নিউরনে আবারো অনুরণন

মুহম্মদ জাফর ইকবাল
মোহাম্মদ কায়কোবাদ

সূচি

গণিতের জন্যে ভালোবাসা

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

নিউরনে অনুরণনের এক বছর পূর্তি হয়েছে। আমরা প্রথম যখন এই কার্যক্রম শুরু করেছিলাম তখন সবার মনে পুরো ব্যাপারটি নিয়ে এক ধরনের সন্দেহ ছিল। অল্প কয়দিন চেষ্টা করে আমরা পুরো ব্যাপারটির কথা ভুলে যাব— মোটামুটি সবাই সে ব্যাপারে নিশ্চিত ছিল। কিন্তু অবিশ্বাস্য হলেও সত্যি প্রথম আলোতে প্রতি সপ্তাহে আক্ষরিক অর্থে হাজার হাজার ছেলে-মেয়ে গণিতের সমাধান করে পাঠাচ্ছে। বছরের শেষে সমস্যাগুলো নিয়ে যে বইটি বের করেছিলাম সেটিও দেখতে দেখতে কয়েক সংস্করণ বের হয়ে গেছে। শুধু তাই নয়, নিউরনে অনুরণনের গণিত অলিম্পিয়াডে আক্ষরিক অর্থেই হাজার হাজার ছেলেমেয়ে কাগজ-কলম নিয়ে গণিত করতে চলে এসেছে। গণিতের সেই আনন্দোৎসবে একেবারে ছোট শিশু থেকে কলেজ-বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রীরা আছে। নাচ-গান নেই ব্যান্ডসঙ্গীত নেই— শুধু গণিত করার জন্যে ছেলেমেয়েরা চলে আসছে সেই অবিশ্বাস্য দৃশ্য দেখার জন্যে তাদের অভিভাবকেরাও চলে আসছেন। গণিতের সেই মিলনমেলায় শুধু যে গণিত করেছে তা নয়, গণিত নিয়ে কথা বলেছে, গণিত নিয়ে প্রশ্ন করেছে। বুদ্ধিদীপ্ত প্রশ্ন শুনে আমরা মুগ্ধ হয়েছি, উত্তর দিতে গিয়ে আমাদেরও চিন্তা-ভাবনা করতে হয়েছে।

আমাদের দেশের নতুন প্রজন্মের সৃজনশীলতা নেই— এ ধরনের একটা অভিযোগ আমরা সব সময়ই করি। কিন্তু সমস্যা হচ্ছে আমরা অভিযোগ করি ঠিকই, তার সমাধানটা কখনো বলে দিই না। নিজেদের সৃজনশীলতা ব্যবহার করার ছোট একটি সুযোগ পেয়ে আমাদের ছেলেমেয়েরা মহা উৎসাহে সেটি গ্রহণ করেছে দেখে আমি মুগ্ধ হয়েছি। আমি কখনোই আমাদের দেশের নতুন প্রজন্মের উপর থেকে বিশ্বাস হারাই নি— গণিতের জন্যে তাদের ভালোবাসা দেখে আমার সেই বিশ্বাস আরো একশ গুণ বেড়ে গিয়েছে।

গণিত হচ্ছে বিজ্ঞানের ভাষা— বাংলা না জানলে যেরকম জীবনানন্দ দাশের কবিতা পড়া যায় না ইংরেজি না জানলে যেরকম হ্যারি পটার পড়া যায় না ঠিক সেরকম গণিত না জানলে বিজ্ঞান পড়া যায় না। খুব কষ্ট করে কেউ যদি পড়ার চেষ্টাও করে সেটি হবে অর্থহীন পড়া। বিজ্ঞানের আসল সৌন্দর্য তারা খুঁজে পাবে

না। তাই শুধু গণিতের জন্যে নয়— বিজ্ঞানের জন্যে প্রযুক্তির জন্যে হলেও আমাদের গণিত শিখতে হবে। আইনস্টাইনের মতো বড় বিজ্ঞানীও তার জেনারেল থিওরি অব রিলেটিভিটি প্রকাশ করার জন্যে নতুন করে গণিত শিখেছিলেন।

আমাদের খুব দুর্ভাগ্য যে গণিতের মতো এরকম চমৎকার একটা বিষয়কে আমরা সবার কাছে নীরস এবং ভীতিকর একটা বিষয় হিসেবে প্রমাণ করে বসে আছি। আমাদের নিউরনে অনুরণনের কার্যক্রমের প্রধান উদ্দেশ্য— সবার কাছে প্রমাণ করা গণিত মোটেও রসহীন বিষয় নয়, এটি বিভীষিকা নয়, গণিত হচ্ছে পৃথিবীর সবচে' মজার বিষয়। যারা আমাদের কথা বিশ্বাস করবে না তাদের জন্যে আমরা বড় বড় গণিতবিদদের জীবনী মনে করিয়ে দিয়েছি। যেসব বিষয়কে ভয়ে ভয়ে দূরে সরিয়ে রাখা হয় সেগুলো সোজা কথায় ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করেছি। উদ্দেশ্য আমাদের একটিই— গণিতকে ভয় পাবার কিছু নেই, গণিতকে ভালোবাসতে হবে।

আমরা অপেক্ষা করে যাচ্ছি যখন গণিত, বিজ্ঞান এবং এক সময়ে পড়াশোনা এবং গবেষণার পুরো ব্যাপারটা আমাদের কালচার হয়ে দাঁড়াবে। নতুন প্রজন্ম যদি চায় তাহলে সে দিন খুব দূরে নেই।

একটি সংস্কৃতির সূচনায় নিউরনে অনুরণন

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

নিউরনে অনুরণন কার্যক্রমের এক বছর হলো। ছাত্র-ছাত্রীদের বহুল অংশগ্রহণ আমাদের দারুণভাবে অনুপ্রাণিত করেছে। শুধু ঢাকায়ই নয়, নারায়ণগঞ্জ এবং রাজবাড়িতে স্বতঃস্ফূর্ত অংশগ্রহণে গণিতের অলিম্পিয়াড আয়োজিত হয়েছে। বিভিন্ন এলাকার ছাত্র এবং উৎসাহী গণিতানুরাগীদের দাবি— এ ধরনের গণিতের অলিম্পিয়াড আরো বেশি করা। শুধু স্কুল কলেজের ছাত্র-ছাত্রীই নয় বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্ররা এবং অনেক পেশাজীবীই আমাদের এই সমস্যা নিয়ে ভাবেন নির্ভেজাল আনন্দ পাওয়ার জন্য। আমাদের এই কার্যক্রমকে গতিশীল করার জন্য প্রতিযোগীসহ শুভানুধ্যায়ী সবাইকে ধন্যবাদ জানাই।

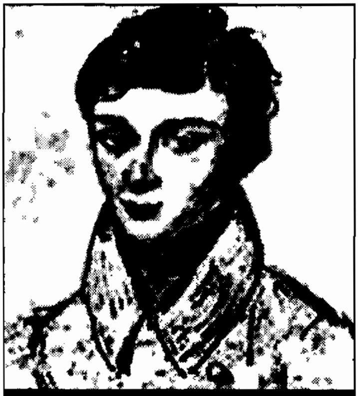
আজ থেকে ২৫/৩০ বছর পূর্বে অধুনালুপ্ত সোভিয়েত ইউনিয়নের কয়েকটি চিত্র তুলে ধরি। বাস কিংবা ট্রলিবাসে বসে আছে এক তরুণ। এমন সময় এক বৃদ্ধা স্টেশন থেকে উঠে পড়ল। সঙ্গে সঙ্গে যন্ত্রচালিতের মতো তরুণ তার জায়গাটি ছেড়ে দিল প্রবীণ নাগরিকের জন্য। আবার পরের স্টেশন থেকে এক ছাত্র উঠে এক হাতে বাসের রেলিং ধরে অন্য হাতে বই রেখে যেই পড়া শুরু করল অশীতিপর বৃদ্ধা তরুণ ছাত্রের পড়ার সুবিধার্থে জায়গা ছেড়ে দিল। এটা হলো জ্ঞানার্জনের অনুকূল একটি সংস্কৃতি। অধুনালুপ্ত সোভিয়েত ইউনিয়নে শিশুরা স্কুলে যাওয়ার আগেই দাবার স্কুলে যেত। ৩২টি ঘুঁটি সামনে নিয়ে ৫/৬ বছরের দুটি শিশু চেয়ারের উপর বসে নয় দাঁড়িয়ে খেলছে। খেলছে বললে কিঞ্চিৎ ভুল হবে, ভাবছে। সদাচঞ্চল হাতটি এতগুলো ঘুঁটির একটিও স্পর্শ করছে না, ভাবছে আর ভাবছে। যে শিশুটি তার খাওয়া-দাওয়া এবং অন্যান্য দৈনন্দিন কাজ মায়ের সাহায্য ছাড়া করতে পারে না সেই শিশু দাবার চাল দেয়ার আগে কত কিছু ভাবছে যা আমাদের সমাজের উঁচু স্তরের দায়িত্ববান লোকেরাও করতে পারে না। আমরা সবাই চাল দিয়ে চিন্তা করি, চিন্তা করে চাল দিই না। বাংলাদেশে আমরা এই নতুন সংস্কৃতির সূচনা চাই। আমাদের শিশু, ছেলে-মেয়ে, ছাত্র-ছাত্রী, যুবক-যুবতী, মধ্যবয়সী, প্রবীণ সবাই ভাববে, চিন্তা করবে, মাথা ঘামাবে, একটি কম্বিন্যাটরিয়াল সমস্যা সমাধান করে নিষ্কলুষ আনন্দ উপভোগ করবে, একটি সম্পাদ্য করে নিজের যৌক্তিক বিকাশে আস্থাবান হবে, ধাঁধা সমাধান করে আশপাশের সবাইকে নিয়ে আনন্দ ভাগ করে নেবে, নানা জটিল সমস্যা সমাধান

করে মেধার বিকাশ ঘটাবে এটা আমাদের প্রত্যাশা। আর এই বিকশিত মেধা দিয়ে এই দরিদ্র দেশের নানা সমস্যা সৃজনশীলভাবে সমাধান করে আমাদের প্রিয় মাতৃভূমিকে অগ্রগতির পথে নিয়ে যাবে— এ হলো আমাদের স্বপ্ন। সেই প্রত্যাশা মেটাতে আর স্বপ্ন পূরণে স্কুল-কলেজে, এলাকায় এলাকায়, জেলায় জেলায় এবং জাতীয় পর্যায়ে মহাসমারোহে গণিতসহ অন্যান্য বিষয়ে অলিম্পিয়াড অনুষ্ঠিত হোক, আমাদের দেশের ছেলেমেয়েরা উন্নত দেশের ছেলেমেয়েদের সঙ্গে সমতালে আন্তর্জাতিক অলিম্পিয়াডসমূহে সাফল্যের সঙ্গে অংশগ্রহণ করে আমাদের দেশের জ্ঞান-বিজ্ঞান বুদ্ধিমত্তার উজ্জ্বলতর ভাবমূর্তি বহির্বিশ্বে প্রতিষ্ঠিত করুক এই কামনা করি।

একরাতের গণিতবিদ এভারিস্ট গ্যালোয়া

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

আজ তোমাদের এমন একজন গণিতবিদের কথা বলব যার জীবনটি এত বিচিত্র যে-কোনো গল্প উপন্যাস বা নাটকেও সেরকম বিচিত্র জীবন খুঁজে পাওয়া যাবে না। রূপকথার রাজপুত্রের মতো সেই প্রায় কিশোর গণিতবিদ প্রথমবার গণিতের সাথে পরিচয় হয় যখন তার বয়স ষোলো এবং তার মৃত্যু হয় যখন তার বয়স কুড়ি এবং গণিতের ওপর তার পুরো কাজগুলো লিখে রাখে মাত্র এক রাতে এবং তারপরও গণিতের জগৎ তাকে স্মরণ করে গভীর ভালোবাসায় এবং শ্রদ্ধায়।



এভারিস্ট গ্যালোয়া

এই গণিতবিদের নাম এভারিস্ট গ্যালোয়া (Everiste Galois)। ফরাসি বিপ্লবের বাইশ বৎসর পর 1811 সালের 25 অক্টোবর প্যারিসের দক্ষিণে একটি ছোট গ্রাম বুর্গ লা রিন (Bourg-La-Reine)-এ তার জন্ম হয়েছিল। সেই সময়টি ছিল অস্থির এবং অস্থিতিশীল এক. সময়। নেপোলিয়ান বোনাপার্টে তখন সাফল্যের চূড়ান্তে কিছু তখন তার দুর্ভাগ্যের সূচনা শুরু হয়ে গেছে। তিনি ক্ষমতায় আসছেন এবং যাচ্ছেন কখনো দেশে রাজতন্ত্র কখনো প্রজাতন্ত্র (রিপাবলিক) এবং এসব কিছু নিয়ে ফ্রান্সে তখন এক ভয়ঙ্কর টানাপোড়েন।

এরকম অবস্থায় গ্যালোয়া প্রথম স্কুলে যান বারো বৎসর বয়সে, স্কুলের নাম লিসে দ্য লুই ল গ্রঁ (Lycee de Louis Le Grand)। তখনকার দিনে সেটি ছিল একটি নামকরা স্কুল কিন্তু সেখানে খুব কড়া শাসন। স্কুলটি কার হাতে যাবে তখন সেটি নিয়ে খুব আলোচনা চলছে, জোর গুজব স্কুলটি ধর্মযাজকদের হাতে দিয়ে দেয়া হবে। ধর্মযাজকরা রাজতন্ত্রের পক্ষে, কিন্তু ছাত্রেরা প্রজাতন্ত্র বা রিপাবলিকের পক্ষে। তারা কিছুতেই চায় না স্কুলটি ধর্মযাজকদের হাতে ফিরিয়ে দেয়া হোক, সেটি নিয়ে তারা আন্দোলন করছে। স্কুলের প্রিন্সিপাল সেই আন্দোলনের খবর পেয়ে একদিন আন্দোলনের পরিকল্পনাকারী ডজন খানেক

ছাত্রকে স্কুল থেকে বহিষ্কার করে দিলেন। পরদিন স্কুলের ছাত্র-ছাত্রীদের ডেকে বলা হলো তারা যেন রাজতন্ত্রের সমর্থনে অষ্টাদশ লুইয়ের প্রতি আনুগত্য স্বীকার করে। উঁচু ক্লাশের তেজস্বী ছাত্রেরা রাজি হলো না, সাথে সাথে আরো একশ ছাত্রকে স্কুল থেকে বহিষ্কার করে দেয়া হলো। গ্যালোয়া তখন ছোট, মাত্র স্কুলে ভর্তি হয়েছে কিন্তু তার পরেও উঁচু ক্লাশের ছাত্রদের প্রতি এই অবিচার তার মনে একটা গভীর রেখাপাত করেছিল, রাজতন্ত্রের জন্যে ঘৃণা, প্রজাতন্ত্র বা রিপাবলিকের জন্যে ভালোবাসা এবং সকল অন্যায়ের বিরুদ্ধে একটা বিদ্রোহের ভাব তখনই তার ভেতরে দানা বেঁধে উঠতে থাকে।

সারা ফ্রান্সে যখন এক ধরনের অস্থিরতা কিশোর গ্যালোয়া তখন তার স্কুলে পড়াশোনা করছে। পড়াশোনায় মোটামুটি তবে চোখে পড়ার মতো কিছু নয়। কিন্তু হঠাৎ করে শান্তশিষ্ট নিরীহ গোবেচারা ধরনের এই কিশোরটির মাঝে ভয়ঙ্কর একটা পরিবর্তন দেখা গেল। তখন তার বয়স ষোলো এবং স্কুলে তার ক্লাসে প্রথমবারের মতো গণিত বিষয়টি পড়ানো শুরু হয়েছে। গণিতের বিস্ময়কর সৌন্দর্য দেখে গ্যালোয়ার ভেতরে যেন একটি বড় বিপর্যয় ঘটে গেল, কিশোর গ্যালোয়া গণিতের জগতে প্রবেশ করে এতই অভিভূত হয়ে গেল যে সে গণিত ছাড়া অন্য সব কিছু পড়া ছেড়ে দিল। দিনরাত শুধু গণিত আর গণিত, যে ছেলেটি নিরীহ ভালোমানুষ ছিল হঠাৎ করে সে যেন খেপে গেল, অবাধ্য হয়ে গেল গণিত ছাড়া অন্য সবকিছু ভুলে গেল। স্কুলের রিপোর্ট কার্ডে দেখা গেল গণিত ছাড়া অন্য সব বিষয়ে সে খারাপ করতে শুরু করেছে।

কিছু দিনের মাঝেই গ্যালোয়া গণিতে তার স্কুলের সব শিক্ষকদের ছাড়িয়ে গেল, তার স্কুলে তাকে গণিত শেখানোর মতো আর কেউ নেই। গ্যালোয়া গণিতের বই যোগাড় করে নিজে নিজে গণিত শিখতে আরম্ভ করে দেয়। এতদিন অন্য সব বিষয়ে কষ্টেসৃষ্টে পাস করলেও গণিতে ভালো নম্বর পেয়ে আসছিল কিন্তু ধীরে ধীরে গণিতেও তার নম্বর পাওয়া কঠিন হতে শুরু করে। গণিত বিষয়ে তার চমকপ্রদ উত্তরগুলো কোনো শিক্ষক বুঝতে পারে না। জটিল অংকগুলো পুরোটা মাথার মাঝে সমাধান করে সে শুধু উত্তরগুলো পরীক্ষার খাতায় লিখে আসে, পরীক্ষকরা মাথামুণ্ডু কিছু বুঝতে পারেন না। দেখা গেল গণিতেও পাসমার্ক পাওয়া তার জন্যে কঠিন হতে শুরু করেছে।

গণিতের সাথে গ্যালোয়ার পরিচয় হয়েছে ষোলো বৎসর বয়সে এবং সতেরো বৎসর বয়সে গণিতের জার্নালে তার প্রথম গবেষণা পত্র ছাপা হলো। মোটামুটিভাবে গ্যালোয়া তখন তার নিজের ক্ষমতার কথা বুঝতে শুরু করেছে। সে জানে গণিত নিয়েই তার বাকি জীবন কাটবে। তাই সে ইকল পলিটেকনিক

নামে দেশের সবচে' ভালো বিশ্ববিদ্যালয়টিতে ভর্তি হওয়ার জন্যে আবেদন করল। শুধু যে বিশ্ববিদ্যালয়টি ভালো তাই নয় সেখানে রিপাবলিকের পক্ষে ছাত্র-ছাত্রীদের সংখ্যা প্রচুর, তাদের পক্ষে আন্দোলনের সেটি সবচে' বড় ক্ষেত্র। গ্যালোয়ার রাজনীতিতে খুব উৎসাহ, এই বিশ্ববিদ্যালয় থেকে সে আন্দোলনে অংশ নিতে পারবে।

বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হবার জন্যে মৌখিক পরীক্ষা দিতে হবে। তাকে যে প্রশ্ন করা হলো তার উত্তরগুলো সে দিল খুব সংক্ষেপে— উপস্থিত যারা ছিল তারা সেগুলো বুঝতেই পারল না। কাজেই একটা অবিশ্বাস্য ব্যাপার ঘটে গেল গ্যালোয়া ভর্তিই হতে পারল না। আশাহত গ্যালোয়া ধৈর্য ধরে অপেক্ষা করে পরের বৎসর আবার ভর্তি পরীক্ষা দিতে গিয়েছে। যে ভদ্রলোক গ্যালোয়ার মৌখিক পরীক্ষা নিচ্ছিলেন তার প্রতিভা বা মেধা গ্যালোয়ার ধারে কাছে নয়। তাই দেখা গেল তিনি তার কোনো প্রশ্নের উত্তরই বুঝতে পারছেন না। গ্যালোয়া যখন ব্যাপারটা বুঝতে পারল তখন রাগে দুঃখে হতাশায় খেপে একসময় পরীক্ষকের দিকে ডাস্টারটা ছুড়ে মারল। একেবারে নিখুঁত নিশানা— তারপর যা হবার তাই হলো ইকল পলিটেকনিকে ভর্তি হবার সম্ভাবনা একেবারে চিরদিনের জন্যে শেষ হয়ে গেল।

গ্যালোয়ার এবারে এক ধরনের জিদ চেপে যায়। সে বিশ্ববিদ্যালয়ে পড়ার আশা ছেড়ে দিয়ে নিজে নিজে গণিত নিয়ে কাজ করতে শুরু করে। তার আগ্রহ ছিল ত্রিঘাত, চতুর্ঘাত বা পঞ্চঘাত সমীকরণে। গ্যালোয়া অনেক খাটাখাটুনি করে দুটি রিসার্চ পেপার তৈরি করে সেগুলো একাডেমি অফ সায়েন্সে জমা দিল। তখন এই পেপারের বিচারকের দায়িত্বে ছিলেন বিখ্যাত গণিতবিদ কশি (Cauchy)। তিনি পেপার দুটো দেখে বিস্ময়ে হতবাক হয়ে গেলেন, তিনি বুঝতে পারলেন গণিতের জগতে একজন নতুন তারকার জন্ম হয়েছে। তিনি প্রায় নিশ্চিত হয়ে গেলেন যে, একাডেমির সবচে' বড় পুরস্কারের জন্যে এই পেপার দুটোকে মনোনয়ন দেয়া যায়। তবে প্রতিযোগিতায় অংশ নিতে হলে পেপারগুলো একটু ভিন্নভাবে সাজাতে হয়। তাই কশি গ্যালোয়াকে পেপার দুটো ফেরত দিয়ে নিয়মমতো সাজিয়ে দিতে অনুরোধ করলেন। কশির মতো এত বড় একজন গণিতবিদের কাছ থেকে নিজের কাজের স্বীকৃতি পেয়ে গ্যালোয়ার উৎসাহ শতগুণে ফিরে এলো, ইকল পলিটেকনিকে ভর্তি হতে না পারার দুঃখ, গণিতবিদদের কাছে নিজের ক্ষমতাটি প্রকাশ করতে না পারার হতাশা সবকিছু এক মুহূর্তে দূর হয়ে গেল। তরুণ এই গণিতবিদ পেপার দুটোকে সাজানোর কাজ শুরু করে দিল।

ঠিক তখন তার জীবনে একটা চরম দুঃখের ঘটনা ঘটল। গ্যালোয়ার রাজনীতিতে এরকম প্রবল উৎসাহের একটা বড় কারণ ছিল তার বাবা। তিনি ছিলেন একজন গণমুখী রিপাবলিকান। কাজকর্মে অত্যন্ত দক্ষ মানুষ ছিলেন বলে রাজতন্ত্র ফিরে আসার পরও তিনি নির্বাচনে জিতে তার এলাকায় মেয়র হয়েছিলেন। গ্যালোয়ার বাবা শুধু যে দক্ষ মেয়র ছিলেন তা নয় তিনি খুব সংস্কৃতিবান উদার একজন মানুষ ছিলেন। তার খুব প্রিয় একটি কাজ ছিল ছোট ছোট কবিতা লিখা, ছোট হলেও সেই কবিতাগুলো ছিল অসম্ভব বুদ্ধিদীপ্ত।

গ্যালোয়ার বাবার মতো প্রজাতন্ত্রের সমর্থক একজন মানুষ এতদিন থেকে এই এলাকায় এত জনপ্রিয় সেটা রাজতন্ত্রের সমর্থক মৌলবাদী মানুষেরা একেবারেই পছন্দ করছিল না। তখন অনেক ভাবনা চিন্তা করে একজন মৌলবাদী ধর্মযাজক গ্যালোয়ার বাবার বিরুদ্ধে প্রচারণার কাজ শুরু করে দিল। মৌলবাদী ধর্ম ব্যবসায়ীরা পৃথিবীর যে-কোনো জায়গায় যে-কোনো সময়েই অসম্ভব ধূর্ত আর অসৎ হয়— এখানেও এই ধর্মযাজক একটি অত্যন্ত ধূর্ত এবং নীচ কৌশল গ্রহণ করল। ধর্মযাজকটি স্থানীয় কিছু সম্মানী মানুষকে নিয়ে অত্যন্ত অশ্লীল কিছু কবিতা লিখে সেগুলো গ্যালোয়ার বাবা লিখেছেন বলে এলাকায় বিলি করতে শুরু করল। এলাকায় হঠাৎ সেটা নিয়ে এত হৈ চৈ শুরু হয়ে গেল যে গ্যালোয়ার বাবার মতো একজন সম্মানী মানুষের পক্ষে সেই অসম্মান সহ্য করা অসম্ভব হয়ে দাঁড়াল। তিনি আত্মহত্যা করে নিজের লজ্জা এবং অপমানের পরিসমাপ্তি ঘটিয়ে দিলেন।

শোকাহত গ্যালোয়া বাবার অন্ত্যেষ্টিক্রিয়াতে এসে সব খবর পেয়ে রাগে দুঃখে একেবারে ফেটে পড়ল। বাবার মৃতদেহ যখন সমাধিস্থ করা হচ্ছে তখন গ্যালোয়া তার কিছু রিপাবলিকান বন্ধুদের নিয়ে সেই ভণ্ড প্রতারক ধর্মযাজকের উপর ঝাঁপিয়ে পড়ল। মৃতদেহ সৎকারের বদলে সেখানে ভয়ঙ্কর একটা দাঙ্গা শুরু হয়ে গেল। রাজতন্ত্র আর মৌলবাদ একসাথে হয়ে কীভাবে সমাজকে ধ্বংস করতে পারে তার এই জলজ্যান্ত উদাহরণটি দেখে গ্যালোয়ার মন একেবারে বিষিয়ে গেল, একজন জঙ্গী রিপাবলিকান সমর্থক হয়ে রাজতন্ত্রের বিরুদ্ধে কাজ করার জন্যে গ্যালোয়া একেবারে বদ্ধ পরিকর হয়ে গেল।

বাবার মৃতদেহ সৎকার করে প্যারিসে ফিরে এসে গ্যালোয়া একাডেমিক অফ সায়েন্সের জন্যে তার পেপার দুটো প্রস্তুত করে জমা দিয়ে দিল। জোসেফ ফুরিয়ারের দায়িত্ব ছিল পেপারগুলো বিচারকদের কাছে পৌঁছে দেয়ার। গ্যালোয়ার পেপারটি ছিল অন্য সব পেপার থেকে অনেক ভালো। কারো মনেই

কোনো সন্দেহ ছিল না যে সে নিশ্চিতভাবেই সর্বোচ্চ পুরস্কারটি পাবে। কিন্তু পুরস্কার ঘোষণার সময় দেখা গেল গ্যালোয়া পুরস্কার পায় নি, শুধু যে পুরস্কার পায় নি তা নয়— তার জমা দেওয়া পেপারটির কোনো হদিসই নেই। তার মাত্র কয়েক সপ্তাহ আগে জোসেফ ফুরিয়ার মারা গেছেন কাজেই ঠিক কীভাবে তার পেপারটি লাপাত্তা হয়ে গেছে কেউ বলতে পারে না।

গ্যালোয়ার বুঝতে একটুও দেরি হলো না যে প্রজাতন্ত্র বা রিপাবলিকের জন্যে ভালোবাসার কারণে তার পেপারটি গায়েব করে দেয়া হয়েছে। গ্যালোয়ার মনে যেটুকু দ্বিধা ছিল সেটাও পুরোপুরি দূর হয়ে গেল যখন তার পরের পেপারটাও একাডেমি অফ সায়েন্স যুক্তিপূর্ণ এবং বোধগম্য নয় বলে তার কাছে ফেরত পাঠিয়ে দিল! গ্যালোয়া হঠাৎ করে বুঝতে পারল পুরোপুরি রাজনৈতিক কারণে তার সমস্ত গবেষণা কাজকে অবহেলা করছে, এবং কখনোই তার কাজকে যথাযথভাবে মূল্যায়ন করা হবে না। রাগে দুঃখে এবং হতাশায় গ্যালোয়া একেবারে হিংস্র হয়ে উঠল।

এরকম সময়ে গ্যালোয়া শেষপর্যন্ত ইকল নরমাল সুপিরিয়র নামে একটা মোটামুটি ভালো বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হতে পেয়েছে। কিন্তু তার রাজনৈতিক বিশ্বাসের জন্যে তার গবেষণা কাজকে কখনোই ঠিকভাবে মূল্যায়ন করা হবে না বলে সে গণিত নিয়ে গবেষণা কাজে উৎসাহ হারিয়ে ফেলেছে। সে রিপাবলিকান রাজনীতির দিকে আরো বেশি ঝুঁকে পড়ল। দেখতে দেখতে বিশ্ববিদ্যালয়ে সে একটি বেপরোয়া চরিত্র হিসেবে পরিচিত হয়ে উঠে। সারা দেশে তখন রিপাবলিকানদের প্রকট গণআন্দোলন গড়ে উঠেছে। ১৮৩০ সালে যখন প্যারিসের রাস্তায় প্রজাতন্ত্রের সমর্থক রিপাবলিকানরা আন্দোলন করতে শুরু করেছে তখন বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্ররা যেন সেই আন্দোলনে যোগ দিতে না পারে সেজন্যে বিশ্ববিদ্যালয়ের গেট, ডরমিটরির দরজা তালা মেরে সব ছাত্রদের ভেতরে আটকে রাখা হলো। বাইরে বের হয়ে রাস্তায় রাস্তায় আন্দোলন করতে না পেরে গ্যালোয়া ছটফট করতে থাকে। রিপাবলিকানদের আন্দোলনটি ব্যর্থ হলো বলে গ্যালোয়ার ক্রোধ হয়ে গেল একেবারে আকাশচুম্বী। গ্যালোয়া তখন রেগে মেগে তার বিশ্ববিদ্যালয়ের ডিরেক্টরকে মেরুদণ্ডহীন কাপুরুষ বলে গালাগাল দিয়ে একটা প্রতিবেদন লিখল, সাথে সাথে তাকে বিশ্ববিদ্যালয় থেকে বহিষ্কার করে দেয়া হয়। গ্যালোয়ার আনুষ্ঠানিক পড়াশোনা সাথে সাথে শেষ হয়ে গেল।

কোনো উপায় না দেখে গ্যালোয়া তখন রিপাবলিকানদের আর্টিলারীতে যোগ দিল, কিন্তু এক মাসের ভেতর সেই গার্ডদের কাজ বাতিল করে দেয়াতে

সে একেবারে পথে বসে পড়ল। অর্থহীন, বিত্তহীন, সহায় সম্বলহীন বন্ধুহীন এই তেজস্বী রাগী মানুষটি তখন প্যারিসের পথে পথে ঘুরে বেড়াচ্ছে। তাকে সাহায্য করার কেউ নেই, অনুপ্রেরণা দেয়ার ভালোবাসার কিংবা দুটি কোমল কথা বলার কোনো মানুষ নেই।

গ্যালোয়া তখন রাজনীতিতে আরো ঝুঁকে পড়ল। তার রাজনীতি দেখতে দেখতে ভায়োলেন্সের দিকে ঝুঁকে পড়ে। একদিন তাকে দেখা গেল প্রকাশ্যে খোলা চাকু নিয়ে সে ফ্রান্সের সম্রাটকে খুন করার হুমকি দিচ্ছে, দেশের আইনে সেটি অনেক বড় অপরাধ, দুদিনের ভেতরে সে গ্রেপ্তার হয়ে গেল। একমাস হাজতে থাকার পর তার বিচার শুরু হলো যদিও কারো কোনো সন্দেহ ছিল না যে সে সত্যি সত্যি খোলা অস্ত্র দেখিয়ে সম্রাটকে হত্যার হুমকি দিয়েছে, কিন্তু কমবয়সী তরুণকে দেখে বিচারকদের মায়া হলো, তারা কোনো শাস্তি না দিয়ে তাকে ছেড়ে দিলেন।

কিন্তু এক মাসের ভেতরে সে আবার গ্রেপ্তার হয়ে গেল। এবারে গ্রেপ্তার হয়েছে পুরোপুরি তার নিজের বেপরোয়া কাজ কর্মের জন্যে। রিপাবলিকান ন্যাশনাল গার্ডকে নিষিদ্ধ করা হয়েছে— তার পরেও সে তাদের পোশাক পরে শহরে ঘুরে বেড়াতে শুরু করেছে— এটি ছিল তার এক ধরনের প্রতিবাদ। এই প্রতিবাদটি বিচারকরা ভালো চোখে দেখল না। তাকে ছয় মাসের জন্যে জেলে পাঠিয়ে দিল।

গ্যালোয়া ততদিনে ভয়ঙ্কর রকম বেপরোয়া হয়ে উঠেছে। সে মদ খেতে শুরু করেছে, যেভাবে সে মদ খায় সেটা দেখে তার পরিচিতরা শিউরে উঠে। তার আচার আচরণে শত্রুর সংখ্যা বহুগুণে বেড়ে গিয়েছে। জেলখানার বন্ধ কুঠুরীর মাঝে একদিন কারা জানি তাকে গুলি করে মেরে ফেলার চেষ্টা করল। সে বেঁচে গেল সত্যি কিন্তু সব কিছু মিলিয়ে তখন মানসিকভাবে একেবারে ভেঙে পড়েছে। পুরো জীবন নিয়ে মনের ভেতরে গভীর হতাশা, স্বপ্নহীন একটি জীবন, নিষ্ঠুর পরিবেশ সব কিছু মিলিয়ে সে গভীর বিষণ্ণতার মাঝে ডুবে যায়। অবস্থা এমন পর্যায়ে পৌঁছে গেল যে সে একদিন মদ খেয়ে মাতাল হয়ে চাকু দিয়ে আত্মহত্যা করার চেষ্টা করল। অনেক কষ্টে তার ঘনিষ্ঠ বন্ধুরা কোনোভাবে তার জীবন রক্ষা করেছিল।

গ্যালোয়াকে অবশ্যি পুরো ছয় মাস জেলে থাকতে হয় নি, ঠিক তখন প্যারিসে কলেরার মহামারী শুরু হয়েছে, কয়েদীদের রক্ষা করা যাবে না বলে

তাদেরকে ছেড়ে দেয়া হলো। একমাসের মাঝে মুক্ত হয়ে গ্যালোয়া আবার প্যারিসের রাস্তায় ফিরে এসেছে।

এর পরের কয়েক সপ্তাহ ঠিক কী হয়েছিল কেউ ভালো করে জানে না। হঠাৎ করে দেখা গেল স্টেফানী ফেলিসি (Stephanie Felicie Poterine du Motel) নামে প্যারিসের একজন খ্যাতনামা ডাক্তারের মেয়ের সাথে গ্যালোয়ার গভীর ভালোবাসা হয়েছে। এই রহস্যময় মেয়েটির সাথে ভবঘুরে খ্যাপা গ্যালোয়ার কেমন করে ভালোবাসা হলো সেটি এখনো কেউ জানে না কিন্তু তার পরিণতি কী হলো সেটি সবাই জানে।

দেখা গেল স্টেফানী নামের মেয়েটি পাসচু দরবনভিল (Pescheux d'Herbinville) নামে প্যারিসের খুব অভিজাত একজন মানুষের বাগদত্তা। একজন মানুষের বাগদত্তার অন্য মানুষের সাথে সম্পর্ক হওয়া তখনকার সমাজে খুব অপমানের ব্যাপার, কাজেই পাসচু দরবনভিল খুব রেগে গেল। এই মানুষটি ছিল খ্যাতনামা গুটার, পিস্তল চালাতে পারদর্শী। কাজেই সে গ্যালোয়াকে সামনাসামনি ডুয়েলে আহ্বান করল। একটা নির্দিষ্ট দূরত্বে দাঁড়িয়ে একজন আরেকজনকে গুলি করবে— ভয়ঙ্কর একটি প্রস্তাব কিন্তু তেজস্বী গ্যালোয়া এক কথায় রাজি হয়ে গেল।

ডুয়েলের আগের রাতে গ্যালোয়া হঠাৎ করে বুঝতে পারল হয়তো এই রাতটিই তার জীবনের শেষ রাত। অসাধারণ প্রতিভাধর এই গণিতবিদ গণিত নিয়ে তার চিন্তাভাবনা আবিষ্কার কিছুই কোথাও লিখে রাখে নি, কিছুই কোথাও প্রকাশ হয় নি। পরদিন ডুয়েলে যদি সে মারা যায় পৃথিবীর কেউ আর সে কথা জানতে পারবে না। তেজস্বী ক্রুদ্ধ ভাগ্যহত এই গণিতবিদ তখন কাগজ কলম নিয়ে লিখতে বসল। এই রাতটিতেই তাকে সব কিছু লিখতে হবে।

গ্যালোয়া রাত জেগে তার থিওরেমগুলো লিখতে শুরু করল। হাতে সময় নেই, দ্রুত লিখে চলছে। লিখতে লিখতে সে দেখে সময় চলে যাচ্ছে, কাগজে লিখছে, 'ইশ হাতে সময় নেই— একেবারে সময় নেই' মাঝে মাঝে মেয়েটির নাম লিখছে, তারপর আবার থিওরেমগুলোতে ফিরে আসছে। লিখতে লিখতে রাত ভোর হয়ে এলো। সে তখন তার এক বন্ধুকে চিঠি লিখে বলল, সে যদি পরদিন মারা যায় তাহলে তার এই এক রাতের লেখাগুলো যেন ইউরোপের বড় বড় গণিতবিদদের হাতে পৌঁছে দেয়া হয়। সাধারণ মানুষ এর গুরুত্ব না বুঝলেও তারা সেটি বুঝবে।

পরদিন, ১৮৩২ সালের ৩০ মে, একটা নির্জন মাঠে গ্যালোয়া এবং পাসচু দরবনভিল উদ্যত অস্ত্র হাতে মুখোমুখি দাঁড়িয়েছে। গ্যালোয়া একা, পাসচুর সাথে আছে তার সহকারী। একজন আরেকজনকে গুলি করল, দুজনের ভেতরে পঁচিশ পা দূরত্ব, গ্যালোয়ার অপটু হাতের গুলি লক্ষ্যভ্রষ্ট হলো কিন্তু নিষ্ঠুর পাসচুর দক্ষ হাতের গুলিতে গ্যালোয়া মাটিতে লুটিয়ে পড়ল। মাত্র বিশ বৎসর বয়সে সর্বকালের একজন শ্রেষ্ঠ গণিতবিদের বিচিত্র জীবনের ইতি হলো এভাবে।

গ্যালোয়ার মৃতদেহ সৎকারের সময় আবার শহর জুড়ে ভয়ঙ্কর গোলযোগ। ততক্ষণে সবাই সন্দেহ করতে শুরু করেছে স্টেফানী এবং পাসচুর সাথে তার বাগদান সবই আসলে সাজানো। গ্যালোয়াকে খুন করার জন্যে পুরোটা পরিকল্পনা করা হয়েছে, এর মাঝে কোনো ভালোবাসা নেই, পুরোটা একটা নিষ্ঠুর কূটকৌশল। প্রকৃতপক্ষে কী হয়েছিল সেটি এখনো কেউ সঠিকভাবে জানে না। কিন্তু পৃথিবীর একজন শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ যে মাত্র বিশ বছর বয়সে গুলি খেয়ে রক্তক্ষরণে মারা গেছে সেই তথ্যটি সবাই জানে। এখনো সবাই গভীর বেদনার সাথে সেটি স্মরণ করে।

তারপর দীর্ঘ দশ বৎসর কেটে গিয়েছে। গ্যালোয়ার জীবনের শেষ রাতে লেখা কাগজগুলো তার বন্ধু ইউরোপের বড় বড় গণিতবিদদের কাছে পৌঁছে দিয়েছিল কিন্তু কেউ সেটা নিয়ে মাথা ঘামান নি। অস্থির গ্যালোয়ার বিচ্ছিন্ন সামঞ্জস্যহীন লেখা থেকে তার প্রকৃত মর্মোদ্ধার করা খুব সহজ ব্যাপার ছিল না। কাগজগুলোর একটা কপি শেষপর্যন্ত জোসেফ লিউভিলের (Joseph Liouville) কাছে পৌঁছাল, এই মেধাবী গণিতবিদ সেই কাগজগুলো থেকে তার প্রকৃত তথ্যগুলো বের করলেন। গ্যালোয়ার খাপছাড়া বিচ্ছিন্ন লেখাগুলো থেকে মর্মোদ্ধার করে সেগুলো তিনি দেশের সবচে' সম্মানীত জার্নালে প্রকাশ করতে শুরু করলেন। পৃথিবীর গণিতবিদরা তখন সবিস্ময়ে এই তরুণ গণিতবিদের বিস্ময়কর আবিষ্কারের সাথে প্রথমবার পরিচিত হলেন। গভীর শ্রদ্ধায় এবং ভালোবাসায় তাদের মাথা নত হয়ে এলো।

এক রাতের গণিতবিদ পৃথিবীর মানুষের স্বীকৃতি এবং ভালোবাসা পেলেন, কিন্তু বড় দেরি করে।

প্রোব্যাবিলিটি

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

একটি ঘটনার প্রোব্যাবিলিটি (Probability) : আমরা যখন বলি নির্দিষ্ট পরিস্থিতিতে একজন তীরন্দাজ শতকরা 92 বার সফল এর অর্থ হলো 100 বার গুলি ছুড়লে (নির্দিষ্ট পরিস্থিতিতে যেমন লক্ষ্যবস্তুর দূরত্ব, বন্দুকের মডেল) গড়ে 92 বার সে সফল হবে। যদিও প্রতি 100 বার গুলি ছুড়লে ঠিক ঠিক 92 বার সফলতা নাও আসতে পারে। কখনো 91 বার কখনো বা 90 বার আবার কখনো বা 93 কি 94 বার সফলতা আসতে পারে। কখনো কখনো সফলতা বেশ কম কিংবা বেশি হতে পারে। তবে নির্দিষ্ট পরিস্থিতিতে অসংখ্যবার গুলি ছোড়ার পরীক্ষা করলে তার গড় সফলতা হবে শতকরা 92। অভিজ্ঞতা বলে এরকম তীরন্দাজের জন্য শতকরা সফলতা 92 বার কাছাকাছি হবে। শতবার গুলি ছুড়লে সফলতা 88-এর কম কিংবা 96-এর বেশি হবে তার সম্ভাবনা বেশ কম।

আরেকটি উদাহরণ দেয়া যাক। নির্দিষ্ট পরিবেশে দেখা গেল একটি কারখানা থেকে গড়ে 1.6টি ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্য বের হলো। এর অর্থ হলো 1000টি দ্রব্য, যা এখনো যাচাই করা হয় নি, এর মধ্যে গড়ে 16টি ত্রুটিযুক্ত হতে পারে। কখনো কখনো ত্রুটিযুক্তের সংখ্যা বেশি হতে পারে আবারও কখনো বা কম। তবে বেশির ভাগ ক্ষেত্রেই 1000 দ্রব্যের মধ্যে ত্রুটিযুক্ত দ্রব্যের সংখ্যা 16-এর কাছাকাছি হবে।

প্রথম ক্ষেত্রে আমরা বলি তীরন্দাজের লক্ষ্যভেদ করার প্রোব্যাবিলিটি (সম্ভাবনা) .92 আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বলি যে-কোনো দ্রব্য ত্রুটিযুক্ত হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি 0.016 অথবা ত্রুটিমুক্ত হওয়ায় প্রোব্যাবিলিটি 0.984। যদি b বার পরীক্ষণে একটি ঘটনা A a বার ঘটে তবে ঐ অবস্থায় ঘটনা A ঘটার প্রোব্যাবিলিটি হলো $\frac{a}{b}$. তাহলে একটি ঘটনার প্রোব্যাবিলিটি হলো পরীক্ষণের সংখ্যার সাপেক্ষে ঐ ঘটনা ঘটার সংখ্যার অনুপাত।

যদি কোনো ঘটনার প্রোব্যাবিলিটি $\frac{a}{b}$ হয় তাহলে b বার পরীক্ষণে ঐ ঘটনা a বার নাও ঘটতে পারে। তবে b বার পরীক্ষণ যদি অনেকবার পুনরাবৃত্তি করা হয় তাহলে প্রতি b পরীক্ষণের জন্য ঘটনাটি গড়ে a বারের কাছাকাছি ঘটবে।

Goto List>

উদাহরণ 1 : একটি শহরের বছরের প্রথম তিন মাসের জন্মের পরিসংখ্যান নিম্নরূপ—

145টি ছেলে এবং 135টি মেয়ে জানুয়ারিতে

142টি ছেলে এবং 136টি মেয়ে ফেব্রুয়ারিতে

152টি ছেলে এবং 140টি মেয়ে মার্চে

একটি নবজাতক যে ছেলে তার প্রোব্যাবিলিটি কত ?

জানুয়ারিতে ছেলের সংখ্যা 51·8%, ফেব্রুয়ারিতে 51.1% এবং মার্চে 52%। এই সংখ্যাগুলোর গড় হলো 51.6%। বছরের এই সময়ে যারা জন্মগ্রহণ করেছে তাদের মধ্যে বালকের সংখ্যা 51.6% এর কাছাকাছি হবে।

অসম্ভব এবং অবশ্যম্ভাবী ঘটনা

একটি ঘটনা A-এর প্রোব্যাবিলিটি P(A) দ্বারা বোঝানো হয়। স্বভাবতই $0 \leq P(A) \leq 1$. কোনো ঘটনা A-এর জন্য P(A) = 0 হলে তাকে অসম্ভব ঘটনা বলে। যেমন ছক্কা চাললে কখনো 9 উঠবে না যতবারই চালি না কেন। সুতরাং ছক্কায় 9 উঠার প্রোব্যাবিলিটি 0। আবার ছক্কা চাললে 9-এর কম উঠার প্রোব্যাবিলিটি কিন্তু 1 কারণ প্রতিবারই যা উঠবে তা 9-এর কম। সুতরাং যতবার চালা হবে ঠিক ততবারই ঐ ঘটনা ঘটবে।

সমস্যা : একজন তীরন্দাজ লক্ষ্যে আঘাত হানতে পারে গড়ে 80% সময়। একই রকম পরিস্থিতিতে দ্বিতীয়জন লক্ষ্যে আঘাত হানতে পারে 70% সময়। যদি উভয় তীরন্দাজ একই সঙ্গে গুলি ছুড়ে তাহলে লক্ষ্য ধ্বংস হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি বের কর। যে-কোনো একজন তীরন্দাজ লক্ষ্যে আঘাত করলেই লক্ষ্য ধ্বংস হবে।

সমাধানের পদ্ধতি : মনে করি 100টি জোড়া গুলি ছোড়া হলো। প্রথম তীরন্দাজ 80 বার লক্ষ্য ধ্বংস করবে। বাকি 20 বার প্রথম তীরন্দাজ লক্ষ্যচ্যুত হবে। যেহেতু দ্বিতীয় তীরন্দাজ 100 বারে 70 বার লক্ষ্যে আঘাত হানে। এই 20 বারের মধ্যে 14 বার সে আঘাত হানবে। সুতরাং সর্বমোট 80 + 14 = 94 বার লক্ষ্য ধ্বংস হবে। অতএব, লক্ষ্য ধ্বংস হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি ·94।

প্রোব্যাবিলিটি যোগের নিয়ম

একটি ছক্কা চাললে 1 উঠার প্রোব্যাবিলিটি $\frac{1}{6}$

” ” ” 2 ” ” $\frac{1}{6}$

” ” ” 3 ” ” $\frac{1}{6}$

তাহলে 1, 2 অথবা 3 উঠার প্রোব্যাবিলিটি কত ?

