



Konvolusi

Esther Wibowo - esther.visual@gmail.com

Erick Kurniawan - erick.kurniawan@gmail.com



Filter / Penapis

- Digunakan untuk proses pengolahan citra:
 - Perbaiki kualitas citra (*image enhancement*)
 - Penghilangan derau
 - Mengurangi erotan
 - Penghalusan/pelembutan citra
 - Deteksi tepi, penajaman tepi
 - Dll.

Teori Konvolusi (1)

- Untuk mengaplikasikan penapis pada citra, digunakan metode **konvolusi**.
- Konvolusi 2 fungsi $f(x)$ dan $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x - \alpha)d\alpha$$

α = peubah bantu

- Fungsi diskrit:

$$f(x) * g(x) = \sum f(\alpha)g(x - \alpha)$$

Konvolusi 2D

- Fungsi malar :

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, b) g(x - a, y - b) da db$$

- Fungsi diskrit :

$$f(x, y) * g(x, y) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} f(a, b) g(x - a, y - b)$$

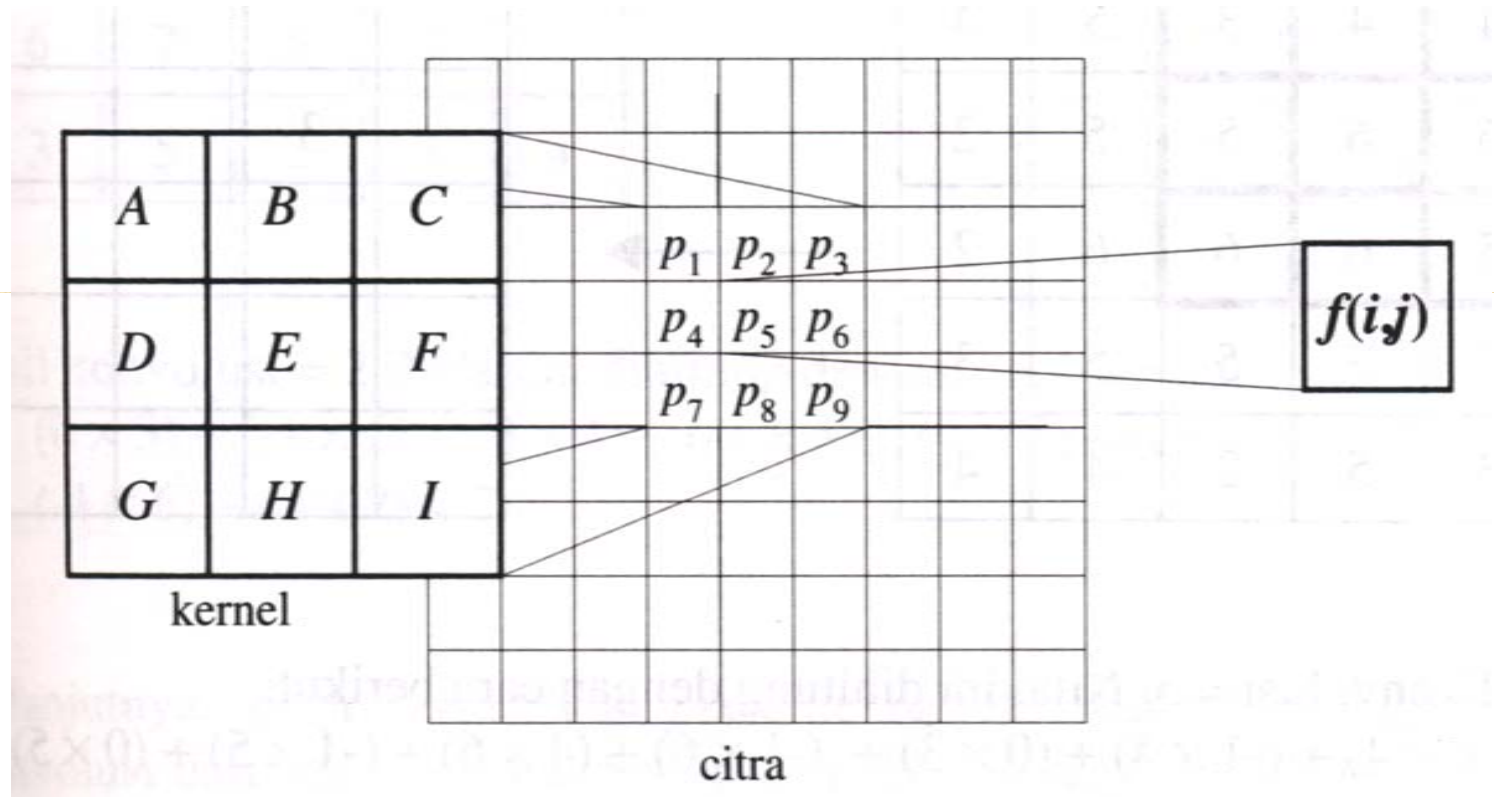
Teori Konvolusi (2)

- $g(x) \rightarrow$ *convolution mask / filter / kernel* atau *template*.
- Notasi lain :

$$f(x, y) * g(x, y) = f(x, y) \otimes g(x, y)$$

- Konvolusi bisa dinyatakan dalam matriks.
- Tiap elemen matriks penapis : **koefisien konvolusi**.
- Operasi konvolusi \rightarrow menggeser kernel pixel per pixel - hasil disimpan dalam matriks baru.

Ilustrasi Konvolusi



$$f(i, j) = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + Dp_4 + Ep_5 + Fp_6 + Gp_7 + Hp_8 + Ip_9$$

Contoh Konvolusi

- Citra $f(x,y)$ berukuran 5x5 dan sebuah *kernel* berukuran 3x3 :

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \bullet 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanda • \rightarrow posisi (0,0) dari kernel

4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4



	3			

4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4



	3	0		

4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4



	3	0	2	

(i)

4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4



	3	0	2	
	0			

(ii)

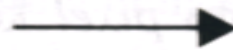
4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4



	4	0	8	
	0	2		

(iii)

4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4



	4	0	8	
	0	2	6	

Hasil Contoh Konvolusi

	4	0	8	
	0	2	6	
	6	0	2	

- Bila hasil konvolusi negatif, maka nilai dijadikan 0. (*clipping*)
- Bila hasil konvolusi $>$ derajat keabuan maksimum, maka nilai diubah ke derajat keabuan maksimum. (*clipping*)

Masalah!

- Bagaimana meng-konvolusi pixel pinggir (*border*) ?

