোচনা করি।

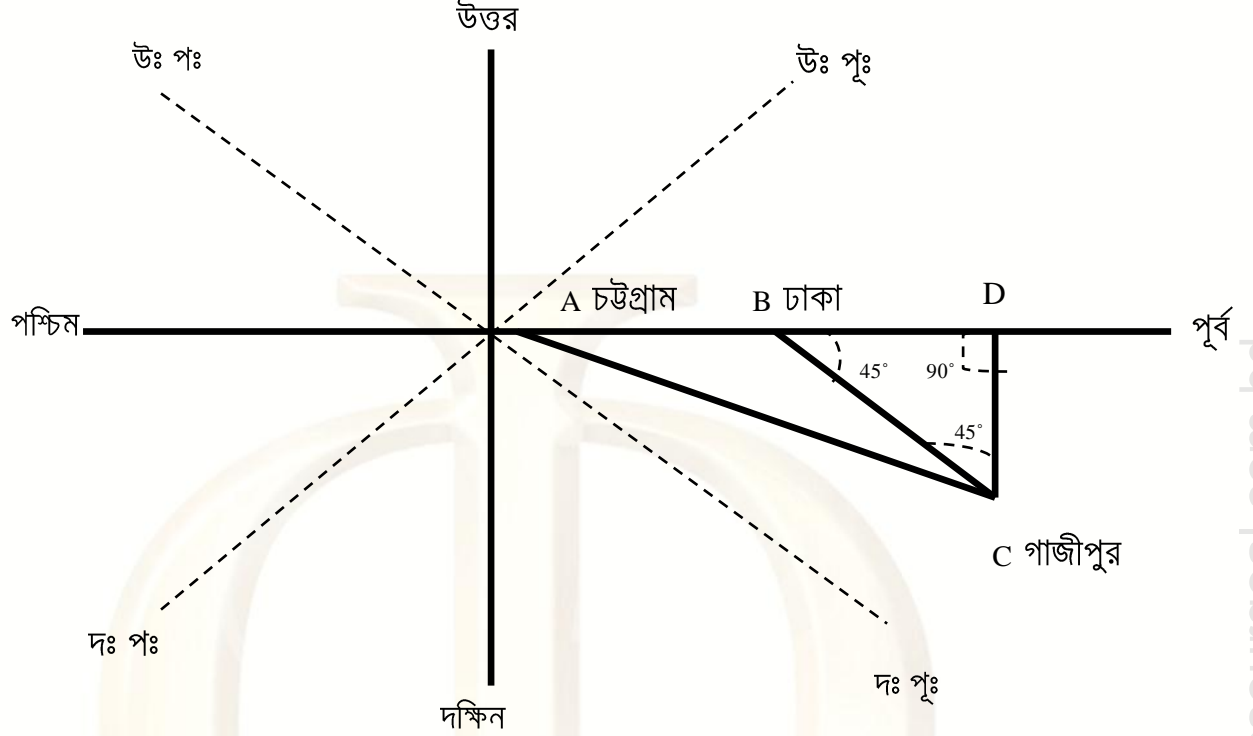
সমস্যা : ঢাকা শহর চট্টগ্রাম থেকে 55 মাইল দূরে পূর্বে অবস্থিত। গাজীপুর শহর ঢাকা থেকে 30 মাইল দক্ষিণপূর্বে অবস্থিত। বের করুন চট্টগ্রাম ও গাজীপুরের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

AB=55 মাইল

BC= 30 মাইল



সমাধান : প্রথমে একটি মানচিত্র একে ফেলুন-



ধরুন B হল ঢাকা শহর যা চট্টগ্রাম শহর A থেকে ৫৫ মাইল পূর্বে এবং গাজীপুর শহর C যা B (ঢাকা) থেকে ৩০ মাইল দক্ষিণপূর্বে অবস্থিত। বের করতে ঢাকা ও গাজীপুরের দূরত্ব অর্থাৎ AC.