যেহেতু ছক্কাটি 6a বার চাললে গড়ে a বার 1, 2 কিংবা 3 উঠবে। সুতরাং 1, 2 অথবা 3 গড়ে 3a বার উঠবে।

অতএব, নির্ণেয় প্রোব্যাবিলিটি $= \frac{a+a+a}{6a} = \frac{1}{2}$

এখানে 1, 2 অথবা 3 উঠার ঘটনাগুলো পরস্পর বিচ্ছিন্ন অর্থাৎ একটি ঘটনা ঘটলে অপরটি ঘটবে না। এক্ষেত্রে 1, 2 অথবা 3 উঠার প্রোব্যাবিলিটি হলো আলাদা আলাদা প্রোব্যাবিলিটির যোগফল। অর্থাৎ

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ঘটনাসমূহ পরস্পর বিচ্ছিন্ন (Disjoint) হলে

P(A_1 অথবা $A_2, \ldots,$ অথবা A_n) $= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

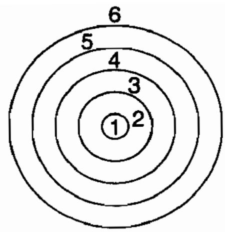
ছক্কার চালে মনে করি ঘটনা $A = \{1, 2\}$। অতএব এর সম্পূরক ঘটনা

$\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$। $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$P(A) + P(\bar{A}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

অর্থাৎ দুটি সম্পূরক ঘটনার প্রোব্যাবিলিটির যোগফল সমান 1. একইভাবে কোনো পরীক্ষণের বিচ্ছিন্ন (disjoint) ঘটনা $A_1, A_2, \ldots, A_n$-এর জন্য $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

উদাহরণ : প্রতি 100 বার গুলিতে তীরন্দাজ গড়ে



44 বার আঘাত হানে 1 অঞ্চলে
30 " " " 2 "
15 " " " 3 "
6 " " " 4 "
4 " " " 5 "
1 " " " 6 "

এবার P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = ·44 + ·30 + ·15 + ·06 + ·04 + 0·01 = 1

উদাহরণ : 5 অংকের লটারিতে কি প্রোব্যাবিলিটিতে শেষ অংকটি মনে করি, 7 হতে পারে।

এক্ষেত্রে সবগুলো সংখ্যার মধ্যে শেষ অংকে 7 আছে এমন সংখ্যার অনুপাত বের করলেই হয়ে গেল। এতগুলো সংখ্যা না বের করেও আমরা এই প্রোব্যাবিলিটি হিসাব করতে পারি। আমরা যদি ধরে নেই শেষ অংক হিসাবে 0, 1, 2, ..., 9 যে-কোনো অংক সমান প্রোব্যাবিলিটিতে উঠতে পারে তাহলে প্রোব্যাবিলিটি হলো 0·1।

উদাহরণ : দুই কিলোমিটার দূরত্বে অবস্থিত A এবং B বিন্দুর মধ্যে কোথায়ও টেলিফোনের তার ছিঁড়ে গেছে। কি প্রোব্যাবিলিটিতে ঐ স্থানটি A বিন্দু থেকে 450 মিটারের অধিক দূর হবে না?

উত্তর হবে $\frac{450}{2000} = 0{\cdot}225$

কন্ডিশনাল প্রোব্যাবিলিটি

ইলেকট্রিক লাইট বাল্ব দুটি কারখানায় তৈরি হয়। কারখানা A বাজারের 70% বাল্ব সরবরাহ করে আর কারখানা B করে 30%। কারখানা A-এর শতকরা 83টি বাল্ব মানসম্মত অথচ কারখানা B-এর 63% মানসম্মত। তাহলে বাজার থেকে কেনা যে-কোনো বাল্ব কী প্রোব্যাবিলিটিতে মানসম্মত হবে?

বাল্বটি যদি কারখানা A-এর হয় তাহলে ·83 এবং কারখানা B-এর হলে ·63 মানসম্মত হওয়ার ঘটনাকে যদি S বলি তাহলে P(S|A) = 0·83, P(S|B) = ·63

P(S|A) হলো বাল্বটি A কারখানার শর্তে মানসম্মত হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি।

এবার $P(S) = P(S|A)\, P(A) + P(S|A)\, P(B)$

$= \cdot 83.\cdot 7 + \cdot 63.\cdot 3 = .581 + .189 = .77$

উদাহরণ : বাক্স A থেকে 5টি সাদা এবং 7টি কালো বল আছে, বাক্স B-তে 7টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। বাক্স A থেকে প্রথমে একটি বল তুলে সেখানেই রাখা হলো। বলটি যদি সাদা হয় তাহলে বাক্স A এবং কালো হলে বাক্স B থেকে দ্বিতীয়বার একটি বল তোলা হবে। কি প্রোব্যাবিলিটিতে দ্বিতীয় বলের রঙ সাদা হবে ?

মনে করি, P(W|C) হলো প্রথম বলের রঙ C হলে দ্বিতীয় বলের রঙ সাদা হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি এবং P(W) হলে দ্বিতীয় বলের রঙ সাদা হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি।

$$P(W) = P(W|B)\, P(B) + P(W|W).\, P(W)$$

$$= \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} + \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} = \frac{74}{144}$$

প্রোব্যাবিলিটির গুণের নিয়ম

এবার কারখানা A এবং B-এর ইলেকট্রিক বাল্বের সমস্যায় ফিরে আসি। যেহেতু প্রতি 1000 বাল্বের 189টি কারখানা B-এর এবং মানসম্মত P(S এবং A) $= \frac{189}{1000} = \frac{300}{1000}\cdot\frac{189}{300} = P(B).P(S|B)$

এই যুক্তিটি সাধারণ পরিস্থিতিতেও বিস্তৃত করা যায়। মনে করি প্রতি nটি পরীক্ষণে ঘটনা A ঘটে গড়ে mবার এবং প্রতি mটি ঘটনা যেখানে A ঘটে B ঘটে l বার তাহলে প্রতি nটি পরীক্ষণে ঘটনা A এবং ঘটনা B ঘটে l বার।

তাহলে, $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B|A) = \frac{l}{m}$

P(A এবং B) $= \frac{l}{n} = \frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m} = P(A)\,.\,P(B|A)$

উদাহরণ : একটি কারখানায় 96% দ্রব্য ব্যবহারোপযোগী (ঘটনা A)। প্রতি শত ব্যবহারোপযোগী দ্রব্যের 75টি প্রথম শ্রেণীর (ঘটনা B)।

তাহলে P(A এবং B) $= \cdot 96.\cdot 75 = \cdot 72$

Goto List>

স্বাধীন (Independent) ঘটনা

একটি ঘটনা A যদি অন্য একটি ঘটনা B-এর উপর নির্ভর না করে তাহলে ঘটনা A-কে ঘটনা B থেকে স্বাধীন বলা হয়।

আমরা জানি, P(A এবং B) = P(A). P(B|A) = P(B). P(A|B) কিন্তু যেহেতু A, B থেকে স্বাধীন অর্থাৎ A-এর প্রোব্যাবিলিটি B-এর উপর নির্ভর করে না P(A|B) = P(B)।

∴ স্বাধীন ঘটনা A এবং B-এর জন্য P(A এবং B) = P(A). P(B) একইভাবে A এবং B-কে একটি ঘটনা ধরে

P(A এবং B এবং C) = P(A এবং B) . P(C) = P(A) P(B) P(C)

এই নিয়মকে পরস্পর স্বাধীন অনেক ঘটনার ক্ষেত্রেও বিস্তৃত করা যায়।

উদাহরণ : নির্দিষ্ট পরিস্থিতিতে শত্রুপক্ষের প্লেনকে গুলি ছুড়ে ধ্বংস করার প্রোব্যাবিলিটি 0.004। 250টি গুলি একই সঙ্গে ছুড়লে প্লেন ধ্বংস করার প্রোব্যাবিলিটি কত ?

যেহেতু প্রত্যেকটি ছোড়াকে স্বাধীন ধরতে পারি প্রত্যেক গুলির ব্যর্থ হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি 1–0.004 = .996-এর সমান।

প্রোব্যাবিলিটি যে কমপক্ষে একটি গুলি প্লেনকে আঘাত করবে,

হবে $1-(0.996)^{250} \approx 5/8$

যদিও এক গুলিতে ধ্বংস করার প্রোব্যাবিলিটি নগণ্য কিন্তু অনেক গুলিতে ধ্বংস করার প্রোব্যাবিলিটি যথেষ্ট।

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ স্বাধীন। এবার ঘটনা A_k এবং $\overline{A_k}$ সম্পূরক বলে

$$P(A_k) + P\left(\overline{A_k}\right) = 1$$

অপরপক্ষে ঘটনা $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ স্বাধীন। সুতরাং

$$P\left(\overline{A_1} \text{ এবং } \overline{A_2} \text{ এবং } \ldots \text{ এবং } \overline{A_n}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) \ldots P\left(\overline{A_n}\right)$$

$$= \left[1-P(A_1)\right]\left[1-P(A_2)\right] \ldots \left[1-P(A_n)\right]$$

আবার, ঘটনা $\left(A_1 \text{ বা } A_2 \text{ বা } \ldots \text{ বা } A_n\right)$

এবং $\left(\overline{A}_1 \text{ এবং } \overline{A}_2 \text{ এবং } \ldots \text{ এবং } A_n\right)$ সম্পূরক।

Goto List>

সুতরাং $P\left(A_1 \text{ বা } A_2 \text{ বা } \ldots \text{ বা } A_n\right)$

$= 1-P\left[\bar{A}_1 \text{ এবং } \bar{A}_2 \text{ এবং } \ldots . \text{ এবং } \bar{A}_n\right]$

$= 1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)] \ldots [1-P(A_n)]$

$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = P$ হলে

$P(A_1 \text{ বা } A_2 \text{ বা } \ldots \text{ বা } A_n) = 1-(1-P)^n$

উদাহরণ : প্যারালেলেপিপেড (ইট) আকৃতির একটি যন্ত্র ব্যবহারোপযোগী হয় যদি প্রত্যেক দিকের দৈর্ঘ্যে বড়জোর ·01 মিমি পার্থক্য হয়। যদি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা বরাবর ·01 মিমি পার্থক্য হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি P_1, P_2 এবং P_3 যথাক্রমে ·08, ·12 এবং ·10 হয় তাহলে যন্ত্রটি ব্যবহারোপযোগী না হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি কত ?

ব্যবহারোপযোগী না হতে হলে কমপক্ষে একদিকে পার্থক্য ·01 মিমি এর বেশি হতে হবে। যেহেতু বিভিন্ন দিকে পার্থক্যের পরিমাণকে পরস্পর থেকে স্বাধীন ধরা যেতে পারে নির্ণেয় প্রোব্যাবিলিটি

$P = 1-(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3) \approx 0.27$

অর্থাৎ প্রতি একশত যন্ত্রের মধ্যে 27টি ব্যবহারোপযোগী নয়।

কয়েকটি অসমতা বা ইনিকুয়ালিটি

আবার বাল্বের সমস্যায় ফিরে আসি।

$P(S) = P\left(S \text{ এবং } A\right) + P\left(S \text{ এবং } \bar{A}\right)$

[A এবং B সম্পূরক ঘটনা] .... (1)

$\bar{A} = B$

$P(A) = P\left(S \text{ এবং } A\right) + P\left(\bar{S} \text{ এবং } A\right)$ .... (2)

$P(S \text{ বা } A) = P(S \text{ এবং } A) + P\left(S \text{ এবং } \bar{A}\right) + P\left(\bar{S} \text{ এবং } A\right)$ .... (3)

এবার (3)-এ (1) এবং (2)-কে ব্যবহার করে আমরা পাই,

$P(S) + P(A) = P(S \text{ এবং } A) + P(S \text{ বা } A)$

এখান থেকে $P(S \text{ বা } A) = P(S) + P(A) - P(S \text{ এবং } A)$ ... (4)

এবার ঘটনা S এবং A যদি একসঙ্গে ঘটা অসম্ভব হতো তাহলে

$P(S \text{ বা } A) = P(S) + P(A)$ .... (5)

আবার ঘটনা S এবং A যদি পরস্পর স্বাধীন হয় তাহলে

$P(S \text{ বা } A) = P(S) + P(A) - P(S).P(A)$ .... (6)

যেহেতু $P(S \text{ এবং } A) \geq 0$ (4) থেকে আমরা পাই

$P(S \text{ বা } A) \leq P(S) + P(A)$ .... (7)

$P(M \text{ বা } N \text{ বা } R) \leq P(M \text{ বা } N) + P(R) \leq P(M) + P(N) + P(R)$ ....(8)

এই অসমতা অনেক ঘটনা পর্যন্ত বিস্তৃত করা যেতে পারে।

যদি একটি ঘটনা K ঘটতে হলে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা $A_1, A_2, ..., A_n$-এর একটি ঘটতে হয় তাহলে $P(K) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \text{ এবং } K)$ ... (9)

এবং $P(A_i \text{ এবং } K) = P(A_i). P(K|A_i)$

বায়েসের ফর্মুলা

একটি পরীক্ষণের ফলে যদি কেবলমাত্র ঘটনা $A_1, A_2, ..., A_n$ ঘটতে পারে এবং K যদি এর যে-কোনো ঘটনা হয় তাহলে গুণের নিয়মে $P(A_i \text{ এবং } K) = P(A_i)(P|K|A_i) = P(K) . P(A_i|K) (1 \leq 0 \leq n)$

এখান থেকে আমরা পাই,

$$P(A_i|K) = \frac{P(A_i)\,P(K|A_i)}{P(K)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\therefore P(A_i|K) = \frac{P(A_i)\,P(K|A_i)}{\sum_{r=1}^{n} P(A_r)P(K|A_r)} \quad (1 \leq i \leq n) \text{ ... (10)}$$

এটাই বায়েসের ফর্মুলা নামে পরিচিত।

উদাহরণ : একটি ল্যাবরেটরি টেস্ট থেকে অনুমান করা হলো একজন রোগী A_1, A_2 অথবা A_3 রোগে ভুগছে। প্রোব্যাবিলিটি হলো যথাক্রমে $P_1 = \frac{1}{2}$, $P_2 = \frac{1}{6}$, $P_3 = \frac{1}{3}$। টেস্টটি আরো নিখুঁত করার জন্য কিছু এ্যানালাইসিস করা দরকার। রোগ A_1, A_2 এবং A_3-এর জন্য এই এ্যানালাইসিস পজিটিভ হয়

যথাক্রমে 0·1, 0.2 এবং ·9 প্রোব্যাবিলিটিতে এ্যানালাইসিস 5বার করা হলো যার 4 বারই ফলাফল পজিটিভ। তাহলে এই ক্ষেত্রে এ্যানালাইসিসের পর প্রতি রোগের প্রোব্যাবিলিটি কত ?

গুণের নিয়মে $P_1 = \binom{5}{4}(\cdot 1)^4 \cdot 9$, $P_2 = \binom{5}{4}(.2)^4 . \cdot 8$, $P_3 = \binom{5}{4}(\cdot 9)^4 .1$

বায়েসের ফর্মুলা অনুযায়ী

$$P(A_1) = \frac{P_1P_1}{P_1P_1 + P_2P_2 + P_3P_3}$$

$$= \frac{(1/2)\,(\cdot 1)^4.\ \cdot 9}{(1/2)\,(\cdot 1)^4.\ \cdot 9 + \ (1/6)\,(\cdot 2).^4\ \cdot 8 + \ (1/3).\ (\cdot 9)4.\ \cdot 1} \simeq 0.002$$

অনুরূপভাবে, $P(A_2) = 0.01$, $P(A_3) \approx 0.988$

বের্নুলির পদ্ধতি

উদাহরণ : একটি নির্দিষ্ট প্রকার সুতার 75%-এর গড় দৈর্ঘ্য 45 মি.মি.-এর কম এবং 25%-এর দৈর্ঘ্য 45 মি.মি.-এর সমান কিংবা বেশি। র‍্যানডমলি (দৈবাৎ) তিন প্রকার সুতা নেয়া হলো। এর দুটি 45 মিমি এর কম এবং একটি 45 মি.মি. এর বেশি হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি বের কর।

সুতার দৈর্ঘ্য 45 মি.মি.-এর কম হওয়ার ঘটনাকে A এবং বেশি হওয়ার ঘটনাকে B ধরলে $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$

এবার যোগিক ঘটনা AAB দ্বারা বুঝাই প্রথম দুটি সুতার দৈর্ঘ্য 45 মি.মি.-এর কম এবং তৃতীয়টি 45 মিমি-এর বেশি। আমাদের সমস্যা হলো P(C) বের করা যেখানে C হলো এমন ঘটনা যেখানে দুটি সুতার দৈর্ঘ্য 45 মি.মি. এর কম এবং একটি সুতার দৈর্ঘ্য বেশি। তাহলে AAB, ABA, BAA-এর যে কোনোটি ঘটলেই C ঘটবে। যেহেতু এই ঘটনাগুলোর একাধিক এক সঙ্গে ঘটা অসম্ভব তাই যোগের নিয়মে $P(C) = P(AAB) + P(ABA) + P(BAA)$

ডানদিকের প্রত্যেকটি টার্মের মানই সমান। তাহলে এদের যে-কোনোটির মান, $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}$

$$\therefore P(C) = 3 \cdot \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

উদাহরণ : একটি এলাকার অনেক বছরের পর্যবেক্ষণে দেখা গেল যে, 100,000 শিশু যাদের বয়স 9 হয়েছে গড়ে তাদের 82,277 জন 40 বছর পর্যন্ত বাঁচে এবং গড়ে 37,977 জন 70 বছর পর্যন্ত বাঁচে। একজন 40 বছর বয়সী মানুষ 70 বছর বাঁচবে তার প্রোব্যাবিলিটি কত ?

যেহেতু প্রতি 82,277 জন 40 বছর বয়সীর মধ্যে 37,977 জন 70 বছর পর্যন্ত বাঁচে নির্ণেয় প্রোব্যাবিলিটি হবে $\frac{37,977}{82,277} \approx \cdot 46$

A যদি 9 বছর বয়সীর 70 বছর এবং B যদি 9 বছর বয়সীর 40 বছর বাঁচার ঘটনা হয় তাহলে $P(A) = \cdot 37,977 \approx \cdot 38$

$$\text{এবং } P(A|B) = \frac{P(A \text{ এবং } B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\cdot 38}{\cdot 82} \approx \cdot 46$$

গুণের নিয়ম : একই সঙ্গে দুটি ঘটনা ঘটার প্রোব্যাবিলিটি হলো প্রথম ঘটনা ঘটার প্রোব্যাবিলিটি এবং প্রথম ঘটনা ঘটার শর্তে দ্বিতীয় ঘটনা ঘটার প্রোব্যাবিলিটির গুণফলের সমান।

$$P(A \text{ এবং } B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$$

ঘটনা B যদি A-এর উপর নির্ভর না করে তাহলে $P(B|A) = P(B)$

উদাহরণ : কয়েক দশকের পর্যবেক্ষণে দেখা যায় যে প্রতি 1000 নবজাতকের মধ্যে 515টি ছেলে এবং 485টি মেয়ে। কোনো একটি পরিবারে ছয়টি সন্তান। সেই পরিবারে দুইয়ের অধিক মেয়ে নেই তার প্রোব্যাবিলিটি বের কর।

আমরা খুঁজছি 0, 1 অথবা 2টি মেয়ের প্রোব্যাবিলিটি। মনে করি, এই প্রোব্যাবিলিটি যথাক্রমে P_0, P_1 এবং P_2। তাহলে নির্ণেয় প্রোব্যাবিলিটি হবে $P = P_0 + P_1 + P_2$ যেহেতু 0, 1 বা 2 মেয়ের ঘটনাগুলো পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

$$P_0 = (0.515)^6 \approx 0.018$$

একটি মেয়ে যেহেতু $\binom{6}{1}$ উপায়ে জন্মাতে পারে।

$$P_1 = \binom{6}{1} (0.515)^5 (0.485) \approx 0.105$$

অনুরূপভাবে, $P_2 = \binom{6}{2} (0.515)^4 (0.485)^2 \approx 0.247$

$$\therefore P = P_0 + P_1 + P_2 \approx 0.370$$

বের্নুলির ফর্মুলা

আমরা যদি একটি পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করি এবং সেই পরীক্ষার ফলাফলগুলো যদি পরস্পর নির্ভরশীল না হয় তাহলে সেই পরীক্ষায় একটি ঘটনা A ঘটার প্রোব্যাবিলিটি যদি P হয় তবে nটি পরীক্ষায় P বার ঘটনা A ঘটার প্রোব্যাবিলিটি হলো $\binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$ .... (11)

উদাহরণ : কোনো একটি কারখানায় পানির ব্যবহার স্বাভাবিক (বেশি নয়) হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি $\frac{3}{4}$. পরবর্তী 6 দিনের 0, 1, 2, ... 6 দিন যে পানির ব্যবহার স্বাভাবিক থাকবে তার প্রোব্যাবিলিটি বের কর।

6 দিনের k দিন পানির ব্যবহার স্বাভাবিক থাকার প্রোব্যাবিলিটিকে $P_6(k)$ দ্বারা প্রকাশ করলে

$$P_6(k) = \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$$

$$\therefore P_6(2) = \binom{6}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{15.3^2}{4^6} \approx 0.03$$

র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এবং ডিস্ট্রিবিউশন ল (Random variable and Distribution Law)

আমরা দেখেছি প্রতি শত শিশুর মধ্যে কত জন ছেলে কিংবা সুতার দৈর্ঘ্য যার সাংখ্যিক মান একবারে নির্ণয় করা যাবে না কারণ মান অনেকগুলো বিষয়ের উপর নির্ভর করে। একইভাবে বন্দুক থেকে গুলি ছুড়লে তা লক্ষ্যের কত কাছাকাছি আঘাত করবে তাও একটি দৈবাৎ (র‍্যানডম) ঘটনা। গ্যাসের অণুগুলোর গতিবেগও এরকম র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল যা নিশ্চিতভাবে নির্ণয় করা যায় না। এক বছরে পৃথিবী পৃষ্ঠে কতগুলো উল্কাপিণ্ড পড়ে তাও র‍্যানডম। তেমনিভাবে একটি শস্যকণার ওজনও। এরপরও এই র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল্ নিয়ে বিশ্লেষণের প্রয়োজন রয়েছে। যেমন কোনো এলাকার শস্যকণার গড় ওজন, অথবা গ্যাস অণুর গড় গতিবেগ।

Goto List>

ডিস্ট্রিবিউশন ল-এর ধারণা

শুরুতে একটি সহজ উদাহরণ নেই। চিত্রে দেয়া লক্ষ্যতে গুলি ছোড়া হলো। যদি তীরন্দাজ I এলাকায় আঘাত করে তাহলে তিন পয়েন্ট পায় আবার II কিংবা III এলাকায় আঘাত করলে যথাক্রমে দুই এবং এক পয়েন্ট পায়। এবার একটি গুলিতে অর্জিত পয়েন্টকে আমরা র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল ধরতে পারি। 1, 2 কিংবা 3 পয়েন্ট অর্জন করার প্রোব্যাবিলিটিকে যদি যথাক্রমে P_1, P_2 এবং P_3 দ্বারা প্রকাশ করি তাহলে III এলাকায় আঘাত করার প্রোব্যাবিলিটি হবে P_3।

যদি কোনো টেস্টে 12 বার গুলি ছোড়া হয় তাহলে I, II কিংবা III এলাকায় আঘাতের সংখ্যা 0 থেকে 12 পর্যন্ত হবে। এই সংখ্যাগুলো কিন্তু তীরন্দাজের উৎকর্ষ যাচাইয়ের জন্য যথেষ্ট নয়। আবার যদি প্রতি এলাকায় আঘাত করার সংখ্যা অথবা প্রোব্যাবিলিটি দেয়া হয় তাহলে কিন্তু তীরন্দাজ সম্পর্কে ধারণা করতে পারি।

টেবিল-I

I	II	III
0	0.2	0.8

পাশের টেবিলে প্রথম সারিতে আঘাত করার এলাকা এবং দ্বিতীয় সারিতে আঘাত করার প্রোব্যাবিলিটি দেয়া আছে। এখান থেকে বলতে পারি তীরন্দাজের পারফরম্যান্স তত ভালো নয়। সাধারণভাবে যদি একটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল P_1, P_2, ..., P_n প্রোব্যাবিলিটিতে x_1, x_2, ..., x_n মান গ্রহণ করে। তবে টেবিলটি হয় নিম্নরূপ—

টেবিল-II

X_1	X_2		X_n
P_1	P_2		P_n

টেবিল-III

I	II	III
0.2	.5	.3

উদাহরণ : একজন তীরন্দাজকে দেয়া পয়েন্ট টেবিল I-এর ডিস্ট্রিবিউশন ল মেনে চলে। দ্বিতীয় তীরন্দাজের ক্ষেত্রে টেবিল III প্রযোজ্য। এবার দুজন তীরন্দাজের অর্জিত পয়েন্টের যোগফলের ডিস্ট্রিবিউশন বের কর। প্রথম এবং দ্বিতীয় তীরন্দাজের পয়েন্টকে যথাক্রমে x এবং y ধরে নিচের টেবিলটি তৈরি করতে পারি।

ক্রমিক নং	x	y	x + y	প্রোব্যাবিলিটি
1	1	1	2	0. ·2 = 0
2	1	2	3	0. ·5 = 0
3	1	3	4	0. ·3 = 0
4	2	1	3	·2. ·2 = 04
5	2	2	4	·2. ·5 = 0·1
6	2	3	5	·2. ·3 = ·06
7	3	1	4	·8. ·2 = ·16
8	3	2	5	·8. ·5 = ·4
9	3	3	6	·8. ·3 = ·24

এই টেবিলটি থেকে বোঝা যায় যে পয়েন্টের যোগফল 2 হওয়ার কোনো সম্ভাবনা নেই। কারণ তার প্রোব্যাবিলিটি 0। আবার x + y=4 হতে পারে তিনভাবে। সুতরাং যোগফল 4 হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি হলো— 0 + ·1 + ·16 = ·26। এবার টেবিল III পয়েন্টের যোগফলের ডিস্ট্রিবিউশন দেখাচ্ছে।

টেবিল-III

3	4	5	6
.04	.26	.46	.24

3, 4, 5 এবং 6 পয়েন্টের প্রোব্যাবিলিটির যোগফল হলো 1.

একটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবলের গড় কিংবা মিন বের করা :

দুজন তীরন্দাজের প্রত্যেকে যদি 100 বার গুলি ছুড়ে তাহলে টেবিল III

অনুসারে 4টি গুলিতে প্রত্যেকে 3 পয়েন্ট পাবে।

26টি ,, ,, 4 পয়েন্ট পাবে।

46টি ,, ,, 5 পয়েন্ট পাবে।

24টি ,, ,, 6 পয়েন্ট পাবে।

গড়ে প্রতি 100 জোড়া গুলিতে পয়েন্ট পাবে 3.4 + 4.26 + 5.46 + 6.24 = 490

সুতরাং প্রতি একজোড়া গুলিতে গড়ে 4.9 পয়েন্ট পাবে। সাধারণ ক্ষেত্রেও আমরা একইরকম যুক্তি দাঁড় করাতে পারি। মনে করি নিম্নের টেবিলে একটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবলকে প্রকাশ করা হলো।

Goto List>

x_1	x_2		x_k
P_1	P_2		P_k

যদি একটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল x P_1 প্রোব্যাবিলিটিতে x_1 মান গ্রহণ করে এর অর্থ হলো n বার যদি এই র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এর মান পর্যবেক্ষণ করা হয় তাহলে n_1বার x_1 মান গ্রহণ করবে যেখানে $\frac{n_1}{n} = P_1$।

অর্থাৎ $n_1 = nP_1$ অনুরূপভাবে, $n_2 = nP_2$ .... ফলে nটি পর্যবেক্ষণে গড়ে

$n_1 = nP_1$ বার $x = x_1$ হবে

$n_2 = nP_2$ " $x = x_2$ "

⋮

$n_k = nP_k$ " $x = x_k$ "

সবগুলো পর্যবেক্ষণে র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল-এর মানের যোগফল হবে

$x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k = n(x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_kP_k)$

ডানদিকের বন্ধনীর মধ্যে আবদ্ধ মানকে র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এর মিন, এক্সপেকটেশন কিংবা গড় বলে এবং $\bar{x}$ চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করে। র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এর গড় আমাদের কী কাজে লাগতে পারে ? এই প্রশ্নের জোরালো উত্তর দেয়ার জন্য আমরা কিছু উদাহরণ দিই।

উদাহরণ : আবার দুই তীরন্দাজের সমস্যায় ফিরে আসি। প্রত্যেকের অর্জিত পয়েন্টের ডিস্ট্রিবিউশন টেবিল I এবং II-তে আছে। আমরা যদি মনোযোগের সঙ্গে তাকাই তাহলে দেখতে পাব প্রথম তীরন্দাজ দ্বিতীয়জনের থেকে ভালো কারণ সবচে' ভালো শটের জন্য প্রথম তীরন্দাজের প্রোব্যাবিলিটি বেশি। আবার সবচে' খারাপ শটের প্রোব্যাবিলিটিও দ্বিতীয় তীরন্দাজের ক্ষেত্রে বেশি। যাহোক র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল যদি অনেকগুলো মান গ্রহণ করে তাহলে এ ধরনের বিশ্লেষণে আমরা সঠিক সিদ্ধান্তে নাও পৌঁছাতে পারি। এবার আমরা তীরন্দাজদের জন্য নিম্নের টেবিলগুলো লক্ষ করি।

টেবিল-I′

1	2	3
0.4	0.1	0.5

টেবিল-II′

1	2	3
.1	.6	.3

এক্ষেত্রে কিন্তু উপরের বিশ্লেষণ সঠিক সিদ্ধান্ত নিতে ব্যর্থ হবে।

এবার আমরা দুই তীরন্দাজের জন্য গড় বের করি।

(1) প্রথম তীরন্দাজের জন্য গড় হলো $1.\cdot4 + 2.\cdot1 + 3.\cdot5 = 2\cdot1$

(2) দ্বিতীয় তীরন্দাজের জন্য গড় হলো— $1.\cdot1 + 2.\cdot6 + 3.\cdot3 = 2\cdot2$

দেখা যাচ্ছে দ্বিতীয় তীরন্দাজের গড় পারফরম্যান্স প্রথম জনের থেকে ভালো।

সমস্যা : P প্রোব্যাবিলিটিতে ঘটনা A ঘটে এরকম কতগুলো টেস্ট করা হলো যার ফলাফল পরস্পর নির্ভরশীল নয়। তাহলে nটি টেস্টে ঘটনা A গড়ে কতবার ঘটবে তা বের কর।

nটি টেস্টে ঘটনা A যতবার ঘটে তা একটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল যার মান 0, 1, 2, ..., n মান গ্রহণ করতে পারে। এক্ষেত্রে র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল A-এর মান K হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি হলো

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k(1-P)^{n-k}$$

∴ এই র‍্যানডম ভ্যারিয়েবলের গড় হলো $\sum_{k=0}^{n} k\, P_n(k)$

সমস্যা : স্বাধীনভাবে টেস্ট করলে একটি ঘটনা A ·8 প্রোব্যাবিলিটিতে ঘটতে পারে। টেস্ট ততক্ষণ চালানো হয় যতক্ষণ A না ঘটে তবে 4টির বেশি টেস্ট চালানো হয় না। গড়ে কতগুলো টেস্ট করা হয় ?

টেস্টের সংখ্যা এখানে র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল যার মান 1, 2, 3 কিংবা 4 হতে পারে। আমাদের এই মানগুলো গ্রহণ করার প্রোব্যাবিলিটি বের করতে হবে।

টেস্টের সংখ্যা 1 হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি $P_1 = .8$
" " 2 " " $P_2 = (1-\cdot8)\cdot8 = \cdot16$
" " 3 " " $P_3 = (1-\cdot8)^2.\cdot8 = \cdot032$
" " 4 " " $P_4 = (1-\cdot8)^3.\cdot8 = \cdot008$

তাহলে র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এর ডিস্ট্রিবিউশন হবে—

1	2	3	4
.8	.16	.032	.008

∴ গড় = 1.·8 + 2.·16 + 3.·032 + 4.·008 = 1.248

আমরা যদি ঘটনা A 100 বার দেখতে চাই তাহলে গড়ে 1·248.100 ≈ 125টি টেস্টের প্রয়োজন হবে।

সমস্যা : আকাশ থেকে নেয়া ছবি থেকে 350 মি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রকে পর্যবেক্ষণ করা হলো। এই পর্যবেক্ষণে ভুল হলো—

0 মি	প্রোব্যাবিলিটি	·42
± 10 মি	"	.16
± 20 মি	"	.08
± 30 মি	"	.05

ক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য একটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল যার ডিস্ট্রিবিউশন নিচের টেবিলে দেয়া হলো।

320	330	340	350	360	370	380
.05	.08	.16	.42	.16	.08	.05

র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এর গড় হবে—

(340 + 360).·16 + (330 + 370).·08 + (320 + 380).·05 = 350

এখান থেকে কেউ ভাবতে পারে তাহলে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে 350^2 = 122,500 বর্গমিটার। এটা সত্য হবে যদি কোনো র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল-এর বর্গের গড় এবং গড়ের বর্গ সমান হয়। কিন্তু তা সত্য নয়।

ক্ষেত্রফলের মান হতে পারে 320^2, 330^2, 350^2, 360^2, 370^2, 380^2 র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল হিসেবে এর ডিস্ট্রিবিউশন নিচের টেবিলে দেয়া হলো।

320^2	330^2	340^2	350^2	360^2	370^2	380^2
.05	.08	.16	.42	.16	.08	.05

এই ভ্যারিয়েবল এর গড় হলো = 122, 686 অথচ 350^2 = 122, 500

মনে করি, $\overline{x^2}$ হলো র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল x^2 এর গড়। তাহলে

$$\bar{x} = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_k P_k = \sum_{i=1}^{k} x_i P_i$$

$$\overline{x^2} = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_k^2 p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_i$$

এবার $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2$, $\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_i$

$$\therefore \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \{x_i^2 - 2\bar{x}x_i + (\bar{x})^2\} P_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 P_i$$

যেহেতু ডান হাতের প্রতিটি টার্মই বিয়োগবোধক নয় $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 \geq 0$

এটা সহজেই দেখানো যায় যে, দুটি র‍্যানডম ভ্যারিয়েবল এর যোগফলের গড় এবং গড়ের যোগফল সমান।

x_1	....	x_k		y_1	....	y_l
p_1		p_k		q_1		q_l

P_{ij} হলো x-এর মান x_i এবং y এর মান y_j হওয়ার প্রোব্যাবিলিটি। x এবং y অনির্ভরশীল হলে $P_{ij} = P_i q_j$

$$\overline{x+y} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i + y_i) P_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\sum_{j=1}^{l} P_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{l} y_j \left(\sum_{i=1}^{l} P_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i p_i + \sum_{j=1}^{l} y_j q_j = \bar{x} + \bar{y}$$

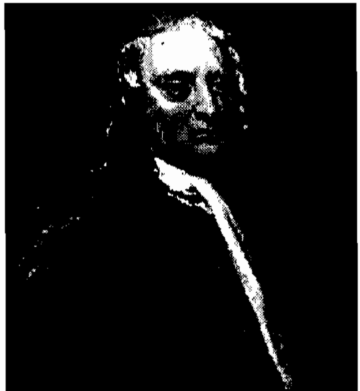
এই ফলটি অধিক ভ্যারিয়েবল এর ক্ষেত্রেও বিস্তৃত করা যেতে পারে।

মহাপ্রতিভাধর নিউটন

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

বিজ্ঞানীদের প্রসঙ্গ এলেই বিশেষ করে দুটি নাম সঙ্গে সঙ্গেই মনে আসে। নিউটন এবং আইনস্টাইন— এরা যেন বিজ্ঞানীদের প্রতীক। বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের, জাগতিক-মহাজাগতিক বস্তু ও ঘটনা সম্পর্কে আমাদের জ্ঞানের প্রসার ঘটিয়েছেন এই দুই মহামানব। আমাদের সমাজে, শুধু বাংলাদেশেই নয় সারা পৃথিবীতে বিজ্ঞানীদের সম্পর্কে তেমন কোনো প্রচার নেই। জীবনে তারা যে উৎকর্ষ অর্জন করেছেন, মানব সমাজকে তারা যে অগ্রগতির পথে নিয়ে গেছেন তাকে ব্যবহার করে তরুণ সমাজকে উদ্দীপিত করার তেমন কোনো কর্মসূচিই গ্রহণ করা হয় না। এ কথা মনে রাখতে হবে, গুহায় বাস করত যে মানুষ, হিংস্র প্রাণীর আতঙ্কে রাতের অন্ধকারে কাটাতো যে মানুষ তাকে মহাশক্তিধর করার, তাদের জীবন নিরাপদ করার, আনন্দময় করার প্রয়োজনীয় ভৌত অবকাঠামো আবিষ্কারে নিদ্রাহীন রজনী কাটিয়েছেন এই বিজ্ঞানীরা। বিজ্ঞানের বইতে যে সকল সফল উদ্যোগের কথা আমরা জানতে পারি তার হাজার গুণ ব্যর্থ চেষ্টা আমাদের দৃষ্টিগোচর হয় না। অথচ সেই চেষ্টার পিছনেও নিবেদিতপ্রাণ বিজ্ঞানীদের বিনিদ্র রজনী কেটেছে। আমাদের মতো সাধারণ মানুষ সবাই বিজ্ঞানী হতে পারবে না, তবে তাদের ঐকান্তিক প্রচেষ্টা ও আত্মত্যাগের প্রশংসা করতে তো আর দোষ নেই। তাদের অর্জিত উৎকর্ষকে উদাহরণ করে উজ্জীবিত হতে তো আর বাধা নেই। কয়েকদিন আগে ইন্টারনেটে বিচরণ করে বিজ্ঞানী নিউটন সম্পর্কে যা জানতে পারলাম তাতে যে শুধু আশ্চর্যই হলাম তা নয়, তাতে আমার একটি ধারণা আরো বদ্ধমূল হলো। তা হলো প্রাচুর্যে নয়, দারিদ্র্যেই উৎকর্ষ অর্জিত হয়। রামানুজন, আবেল, টমাস আলভা এডিসন কিংবা নিউটন হলো প্রকৃষ্ট উদাহরণ। আমরা যারা দারিদ্র্যকে শুধুই অভিশাপ মনে করি তাদের জন্য উপরের উদাহরণগুলো দারিদ্র্যের আরেকটি দিক উন্মোচন করতে পারে।

আইজ্যাক নিউটনের জন্ম হয় ইংল্যান্ডের লিঙ্কনশায়ারের উলসথর্পে, ১৬৪৩ সালের ৪ জানুয়ারি। ৮৪ বছর বয়সে ১৭২৭ সালের ৩১ মার্চ লন্ডনে তিনি পরলোকগমন করেন।



আইজ্যাক নিউটন

নিউটনের জীবনকে মোটামুটিভাবে তিনটি অংশে ভাগ করা যায়। শিশুকাল থেকে ১৬৬৯ সালে একটি বিভাগের প্রধান হওয়া পর্যন্ত একটি অংশ। ১৬৬৯ থেকে ১৬৮৭ সাল পর্যন্ত অত্যন্ত উৎপাদনশীল একটি পর্ব, যখন তিনি কেমব্রিজে লুকাশিয়ান অধ্যাপক হিসেবে কর্মরত ছিলেন। দ্বিতীয় পর্বে বিজ্ঞানী হিসেবে এমন সাফল্য লাভের পর এই দুই পর্বের থেকে অধিক সময় নিউটন উচ্চ বেতনভুক সরকারি চাকুরে হিসেবে লন্ডনে সময় কাটিয়েছেন যখন তার গাণিতিক গবেষণায় তেমন কোনো উৎসাহ ছিল না। যদিও ১৭৫২ সালের আগে ইংল্যান্ডে গ্রেগরিয়ান ক্যালেন্ডার ব্যবহার করা হতো না, নিউটনের জন্ম ও মৃত্যুর তারিখ কিন্তু গ্রেগরিয়ান ক্যালেন্ডার ব্যবহার করেই দেখানো হয়েছে। নিউটনের জন্ম হয় এক কৃষক পরিবারে। কিন্তু দুঃখজনকভাবে তিনি তার পিতাকে কখনো দেখেন নি, যেহেতু তিনি ১৬৪২ সালের অক্টোবর মাসে মৃত্যুবরণ করেন। নিউটনের পিতার নামও ছিল আইজ্যাক নিউটন। নিউটনের পিতামহের যথেষ্ট সম্পদ এবং গৃহপালিত পশু থাকার ফলে নিউটনের পিতা যথেষ্ট ধনী হলেও তিনি মোটেও শিক্ষিত ছিলেন না। এমনকি স্বাক্ষরও করতে পারতেন না। প্রাচুর্যে যে সব সময় মানুষ হওয়া যায় না এটা সম্ভবত তারই একটি উদাহরণ।

নিউটনের পিতার মৃত্যুর পর তার মাতা হান্নাহ আইসকফ বার্নাবাস স্মিথকে বিয়ে করেন যখন নিউটনের বয়স মাত্র ২ বছর। নিউটন তখন অনেকটা এতিমের মতোই তার মাতামহী মার্জারি আইসকফের তত্ত্বাবধানে উলসথর্পেই থেকে যান।

নিউটনের শৈশব মোটেই সুখের ছিল না। নিউটন তার পরবর্তী জীবনে মাতামহ কিংবা মাতামহী সম্পর্কে যে মোটেই উল্লেখ করেন নি এবং জেমস আইসকফ নিউটনের জন্য উইল করে যে কিছুই রেখে যান নি তা থেকে প্রতীয়মান হয় যে, নিউটনের বাল্যজীবন মোটেই সুখে কাটে নি। যাদের বাল্যজীবন অনাদরে, অবহেলায় ও দারিদ্র্যের কশাঘাতে কাটছে তারা নিউটনের বাল্যজীবনের কথা মনে করে অনেক বেশি দৃঢ়প্রতিজ্ঞ হতে পারে, সান্ত্বনা পেতে পারে। ১৬৫৩ সালে যখন সৎ পিতার মৃত্যু হয় তখন নিউটন তার মাতা,

মাতামহী এবং সৎ ভাই-বোনদের নিয়ে বাস করতেন। কিছুদিনের মধ্যেই নিউটন গ্রান্থামের নিউ গ্রামার স্কুলে লেখাপড়া শুরু করেন। যদিও স্কুলটি মাত্র ৫ মাইল দূরে অবস্থিত ছিল, নিউটন গ্রান্থামের ক্লার্ক পরিবারে থেকে তার স্কুলে যাতায়াত করতেন। তবে তার শিক্ষায় তেমন কোনো আশা পাওয়া যাচ্ছিল না। স্কুলের রিপোর্ট তাকে অলস এবং অমনোযোগী হিসেবে উল্লেখ করল। ইতিমধ্যে তার মাতা যথেষ্ট বিত্তশালী হয়েছেন। বড় ছেলেটি যখন পড়লেখায় ভালো করছে না, তিনি তার সম্পত্তি দেখার ভার দেওয়ার জন্য আইজ্যাকের স্কুলে যাওয়া বন্ধ করলেন। কিন্তু খুব শিগগিরই তিনি এ-ও বুঝতে পারলেন যে, আইজ্যাককে দিয়ে সম্পত্তি দেখাশোনার কাজও হবে না। নিউটনের এক পিতৃব্যের চেষ্টায় তাঁর মাতা নিউটনকে ১৬৬০ সালে আবার একই স্কুলে পাঠাতে রাজি হলেন। এবার তিনি স্কুলের প্রধান শিক্ষক স্টোকস পরিবারে থাকা স্থির করলেন। এবার কিন্তু তিনি শিক্ষা কার্যক্রমে তার সম্ভাবনা প্রধান শিক্ষকের নজরে আনতে সমর্থ হলেন, যার ফলে নিউটনকে বিশ্ববিদ্যালয়ের পাঠানোর জন্য প্রধান শিক্ষক তার মাতাকে অনুরোধ করলেন। বিশ্ববিদ্যালয়ে যাওয়ার জন্য নিউটনের প্রস্তুতি কতটা ছিল তা নিশ্চিত হওয়া না গেলেও এমন প্রমাণ আছে যে, স্টোকস প্রস্তুতিতে যথাসাধ্য চেষ্টা করেছিলেন এবং যেহেতু স্টোকস ইউক্লিডের এলিমেন্টস জানতেন তিনি হয়তো বা নিউটনকে এর সঙ্গে পরিচয় করিয়েছিলেন। অবশ্য ১৬৬৩ সালের পূর্ব পর্যন্ত নিউটন যে এলিমেন্টস ভালো করে পড়েন নি তার সাক্ষ্যও রয়েছে।

নিউটন ১৬৬১ সালের ৫ জুন কেমব্রিজের ট্রিনিটি কলেজে ভর্তি হন। তিনি তার শ্রেণীর ছাত্রদের থেকে বয়সে বড় ছিলেন। যদিও তার মাতার যথেষ্ট সম্পদ ছিল, নিউটন কিন্তু বিশ্ববিদ্যালয়ে সিজার হিসেবে যোগ দেন। সিজার হলো এমন ছাত্র, যাকে ছাত্রদের চাকর হিসেবে কাজ করে কলেজের ব্যয় নির্বাহ করতে হয়। ওয়েস্টফলের মতো, ট্রিনিটির ফেলো হামফ্রে ব্যারিংটন নিউটনের দূর সম্পর্কের আত্মীয় ছিলেন, যিনি নিউটনের পৃষ্ঠপোষক হিসেবে কিছুটা দায়িত্ব পালন করেন। নিউটন কিন্তু ল'তে ডিগ্রি করার জন্য কেমব্রিজে ভর্তি হয়েছিলেন। তখন এরিস্টটলের দর্শনে চলছিল কেমব্রিজের পড়ালেখা। শুধুমাত্র তৃতীয় বর্ষে কিছুটা স্বাধীনতা পাওয়া যেত। গ্যালিলিওর কোপার্নিকান অ্যাস্ট্রনমির প্রতি তিনি অনুরক্ত হন, এবং তার চিন্তাভাবনা 'দর্শনের কিছু প্রশ্ন' নামের বইতে লিপিবদ্ধ করেন। ১৬৬৪ সালের দিকেই নিউটনের যে দৃষ্টিভঙ্গি গড়ে উঠেছিল তার বিবরণ রয়েছে এই বইতে। তিনি একটি ল্যাটিন বাক্য দিয়ে বইটি শুরু করেন, যাতে লিখেছিলেন, 'প্ল্যাটো আমার বন্ধু, এরিস্টটল আমার বন্ধু, কিন্তু সত্য হলো