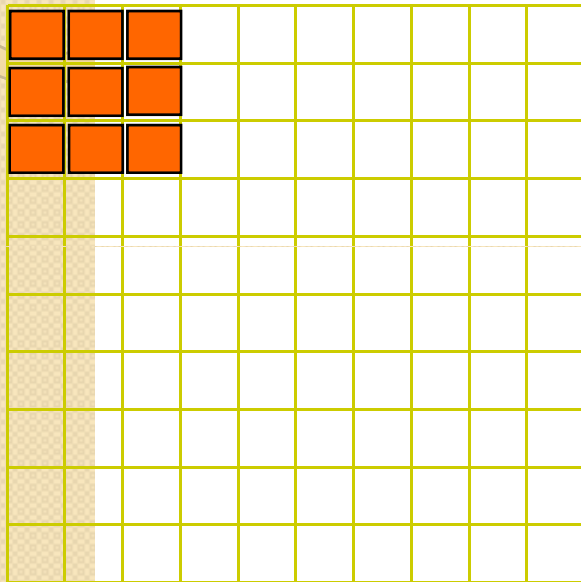
4	4	3	5	4	?
6	6	5	5	2	?
5	6	6	6	2	?
6	7	5	5	3	
3	5	2	4	4	



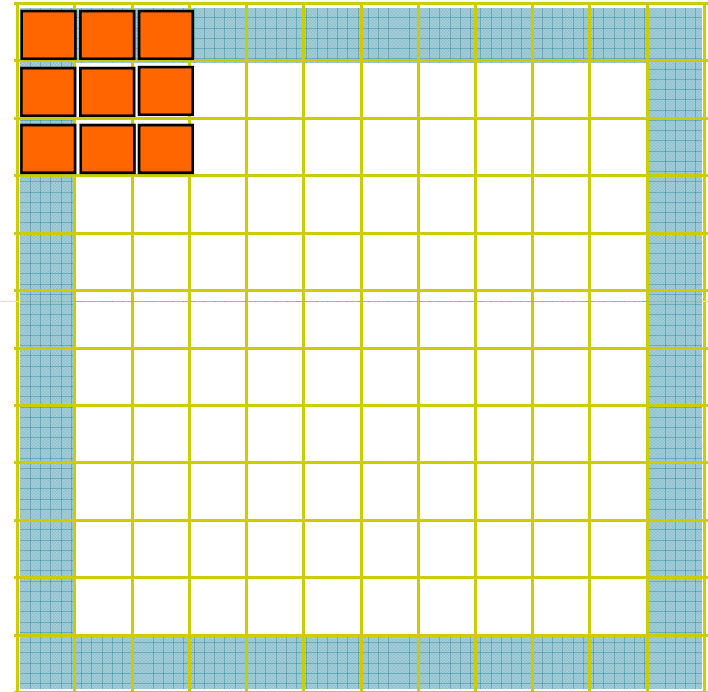
Beberapa Solusi

- Pixel-pixel pinggir diabaikan, tidak dikonvolusi → nilai pixel pinggir = nilai pada citra semula.
- Duplikasi elemen citra, misalnya elemen kolom pertama disalin ke kolom $M-1$ dst.
- Elemen bertanda “?” diasumsikan bernilai 0 atau konstanta lain.

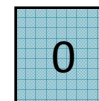
Memberi Elemen Tambahan



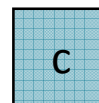
padding



diberi kolom dan baris tambahan, dan diisi dengan



nilai 0 (nol), atau



konstanta

Hasil Konvolusi Pinggir Diabaikan

4	4	3	5	4
6	4	0	8	2
5	0	2	6	2
6	6	0	2	3
3	5	2	4	4

- Solusi ketiga elemen pinggir tadi mengasumsikan bahwa pixel pinggir berukuran amat kecil → mata tidak bisa melihat.

Contoh Aplikasi Konvolusi



(a) Citra Lena semula

$$* \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

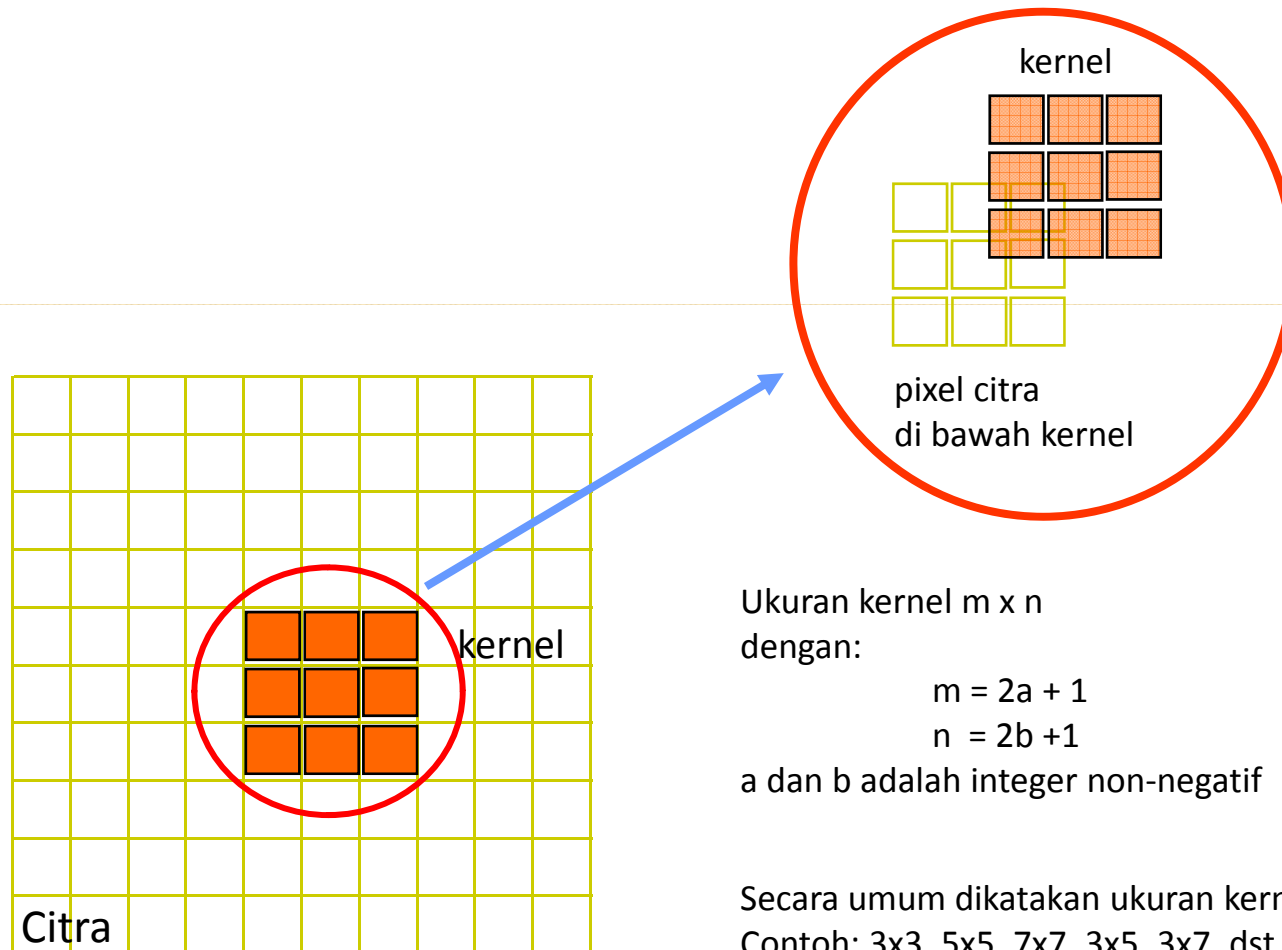


(b) Citra Lena sesudah konvolusi

Penapisan (*Filtering*)