মুখস্থ করুন

দক্ষিণ : পূর্ব ; উত্তর : পূর্ব ; উত্তর : পশ্চিম ; দক্ষিণ : পশ্চিম এই সবক্ষেত্রে কোণ  $45^\circ$  হবে।

এখানে C বিন্দু B থেকে দক্ষিণ-পূর্বে অবস্থিত। তাই  $\angle CBD = 45^\circ$  হবে



শুরুত C থেকে D বরাবর একটা লম্ব টানুন। খেয়াল করুন ACD একটি সমকোণী ত্রিভুজ হয়ে গেছে। তখন আপনি পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে AC এর দূরত্ব বের করে ফেলতে পারেন।  $\Delta ACD$ -এ

$$\begin{aligned}(\text{অতিভূজ})^2 &= (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2 \\ \Rightarrow (AC)^2 &= (CD)^2 + (AD)^2 \\ \Rightarrow (AC)^2 &= (CD)^2 + (AB + BD)^2 \quad \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

এখানে BD এর মান অজানা।

খেয়াল করুন  $\Delta BCD$  ও একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এটি একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। [ দুই কোণ সমান অর্থাৎ  $45^\circ$ ]

°°  $\angle CDB = 90^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$  (দক্ষিণ পূর্ব বলে)  
°°  $\angle BCD = 45^\circ$ , আবার  $\angle CBD = \angle BCD = 45^\circ$   
 $\angle CBD$  এর বিপরীত বাহু CD এবং  $\angle BCD$  এর বিপরীত বাহু BD

$$\therefore BD = CD$$

$\Delta ABCD$  -এ পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\begin{aligned}(BC)^2 &= (BD)^2 + (CD)^2 \\ \Rightarrow (30)^2 &= (BD)^2 + (BD)^2 \\ \Rightarrow (30)^2 &= 2BD^2 \\ \Rightarrow 2BD^2 &= 900 \\ \Rightarrow BD^2 &= 900/2 = 450 \therefore \\ \Rightarrow BD &= 15\sqrt{2} \text{ মাইল} = CD\end{aligned}$$

এখন  $CD = 15\sqrt{2} = BD$ ,  $AB = 55$  মানগুলো (1)-এ বসান

$$\begin{aligned}AC^2 &= (15\sqrt{2})^2 + (55 + 15\sqrt{2})^2 \\ &= 450 + (55^2 + 2 \cdot 55 \cdot 15\sqrt{2} + (15\sqrt{2})^2)\end{aligned}$$



$$= 450 + 3025 + 2333.45 + 450 = 6258.45$$

$$AC = \sqrt{6258.45} = 79.11 \cong 79 \text{ মাইল।}$$

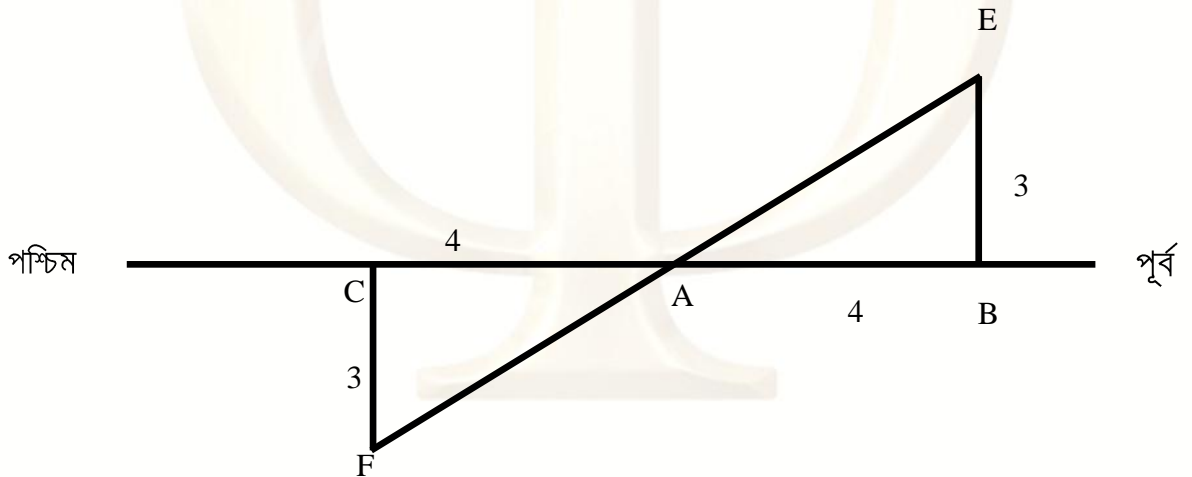
অনুরূপ কিছু সমস্যা সমকোণী ত্রিভুজ ও পীথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে

(1) City B is 5 miles east of City A. City C is 10 miles southeast of City B. Which of the following is the closest to the distance from City A to City C.