আমার সবচে' ভালো বন্ধু।' ডি মইভারের মতে, অঙ্কের প্রতি নিউটনের আগ্রহ জন্ম নেয় ১৬৬৩ সালের শরৎকালে, যখন কেমব্রিজের একটি মেলা থেকে অ্যাস্ট্রলজির একটি বই কিনে অঙ্ক না জানার ফলে তিনি বুঝতে পারেন নি। একটি ত্রিকোণমিতির বই পড়তে গিয়ে তিনি দেখেন যে, জ্যামিতির বিদ্যায় তার ঘাটতি রয়েছে, তাই তিনি ব্যারোর সম্পাদনায়, ইউক্লিডের এলিমেন্টস পড়া শুরু করেন। প্রথম দিকের কিছু ফলাফল এতই সহজ ছিল যে তিনি যখন আর পড়বেন না ভাবছেন তখন 'সমান ভূমির ওপর একই সমান্তরাল যুগলে অঙ্কিত সব সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলই সমান' তত্ত্বটি পড়ে আগ্রহ ধরে রাখেন। এরপর তিনি বেশ কিছু গণিত সংশ্লিষ্ট বই পড়েন। তিনি বিভিন্ন সূত্রের প্রমাণও নিজে তৈরি করেন। যদিও নিউটনের পড়ালেখার অগ্রগতি ততটা সন্তোষজনক ছিল না, ১৬৬৪ সালের ২৮ এপ্রিল তাকে বৃত্তিধারী হিসেবে নির্বাচন করা হয়। ১৬৬৫ সালের এপ্রিল মাসে তিনি ব্যাচেলরস ডিগ্রি লাভ করেন। তখনো তার মেধার সত্যিকার পরিচয় পাওয়া যায় নি। কিন্তু প্লেগের আবির্ভাবে ১৬৬৫-এর গ্রীষ্মকালে বিশ্ববিদ্যালয় বন্ধ হলে নিউটন লিঙ্কনশায়ারে চলে যান।

২৫ বছর বয়সের মাথায় নিউটন গণিত, আলোবিদ্যা, পদার্থবিদ্যা এবং অ্যাস্ট্রোনমিতে যুগান্তকারী অগ্রগতি সাধন করেন। তুলনামূলকভাবে সাদামাটা বিশ্ববিদ্যালয় জীবনের প্রেক্ষাপটে মাত্র দুই বছরের চেষ্টায় বিজ্ঞানের জগতে বিস্ময়কর সফলতা অর্জন করেন স্কুলের 'অলস ও অমনোযোগী' এই ছাত্রটি। তখন নিউটন ডিফারেন্সিয়াল ও ইনগ্রেটাল ক্যালকুলাসের সূচনা করেন, যা লাইবনিজ স্বতন্ত্রভাবে কয়েক বছর পর আবিষ্কার করেন। ১৬৬৭ সালে আবার যখন কেমব্রিজ খুলে দেওয়া হয় নিউটন ফেলোশিপের জন্য আবেদন করেন। অক্টোবর মাসে তাকে মাইনর ফেলোশিপ দেওয়া হয় এবং মাস্টার্স ডিগ্রি করার পর ১৬৬৮ সালের জুলাই মাসে তিনি মেজর ফেলোশিপও পেয়ে যান, যার ফলে তিনি ফেলোদের সঙ্গে 'ফেলোদের টেবিলে' খাওয়ার যোগ্যতা লাভ করেন।

লুকাশিয়ান চেয়ার ব্যারো ১৬৬৯ সালে লন্ডনে কলিন্সের কাছে নিউটনের লেখা 'ডি অ্যানালাইজি' পাঠিয়ে নিউটনের গণিত সংশ্লিষ্ট সাফল্য বাইরে প্রচারের ব্যবস্থা করেন। কলিন্স লেখাগুলো রয়্যাল সোসাইটির প্রেসিডেন্টকে দেখান। নিউটন খুব দ্রুত তার সকল কাজের স্বীকৃতি পাওয়া শুরু করেন। ইতিমধ্যে ব্যারো ধর্মতত্ত্ব নিয়ে গবেষণার জন্য লুকাশিয়ান চেয়ার থেকে ১৬৬৯ সালে পদত্যাগ করেন এবং নিউটনকে ঐ চেয়ারে অধিষ্ঠিত করার জন্য পরামর্শ দেন, যখন তার বয়স ২৭-ও হয় নি।

নিউটনের এই উত্থান হয় মাত্র ২-৩ বছর সময়ের মধ্যেই। তুলনামূলকভাবে উপেক্ষিত, অবহেলিত শৈশব নিয়ে, সাধারণ স্কুল ও বিশ্ববিদ্যালয়ের জীবন নিয়ে, প্লেগের প্রাদুর্ভাবে বাড়িতে বসে যে কাজ করলেন তাতেই নিউটন জগদ্বিখ্যাত হয়ে গেলেন। গবেষণা এমনই বিষয় ; বছরের পর বছর চেষ্টা করেও সাফল্যের মুখ দেখা যাচ্ছে না, আবার হঠাৎ করেই সাগরের ঢেউয়ের মতো একের পর এক সাফল্য। তবে কোনো সাফল্যই কিন্তু অনুপার্জিত নয়। প্রতিটি সাফল্যের পিছনেই বিজ্ঞানীর নিরলস প্রচেষ্টা, ঘুম হারাম করে রাত্রি জাগরণ রয়েছে।

লুকাশিয়ান চেয়ারে অধিষ্ঠিত হওয়ার পরপরই নিউটন লন্ডনে বেড়াতে যান। এই পদে তিনি আলোকবিদ্যা নিয়ে গবেষণা শুরু করেন, এবং ১৬৭০ সালের জানুয়ারি মাসে যে কোর্স শুরু করেন তার প্রথম বক্তৃতাও আলোকবিদ্যা নিয়ে। প্লেগে আক্রান্ত দুটি বছর গবেষণা করে তিনি এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, সাদা আলো কোনো সরল বিষয় নয়, যদিও এরিস্টটলসহ পরবর্তী সময়ে সব বিজ্ঞানীরই ধারণা ছিল সাদা আলো হলো একটি মৌলিক উপাদান। কিন্তু টেলিস্কোপ লেন্সের বর্ণালি নিউটনকে ভিন্ন ধারণা দেয়।

রয়্যাল সোসাইটিকে একটি টেলিস্কোপ দান করার পর নিউটনকে ১৬৭২ সালে সোসাইটির ফেলো নির্বাচন করা হয়। অবশ্য একই বছর নিউটন আলো এবং তার রঙ নিয়ে প্রথম বৈজ্ঞানিক প্রবন্ধ প্রকাশ করেন। নিউটনের এই পেপারটি হুকের সমালোচনার সন্মুখীন হয়, যদিও তাতে বিশ্বকে জানানোর আগ্রহ স্তিমিত হয় নি।

নিউটনের চরিত্রে দুটি দিক ছিল— একদিকে সুনাম ও স্বীকৃতি পাওয়ার ঝোঁক, অন্যদিকে সমালোচনার ভয়ে কোনো কিছু প্রকাশ না করার প্রবণতাও। নিউটন কিন্তু হুককে জনসমক্ষে অপমানও করেছিলেন। নিউটনের সঙ্গে হুকের সম্পর্ক আরো খারাপ হলো যখন হুক দাবি করে বসলেন যে নিউটন তার আলোর ওপর কিছু কাজ চুরি করেছেন। পরে অবশ্যি দুজন বিনয়ের সঙ্গে দুটি চিঠি বিনিময় করে তাদের বিবাদের অবসান ঘটিয়েছিলেন। নিউটন রয়্যাল সোসাইটি থেকে নিজেকে দূরে রাখলেন, যেখানে হুক একজন নেতৃস্থানীয় ছিলেন। ১৭০৩ সালে হুকের মৃত্যুর পর নিউটন তার আলোর ওপর গবেষণালব্ধ ফলাফল বিস্তারিতভাবে প্রকাশ করেন। ১৭০৪ সালে 'Optics' নামের বইতে আলোর রঙ, নিউটন রিং এবং আলোর বিচ্ছুরণ সংক্রান্ত পর্যবেক্ষণের ব্যাখ্যার জন্য আলোর করপাসকুলার থিউরির পাশাপাশি ওয়েভ থিউরিও ব্যবহার করেন।

রঙ তত্ত্ব নিয়েও নিউটনের সঙ্গে লিয়েগের ধর্মসংঘের সদস্যদের আক্রমণাত্মক চিঠিযুদ্ধ হয়। ১৬৭৮ সালে তার স্নায়ুদৌর্বল্য দেখা দেয়। এর পরবর্তী বছর তার মা মারা যান এবং নিউটন বেশ কয়েক বছর মানুষের সঙ্গে মেলামেশা পর্যন্ত বন্ধ করে দেন।

নিউটনের সবচে' বড় সাফল্য আসে পদার্থবিজ্ঞান ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে, যার ফলে মহাকর্ষ তত্ত্বের জন্ম হয়। ১৬৬৬ সালে গতির তিনটি সূত্রই প্রাথমিক পর্যায়ে ছিল। এছাড়াও পৃথিবীর চারদিকে চন্দ্রের আবর্তনে পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাব থাকার চমৎকার ধারণাও তখনই তৈরি হয়। তিনি সেন্ট্রিফিউগ্যাল বলের সূত্র এবং গ্রহসমূহের ঘূর্ণন সংক্রান্ত কেপলারের তৃতীয় সূত্র থেকে দূরত্বের বিপরীত বর্গীয় সূত্র তৈরি করেন।

হ্যালির অনুরোধে ১৬৭৮ সালে নিউটন পদার্থ ও জ্যোতির্বিজ্ঞানের বিভিন্ন আবিষ্কার সম্পৃক্ত করে Philosophiae Naturalis Principia Mathematica নামের বইটি প্রকাশ করেন। সংক্ষেপে এই বইকে রেধভডধযধট-ও বলা হয়। পৃথিবীর ইতিহাসে Principia-কে সবচে' মূল্যবান বৈজ্ঞানিক গ্রন্থ হিসেবে স্বীকৃতি দেওয়া হয়। এই বইতে নিউটন বাধাদানকারী ও বাধাহীন মাধ্যমে সেন্ট্রিপেটাল বলের প্রয়োগে গতির বিশ্লেষণ করেন। তিনি আরো দেখান যে, গ্রহগুলো যে সূর্যের দিকে আকৃষ্ট হচ্ছে সেই বল দূরত্বের বিপরীত বর্গীয় অনুপাতের। তাছাড়া বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের যে-কোনো দুটি বস্তুও পরস্পর পরস্পরকে আকর্ষণ করে।

দ্বিতীয় জেমস ১৬৮৫ সালের ৬ ফেব্রুয়ারি গ্রেট ব্রিটেনের রাজা হন। প্রোটেস্টান্টদের প্রতি বিশ্বাস হারানোর ফলে তিনি রোমান ক্যাথলিক অফিসারদের সেনাবাহিনীতে নিযুক্তি দেন। বিচারক এবং রাজ্যের গুরুত্বপূর্ণ পদেও তিনি ক্যাথলিকদের নিযুক্তি দেওয়া শুরু করেন। যখনই অক্সফোর্ড কিংবা কেমব্রিজে একটি পদ শূন্য হতো তিনি তৎক্ষণাৎ একজন ক্যাথলিককে বসিয়ে দিতেন। নিউটন একজন গোঁড়া প্রোটেস্টান্ট ছিলেন এবং এ ধরনের কাজকে বিশ্ববিদ্যালয়ের বিরুদ্ধে আক্রমণ হিসেবে দেখলেন। রাজা যখন কোনো পরীক্ষা কিংবা শপথ না নিয়েই একজন বেনেডিকটাইন সন্ন্যাসীকে ডিগ্রি দেওয়ার জন্য জিদ করেছিলেন তখন নিউটন উপাচার্যকে লিখেছিলেন, 'সাহসী হন, আইনের প্রতি অনুগত থাকুন, আপনি হারবেন না।' উপাচার্য নিউটনের কথা শুনে কাজ করার ফলে পদচ্যুত হন। এমন সময় উইলিয়াম অব অরেঞ্জ ১৬৮৮ সালে

জেমসকে পরাজিত করেন এবং জেমস ফ্রান্সে পলায়ন করেন। ১৬৮৯ সালের ১৫ জানুয়ারি নিউটনকে কনভেনশন পার্লামেন্টের দুজন সদস্যের একজন হিসেবে নির্বাচিত করেন। এই সদস্য নিযুক্তির পর কেমব্রিজের অ্যাকাডেমিক জীবনের বাইরে লন্ডনের জীবনকে নিউটন অধিকতর আকর্ষণীয় মনে করেন। ১৬৯৩ সালে দ্বিতীয়বারের মতো স্নায়ুদৌর্বল্যে ভুগে নিউটন গবেষণাকর্ম থেকে অবসর নেন। নিউটনের এই অসুস্থতা নিয়ে জীবনীকারদের মধ্যে নানা মত রয়েছে। কেউ বলেন রাসায়নিক বিষক্রিয়া, গবেষণায় ব্যর্থতা, ফাবিও ডি ডুইলার নামের লন্ডনে বসবাসকারী সুইজারল্যান্ডে জন্মগ্রহণকারী গণিতবেত্তার সঙ্গে সম্পর্ক ছিন্ন, ধর্মীয় বিশ্বাস এই অসুস্থতার জন্য দায়ী। নিউটন অবশ্য মনে করতেন অপ্রতুল নিদ্রাজনিত কারণেই তিনি অসুস্থ হয়েছিলেন।

নিউটন কেমব্রিজ ছেড়ে ১৯৯৬ সালে লন্ডনে রয়্যাল মিন্টের ওয়ার্ডেন নিযুক্ত হন এবং ১৬৯৯ সালে মাস্টার পদে পদোন্নতি লাভ করেন। তিনি অবশ্য কেমব্রিজের পদটি ১৭০১ সাল পর্যন্ত ধরে রেখেছিলেন। মিন্টের মাস্টার হিসেবে নিউটন সম্পত্তির আয় যোগ করে খুব ধনী ব্যক্তি হয়ে গেলেন। এই পদে মানুষ সাধারণত উদ্যোগ নিয়ে কাজ না করলেও নিউটন কিন্তু উদ্যোগী হয়ে মুদ্রা নকল করার বিরুদ্ধে বেশ কিছু কার্যকর পদক্ষেপ নিলেন। ১৭০৩ সালে তিনি রয়্যাল সোসাইটির প্রেসিডেন্ট নির্বাচিত হন এবং মৃত্যুর পূর্ব পর্যন্ত প্রতিবছরই নির্বাচিত হতে থাকেন। ১৭০৫ সালে রানী অ্যান নিউটনকে নাইট উপাধিতে ভূষিত করেন। নিউটন হলেন প্রথম বিজ্ঞানী যাকে এই উপাধি দেওয়া হয়। অবশ্য তার পরবর্তী জীবন খুব সুখকর ছিল না। তিনি লাইবনিজের সঙ্গে ক্যালকুলাস কে আবিষ্কার করেছে এই বিতর্কে জড়িয়ে পড়েন। এই বিতর্কের অবসান ঘটানোর জন্য রয়্যাল সোসাইটির প্রেসিডেন্ট হিসেবে তিনি একটি 'নিরপেক্ষ' কমিটি গঠন করেন, যারা ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক সংক্রান্ত বিতর্কের সিদ্ধান্ত দেবেন। অফিসিয়াল প্রতিবেদনটি তিনিই লেখেন, যদিও তার নামে নয়। তিনি ছদ্মনামে এই প্রতিবেদনের ওপর একটি রিপোর্টও লিখেছিলেন।

সাধারণ শিক্ষা ব্যবস্থায় প্রমাণিত অতীব সাধারণ বালক নিউটন কী অসাধারণ বিজ্ঞানীই না হয়ে উঠেছিলেন। আমাদের মেধা বিনষ্টকারী শিক্ষা ব্যবস্থা নিশ্চয়ই অনেক প্রতিভাধরের ভবিষ্যৎ অঙ্কুরেই বিনষ্ট করছে। নিউটনের জীবনী থেকে আমাদের কিশোর তরুণ ছাত্ররা তাদের সুপ্ত প্রতিভার সন্ধান পেতে পারে।

ক্যালকুলাসে ক্যালকুলেশন

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

ধরা যাক তুমি একদিন হাঁটতে বের হয়েছ। ছোটখাট কোনো হাঁটা নয় বেশ লম্বা একটি হাঁটা। প্রথম ঘণ্টায় তুমি হেঁটেছ দুই কিলোমিটার, দ্বিতীয় ঘণ্টায় চার কিলোমিটার, তৃতীয় ঘণ্টায় ছয় কিলোমিটার। এভাবে ছয় ঘণ্টায় বারো কিলোমিটার। জিনিসটা ঠিক করে গুছিয়ে লেখা যাক।

হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব

ঘণ্টা	0	1	2	3	4	5	6
কিলোমিটার	0	2	4	6	8	10	12

তোমাকে হাঁটতে দেখে তোমার এক বন্ধুও বের হয়েছে তবে সে হাঁটছে না, সে বের হয়েছে সাইকেলে। তবে সে নতুন সাইকেল চালাতে শিখেছে, কাজেই প্রথম প্রথম সে খুব সুবিধে করতে পারছিল না তবে দেখতে দেখতে সে ভালোই সাইকেল চালাতে শিখে গেল। প্রথম ঘণ্টায় সে গিয়েছিল মাত্র এক কিলোমিটার, দ্বিতীয় ঘণ্টায় সেটা হয়ে গেল চার কিলোমিটার, তৃতীয় ঘণ্টায় বেড়ে হলো নয় কিলোমিটার। ছয় ঘণ্টার মাথায় দেখা গেল সব মিলিয়ে সে 36 কিলোমিটার চলে এসেছে। ঠিকভাবে তার গতিবিধি লিখতে হলে এভাবে লিখতে হয় :

সাইকেলে অতিক্রান্ত দূরত্ব

ঘণ্টা	0	1	2	3	4	5	6
কিলোমিটার	0	1	4	9	16	25	36

দেখাই যাচ্ছে হেঁটে তুমি ছয় ঘণ্টায় গিয়েছ 12 কিলোমিটার কিন্তু তোমার বন্ধু সাইকেলে ছয় ঘণ্টায় মোট দূরত্ব অতিক্রম করেছে 36 কিলোমিটার।

এবারে আমাদের মূল সমস্যায় আসা যাক। কেউ যদি তোমাকে জিজ্ঞেস করে তুমি যখন হেঁটে যাচ্ছিলে তখন তোমার গতিবেগ কত ছিল কিংবা তোমার বন্ধু যখন সাইকেলে যাচ্ছিল তখন তার গতিবেগ কত ছিল ?

হেঁটে যাবার ব্যাপারটি সহজ, আমরা যদি (ক) প্রথম এক ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে গতিবেগ বের করি তাহলে বেগ হবে—

$$\text{বেগ} = \frac{(2-0)\ \text{কিলোমিটার}}{1\ \text{ঘণ্টা}} = 2\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

(খ) আমরা যদি চতুর্থ থেকে পঞ্চম ঘণ্টার মাঝে অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে বেগ বের করি তাহলে বেগ হবে—

$$\text{বেগ} = \frac{(10-8)\ \text{কিলোমিটার}}{(5-4)\ \text{ঘণ্টা}} = 2\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

(গ) আমরা যদি প্রথম পাঁচ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে বেগ বের করি তাহলে বেগ হবে—

$$\text{বেগ} = \frac{(10-0)\ \text{কিলোমিটার}}{(5-0)\ \text{ঘণ্টা}} = 2\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

(ঘ) আমরা যদি শেষ পাঁচ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে বেগ বের করি তাহলে বেগ হবে—

$$\text{বেগ} = \frac{(12-2)\ \text{কিলোমিটার}}{(6-1)\ \text{ঘণ্টা}} = 2\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

অর্থাৎ যেভাবেই বের করি সবসময়েই 2 কিলোমিটার/ঘণ্টা। কারণ আমরা দেখতেই পাচ্ছি তুমি ঘণ্টায় দুই কিলোমিটার করে হেঁটেছ, সেটাই তো আসবে।

এবারে সাইকেলে করে যাওয়া তোমার বন্ধুর বেগ বের করা যাক। তোমার হেঁটে যাবার সময় যেভাবে বের করেছিলাম, হুবহু সেভাবে।

(ক) প্রথম এক ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে :

$$\text{বেগ} = \frac{(1-0)\ \text{কিলোমিটার}}{(1-0)\ \text{ঘণ্টা}} = 1\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

(খ) চতুর্থ থেকে পঞ্চম ঘণ্টার মাঝে অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে :

$$\text{বেগ} = \frac{(25-16)\ \text{কিলোমিটার}}{(5-4)\ \text{ঘণ্টা}} = 9\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

(গ) প্রথম পাঁচ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে :

$$\text{বেগ} = \frac{(25-0)\ \text{কিলোমিটার}}{(5-0)\ \text{ঘণ্টা}} = 5\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

(ঘ) শেষ পাঁচ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে :

$$\text{বেগ} = \frac{(36-1)\ \text{কিলোমিটার}}{(6-1)\ \text{ঘণ্টা}} = 7\ \text{কিলোমিটার/ঘণ্টা।}$$

দেখা যাচ্ছে প্রত্যেকটি বেগ ভিন্ন। আমরা যদি সময়ের সাথে অতিক্রান্ত দূরত্বটুকু একটু ভালো করে দেখি তাহলে বুঝতে পারব ব্যাপারটি খুব একটা অযৌক্তিক নয়। সাইকেলে যাবার সময় প্রত্যেক ঘণ্টাতেই আগের ঘণ্টা থেকে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করেছে, যার অর্থ হেঁটে যাবার মতো বেগ সমান নয়। বেগটি আস্তে আস্তে বেড়েছে। কাজেই আমরা যখনই বেগ বের করেছি— নির্দিষ্ট সময়ের বেগ বের করতে পারে নি। ঐ সময়ের গড় বেগ বের করেছি। প্রথম পাঁচ ঘণ্টার গড় নেয়ার সময় একটু কম এসেছে, পরের পাঁচ ঘণ্টায় বেশি এসেছে। হেঁটে যাবার বেলা পুরো সময়েই বেগ সমান। কাজেই গড় নেয়া হলেও সেটি আসল বেগের সমান এসেছে। কিন্তু সাইকেলে যাবার সময় যেহেতু বেগ পরিবর্তন হচ্ছে কাজেই সেখানে 'একটি' বেগ নেই— একেক সময়ে বেগ একেরকম। সাইকেলের বেগ কথাটিরও ঠিক উত্তর নেই, বলতে হবে অমুক সময়ে সাইকেলের বেগ কত ?

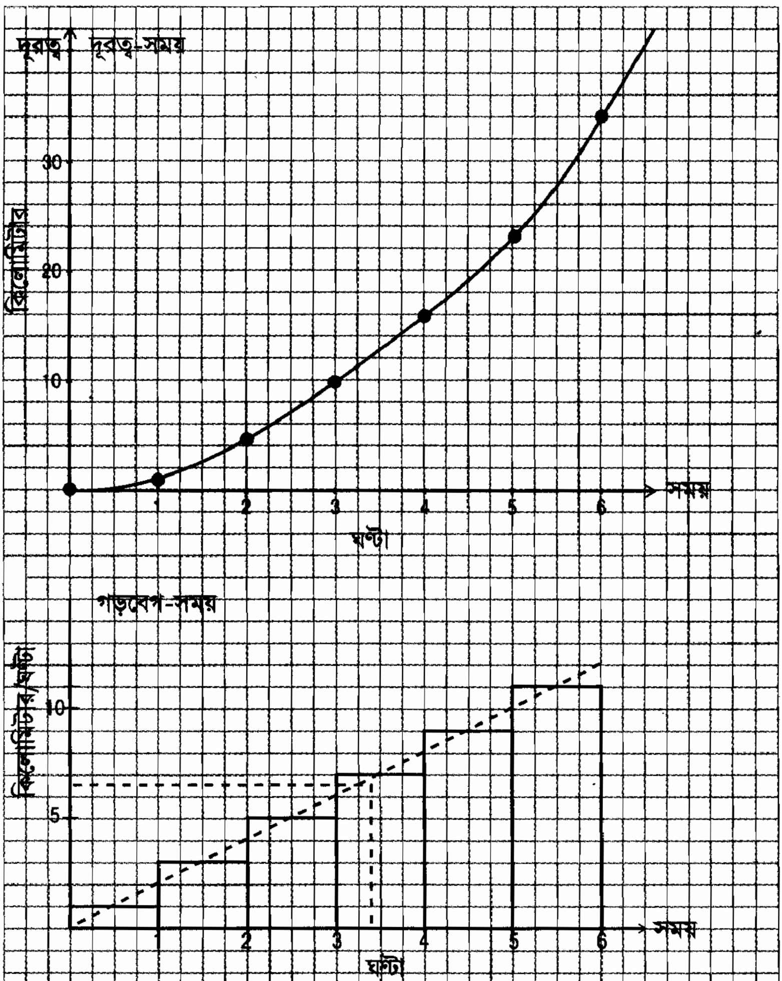
কাজেই এবার তাহলে নূতন করে প্রশ্ন করা যাক। সাইকেল দিয়ে রওনা দেয়ার তিন ঘণ্টা সাড়ে বাইশ মিনিট পরে তোমার বন্ধুর গতিবেগ কত ছিল ? কিংবা অন্য কোনো একটি নির্দিষ্ট সময়ে ?

একটি উপায় হচ্ছে— প্রত্যেক ঘণ্টার গড়বেগ বের করে গ্রাফ পেপারে সেটা এঁকে নেয়া। তারপর একটা রেখা টেনে বেগটা বের করে নিয়ে তিন ঘণ্টা সাড়ে বাইশ মিনিটে কত হয় সেটা দেখে নেয়া। পদ্ধতিটা কাজ করবে। কিন্তু সেটি নিখুঁত পদ্ধতি নয়, কত ভালো করে গ্রাফ পেপারটিতে রেখাটি আঁকা হলো, তার উপরে এটা নির্ভর করে। 1 নাম্বার ছবিতে মোটামুটিভাবে চেষ্টা করে দেখা যাচ্ছে। তিন ঘণ্টা বাইশ মিনিটে সাইকেলের বেগ হচ্ছে ছয় থেকে সাতের ভেতরে, আনুমানিক ঘণ্টায় সাড়ে ছয় কিলোমিটার। কিন্তু এর থেকে ভালোভাবে কি বের করার কোনো উপায় নেই ?

নিশ্চয়ই আছে, এবং সেটার জন্যে যে পদ্ধতিটা ব্যবহার করা হয়, সেটার নাম ক্যালকুলাস (Calculus)। 1684 সালে লিবনিজ (Leibniz) একটা পেপার লিখে এই ধরনের সমস্যার সমাধান বের করে রেখেছেন এবং ক্যালকুলাস নামটি তারই দেয়া। মজার (কিংবা দুঃখের) ব্যাপার হচ্ছে লিবনিজ তার ক্যালকুলাসের সূত্র প্রকাশ করার পর বিজ্ঞানী নিউটন দাবি করলেন তিনি

Goto List>

কুড়ি বছর আগেই এটা বের করে রেখেছেন, তিনি এটাকে বলেন ফ্লাক্সিওন (Fluxion) এবং এটা ব্যবহার করে তিনি অনেক হিসেবপত্র করে রেখেছেন। নিউটন সব সময়েই সব ব্যাপারেই একটু গোপনীয়তা রাখতেন এবং এই কারণে ক্যালকুলাসটি কার আবিষ্কার সেটা নিয়ে তখন ভয়ানক বাকবিতণ্ডা শুরু হয়েছিল। এখন প্রায় দু'শ বছর পর দুজনকেই ক্যালকুলাসের জনক হিসেবে তাদের প্রাপ্য সম্মানটুকু দেওয়া হয় এবং সেই সময়ের তর্কবিতর্ককে একটা দুঃখজনক কাদা ছোড়াছুড়ি হিসেবে খানিকটা কৌতুকের সাথে দেখা হয়।



1 নং ছবি : গ্রাফ এঁকে বেগ বের করা

এবার তাহলে আমাদের মূল সমস্যায় আসা যাক। আমরা সময়ের সাথে অতিক্রান্ত দূরত্ব জানি, সেখান থেকে গতিবেগটুকু বের করতে হবে। সেটা বের করার জন্যে আমাদের সময়ের সাথে অতিক্রান্ত দূরত্বটুকু নিখুঁতভাবে একটা সূত্র দিয়ে প্রকাশ করতে হবে। আমরা একটু ভালো করে লক্ষ করলেই দেখতে পাব অতিক্রান্ত দূরত্ব যদি s কিলোমিটার হয় তাহলে t ঘণ্টায়—

হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 2t$ কিলোমিটার।

সাইকেলে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = t^2$ কিলোমিটার।

ইচ্ছে করলেই পরীক্ষা করে দেখতে পারবে t-এর জায়গায় ঘণ্টার মান বসালেই দূরত্বটুকু বের হয়ে আসছে। হেঁটে যাবার সময় গতিবেগটি বের করতে সমস্যা হয় নি। সাইকেলের অতিক্রান্ত দূরত্বটি নিয়েই আমাদের সমস্যা হয়েছিল, কাজেই সেটা নিয়েই শুরু করা যাক।

ধরা যাক সাইকেলে t_1 এবং t_2 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ছিল s_1 এবং s_2।

কাজেই t_1 থেকে t_2 সময়ের ভেতরে গড় বেগ হবে $\overline{v} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

এবারে এই জিনিসটা একটু অন্যভাবে লেখা যাক।

$t_1 = t \therefore s_1 = t^2$ এবং $t_2 - t_1 = h$ অর্থাৎ $t_2 = t + h \therefore s_2 = (t + h)^2$

অর্থাৎ $\overline{v} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{(t + h)^2 - t^2}{h}$ কাজেই t সময়ে h সময়ের জন্যে গড় বেগ হচ্ছে : $\overline{v} = \dfrac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t + h$

অর্থাৎ h সময়ে গড় বেগ হচ্ছে $2t + h$, কিন্তু আমরা কোনো গড় বেগ চাই না, আমরা নির্দিষ্ট সময়ে বেগ বের করতে চাই। এবারে আমাদের একটা সুযোগ এসেছে, h-কে যত ছোট করা হবে বেগটা তত অল্প সময়ের গড় বেগ হবে। h-কে ছোট করতে করতে যদি সেটাকে শূন্য করে দেয়া যায় তাহলে গতিবেগটা আর গড়বেগ থাকবে না সেটা সেই সময়ের তাৎক্ষণিক বেগ হয়ে যাবে। অর্থাৎ t সময়ের তাৎক্ষণিক বেগ যদি v হয় তাহলে $v = \lim_{h \to 0} (2t + h) = 2t$

অর্থাৎ t সময়ে তাৎক্ষণিক বেগ হচ্ছে $2t$। কাজেই এখন আমরা তিন ঘণ্টা সাড়ে বাইশ মিনিটে বেগটি বের করতে পারি। সাড়ে বাইশ মিনিট হচ্ছে $\dfrac{3}{8}$

Goto List>

ঘণ্টা। কাজেই $\overline{v} = 2t = 2\left(3\frac{3}{8}\right) = 6.75$ কিলোমিটার/ঘণ্টা। আমরা একেবারে নিখুঁতভাবে গতিবেগটা বের করে ফেলেছি।

ক্যালকুলাসের ভাষায় যদি লিখতে হয় তাহলে আমরা লিখব :

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$$

আমরা এটা লিখেছি যখন $s = t^2$, কিন্তু আসলে এটা যে-কোনো ফাংশনের জন্যেই সত্যি। কাজেই সবচে' সাধারণভাবে লিখলে লিখতে হবে—

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

যার অর্থ f যদি x-এর মানের সাথে সাথে পরিবর্তিত হয় তাহলে, x-এর সাপেক্ষে f-এর পরিবর্তনের হার হচ্ছে $\frac{df}{dx}$ এবং সেটা উপরে দেখানো উপায়ে বের করা যাবে।

কয়েকটা উদাহরণ দেয়া যাক :

(ক) আমাদের প্রথম উদাহরণ, হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 2t$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h) - 2t}{h} = 2$$

আমরা ঠিক যেটা পেয়েছিলাম।

(খ) $f(x) = x^3$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$= 3x^2$$

অর্থাৎ x-এর সাথে f(x)-এর পরিবর্তনের হার $3x^2$ আরো সাধারণভাবে বলা যায় $f(x) = x^n$ হলে $\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$

(গ) f(x) = a, যেখানে a হচ্ছে একটি ধ্রুব (Constant)

$$\therefore \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(a) - (a)}{h} = 0$$

অর্থাৎ কোনো কিছুর যদি পরিবর্তন না হয় তাহলে তার পরিবর্তনের হার হচ্ছে শূন্য। (অবশ্যই!)

(ঘ) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ ......

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \ldots\ldots$$

আমরা জানি, $\frac{d}{dx}(1) = 0$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

....

$$\frac{df}{dx} = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \ldots\ldots$$

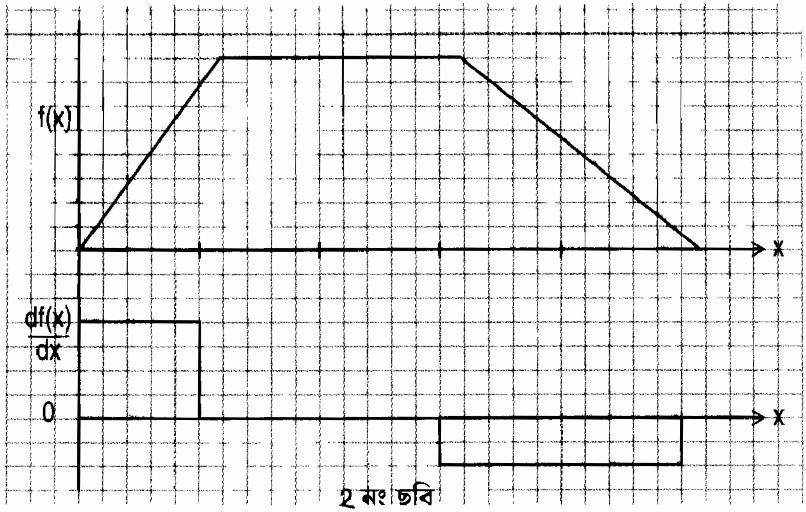
$$\frac{df}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

যেটি আসলে f(x) ছাড়া আর কিছুই না!

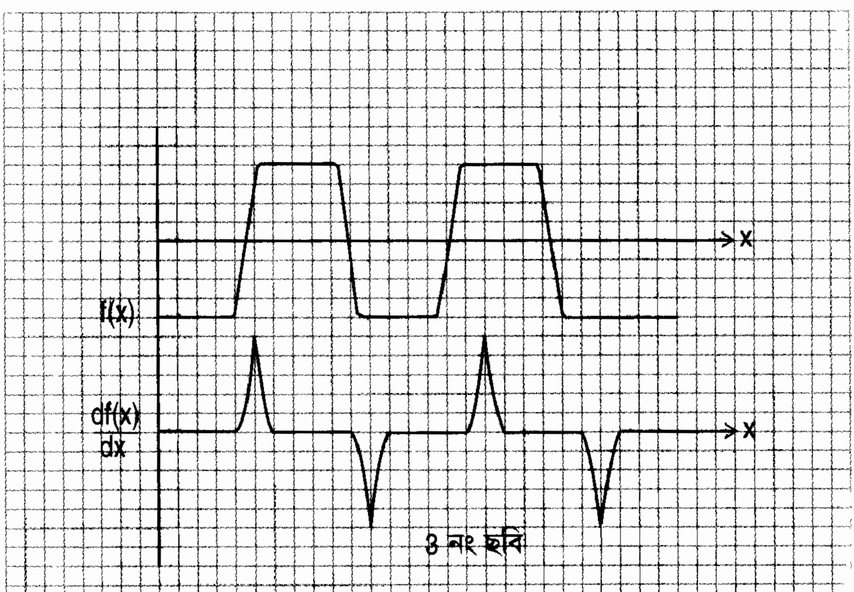
অর্থাৎ $\frac{df(x)}{dx} = f(x)$

অর্থাৎ এই বিশেষ ফাংশনের জন্যে পরিবর্তনের হারটিই হচ্ছে এই ফাংশনটি! এই মজার ফাংশনকে বলা হয় e^x বা exp(x).

ক্যালকুলাসের মূল বিষয়টি বলার চেষ্টা করা হলো। এর পরের পৃষ্ঠায় কিছু ফাংশন এঁকে তার পরিবর্তনের হারটি দেখানো যাক!

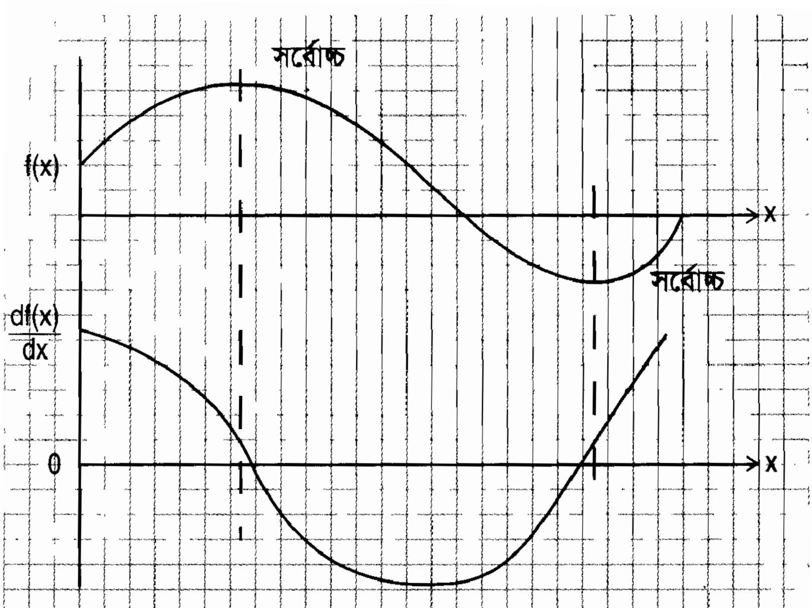


2 নং ছবি : f(x) বাড়ছে সমান থাকছে এবং কমছে কাজেই $\frac{df}{dx}$ যথাক্রমে পজিটিভ শূন্য এবং নেগেটিভ।



3 নং ছবি : একটি ধাপ (step) অক্ষ x-এর ভেতরে বড় পরিবর্তন। কাজেই সেখানে $\frac{df}{dx}$ খুব অক্ষ x-এর ভিতরে বড় মান, পজিটিভ ও নেগেটিভ।

Goto List>



4 নং ছবি

4 নং ছবি : $\frac{df}{dx} = 0$ হয় যেখানে f সর্বোচ্চ কিংবা সর্বনিম্ন।

সৌখিন গণিতবিদ : পিয়ে দ্য ফার্মা

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

আজ থেকে চারশ' বছর আগে ১৬০১ সালের ২০ আগস্ট ফ্রান্সের দক্ষিণ পশ্চিমের একটা শহরে পিয়ে দ্য ফার্মার (Pierre de Fermat) জন্ম হয়েছিল। ফার্মার বাবা দমিনিক ফার্মা একজন বিত্তশালী চামড়া ব্যবসায়ী ছিলেন, কাজেই ছেলেবেলা খুব ভালো একটা স্কুলে এবং স্কুল শেষে ইউনিভার্সিটি অফ টুলুস (Toulouse)-এ পড়াশোনার সুযোগ পেয়েছিলেন। ফার্মা যদিও এক সময় পৃথিবীর একজন শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ হিসেবে পরিচিত হবেন কিন্তু সারা ছাত্রজীবনে কখনোই কিন্তু তিনি গণিতে কোনোরকম বুৎপত্তি দেখান নি।

বিত্তশালী পরিবারে যা হয়, ফার্মার বেলাতেও তাই হলো, পরিবারের সবাই ফার্মাকে সিভিল সার্ভিসে যোগ দিতে বলল এবং ফার্মা ১৬৩১ সালে চেম্বার অফ পিটিশনে কাউন্সিলরের চাকরি নিলেন। সেটা ছিল রাজা বাদশাহদের কাল, কেউ যদি ফ্রান্সের রাজার কাছে চিঠি লিখতে চাইত তাহলে সেটা আগে ফার্মার কাছে আনতে হতো। তিনি অনুমতি দিলেই সেটা রাজার কাছে পাঠানো হতো। ফ্রান্সের রাজার নানা ধরনের আদেশ নির্দেশ তার এলাকায় ঠিকমতো পালন করা হচ্ছে কী না ফার্মা সেটাও দেখতেন। ইতিহাসে দেখা যায় ফার্মা খুব মন দিয়ে তার দায়িত্ব পালন করতেন। নিজের সত্যিকার দায়িত্ব ছাড়াও তাকে কিছু বাড়তি দায়িত্ব পালন করতে হতো— সেটি ছিল বিচারকের দায়িত্ব। ইতিহাস থেকে জানা যায় একবার তার এক গণিতবিদ বন্ধু তার সাথে দেখা করতে এসে দেখা করতে পারেন নি, কারণ ফার্মা তখন একজন ধর্মযাজককে বড় ধরনের কোনো অন্যায় করার জন্যে পুড়িয়ে মারার শাস্তি দিয়েছেন সেটা নিয়ে খুব ব্যস্ত। (শাস্তি হিসেবে পুড়িয়ে মারা সেই যুগে এমন কিছু অস্বাভাবিক ব্যাপার ছিল না)।


পিয়ে দ্য ফার্মা

খুব অল্প সময়ে ফার্মা খুব উঁচু পদে উঠে গিয়েছিলেন। পুরোটাই যে কর্মদক্ষতা তা নয়, রোগ-শোকও এ ব্যাপারে খুব বড় একটা ভূমিকা পালন করেছিল। ইউরোপে তখন ভয়ঙ্কর রোগ প্লেগ ছড়িয়ে পড়েছে, লক্ষ লক্ষ মানুষ মারা যাচ্ছে, মৃত্যু ছোট বড় কাউকেই ছাড়ছে না, অনেক বড় পদে বড় বড় মানুষও মারা যাচ্ছে সেই সব ফাঁকা পদ পূরণ করার জন্যে খুব দ্রুত প্রমোশন পেয়ে ফার্মা ওপরে উঠে গেছেন। প্লেগ শুধু যে তার কপাল খুলে দিয়েছিল তা নয়, আরেকটু হলে প্লেগের কারণে তিনি নিজেও মারা পড়তে যাচ্ছিলেন, তার এক বন্ধু তাকে মৃত ধরে নিয়ে সবাইকে সেভাবে খবর ছড়িয়ে দিয়েছিলেন। শেষে দেখা গেল তিনি মারা যান নি, বেঁচে গিয়েছেন।

ফার্মা শুধু যে প্লেগ থেকে বেঁচে গিয়েছিলেন তা নয় সেই সময়ে ভয়াবহ সব রাজনৈতিক বিপদ থেকেও তিনি বেঁচে গিয়েছিলেন। তিনি টুলুসের পার্লামেন্টে মনোনীত হয়েছিলেন এবং এই সময়টা ছিল ষড়যন্ত্রের কাল। সবাই সবার পিছনে ষড়যন্ত্র করছে, কেউ উপরে উঠার চেষ্টা করলেই তাকে ধ্বংস করে দিচ্ছে। ফার্মার অবশ্যি উপরে উঠার কোনো শখ ছিল না, নিজের দায়িত্বটুকু খুব ভালোভাবে পালন করে খুব সাবধানে পার্লামেন্টের হৈচৈ চিৎকার এবং দলাদলি থেকে নিজেকে সরিয়ে রাখেন। অবসরের পুরো সময়টা তিনি ব্যয় করতেন গণিতের পিছনে। ফার্মা ছিলেন সত্যিকার অর্থে একজন সৌখিন গণিতবিদ। তিনি কখনোই গণিতের কোনো আনুষ্ঠানিক শিক্ষা পান নি, কোথাও কোনো বিশ্ববিদ্যালয়ে তিনি গণিত পড়াতেন না, কোথাও তিনি প্রফেসরও ছিলেন না, কখনো কোনো কিছু প্রকাশ করতে আগ্রহ দেখাতেন না। গণিতের পুরো ব্যাপারটাই ছিল তার একটা শখের মতো কিন্তু তার মতো এত বড় গণিতবিদ পৃথিবীতে খুব কমই ছিল।

ফার্মার কালে (সপ্তদশ শতাব্দীর গোড়ার দিকে) গণিতের চর্চা একটু অন্যরকম ছিল, ব্যাপারটাকে খুব সম্মানজনক বিষয় মনে করা হতো না। গণিতবিদের গণিতের চর্চা করে যেসব ফলাফল পেতেন সেটা গোপন রাখার চেষ্টা করতেন। কেউ কারো সঙ্গে কথা বলতেন না, কে কী নিয়ে কাজ করছেন একজন আরেকজনকে সেটা জানাতেও চাইতেন না। সেই সময় মার্জেন (Mersenne) নামে একজন ধর্মযাজক ছিলেন গণিতে খুব উৎসাহী এবং তিনি খুব আধুনিক একজন মানুষ ছিলেন। তিনি সব গণিতবিদদের সাথে সম্পর্ক রাখতেন এবং একজনের গবেষণার কথা আরেকজনকে জানিয়ে রাখতেন। তিনি বিশ্বাস করতেন সবাই মিলে আলোচনা করে গণিত নিয়ে গবেষণা করলে গণিতের উন্নতি হবে আরো দ্রুত। মার্জেন এমন কিছু আহামরি গণিতবিদ ছিলেন

না কিন্তু গণিতের জন্যে ভালোবাসার কারণে গণিতে তার অবদান ছিল অনেক বড়। সেই সময়ে এরকম উদার মনের একজন মানুষের এরকম মুক্ত চিন্তার জন্যে তার যন্ত্রণাও কম হয় নি— অনেকেই তার সাথে সম্পর্কচ্ছেদ করে ফেলেছিল। যে মানুষটির সাথে তার কখনো সম্পর্কচ্ছেদ হয় নি, তিনি হচ্ছেন ফার্মা। মার্জেন সারা ফ্রান্সে ঘুরে বেড়াতেন এবং নিয়মিতভাবে ফার্মার সাথে যোগাযোগ রাখতেন।

মার্জেন ছাড়াও ফার্মার সার্বক্ষণিক সঙ্গি ছিল একটা বই, সেই প্রাচীন গ্রীসের ডায়োফেন্টাসের (Diophantus) লেখা এরিথমেটিকা (Arithmetica)। ফার্মা আনুষ্ঠানিকভাবে কোনো গণিত পড়েন নি, গণিত যা শেখার তিনি এই বইটি থেকেই শিখেছেন। এই বইটাতে 100টা সমস্যা আর তার বিস্তারিত সমাধান ছিল, ফার্মা সেগুলো পড়তেন এবং তার মাঝে আরো গভীর গাণিতিক সমস্যা খুঁজে বের করে সেগুলো সমাধান করতেন। মার্জেন সব সময়েই ফার্মাকে বলতেন গণিতে তার ভাবনা চিন্তা এবং ফলাফলের কথা সবাইকে জানাতে কিন্তু ফার্মা কোনো উৎসাহ দেখাতেন না। তথ্য প্রকাশ করে তার জন্যে স্বীকৃতি বা সম্মানের ব্যাপারে ফার্মার কোনো আগ্রহই ছিল না। তিনি গণিতের একটা সমস্যা বেছে নিতেন, আপন মনে সেগুলো সমাধান করে আরেকটা বেছে নিতেন। একেবারে কিছুই যে কাউকে বলতেন না সেটা অবশ্যি পুরোপুরি সত্যি নয়। মাঝে মধ্যে অন্যদের যন্ত্রণা দেয়ার জন্যে কিছু একটা প্রকাশ করতেন! হয়তো খুব চমৎকার কিছু একটা ভেবে বের করেছেন সেটা তখন তার যে দু'চারজন গণিতবিদ বন্ধু আছে তাদের কাছে পাঠিয়ে বলতেন, আমি এই থিওরেমটা বের করেছি দেখ দেখি তোমরা এটা প্রমাণ করতে পার কী না! অন্য গণিতবিদেরা সেই থিওরেমগুলো দেখে তার সমাধানের জন্যে মাথার চুল ছিঁড়ে ফেলতেন কিন্তু ফার্মা কখনোই তার উত্তর বলতেন না। অনেকেই তাকে এ জন্যে খুব অপছন্দ করত— কেউ কেউ তাকে বলত অহঙ্কারী, এমন কী কেউ কেউ বলত শয়তান! ফ্রান্সের সাথে ইংল্যান্ডের সব সময়েই এক ধরনের প্রতিযোগিতা ছিল তাই ফার্মা বিশেষ আনন্দ পেতেন যখন তিনি ইংল্যান্ডের একজন গণিতবিদকে এভাবে খানিকটা পীড়া করতে পারতেন।

ফার্মা যে কখনো কিছু প্রকাশ করতে চাইতেন না তার একটা কারণ ছিল। কিছু একটা প্রকাশ করতে চাইলে পুরো পদ্ধতিটা খুঁটিনাটি সবকিছু লিখতে হয়, সেগুলো ফার্মার কাছে সময়ের অপচয় বলে মনে হতো। কোনো একটা সমস্যা নিয়ে যখন তিনি ভাবতেন তার সমাধানটা পেয়ে গেলেই তিনি চট করে অন্য সমস্যায় চলে যেতেন— সমাধানটার কোনো কিছুই তিনি লিখতেন না! প্রকাশ

করতে তার অনিচ্ছার আরো একটা কারণ ছিল, কোনো কিছু প্রকাশিত হলেই গণিতবিদরা সেটা কাটাছেঁড়া করে, সেটা নিয়ে তর্কবিতর্ক করে। যুক্তিতর্ক দিয়ে আলোচনা করে, খুঁটিনাটি নিয়ে সন্দেহ প্রকাশ করে, সেটা ছিল ফার্মার খুব অপছন্দ। তিনি একেবারেই আপন মনে নিজের খেয়ালে অংক করতেন, কখনো কেউ তাকে বিরক্ত করবে সেটা তিনি চিন্তাই করতে পারতেন না।

সেই সময়ের আরেকজন বড় গণিতবিদ প্যাস্কেলও (Blaisc Pascal) অনেকবার ফার্মাকে তার গবেষণা কাজ প্রকাশ করাতে চেষ্টা করেছেন— কখনোই সফল হন নি। তবে প্যাস্কেলের সাথে চিঠিপত্রের যোগাযোগের কারণে অবশ্যি প্রোবাবিলিটি থিওরি নামে গণিতের একটা নতুন শাখার জন্ম নিতে শুরু করে। (এটা শুরু হয়েছিল একটা পাড় জুয়াড়ির অনুরোধে— তার জুয়াখেলায় জেতার জন্যে একটা ফন্দি বের করে দেয়ার জন্যে!) প্রোবাবিলিটি ছাড়াও ফার্মার আরেকটি প্রিয় বিষয় ছিল ক্যালকুলাস। যদিও প্রচলিত বিশ্বাস হচ্ছে নিউটন নিজের চেষ্টাতেই ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেছেন কিন্তু 1934 সালে একটা কাগজে দেখা যায় যে নিউটন লিখে রেখেছেন যে তিনি ফার্মার ট্যানজেন্ট আঁকার পদ্ধতি থেকে ক্যালকুলাস বের করেছেন।

প্রোবাবিলিটি থিওরি বা ক্যালকুলাসই একজন মানুষকে ইতিহাসে স্থায়ী আসন করে দেয়ার জন্যে যথেষ্ট কিন্তু ফার্মার এর বাইরেও প্রচুর অবদান রয়েছে। সত্যি কথা বলতে কী ফার্মার সবচেয়ে প্রিয় বিষয় ছিল নাম্বার থিওরি।

গণিতবিদরা তাদের হিসেব-নিকেশ করার জন্যে কাগজপত্র ব্যবহার করতো— কিন্তু ফার্মা ওসবের ঝামেলায় যেতেন না। তিনি তার প্রিয় বই এরিথমেটিকার মার্জিনে তার গবেষণালব্ধ ফলাফল লিখে রাখতেন। পৃথিবীর মানুষ খুব সৌভাগ্যবান যে এরিথমেটিকা বইয়ের যে সংস্করণটি ফার্মার কাছে ছিল তার মার্জিনটি ছিল বেশ বড় এবং ফার্মা মাঝে মাঝে বেশ কিছু গুরুত্বপূর্ণ জিনিস সেখানে লিখে ফেলতেন!