- Penapisan (*filtering*) termasuk pengolahan lokal, yaitu dalam transformasinya melibatkan:
 - nilai-nilai pixel tetangganya
 - nilai-nilai suatu sub-citra yang memiliki dimensi yang sama.
 - Sub-citra ini dikenal sebagai *filter*, *mask*, *kernel*, *template*, atau *window*.
 - Nilai dalam sub-citra tidak disebut sebagai nilai intensitas pixel, tetapi sebagai koefisien
- Penapisan yang dibicarakan saat ini adalah penapisan spasial (*spatial filtering*)

Konsep Penapisan



Ukuran kernel $m \times n$
dengan:

$$m = 2a + 1$$

$$n = 2b + 1$$

a dan b adalah integer non-negatif

Secara umum dikatakan ukuran kernel selalu ganjil/gasal

Contoh: 3x3, 5x5, 7x7, 3x5, 3x7, dst.

Pada umumnya $m = n$

Penapis (*filter*)

- Beberapa penapis yang sering dipakai:
 - Lolos-bawah (*low-pass*)
 - Median
 - Lolos-atas (*high-pass*)
 - Laplacian
 - Directional
 - Roberts
 - Sobel
 - Gaussian

Penapis lolos-bawah

- Penapis lolos-bawah (*low-pass filter*) juga disebut penapis perataan (*averaging filter*)
- Penapisan ini akan menghasilkan citra yang lebih lembut (*smooth*) sehingga terkesan kabur (*blur*); dan mengurangi kisaran aras abu-abu
- Jumlah koefisien = 1 \rightarrow > 1 menghasilkan penguatan.

$$\frac{1}{9} \times$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Kernel penapis perata 3x3

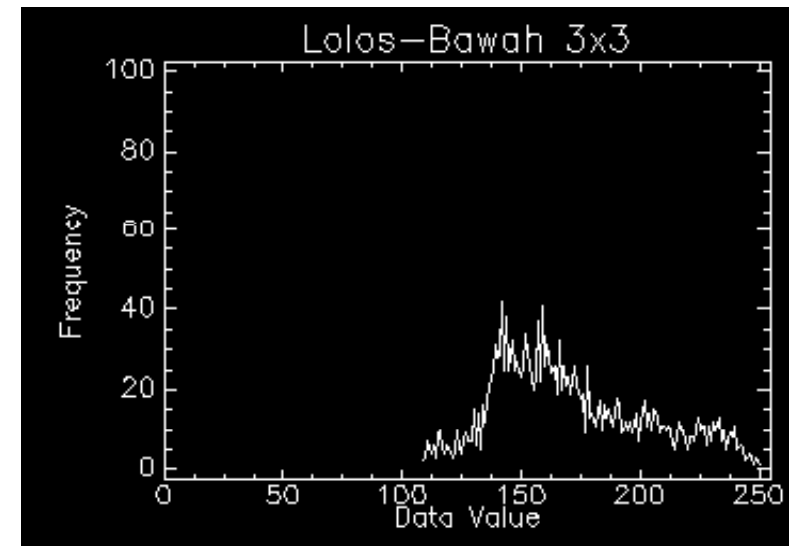
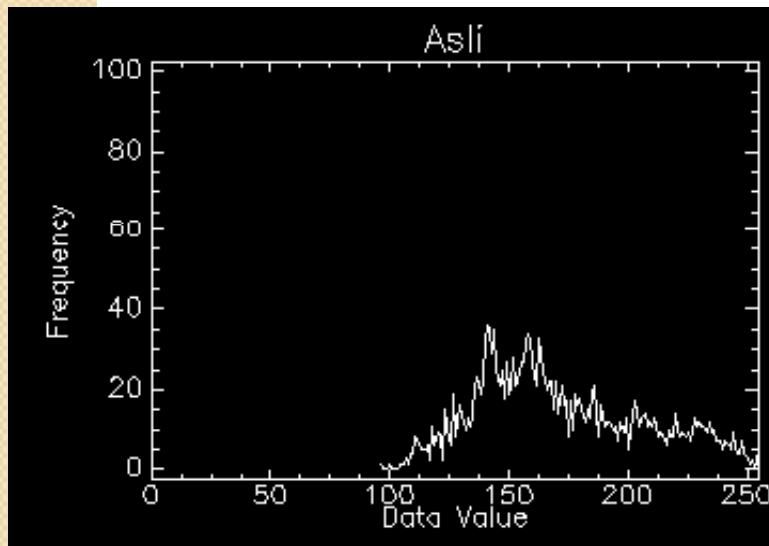
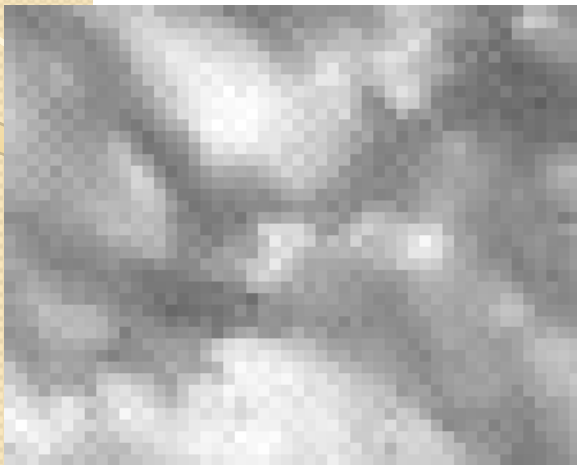
Penapis dengan semua koefisien sama disebut penapis kotak (*box filter*)

$$\frac{1}{16} \times$$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

Kernel penapis perata berbobot (*weighted averaging*) 3x3

Penapis lolos-bawah



Matriks hasil lolos-bawah

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

$$\begin{aligned} 142 &= (138 + 125 + 145 \\ &\quad + 145 + 139 + 133 \\ &\quad + 154 + 157 + 145) / 9 \\ &= 1281 / 9 = 142.33 \end{aligned}$$