\* B শহর A শহরের 5 মাইল পূর্বে অবস্থিত। C শহর B শহর থেকে 10 মাইল দক্ষিণপূর্বে অবস্থিত। নিচের কোনটি A থেকে C শহরের নিকটতম দূরত্বে হবে? (বিসিএস-২৯)

(2) Two men, starters at the same point, walk in opposite direction for 4 meters, turn left and walk another 3 meters. What is the distance between them?

\* দুটি লোক একই বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে বিপরীত দিকে হাটা শুরু করে 4 মি. অতিক্রম করলো। তারপর দুজনেই তাদের বামে মোড় নিল এবং আরও 3মি. অতিক্রম করল। তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? (২৮ বিসিএস প্রিলি.)



সমাধানঃ ধরুন A সেই নির্দিষ্ট বিন্দু যেখান থেকে লোক দুজন বিপরীত দিকে হাটা শুরু করেছে। তাহলে ধরুন তখন A থেকে পূর্ব দিকে 4m যেয়ে B বিন্দুতে পৌঁছাল এবং





সেখান থেকে বামে মোড় নিয়ে 3m হেঁটে E বিন্দুতে পৌঁছাল, অর্থাৎ AB=4m, BE=3m, অপরজন A থেকে পশ্চিম দিকে 4m যেয়ে C বিন্দুতে পৌঁছাল এবং সেখান থেকে বামে মোড় নিয়ে 3m হেঁটে F বিন্দুতে পৌঁছাল। অর্থাৎ AC=4m, CF=3m. (যেহেতু তারা বিপরীত দিকে হাটা শুরু করেছে তাই তারা একই দিকে মোড় নিলেও দুজন উল্টো দিকে যাবে) এখন বলা হয়েছে এ অবস্থায় তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব EF= কত হবে?

খোঁজ করুন, এখানে  $\triangle ABF$  ও  $\triangle ACF$  দুটোই সমকোণী ত্রিভুজ কারন  $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ$ . এবং তাদের লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য ও একই, তাই তাদের অতিভুজ ও একই হবে।

এখন  $\triangle ABF$  এ  $AE^2 = AB^2 + BE^2$

$$\Rightarrow AE^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow AE^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{25}$$

$$= 5$$

আবার ত্রিভুজ  $\triangle ACF$  এ অতিভুজ  $AF = 5$  হবে। [কারন তাদের লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য একই]

$$\therefore \text{দূরত্ব } EF = AE + AF$$

$$= 5 + 5$$

$$= \boxed{10\text{m}}$$

\* একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য ১২ সে.মি. হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত সে.মি.। (২৭ বিসিএস প্রিলি.)

\* সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে 3 ও 4 cm হলে, অতিভুজের মান কত? (১৪ বিসিএস প্রিলি.)

\* যে ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুটি কোণের সমষ্টির সমান তাকে কি বলে। (১০ বিসিএস প্রিলি.)

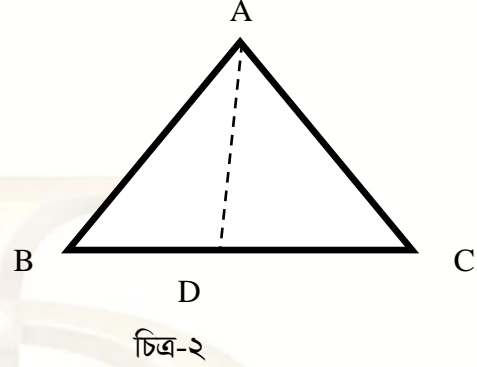
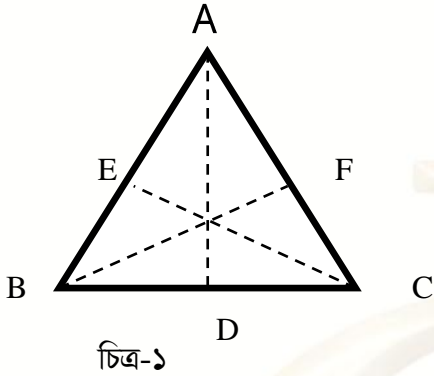