এরিথমেটিকা বইয়ের মার্জিনে লেখা ফার্মার নানা ফরমুলার মাঝে একটা হচ্ছে বন্ধুত্বপূর্ণ সংখ্যা (Amicable Number) উদাহরণ দিলে সেটা সবচে' সহজে বোঝা যাবে। 220 এবং 284-কে বন্ধু সংখ্যা বলে কারণ—

220-কে যেসব সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় সেগুলো হচ্ছে— 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 53 এবং 110

এই সংখ্যাগুলো যোগ করলে পাওয়া যায় 284

আবার

284-কে যেসব সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় সেগুলো হচ্ছে— 1, 2, 4, 71 এবং 142

এই সংখ্যাগুলো যোগ করলে পাওয়া যায় 220.

এই দুটি সংখ্যা প্রায় দুই হাজার বছর আগে পিথাগোরাস বের করে রেখেছিলেন। ফার্মা 1636 সালে পরের দুটো বন্ধু সংখ্যা বের করলেন। সেগুলো হচ্ছে 17,269 এবং 18,416— এটি অবশ্যি আহামরি কিছু নয়, এটি বের করতে প্রতিভা থেকে পরিশ্রমই বেশি প্রয়োজন কিন্তু ফার্মা সংখ্যাকে কেমন ভালোবাসতেন এখান থেকে খানিকটা অনুমান করা যায়!

ফার্মার আরেকটি পর্যবেক্ষণ এরকম, 26 হচ্ছে এমন একটি সংখ্যা যেটি একটি বর্গ ($25 = 5 \times 5$) এবং একটি কিউব ($27 = 3 \times 3 \times 3$)-এর মাঝখানের সংখ্যা। এরকম কী আরো সংখ্যা থাকা সম্ভব? খুঁজে পেতে দেখা যেতে পারে কিন্তু ফার্মা প্রমাণ করে দিলেন এরকম আর কোনো সংখ্যা থাকতে পারবে না।

প্রাইম সংখ্যা নিয়েও ফার্মার চমকপ্রদ থিওরেম রয়েছে। 2 হচ্ছে একটা দলছুট প্রাইম (একমাত্র জোড় প্রাইম) অন্য সব প্রাইম বেজোড় সংখ্যা। এই বেজোড় প্রাইমগুলোকে $4n+1$ কিংবা $4n - 1$ এই দুইভাগে ভাগ করা যায়। যেমন—

13, 17, 37 হচ্ছে $4n + 1$

3, 7, 11, 19 হচ্ছে $4n - 1$

ফার্মার প্রাইম থিওরেম বলে $4n+1$ ধরনের প্রাইম সংখ্যাকে দুটি বর্গের যোগফল হিসেবে লেখা যাবে। যেমন—

$13 = 2^2 + 3^2$
$17 = 4^2 + 1^2$
$37 = 6^2 + 1^2$

ফার্মা তার অভ্যাসমতো এই থিওরেমটি লিখে গিয়েছেন কিন্তু তার প্রমাণটি লিখে যান নি। আরেক যুগান্তকারী গণিতবিদ অয়লার শেষপর্যন্ত এটি প্রমাণ করেছিলেন!

1665 সালের জানুয়ারি মাসে ফার্মা বিচার কাজ সেরে এসে হঠাৎ করে খুব অসুস্থ হয়ে গেলেন এবং প্রায় হঠাৎ করেই মারা গেলেন। যেহেতু তিনি শিক্ষা প্রতিষ্ঠান বা গবেষণা প্রতিষ্ঠানের সাথে ছিলেন না, গণিত বিষয়ে তার কোনো ছাত্র বা সহকর্মী ছিল না কাজেই একটা খুব বড় আশঙ্কা ছিল যে গণিত সংক্রান্ত তার সব কাজ বুঝি লোকচক্ষুর আড়ালে হারিয়ে যাবে। পৃথিবীর খুব সৌভাগ্য যে সেগুলো হারিয়ে যায় নি, তার বড় ছেলে বাবার সব কাগজপত্র ঘেঁটে সবকিছু

খুঁজে বের করে পাঁচ বছর সময় নিয়ে সবকিছু প্রকাশ করার ব্যবস্থা করলেন। পৃথিবীর গণিতবিদরা সবিস্ময়ে এই অসাধারণ গণিতবিদের কাজের সাথে প্রথমবার পরিচিত হলেন।

কাগজপত্রে বা বইয়ের মার্জিনে তার থিওরেমগুলো লেখা আছে কিন্তু কোনো প্রমাণ লেখা নেই কাজেই পৃথিবীর সেরা গণিতবিদরা সেটা প্রমাণ করতে শুরু করলেন। একটি একটি করে সবগুলো থিওরেম শেষপর্যন্ত প্রমাণিত হলো— একটি ছাড়া সেটি আর কেউই প্রমাণ করতে পারে না। এবং এই থিওরেমটি ফার্মার শেষ থিওরেম (Fermat's Last Theorem) হিসেবে পরিচিত হতে শুরু করল।

থিওরেমটি বোঝা খুব সহজ। আমরা জানি $4^2 + 3^2 = 5^2$-এ ধরনের অসংখ্য সংখ্যা রয়েছে যেখানে দুটো সংখ্যার বর্গের যোগফল তৃতীয় একটা সংখ্যার বর্গের সমান হতে পারে। কিন্তু বর্গ না হয়ে তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম বা তার থেকে বেশি কোনো ঘাত (Power) হলে এরকম কোনো সংখ্যা পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ—

$x^n + y^n = z^n$ $\quad n = 3, 4, 5, 6...$ কখনোই সত্যি হবে না।

1637 সালে এরিথমেটিকা বইয়ের মার্জিনে এই থিওরেমটি লিখে তার পাশে তিনি লিখে রেখেছিলেন, 'আমি এর খুব চমৎকার একটা প্রমাণ বের করেছি কিন্তু সেটা লেখার জন্যে বইয়ের মার্জিনটা যথেষ্ট বড় নয়।'

কাজেই পৃথিবীর সব গণিতবিদেরাই এটি প্রমাণ করার জন্যে চেষ্টা করে গেছেন— গত চারশ' বছর এটি কেউ প্রমাণ করতে পারে নি। অবশেষে 1995 সালে প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ের এন্ড্রু উইলস (Andrew Wiles) এটি প্রমাণ করেছেন— ফার্মার শেষ থিওরেমটি প্রমাণিত হয়ে এই অসাধারণ গণিতবিদের সব কাজ সমাপ্তিতে পৌঁছেছে।

কিন্তু সত্যিই কী পৌঁছেছে? এন্ড্রু উইলস ফার্মার শেষ থিওরেম প্রমাণ করার জন্যে গণিতের এমন কিছু বিষয় ব্যবহার করেছেন যেগুলো অনেক পরে বের করা হয়েছে। ফার্মা নিশ্চয়ই সেগুলো ব্যবহার করেন নি। তার প্রমাণটি নিশ্চয়ই এন্ড্রু উইলসের প্রমাণের মতো জটিল এবং বিশাল নয়। নিশ্চয়ই সহজ এবং ছোট! সেই প্রমাণটি কী কেউ খুঁজে বের করতে পারবে?

নাকি ফার্মা তার রহস্যপ্রিয়তা হিসেবে পৃথিবীর সব মানুষকে ঠাট্টা করার জন্যে সেই কথাটি মার্জিনে লিখে রেখেছিলেন?

কেউ কী এর উত্তর খুঁজে বের করতে পারবে?

জ্যামিতির ইতিহাস

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

জ্যামিতি কিন্তু গণিতের অন্যান্য শাখার মতোই পুরনো। খ্রিষ্টের জন্মের 25,000 বছর পূর্বে বিভিন্ন ডিজাইনের কাজে জ্যামিতির ব্যবহার দেখা যায়। খ্রিষ্টের জন্মের 3400 বছর পূর্বে প্রাচীন মিশরে সংখ্যা এবং সরলরেখার জন্য কিছু চিহ্ন ব্যবহার করা হতো। খ্রিষ্টপূর্ব 1900 সালে মস্কো পাপিরাসে মিশরীয় জ্যামিতির বর্ণনা রয়েছে। মিশরীয়রা সার্ভে এবং নির্মাণ প্রকল্পে জ্যামিতিক জ্ঞান ব্যবহার করত। প্রতি বছরই নীলনদের তীর বন্যায় ভেসে গেলে তীর এলাকায় বিভিন্ন জমির সীমানা নির্ধারণে সার্ভে করতে হতো। খ্রিষ্টপূর্ব 500 সাল পর্যন্ত সময়ে মিশরীয় জ্যামিতির বিকাশ ঘটে। প্রায় একই সময়ে ব্যাবিলনবাসীরা পিথাগোরাসের উপপাদ্য জানত। ঐ সময়ের মাটির তৈরি একটি টেবিলে নিম্নলিখিত বাক্যগুলো খোদাই করা পাওয়া যায়।

দৈর্ঘ্য 4, কর্ণ 5, প্রস্থ কত ? ক্ষেত্রফল জানা নেই।

$4\times4 = 16$, $5\times5 = 25$, 25 থেকে 16 বিয়োগ করলে থাকে 9। কোনো সংখ্যাকে তত দিয়ে গুণ করলে 9 হয়, 3 দিয়ে। সুতরাং প্রস্থ হলো 3। এই লেখাটি প্রমাণ করে যে সম্পর্ক পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা করেছে তা ব্যাবিলনবাসীরা খ্রিষ্টপূর্ব 1750 সালে ব্যবহার করত। খ্রিষ্টপূর্ব 575 সালে থেলস ব্যাবিলনের গাণিতিক জ্ঞান গ্রীসে নিয়ে আসেন। পিরামিডের উচ্চতা কিংবা তীর থেকে জাহাজের দূরত্ব নির্ণয়ে এই জ্যামিতি ব্যবহার করা হতো। খ্রিষ্টপূর্ব 510 সালের দিকে বোথিয়াস জ্যামিতি এবং পাটিগণিতের উপর বই লেখেন যা দীর্ঘদিন ব্যবহৃত হয়েছে। 850 সালের দিকে থাবিট ইবন কুরা এ্যানালাইটিক্যাল এবং নন-ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতির বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার করেন। 1020 সালের দিকে ইবনে সিনা কিতাব আল শিফায় জ্যামিতির বিভিন্ন ফলাফল লিপিবদ্ধ করেন। 1140 সালের দিকে ভারতবর্ষে ভাস্কর লীলাবতী গ্রন্থে পাটিগণিত, এ্যালজেবরার সঙ্গে জ্যামিতিকে অন্তর্ভুক্ত করেন।

গ্রীকরাই সর্বপ্রথম জ্যামিতিকে লজিক্যাল ভিত্তি দিয়ে গণিতের বিষয় হিসাবে প্রতিষ্ঠা করে। খ্রিষ্টের জন্মের 400 বছর পূর্বে ইউক্লিডের লিখিত The Elements বইটি স্কুলে জ্যামিতি শিক্ষার ভিত্তি হিসেবে ব্যবহৃত হয়ে আসছিল। উল্লেখ করা যেতে পারে এই বইটির সঙ্গে পরিচয়ই মহাবিজ্ঞানী নিউটনের

জীবনকে আমূল পরিবর্তন করে গণিতে অনুরাগী করে তুলে। ইউক্লিডের সময় থেকে 1800 সাল পর্যন্ত ইউক্লিডের দেয়া প্রথম স্বতঃসিদ্ধ সম্পর্কে মতানৈক্য থাকে। গণিতে দুই ধরনের বক্তব্য রয়েছে— স্বতঃসিদ্ধ এবং উপপাদ্য। স্বতঃসিদ্ধ হলো মৌলিক অনুমান যা সত্য মনে হয় এবং এর জন্য প্রমাণ ছাড়াই গৃহীত হয়। উপপাদ্য হলো এমন বক্তব্য যা প্রমাণ করতে হয় হয়তো স্বতঃসিদ্ধ এবং অন্যান্য জানা উপপাদ্যের ফলাফল ব্যবহার করে। জ্যামিতিকে শক্ত ভিতে দাঁড় করানোর জন্য ইউক্লিড পাঁচটি স্বতঃসিদ্ধ উপস্থাপন করেন। পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধটি হলো— একটি সরলরেখা এবং এর বহিস্থ একটি বিন্দু দেয়া থাকলে ঐ বিন্দু দিয়ে সরলরেখাটির সমান্তরাল কেবলমাত্র একটি সরলরেখাই আঁকা যায়।

ইউক্লিড নিজেই এই স্বতঃসিদ্ধ নিয়ে সন্তুষ্ট ছিলেন না। পরবর্তী শতাব্দীগুলো গণিতবিদেরা এই স্বতঃসিদ্ধটি প্রমাণ করতে ব্যর্থ হয়েছে। π এর মান বের করার জন্য খ্রিষ্টের জন্মের পূর্ব থেকেই মানুষের চেষ্টা চলেছে যা এখনো থেমে যায় নি। প্রাচীনকাল থেকেই জানা ছিল যে একটি বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত ধ্রুব। এই ধ্রুবের সন্ধানে অনেক গবেষণা হয়েছে এবং চলছে।

সপ্তদশ শতাব্দীতে ডেকার্ত (1596 – 1650) জ্যামিতিকে এ্যালজেবরার সঙ্গে সম্পর্কিত করে একটি বিরাট অগ্রগতি সাধন করেন। কথিত আছে যে তিনি একবার ছাদে একটি মাছিকে দেখার সময় ধারণা পেয়েছিলেন যে সমতলের যে-কোনো বিন্দুকে একজোড়া সংখ্যা দিয়ে নির্দেশ করা সম্ভব। ফার্মাও কোঅর্ডিনেট জ্যামিতি আবিষ্কার করেছিলেন তবে আমরা ডেকার্তের আবিষ্কার করা কোঅর্ডিনেট জ্যামিতি ব্যবহার করি।

যেহেতু গণিতবিদেরা পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণ করতে পারছিলেন না তাই উনবিংশ শতাব্দীতে তাঁরা নতুন জ্যামিতি আবিষ্কার করা শুরু করেন যেখানে 'সমান্তরাল' শব্দের এক অদ্ভুত অর্থ দেয়া হলো। আবার কোনো কোনো জ্যামিতিতে সমান্তরাল রেখাই রইলো না। বলিয়াই এবং লবাচভস্কিই সর্বপ্রথম নন-ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতি আবিষ্কার করেন।

উনবিংশ এবং বিংশ শতাব্দীতে ডিফারেন্সিয়াল জ্যামিতির গোড়াপত্তন হয়। যেখানে জ্যামিতি এবং ক্যালকুলাসকে একসঙ্গে ব্যবহার করে বক্রতল নিয়ে গবেষণা করা হয়। গাউস এবং রিম্যানকে এই ধারণার জনক বলা হয়। থিউরি অব রিলেটিভিটির গাণিতিক/জ্যামিতিক ভিত্তি রচনার কৃতিত্ব আইনস্টাইন গাউসকে দিয়েছিলেন।

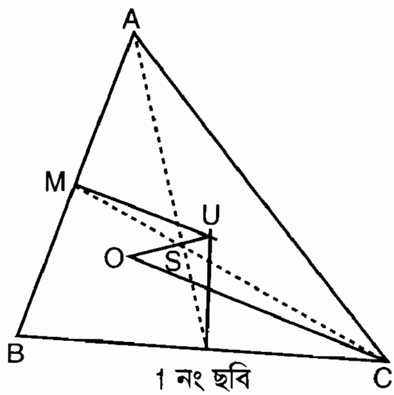
উনবিংশ এবং বিংশ শতাব্দীতে ফ্র্যাক্টাল জ্যামিতির গোড়াপত্তন হয়। ফ্র্যাক্টাল হলো এমন জ্যামিতিক মৌলিক ভিত যা দিয়ে মেঘ কিংবা গুল্মকে মডেল করা যায়। কম্পিউটার আবিষ্কারের সঙ্গে ফ্র্যাক্টাল গবেষণা জনপ্রিয় হয়ে উঠে। ম্যান্ডেলব্রট এই শাখার একজন অগ্রণী গবেষক।

জ্যামিতির বেশ কিছু বিখ্যাত আবিষ্কার সম্পর্কে কিছু কথা

অয়লারের সরলরেখা

সকল ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র, মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দু এবং লম্বত্রয়ের ছেদ বিন্দু এইক্রমে একই সরলরেখা— অয়লার সরলরেখায় অবস্থিত এবং মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু পরিকেন্দ্র থেকে যতদূরে অবস্থিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু তার দ্বিগুণ দূরে অবস্থিত।

অয়লার (1707 – 1783) ছিলেন সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ঠ এবং সবচে' সফল গণিতবিদ। তাঁর প্রায় 700টি গবেষণা প্রবন্ধ 45টি খণ্ডে প্রকাশিত হয়েছিল যার অর্ধেক গবেষণা তিনি করেছিলেন সম্পূর্ণ অন্ধ অবস্থায়। উপরোক্ত উপপাদ্যের প্রমাণ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae জার্নালে 1765 সালে প্রকাশিত হয়েছিল।



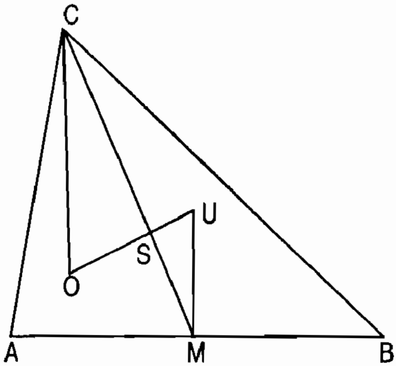
1 নং ছবি

ABC ত্রিভুজে M AB বাহুর মধ্যবিন্দু এবং S মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দু। SC = 2.SM ... (1) U হলো ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র যা AB-এর লম্ব দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। SU-কে এমনভাবে বর্ধিত করি যাতে SO = 2.SU .. (2) হয়। এবার O-কে C-এর সঙ্গে যোগ করি।

(1) এবং (2) অনুসারে ত্রিভুজ MUS এবং COS সদৃশকোণী। $\therefore$ CO||MU অর্থাৎ CO⊥AB। অথবা বলা যায় ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে O বিন্দু দিয়ে অংকিত রেখা বিপরীত বাহুর উপর লম্ব। এর ফলে লম্বত্রয় O বিন্দু দিয়ে যাবে।

এই প্রমাণেই সিলভিস্টারের নিম্নেবর্ণিত সমস্যার সমাধান রয়েছে।

সিলভিস্টারের সমস্যা : যে-কোনো ত্রিভুজ ABC-এর পরিকেন্দ্র U থেকে অংকিত ভেক্টর UA, UB এবং UC-এর লব্ধি নির্ণয় কর। জেমস জোসেফ সিলভিস্টার (1814 – 1897) ছিলেন ইংরেজ বিচারক এবং গণিতবিদ।

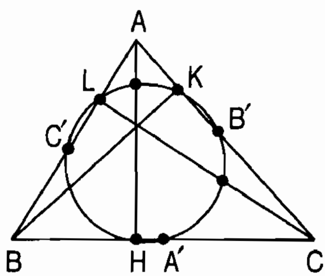


2 নং ছবি

UM AB-এর লম্ব দ্বিখণ্ডক। SO = 2US

UM হলো UA এবং UB-এর লব্ধির অর্ধেক অর্থাৎ CO দিক এবং মানে এই দুটি ভেক্টরের লব্ধির সমান। যেহেতু UO হলো UC এবং CO-এর লব্ধি। সুতরাং UO-ই হলো নির্ণেয় লব্ধি।

ফয়েরবাক বৃত্ত : যে-কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু, লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু এবং লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু থেকে শীর্ষসমূহ পর্যন্ত সরলরেখার মধ্যবিন্দুসমূহ একই বৃত্তের উপর অবস্থিত।



3 নং ছবি

অয়লার 1765 সালেই এই বৃত্ত সম্পর্কে জানতেন। তবে এটা ফয়েরবাক (1800 – 1834) বৃত্ত হিসাবে সুপরিচিত যিনি 1822 সালে পুনরায় আবিষ্কার করেন। এই বৃত্তটি যদিও আরো বেশ কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বৃত্ত দিয়ে যায়। একে নববিন্দুবৃত্ত বলা হয়।

এর প্রমাণের দুটি অংশ রয়েছে। প্রথম অংশে প্রমাণ করতে হয় যে ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুগামী বৃত্তটি লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু দিয়ে যায়। দ্বিতীয় অংশে প্রমাণ করতে হয় যে একটি ত্রিভুজের লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুগামী বৃত্ত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু থেকে শীর্ষের মধ্যবিন্দুসমূহ দিয়েও যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : ফয়েরবাক বৃত্তের কেন্দ্র F অয়লার রেখা OU-এর মধ্যবিন্দুতে অবস্থিত এবং ফয়েরবাক বৃত্তের ব্যাসার্ধ f ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

অনুসিদ্ধান্তের প্রথমাংশের প্রমাণে যে তথ্যটি বের করতে হয় তা হলো— HA′ এবং KB′-এর লম্বদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে ট্রাপেজিয়াম UOHA′ এবং UOKB′ এর সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থান করে, OU রেখাংশের মধ্যবিন্দু দিয়ে যায়। আর ফয়েরবাক বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ A′B′C′-এর বাহুগুলো যে ত্রিভুজ ABC-এর অনুরূপ বাহুগুলির অর্ধেক এই তথ্যটি ব্যবহার করতে হয় দ্বিতীয়াংশের প্রমাণে।

ক্যাস্টিলন সমস্যা

একটি বৃত্তে এমন একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত কর যার বাহুগুলি নির্দিষ্ট তিনটি বিন্দু দিয়ে যায়।

এই সমস্যাটির রচয়িতা সুইজারল্যান্ডের গণিতবেত্তা গ্যাব্রিয়েল ক্রামের (1704 – 1752) যার সমাধান দিয়েছিলেন ইতালির গণিতবেত্তা আইএফ সালভেমিনি (1709 – 1791) যিনি তাঁর জন্মস্থান ক্যাস্টিগলিয়ন থেকে নিজের নামকরণ করেন।

ক্যাস্টিলন সমস্যার নিম্নোক্ত সহজ সমাধান দেন ইতালির গিওরডানো।

মনে করি, ς হলো প্রদত্ত বৃত্ত, A, B, C প্রদত্ত বিন্দুত্রয় এবং XYZ নির্ণেয় ত্রিভুজ যায় yx, zx এবং xy সরলরেখা যথাক্রমে A, B এবং C বিন্দু দিয়ে যায়।

অটাইয়ানো তাঁর সমাধানে নিম্নোক্ত চারটি বিন্দুর সহায়তা নেন। এগুলো হলো—

I. X থেকে শুরু হওয়া AB-এর সমান্তরাল জ্যা-এর অপর প্রান্ত।

II. YI এবং AB সরলরেখার ছেদবিন্দু।

III. X বিন্দু থেকে শুরু হওয়া IIC-এর সমান্তরাল জ্যা-এর অপরপ্রান্ত।

IV. CII এবং I III রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

নিম্নোক্ত পাঁচ ধাপে এই অংকন সম্পন্ন করা হয়।

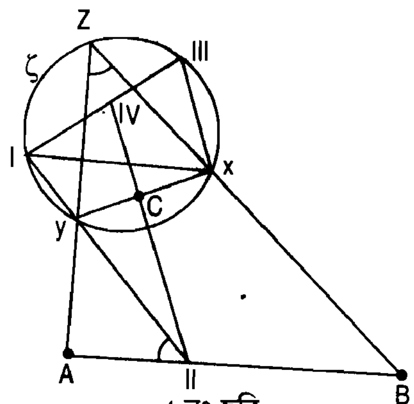
1. বিন্দু II অংকন : ∠AII I = ∠XIY এবং ∠XZY = ∠XIY. কারণ তারা একই চাপের উপর অঙ্কিত। ফলে ∠XZY = ∠AII I.

সুতরাং BZYII বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। এখান থেকে আরো প্রমাণ করা যায় যে AII. AB = AY. AZ। যেহেতু এই সমীকরণের ডানদিকের অংশ A বিন্দুতে বৃত্ত ς এর পাওয়ার (A বিন্দু থেকে বৃত্ত ς-এর উপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যকে A

বিন্দুতে বৃত্ত ζ-এর পাওয়ার বলে।) P-এর সমান AII = P/AB. এভাবে II বিন্দুতে অংকন করা যাবে।

2. বিন্দু IV অংকন : $\angle$YCIV = $\angle$YXIII কিন্তু $\angle$YI III এবং $\angle$YX III সম্পূরক যেহেতু তারা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ। অনুরূপভাবে $\angle$YI III এবং $\angle$YCIV সম্পূরক এবং YCIV I একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। সুতরাং IIC. II IV = IIY. II I

কিন্তু যেহেতু এই সমীকরণের ডানদিক ζ বৃত্তের II বিন্দুর পাওয়ার Π
$\therefore$ II IV = Π/IIC



4 নং ছবি

এখান থেকে বিন্দু IV পাওয়া যাবে।

3. $\angle$IXIII = ω নির্ণয় করা : যেহেতু $\angle$AII IV = κ জানা এবং যেহেতু ω এবং κ-এর বাহুগুলি সমান্তরাল। সুতরাং $\omega = \kappa$

4. জ্যা I III অংকন : বিন্দু IV দিয়ে এমন একটি জ্যা তৈরি কর যা $\omega = \kappa$ কোণ তৈরি করে। বৃত্ত ζ-এর সঙ্গে এই জ্যা এর ছেদবিন্দু হলো I এবং III.

5. ত্রিভুজ XYZ অংকন : III বিন্দু দিয়ে II IV সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা ζ–কে যে বিন্দুকে ছেদ করে তা হলো X; Y হলো I II সরলরেখা ζ-এর সঙ্গে যে বিন্দুতে ছেদ করে এবং Z হলো ζ বৃত্তের যে বিন্দুতে AY রেখা ছেদ করে।

অবশ্যি স্টাইনারের একটি তত্ত্ব ব্যবহার করে সহজভাবে এই অংকনটি সম্পন্ন করা যায়।

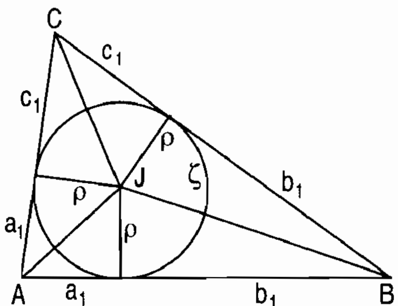
ক্যাস্টিলনের বিপরীত সমস্যার সমাধানও ক্যাস্টিলনের অনুরূপ অংকন দিয়ে সমাধান করা যায়।

ক্যাস্টিলনের বিপরীত সমস্যা : একটি বৃত্তের জন্য এমন একটি ত্রিভুজ বহির্লিখিত কর যার শীর্ষত্রয় তিনটি প্রদত্ত সরলরেখার উপর অবস্থিত।

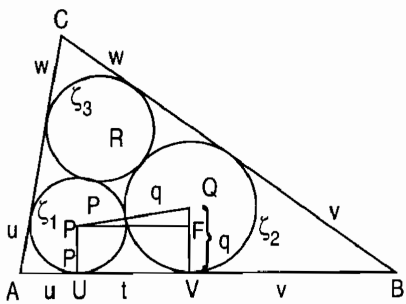
ইতালির গণিতবেত্তা মালফাতি (1731 – 1807) 1803 সালে নিম্নোক্ত সমস্যা সংজ্ঞায়িত করেন।

একটি ত্রিভুজের মধ্যে তিনটি বৃত্ত এমনভাবে অংকন কর যাতে যে কোনো একটি অন্য দুটি বৃত্ত এবং ত্রিভুজের দুই বাহুকে স্পর্শ করে। মালফাতি সমস্যার বিশুদ্ধ জ্যামিতিক সমাধান দেন জ্যাকব স্টাইনার 1826 সালে এবং সেলব্যাক Crelle's Journal-এর 45তম খণ্ডে একটি সহজ সমাধান প্রকাশ করেন।

মনে করি, a, b, c বাহুদৈর্ঘ্য সম্পন্ন 2S পরিসীমা সম্পন্ন ABC হলো প্রদত্ত ত্রিভুজ যার কোণগুলো α, β এবং γ। মনে করি মালফাতি বৃত্তগুলো হলো ζ_1, ζ_2 এবং ζ_3 যা কোণ α, β এবং γ-এর বাহুগুলির উপর স্পর্শক। মনে করি, P, Q এবং R যথাক্রমে ζ_1, ζ_2 এবং ζ_3 এর কেন্দ্র এবং p, q, r হলো তাদের ব্যাসার্ধ। মনে করি, A, B এবং C বিন্দু থেকে ζ_1, ζ_2 এবং ζ_3 বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকগুলো যথাক্রমে u, v এবং w। ত্রিভুজ ABC-তে বৃত্ত ζ অন্তর্লিখিত করি। মনে করি, ζ-এর কেন্দ্র J, ব্যাসার্ধ ρ এবং A, B এবং C বিন্দু থেকে এর উপর স্পর্শক যথাক্রমে a_1, b_1 এবং c_1।



5 নং ছবি



6 নং ছবি

$b_1 + c_1 = a$, $c_1 + a_1 = b$, $a_1 + b_1 = c$ থেকে পাই $a_1 = s - a$, $b_1 = s - b$, $c_1 = s - c$। যেহেতু P এবং J বিন্দুদ্বয় α কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত $p/\rho = u/a_1$ অর্থাৎ $p = \frac{\rho}{a_1} u$. অনুরূপভাবে $q = \frac{\rho}{b_1} v$

মনে করি AB রেখা ζ_1 এবং ζ_2 বৃত্তকে যথাক্রমে U এবং V বিন্দুতে স্পর্শ করে। ধরি, UV = t. PQF সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই—

$$PQ^2 = PF^2 + FQ^2 \text{ বা } (p+q)^2 = t^2 + (p-q)^2 \quad \therefore UV = t = 2\sqrt{pq}$$

$$\therefore t = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{\rho^2}{a_1 b_1}}$$

কিন্তু যেহেতু $\rho^2 = \frac{a_1b_1c_1}{s}$ $\qquad t = 2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{uv}$

যেহেতু ত্রিভুজের বাহু AB-এর তিনটি অংশ AU, BV এবং UV।

$$(1) \begin{cases} u + v + 2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{uv} = c, & \text{অনুরূপভাবে} \\ v + w + 2\sqrt{\frac{a_1}{s}}\sqrt{vw} = a \\ w + u + 2\sqrt{\frac{b_1}{s}}\sqrt{wu} = b \end{cases}$$

ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমাকে 1 ধরলে

a, b, c, u, v, w-কে যথাক্রমে সূক্ষ্মকোণ $\lambda, \mu, \nu, \psi, \varphi$-এবং χ-এর সাইনের বর্গ হিসেবে ধরলে $\sin^2\lambda = a$, $\sin^2\mu = b$, $\sin^2\nu = c$, $\sin^2\psi = u$, $\sin^2\varphi = v$, $\sin^2\chi = w$। আবার যেহেতু $a + a_1 = s = 1$, $b + b_1 = 1$, $c + c_1 = 1$, $\cos^2\lambda = a_1$, $\cos^2\mu = b_1$, $\cos^2\nu = c_1$ উপরের সমীকরণসমূহ নিম্নরূপ হয় :

$$(2) \begin{cases} \sin^2\varphi + \sin^2\chi + 2\sin\varphi \sin\chi \cos\lambda = \sin^2\lambda \\ \sin^2\chi + \sin^2\psi + 2\sin\chi . \sin\psi \cos\mu = \sin^2\mu \\ \sin^2\psi + \sin^2\varphi + 2\sin\psi \sin\varphi \cos\nu = \sin^2\nu \end{cases}$$

(2) থেকে আমরা পাই $\varphi + \chi = \lambda$, $\chi + \psi = \mu$, $\psi + \varphi = \nu$ এবং $\psi = \lambda - \lambda$, $\varphi = \sigma - \mu$, $\chi = \sigma - \nu$ যেখানে $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$

অংকন

1. কোন λ, μ, ν আঁক যাদের সাইনের বর্গ যথাক্রমে ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমান হয় (যেখানে ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমাকে 1 ধরা হয়েছে।)

2. $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$, $\psi = \sigma - \lambda$, $\varphi = \sigma - \mu$, $\chi = \sigma - \nu$ কোণগুলি আঁক।

3. ψ, φ এবং χ-এর সাইনের বর্গের সমান করে আঁকি। এগুলোই হলো ত্রিভুজের শিরকোণসমূহ থেকে মালফাতি বৃত্তসমূহের উপর স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

মঙ্গের সমস্যা

এমন একটি বৃত্ত অংকন কর যা তিনটি প্রদত্ত বৃত্তকে লম্বালম্বিভাবে ছেদ করে। ফরাসি গণিতবিদ মঙ্গে (1746 – 1818) ডেসক্রিপটিভ জ্যামিতির জনক ছিলেন। এই সমস্যাটি সমাধানের জন্য সর্বপ্রথম আমরা দুটি প্রদত্ত বৃত্তকে লম্বালম্বিভাবে ছেদ করে এমন বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করি। দুটি বৃত্তের একটি অপরটিকে লম্বালম্বিভাবে ছেদ করে যদি একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r অন্য ব্যাসার্ধ r′-এর উপর লম্ব হয়। অর্থাৎ r এবং r′ যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি এবং উচ্চতা হয় তাহলে অতিভুজ z বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়কে যোগ করে। সুতরাং $r^2 + r'^2 = z^2$ বা $z^2 - r^2 = r'^2$.

অর্থাৎ একটি বৃত্ত ζ (r, k) আরেকটি বৃত্ত ζ' (r′, k′) এর উপর লম্ব হলে $k'k^2 - r^2 = r'^2$ এবং r'^2 কে k′ বিন্দুতে ζ এর পাওয়ার (Power) বলে।

মনে করি প্রদত্ত বৃত্ত দুটি যথাক্রমে ζ(r, k) এবং ζ' (r′ k), k′> k এবং KK′ = *l*। মনে করি নির্ণেয় বৃত্ত ζ^* (r*, x)-এর ব্যাসার্ধ χ ζ_1 এবং ζ_2-এর উপর লম্ব। মনে করি kx এবং k′x যথাক্রমে z এবং z′-এর সমান।

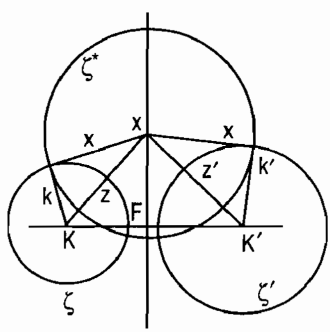
তাহলে $z^2 - k^2 = z'^2 - k'^2 = x^2$ ... (1) ফলে x বিন্দু উভয় বৃত্ত ζ এবং ζ' এর পাওয়ারের সমান। মনে করি x নির্ণেয় সঞ্চারপথের উপরে একটি বিন্দু এবং x বিন্দু থেকে KK′ রেখার উপর অংকিত লম্ব F বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি KF = f এবং k′F = f′ তাহলে $z^2 - f^2 = z'^2 - f'^2$ .... (2)

(1) থেকে (2) বিয়োগ করলে $f^2 - k^2 = f'^2 - k'^2$ ... (3)

অর্থাৎ F বিন্দুতে ζ এবং ζ' বৃত্তদ্বয়ের পাওয়ার সমান। f এবং f′ কে যদি যথাক্রমে KK′ এবং K′K দিকে পজিটিভ ধরি, তাহলে f + f′ = *l* .... (4)

সুতরাং F বিন্দু থেকে KK′ এর উপর অংকিত লম্বের উপর যে-কোনো বিন্দুই নির্ণেয় সঞ্চার পথের উপর থাকবে।

এবার মঙ্গের সমস্যা সমাধানের জন্য অনুরূপ আরেকটি সঞ্চারপথ থাকলেই দুটি সঞ্চারপথে ছেদ বিন্দুই হবে নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।



7 নং ছবি

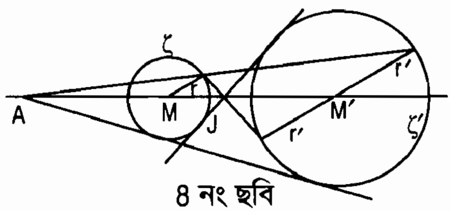
এ্যাপোলোনিয়াসের স্পর্শ সমস্যা

এমন একটি বৃত্ত অংকন কর যা তিনটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে। ইউক্লিড এবং আর্কিমিডিসের পূর্বসূরিদের মধ্যে সবচে' বড় গণিতবেত্তা এ্যাপোলোনিয়াস অব পার্গা (খ্রিষ্টপূর্ব 260 – 170) এই নামকরা সমস্যাটি সংজ্ঞায়িত করেছিলেন। সমস্যাটির সমাধান De Tactionibus নামক নোটবইতে অন্তর্ভুক্ত হলেও নোট বইটিই হারিয়ে যায়। বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ ফ্রাঙ্কো ভিয়েতা (1540 – 1603) পরবর্তীতে এর সমাধান করেন। এছাড়াও গাউস, গারগন এবং পিটারসেনও এই সমস্যাটির সমাধান করেন।

এই সমস্যার গারগান প্রদত্ত সমাধান খুবই চমৎকার। এর প্রমাণে যেহেতু কর্ডাল উপপাদ্য, সিমিলারিটি বিন্দু এবং মেরুর (পোলার) গুণাবলি ব্যবহার করতে হয় তাই সংক্ষেপে এই বিষয়গুলোর উপর আলোকপাত করা হলো।

কর্ডাল উপপাদ্য : যে সকল বিন্দুতে দুটি বৃত্তের পাওয়ার (স্পর্শকের দৈর্ঘ্য) সমান হয় তাদের সঞ্চারপথ বৃত্ত দুটির কেন্দ্র দ্বারা সংযোজিত সরলরেখার উপর লম্ব হয়। এই লম্বটিকে বৃত্ত দুটির কর্ডাল কিংবা পাওয়ার রেখা বলা হয়। তিনটি বৃত্তের পাওয়ার রেখাগুলো যে বিন্দুতে মিলে তাকে পাওয়ার বিন্দু বলে।

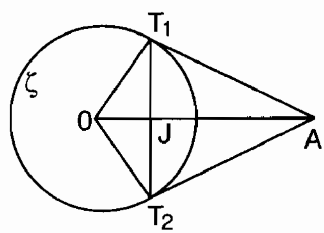
সিমিলারিটি বিন্দু : যখন আমরা দুটি বৃত্ত ζ (M, r) এবং ζ' (M′,r′) এর সাপেক্ষে যথাক্রমে বহিস্থ বা পজিটিভ এবং অন্তস্থ বা নেগিটিভ সিমিলারিটি বিন্দুসমূহ সম্পর্কে বলি তখন আমরা MM′ রেখার উপর যথাক্রমে A এবং J-কে বোঝাই যাতে করে



৪ নং ছবি

$$\frac{MA}{M'A} = +\frac{r}{r'} \text{ এবং } \frac{MJ}{M'J} = -\frac{r}{r'}$$

পোল এবং পোলার : দুটি বিন্দু P এবং P′ যা বৃত্ত ζ (r, o) এর কেন্দ্র থেকে উৎসারিত রশ্মির উপর অবস্থিত যাতে করে OP. OP′ = r^2 হয় তাদের বৃত্তের সাপেক্ষে একটিকে অপরটির কনজুগেট বলে। দুটি কনজুগেট বিন্দুর একটি বৃত্তের ভিতর এবং অপরটি বাইরে অবস্থান করে। পার্শ্বের চিত্রে যে-কোনো বহিস্থ



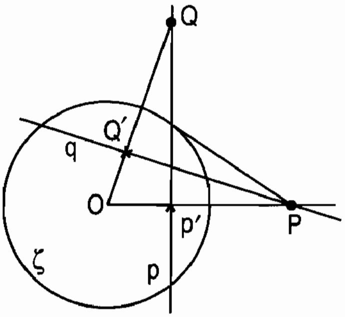
9 নং ছবি

বিন্দু A-এর কনজুগেট বিন্দু হলো OA এবং T_1T_2 সরলরেখার ছেদবিন্দু, যেখানে A বিন্দু থেকে ς-এর উপর অংকিত স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে T_1 ও T_2 বিন্দুতে স্পর্শ করে। একটি অন্তস্থ বিন্দু J-এর কনজুগেট আঁকতে হলে OJ রেখার উপর লম্ব T_1T_2 জ্যা আঁকি। এবার T_1 এবং T_2 বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু A-ই হলো কনজুগেট। বৃত্ত ς-এর সাপেক্ষে T_1T_2 সরলরেখাকে A বিন্দুর পোলার বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে

$OP.OP' = OQ.OQ'. = r^2$

ফলে PP′QQ′ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। রেখা P-কে P বিন্দুর পোলার এবং P বিন্দুকে P রেখার পোলার বলে।



10 নং ছবি

পোল এবং পোলারের উপপাদ্য

যদি Q P এর পোলারের উপর অবস্থিত হয় তাহলে P ও Q-এর পোলারের উপর অবস্থিত হবে।

এবার এ্যাপোলিনিয়াসের স্পর্শ সমস্যার গারগনের সমাধান দেয়া যেতে পারে। সাধারণত তিনটি বৃত্ত $ς_1$, $ς_2$ এবং $ς_3$ এর উপর একাধিক বৃত্ত লম্ব হতে পারে।

গারগনের অংকন : বৃত্তত্রয়ের পাওয়ার বিন্দু O এবং সিমিলারিটি অক্ষ I II III ≡ χ (দ্যলামবারের উপপাদ্য অনুসারে তিনটি বৃত্তের যে তিনটি সিমিলারিটি বিন্দু I, II এবং III থাকে তারা একই রেখার উপর অবস্থিত হয় যাকে সিমিলারিটি অক্ষ বলে)। এবার প্রদত্ত বৃত্তের সাপেক্ষে χ-এর পোল 1, 2 এবং 3 বের কর এবং এদের O বিন্দুর সঙ্গে যোগ কর। সংযুক্ত সরলরেখাসমূহ প্রদত্ত বৃত্তসমূহকে এমন বিন্দুতে স্পর্শ করে যে বিন্দুতে নির্ণেয় বৃত্ত বৃত্তসমূহকে স্পর্শ করে।

মাসেরনির কম্পাস সমস্যা

ইতালিয় গণিতবিদ মাসেরনি (1750 – 1800) অনুমান করেন যে যা কিছু কম্পাস এবং রুলার দিয়ে অংকন করা যাবে তা নিশ্চয়ই শুধু কম্পাস দিয়েও অংকন করা যাবে। 1797 সালে পাভিয়াতে প্রকাশিত তাঁর বই Lageometria del compasso-তে এই সমস্যার সমাধান করেন।

আমরা নিচের তিনটি সমস্যা নিয়ে আলোচনা করি।

1. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়।
2. একটি সরলরেখা এবং বৃত্তের ছেদবিন্দু নির্ণয়।
3. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু নির্ণয়।

অবশ্যি 1 এবং 2-এর অংকন করতে পারলেই যথেষ্ট হবে। 1 ও 2-এর সমাধানের জন্য প্রথমে দুটি সহজ সমস্যার সমাধান নিয়ে বলি।

প্রাথমিক সমস্যা : 1. দুটি রেখাংশের যোগফল কিংবা বিয়োগফল বের করতে হবে।

PQ = a, QX = b দুটি রেখাংশ।

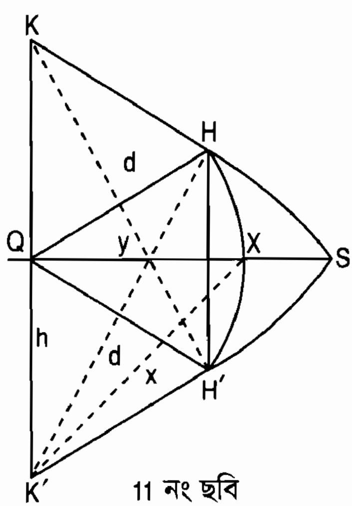
Q বিন্দু থেকে b ব্যাসার্ধ নিয়ে অংকিত বৃত্তচাপের উপর যে কোনো বিন্দু H লই। এবার PQ রেখার উপর H বিন্দুর প্রতিবিম্ব লই এবং HH′-কে h দ্বারা প্রকাশ করি।

kk′ = 2h. মনে করি KH′ = HK′ = d

যেহেতু KHH′K′ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ টলেমির সমীকরণ $d^2 = b^2 + 2h^2$ প্রযোজ্য। অন্যপক্ষে QK′X সমকোণী ত্রিভুজ, যেখানে K′X = x থেকে পাই $x^2 = b^2 + h^2$

এই দুটি সমীকরণ থেকে পাই $d^2 = x^2 + h^2$

অর্থাৎ x হলো সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু যার অতিভুজ d এবং অন্য একটি বাহু h। এবার k এবং k′ কে কেন্দ্র করে d ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপদ্বয় সরলরেখা g-এর উপর s বিন্দুতে মিলিত হয়। এবার



11 নং ছবি

QS = x. K এবং K′ বিন্দুকে কেন্দ্র করে x ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ আঁকলে তারা X বিন্দুতে ছেদ করে। X-ই হলো আমাদের নির্ণেয় বিন্দু।

প্রাথমিক সমস্যা 2. $X = \frac{n}{m} s$ বের কর যেখানে m, n এবং s দৈর্ঘ্যের রেখাংশগুলো দেয়া আছে।

মাসেরনির সমাধান নিম্নরূপ—

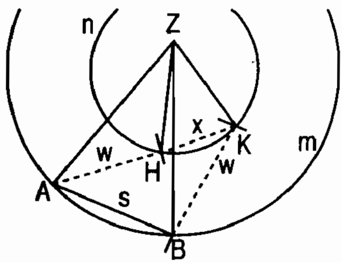
দুটি বৃত্ত ζ_1 (m, Z), ζ_2 (n, Z) এবং ζ_1 এ জ্যা AB = s আঁকি। A এবং B থেকে ζ_1 থেকে যে কোনো দৈর্ঘ্য w কাটি। তাহলে AH = W = BK.