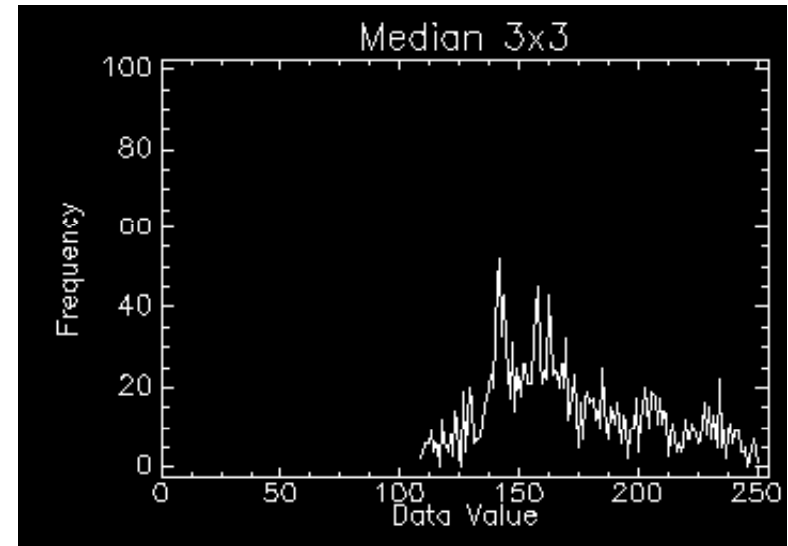
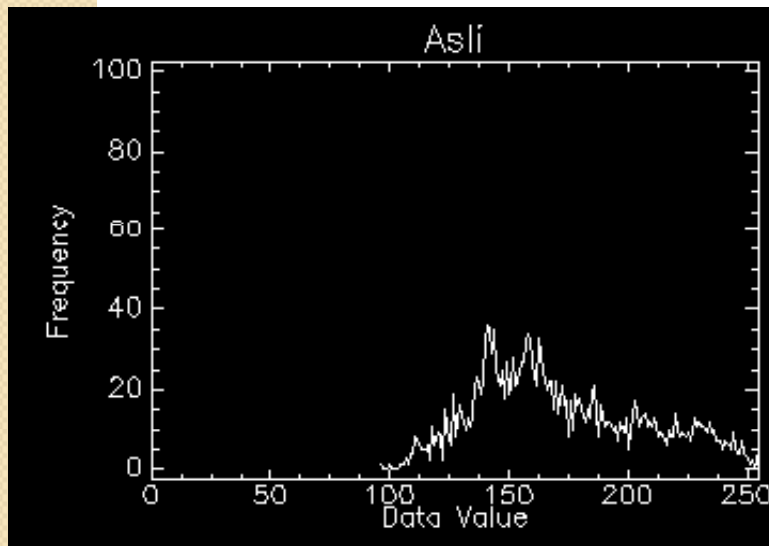
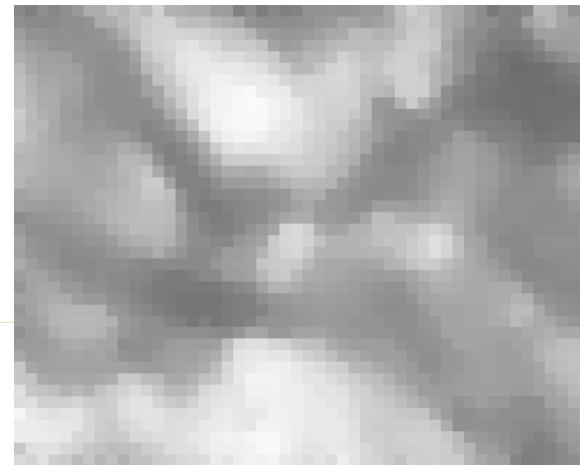
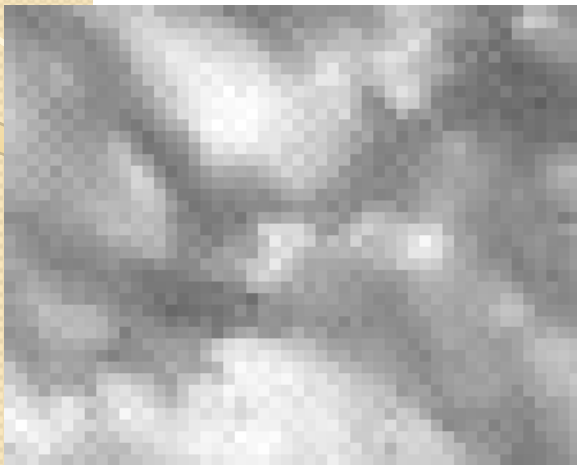
135	135	135	138	143	150	160	172	180	187
142	139	136	138	141	145	152	161	171	182
151	147	142	141	142	142	144	149	159	172
161	157	151	150	146	145	142	143	148	161
169	166	159	159	155	152	145	142	143	151
178	172	165	165	164	159	150	142	141	146
183	176	166	167	166	163	153	144	140	142
186	179	170	165	163	160	152	144	140	142
190	184	172	165	157	155	149	145	140	139
194	187	176	165	157	152	148	144	141	139

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis median

- Penapis median merupakan penapis spasial nonlinear, yang hasil prosesnya berdasarkan pada peringkat (rangking) nilai pixel
- Median dalam statistik berarti mencari nilai yang berada di tengah deretan semua angka yang telah diurutkan
- Penapis median ini bermanfaat untuk mengatasi masalah derau (*noise*).

Penapis median



Matriks hasil median

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

125 133 138 139 145 145 145 154 157



median

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	139	138	139	143	143	147	171	173	185
157	145	145	143	145	143	145	147	158	175
165	157	154	146	146	146	146	146	147	158
174	167	159	159	158	147	146	143	143	146
185	169	162	162	162	158	146	142	141	145
190	177	166	167	162	161	149	143	141	141
192	180	170	170	162	159	149	141	140	141
192	184	172	170	158	157	147	142	140	140
205	186	175	170	158	154	145	145	141	140

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis lolos-atas

- Penapisan lolos-atas (*high-pass filtering*) akan menghasilkan citra yang lebih tajam (*sharp*) atau rinci dan histogram yang relatif sempit yang terpusat di tengah aras abu-abu nol
- $\sum \text{koefisien} = 0 \rightarrow$ komponen freq. rendah turun.
- $\sum \text{koefisien} = 1 \rightarrow$ komponen freq. rendah tetap.

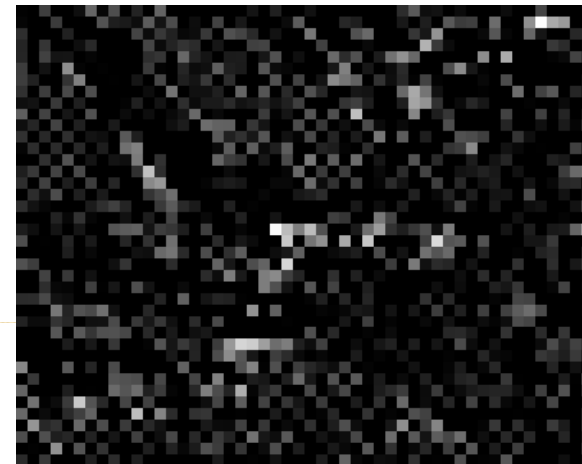
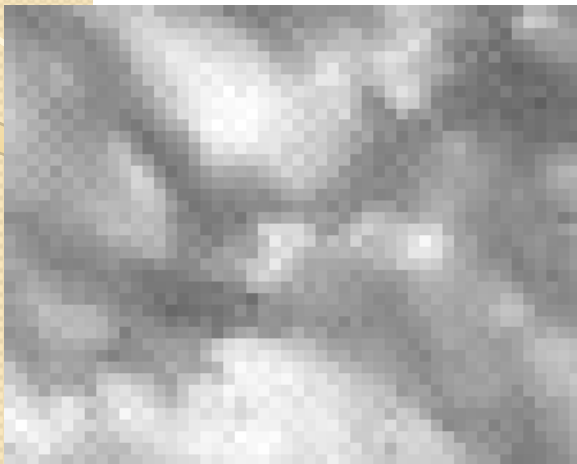
-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