### ত্রিভুজের মধ্যমা সংক্রান্ত সমস্যা :

মুখস্থ করে ফেলুন :

ত্রিভুজের যে কোন একটি মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান দু'ভাগে বিভক্ত করে এবং বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে।



AD, BE ও CF সবগুলো ত্রিভুজের মধ্যমা।

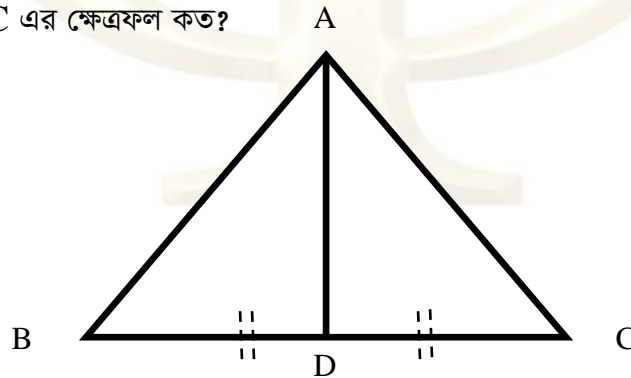
AD মধ্যমার ক্ষেত্রে  $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ ;  $BD = CD$

BE মধ্যমার ক্ষেত্রে  $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle CBE$ ;  $AE = CE$

CF মধ্যমার ক্ষেত্রে  $\Rightarrow \triangle ACF = \triangle BCF$ ;  $AF = BF$

\*\* চিত্র (২) এ ধরুন  $BD \neq CD$  তাহলে AD কে মধ্যমা বলা যাবে না।

সমস্যা :  $\triangle ABC$  এর বাহুগুলি এমন যেন AD মধ্যমা দ্বারা গঠিত  $\triangle ABD$  এর ক্ষেত্রফল 3 বর্গমি.।  $\triangle ABC$  এর ক্ষেত্রফল কত?



অঙ্কটি দ্রুতই সমাধান করে ফেলা সম্ভব।  $\therefore$  AD মধ্যমা।

$\therefore \triangle ABD$  এর ক্ষেত্রফল =  $\triangle ACD$  এর ক্ষেত্রফল।



$$\Delta ABC\text{- এর ক্ষেত্রফল} = \Delta ABD + \Delta ACD$$

$$= \Delta ABD + \Delta ABD$$

$$= 3 + 3$$

$$= 6 \text{ বর্গমি.}$$

\* মোট কথা  $\Delta ABD$  এর ক্ষেত্রফলকে 2 দিয়ে গুণ করলেই  $\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে।

এবার চিন্তা করুন উপরোক্ত সমস্যাটিতে  $\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রফল বলে দেয়া আছে,  $\Delta ACD$  এর ক্ষেত্রফল বের করতে হবে। এখন  $\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রফল 2 দিয়ে ভাগ করে দিন তাহলেই  $\Delta ACD$  এর ক্ষেত্রফল পাবেন।

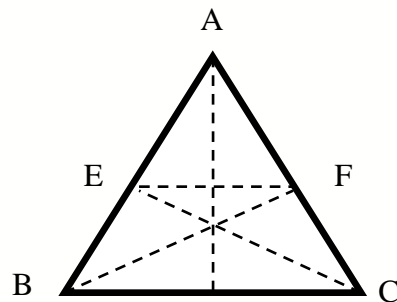
কারণ  $\Rightarrow$  মধ্যমার ক্ষেত্রে  $\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রফল  $\Delta ABD$  বা  $\Delta ACD$  এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

বিপরীতক্রমে  $\Delta ABD$  বা  $\Delta ACD$  এর ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল  $\Delta ABC$  এর অর্ধেক।

নিজে করুন :

সমস্যা : বিষমবাহু  $\Delta ABC$  এর বাহুগুলির মান এমনভাবে নির্ধারিত হয় যে, AD মধ্যমা দ্বারা গঠিত  $\Delta ABD$  এর ক্ষেত্রফল x বর্গমি.।  $\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রফল কত? (৩৪ বিসিএস প্রিলি.)