এবার HK = x হলো নির্ণেয় দৈর্ঘ্য।

এবার আসল সমস্যায় আসি।

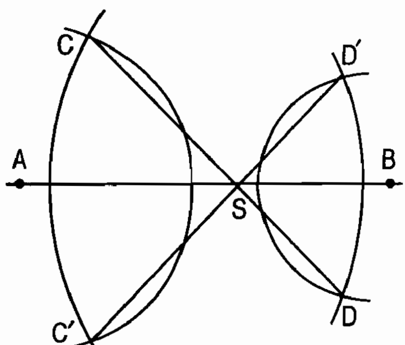
I′ দুটি সরলরেখা AB এবং CD (শুধু বিন্দুগুলো দেয়া আছে) এর ছেদবিন্দু বের করতে হবে।

II′ একটি বৃত্ত ζ এবং সরলরেখা AB-এর ছেদবিন্দু s বের করতে হবে।



12 নং ছবি

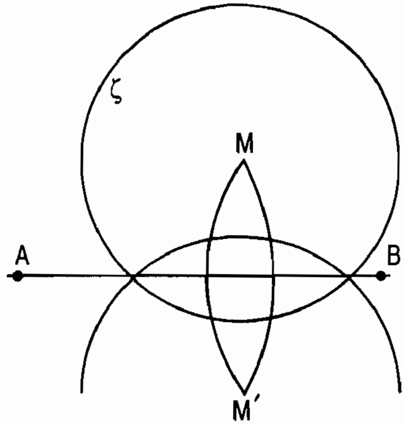
I′ AB রেখার উপর C এবং D বিন্দুর প্রতিবিম্ব C′ এবং D′ আঁকি। এবার আমাদের বিন্দুটি C′D′ রেখার উপরও অবস্থিত। ∴ CS/SD = CC′/DD′ অর্থাৎ CS, CD, CC′ এবং DD′-কে যথাক্রমে x, e, c এবং d দ্বারা প্রকাশ করলে x/(e − x) = c/d অথবা $x = \frac{c}{c+d} \cdot e$



13 নং ছবি

এবার CH = c + d আঁকি যেখানে H হলো C′ এবং D থেকে যথাক্রমে d এবং e ব্যাসার্ধের চাপসমূহের ছেদ বিন্দু। এবার প্রাথমিক সমস্যা 2 অনুযায়ী আমরা x আঁকি এবং পরিশেষে C এবং C′ বিন্দুকে কেন্দ্র করে x চাপের বৃত্তচাপদ্বয় কাঙ্ক্ষিত s বিন্দুতে ছেদ করে।

II′-এর সমাধান : মনে করি AB রেখার A এবং B বিন্দু দেয়া আছে এবং ς (r, M) হলো প্রদত্ত বৃত্ত। আমরা এবার AB রেখার উপর M বিন্দুর প্রতিবিম্ব আঁকি। এবার M′ থেকে r ব্যাসার্ধের চাপ আঁকি। তাহলে এই বৃত্তচাপটি ς এর সঙ্গে যে বিন্দুতে ছেদ করবে ঠিক সেই বিন্দুগুলোতেই AB রেখাও ছেদ করবে।



14 নং ছবি

যদি AB রেখাটি M বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তাহলে এই অংকনটি করা যাবে না। এই ব্যতিক্রমী ক্ষেত্রে AM রেখাংশকে প্রাথমিক সমস্যা 1 অনুসারে r পরিমাণ সম্প্রসারিত এবং সঙ্কুচিত করলে নতুন রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ই হবে নির্ণেয় বিন্দু। এই হলো মাসেরনির উপপাদ্যের প্রমাণ।

স্টাইনারের রুলারের সমস্যা

প্রমাণ কর যে, কম্পাস এবং রুলার দিয়ে যে অংকনগুলো করা যায় তা শুধু রুলার ব্যবহার করে করা যায় যদি অংকনের সমতলে একটি বৃত্ত দেয়া থাকে। 1759 সালে জুরিখে প্রকাশিত Freie Perspektive নামক বইতে ল্যামবার্ট রুলার দিয়ে অংকনের অনেক সমস্যা সমাধান করেছেন। ল্যামবার্টের পর ফরাসি গণিতবেত্তা পনসেলে এবং ব্রাইয়ানচ রুলার দিয়ে বিভিন্ন অংকনের কাজ সম্পন্ন করেন। শুধুমাত্র রুলার দিয়ে শুধুমাত্র মূলদ (Ralional) এক্সপ্রেশনের সমান দৈর্ঘ্যকে আঁকা যাচ্ছিল কিন্তু $\sqrt{ab}$ এই ধরনের এক্সপ্রেশন প্রকাশ করা যাচ্ছিল না। এ অবস্থায় পনসেলে পরামর্শ দিলেন কম্পাস ও রুলার দিয়ে যে অংকন করা যায় সমতলে কেন্দ্রসহ একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপস্থিতিতে রুলার দিয়েও সেই অংকনগুলো করা যায়। এ্যাপোলিনিয়াসের পর পৃথিবীর সর্বশ্রেষ্ঠ জ্যামিতিবিদ জ্যাকব স্টাইনার (1796 – 1863) 1833 সালে বার্লিনে প্রকাশিত Geometrical Constructions Executed With a Straight line and One Fixed Circle" বইতে বক্তব্যের প্রমাণ লিপিবদ্ধ করেন।

যেহেতু রুলার জ্যামিতিতে দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু সরাসরিই জানা আমাদের দেখাতে হবে যে সরলরেখা ও বৃত্ত এবং বৃত্ত ও বৃত্তের ছেদ বিন্দু কীভাবে বের করা যায়।

মাসেরনির সমস্যার মতোই আমাদের কিছু প্রাথমিক সমস্যার সমাধান করতে হবে। এক্ষেত্রে প্রাথমিক সমস্যার সংখ্যা 2-এর পরিবর্তে 5। এই সমস্যাগুলো হলো—

প্রাথমিক সমস্যা 1 : একটি বিন্দু দিয়ে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা আঁকা।

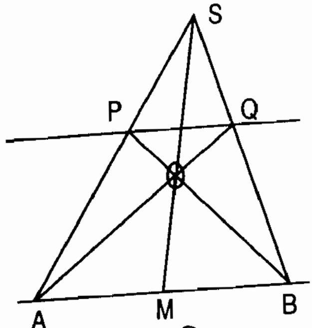
প্রাথমিক সমস্যা 2 : P বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব আঁকা।

প্রাথমিক সমস্যা 3 : একটি বিন্দু O থেকে নির্দিষ্ট দিকে PQ দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ আঁকা।

প্রাথমিক সমস্যা 4 : যদি m, n, s দূরত্ব দেয়া থাকে তাহলে এদের চতুর্থ সমানুপাতি P অর্থাৎ $\frac{ns}{m}$ আঁকা।

প্রাথমিক সমস্যা 5 : দুটি রেখাংশ a এবং b দেয়া থাকলে $\sqrt{ab}$ আঁকা।

প্রাথমিক সমস্যা 1-এ দু'টি ভাগ রয়েছে প্রথমটিতে সরলরেখা AB এবং তার মধ্যবিন্দু M দেয়া আছে আর দ্বিতীয়টিতে যে-কোনো সরলরেখা দেয়া আছে। প্রথম ক্ষেত্রের অংকনটি নিম্নরূপ—



15 নং ছবি

মনে করি P বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল রেখা আঁকতে হবে। AP আঁকি এবং এর বর্ধিত অংশের উপর যে-কোনো বিন্দু S লই। SB, BP এবং SM যোগ করি। এবার A থেকে BP এবং SM-এর ছেদবিন্দু O বিন্দুগামী সরলরেখা SB-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে PQ-ই নির্ণেয় সমান্তরাল সরলরেখা।

প্রাথমিক সমস্যা 2-এর সমাধান করতে একটি কেন্দ্রসহ বৃত্তের উপস্থিতি প্রয়োজন। সরলরেখা AB-এর উপর নির্দিষ্ট বিন্দু P থেকে লম্ব আঁকতে হবে সেই সরলরেখার সমান্তরাল একটি রেখা আঁকতে হবে (প্রাথমিক সমস্যা 1) যা

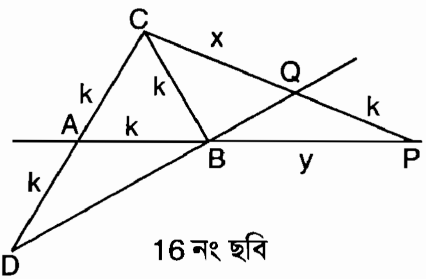
নির্দিষ্ট বৃত্তকে দুটি বিন্দু U, V-তে ছেদ করে। এবার U থেকে কেন্দ্র F দিয়ে ব্যাস UU′ আঁকি। তাহলে U′V AB-এর উপর লম্ব। এবার P বিন্দু থেকে U′V-এর সমান্তরাল রেখা আঁকতে হবে।

এবার গ্রীস গণিতবেত্তাদের দীর্ঘদিন বিচলিত করেছে এমন দুটি সমস্যার সমাধান নিয়ে আলোচনা করা যাক।

ডেলিয়ানের কিউব দ্বিগুণ করার সমস্যা

k যদি একটি কিউবের বাহু হয়ে থাকে তাহলে x বের কর যাতে $x^3 = 2k^3$.

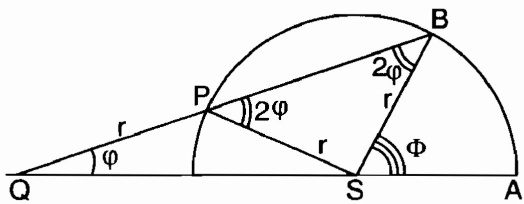
শুধুমাত্র কম্পাস এবং রুলার দিয়ে এই সমস্যাটির সমাধান করা যায় না। গ্রীক গণিতজ্ঞ মেনেকমাস (খ্রিষ্টপূর্ব 375 – 325) এই সমস্যার সমাধান করতে দুটি প্যারাবোলা $x^2 = ky$ এবং $y^2 = 2kx$-এর ছেদ বিন্দু বের করেন। ছেদবিন্দুর x এমন যে $x^3 = 2k^3$ যেহেতু $x^4 = k^2y^2 = 2k^3x$। পরবর্তীতে ডেকার্ত দেখিয়েছিলেন একটি প্যারাবোলা এবং $x^2 + y^2 = ky + 2kx$ বৃত্তের ছেদবিন্দু বের করলেও হতো। সবচে’ সহজ অংকন হলো পৃষ্ঠা ভাঁজ করে তাকে চিত্রের ন্যায় ব্যবহার করা।



16 নং ছবি

একটি কোণকে সমান তিনভাগে ভাগ করা

শুধুমাত্র কম্পাস এবং রুলার দিয়ে এই সমস্যার সমাধান করা যাবে না। সবচে’ সহজ সমাধান দিয়েছেন আর্কিমিডিস কাগজ ভাঁজ করে। যে-কোনো কোণ φ-কে ত্রিখণ্ডন করতে হবে। তার শীর্ষবিন্দু s থেকে r ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকি যা φ-এর বাহুদ্বয়কে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। এবার r দৈর্ঘ্যের একটি অংশ কাগজের কোনায় মার্ক করি। এবার কাগজের কোনাটুকু



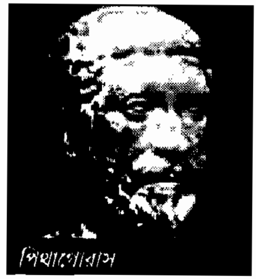
17 নং ছবি

এমনভাবে চিত্রে সাজাই যেন ইহা B দিয়ে যায়, মার্ক করা একটি বিন্দু S-কে কেন্দ্র করে বৃত্তের উপর P বিন্দুতে থাকে এবং অপর বিন্দুটি AS রেখার বর্ধিতাংশের সঙ্গে Q বিন্দুতে মিলে। এবার $\angle PQS = \frac{1}{3}\varphi$

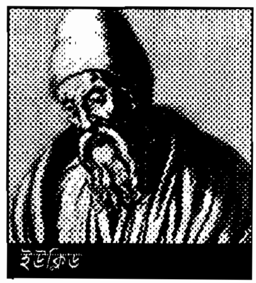
সুষম বহুভুজ অংকন জ্যামিতিবিদদের জন্য দীর্ঘদিন চ্যালেঞ্জ হিসেবে ছিল। গার্উস 1801 সালে প্রকাশিত Disquisitiones arithmeticae বইতে সুষম সপ্তদশভুজ অংকনের সমস্যার সমাধান করেন। তিনি প্রমাণ করেন যে, কম্পাস এবং রুলার ব্যবহার করে যে-কোনো n-ভুজ অংকন করা যাবে যদি $n = 2^m P_1 P_2 \ldots P\nu$, যেখানে $P_1, P_2, \ldots, P\nu$-এর প্রত্যেকটি $2^i + 1$ টাইপের প্রাইম নাম্বার।

এছাড়া জ্যামিতিক ধারণা ব্যবহার করে আর্কিমিডিসের π এর মান বের করা, আলহাজেনের বিলিয়ার্ড সমস্যা, হ্যানসেনের সমস্যা এগুলোর অত্যন্ত চমকপ্রদ সমাধান বের করা হয়েছে।

কয়েকজন বিখ্যাত জ্যামিতিবিদের সংক্ষিপ্ত পরিচিতি


পিথাগোরাস

পিথাগোরাস হলো প্রথম বিশুদ্ধ গণিতবেত্তা যিনি ব্যাসিক প্রিন্সিপাল থেকে যুক্তি ব্যবহার করে জ্যামিতির সত্য প্রমাণ করেছিলেন। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ কিংবা হাজার বছর ধরে জানা সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সম্পর্ক পিথাগোরাসের গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার।

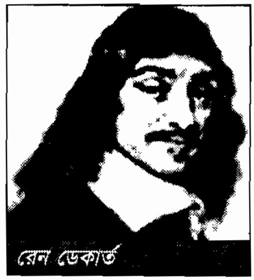

ইউক্লিড

ইউক্লিড অব আলেকজান্দ্রিয়ার সবচে' বড় পরিচয় হলো পিথাগোরাস, হিপোক্রেটস, থিটিটাস, ইউডোক্সাস এবং অন্যান্য পূর্বসূরিদের উপপাদ্যসমূহ খ্রিষ্টপূর্ব 300 সালে "The Elements"-এর 13 খণ্ডে প্রকাশ করা।


আর্কিমিডিস

আর্কিমিডিসকে সর্বশ্রেষ্ঠ গ্রীক গণিতবেত্তা হিসেবে বিবেচনা করা হয়। এছাড়াও তিনি স্ক্রু, কপিকল এবং লিভারের মতো বিভিন্ন যন্ত্র আবিষ্কার করেন। তার একটি বিখ্যাত আবিষ্কার হলো গোলকের আয়তন হলো একে ধারণ করা সিলিন্ডারের দুই-তৃতীয়াংশ। তাঁর সমাধিতে এই আবিষ্কারের চিত্রটি আঁকা রয়েছে। তিনি π এবং বর্গমূলের মান বের করেন। "On Plane Equilibriums" নামক বইতে তিনি জ্যামিতি ব্যবহার করে মেকানিকসের বিভিন্ন মূলনীতি আবিষ্কার করেন এবং বস্তুর ভরকেন্দ্র নিয়ে বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ সত্য প্রতিষ্ঠা করেন। "Archimedes : What did He Do Beside Cry Eureka" বইতে আর্কিমিডিসের জীবনী এবং আবিষ্কারের বিস্তারিত বর্ণনা রয়েছে।

রেন ডেকার্তে তাঁর 1637 সালে "Discours de la method" পাণ্ডুলিপিতে জ্যামিতিতে এ্যালজেবরা ব্যবহার করে এ্যানালাইটিক্যাল জ্যামিতির প্রবর্তন করেন। এই পাণ্ডুলিপির জ্যামিতি অংশের ইংরেজি অনুবাদ "The Geometry of Rene Descartes" বইটিতে রয়েছে।


রেন ডেকার্তে

পিয়ে দ্য ফার্মাকে এ্যানালাইটিক্যাল জ্যামিতির সহপ্রতিষ্ঠাতা বলা হয়। তিনি বাঁকা লাইনের ম্যাক্সিমাম, মিনিমাম এবং স্পর্শক ক্যালকুলাস ব্যতিরেকেই বের করেন। এছাড়া ফার্মা, ফার্মার শেষ উপপাদ্যের জন্যও বিখ্যাত যা সাড়ে তিনশ বছর গণিতবেত্তাদের গলদঘর্ম করেছে।


পিয়ে দ্য ফার্মা

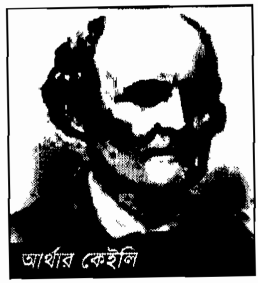
লিউনার্দ অয়লার বিভিন্ন বিষয়ের বিশারদ ছিলেন এবং গাণিতিক বিশ্লেষণ বিষয়টির সূচনা করেন। তিনি ফাংশনের ধারণারও সূচনা করেন এবং তা ব্যবহার করে এ্যানালাইটিক্যাল জ্যামিতিকে ডিফারেন্সিয়াল জ্যামিতিতে রূপান্তর করেন। 1752 সালে তিনি প্রতিষ্ঠা করেন যে যে-কোনো পলিহেড্রনের জন্য $V - E + F = 2$ যেখানে V- শীর্ষের সংখ্যা, E- বাহুর সংখ্যা এবং F- সমতলের সংখ্যা। তিনি গণিতের বিভিন্ন শাখায় অত্যন্ত সাড়া জাগানো এবং গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার করেন। তাঁর জীবনী এবং আবিষ্কার নিয়ে "Euler : The Master of Us All" বইটি লেখা হয়েছে।


লিউনার্দ অয়লার

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস হলো নন-ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতির আবিষ্কারক এবং ডিফারেন্সিয়াল জ্যামিতির সহ-আবিষ্কারক।

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস

আর্থার কেইলি একজন আইনবিদ এবং সৌখিন গণিতবেত্তা ছিলেন। তিনি ইউক্লিডিয়ান, নন-ইউক্লিডিয়ান প্রোজেকটিভ এবং মেট্রিক্যাল জ্যামিতির সমন্বয় করেন।



আর্থার কেইলি

বার্নার্ড রিম্যান ডিফারেন্সিয়াল জ্যামিতির বিকাশে অত্যন্ত বড় ভূমিকা পালন করেন এবং গাউসের তত্ত্বাবধানে 1851 সালে তার পিএইচডি থিসিসে "রিম্যান সারফেস" নিয়ে গবেষণা করেন।

ড্যাভিড হিলবার্ট ইনভ্যারিয়ান্ট থিউরি নিয়ে কাজ করেন এবং 1888 সালে বিখ্যাত "ব্যাসিস থিউরেম" প্রমাণ করেন। 1899 সালে Grundlagen de Geometric" বইটি প্রকাশের মাধ্যমে ইউক্লিডের পর জ্যামিতিতে সবচে' প্রভাবশালী কাজ করেন যার ফলে জ্যামিতি 21টি স্বতঃসিদ্ধের মাধ্যমে নতুন ভিত্তি পায়। 1990 সালে বিখ্যাত প্যারিস বক্তৃতায় তিনি 23টি মুক্ত সমস্যার লিস্ট প্রকাশ করেন যার কিছু জ্যামিতি সংক্রান্ত ছিল যা বিংশ শতাব্দীর গণিতবেত্তাদের জন্য চ্যালেঞ্জ ছিল।

ড্যাভিড হিলবার্ট

ডোনাল্ড কক্সেটার

ডোনাল্ড কক্সেটারকে বিংশ শতাব্দীর একজন বড় সিনথেটিক জ্যামিতিবিদ হিসেবে স্বীকৃতি দেয়া হয়। পলিটোপ, নন-ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতি, গ্রুপ থিউরি এবং কম্বিন্যাটরিকসে তিনি গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখেন।

এক অসাধারণ গণিতবেত্তা সোফিয়া কাভালভস্কাইয়ার কথা

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

১৯৭৩ সালের নভেম্বর-ডিসেম্বর মাসের কথা। আমি তখন সোভিয়েত ইউনিয়নে পড়ালেখা করছি। প্রতিদিনের মতোই আল্লা আলেক্সিয়েভনা রাশিয়ান ভাষার পাঠদান করতে এসেছেন। প্রতিটি ক্লাসে আমরা সাধারণত একটি গল্প পড়ি, তারপর নিজের মতো করে রাশিয়ান ভাষায় গল্পটি লিখি, কখনো কখনো ডিকটেশনে কিংবা গল্পের উপর প্রশ্নোত্তর লিখতে হয়। সেদিন ম্যাডাম ক্লাসে এসেই বেশ উজ্জ্বল ও গর্বিত। বললেন আজ একজন অত্যন্ত প্রতিভাবান রাশিয়ান গণিতজ্ঞের উপর গল্প পড়াবেন। যাহোক একথা থেকে অতটা আঁচ করতে পারলাম না ম্যাডাম এতে এতটা প্রাণবন্ত কেন। কিন্তু তার পরক্ষণেই যখন বললেন এই গণিতজ্ঞ একজন মহিলা ছিলেন তখন তাঁর গর্বিত মনোভাবের কারণটি বুঝতে পারলাম। তবে সাহিত্যের একটি বইতে একজন গণিতজ্ঞের জীবনী— চাট্টিখানি কথা নয়। আমাদের দেশে পাঠ্যপুস্তকে গল্পের আকারে কখনো কোনো গণিতজ্ঞ সম্পর্কে পড়ি নি। অন্যান্য বিজ্ঞানীদের সম্পর্কে যৎ কিঞ্চিৎ পড়েছি তা-ও তাদের সাহিত্যে অবদানের জন্য। যেমন জগদীশ বসুর গাছের কথা। এছাড়া বিজ্ঞানীদের সম্পর্কে পাঠ্যপুস্তকে গল্প কল্পনাই করা যায় না। বিদেশী গল্পগ্রন্থ সেভেন ইনভেন্টরস ও মর্ডান এ্যাডভেঞ্চারের সুবাদে কয়েকজন বিদেশী বৈজ্ঞানিক সম্পর্কে জানার সুযোগ হয়েছিল যদিও তাঁদের মধ্যে কোনো গণিতজ্ঞ অন্তর্ভুক্ত ছিলেন না। আর এখানে প্রথম শ্রদ্ধাবোধ ক্লাসের সবাইকেই শ্রদ্ধাবনত করল। গল্পের নায়িকা সোফিয়া ভাসিলিয়েভনা কাভালভস্কাইয়া। আমাদের দেশে মানুষের নাম এখনো বিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা হয় না। কিন্তু রাশিয়াতে এমনটি নয়। সেখানে যে-কোনো মানুষের নামে তিনটি অংশ আছে। প্রথম অংশ হলো সেই নাম যা বন্ধু-বান্ধবরা ডাকে। অবশ্যি অনেক সময় ডাকনাম কিছুটা সহজ হয়। যেমন কারো প্রথম নাম সের্গেই হলে বন্ধু-বান্ধবরা সিরিয়ঝা বলেই ডাকে। আবার একটি মেয়ের প্রথম

নাম নাতাশিয়া হলে বন্ধু-বান্ধব নাতাশা কখনো আদর করে নাতাশকা ডাকে। নামের দ্বিতীয় অংশে থাকে পিতার প্রথম নাম। ছেলে এবং মেয়ের নামে কিছুটা পার্থক্য আছে। যেমন ভাসিলি-এর ছেলে হলে মধ্যনাম হবে ভাসিলিয়েভিচ কিন্তু মেয়ে হলে ভাসিলিয়েভনা। আর নামের তৃতীয় অংশ হলো বংশ পরিচয়। পুরুষদের ক্ষেত্রে সবসময়ই পিতার বংশ পরিচয় মহিলাদের ক্ষেত্রে বিয়ের আগে পিতার বংশ পরিচয় এবং বিয়ের পর স্বামীর। এর ব্যতিক্রমও রয়েছে। অনেকেই বিয়ের পরও পিতার বংশ পরিচয়ই রেখে দেয়। সোফিয়া ভাসিলি এর মেয়ে ছিলেন তাই মধ্যনাম ভাসিলিয়েভনা। তাঁর স্বামীর বংশ নাম ছিল কাভালভস্কি মহিলা হিসেবে তাঁর বংশনাম সেই থেকে হয়েছে কাভালভস্কাইয়া। তাঁর পিতার নাম ভাসিলি করভিন-কুকভস্কি। যাহোক নামের ব্যাখ্যা শেষে এবার আসল কথায় আসি।


সোফিয়া কাভালভস্কাইয়া

সোফিয়া কাভালভস্কাইয়া ১৮৫০ সালের ১৫ জানুয়ারি মস্কোতে জন্মগ্রহণ করেন। সোফিয়ার পিতা একজন জেনারেল ছিলেন এবং মাতা ভেলিজাবেতা সুবার্ট রাশিয়ান সম্ভ্রান্ত ও শিক্ষিত পরিবারের সদস্য। বিখ্যাত রাশিয়ান লেখক দস্তয়েভস্কি তাঁদের পারিবারিক বন্ধু ছিল। সোফিয়ার বয়স যখন ছয় তখন তার পিতা অবসর নিয়ে লিথুনিয়ার সীমান্তে বসবাস শুরু করেন। খুব অল্প বয়সেই চাচা পিয়তার ভাসিলিয়েভিচ ক্রুকভস্কির অনুপ্রেরণায় সোফিয়া গণিতের প্রতি আকৃষ্ট হন। সোফিয়ার বয়স যখন এগারো তখন পর্যন্ত দেয়াল কাগজের অভাবে সোফিয়ার কক্ষের দেয়াল রাশিয়ান গণিতজ্ঞ অস্ট্রোগ্রাডস্কির ডিফারেন্সিয়াল ও ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের অ্যানালাইসিসের নোট দিয়ে ঢেকে দেয়া হয়। তখন কে জানত গণিতের এই কঠিন ফর্মুলাগুলো ভবিষ্যতে ঐ ছোট্ট মেয়েটির পরমানন্দের বিষয় হয়ে উঠবে। তখনকার সমাজব্যবস্থা মেয়েদের পড়ালেখা করতে উৎসাহিত করত না। সোফিয়ার পড়ালেখার বিষয়ে তাঁর পিতার আগ্রহ না থাকলেও তাঁর গণিতের দক্ষতার কথা জানতে পেরে গৃহশিক্ষক জোসেফ ইগনাটেভিচ মালেভিচের নিকট সোফিয়া ১৮৬৭ সাল পর্যন্ত গণিত শেখার সুযোগ পান। বাসায় সবাই যখন ঘুমে

বিভোর তখন সোফিয়া রাত জেগে বর্ড়ুর অ্যালজেবরা বই শেষ করেন। গণিত চর্চার অদম্য পিপাসা মেটানোর জন্য সোফিয়া স্থির করলেন জার্মানির হাইডেলবার্গ বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হবেন। কিন্তু আবার সমাজের নিয়ম কানুন বাধ সাধল। রাশিয়ান নিয়মানুযায়ী মেয়েরা পিতা কিংবা স্বামীর বিনা অনুমতিতে উচ্চ শিক্ষা তো দূরের কথা বিদেশ ভ্রমণই করতে পারে না। জ্ঞান পিপাসার কাছে বিয়ের মতো ব্যক্তিগত গুরুত্বপূর্ণ ঘটনা তুচ্ছ প্রমাণ করে একজন ডারউইন সমর্থক জীবাশ্মবিদ ভ্লাদিমির কাভালভস্কিকে ১৮৬৮ সালে বিয়ে করেন যা তাঁকে কোনো পারিবারিক সুখ দিতে পারে নি।

গণিত ও প্রকৃতিবিজ্ঞান অধ্যয়ন করার জন্য সোফিয়া ১৮৬৯ সালে যখন হাইডেলবার্গ বিশ্ববিদ্যালয়ে পৌঁছান তখন জানতে পারেন যে এই বিশ্ববিদ্যালয় থেকে নিয়মানুযায়ী মহিলারা ডিগ্রি অর্জন করতে পারে না। কিন্তু তিনি ক্লাস ও সেমিনারে উপস্থিত থাকার অনুমতি বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের কাছ থেকে আদায় করে তিন সেমিস্টার পড়াশুনা করেন। ১৮৭১ সালে ব্যক্তিগতভাবে চার বছর পড়াশুনার জন্য তিনি বার্লিন গমন করেন। ১৮৭৪ সালের বসন্ত কালের মধ্যে তিনি পার্শিয়াল ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন, আবেলিয়ান ইন্টেগ্রাল এবং শনির চক্র নিয়ে যে তিনটি গবেষণা প্রবন্ধ তৈরি করেন তার প্রত্যেকটি একটি ডক্টরেট ডিগ্রি পাওয়ার যোগ্য কাজ। ১৮৭৪ সালে গটিংগেন বিশ্ববিদ্যালয় তাঁকে পিএইচডি ডিগ্রি প্রদান করে। ডক্টরেট ডিগ্রি এবং বিখ্যাত গণিতজ্ঞ ওয়েরস্ট্রাসের অকুণ্ঠ প্রশংসাপত্র নিয়েও মহিলা হওয়ার জন্য বিশ্ববিদ্যালয়ের কোনো পদ তিনি পান নি। এর ফলে রাশিয়ায় ফিরে এসে তিনি ছয় বছর সময় গবেষণা থেকে নির্বাসিত জীবন কাটিয়েছেন এবং ওয়েরস্ট্রাসের কোনো চিঠির উত্তরও দেন নি। সবচে' যে ভালো চাকরির প্রস্তাব তাঁকে দেয়া হয়েছিল তা হলো প্রাথমিক বিদ্যালয়ের ছাত্রীদের পাটিগণিত শেখানো। ১৮৭৮ সালে তিনি এক কন্যা সন্তানের জন্মদান করেন। ১৮৮০ সাল থেকে তিনি আবার গণিতের চর্চায় মনোনিবেশ শুরু করেন। ১৮৮২ সালেই তিনি আলোকের প্রতিসরণের উপর তিনটি গবেষণা প্রবন্ধ লিখেন। দুই বছর বিচ্ছিন্ন থাকার পর ১৮৮৩ সালের বসন্তকালে সোফিয়ার স্বামী আত্মহত্যা করেন। এই শোক থেকে মুক্তি পাওয়ার জন্য সোফিয়া পুনরুদ্দোমে গণিত চর্চা শুরু করেন। শত বাধা ডিঙিয়ে মিটাগ লেফলার কাভালভস্কাইয়াকে পাঁচ বছরের জন্য স্টকহোমে অসাধারণ অধ্যাপক পদে নিয়োগের ব্যবস্থা করেন। ১৮৮৯ সালের জুনমাসে তিনি পদার্থবিদ

লোরাবাছি এবং মারিয়া গেটানা আগনেছির পর প্রথম মহিলা হিসেবে একটি ইউরোপীয় বিশ্ববিদ্যালয়ের চেয়ার অলংকৃত করেন। স্টকহোমের জীবনে কাভালভস্কাইয়া অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ গবেষণা করেন। তিনি অ্যানালাইসিসের আধুনিকতম বিষয় নিয়ে শিক্ষাদান করেন এবং অ্যাক্টা ম্যাথমেটিকা নামের জার্নালের সম্পাদক নির্বাচিত হন। তিনি প্যারিস এবং বার্লিনে অবস্থানকারী গণিতজ্ঞদের সঙ্গে যোগাযোগ রক্ষা করেন এবং আন্তর্জাতিক কনফারেন্সসমূহের আয়োজনে সক্রিয় ভূমিকা পালন করেন। কর্মজীবনের বিভিন্ন সফলতার ফলে সমাজে কাভালভস্কাইয়ার অত্যন্ত প্রশংসনীয় ভাবমূর্তি প্রতিষ্ঠিত হয়। তিনি তাঁর জীবনের অসংখ্য Memories of Childhood A Nihilist Girl ও Vae Victis ঘটনা নিয়ে স্মৃতিচারণমূলক গ্রন্থ এবং নাটক লিখেন। প্রথম গ্রন্থটি সুইডেনে The Rajevskj Sisters নামে সর্বাধিক বিক্রিত গ্রন্থে পরিণত হয়। ১৮৮৬ সালে ফরাসি একাডেমি অব সাইন্স প্রি বর্ডিন পুরস্কারের ঘোষণা দেন। শক্ত বস্তুর উপর গবেষণায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান হলো পুরস্কার প্রাপ্তির পূর্বশর্ত। একটি স্থিরবিন্দুর চারপাশে একটি শক্ত বস্তুর ঘূর্ণন বিষয়ক তাঁর গবেষণা প্রবন্ধটি প্রি বর্ডিন পুরস্কারে ভূষিত হয় এবং তাঁর গবেষণায় অতি উচ্চমানের জন্য পুরস্কারের অর্থ তিন হাজার ফ্রাংক থেকে পাঁচ হাজার করা হয়। একই বিষয়ে তাঁর পরবর্তীতে প্রাপ্ত গবেষণার ফলাফলের জন্য তাঁকে সুইডিশ একাডেমি অব সাইন্সেস ১৮৮৯ সালে পুরস্কার দান করে। একই বছর বিখ্যাত গণিতজ্ঞ চেচিকোভের উদ্যোগে কাভালভস্কাইয়া ইম্পেরিয়াল একাডেমি অব সাইন্সেসের সদস্যপদ অর্জন করেন। যদিও জার সরকার তাঁকে বিশ্ববিদ্যালয়ের চাকরি দানে বরাবরই অস্বীকৃতি জানিয়েছে ইম্পেরিয়াল একাডেমি তাঁকে সদস্য করার জন্য আইন প্রবর্তন করেন।

ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন ক্ষেত্রে যেমন তিনি গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখেন একইভাবে শনির চক্র সংক্রান্ত লাপ্লাস ও ম্যাক্সওয়েলের প্রাপ্ত ফলাফলকে তিনি প্রশংসনীয়ভাবে উন্নত করেন। আবার গতির সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতিও আবিষ্কার করেন। সোফিয়া কাভালভস্কাইয়ার অবদান স্মরণ রাখার জন্য গত ৩১ জানুয়ারি হামবোল্ড ফাউন্ডেশন ১৩টি দেশের ২৯ জন প্রতিভাবান তরুণকে কাভালভস্কাইয়া ফেলোশিপ দিয়েছেন। রাশিয়াতে তাঁর ছবি সংবলিত একটি ডাকটিকেটও আছে। কিছুদিন আগে তাঁর নামে পার্শিয়াল ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশনের একটি আন্তর্জাতিক কনফারেন্সও অনুষ্ঠিত হয়।

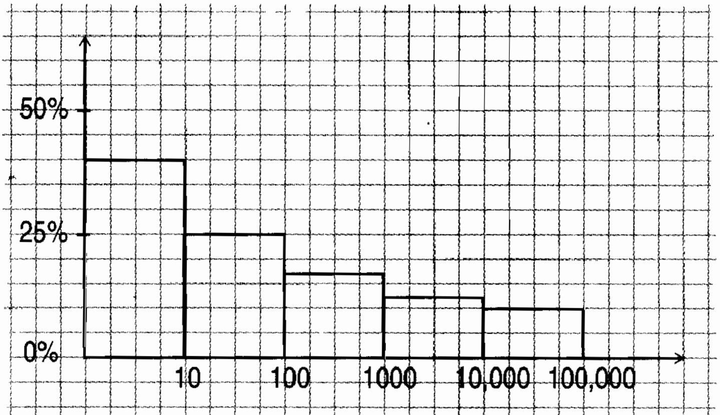
শিক্ষা এবং গবেষণা কাজ চালিয়ে যাওয়ার জন্য কাভালভস্কাইয়া সারা জীবন যুদ্ধ করে গেছেন। বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হওয়ার জন্য নামমাত্র বিবাহবন্ধনে আবদ্ধ হয়ে বিদেশে গেছেন, কিন্তু নিয়মানুযায়ী ভর্তি হতে পারেন নি। পরবর্তীতে ব্যক্তিগত প্রচেষ্টায় নামকরা বিজ্ঞানীদের সংস্পর্শে এসেছেন। গবেষণায় অসামান্য সাফল্য অর্জনের পরও সর্বোচ্চ ডিগ্রি পাওয়ার পরও বিখ্যাত গণিতজ্ঞদের অকুণ্ঠ প্রশংসা সমৃদ্ধ প্রশংসাপত্র পাওয়ার পরও বিশ্ববিদ্যালয়ে কোনো পদ তিনি পান নি। যারফলে তাঁর জীবনের আটটি বছর গণিত চর্চা থেকে ঝরে পড়ে গেছে। পরিশেষে একজন অধ্যাপকের অক্লান্ত প্রচেষ্টায় বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত অধ্যাপকের নামে টিউটর হওয়ার সুযোগ পেয়েছিলেন। কিন্তু কয়েক মাসের মধ্যেই তিনি নিজের যোগ্যতা প্রমাণ করে অসাধারণ অধ্যাপক পদে নিয়োগ পান। কাভালভস্কাইয়া যখন গণিতের দক্ষতায় এবং খ্যাতিতে শীর্ষে অবস্থান করছেন তখন ইনফ্লুয়েঞ্জা এবং নিউমোনিয়া মাত্র একচল্লিশ বছর বয়সে ১৮৯১ সালের ১০ ফেব্রুয়ারি তাঁর জীবন কেড়ে নেয়। সমাজের অসংখ্য বাধা বিপত্তি কেবলমাত্র মানসিক দৃঢ়তা এবং অসাধারণ মেধা দিয়ে ঠেলে সরিয়ে দিয়ে তিনি বিশ্বের জ্ঞানভাণ্ডারকে সমৃদ্ধ করেছেন। তাঁর মেধায়, গণিতদক্ষতায় অভিভূত হয়েছিলেন তদানীন্তন বিখ্যাত গণিতবেত্তাগণ। আইনস্টাইনের আইকিউ যেখানে ১৬০ ছিল সোফিয়া কাভালভস্কাইয়ার আইকিউ ছিল ১৭০। ছোট্ট জীবনে বিভিন্ন বাধা বিঘ্নের মধ্যেও তিনি যে সাফল্য অর্জন করেছেন তা আমাদের দেশের মহিলাকুলের জন্যও উৎসাহের অফুরন্ত উৎস হয়ে থাকবে।

প্রাইম সংখ্যার বিচিত্র জগৎ

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

যেসব সংখ্যাকে (1 ছাড়া) শুধু সেই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় তাদেরকে প্রাইম (Prime) বা মৌলিক সংখ্যা বলে। প্রথম প্রাইম সংখ্যা হচ্ছে 2 এবং সবগুলো প্রাইম সংখ্যার মাঝে এটি হচ্ছে দলছুট, কারণ এটা হচ্ছে একমাত্র জোড় প্রাইম সংখ্যা। এর পরের কয়েকটা প্রাইম সংখ্যা হচ্ছে— 3, 5, 7, 11 ইত্যাদি। যে সংখ্যাগুলো প্রাইম নয় তাদেরকে বলে যৌগিক বা কম্পোজিট (Composite) সংখ্যা। যেমন— 4, 6, 8, 9, 10 ইত্যাদি। 1 থেকে 100-এর ভেতরের প্রাইম সংখ্যাগুলো চট করে বলে ফেলাটি আসলে মন্দ ব্যাপার নয়। সেগুলো হচ্ছে—

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 এবং 97।



1 নং ছবি : প্রাইম শতাংশ

এই সংখ্যাগুলোর দিকে তাকালেই আমরা দেখতে পাই প্রথম দশের ভেতর প্রাইম সংখ্যা চারটি। অর্থাৎ প্রায় 40% হচ্ছে প্রাইম। প্রথম 100-এর ভেতর প্রাইম সংখ্যা 25টি অর্থাৎ 25%। দেখাই যাচ্ছে প্রাইম সংখ্যা তুলনামূলকভাবে কমে এসেছে। প্রথম এক হাজারের ভেতর প্রাইম সংখ্যা 168টি, অর্থাৎ প্রায় 17%, আরো কমে এসেছে। এভাবে দেখা যায় দশ হাজারের ভেতর 1,229টি (12%) এক লক্ষের ভেতর 9,592টি (10%) অর্থাৎ যত বড় সংখ্যায় যাওয়া

যায় প্রাইম সংখ্যা তত দুষ্প্রাপ্য হতে থাকে (1 নং ছবি)। এমন কি হতে পারে যে দুষ্প্রাপ্য হতে হতে সেটি এতই দুষ্প্রাপ্য হবে যে সেটি আর পাওয়াই যাবে না, অর্থাৎ একটা নির্দিষ্ট সংখ্যার পরে আর কোনো প্রাইম থাকবে না ?