$$\Sigma = 0$$

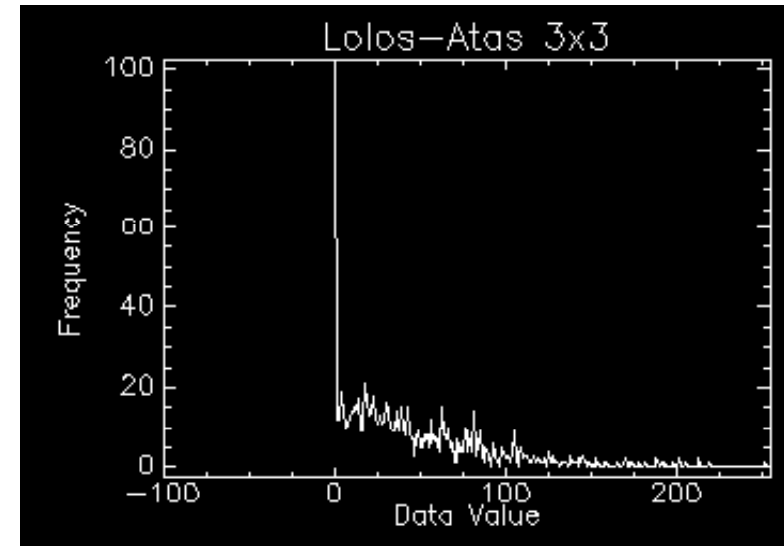
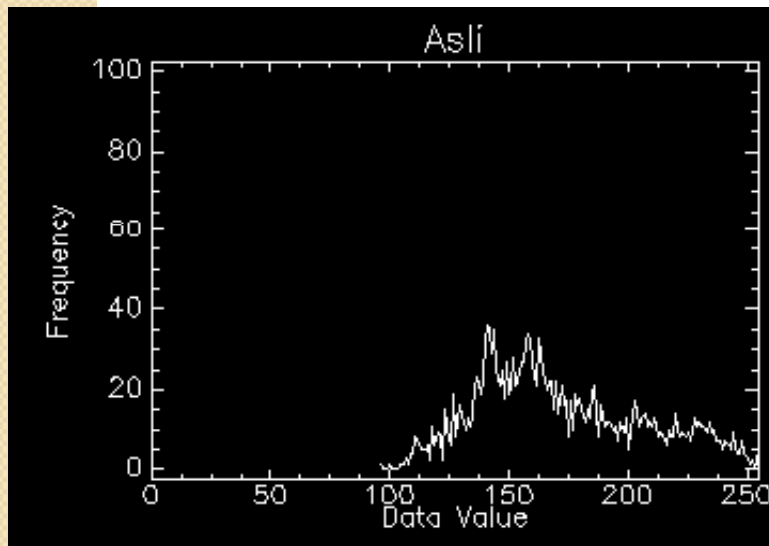
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

$$\Sigma = 1$$

Penapis lolos-atas



-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1



Matriks hasil lolos-atas

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

$$\begin{aligned}
 0 &= (-138 - 125 - 145 \\
 &\quad -145 + 8 \times 139 - 133 \\
 &\quad -154 - 157 - 145) \\
 &= -1142 + 1112 = -30
 \end{aligned}$$

2	0	62	0	0	14	101	6	78	0
5	0	0	59	0	0	0	82	30	26
46	0	0	0	33	0	0	0	0	0
36	0	53	0	0	14	41	0	0	0
37	0	65	20	21	0	5	0	0	0
60	0	18	0	142	4	0	2	0	0
61	33	0	0	51	128	0	0	1	0
48	0	61	0	73	0	77	0	0	0
14	18	0	57	0	31	0	0	0	3
94	0	66	0	22	0	81	0	0	11

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas



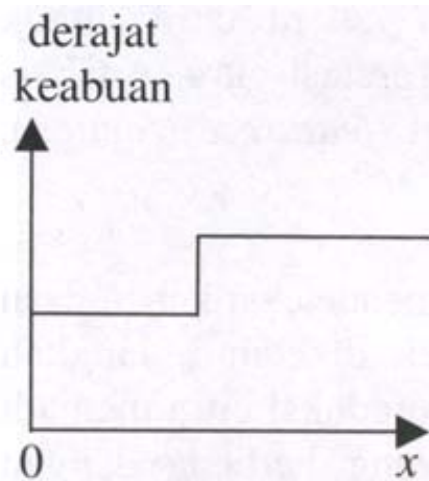
Edge Detection (Pendeteksian Tepi)

- Analisis citra: ekstraksi ciri - segmentasi - klasifikasi.
 - Pertama harus **deteksi keberadaan tepi**.
 - Segmentasi : mereduksi citra menjadi objek atau region.
 - Klasifikasi : memetakan segmen-segmen dalam kelas dan objek yang berbeda.

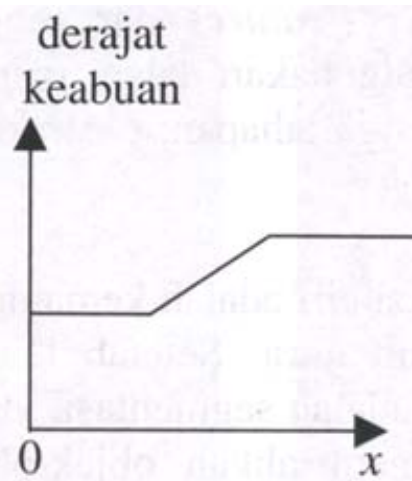
Tepi Dalam Citra Digital

- Tepi curam
 - Perubahan intensitas tajam, berkisar 90°
- Tepi landai

 - Tepi lebar, sudut arah kecil. Terdiri dari sejumlah tepi-tepi lokal yang lokasinya berdekatan.
- Tepi mengandung derau
 - Lakukan operator *image enhancement* dahulu sebelum mendeteksi tepi. Mis. Operator Gaussian (menghaluskan citra).