সমস্যা :  $\Delta ABC$  এর  $AE=CF$ ।  $\Delta BEC$  এর ক্ষেত্রফল ৪৮ বর্গফুট হলে  $\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রফল কত বর্গফুট?

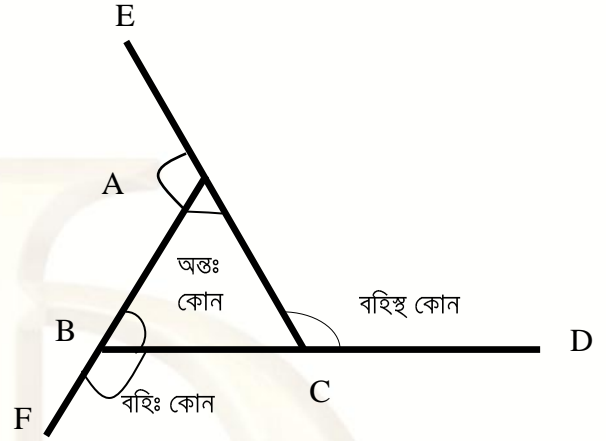
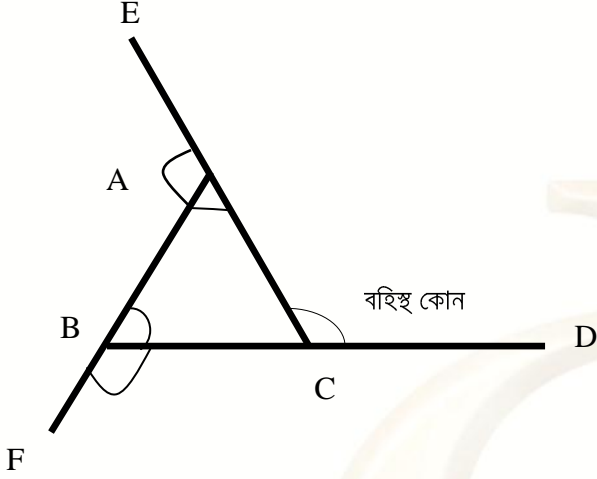




### ত্রিভুজের অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ কোণের মান নির্ণয় :

দুটি ব্যাপার মুখস্থ রাখবেন:

- ত্রিভুজের যে কোণ বহিঃস্থ কোণ, তার বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান। (চিত্র-১)
- ত্রিভুজের যে কোণ অন্তঃস্থ কোণ এবং তার সংশ্লিষ্ট বহিঃস্থ কোণের যোগফল  $180^0$ । (চিত্র-২)



শর্ত (১) মতে, বহিঃস্থ কোণ  $\angle ACD =$  অন্তঃস্থ কোণ  $\angle A +$  অন্তঃস্থ  $\angle B$

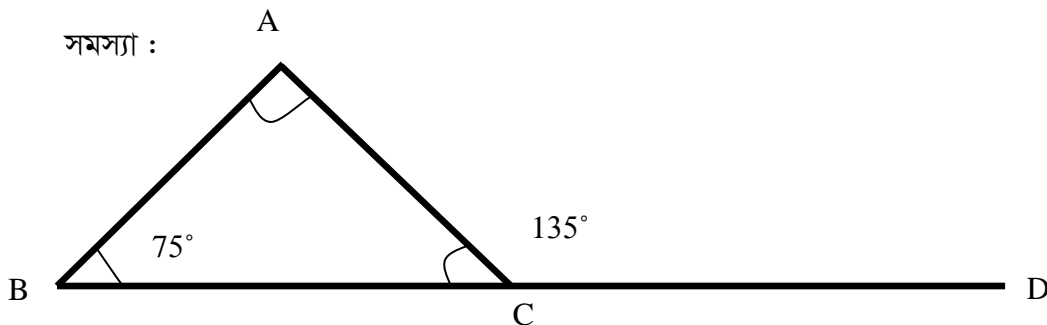
অনুরূপভাবে, বহিঃস্থ কোণ  $\angle BAE = ?$