বহু বছর আগে ইউক্লিড এই প্রশ্নের উত্তর দিয়ে গেছেন। তিনি প্রমাণ করেছেন যে, প্রাইমের সংখ্যা অসীম। প্রমাণটি এত চমৎকার যে, সেটি না বলা রীতিমতো অপরাধ। ধরা যাক প্রাইমের সংখ্যা অসীম নয়— অর্থাৎ একটা প্রাইম সংখ্যা আছে যেটা হচ্ছে সবচে' বড় প্রাইম এবং তার থেকে বড় কোনো প্রাইম নেই। ধরা যাক এই বড় প্রাইমটি হচ্ছে P_L। এবারে আমরা একটা সংখ্যা P_N তৈরি করতে পারি যেটা সবগুলো প্রাইম সংখ্যার গুণফলের স্যাথে 1 যোগ করে তৈরি করা হবে; অর্থাৎ $P_N = 1\times3\times5\times7\times11\times13 \ldots\ldots P_L+1$

এই সংখ্যাটিকে কোনো সংখ্যা দিয়েই নিঃশেষে ভাগ করা যাবে না সবসময়েই একটা ভাগশেষ থাকবে। 1 ছাড়া একমাত্র যে সংখ্যাটি দিয়ে এটাকে ভাগ করা যাবে সেটা হচ্ছে P_N সংখ্যাটি। কিন্তু আমরা জানি, যে সংখ্যাকে (1 ছাড়া) শুধুমাত্র সেই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় সেটাকে বলে প্রাইম। কাজেই P_N হচ্ছে একটা প্রাইম এবং অবশ্যই সেটা সবচে' বড় প্রাইম P_L থেকেও বড়। যার অর্থ সবচে' বড় একটা প্রাইম থাকলেও তার থেকে আরো বড় প্রাইম তৈরি করে ফেলা যায় এবং এই প্রক্রিয়াটি কখনোই থেমে যাবে না। সোজা কথায় প্রাইমের কোনো শেষ নেই; এর সংখ্যা অসীম।

যদিও অসীম সংখ্যক প্রাইম সংখ্যা রয়েছে আমরা এর মাঝে দেখেছি যত বড় সংখ্যার কাছাকাছি যাওয়া যায় তাদের সংখ্যা কমে আসতে থাকে। গণিতবিদ গাউস তার ছেলেবেলায় এটা লক্ষ করে কোন সংখ্যার কাছাকাছি কতগুলো প্রাইম সংখ্যা থাকে সেটা অনুমান করেছিলেন। তার সেই অনুমান (Conjecture) টি শেষ পর্যন্ত প্রমাণিত হয়েছে ১৮৯৬ সালে এবং এটাকে বলা হয় প্রাইম নাম্বার থিওরেম। থিওরেমটি এরকম, x-এর কাছাকাছি দুটো প্রাইম সংখ্যার মাঝখানে $\log_e x$ সংখ্যক কম্পোজিট সংখ্যা থাকে। ($\log_e x$ হচ্ছে $2.302585\times\log_{10}x$) অর্থাৎ 100-এর কাছাকাছি গেলে দুটো প্রাইম সংখ্যার ভেতরে 4.6 সংখ্যক কম্পোজিট সংখ্যা থাকবে। অর্থাৎ আনুমানিক পাঁচটির মতো কম্পোজিট সংখ্যা হবে। 1000-এর কাছাকাছি গেলে দুটো প্রাইম সংখ্যার মাঝখানে আনুমানিক 7টি করে কম্পোজিট সংখ্যা থাকবে, 10,000-এর কাছাকাছি দুটি প্রাইম সংখ্যার ভেতরে কম্পোজিট সংখ্যা থাকবে আনুমানিক 9টি ইত্যাদি। x যত বড় হতে থাকবে এই থিওরেমটি তত নিখুঁত হতে

থাকবে। এই থিওরেমটি একটি অভাবনীয় থিওরেম কারণ এখানে প্রাইম নাম্বারের সাথে ন্যাচারাল লগারিদম $(\log_e x)$-এর একটা যোগসূত্র খুঁজে পাওয়া যাচ্ছে যদিও আপাত দৃষ্টিতে মনে হয় দুটোর ভেতরে বুঝি কোনো সম্পর্কই নেই! গণিতবিদ গাউসের কিশোর বয়সের (তখন তার বয়স মাত্র 14 বৎসর) এই পর্যবেক্ষণটি প্রমাণ করতে পৃথিবীর বাঘা বাঘা গণিতবিদদের প্রায় এক'শ বৎসর লেগেছিল। প্রাইম সংখ্যা নিয়ে সেই ইউক্লিডের সময় থেকে এখন পর্যন্ত অসংখ্য গণিতবিদ অসংখ্য থিওরেম দাঁড়া করিয়েছেন কিন্তু শুধু এই থিওরেমটিকেই বলে প্রাইম নাম্বার থিওরেম! (থিওরেমটি আক্ষরিকভাবে এভাবে লেখা হয়— বড় x-এর জন্যে $\pi(x)/x \approx 1/\log_e x$ যেখানে $\pi(x)$ হচ্ছে x-এর ভেতরে পাওয়া সবগুলো প্রাইমের সংখ্যা, অর্থাৎ $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$ ইত্যাদি) এখানে একটা জিনিস কিন্তু লক্ষ করার মতো— কোথাও কতগুলো প্রাইম পাওয়া যেতে পারে প্রাইম নাম্বার থিওরেম তার একটা ধারণা দেয় কিন্তু সত্যি সত্যি কোথায় হঠাৎ করে একটা প্রাইম সংখ্যা বের হয়ে আসবে সেটি নিয়ে কিন্তু কেউ কোনো ধারণা দিতে পারে না। সেটি একটি রহস্যের মতো এবং মাঝে মাঝেই হঠাৎ করে নতুন একটি প্রাইম সংখ্যা বের হয়ে এখনো সবাইকে চমকে দিচ্ছে।

প্রাইম সংখ্যার কোনো ফরমুলা নেই কিন্তু মাঝে মাঝেই কিন্তু মজার মজার প্যাটার্ন দেখা যায়। যেমন 31 একটি প্রাইম সংখ্যা, 331 একটি প্রাইম সংখ্যা, 3331-ও একটি প্রাইম সংখ্যা! আমি নিশ্চিত তোমরা উত্তেজিত হয়ে পরের সংখ্যাগুলোও পরীক্ষা করে দেখতে চাইবে! যদি পরীক্ষা করে দেখা যায় তাহলে দেখা যাবে 3,3331, 333331, 3333331, 33333331 পর্যন্ত প্রত্যেকটিই প্রাইম। আমি নিশ্চিত অনেকেই তখন কৌতূহলী হয়ে উঠবে, কিন্তু কৌতূহল ফুটানো বেলুনের মতো চুপসে যায় যখন দেখা যায় 333333331 সংখ্যাটি প্রাইম নয় (এটি হচ্ছে $17 \times 19\ 607\ 843$)। এভাবে অনেকেই ফরমুলা বের করার চেষ্টা করেছে যেটা দিয়ে প্রাইম সংখ্যা তৈরি করা যায়। x^2+x+17 ব্যবহার করলে $x = 0$ থেকে 17 পর্যন্ত প্রত্যেকটি প্রাইম, x^2+x+41-এর মাঝে $x = 0$ থেকে 40 পর্যন্ত প্রত্যেকটি প্রাইম (দুই নম্বর ছবি) এসব দেখে অনেকে হয়তো উৎসাহিত হয়ে ভাবতে পারে যে এরকম একটি পলিনমিয়াল ধরনের সূত্র তৈরি করবে যার প্রত্যেকটিই হবে প্রাইম। কিন্তু সেই আশায় গুড়ে বালি! কারণ এর মাঝে প্রমাণ করা হয়ে গেছে যে এরকম কোনো সূত্র তৈরি করা যাবে না, কাজেই কেউ যেন কাগজ কলম নিয়ে বসে না যায়!

প্রাইম সংখ্যাগুলোর মাঝে আরেকটু বিচিত্র প্রজাতির নাম হচ্ছে টুইন প্রাইম (বাংলায় বলা যায় জমজ প্রাইম) যেখানে দুটো প্রাইমের ভেতর পার্থক্য হচ্ছে 2; তার উদাহরণ হচ্ছে 5 এবং 7, 11 এবং 13, 41 এবং 43, 179 এবং 181, 209 এবং 211, 267 এবং 269 ইত্যাদি। প্রাইম নাম্বারের তালিকা ধরে যেতে থাকলেই মাঝে মাঝে এদের পাওয়া যায় কিন্তু এখনো কেউ প্রমাণ করতে পারে নি এদের সংখ্যা অসীম— কাজেই যারা পৃথিবীর ইতিহাসে নিজের নাম অক্ষয় রাখতে চাও তারা প্রমাণ করার চেষ্টা করে দেখতে পার! আমরা দেখেছি দুটি প্রাইমের ভেতরে কম্পোজিট সংখ্যা রয়েছে $\log_e x$ সংখ্যক, সেভাবে অনুমান করা হয় দুই জোড়া টুইন প্রাইমের মাঝখানে কম্পোজিট সংখ্যা রয়েছে $\log_e x$-এর বর্গের সমান। এখনো অবশ্যি কেউ সেটা প্রমাণ করতে পারে নি!

প্রাইম সংখ্যার ব্যাপারটিকে শুধু একটি মজার ব্যাপার, তার কোনো ব্যবহারিক গুরুত্ব নেই তা কিন্তু নয়। রসায়ন (Chemistry) পড়ার সময় আমরা দেখেছি পৃথিবীর যত যৌগিক পদার্থ আছে তার সবগুলো তৈরি হয় গুটি কতক মৌলিক পদার্থ দিয়ে। যেমন পানির অণু তৈরি হয় দুটি হাইড্রোজেনের সাথে একটি অক্সিজেনের পরমাণু দিয়ে। এখানে পানি হচ্ছে যৌগিক (Compound) পদার্থ আর হাইড্রোজেন এবং অক্সিজেন হচ্ছে মৌলিক (element) পদার্থ। সংখ্যার বেলাতেও ঠিক হুবহু এরকম একটি ব্যাপার ঘটে, যে কোনো সংখ্যাকে আসলে নির্দিষ্ট (unique) কিছু প্রাইম সংখ্যার গুণফল হিসেবে লেখা যায়। যেমন—

$$20 = 2^2 \times 5$$
$$42 = 2 \times 3 \times 7$$
$$50 = 2 \times 5^2$$
$$64 = 2^6$$

ইত্যাদি। এখানে 20 তৈরি হয়েছে 2 এবং 5 এই দুটি প্রাইম সংখ্যা দিয়ে যেখানে 2 ব্যবহার হয়েছে দুইবার 5 একবার। সেরকম 42 তৈরি হয়েছে 2, 3 এবং 7 এই তিনটি প্রাইম সংখ্যা দিয়ে যেখানে প্রত্যেকটি একবার করে ব্যবহার হয়েছে। 20-এর মতো 50 সংখ্যাটিও তৈরি হয়ে 2 এবং 5 দিয়ে তবে এখানে 2 ব্যবহার হয়েছে একবার 5 ব্যবহার হয়েছে দুইবার। 64-এর বেলায় শুধু 2 ব্যবহার হয়েছে, কিন্তু সেটি ছয়বার ব্যবহার করতে হয়েছে। তোমরা এভাবে যে-কোনো সংখ্যা নিয়ে চেষ্টা করে দেখতে পার সেটাকে কিছু প্রাইম সংখ্যার গুণফল হিসেবে লিখতে পারবে এবং শুধু একভাবেই লিখতে পারবে। অর্থাৎ তুমি যতই

চেষ্টা কর 20-কে 2 এবং 5 ছাড়া অন্য কোনো প্রাইম সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করতে পারবে না।

একবার আমরা এই পদ্ধতিটি জেনে গেলে সেটা দিয়ে চট করে ল.সা.গু (lcm) এবং গ.সা.গু (gcd) বের করে ফেলতে পারব। ধরা যাক আমাদের N_A এবং N_B এরকম দুটো সংখ্যা দেয়া হয়েছে যেটাকে আমরা প্রাইম সংখ্যায় গুণফল হিসেবে লিখে ফেলেছি। অর্থাৎ—

$$N_A = P_1^{a_1} \times P_2^{a_2} \times P_3^{a_3} \ldots\ldots\ldots P_n^{a_n}$$

$$N_B = P_1^{b_1} \times P_2^{b_2} \times P_3^{a_3} \ldots\ldots\ldots P_n^{b_n}$$

যেখানে P_1, P_2, P_3 .... P_n হচ্ছে কিছু প্রাইম সংখ্যা এবং a_1, a_2, a_3 বা b_1, b_2, b_3 হচ্ছে তাদের পাওয়ার। দুটো সংখ্যাতেই যে একই প্রাইম থাকবে তা নয়, যেটি নেই ধরে নিতে হবে তার পাওয়ার হচ্ছে শূন্য। যে রকম আমাদের আগের উদাহরণ ব্যবহার করে লিখতে পারি।

$$42 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$$

$$50 = 2^1 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^0$$

এবারে যদি N_A এবং N_B এর lcm বা gcd বের করতে হয় তাহলে সেটি হবে—

$$\text{lcd } (N_A, N_B) = P_1^{c_1} \times P_2^{c_2} \times P_3^{c_3} \ldots\ldots P_n^{c_n}$$

$$\text{gcd } (N_A, N_B) = P_1^{d_1} \times P_2^{d_2} \times P_3^{d_3} \ldots\ldots P_n^{d_n}$$

যেখানে c_1 হচ্ছে a_1 এবং b_1 এর ভেতরে যেটি বড় সেটি। d_1 হচ্ছে a_1 এবং b_1এর ভেতরে যেটি ছোট সেটি। অর্থাৎ

$$c_k = \text{maximum of } (a_k, b_k)$$

$$d_k = \text{Minimum of } (a_k, b_k)$$

কাজেই আমরা 42 এবং 50-এর উদাহরণ বের করে লিখতে পারি।

$$\text{lcd } (42, 50) = 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 = 1050$$

$$\text{gcd } (42, 50) = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 = 2$$

প্রাইম সংখ্যাকে সব ধরনের সংখ্যার মূল হিসেবে (building block) ধরে নেয়া সংক্রান্ত আরো কিছু গুরুত্বপূর্ণ অনুমান রয়েছে। যেমন গোল্ডবাক (Goldbach)-এর অনুমান হচ্ছে 2-এর উপর সকল জোড় সংখ্যাকে দুটি প্রাইমের যোগ হিসেবে লেখা যায়। যেমন 8 = 3+5 কিংবা 32 = 13+19, আজকাল কম্পিউটার থাকার কারণে অনেক বড় বড় সংখ্যাকেও পরীক্ষা করে

দেখা যায় এবং এখনো তার ব্যতিক্রম পাওয়া যায় নি। কিন্তু গণিতবিদরা তাতে সন্তুষ্ট নন। তারা যুক্তিতর্ক দিয়ে ব্যাপারটি প্রমাণ করতে চান, এখনো এই অনুমানটি (Conjecture) প্রমাণিত হয় নি। তবে এটিকে 'প্রায়' প্রমাণ হয়ে গেছে বলে আশা প্রকাশ করা হয়।

প্রাইম সংখ্যাকে সব ধরনের সংখ্যায় মূল হিসেবে প্রকাশ করা যায় বলে অনেকেই ধারণা করেন যে হয়তো গণিতের নানা ধরনের সূত্রে এগুলো বারবার উঠে আসবে, গাণিতিক হিসেব-নিকেশের সময় হয়তো প্রাইম নাম্বার ব্যবহার করেই পুরো প্রক্রিয়াটি সহজভাবে করা যাবে, কিন্তু এখনো সেই ধারণাটি প্রমাণিত হয় নি। মনে হয় রহস্যময় প্রাইম সংখ্যা রহস্যের আড়ালে লুকিয়ে থাকতেই বেশি পছন্দ করে।

বহুদিন থেকে বড় প্রাইম বের করার একটা প্রতিযোগিতা চলছে এবং কাজটি খুব সহজ নয়! সবচে' বড় প্রাইম সংখ্যাগুলো একটা বিশেষ ধরনের প্রাইম যেটাকে মার্জেন (Mersenne) প্রাইম বলে। এই প্রাইমগুলোকে $2^P - 1$ হিসেবে লেখা যায় যেখানে P হচ্ছে একটা প্রাইম। P যখন 2, 3, 5 কিংবা 7 তখন সেগুলো যে প্রাইম সেটা খুব সহজেই প্রমাণ করা যায়। যেমন—

$2^2 - 1 = 3$

$2^3 - 1 = 7$

$2^5 - 1 = 31$

$2^7 - 1 = 127$

এর পরের প্রাইম হচ্ছে 11 কিন্তু $2^{11} - 1$ প্রাইম সংখ্যা নয়।

$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$

কাজেই P প্রাইম হলেই যে $2^P - 1$ প্রাইম হবে তার কোনো গ্যারান্টি নেই, সেটা পরীক্ষা করে দেখতে হবে। $2^P - 1$ বা মার্জেন প্রাইম পরীক্ষা করার একটা খুব চমৎকার নিয়ম আছে। নিয়মটা হচ্ছে—

$S(P-1) - 2$ কে যদি $2^P - 1$ দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায় তাহলে $2^P - 1$ হচ্ছে প্রাইম। এখানে S(n) বলতে আমরা বোঝাই :

$S(n) = (S(n-1) - 2) \text{ Mod } (2^P - 1)$ এবং $S(1) = 4$

যারা Mod ব্যাপারটি জানে না তাদের জন্যে বলে দেয়া যায়। A Mod B হচ্ছে A কে B দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ হয় সেই সংখ্যাটি।

কারো কাছে যদি পুরো ব্যাপারটি একটু কটমটে মনে হয় তাহলে এই উদাহরণটি দেখলেই সেটা পরিষ্কার হয়ে যাবে। যেমন P যদি 5 হয় তাহলে $2^P - 1 = 2^5 - 1 = 31$ এবং

$S(1) = 4$

$S(2) = (4^2 - 2) \text{ Mod } 31 = 14$

$S(3) = (14^2 - 2) \text{ Mod } 31 = 8$

$S(4) = (8^2 - 2) \text{ Mod } 31 = 0$

যেহেতু S(4)-কে $2^5 - 1$ দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায় কাজেই $2^5 - 1$ একটি মার্জেন প্রাইম।

এই পদ্ধতি ব্যবহার করে আজকাল কম্পিউটার দিয়ে বিশাল বিশাল প্রাইম নাম্বার বের করা হচ্ছে। এখন পর্যন্ত যতগুলো মার্জেন প্রাইম বের হয়েছে তিন নম্বর ছবিতে তার একটা তালিকা দেয়া হলো। দেখতেই পাচ্ছ সবচে' বড় প্রাইম নাম্বারগুলো বের করেছে GIMP প্রজেক্ট দিয়ে। GIMP হচ্ছে Great Internet Mersenne Prime Search-এর আদ্যক্ষর দিয়ে তৈরি একটা শব্দ। ফ্লোরিডায় জর্জ ওল্টম্যান নামে একজন কম্পিউটার বিজ্ঞানী ইন্টারনেটে সারা পৃথিবীর অসংখ্য কম্পিউটার ব্যবহার করে এই প্রাইমগুলো খুঁজে বের করেন। পৃথিবীর যে কেউ এই কাজে যোগ দিয়ে গণিতের একটা গুরুত্বপূর্ণ গবেষণায় অংশ নিতে পারে এবং অসংখ্য মানুষ মিলে নতুন কিছু বের করার এটি চমৎকার একটি সুযোগ।

প্রাইম সংখ্যা নিয়ে রহস্যের কোনো শেষ নেই। আমরা সম্ভবত এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র একটা অংশ নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি। সে কারণে সংখ্যাতত্ত্ব নিয়ে যারা মাথা ঘামান তারা বলে থাকেন এই পুরো ব্যাপারটা বুঝি সৃষ্টির ব্যাখ্যায় অতীত কোনো একটি রহস্য!

দুই শ' মজার সমস্যা

201. চিড়ে চ্যাপ্টা

একটা কোল্ডড্রিংকের ক্যান ট্রাকের চাকার নিচে চাপা পড়ে চিপশে গেছে। চাকার চাপে উপরের এবং নিচের অংশ খুলে বের হয়ে গেছে। বাকিটুকু হয়েছে 4×6 একটি আয়তক্ষেত্র। কোল্ডড্রিংকের ক্যানে কতটুকু ড্রিংক ছিল?

202. মাপামাপি

তোমার দুটি কাচের জারের একটিতে 5 লিটার অন্যটিতে 3 লিটার পানি আছে। এই দুটি জার ব্যবহার করে ঠিক 4 লিটার পানি কেমন করে মাপবে?

203. চা কাফ না অন্য কিছু ?

তিনটি কাপ, একটির রঙ সাদা, অন্যটি কালো এবং বাকিটি লাল। কী আছে জানা নেই। শুধু জানা আছে।

(ক) সাদা কাপের বাম দিকে কালো কাপ।

(খ) যেখানে কফি তার বাম পাশে আছে চা।

(গ) চকলেট ড্রিংকের ডান পাশে লাল কাপ।

(ঘ) লাল কাপের ডান পাশে আছে কফি।

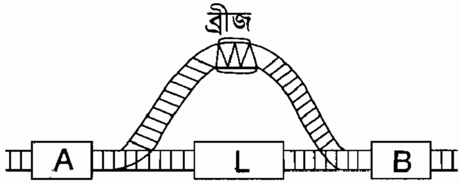
কোন কাপে কী এবং কীভাবে সাজানো?

204. $g(x) = x^2-5x-1$, $f(x) = \sqrt{3x}$ তাহলে $g(f(12)) = ?$

205. ম্যাচকাঠির মজা

ছয়টি ম্যাচের কাঠি নাও তার মাঝে দুটি ম্যাচকাঠির ঠিক মাঝখানে ভেঙে চার টুকরো করে নাও। এখন চারটি ম্যাচকাঠি আর চারটি অর্ধেক ম্যাচকাঠি দিয়ে তিনটি পাশাপাশি সমান আকারের বর্গক্ষেত্র তৈরি করতে হবে।

206. ট্রেন এবং দুর্বল ব্রীজ



A আর B হচ্ছে দুটো ট্রেনের বগি এবং L হচ্ছে ইঞ্জিন। ছবিতে দেখতে পাচ্ছ একটি রেল লাইনের পাশে রয়েছে একটা ব্রীজ। ব্রীজটা দুর্বল। ট্রেনের বগি সেখানে রাখা যায় কিন্তু ইঞ্জিনটা উঠতে পারে না। এবারে ইঞ্জিনটা ব্যবহার করে A আর B একের সাথে অন্যের স্থান পরিবর্তন করতে হবে।

207. ম্যাজিশিয়ান

তোমার বন্ধু নতুন ম্যাজিক দেখানো শুরু করেছে। সে একটি ছেলেকে মনে মনে একটা সংখ্যা ধরতে বলল। তারপর বলল তার সাথে 15 যোগ করতে। যোগফলকে 3 দিয়ে গুণ করতে বলল। গুণফল থেকে 9 বিয়োগ করে তাকে 3 দিয়ে ভাগ করতে বলল। ভাগফল থেকে 12 4 বিয়োগ করে সে সংখ্যাটি জানতে চাইলো। ছেলেটি বলল সংখ্যাটি হচ্ছে 32, তখন তোমার বন্ধু নানা রকম অঙ্গভঙ্গি করে বলল সে ম্যাজিক করে তার মনে মনে ধরা সংখ্যাটি বলে দেবে। তুমি বললে, এটা আর এমন কী ? আমিও বলে দিতে পারি। তুমি সংখ্যাটি বলে দিলে। সংখ্যাটি কত ?

208. ঝামেলার ত্রিভুজ

তোমাকে এমন ত্রিভুজ তৈরি করতে হবে যার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা (অর্থাৎ একটি বাহু 2 হলে অন্য দুটি 3 এবং 4 এবং যাদের একটি কোণ অপর একটি কোণের দ্বিগুণ। এভাবে যতগুলো ত্রিভুজ তৈরি করা সম্ভব সেগুলো কী ?

209. তিন ক্লাসে তিনজন

নাসা, নাফি এবং নাহিদ একটা গোল টেবিলে বসেছে। এদের মাঝে একজন পড়ে সপ্তম শ্রেণীতে, একজন অষ্টম শ্রেণীতে অন্যজন নবম শ্রেণীতে।

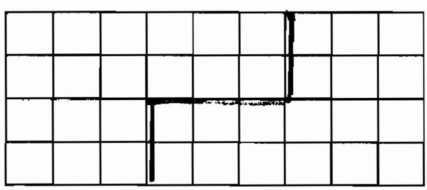
মিলি : আমি অংকে পাস করলে অনুও অংকে পাস করেছে। অনু ইতিহাসে পাস করে নি।

সানি : হয় অনু ইতিহাসে পাস করেছে না হয় আমি ইতিহাসে ফেল করেছি। যদি মিলি ইংরেজিতে পাস না করে থাকে তাহলে অনুও ইংরেজিতে পাস করে নি।

আব্বা-আম্মা মাথামুণ্ডু কিছু বুঝতে না পেরে স্কুলে খোঁজ নিয়ে জানলেন সবাই অন্তত ১ বিষয়ে পাস করেছে এবং সানি অন্য দুজনের সমান সংখ্যক বিষয়ে পাস করে নি। তুমি কি অনু, মিলি আর সানির আব্বা-আম্মাকে জানাতে পারবে কে কীসে পাস করছে ?

216. আয়তক্ষেত্র থেকে বর্গক্ষেত্র

ছবিতে দেখানো 4×9 আয়তক্ষেত্রটিকে দুটি একই রকম অংশে ভাগ কর যেন তাদেরকে জুড়ে দিলে একটি নিখুঁত বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়।

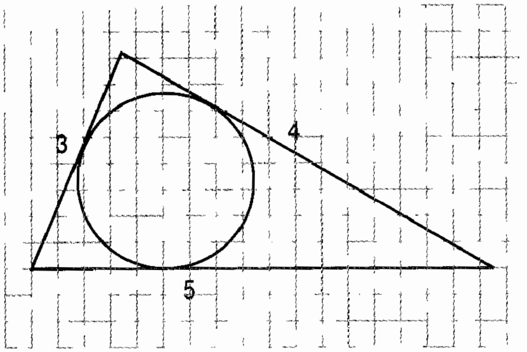


ক. $\dfrac{\ldots}{1 + a + a^2 + \ldots. a^n}$

খ. $\dfrac{1 + b + b^2 + \ldots. b^{n-1}}{1 + b + b^2 + \ldots. b^n}$

212. ত্রিভুজের ভেতর বৃত্ত

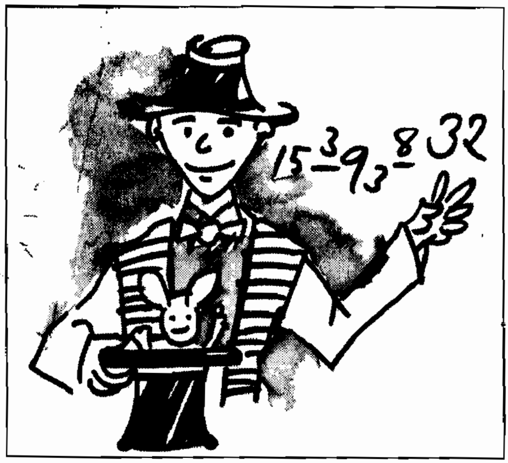
ছবিতে দেখানো ত্রিভুজের ভেতরে আঁকা বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?



213. কত বড় সংখ্যা

...না কিন্তু হাঞ্জনটা ... এবারে হাঞ্জনটা ব্যবহার করে A আর B একের সাথে অন্যের স্থান পরিবর্তন করতে হবে।

207. ম্যাজিশিয়ান



তোমার বন্ধু নতুন ম্যাজিক দেখানো শুরু করেছে। সে একটি ছেলেকে মনে মনে একটা সংখ্যা ধরতে বলল। তারপর বলল তার সাথে 15 যোগ করতে। যোগফলকে 3 দিয়ে গুণ করতে বলল। গুণফল থেকে 9 বিয়োগ করে তাকে 3 দিয়ে ভাগ করতে বলল। ভাগফল থেকে 8 বিয়োগ করে সে সংখ্যাটি জানতে চাইলো। ছেলেটি বলল সংখ্যাটি হচ্ছে 32, তখন তোমার বন্ধু নানা রকম অঙ্গভঙ্গি করে বলল সে ম্যাজিক করে তার মনে মনে ধরা সংখ্যাটি বলে দেবে। তুমি বললে, এটা আর এমন কী ? আমিও বলে দিতে পারি। তুমি সংখ্যাটি বলে দিলে। সংখ্যাটি কত ?

208. ঝামেলার ত্রিভুজ

তোমাকে এমন ত্রিভুজ তৈরি করতে ...

এখন নিচের সংখ্যাটি কথায় কত বল দেখি :

6,001, 003,007, 002, 002, 004, 005, 009, 008, 008, 009, 005, 004, 003, 007, 003, 001, 003, 007, 005, 002

214. ভাগশেষ কত ?

$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ কে $x-1$ দিয়ে ভাগ করলে কত অবশিষ্ট থাকবে ?

215. পরীক্ষার ফল

তিন ভাই বোন পরীক্ষার ফল তাদের আব্বা আম্মার কাছে সোজাসুজি না বলে একটু ঘুরিয়ে বলল। তাদের বক্তব্য ছিল এরকম—

অনু : আমি যদি অংকে পাস করে থাকি তাহলে মিলিও পাস করেছে। সানি যদি ইংরেজিতে পাস করে থাকে তাহলে আমিও ইংরেজিতে পাস করেছি।

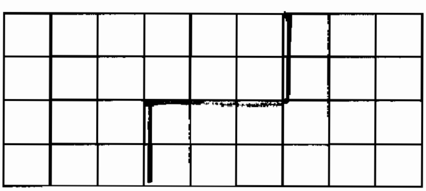
মিলি : আমি অংকে পাস করলে অনুও অংকে পাস করেছে। অনু ইতিহাসে পাস করে নি।

সানি : হয় অনু ইতিহাসে পাস করেছে না হয় আমি ইতিহাসে ফেল করেছি। যদি মিলি ইংরেজিতে পাস না করে থাকে তাহলে অনুও ইংরেজিতে পাস করে নি।

আব্বা-আম্মা মাথামুণ্ডু কিছু বুঝতে না পেরে স্কুলে খোঁজ নিয়ে জানলেন সবাই অন্তত ১ বিষয়ে পাস করেছে এবং সানি অন্য দুজনের সমান সংখ্যক বিষয়ে পাস করে নি। তুমি কি অনু, মিলি আর সানির আব্বা-আম্মাকে জানাতে পারবে কে কীসে পাস করছে ?

216. আয়তক্ষেত্র থেকে বর্গক্ষেত্র

ছবিতে দেখানো 4×9 আয়তক্ষেত্রটিকে দুটি একই রকম অংশে ভাগ কর যেন তাদেরকে জুড়ে দিলে একটি নিখুঁত বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়।



217. বড় ছোট

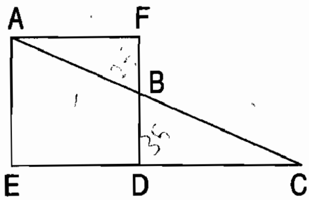
কোনটি বড় $\cos(\sin x)$ নাকি $\sin(\cos x)$?

218. ভাগশেষ কত ?

$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ কে x^2-1 দিয়ে ভাগ করলে কত অবশিষ্ট থাকবে ?

219. দৈর্ঘ্য কত ?

AEDF বর্গক্ষেত্রের পরিমাপ 60×60, AC-এর দৈর্ঘ্য হচ্ছে 156, BD-এর দৈর্ঘ্য কত ?



220. বাস্কেটবল

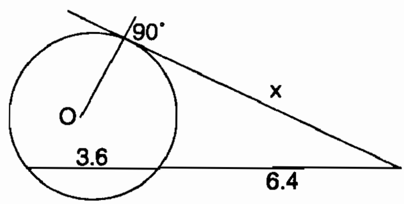
অনু, রফি, করিম, শফি এবং বশির বাস্কেটবল খেলে। এদের মাঝে দু'জন বাম হাতে খেলে এবং তিনজন খেলে ডান হাতে। দুইজন লম্বায় পাঁচ ফুটের বেশি তিনজন পাঁচ ফুটের কম। অনু আর করিম যে হাতে খেলে শফি আর বশির খেলে তার অন্যহাতে। রফি আর বশির উচ্চতার দিকে একরকম আবার করিম আর শফি অন্যরকম। যে সেন্টারে খেলে তার উচ্চতা পাঁচ ফুট থেকে বেশি এবং সে বাম হাতে খেলে। কে সেন্টারে খেলে ?

221. সত্যবাদী মিথ্যাবাদী

সেদিন তুমি তোমার মামার বাড়িতে বেড়াতে গিয়েছ। গিয়ে দেখ মজা করার জন্যে তোমার ভাইবোনেরা এক ধরনের দুষ্টুমি শুরু করেছে কেউ কেউ শুধু সত্যি কথা বলছে, কেউ কেউ শুধু মিথ্যে কথা বলছে! প্রথমেই তোমার দেখা হলো অনু, বিনু আর সানির সাথে তারা সিঁড়িতে পা দুলিয়ে বসে আচার খাচ্ছে। তুমি অনুকে জিজ্ঞেস করলে সে সত্যবাদী কী না। উত্তরে সে আচার খেতে খেতে কী বলল বুঝতে পারলে না। তুমি তখন বিনুকে জিজ্ঞেস করলে, 'অনু কী বলল ?' বিনু বলল, অনু বলেছে যে সে সত্যবাদী। সেটি শুনে সাথে সাথে সানি ঘাড় সোজা করে বলল, উঁহুঁ! বিনু মিথ্যা কথা বলছে! বলো দেখি সানি সত্যবাদী না মিথ্যাবাদী ? কেন ?

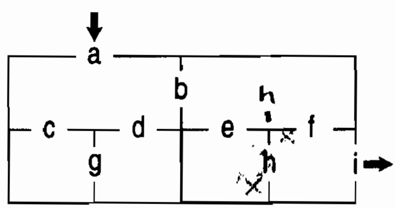
222. মান কত ?

পাশের ছবিতে O বৃত্তের কেন্দ্র, x-এর মান কত ?



223. আর্ট মিউজিয়াম

পাশের ছবিটি একটি আর্ট মিউজিয়ামের। এখানে ঢোকার দরজা হচ্ছে a এবং বের হবার দরজা হচ্ছে i। তুমি a দরজা দিয়ে ঢুকে প্রত্যেকটা দরজা মাত্র একবার ব্যবহার করে মিউজিয়ামের সবগুলো পেইন্টিং দেখে i দরজা দিয়ে বের হতে চাও। দরজাগুলো ক্রমানুসারে সাজাও কিংবা বলে দাও সম্ভব নয়।



224. গাড়ির বেগ

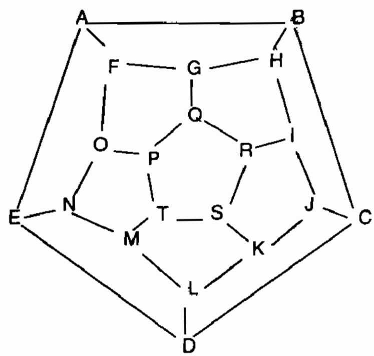
একটা গাড়ির বেগ প্রতি মিনিটে মাপা হচ্ছে এবং দেখা গেল সেগুলো এরকম 35, $34\frac{1}{7}$, $33\frac{2}{7}$, $32\frac{3}{7}$ ..... কত মিনিট পরে দেখা যাবে গাড়িটা যেখান থেকে রওনা দিয়েছে সেখানে ফিরে এসেছে!

225. ছেলে যুবক বৃদ্ধ

আফজাল সাহেব তার জীবনের এক চতুর্থাংশ ছেলে হিসেবে এক পঞ্চমাংশ যুবক হিসেবে, এক তৃতীয়াংশ পরিণত মানুষ হিসেবে এবং 13 বছর বৃদ্ধ হিসেবে বাস করেছেন। আফজাল সাহেবের বয়স কত ?

226. A থেকে A

পাশের ছবিতে A থেকে শুরু করে প্রত্যেকটা বিন্দু একবার স্পর্শ করে আবার A বিন্দুতে কি ফিরে আসা সম্ভব ? যদি সম্ভব হয় তাহলে কোন বিন্দুর পর কোন বিন্দু সাজিয়ে দাও।

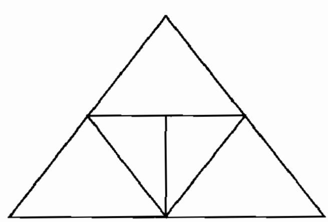


227 বয়স

বীনা, মনি এবং শায়লার জন্মদিন একই দিনে। এখন বীনার বয়স মনি আর শায়লার বয়সের যোগফল থেকে 2 কম। আজ থেকে 5 বছর পর বীনার বয়স মনির তখনকার বয়সের দ্বিগুণ হবে। 2 বছর আগে মনির বয়স শায়লার বয়সের অর্ধেক ছিল। কার বয়স কত ?

228. ত্রিভুজকে ভাগাভাগি

পাশের ছবিতে একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজকে পাঁচটি ত্রিভুজে ভাগে ভাগ করা হয়েছে। এই পাঁচটি ত্রিভুজ ছোট বড় হলেও প্রত্যেকটিই সমকোণী এবং সমদ্বিবাহু। ত্রিভুজটি যদি সমকোণী না হয়ে 120° বিশিষ্ট (এবং সমদ্বিবাহু-অর্থাৎ অন্য দুটি কোণ 30°) হতো তাহলেও পাঁচটি একই রকম (Similar) ত্রিভুজে ভাগ করা যায়। কীভাবে দেখাতে পারবে ?



229. সাত সন্তান

একজন মানুষের চারটি ছেলে এবং তিনটি মেয়ে। সে ছবি তোলার জন্যে তাদেরকে একটি বেঞ্চে বসিয়েছে। চিন্তাভাবনা না করে বিক্ষিপ্ত (Random)-ভাবে যদি বসানো হয়। তাহলে দুই পাশে দুজন ছেলে বসার সম্ভাবনা কত ?

230. একটা গোলকের ব্যাসার্ধ

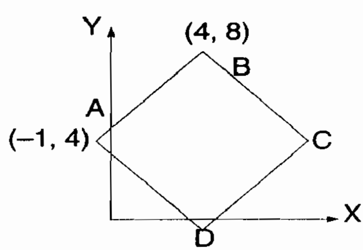
$r = 3\,(16\pi^2)^{\frac{1}{3}}/4\pi$ গোলকটির আয়তন (Volume) কত ?

231. পিঠা

ফারাহ তার জন্মদিনের পার্টির জন্যে 84টি পিঠা তৈরি করেছে। সে এমন সংখ্যক বন্ধুকে তার পার্টিতে নিমন্ত্রণ করতে চায় যেন সবগুলো পিঠা খাওয়া হয়ে যায়। যদি ফারাহ নিজে তার পিঠা না খায় এবং তার বন্ধুরা সবাই সমান সংখ্যক পিঠা খেতে চায় তাহলে ফারাহ সম্ভাবত কতজনকে নিমন্ত্রণ করতে পারে ? (ধরে নেয়া যাক পাকস্থলীর আকার আমাদের বিবেচ্য বিষয় নয়!)

232. বর্গক্ষেত্রের স্থানাংক

পাশের ছবিতে বর্গক্ষেত্রের C ও D বিন্দুর স্থানাংক (Coordinate) কত ?



233. মরুভূমির অভিযাত্রী

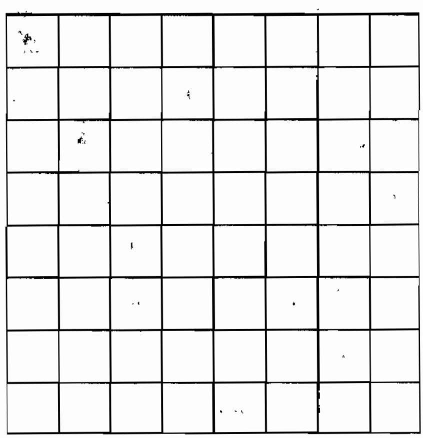
একটা মরুভূমি শুধুমাত্র পায়ে হেঁটে পার হওয়া সম্ভব এবং সেটা পার হতে ছয়দিন সময় নেয়। সেই মরুভূমির অভিযাত্রীরা সর্বোচ্চ চারদিনের খাবার এবং পানি নিয়ে যেতে পারেন। একজন দুঃসাহী অভিযাত্রী সবচে' কম কতজন সাহায্যকারী নিয়ে সেই মরুভূমি পার হতে পারবেন? (যদি একজন সাহায্যকারী নিয়ে রওনা দেন তাহলে দুইদিন পর দুজনের কাছেই দুদিনের খাবার এবং পানীয় থাকবে। অভিযাত্রী সাহায্যকারীর খাবার এবং পানীয় নিয়ে পরবর্তী চারদিনে অভিযান শেষ করতে পারবে— কিন্তু সাহায্যকারী মানুষটি খাবার এবং পানীয়ের অভাবে মারা পড়বে, এরকম অমানবিক সমাধান গ্রহণযোগ্য নয়।

234. জালাল সাহেবের জানালা

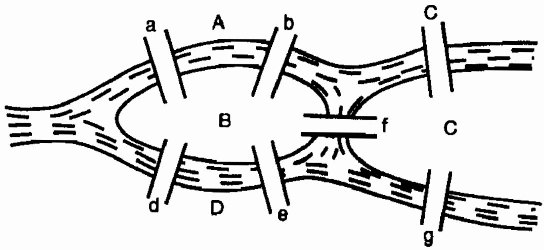
জালাল সাহেবের শোয়ার ঘরে এক বর্গ মিটারের একটা কাচের জানালা (উচ্চতা এক মিটার, চওড়ায় এক মিটার) ভোর বেলা জানালা দিয়ে এত আলো আসে যে তার ঘুম ভেঙে যায়। তাই তিনি একদিন জানালার অর্ধেক কাচ কালো রঙ করে দিলেন। তারপর তিনি অবাক হয়ে দেখলেন যে অংশটি রঙ করা হয় নি, সেটা এখনো বর্গাকৃতির। শুধু তাই নয় তিনি মেপে দেখলেন এখনো উপর থেকে নিচে এক মিটার এবং ডান থেকে বামে এক মিটার এটা কীভাবে সম্ভব?

235. অন্যরকম দাবা

দাবার বোর্ডে একটি মন্ত্রী থাকবে, ধরা যাক এই অন্যরকম দাবা খেলায় মন্ত্রী আটটি। এখন মন্ত্রীগুলো এমনভাবে বসাতে হবে যেন কোনো মন্ত্রী অন্য কোনো মন্ত্রীকে খেতে না পারে। (যারা দাবার বোর্ড ছাড়া এটি সমাধান করতে চায় তাদের পাশের বোর্ডে আটটি ঘরে আটটি নুড়ি পাথর বা অন্য কিছু এমনভাবে রাখবে যেন তার সোজাসুজি বা কোনাকোনি কিছু না থাকে।)



236. কনিগসবার্গের সেতু



কনিগসবার্গ (Konigsberg) শহরে সাতটি সেতু শহরের বিভিন্ন অংশকে (A, B, C, D) যুক্ত করেছে। তুমি যে কোনো একটা অংশ থেকে শুরু করে প্রত্যেকটা সেতু মাত্র একবার ব্যবহার করে আগের জায়গায় ফিরে আসতে চাও। তোমাকে কোন সেতুর পর কোন সেতু ব্যবহার করতে হবে? সম্ভব না হলে বলো সম্ভব নয়।

(১৭৩৫ সালে লিওনার্দ অয়লার এই সমস্যাটির সাথে পরিচিত হয়ে কালক্রমে গ্রাফ থিওরির গোড়াপত্তন করেন।)

237. x সমান কত ?

নিচের সমীকরণটি x-এর মান কত ?

$2^{2x+3}+2^{x+3} = 1+2^{x}$

238. মাঝামাঝি

তোমার কাছে দুটি কাঠের টুকরো, একটার দৈর্ঘ্য তিন মিটার অন্যটি আট মিটার। এই দুটি ব্যবহার করে আট মিটার লম্বা কাঠের টুকরোর ঠিক মাঝখানটুকু বের করতে পারবে ?

239. বর্গমূলের বর্গমূল

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ সমান কত ?

240. এক কম এক লাখ

1 থেকে 9 পর্যন্ত সবগুলো অংক একবার করে ব্যবহার করে এমন একটি যোগ কর যেন যোগফল হয় 99999.

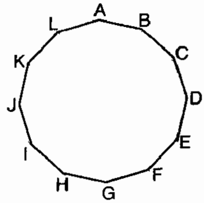
241. লগের মজা

নিচের সমীকরণে x-এর সম্ভাব্য মান কত ?

$\log_5 x = 4\log_x 5$

242. বারোভুজি

এই বারোভুজের (Dodecagon) এর কর্ণ (Diagonal) কতগুলো ?



243. ম্যাজিক বর্গ

তোমরা সবাই অনেকবার ম্যাজিক বর্গ দেখেছ যেখানে ম্যাজিকবর্গের অংকগুলো উপর থেকে নিচে কিংবা ডান থেকে বামে বা কোনাকোনি যোগ করলে সব সময় একই সংখ্যা পাওয়া যায়। পাশে একটি 3×3 ম্যাজিক বর্গ দেখানো হলো।

8	1	6
3	5	7
4	9	2

যদি এরকম 15×15 একটি ম্যাজিক বর্গ 1 থেকে 225 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো দিয়ে তৈরি করা হয় তাহলে সেই সংখ্যাগুলো উপর থেকে নিচে, ডান থেকে বামে কিংবা কোনাকোনি যোগ করলে ম্যাজিক যোগফলটি কী হবে ?

244. কতগুলো আঙুল ?

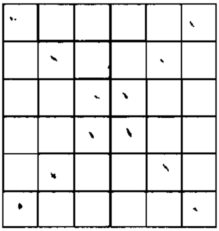
আমাদের দুই হাতে দশটি আঙুল বলে আমরা সম্ভবত দশভিত্তিক (Ten based) বা দশমিক সংখ্যা ব্যবহার করি। কোনো একটি ভিন গ্রহের অধিবাসীর আঙুলের সংখ্যা ভিন্ন বলে তাদের সংখ্যার ভিত্তি (base) ভিন্ন। আমাদের দশমিক পদ্ধতিতে লেখা সংখ্যা 255-কে এই ভিন গ্রহের অধিবাসীরা লিখে 143, তাদের দুই হাত মিলিয়ে আঙুল কয়টি ?

245. এক হাজার চাই

8 (Eight) অংকটিকে আটবার ব্যবহার করে এক হাজার তৈরি করতে হবে।

246. বারো গুটি

বারোটি গুটি এই ছকে সাজাও যেন কোনো লাইনেই (বাম থেকে ডানে কিংবা উপর থেকে নিচে) দুটির বেশি গুটি বসাতে না হয়।



247. ভগ্নাংশ

0.0027 + .000027 + 0.00000027 + ... কে ভগ্নাংশ হিসেবে লিখ।

248. মাপামাপি

তোমার ঠিক দশ আউন্স পানি দরকার কিন্তু তোমার কাছে যে দুটি পাত্র আছে তার একটি দিয়ে মাপা যায় 11 আউন্স অন্যটি দিয়ে 7 আউন্স। তুমি কী করবে?