(a) Tepi curam



(b) tepi landai



(c) tepi curam dengan derau



(d) *break down* tepi landai

4	4	4	8	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8	8

(e) citra dengan tepi

4	4	5	6	7	8	8	8
4	4	5	6	7	8	8	8
4	4	5	6	7	8	8	8
4	4	5	6	7	8	8	8
4	4	5	6	7	8	8	8

(f) citra dengan tepi landai

Penapis Laplacian

- Disebut pula Operator Turunan Kedua.
 - Termasuk dalam penapis lolos tinggi.
 - Lebih akurat khususnya pada tepi-tepi curam.
-

Penapis Laplacian

Penapis dari rumus Laplacian

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Penapis dari rumus Laplacian yang diperluas

1	1	1
1	8	1
1	1	1

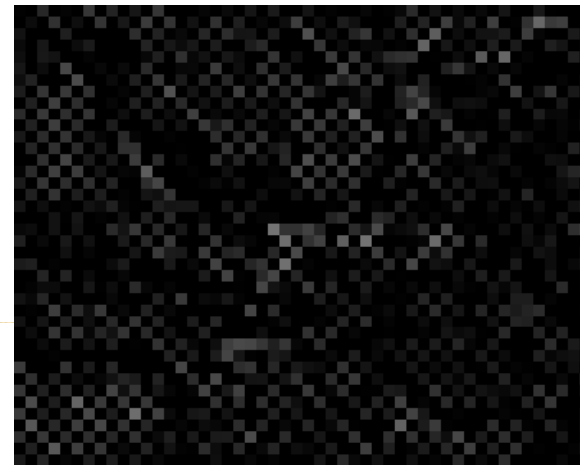
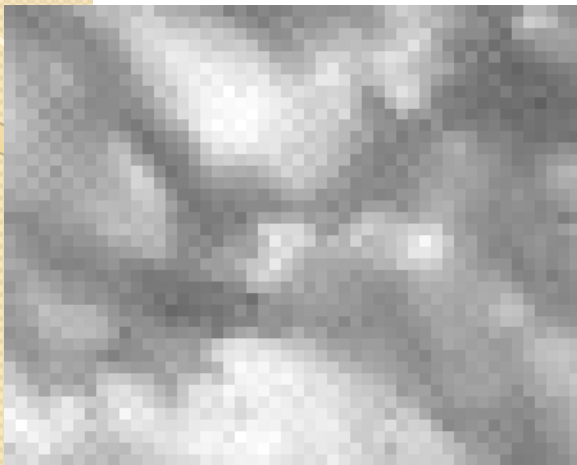
Penapis Laplacian lain

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

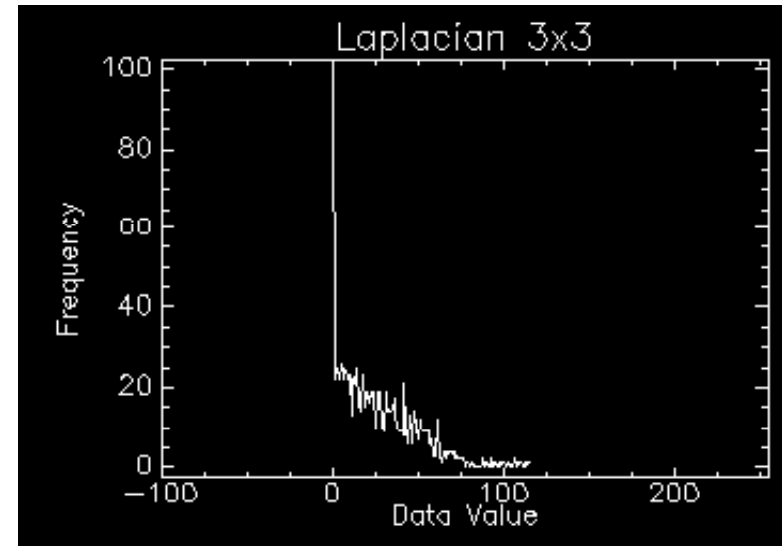
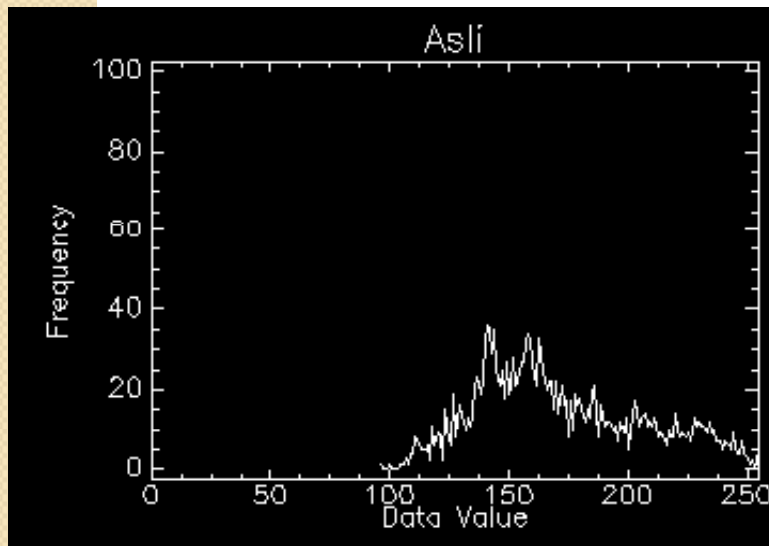
Penapis Laplacian untuk bobot lebih pada pixel tengah di antara pixel tetangga

1	4	1
4	-20	4
1	4	1

Penapis Laplacian



0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0



Matriks hasil Laplacian

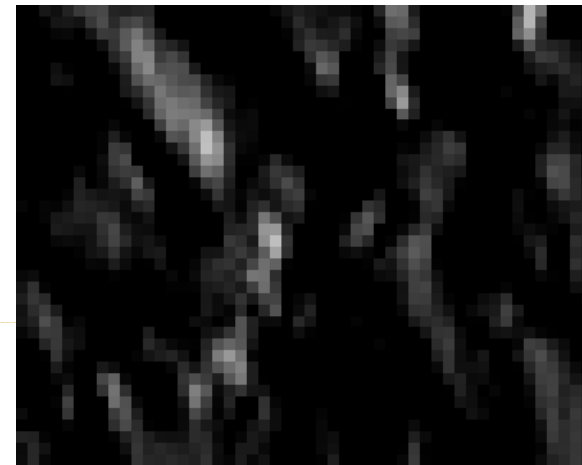
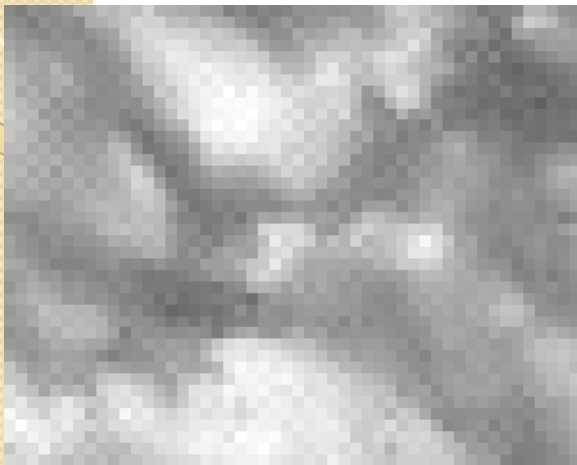
136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