বহিঃস্থ কোণ  $\angle CBA = ?$

শর্ত (২) অন্তঃস্থ কোণ  $\angle C +$  সংশ্লিষ্ট বহিঃস্থ কোণ  $\angle ACD = 180^0$  (যা সন্নিহিত কোণ নামে পরিচিত)

তেমনি অন্তঃস্থ  $\angle B +$  বহিঃস্থ  $\angle CBF = 180^0$

অন্তঃস্থ  $\angle A +$  বহিঃস্থ কোণ  $\angle BAE = 180^0$



সমস্যা :



চিত্রে  $\angle ACD = 133^\circ$  এবং  $\angle B = 75^\circ$  হলে  $\angle A = ?$

খোয়াল করুন  $\angle ACD$  ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ:

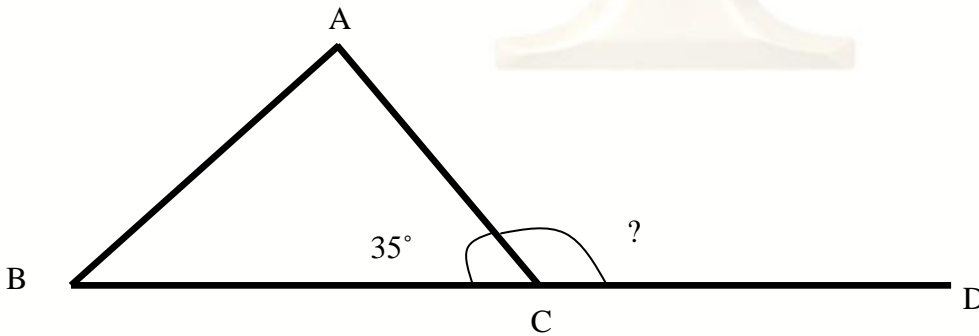
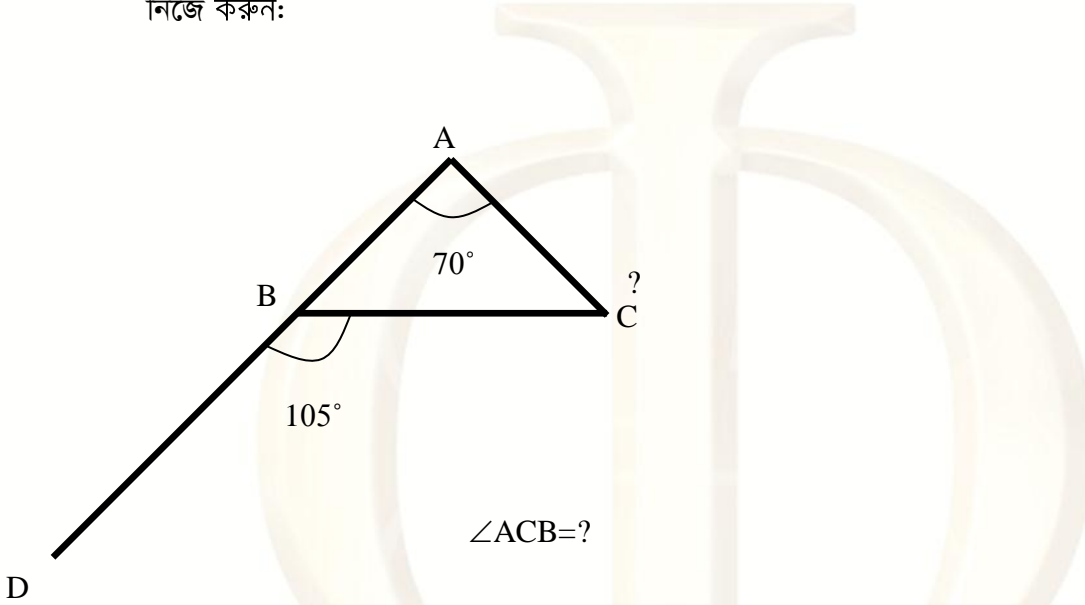
শর্ত (১) খোয়াল করুন

বহিঃস্থ কোণ  $\angle ACD =$  বিপরীত অন্তঃস্থ  $\angle A +$  বিপরীত অন্তঃস্থ  $\angle B$

$$\Rightarrow 135^\circ = \angle A + 75^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ \text{ (Ans)}$$

নিজে করুন:



$\angle ACD = ?$



*School of Excellence*  
Crafting Sunshine...