249. দশ অংকের যোগ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এবং 9 এই দশটি অংকের সবগুলো অংক মাত্র একবার ব্যবহার করে পাশের যোগ অংকটি তৈরি করা হয়েছে। তুমি ঠিক এরকম আরো একটি যোগ অংক তৈরি করতে পারবে ?

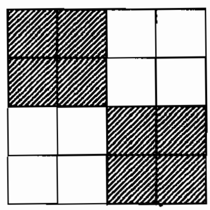
$$\begin{array}{r} 859 \\ 743 \\ \hline 1{,}602 \end{array}$$

250. স্থান বদল

ছয় অংকের এমন একটা সংখ্যা বের কর যেটাকে 6 দিয়ে গুণ করলে তার প্রথম তিনটি অংক পরের তিনটি অংকের সাথে স্থান বদল করবে। (অর্থাৎ সংখ্যাটি যদি হতো 123456 তাহলে 6 দিয়ে গুণ করা হলে সেটি হয়ে যাবে 456123)

251. চার ভাগে ভাগ

পাশের বর্গক্ষেত্রটি চারভাগে ভাগ করা হয়েছে এবং প্রত্যেকটি ভাগই দেখতে হুবহু এক রকম। এই 4×4 বর্গক্ষেত্রটি তিন রকমভাবে এরকম চারভাগে ভাগ করতে পারবে যেন প্রত্যেকটি টুকরোই দেখতে হুবহু একই রকম হয়।



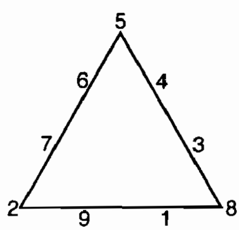
252. মান কত ?

পাশের বিয়োগ অংকে E-এর মান কত ?

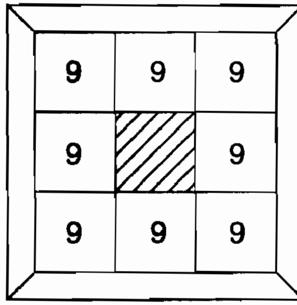
$$\begin{array}{r} ABCD \\ -EFG \\ \hline HI \end{array}$$

253. এক থেকে নয়

এক থেকে নয় অংকগুলো ত্রিভুজের চারপাশে এমনভাবে সাজানো হয়েছে যে ত্রিভুজের বাহু বরাবর চারটি সংখ্যা যোগ করলে আমরা পাই 20। এবারে 1 থেকে 9 সংখ্যাগুলো এমনভাবে সাজাও যেন যোগ করলে যোগফল হয় 21।



254. জেলখানা



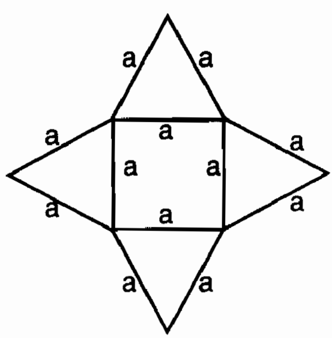
একটা জেলখানায় 72 জন আসামিকে আটটা কুঠুরীতে 9 জন করে ছবিতে দেখানো উপায়ে রাখা হয়েছে। জেলখানায় চারজন প্রহরী চারটা করিডোর পাহারা দেয়। যেহেতু কুঠুরীগুলোর মাঝে দরজা আছে এবং এক কুঠুরীর আসামি মাঝে মাঝে অন্য কুঠুরীতে থাকে তাই প্রহরী কোন কুঠুরীতে কতজন আছে সেটা নিয়ে মাথা না ঘামিয়ে তার দায়িত্বে থাকা তিনটি কুঠুরীতে সব মিলিয়ে $9 \times 3 = 27$ জন আসামি আছে কী না সেটা খেয়াল রাখে। আসামিরা এই তথ্যটি জেনে গিয়ে জেলখানা থেকে পালিয়ে যাবার পরিকল্পনা করল। তারা চারজন চারজন করে এমনভাবে পালিয়ে যেতে থাকল যে প্রহরীরা কখনোই সেটা জানতে পারল না। আসামিরা কীভাবে সেটা করেছিল এবং শেষ পর্যন্ত কোনো সন্দেহ উদ্রেক না করে কতজন আসামি পালিয়ে গিয়েছিল ?

255. একই অংক

ছয় অংকের এমন একটি সংখ্যা বের কর যেটাকে 2, 3, 4, 5 বা 6 দিয়ে গুণ করলে যে সংখ্যাগুলো তৈরি হয় সেখানে সেই অংকগুলোই থাকে— শুধুমাত্র স্থান বদল করে।

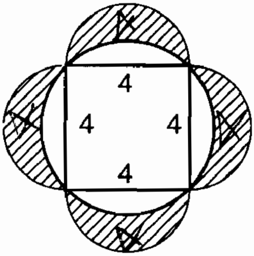
256. পিরামিড

পাশের ছবিতে দেখানো কার্ডবোর্ডের একটি নক্সা কেটে ভাঁজ করে একটা পিরামিড তৈরি করা হলে এই পিরামিডের আয়তন (Volume) কত হবে ? ধরে নেয়া যাক $a = 2\left(9/\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$



257. ক্ষেত্রফল

একটা বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 4, তাকে ঘিরে ছবির মতো করে বৃত্ত এবং অর্ধবৃত্ত আঁকা হয়েছে। এখানে অর্ধবৃত্তের দাগ দেয়া অংশের ক্ষেত্রফল কত ?



258. এটি খুব সোজা

এটি খুব সোজা বা This is very easy অংকটি একটি যোগ অংক যেখানে এক-একটি ইংরেজি অক্ষর 0 থেকে 9 পর্যন্ত দশটি অংকের যে কোনো নয়টিকে ব্যবহার করা হয়েছে। কোন অক্ষরের জন্যে কোন অংক ব্যবহার করা হলে এটি একটি শুদ্ধ যোগ অংক হবে ? (সব মিলিয়ে এর 12-টি সমাধান আছে এর যে কোনো একটি বের করলেই হবে।)

259. 15 ভিত্তিক সংখ্যা

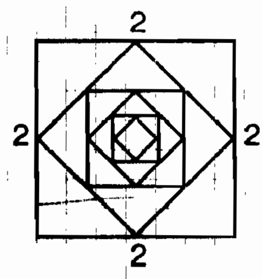
123456789 (10) (11) (12) (13) (14) একটি 15 ভিত্তিক (base) সংখ্যা (অর্থাৎ দশমিকে সংখ্যাটি হচ্ছে $14 + 13\times15 + 12 \times (15)^2 + 11\times(15)^3 + ... 2\times15^{12} + 15^{13}$ এই সংখ্যাটিকে 7 দিয়ে ভাগ করলে অবশিষ্ট কত থাকবে ?

260. বয়স এবং বয়স

মফিজের বয়স যখন জব্বারের বর্তমান বয়সের অর্ধেক ছিল তখন জব্বারের যে বয়স ছিল তার দ্বিগুণ বয়সে যখন মফিজ পৌঁছাবে তখন জব্বারের যে বয়স হবে, মফিজের বর্তমান বয়স তার অর্ধেক। 5 বছর পর মফিজ আর জব্বারের মোট বয়স হবে 100, এখন তাদের কার বয়স কত ?

261. বর্গক্ষেত্রের ভেতর বর্গক্ষেত্র

ছবিতে একটা বর্গক্ষেত্র দেখানো হয়েছে যার প্রত্যেকটা বাহুর দৈর্ঘ্য 2, এর মধ্যবিন্দুগুলো যোগ করে আরেকটা বর্গক্ষেত্র আঁকা হলো, তার মধ্যবিন্দুগুলো যোগ করে আরো একটা এভাবে যদি যতগুলো সম্ভব বর্গক্ষেত্র আঁকা হয় তাহলে সবগুলো বাহুর যোগফল কত ?



262. শেষ অংক

2^{5028} সংখ্যাটির শেষ অংক কত ?

263. পেটুক মানুষ

একজন পেটুক মানুষ পাঁচদিনে 100টি পিঠা খেয়ে ফেলেছে। শুধু তাই নয় খাওয়া শুরু করার পর প্রতিদিন আগের দিন থেকে 6টি করে বেশি পিঠা খেয়েছে। সে কোনদিন কয়টি পিঠা খেয়েছে ?

264. ভাগশেষ

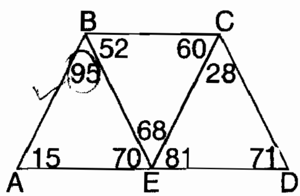
$10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+ \ldots . 10^{10^{10}}$ সংখ্যাটিকে 7 দিয়ে ভাগ করলে কত অবশিষ্ট থাকবে ?

265. বিবাহবার্ষিকী

ফারাহ আর ফেরদৌস তাদের প্রথম বিবাহ বার্ষিকী উদ্‌যাপন করার জন্যে কিছু টাকা নিয়ে বের হয়েছে। রাতের খাবারে তাদের টাকার তিন ভাগের এক ভাগ খরচ হয়ে গেল। তারপর তারা নাটক দেখতে গেল এবং তার টিকিট কিনতে খরচ হলো 98 টাকা। নাটক দেখে বের হয়ে ট্যাক্সি করে তারা শহরটা ঘুরে বেড়ালো তার জন্যে তাদের অবশিষ্ট টাকার চার ভাগের এক ভাগ ভাড়া দিতে হলো। তারপর তারা একটি নাচের অনুষ্ঠানে গেল যেখানে খরচ হলো 231 টাকা। তাদের বাকি টাকার অর্ধেক ট্যাক্সি ক্যাবের ভাড়া দিতে হলো। ক্যাব ড্রাইভারকে 10 টাকা বখশিশ দিয়ে তারা আবিষ্কার করল তাদের কাছে তখনো 41 টাকা রয়ে গেছে। তারা কত টাকা নিয়ে বের হয়েছিল ?

266. ছোট বাহু

পাশের ছবিতে সাতটি রেখা বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং তার ফলে তাদের ভেতরে তৈরি হওয়া কোণগুলোকে ডিগ্রিতে দেখানো হয়েছে। বলতে হবে কোন বাহুটি সবচে' ছোট। (ছবিটি ইচ্ছে করে ঠিক অনুপাতে আঁকা হয় নি।)



267. সমান কত ?

$11\frac{1}{4}+2\frac{13}{16}+\frac{45}{64}+\frac{45}{256}+ \ldots .$ সমান কত ?

268. চারটি বেজোড় সংখ্যা

পরপর এমন চারটি বেজোড় সংখ্যা বের কর যেগুলো যোগ করলে 80 (EIGHTY) হয়।

269. বড় ছোট

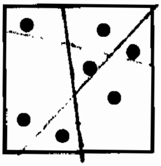
কোনটি বড় 100^{300} নাকি 300!

270. আবার বয়স

নাসেরের বয়স যখন সাদিবের বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন সাদিবের যে বয়স ছিল তার তিনগুণ করলে নাসেরের বর্তমান বয়স পাওয়া যায়। সাদিবের বয়স যখন নাসেরের বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন নাসেরের বয়স হবে 56. বর্তমানে কার বয়স কত ?

271. তিনটি রেখা

পাশের ছবিতে এমনভাবে তিনটি রেখা টান যেন সেই রেখাগুলো দিয়ে প্রত্যেকটা বিন্দুকে একটি থেকে অন্যটিকে আলাদা করে ফেলা যায়।



272. ছাগলের ব্যাপারী

দুজন ছাগলের ব্যাপারী ছাগল নিয়ে যাচ্ছে হাটে। একজন বলল, 'তুমি আমাকে একটি ছাগল দাও তাহলে দুজনেরই সমান সমান ছাগল হবে।' অন্যজন বলল, 'তার চেয়ে বরং তুমি আমাকে একটি ছাগল দাও তাহলে তোমার চাইতে আমার দ্বিগুণ ছাগল হয়ে যাবে।' কার কয়টি ছাগল ?

273. সিঁড়ি ভাঙা যোগ

মনে কর, x একটা পজিটিভ সংখ্যা যেটা এভাবে লেখা যায়—

$$x = 2+\cfrac{15}{2+\cfrac{15}{2+\cfrac{15\ldots}{2+\ldots}}}$$

তাহলে x-এর মান কত ?

274. ভাগশেষ

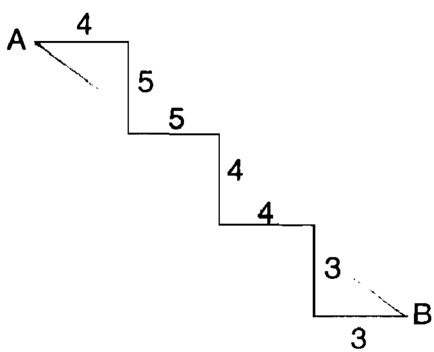
2^{999} কে 100 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ?

275. কন্যা ভক্ত বাবা

একজন মানুষের খুব কন্যা সন্তানের শখ। তার স্ত্রী যখন সন্তানসম্ভবা তখন সে অসুস্থ হয়ে পড়ল। সে তার উইলে লিখে গেল যে, তার মৃত্যুর পর যদি তার একজন কন্যা সন্তান জন্মায় তাহলে তার স্ত্রী পাবে সম্পত্তির $\frac{1}{3}$ এবং মেয়ে পাবে বাকি $\frac{2}{3}$ অংশ। যদি পুত্র সন্তান জন্মায় তাহলে হবে উল্টো, স্ত্রী পাবে $\frac{2}{3}$ এবং পুত্র পাবে $\frac{1}{3}$ অংশ। মানুষটির মৃত্যুর পর স্ত্রীর যমজ ছেলে এবং মেয়ে জন্মালো। এখন সম্পত্তিটি কীভাবে ভাগ করা হবে ?

276. সিঁড়ি

কোনো একজন ফাঁকিবাজ রাজমিস্ত্রি একটা বাসার সিঁড়ি তৈরি করতে গিয়ে ধাপগুলোর মাপ ঠিক রাখতে পারে নি, কোনোটা বড় কোনোটা ছোট হয়ে গেছে। এরকম অবস্থায় A থেকে B-এর মাঝে দূরত্ব কত ?



277. একশ চাই

9 8 7 6 5 4 3 2 1 এই অংকগুলোকে এভাবে রেখে তার মাঝখানে কয়েকটি যোগ এবং বিয়োগ চিহ্ন এমনভাবে বসাতে হবে যেন তার ফলাফল হয় 100. (যেমন $9 + 8 + 76 + 54 - 32 + 1 = 116$, এখানে চেষ্টা করা হয়েছে কিন্তু ঠিক 100 না হয়ে ফলাফল হয়েছে 116.)

278. দিন মজুরের জীবন

তজিম এবং দবির দিনমজুর, দিনের শেষে তারা তাদের সারাদিনের উপার্জন দিয়ে রুটি কিনে এনেছে। তমিজ কিনতে পেরেছে সাতটি রুটি, দবির কিনতে পেরেছে পাঁচটি রুটি। যখন তারা একটা গাছের নিতে খেতে বসেছে তখন মজিবর এসে হাজির, তার খুব খিদে পেয়েছে কিন্তু রুটি কেনার সময় নেই। মজিবর বলল, 'আমার সারাদিনের উপার্জন 21 টাকা আমি তোমাদের দিই, তোমরা তোমাদের রুটি থেকে কিছু খেতে দাও।' তজিম এবং দবির রাজি হলো— সবাই তখন ভাগাভাগি করে সমান পরিমাণ খেল এখন টাকাটা কেমন করে ভাগাভাগি হবে ?

279. কতগুলো অংক

2^{100} সংখ্যাটিকে দশমিকে প্রকাশ করলে সেটিতে কয়টি অংক থাকবে ?

280. 100 পাওয়া

1 থেকে 9 এই নয়টি অংক এবং একটি যোগ চিহ্ন ব্যবহার করে কি 100 পাওয়া সম্ভব ? (সাহায্য : $a\frac{b}{c} + d\frac{e}{f}$ এভাবে লিখার চেষ্টা কর।)

Goto List>

281. ষড়ভুজের ক্ষেত্রফল

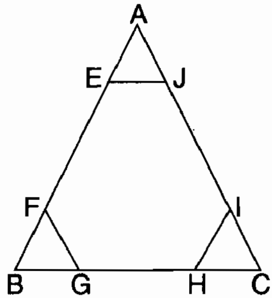
ABC ত্রিভুজের প্রত্যেকটা বাহুকে সমান তিনভাগে ভাগ করা হয়েছে।

অর্থাৎ AE = EF = FB

BG = GH = HC

CI = IJ = JA

যদি ত্রিভুজের তিনকোনার তিনটি ছোট ত্রিভুজের সম্মিলিত মোট ক্ষেত্রফল হয় 10 তাহলে মাঝখানের ষড়ভুজ EFGHIJ-এর ক্ষেত্রফল কত ?



282. টেনিস বল

16 ফুট উপর থেকে একটা টেনিস বল মেঝেতে ফেলে দেয়া হয়েছে। মেঝেতে ধাক্কা খেয়ে বলটা মূল উচ্চতার $\frac{3}{7}$ অংশ উঠতে পারে। এভাবে বেশ কয়েকবার ড্রপ খেয়ে শেষ পর্যন্ত বলটা থেমে গেছে। উপর থেকে নিচের দিকে বলটা মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে ?

283. সৌখিন মানুষ

14টি পাখি [illegible]

একজন সৌখিন মানুষ তার বাড়িতে একটা চিড়িয়াখানা তৈরি করে সেখানে নানারকম জন্তু-জানোয়ার এবং পাখি এনে রেখেছে। একদিন একজন এসে জিজ্ঞেস করল, 'আপনার চিড়িয়াখানায় পাখি কয়টি এবং পশু কয়টি ? 'সৌখিন মানুষটি মাথা চুলকে বলল, 'তা তো জানি না তবে একদিন গুনে দেখেছি 36টা মাথা আর 100টি পা!' তুমি বলতে পারবে তার কয়টি পাখি এবং কয়টি পশু ?

284. বর্গের যোগফল

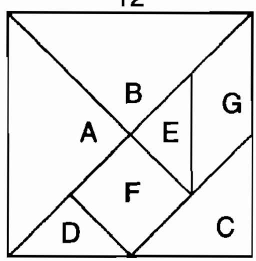
দুই অংকের কোনো ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে দুইভাবে দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যায় ?

285. এককের ঘর

2^{3^4} এর এককের অংকটি কী ?

286. ট্যানগ্রাম

তোমরা সবাই নিশ্চয়ই ট্যানগ্রামের কথা শুনেছ, দেখেছ এবং ব্যবহার করেছ। ট্যানগ্রাম মূল বর্গক্ষেত্রটিকে পাঁচটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (A, B, C, D এবং E), একটি বর্গক্ষেত্র (F) এবং একটি সামন্তরিকে (G) ভাগ করা হয়। মূল বর্গক্ষেত্রটির বাহু 12 হলে সামন্তরিক G-এর ক্ষেত্রফল কত?



287. x সমান কত ?

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = 15$ হলে x সমান কত?

288. যোগ বিয়োগ গুণ

6 5 7 4 3 = 26-এর ভিতরে যোগ বিয়োগ এবং গুণ চিহ্ন এমনভাবে বসাতে হবে যেন এটি একটি সঠিক অংক হয়। (যেমন $6\times5-7\times4+3 = 5$, একটা চেষ্টা কিন্তু উত্তর সঠিক 26 না হয়ে হয়েছে 5)

289. তিন কন্যা

শফিক সাহেবের তিন মেয়ে শান্তা, সোমা এবং রূপার একটি বিরক্তিকর অভ্যাস রয়েছে। যে কোনো প্রশ্ন উত্তর করলে দুজন শুদ্ধ উত্তর করে এবং একজন ভুল উত্তর করে। একবার তাদের জিজ্ঞেস করা হলো,

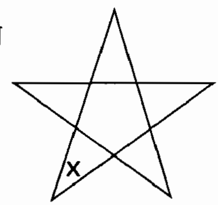
'তোমাদের মাঝে কার জন্ম আগে হয়েছে ? শান্তা উত্তর করল, 'সোমা প্রথমে জন্ম গ্রহণ করেছে। সোমা বলল, আমি সবচে' বড় নই। রূপা বলল, 'শান্তা সবচে' বড়।' কে সবচে' বড় ?

290. সংখ্যার মজা

দুই অংকের একটি সংখ্যাকে 2 দিয়ে গুণ করলে যা হয় সংখ্যাটির সাথে 2 যোগ করে বিপরীত ক্রম করলেও তাই হয়। সংখ্যাটি কত ?

291. পাঁচকোনা তারা

সম পাঁচকোনা তারা আঁকা হলে তার প্রতি কোনার মান কত ডিগ্রি— অর্থাৎ x সমান কত ?



292. সত্যবাদী মিথ্যাবাদী

কিছু টাকা চুরি গেছে এবং সন্দেহভাজন মানুষ চারজন। প্রথমজন বলল সে টাকা চুরি করে নি। দ্বিতীয়জন বলল প্রথমজন মিথ্যে কথা বলছে। তৃতীয়জন বলল, দ্বিতীয়জন মিথ্যা কথা বলছে। চতুর্থজন বলল, দ্বিতীয়জন টাকা চুরি করেছে। এই চারজনের মাঝে মাত্র একজন সত্যি কথা বলছে— তাহলে কে সত্য কথা বলছে ?

293. গুণের মজা

1,034, 482, 758, 620, 689, 655, 172, 413, 793 কে 3 দিয়ে গুণ করলে একটা মজার ব্যাপার হয়। সেটি কী ?

294. লাল কালো বল

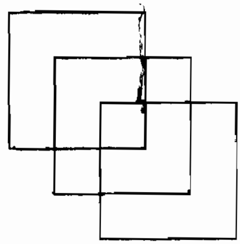
তিনটি লাল আর চারটি কালো বল কতভাবে একটি সরল রেখায় সাজানো যাবে ? (একটি লাল বলের সাথে অন্য লাল বলের এবং একটি কালো বলের সাথে অন্য কালো বলের কোনো পার্থক্য নেই।)

295. একক

$9^{9^{9}}$ এর এককের অংকটি কী ?

296. লুই ক্যারলের সমস্যা

এলিস ইন ওয়ান্ডারল্যান্ডের লেখক লুই ক্যারল একজন বিখ্যাত গণিতবিদ ছিলেন। এটি তার দেয়া সমস্যা। কলম না তুলে কি পাশের ছবিটি আঁকা সম্ভব ? যদি সম্ভব হয় তাহলে কীভাবে ?



297. বন্ধুদের মধ্যাহ্নভোজন

21 জন বন্ধু ঠিক করেছে তার একটি রেস্টুরেন্টে এক সাথে মধ্যাহ্নভোজন করবে কিন্তু দেখা গেল এই রেস্টুরেন্টটি এক সাথে পাঁচজনের বেশি বসতে দিতে পারে না। বন্ধুরা ঠিক করল তারা পাঁচজন পাঁচজন করেই প্রতি সপ্তাহে আসবে যতদিন না সবার সাথে সবার মধ্যাহ্নভোজন করা হয়। কত সপ্তাহে সবার সাথে সবার মধ্যাহ্নভোজন শেষ হবে ?

298. বয়স নিয়ে হিসেব

আজ থেকে দুই বছর আগে আমার যে বয়স ছিল সেটা হচ্ছে আজ থেকে ছয় বৎসর পরে আমার যে বয়স হবে তার অর্ধেক থেকে 8 (Eight) বৎসর কমের তিনগুণ। আমার বর্তমান বয়স কত ?

299. দুই অংকের সংখ্যা

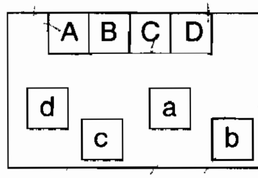
দুই অংকের কিছু কিছু সংখ্যাকে অংক দুটির গুণফল দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায়। সংখ্যাগুলো কী কী ?

300. পুরোটুকু চাই

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এবং 9 এই দশটি অংক এবং একটি যোগ চিহ্ন ব্যবহার করে কি পুরো 1 পাওয়া সম্ভব ? (সাহায্য : দুটি ভগ্নাংশের যোগ হিসেবে সাজাও)।

301. সবজিবাগান

A, B, C এবং D চারজন মানুষের বাসা এবং a, b, c এবং d হচ্ছে তাদের সবজিবাগান। মানুষগুলো তাদের বাসা থেকে তাদের সবজিবাগানে এমনভাবে যেতে চায় যেন কাউকেই অন্য কারো পথ মাড়াতে না হয়। কীভাবে সম্ভব ?



302. তাসের খেলা

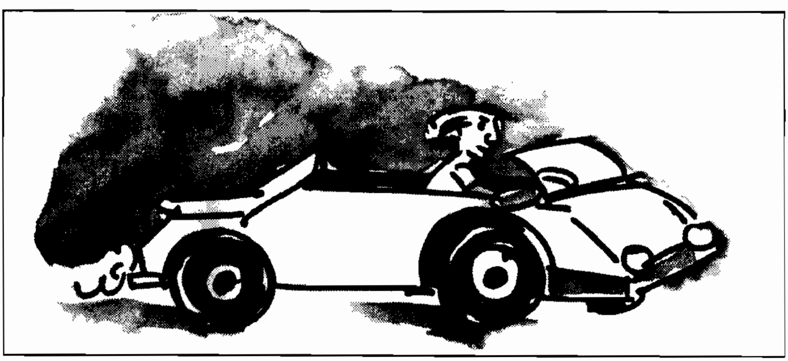
এক প্যাকেট সাজানো তাস নিয়ে ঠিক মাঝখানে দুই ভাগ করে একেবারে নিখুঁতভাবে শাফল (Shuffle) করা হলে তাসগুলো একটা নির্দিষ্টভাবে মিশে যায়। এরকম আটবার নিখুঁতভাবে শাফল করা হলে তাসগুলো কীভাবে সাজানো থাকবে ?

303. ঘাতের যোগফল

n এবং x পূর্ণ সংখ্যা এবং $n^2 = x^{\circ} + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$

n এবং x সমান কত ? (সাহায্য $n^2 = 121$)

304. গাড়ির রেস



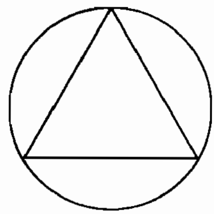
একটা গাড়ির রেসে রফিক প্রথমার্ধে ঘণ্টায় গড়ে 110 মাইল চালিয়েছে এবং দ্বিতীয়ার্ধে ঘণ্টায় 130 মাইল চালিয়েছে। শফিক উভয়ার্ধেই ঘণ্টায় গড়ে 120 মাইল চালিয়েছে। কে এই রেসে জিতেছে ?

305. কাজের সময়

আদিল এবং সমীর এক সঙ্গে একটা কাজ 36 মিনিটে শেষ করতে পারে। আদিল একা কাজটি করতে চাইলে সে সমীর থেকে 30 মিনিট বেশি সময় নেবে। আদিল একা কতক্ষণে কাজটি করতে পারবে ?

306. সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

একটা বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 cm, তার ভেতরে ছবিতে যেভাবে দেখানো হয়েছে সেভাবে একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হয়েছে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?



307. ওয়াই সমান কত ?

$3^{y+1} = 4^{y-1}$ হলে y সমান কত ?

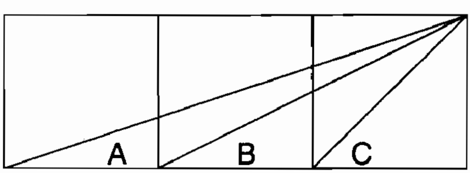
308. তিনটি কিউবের যোগফল

251 এমন একটি তিন অংকের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যেটাকে তিনটি ভিন্ন কিউবের যোগফল হিসেবে দুইভাবে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ

$251 = n^3 + l^3 + m^3 = p^3 + q^3 + r^3$

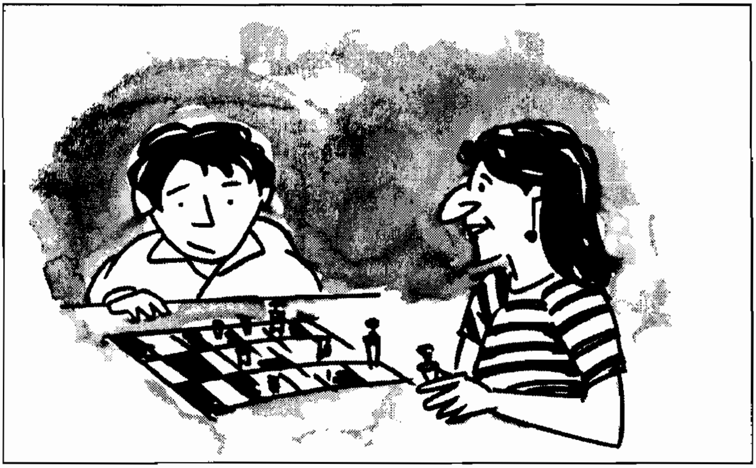
n, l, m এবং p, q, r সমান কত ? (সংখ্যাগুলো সমানও হতে পারে)।

309. তিন বর্গের সমস্যা



ছবিতে তিনটি বর্গ দেখানো হয়েছে, এই বর্গ তিনটিতে কোন <A, <B এবং <C-এর মাঝে সম্পর্ক কী ?

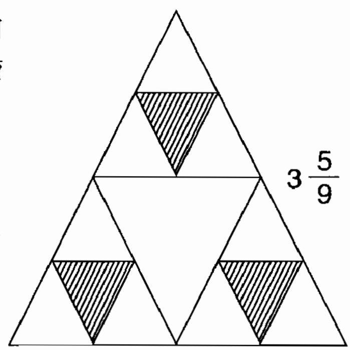
310. দাবার টুর্নামেন্ট



দাবার নক আউট টুর্নামেন্টে 114 জন খেলোয়াড় খেলছে। প্রথম রাউন্ডে 57টি ম্যাচ খেলে 57 জন বিজয়ী এসেছে। দ্বিতীয় রাউন্ডে 28টি ম্যাচ হয়েছে এবং একজন বাই পেয়েছে। এভাবে শেষ পর্যন্ত প্রয়োজনীয় সংখ্যক খেলার শেষে চ্যাম্পিয়ন নির্ধারিত হয়েছে। সর্বমোট কতগুলো খেলা হয়েছে ? n জন খেলোয়াড় থাকলে এ ধরনের টুর্নামেন্টে কতগুলো ম্যাচ খেলা হবে ?

311. ত্রিভুজের ভেতর ত্রিভুজ

একটা সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যোগ করে নতুন সমবাহু ত্রিভুজ তৈরি করা হয়েছে এবং তাদের মধ্যবিন্দুগুলো যোগ করে ছবিতে দেখানো তিনটি দাগ দেয়া ত্রিভুজ আঁকা হয়েছে। মূল ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য যদি হয় $3\frac{5}{9}$ তাহলে দাগ দেয়া ত্রিভুজ তিনটির সবগুলো বাহুর যোগফল কত ?



312. n সমান কত ?

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots 125 = n + (n + 2) + (n + 4) \ldots 209$, n যদি বেজোড় সংখ্যা হয় তাহলে সেটি কত ?

313. তিনভাবে দুই বর্গের যোগফল

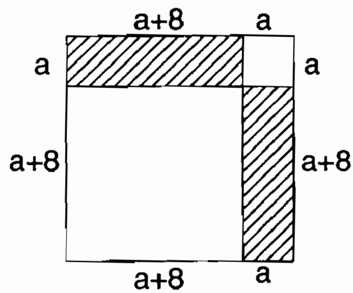
325 হচ্ছে তিন অংকের এমন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যেটাকে দুটি বর্গের যোগফল হিসেবে তিনভাবে প্রকাশ করা যায়। সেগুলো কী ?

314. বনভোজন

স্কুলের ছেলেমেয়েরা বনভোজনে যাবে। যাদের যাবার কথা ছিল তাদের সবাই বনভোজনে গেলে জনপ্রতি 80 (Eighty) টাকা খরচ পড়ত, শেষ মুহূর্তে 8 (Eight) জন না আসায় মাথাপিছু খরচ পড়ল 90 টাকা। কতজন বনভোজনে অংশ নিয়েছিল ?

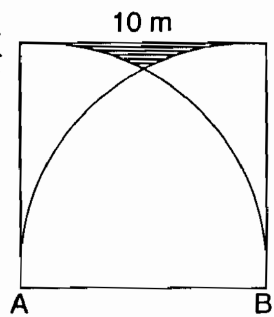
315. সাদা-কালো টাইল

একটা বর্গাকৃতি ঘর ছবিতে দেখানো উপায়ে সাদা এবং কালো রংয়ে টাইল করতে হবে। বড় সাদা বর্গটিতে ছোট সাদা বর্গ থেকে প্রতি বাহুতে 8টি (Eight) করে বেশি টাইল রয়েছে। সাদা টাইলের সংখ্যা যদি 1000 হয় তাহলে কালো টাইলের সংখ্যা কত ?



316. ক্ষুধার্ত গরু

10m×10m বর্গাকার মাঠের দুই কোনা A এবং B-তে 10m লম্বা দড়ি দিয়ে দুটি ক্ষুধার্ত গরুকে বাঁধা হয়েছে। গরু দুটিকে তাদের নাগালে পাওয়া মাঠের পুরো ঘাস খেয়ে ফেলেছে। ঘাস খাওয়া হয় নি (দাগ দেয়া) অংশটুকুর ক্ষেত্রফল কত ?



317. স্কুলের বেঞ্চ

পাঁচটা ছেলে একটা স্কুল বেঞ্চে কতভাবে বসতে পারে ? বেঞ্চটি যদি গোলাকার হয় তাহলে কতভাবে বসতে পারবে ?

318. যোগফলের কিউব

চার অংকের এমন একটি সংখ্যা বের কর যেটি অংকগুলোর যোগফলের কিউবের সমান। (তিন অংকের উদাহরণ $512 = 8^3$)

319. মজার খেলনা

তোমরা নিশ্চয়ই এ ধরনের একটি খেলনা দেখে থাকবে যেখানে ফাঁকা ঘরটি পাশের কোনো একটি সংখ্যা দিয়ে পূর্ণ করা যায়। সাধারণত পুরোটা ওলটপালট করা থাকে এবং ঘরগুলো নাড়িয়ে আগের অবস্থায় ফিরে যেতে হয়। কেউ (a) অবস্থা থেকে শুরু করে কি (b) অবস্থায় আসতে পারবে? (a) থেকে শুরু করে (c) অবস্থায় আসা সম্ভব?

(a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

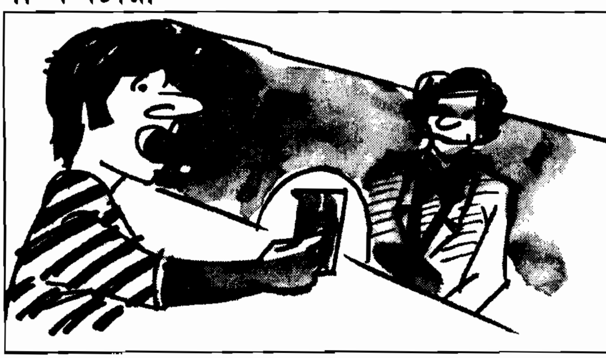
(b)

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

(c)

	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

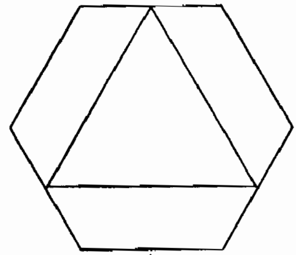
320. আপনভোলা কর্মচারী



একজন আপনভোলা ব্যাংক কর্মচারী একটি চেকের টাকা দিতে গিয়ে টাকার জায়গায় পয়সা এবং পয়সার জায়গায় টাকা পড়ে চেকটি পরিশোধ করেছে। যে চেকটি ভাঙাতে এসেছে সে চেঁচামেচি শুরু করায় ব্যাংক কর্মচারী তাকে শান্ত করার জন্যে আরো 1 টাকা 11 পয়সা বুঝিয়ে দেয়। সেটাও যথেষ্ট নয় বলে মানুষটি শেষ পর্যন্ত ব্যাংকের ম্যানেজারের কাছে অভিযোগ করে। ম্যানেজার এসে এখন পর্যন্ত যা দেয়া হয়েছে আরো ঐ পরিমাণ বুঝিয়ে দেয়ার পর বিষয়টি মিটে যায়। চেকে টাকার পরিমাণ কত লেখা হয়েছিল।

321. ষড়ভুজের ভেতর ত্রিভুজ

একটা সুষম ষড়ভুজের বিপরীত তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দু যোগ করে একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হয়েছে। ষড়ভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 cm হলে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?



322. শেলফে বই

ছয়টি বই, যার মাঝে দুটি বই সবসময় একসাথে রাখতে হবে। কতভাবে শেলফে রাখা যায় ?

323. ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

কোন ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা তিনটি বর্গের যোগফল হিসেবে দুইভাবে প্রকাশ করা যায় ? (সাহায্য : সংখ্যাটি 50 থেকে ছোট।)

324. জোসেফাসের হিসেব

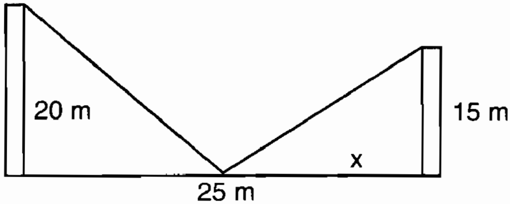
67 খ্রিষ্টাব্দে রোমানদের বিরুদ্ধে বিদ্রোহ করতে গিয়ে জোসেফাসসহ 40 জন একটা গুহায় আশ্রয় নেয়। তারা রোমানদের হাতে ধরা না দিয়ে আত্মাহুতি করার সিদ্ধান্ত নিল। ঠিক করা হলো সবাই বৃত্তাকারে দাঁড়াবে এবং একটি নির্দিষ্ট মানুষ থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে গণনা করে প্রতি তৃতীয়জনকে হত্যা করা হবে এবং সর্বশেষ মানুষটি আত্মহত্যা করবে। জোসেফাস আত্মহত্যা করার জন্যে প্রস্তুত ছিল না বলে সে এবং তার এক বন্ধু এমন জায়গায় দাঁড়াল যেন তারাই জীবিত শেষ ব্যক্তি দুজন হয়। যে মানুষ থেকে গণনা করা হয়েছিল তার সাপেক্ষে জোসেফাস আর তার বন্ধুর অবস্থান কোথায় ছিল ?

325. বর্গমূলের বর্গমূল

$\sqrt{4^{\circ} + \sqrt{4^1 + \sqrt{4^2 + \sqrt{4^3 + \ldots}}}}$ সমান কত ?

326. মাছরাঙা ও মাছ

25m দীর্ঘ একটি নদীর দুই তীরে দুটি গাছ, একটি 15m অন্যটি 20m. নদীর এক তীর থেকে x m দূরে একটি মাছ দেখে দুটি মাছরাঙা একই সাথে একই বেগে উড়ে এসে মাছটির কাছে একই সাথে পৌঁছাল। মাছটি নদীর কোথায় দেখা গিয়েছিল ?



327. লক্ষ্যভেদ

একজন রাইফেল শুটারের লক্ষ্যভেদের সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$। তিনবার গুলি করে (a) প্রতিবার লক্ষ্যভেদ করা (b) একবারও লক্ষ্যভেদ না করা কিংবা (c) অন্ততপক্ষে একবার লক্ষ্য ভেদ করার সম্ভাবনা কত ?

328. শহরের রাস্তা

একটি শহরে mটি রাস্তা পূর্ব থেকে পশ্চিমে এবং nটি রাস্তা উত্তর থেকে দক্ষিণে যায়। কত উপায়ে শহরের উত্তর-পূর্ব কোনা থেকে দক্ষিণ-পশ্চিম কোনায় পৌঁছানো যাবে ?

329. বীজের বস্তা

চাষী রমিজ কয়েক বস্তা গমের বীজ, তার তিনগুণ ধানের বীজ এবং ছয়গুণ সয়াবিনের বীজ কিনেছে। প্রতি বস্তা বীজের দাম ঐ বীজ যত বস্তা কেনা হয়েছে তত শত টাকা। চাষী রমিজ সব মিলিয়ে 18400 টাকার বীজ কিনে থাকলে কোন বীজ কত বস্তা কিনেছে ?

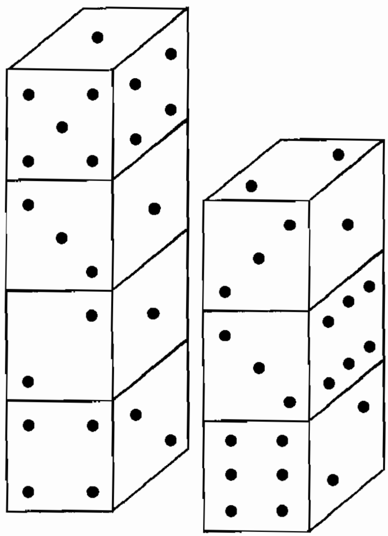
330. ভিন্ন ভিত্তি

আমরা দশমিক ভিত্তিতে অংক করে অভ্যস্ত। নিচের যোগ অংকটি একাধিক উপায়ে সমাধান করা সম্ভব, কিন্তু সংখ্যার ভিত্তি 10 না হয়ে অন্য কিছু হলে এর একটি মাত্র সমাধান থাকবে। ভিত্তি (Base) কত হতে পারে ?

```
 ONE
 TWO
-----
NEXT
```

331. সাতটি ছক্কা

সাতটি ছক্কা ছবিতে যেভাবে দেখানো হয়েছে সেভাবে সাজিয়ে রাখা হয়েছে। পেছন থেকে যদি কেউ ছক্কাগুলো দেখে তাহলে সে (উপরের তিনটি বিন্দুসহ) কতগুলো বিন্দু দেখবে ?



332. প্লেনের যাত্রী

প্লেনের যাত্রীদের প্লেনে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ মালপত্র নিতে দেয় এবং কোনো যাত্রীর মালপত্রের ওজন এই নির্দিষ্ট ওজন থেকে বেশি হয়ে গেলে প্রতি বাড়তি কেজির জন্যে জরিমানা দিতে হয়। হাসান এবং তার স্ত্রী শায়লা এয়ারপোর্টে এসে আবিষ্কার করল বাড়তি ওজনের কারণে হাসানকে 3.50 ডলার এবং শায়লাকে 1.50 ডলার জরিমানা দিতে হবে। যদি একজন এই দুটো স্যুটকেস নিয়ে রওনা দিত তাহলে জরিমানা দিতে হতো 20 ডলার। দুজনের স্যুটকেসের সম্মিলিত ওজন 70 কেজি হলে কার স্যুটকেসের ওজন কত ? প্রতি কেজিতে জরিমানা কত এবং জরিমানা ছাড়া কত কেজি নেয়া যায় ?

333. ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি তার থেকে তৈরি সবগুলো দুই অংকের সংখ্যার যোগফলের সমান? (সাহায্য : সংখ্যাটি 150 থেকে ছোট)।

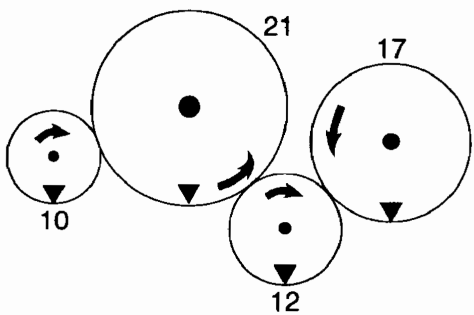
334. দুই টুকরো জমি

রহমান সাহেবের সমান পরিমাণ দুই টুকরো জমি আছে। প্রথম জমিটির দৈর্ঘ্য-প্রস্থ থেকে 700 গজ বেশি। দ্বিতীয় জমিটির দৈর্ঘ্য প্রথম জমিটির দৈর্ঘ্য থেকে 450 গজ কম এবং এর প্রস্থ 400 গজ। জমি দুটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ কত?

335. কিউবকে রঙ করা

কতভাবে একটি কিউবের ছয়টি পৃষ্ঠকে ছয়টি ভিন্ন ভিন্ন রঙয়ে রঙ করা যাবে যেন তারা দেখতে ভিন্ন হয়।

336. চার চাকা



ছবিতে চার চাকার একটা গিয়ার পদ্ধতি দেখানো হয়েছে। সবচে' বড়টির 21টি দাঁত এবং সেটাকে ঘুরানো হয়, সেটি অন্যগুলোকে (10, 12 এবং 17টি দাঁত) ঘুরায়। মনে করা যাক একটি নির্দিষ্ট সময়ে চাকাগুলো ছবিতে দেখানো অবস্থায় আছে। এখন 21 দাঁতের বড় চাকাটি ঘোরানো শুরু হলো, সেটি কতবার ঘুরানোর পর সবগুলো চাকা আবার ছবিতে দেখানো অবস্থায় ফিরে আসবে?

337. ট্রেনের কলিশন

দুটি ট্রেন একটি থেকে অন্যটি 50 km দূরে, একই লাইন ধরে একটি আরেকটির সাথে নিশ্চিত কলিশনের জন্যে এগিয়ে আসছে। একটি ট্রেনের গতি ঘণ্টায় 30 km, অন্যটির 20 km. একটি বুদ্ধিমান কবুতর ব্যাপারটি বুঝতে

পেরে ঘণ্টায় 50 km বেগে উড়তে উড়তে এক ট্রেন থেকে অন্য ট্রেনে উড়ে ড্রাইভারের দৃষ্টি আকর্ষণ করার চেষ্টা করতে লাগল। কোনো লাভ হলো না। ট্রেনের কলিশনে কবুতরটিও শেষ হয়ে গেল। কবুতরটি সব মিলিয়ে কতটুকু দূরত্ব উড়েছে?

338. অন্ধকারে মোজা

একটা ড্রয়ারে তিনজোড়া লাল আর পাঁচ জোড়া নীল মোজা রয়েছে। ড্রয়ার থেকে মোজা বের করার সময় হঠাৎ করে ইলেকট্রিসিটি চলে গেল। সঠিক এক জোড়া মোজা পেতে হলে কয়টি মোজা বের করতে হবে?

339. ভাগশেষ কত ?

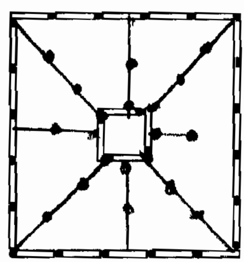
$(a+b+c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$ কে $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

340. পিরামিডের আয়তন

তিনটি হেলানো তলের পিরামিডের শীর্ষ বিন্দুতে তৈরি তিনটি কোণই সমকোণ। হেলানো বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x, y এবং z এখন $x + y + z = a$ হলে x, y এবং z-এর কী মানের জন্যে পিরামিডের আয়তন সবচেয়ে বেশি হবে?