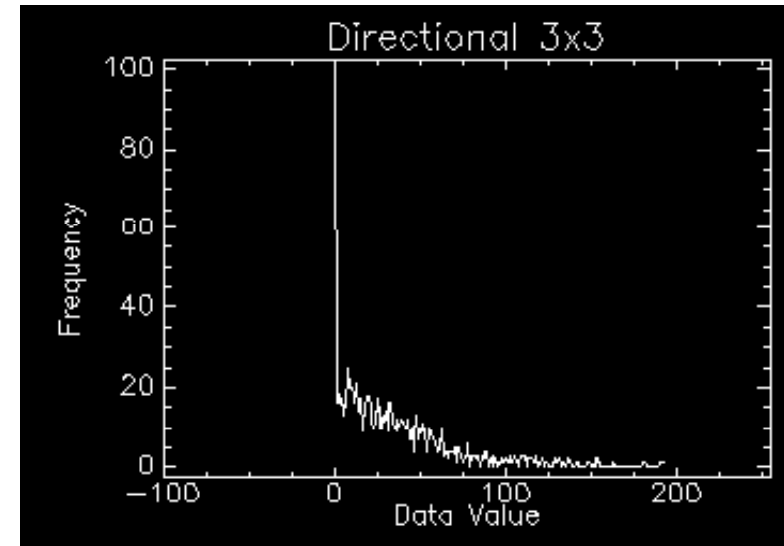
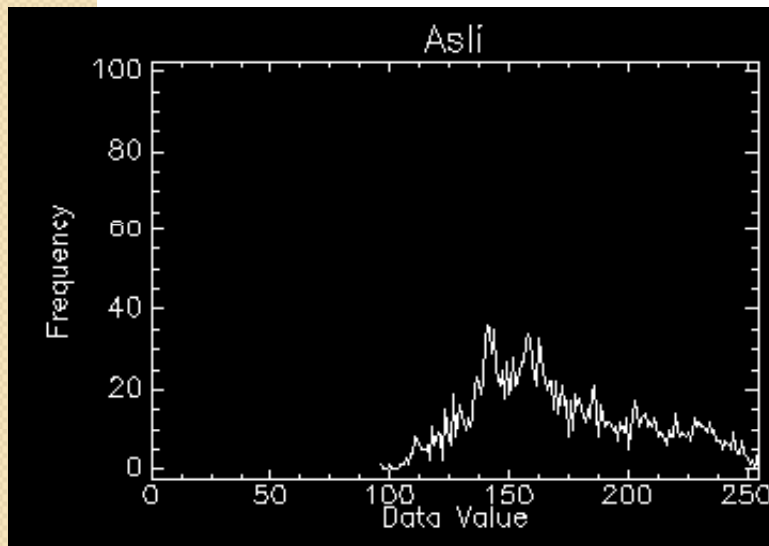
2	0	39	0	4	0	54	0	35	0
0	12	0	49	0	14	0	52	0	24
18	0	0	0	31	0	0	0	0	0
10	0	23	0	0	12	26	0	0	0
14	0	24	19	0	0	4	0	0	0
22	0	12	0	71	0	0	8	0	10
13	34	0	0	0	75	0	0	10	0
28	0	53	0	56	0	48	0	0	5
0	32	0	62	0	45	0	0	6	0
42	0	56	0	46	0	52	0	0	14

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis Directional



-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1



Matriks hasil directional

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

0	0	23	15	34	57	68	72	36	32
0	0	3	21	23	18	55	76	42	64
0	0	0	6	8	0	20	58	56	89
0	0	0	0	0	0	0	16	51	91
0	0	0	0	0	0	0	0	36	60
0	0	0	15	2	0	0	0	9	42
0	0	0	19	15	0	0	0	0	28
0	0	0	0	1	0	0	0	0	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis Roberts

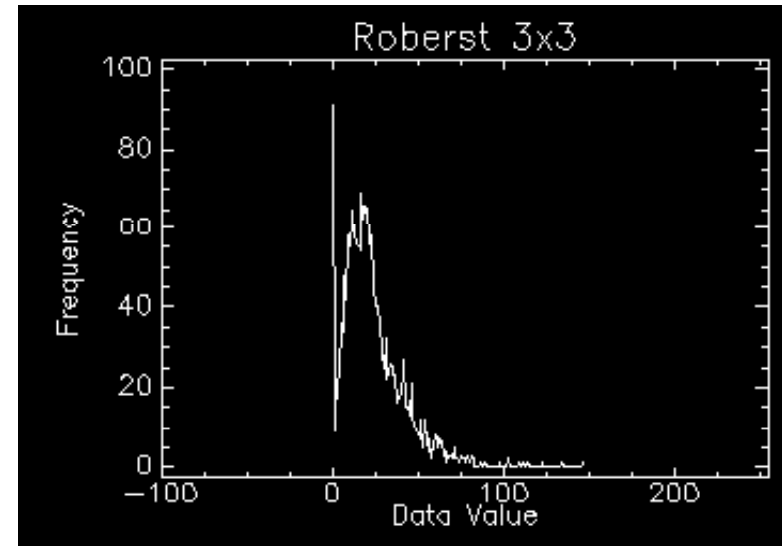
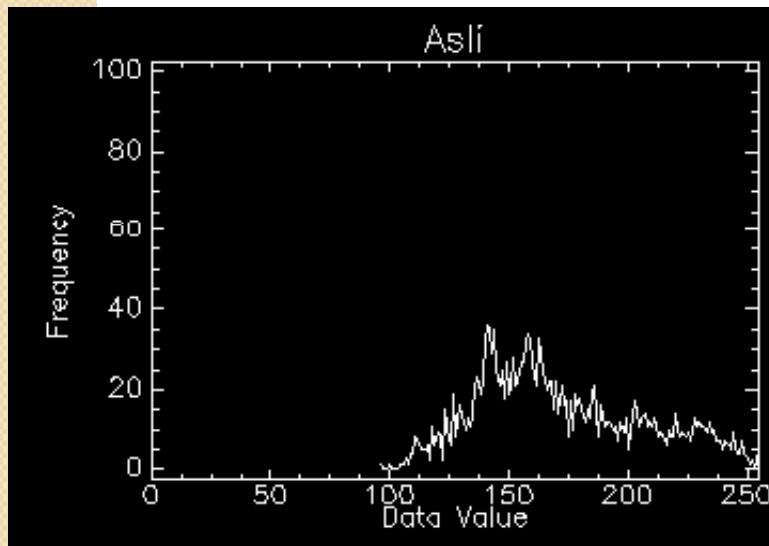
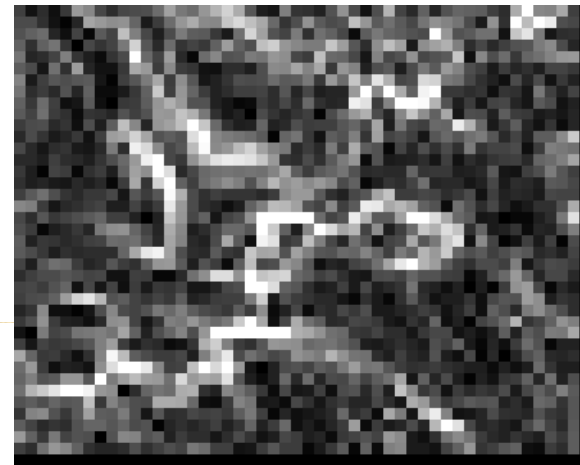
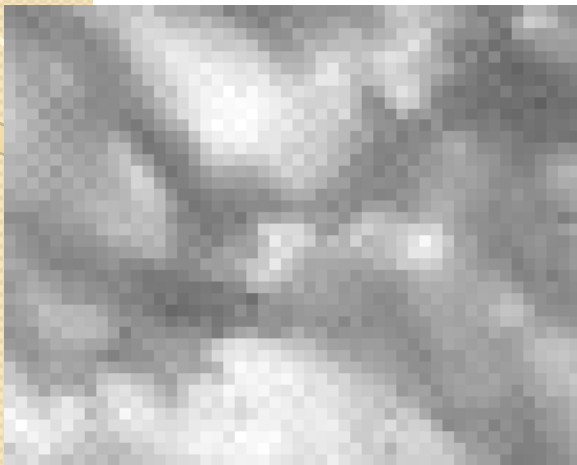
-1	0	0	-1
0	1	1	0