House-452; Lane-8; DOHS Baridhara  
Dhaka-1206; Bangladesh  
Phone : 01714 555 830  
E-mail: soe\_bd@yahoo.com  
Website: www.soebd.org

Prepared By:

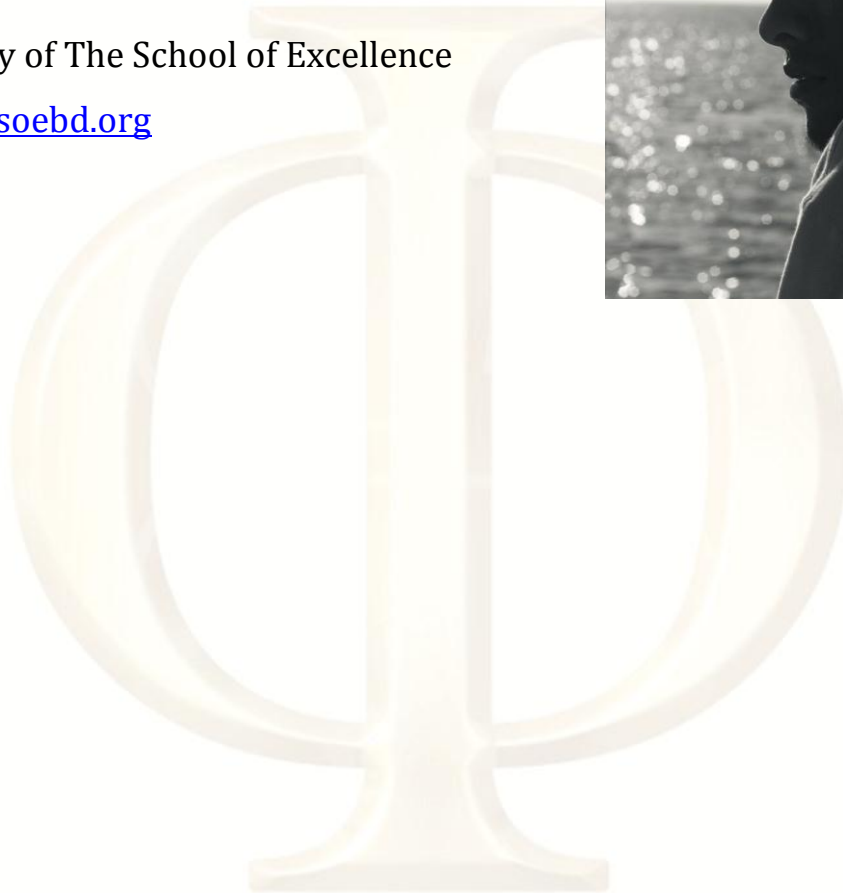
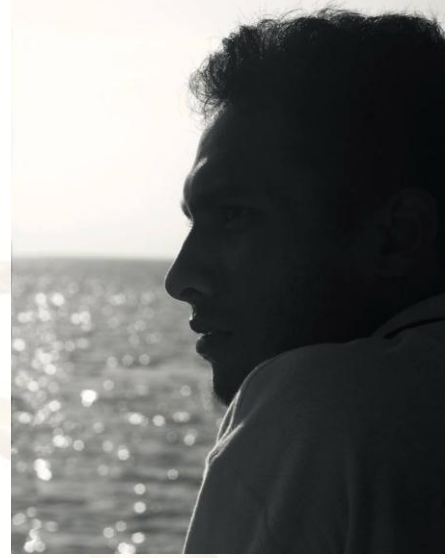
Md. Hamidur Rahman

Mechanical Engineer

BUET.

Society of The School of Excellence

[www.soebd.org](http://www.soebd.org)



www.bcsourgoal.com.bd

আমরা যদি না জাগি মা, কেমনে সকাল হবে?

[www.bcsourgoal.com.bd](http://www.bcsourgoal.com.bd)