341. ম্যাচকাঠির বাগান

পাশের ছবিতে 20টি ম্যাচকাঠি দিয়ে একটি বাগান তৈরি করা হয়েছে। যার মাঝখানে 4টি ম্যাচকাঠি দিয়ে তৈরি করা একটা কূপ রাখা হয়েছে। আরো 20টি কাঠি ব্যবহার করে কূপ ছাড়া বাকি অংশটুকু হুবহু এক রকম আটটি অংশে ভাগ করতে হবে।



342. রুমু-ঝুমুর দোকান দোকান খেলা

রুমু-ঝুমু তাদের দোকান দোকান খেলার জন্যে কিছু লজেন্স এবং সাতটি মুদ্রায় 1.07 টাকা নিয়ে বসেছে। প্রথম যে কিনতে এসেছে সে বলল তার পঞ্চাশ

Goto List>

পয়সার মুদ্রার ভাঙতি দরকার, রুমু-ঝুমু দেখল তাদের কাছে সেই ভাঙতি নেই। শুধু তাই নয় দেখা গেল তাদের কাছে সিকি (পঁচিশ পয়সা) এমন কী দশ পয়সা বা পাঁচ পয়সার ভাঙতিও নেই। রুমু ঝুমু কী কী মুদ্রা কতগুলো নিয়ে বসেছিল ?

343. ভাগশেষ কত

$1 + x^{1111} + x^{2222} + \ldots\ldots x^{7777} + x^{8888} + x^{9999}$ এই পলিনমিয়ালটিকে (Polynomial) $1 + x^2 + x^3 + \ldots\ldots x^7 + x^8 + x^9$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ?

344. বর্গ থেকে বর্গ

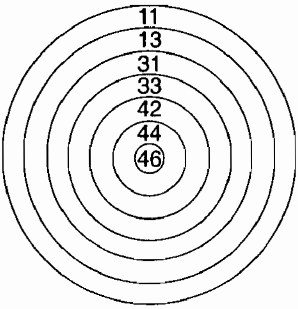
দুইটি ভিন্ন অংকের একটি সংখ্যা বের কর যার বর্গ থেকে বিপরীত ক্রমে লেখা সংখ্যাটির বর্গ বিয়োগ করলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় সেটিই একটি বর্গ। (সাহায্য : সংখ্যাটি 50 থেকে বড়)।

345. মোটা মোটা মানুষ

মোটা মানুষের কনভেনশনে দেখা গেল অনিল ও বশিরের ওজন 647 পাউন্ড, বশির ও করিমের ওজন 675 পাউন্ড, করিম ও দবিরের ওজন 599 পাউন্ড, দবির ও ঈশিতার ওজন 583 পাউন্ড, ফরিদের একার ওজন 370 পাউন্ড এবং 6 জনের মিলিত ওজন 1927। কার ওজন কত ?

346. শুটিং টারগেট

একটা বিচিত্র শুটিং টারগেট পাশের ছবির মতো। কেউ যদি মোট স্কোর 100 করতে চায় তাহলে তার রাইফেল দিয়ে টার্গেটের কোন অংশে কতবার লক্ষ্যভেদ করতে হবে ?

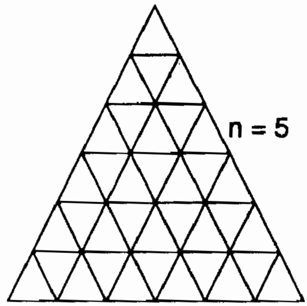


347. ছয়টি নয়

ছয়টি নয় ব্যবহার করে কেমন করে 100 তৈরি করা যায়?

348. সমবাহু ত্রিভুজকে ভাগাভাগি

একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুকে যদি সমান n + 1 অংশে ভাগ করে ছবির মতো উপায়ে যুক্ত করে দিয়ে পুরো ত্রিভুজটিকে অনেকগুলো অংশে ভাগ করা হয় তাহলে সেখানে কতগুলো সামন্তরিক থাকবে? (সাহায্য : n = 1 হলে 3, n = 2 হলে 15)

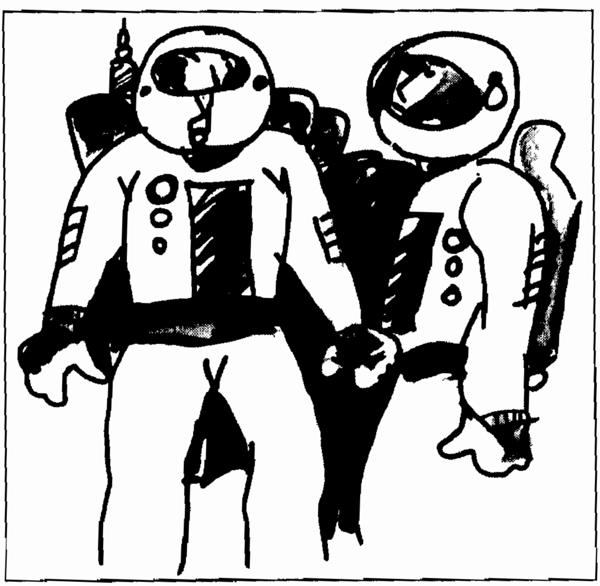


349. ছোট এবং বড় সহগ

$(1 + x^2 - x^3)^{100}$ এবং $(1 - x^2 + x^3)^{100}$ এই দুটির ভিতরে কোনটির x^{20} এর সহগ (coefficient) বড়?

350. মঙ্গল গ্রহের অভিযাত্রী △

মঙ্গল গ্রহের অভিযাত্রীরা সবেমাত্র তাদের অভিযান শেষ করে পৃথিবীতে ফিরে এসেছে, সাংবাদিকেরা তাদের কাছে জানতে চাইল মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দারা দেখতে কেমন? অভিযাত্রীরা ভরশূন্য পরিবেশে থেকে খানিকটা বিভ্রান্ত। তাই তাদের উত্তরগুলো সত্যি হলেও ছিল খানিকটা



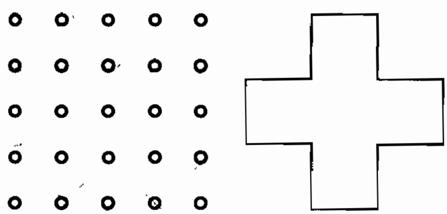
গোলমালে। সাংবাদিকরা তার মাথামুণ্ডু কিছু বুঝতে পারল না। দেখা যাক, তোমরা বুঝতে পার কি না ?

অভিযাত্রীরা বলেছিল : 'এটা সত্যি নয় যে মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দারা সবুজ হলে হয় তাদের তিনটি মাথা রয়েছে, না হয় তারা আকাশে উড়তে পারে না—যদি না এটি সত্যি হয় যে তারা সবুজ কেবল এবং কেবলমাত্র যদি তারা আকাশে উড়তে পারে এবং তাদের তিনটি মাথা থাকে না।'

ধরে নেয়া যাক মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দারা দেখতে এই রকম এবং তিনটি বৈশিষ্ট্যের কমপক্ষে একটি বৈশিষ্ট্য আছে।

প্রশ্ন হলো : মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দাদের কি তিনটি মাথা আছে ? তারা কি সবুজ ? তারা কি উড়তে পারে ?

351. ডট এবং ক্রস



ছবিতে পাঁচ সারিতে পাঁচটি করে 5×5 = 25 ডট আঁকা আছে। ডটগুলোকে লাইন দিয়ে যুক্ত করে ছবিতে দেখানো ক্রসটির মতো দেখতে (এর চাইতে ছোট কিংবা বড় হতে পারে) একটি ক্রস আঁকতে হবে যেন ক্রসের ভেতরে থাকে পাঁচটি ডট এবং বাইরে থাকে আটটি ডট।

352. রুখসানার পার্টি

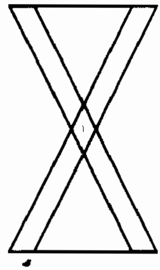
রুখসানা তার বাসায় পার্টির আয়োজন করেছে, সবাই আসবে সন্ধে সাতটায়। বিকেল পাঁচটার সময় সে আবিষ্কার করল ঘরবাড়ির অবস্থা খুব খারাপ, পরিষ্কার করা দরকার। তার বড় মেয়ে বলল, পুরো বাড়ি পরিষ্কার করতে আমার কমপক্ষে ছয় ঘণ্টা লাগবে। মেজো মেয়ে বললে, 'আমার লাগবে চার ঘণ্টা। ছোট মেয়ে বলল, তিন ঘণ্টা সময় পেলে আমি পুরো বাড়ি পরিষ্কার করে ফেলতাম।' রুখসানা বলল, চমৎকার! তোমরা তিনজন এক সাথে হাত লাগাও। কতক্ষণে পুরো বাড়ি পরিষ্কার হয়েছিল ? পার্টির আগে না পরে ?

353. সহগ কত ?

$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+\ldots x^{99}+x^{100})$ কে বিস্তৃত করলে x-এর বেজোড় ঘাতের $(x, x,^3x^5,x^7 \ldots)$ সহগগুলো কী হবে ?

354. সমবাহু ত্রিভুজ

পাশের ছবিতে কতগুলো সমবাহু ত্রিভুজ আছে ?



355. রুবিকস কিউব

তোমরা সবাই নিশ্চয়ই কখনো না কখনো রুবিকস কিউব ব্যবহার করেছ। তার নাম ব্যবহার করে তৈরি করা এই যোগ অংকে অক্ষরগুলোর মান বের কর।

CUBE + ERNO = RUBIK

356. টুইন প্রাইম

যদি কোনো দুটি প্রাইম সংখ্যার ভেতরে পার্থক্য হয় 2 তাহলে সেটাকে বলে টুইন প্রাইম (twin prime) যেমন 3, 5 বা 11, 13 বা 17, 19 এরকম অসংখ্য উদাহরণ দেয়া যাবে। এরকম কতগুলো টুইন প্রাইম রয়েছে ? অসীম সংখ্যক কী হতে পারে ?

357. গোল্ডবাকের অনুমান

গোল্ডবাক (Goldbach) অনুমান করেছেন যে 2 ছাড়া অন্য যে কোনো জোড় সংখ্যাকে দুটি প্রাইম সংখ্যার যোগফল হিসেবে লেখা যায়। যেমন– 16 = 11 + 5 কিংবা 30 = 17 + 13, এই অনুমানটি (Conjecture) কী সবসময় সত্যি ?

358. প্রাইমের ফরমুলা

প্রাইম সংখ্যা বের করার ফরমুলা থাকা সম্ভব নয় সেটি এখনো প্রমাণিত হয় নি। তুমি কি এরকম একটা ফরমুলা লিখতে পারবে ?

359. ফার্মার শেষ থিওরেম

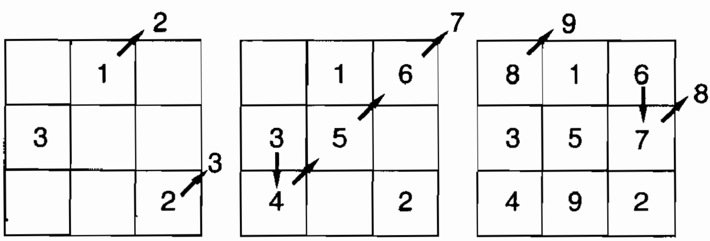
2 ছাড়া এমন কোনো সংখ্যা n নেই যার জন্যে $a^n + b^n = c^n$ সত্যি— যেখানে a, b, c এবং n পূর্ণ পজিটিভ সংখ্যা। এটি কি প্রমাণ করতে পারবে?

360. ম্যাপের রঙ

চারটি রঙ দিয়েই সম্ভাব্য যে কোনো ম্যাপ রঙ করা সম্ভব। কোনো কম্পিউটার ব্যবহার না করে এটি কি প্রমাণ করতে পারবে?

(নোট : দেখতেই পাচ্ছ 356 থেকে 360 পর্যন্ত এই পাঁচটি সমস্যা একটু অন্যরকম। যদি এর সমাধান বের করতে পারো তাহলে সমাধানগুলো নিউরনে অনুরণনে না পাঠিয়ে কোনো গণিত জার্নালে পাঠিয়ে রাতারাতি জগদ্বিখ্যাত হয়ে যেতে পারবে। প্রথম তিনটি এখনো প্রমাণিত হয় নি, সম্প্রতি Andrew Wiles ফার্মার শেষ থিওরেমটি প্রমাণ করেছেন কিন্তু বলা হয় তার আসল প্রমাণটি এখনো বের হয় নি। শেষ সমস্যাটি প্রমাণ করার জন্যে কম্পিউটার ব্যবহার করে Appel এবং Haken পৃথিবীর সব গণিতবিদদের স্তম্ভিত করে রেখেছেন।)

361. ম্যাজিক বর্গ



(a) (b) (c)

ম্যাজিক বর্গে উপর থেকে নিচে, ডান থেকে বামে কিংবা কোনাকুনি সংখ্যাগুলো যোগ করলে সব সময় একই সংখ্যা পাওয়া যায়— এ নিয়ে আগে অনেক সমস্যা দেয়া হয়েছে এবারে দেখা যাক ম্যাজিক বর্গ কীভাবে তৈরি করা যায়। পরপর সংখ্যা দিয়ে (বেজোড় ঘরের) ম্যাজিক বর্গ তৈরি করা খুব সোজা। একটি সংখ্যা যেখানে বসানো হয় তার পরের সংখ্যা বসে তার ডান দিকে উপরের ঘরের। যদি দেখা যায় ইতোমধ্যে সেখানে কোনো সংখ্যা বসানো হয়ে গেছে তাহলে পরের সংখ্যাটি বসবে আগের সংখ্যাটির ঠিক নিচে। মাঝে মাঝেই দেখা যাবে একটা সংখ্যা যেখানে বসানোর কথা সেখানে কোনো ঘর নেই তখন

কল্পনা করে নিতে হবে ঘরগুলো শেষ হয়ে আবার শুরুতে ফিরে আসে (বৃত্তাকার, কাগজ পাকিয়ে সিলিন্ডারের মতো করে নিলে যা হয়) তাই তখন সেটি বসাতে হবে সারির (বামে কিংবা নিচে) প্রথম ঘরে! পুরো ব্যাপারটি শুরু করতে হয় প্রথম সংখ্যাটি সারির মাঝখানে বসিয়ে ব্যস্, হয়ে গেল।

এবারে 3×3 ঘর নিয়ে হাতেকলমে দেখা যাক। ধরা যাক আমরা 1 থেকে 9 এই পরপর নয়টি সংখ্যা দিয়ে শুরু করেছি কাজেই 1 বসবে প্রথম সারির মাঝে (ছবি a), পরের সংখ্যা (2) ডানে এবং উপরে কোনো ঘর নেই তাই... বসানো যাচ্ছে না বলে সেটি বসানো হয়েছে সারির নিচে। তার পরের সংখ্যাটিও (3) কোনো ঘর নেই তাই বসানো গেল না বলে বসানো হলো সারির বামে। এর পরের সংখ্যার (4) জন্যে ঘর আছে কিন্তু সেখানে ইতোমধ্যে 1 বসে আছে বলে তাকে নিয়ম অনুযায়ী বসানো হলো 3 এর নিচে (ছবি b)-এর পরের দুটি সংখ্যা 5 এবং 6 খুব সহজেই বসানো হলো এবং 7 কে বসানোর সময় বিপত্তি দেখা গেল। তার জন্যে কোনো ঘর নেই, নিয়ম অনুযায়ী তার যে ঘর পাবার কথা সেখানে ইতোমধ্যে 4 বসানো হয়ে গেছে। কাজেই 7-কে বসানো হলো ঠিক 6-এর নিচে (ছবি c) এখন 3 এবং 9 নিয়ম অনুযায়ী বসিয়ে নিলেই ম্যাজিক বর্গ তৈরি হয়ে গেল।

এবারে আমাদের মূল সমস্যায় আসা যাক, 2 থেকে 10 পর্যন্ত এই দশটি ক্রমিক সংখ্যা দিয়ে একটি ম্যাজিক বর্গ তৈরি কর।

362. যোগফল কত ?

1 থেকে 9 ব্যবহার করে ম্যাজিক বর্গের যোগফল যদি হয় 15 তাহলে 2 থেকে 10 পর্যন্ত ব্যবহার করে ম্যাজিক বর্গ তৈরি করলে তার যোগফল 15 থেকে কত বেশি হবে ?

363. বেজোড় ম্যাজিক বর্গ

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 এবং 17 এই নয়টি সংখ্যা দিয়ে ম্যাজিক বর্গ তৈরি করা হলে তার (ডান থেকে বামে, ওপর থেকে নিচে, কোনাকুনি) যোগফল কত হবে ?

364. 5×5 ম্যাজিক বর্গ

1 থেকে 25 পর্যন্ত সংখ্যা ব্যবহার করে একটি 5×5 ম্যাজিক বর্গ তৈরি কর।

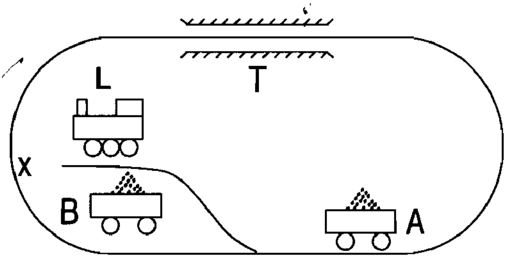
Goto List>

365. 7×7 ম্যাজিক বর্গ

1 থেকে 49 পর্যন্ত সংখ্যা ব্যবহার করে একটি 7×7 ম্যাজিক বর্গ তৈরি কর।

366. ইঞ্জিন এবং দুই বগি

ছবিতে দেখানো রেল লাইনের দুই পাশে দুটি বগি A এবং B-কে পরস্পরের সাথে স্থান পরিবর্তন করাতে হবে রেলইঞ্জিন L ব্যবহার করে। বগি দুটো এমনভাবে মাল বোঝাই করা হয়েছে যে সেটি টানেল T-এর ভেতর দিয়ে যেতে পারবে না, ইঞ্জিনটার অবশ্যি যেতে কোনো সমস্যা নেই। সবচে' সহজে এটি কীভাবে করা যায়?



367. তরমুজের ওজন

একটা দাড়িপাল্লায় একটা তরমুজ যদি $\frac{3}{2}$ কেজি এবং একটা তরমুজের $\frac{2}{3}$ সমান হয় তাহলে তরমুজের ওজন কত?

368. ভাগশেষ কত ?

$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$-কে $x-1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে?

369. টেবিল এবং টেবিল ক্লথ

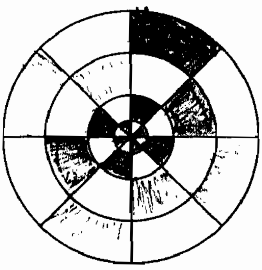
9টি টেবিল 3×3 হিসেবে বর্গাকারে সাজানো আছে। তোমার কাছে তিনটি লাল, তিনটি সাদা এবং তিনটি নীল রংয়ের টেবিল ক্লথ আছে। কত উপায়ে টেবিলে ক্লথ বিছানো যাবে যেন কোনো (সামনে পিছু বা ডান-বাম) সারিতেই এক রঙয়ের একাধিক টেবিল ক্লথ না থাকে ?

370. পূর্ণবর্গ

এমন সব দুই অংকের সংখ্যা বের কর (11, 22, 33.... ইত্যাদি ছাড়া) যাদের থেকে তাদের বিপরীতক্রমে লেখা সংখ্যা বিয়োগ করলে পূর্ণবর্গ পাওয়া যাবে।

371. মাকড়সার জাল

পাশের ছবিতে দেখানো মাকড়সার জালে কিছু পোকা ধরা পড়েছে, গুনে দেখা গেল প্রতিটি বৃত্তে দুটি আবার প্রতিটি সরল রেখাতেও দুটি। কেমন করে সম্ভব দেখাতে পারবে ?



372. লিচুচোর

দুটি ছোট ছেলে লিচু চুরি করতে এসে ধরা পড়েছে। লিচু গাছের মালিক দয়ালু মানুষ, ছেলেগুলোকে বলল, ঠিক আছে, এবারকার মতো ছেড়ে দিচ্ছি। প্রত্যেকে 20টি করে লিচু নিয়ে চলে যাও। ছেলে দুটো লিচু পাড়ছে— তখন একজন অন্যজনকে জিজ্ঞেস করল, তোমার কি 20টা হয়েছে ? অন্যজন বলল, এখনো হয় নি, কিন্তু এখন যতগুলো আছে যদি তার দ্বিগুণ নিই এবং এখন যতগুলো আছে যদি তার অর্ধেক নেই, দুয়ে মিলে 20টি হবে। ছেলেটার কয়টা লিচু হয়েছে ?

373. ভাগশেষ কত ?

$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ কে $x^2 - 1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে ?

374. বেজোড় অংকের সংখ্যা

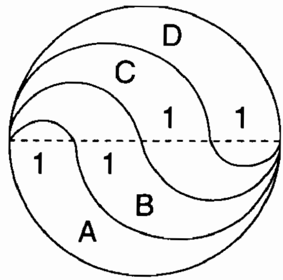
বেজোড় অংকগুলো নিয়ে কতগুলো 4 অংকের সংখ্যা তৈরি করা যাবে ?

375. বাবা-মা এবং সাহায্যকারী মেয়েটি

O^3 = DAD এবং $(IM)^2$ = MOM হলে MAID সমান কত ?

376. চার ভাগ

তিনটি বক্ররেখা এঁকে একটি বৃত্তকে A, B, C এবং D এই চারটি ভাগে ভাগ করা হয়েছে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2 হলে এই অংশগুলোর ক্ষেত্রফল কত ?



377. পাঁচে পাঁচ

$5 \div 5 \div 5 \div 5 \div 5 \div \frac{1}{5} \div \frac{1}{5} \div \frac{1}{5}$ সমান কত ?

378. ভাগশেষ কত ?

একটি পলিনমিয়ালকে (Polynomial) $x - 1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 2, $(x - 2)$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 1, এই পলিনমিয়ালটিকে $(x-1)(x-2)$ দিয়ে ভাগ করলে কত অবশিষ্ট থাকবে ?

379. বেজোড় অংকের সংখ্যা

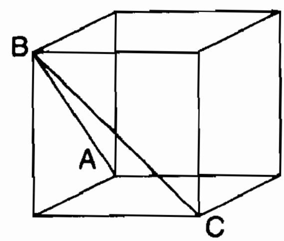
বেজোড় অংকগুলো দিয়ে চার অংকের বেশি নয় এরকম কতগুলো সংখ্যা তৈরি করা যাবে ?

380. বয়স

আমার বর্তমান বয়স আজ থেকে 4 বছর পরে আমার যে বয়স হবে তার দ্বিগুণ থেকে 4 বছর আগে আমার যে বয়স ছিল তার দ্বিগুণ বিয়োগ করলে যা হয়। আমার বয়স কত ?

381. কিউবের কোণ

একটা কিউবের ছবিতে দেখানো ABC কোণটি কত বড় ?



382. ডিমের ব্যাপারি

একজন ডিমের ব্যাপারি ডিম বিক্রি করে, মুরগির ডিম প্রতিটা $\frac{1}{2}$ টাকা, হাঁসের ডিম প্রতিটা 1 টাকা এবং রাজহাঁসের ডিম প্রতিটা 2 টাকা। একজন খরিদ্দার এসেছে 22 টাকা নিয়ে 22টা ডিম কিনতে। সে কোন ডিম কয়টা কিনবে ?

383. সহগ কত ?

$x^{1951} - 1$ কে $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ দিয়ে ভাগ করলে x^{14}-এর সহগ কত হবে ?

384. চার অংকের সংখ্যা

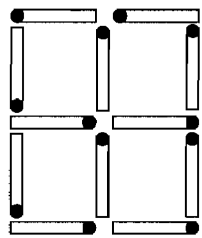
চার অংকের কতগুলো সংখ্যা আছে যার অংকগুলো ভিন্ন ?

385. ফাইনম্যানের প্রিয় মান

$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$-এর মানটি জগদ্বিখ্যাত পদার্থবিজ্ঞানী রিচার্ড ফাইনম্যানের কাছে খুব আকর্ষণীয় মনে হয়েছিল। মানটি বের করে দেখ তোমার কাছেও আকর্ষণীয় মনে হতে পারে।

386. ম্যাচের কাঠির বর্গক্ষেত্র

তিনটি ম্যাচের কাঠি সরিয়ে অন্য কোথাও বসিয়ে তিনটি বর্গক্ষেত্র তৈরি করতে হবে।



387. খেয়ালি মনিব

একজন খেয়ালি মনিব তার কর্মচারীকে প্রতিদিন বেতন হিসেবে টাকা না দিয়ে এক ইঞ্চি সোনার পাত কেটে দেয়। তার কাছে একটা 31 ইঞ্চি সোনার পাত রয়েছে এবং সেটার চার জায়গায় কেটে সে এক মাসের একত্রিশ দিন বেতন দিয়েছে— কীভাবে সম্ভব ?

388. সমীকরণ কী ?

পূর্ণ সংখ্যার সহগ দিয়ে এমন একটি সমীকরণ লিখ যার দুটি মূল হলো $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ এবং $\sqrt{2} + (3)^{\frac{1}{3}}$

389. ফলের বাগান

শাহেদ তার বাগানে 5টি ফলের গাছ লাগাতে পারবে। তার কাছে দুটি পেয়ারা, দুটি জলপাই, দুটি বরই, দুটি আম, একটি জাম এবং একটি কাঁঠাল গাছের চারা আছে যা থেকে 5টি নিতে পারবে। সে কতভাবে গাছের চারাগুলো সাজাতে পারবে ?

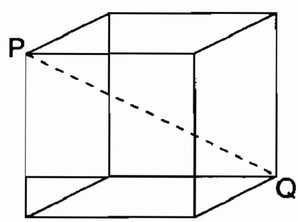
390. গুণ অংক

নিচের গুণ অংকটি সমাধান কর :

$$\begin{array}{r} \text{LET} \\ \text{NO} \\ \hline \text{SOT} \\ \text{NOT} \\ \hline \text{FRET} \end{array}$$

391. কিউবের আয়তন

একটা কিউবের এক কোনা থেকে তার বিপরীত কোনার দৈর্ঘ্য PQ = $(17)^{\frac{1}{3}}\ (3)^{\frac{1}{3}}$. কিউবটির আয়তন কত ?



392. বর্গের পার্থক্য

দুটি সংখ্যার বর্গের পার্থক্য হচ্ছে 16 একটি অন্যটির $\frac{3}{5}$ হলে সংখ্যা দুটি কত ?

393. পঁচিশ ভাগের এক ভাগ

সকল পূর্ণসংখ্যা n বের কর যার সবচে' বাঁয়ের অংকটি সরিয়ে দিলে সংখ্যাটি n-এর $\frac{1}{25}$ অংশ হয়।

394. কাঠমিস্ত্রি

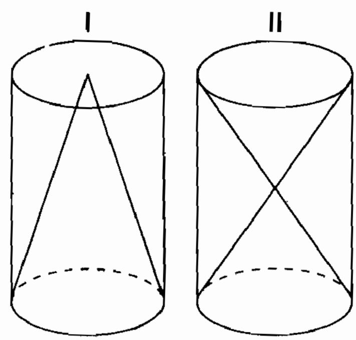
প্রদীপ এবং জালাল কাঠমিস্ত্রি তাদের তিন ধরনের স্ক্রু কেনা দরকার। স্ক্রুগুলোর দাম 3, 4 এবং 5 টাকা। প্রদীপ কিনল একই সংখ্যক তিন ধরনের স্ক্রু, জালাল প্রদীপের সমান টাকা ব্যয় করে প্রত্যেক ধরনের স্ক্রুয়ের পেছনে সমান টাকা ব্যয় করেছে। জালাল 6টি স্ক্রু বেশি কিনে থাকলে তারা স্ক্রুয়ের পেছনে কত টাকা করে খরচ করেছে ?

395. ফ্যাক্টরিয়াল

1 এবং 2 ছাড়া কোন সংখ্যাটি তার অংকগুলোর ফ্যাক্টরিয়ালের যোগফলের সমান ? অর্থাৎ $100n + 10m + l = n! + m! + l!$

396. সিলিন্ডারের ভেতর কোণ

দুটি সিলিন্ডারের আকার এবং আয়তন এক, প্রথমটির ভেতর একটি কোণ (Cone) এবং দ্বিতীয়টির ভেতরে দুটি কোণ (Cone) ছবির মতো করে তৈরি করা হয়েছে। I-এর ভেতর একটি কোণ এবং II-এর ভেতরের দুটি কোণের আয়তনের অনুপাত কত ?



397. পকেট খরচ

তুমি তোমার মাকে বলেছ যে, তোমাকে যদি একমাস পকেট খরচ দেয়া হয় তুমি আর সারাজীবন বিরক্ত করবে না। তোমার মা জানতে চাইলেন কত দিতে হবে ? তুমি বললে— প্রথম দিন দশ টাকা, পরের দিন বিশ টাকা, তার পরের দিন ত্রিশ টাকা এভাবে এক মাস দিতে হবে। তোমার মা আঁৎকে উঠে বললেন, সর্বনাশ! এত টাকা কেমন করে দেব ? তখন তুমি বললে, ঠিক আছে, তাহলে প্রথম দিন 1 পয়সা, পরের দিন 2 পয়সা, তার পরের দিন 4 পয়সা, তার পরের দিন 8 পয়সা এভাবে এক মাস। তোমার মা খুশি হয়ে রাজি হয়ে গেলেন। মাস শেষে সব মিলিয়ে তোমাকে তোমার মায়ের কত টাকা দিতে হবে ?

398. গুণের মজা

2, 413, 793, 103, 448, 275, 862, 068, 965, 517 এই সংখ্যাটিকে 3 দিয়ে গুণ করলে একটি মজার ব্যাপার হয়। সেটি কী ? (এটি হচ্ছে এরকম ব্যাপার ঘটার জন্যে সবচে’ ছোট সংখ্যা)

399. কিউবের যোগ কিউব

তিন অংকের সবচে’ ক্ষুদ্র কিউব বের কর যাকে তিনটি ভিন্ন কিউবের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যেতে পারে। অর্থাৎ $h^3 = p^3 + q^3 + r^3$

[সাহায্য : p, q, r-এর মান 10 থেকে কম।)

400. পূর্ণ কিউব

এমন সব দুই অংকের সংখ্যা বের কর (11, 22, 33 ইত্যাদি ছাড়া) যাদের থেকে তাদের বিপরীত ক্রমে লেখা সংখ্যা বিয়োগ করলে সংখ্যাটি পূর্ণ কিউব হয়। যেমন, $52 - 25 = 27 = 3^3$.

পরিশিষ্ট

ক : নিউরনে অনুরণনে অংশ নেয়ার নিয়ম

১. যে কেউ এই কার্যক্রমে অংশ নিতে পারবে তবে এই কার্যক্রম থেকে যখন গণিত অলিম্পিয়াড আয়োজন করা হবে সেখানে শুধুমাত্র স্কুল কলেজ বা বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীরা অংশ নিতে পারবে।

২. নিউরনে অনুরণনে অংশ নিতে হলে এর সমস্যার সমাধানগুলো নিচের ঠিকানায় পাঠাতে হবে :

নিউরনে অনুরণন
বিজ্ঞান প্রজন্ম : প্রথম আলো
সি.এ. ভবন
১০০ কাজী নজরুল ইসলাম এভিনিউ
ঢাকা-১২১৫

৩. প্রথমবার সমাধান পাঠানোর সময় নিজের নাম, ঠিকানা বয়স এবং যেখানে প্রযোজ্য সেখানে শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের নাম এবং শ্রেণী উল্লেখ করে রেজিস্ট্রেশন করতে হবে। নিউরনে অনুরণনের পক্ষ থেকে অংশ গ্রহণকারীকে রেজিস্ট্রেশন নম্বরটি জানিয়ে দেওয়া হবে। পরবর্তীতে উত্তর পাঠানোর সময় রেজিস্ট্রেশন নম্বর উল্লেখ করতে হবে।

৪. একজন যতবার খুশি এবং যতগুলো ইচ্ছে সমস্যার সমাধান পাঠাতে পারবে, শুদ্ধ হলে তাকে জানানো হবে কিন্তু সমস্যার সমাধান কখনোই প্রকাশ করা হবে না।

খ : প্রয়োজনীয় সূত্র

গুরুত্বপূর্ণ ধ্রুবকসমূহ

$\pi = 3.14159\ 26535$

$e = 2.71828\ 18284$

$e^{\pi} = 23.14069\ 26327$

$\pi^{e} = 22.4591577183$

$e^{e} = 15.15426\ 22414$

$\gamma = .57721\ 56649$ অয়লার ধ্রুবক

1 রেডিয়ান $= 57.29577\ 95130$

গুরুত্বপূর্ণ প্রোডাক্ট এবং ফ্যাক্টর

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x - y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \dots + y^{2n})$

$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \dots + y^{2n})$

$x^{2n} - y^{2n} = (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots)$

বাইনোমিয়াল ফর্মুলা ও কোয়েফিসিয়ান্ট

$n! = 1, 2, \dots n\ ,\ 0! = 1$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n$$

$$(n+y)^n = \binom{n}{o}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{o}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$$

$$\binom{n}{o}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots(-1)^{n}\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\binom{n}{k}=0$$

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\ldots+\binom{n+m}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots.=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots.=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{0}^{2}+\binom{n}{1}^{2}+\binom{n}{2}^{2}+\ldots.+\binom{n}{n}^{2}=\binom{2n}{n}$$

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\ldots.+\binom{m}{p}\binom{n}{0}$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}=\binom{m+n}{p}$$

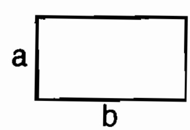
$$(1)\binom{n}{1}+(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}+\ldots.+(n)\binom{n}{n}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n.2^{n-1}$$

$$(1)\binom{n}{1}-(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}-\ldots(-1)^{n+1}(n)\binom{n}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k\binom{n}{k}=0$$

জ্যামিতির সূত্রসমূহ

আয়তক্ষেত্র



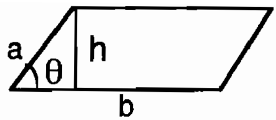
ক্ষেত্রফল $= ab$

পরিসীমা $= 2(a+b)$

সামন্তরিক

ক্ষেত্রফল = $bh = ab\sin\theta$

পরিসীমা = $2(a+b)$

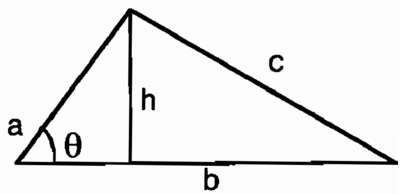


ত্রিভুজ

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} ab\sin\theta$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

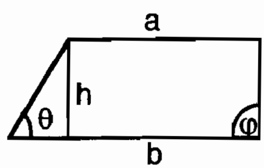
যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$



ট্র্যাপেজিয়াম

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} h(a+b)$

পরিসীমা = $a+b+h\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\right)$

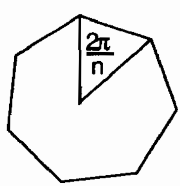


সুষম n–বহুভুজ (বাহুদৈর্ঘ্য b)

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4} nb^2 \cot\frac{\pi}{n}$

$= \frac{1}{4} nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$

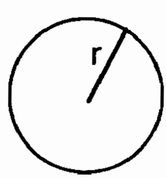
পরিসীমা = nb



r ব্যাসার্ধের বৃত্ত

ক্ষেত্রফল = πr^2

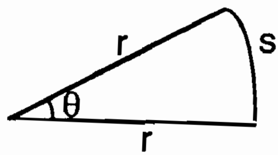
পরিসীমা = $2\pi r$



r ব্যাসার্ধের বৃত্তের চাপ

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r^2\theta$ (θ রেডিয়ানে)

চাপের দৈর্ঘ্য $s = r\theta$

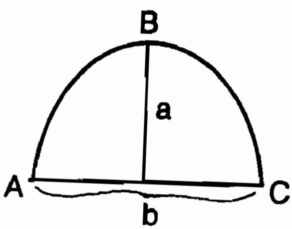


প্যারাবোলা

ক্ষেত্রফল $= \frac{2}{3} ab$

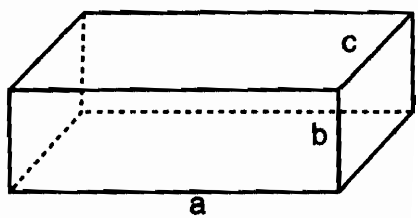
ABC চাপের দৈর্ঘ্য =

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+16a^2} + \frac{b^2}{8a} \ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+4a^2}}{b}\right)$$



আয়তাকার প্যারালেলেপিপেড

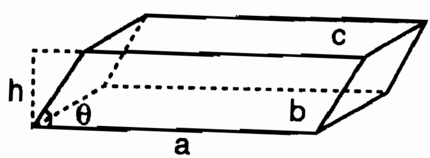
আয়তন $= abc$



পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + ac + bc)$

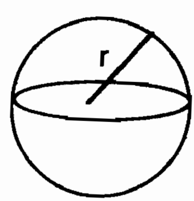
আয়তন $= Ah = abc \sin\theta$



r ব্যাসার্ধের গোলক

আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

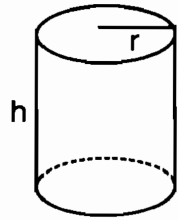
পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r^2$



r ব্যাসার্ধ এবং h উচ্চতার সরল বৃত্তীয় সিলিন্ডার

আয়তন $= \pi r^2 h$

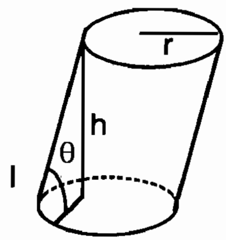
পার্শ্বের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$



r ব্যাসার্ধ এবং কৌণিক উচ্চতার বৃত্তীয় সিলিন্ডার

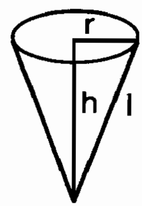
আয়তন $= \pi r^2 l = \dfrac{\pi r^2 h}{\sin\theta}$

পার্শ্বের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rl$



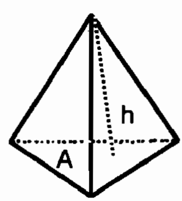
r ব্যাসার্ধ এবং h উচ্চতার সরল বৃত্তীয় কোণ

আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$



A ভূমি ও h উচ্চতাবিশিষ্ট পিরামিড

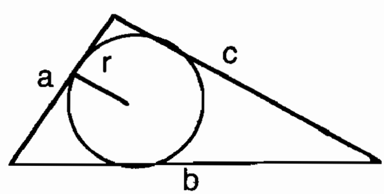
আয়তন $= \dfrac{1}{3} Ah$



অন্তবৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

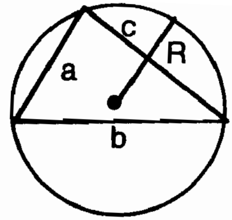
$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

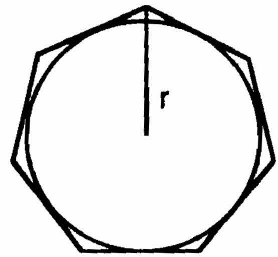
$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



r ব্যাসার্ধের বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম n বহুভুজ

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}nr^2 \sin\frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2}nr^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$$

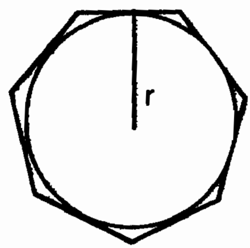
$$\text{পরিসীমা} = 2nr\sin\frac{\pi}{n} = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$$



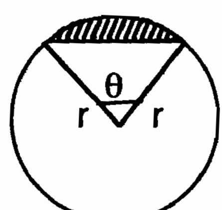
r ব্যাসার্ধের বৃত্তে পরিলিখিত সুষম n বহুভুজ

$$\text{ক্ষেত্রফল} = nr^2 \tan\frac{\pi}{n}$$

$$\text{পরিসীমা} = 2nr\tan\frac{\pi}{n}$$



$$\text{ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$



Goto List>

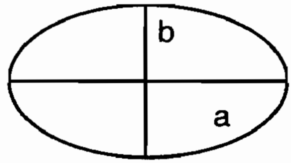
এলিপস (উপবৃত্ত)

ক্ষেত্রফল $= \pi ab$

পরিসীমা $= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta$

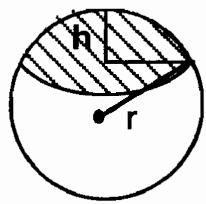
$\approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$

যেখানে $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$



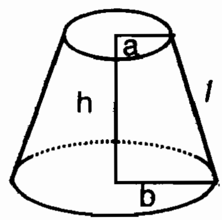
আয়তন $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$

পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$



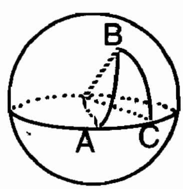
আয়তন $= \frac{1}{3} \pi h (a^2 + ab + b^2)$

পার্শ্বের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi (a + b)$
$\sqrt{h^2 + (b - a)^2} = \pi (a + b) l$



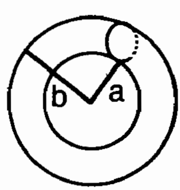
স্ফেরিক্যাল ত্রিভুজ (A, B, C কোণ)

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= (A + B + C - \pi) r^2$



আয়তন $= \frac{1}{4} \pi^2 (a + b)(b - a)$

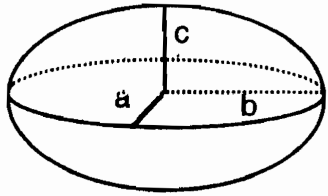
পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= \pi^2 (b^2 - a^2)$



Goto List>

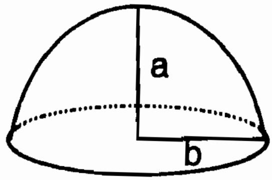
এলিপসয়েড

আয়তন $=\frac{4}{3}\pi abc$



প্যারাবলয়ড

আয়তন $=\frac{1}{2}\pi b^2a$



ত্রিকোণমিতির ফর্মুলা

$\sin(-A) = -\sin A$

$\cos(-A) = \cos A$

$\tan(-A) = -\tan A$

$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \pm \sin A\sin B$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A\tan B}$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A\cot B \pm 1}{\cot A \pm \cot B}$$

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \qquad \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos\frac{A}{2} \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A - \cot A$$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \qquad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \qquad \sin 4A = 4\sin A\cos A - 8\sin^3 A\cos A$$

$$\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1 \qquad \tan 4A = \frac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$$

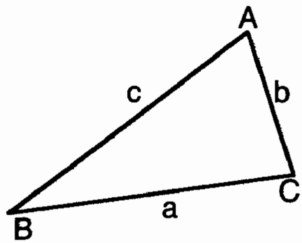
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos.C$$

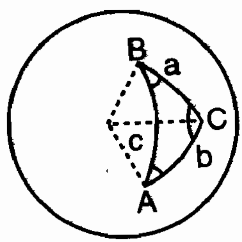
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\text{Sin}C}$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos.a$$



$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}, \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

জটিল সংখ্যা

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

$$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^p = r^p(\cos p\theta + i\sin p\theta)$$

এক্সপনেনসিয়াল এবং লগারিদম ফাংশন

$a^p.a^q = a^{p+q}$ $\quad a^p/a^q = a^{p-q}$ $\quad (a^p)^q = a^{pq}$

$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ $\quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ $\quad \log_a M^p = p \log_a M$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

এ্যালজেবরায়িক সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ $\quad Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}$, $\quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$

$s = \sqrt{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$ $\quad T = \sqrt{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

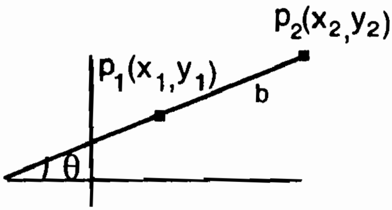
অ্যানালাইটিক্যাল জিওমেট্রির ফর্মুলা

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

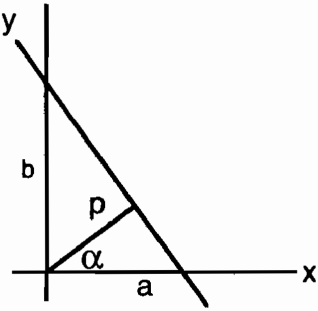


(x_1y_1) বিন্দু থেকে $Ax + By + C = 0$ সরলরেখার ওপর লম্বদূরত্ব

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

m_1, m_2 স্লোপ সংবলিত দুটি সরলরেখার মধ্যে কোণ ψ,

$$\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

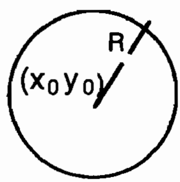


(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) বিন্দু (ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে) সংবলিত ত্রিভুজের

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

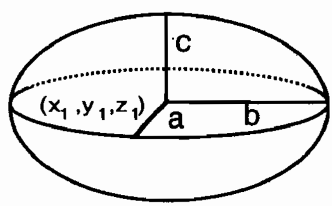
বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



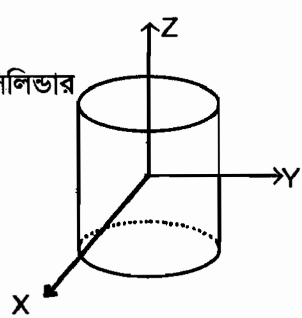
এলিপসয়েড

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

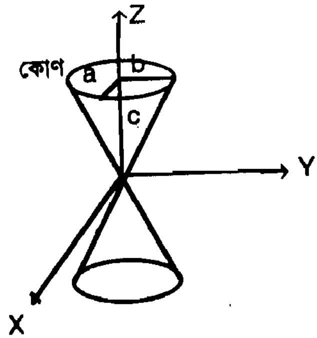


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

সিলিন্ডার

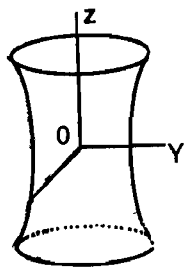


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$



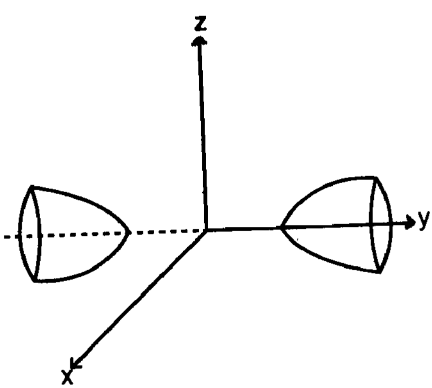
হাইপারবলয়ড

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



দুই শীটের হাইপারবলয়ড

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



গ : গ্রন্থ তালিকা

1. Mathematical Fun, Games and Puzzles by Jack Frohlichstein, Dover Publications Inc. New York.
2. Math-a-day by Theoni Pappas wide world Publishing, Tetra.
3. Mathematical Magic, William Simon Dover Publications, Inc.
4. Puzzles for Super Brains, by Steve Odell Sudha Publications Pvt. Ltd.
5. Fermat's Last theorem by Simon Singh Published by Fourth Estate Ltd.
6. The Mathematical Universe by William Dunham Published by John Wiley and Sons. Inc.