p_1	p_2	p_3
p_4	p_5	p_6
p_7	p_8	p_9

Citra semula

$$p'_5 = |p_9 - p_5| + |p_8 - p_6|$$

Penapis Roberts



Matriks hasil Roberts

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

$$30 = |145 - 139| + |157 - 133|$$

$$= |6| + |24|$$

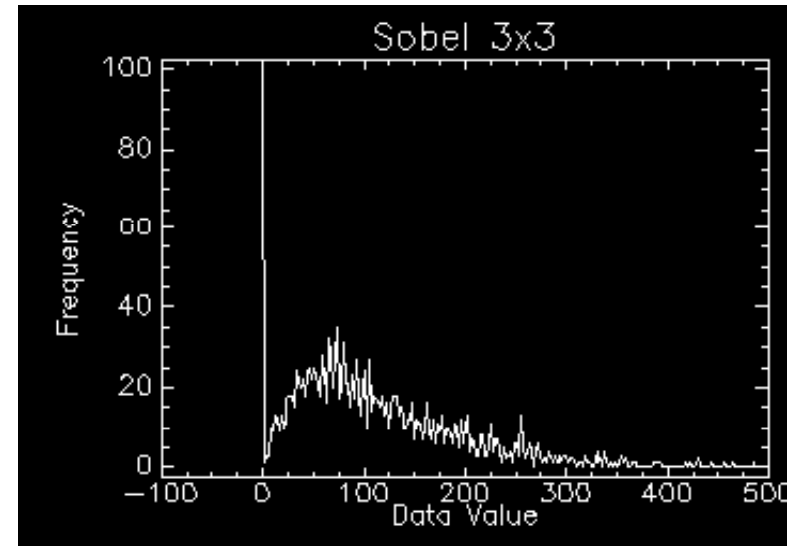
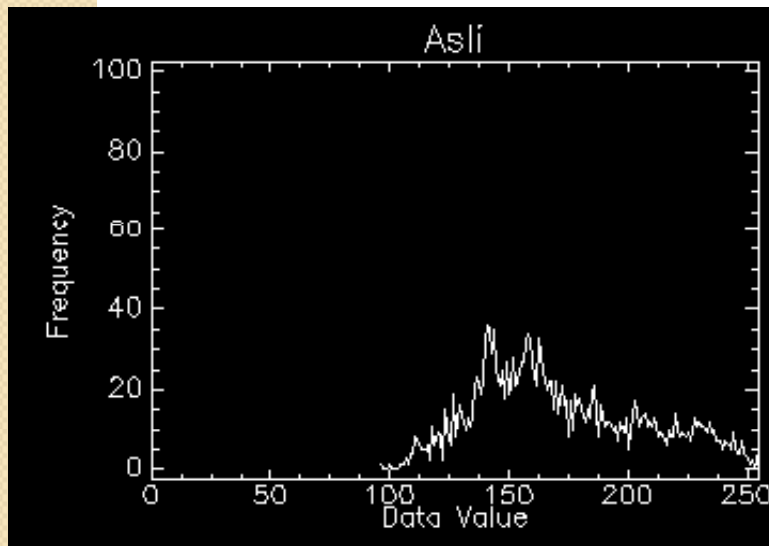
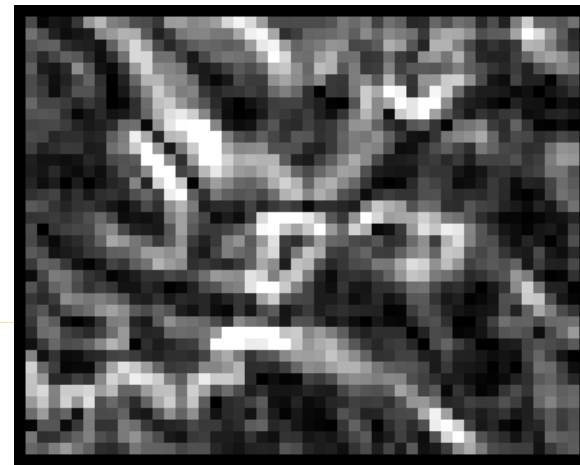
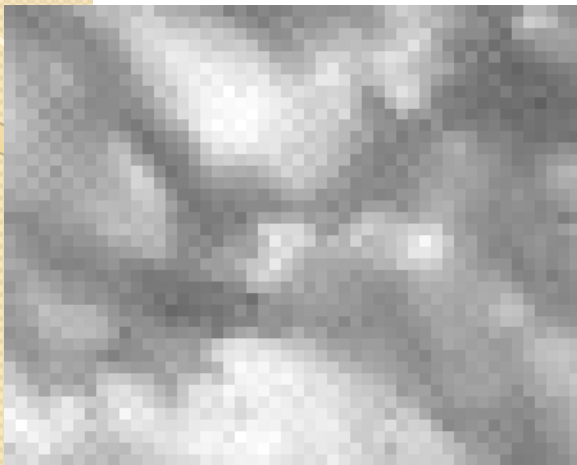
18	6	13	5	16	42	37	20	13	20
21	21	14	6	2	11	45	42	39	40
23	27	30	11	5	19	3	25	19	52
27	14	27	32	15	1	20	15	19	33
32	11	13	19	35	15	9	4	15	21
26	21	7	31	14	43	11	6	6	16
36	8	18	24	22	24	25	7	2	18
32	13	17	12	23	11	27	4	4	8
27	16	30	18	5	7	25	5	1	16
25	19	31	17	14	4	15	14	11	23

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis Sobel

-1	-2	-1	-1	0	1
0	0	0	-2	0	2
1	2	1	-1	0	1

Penapis Sobel



Matriks hasil Sobel

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

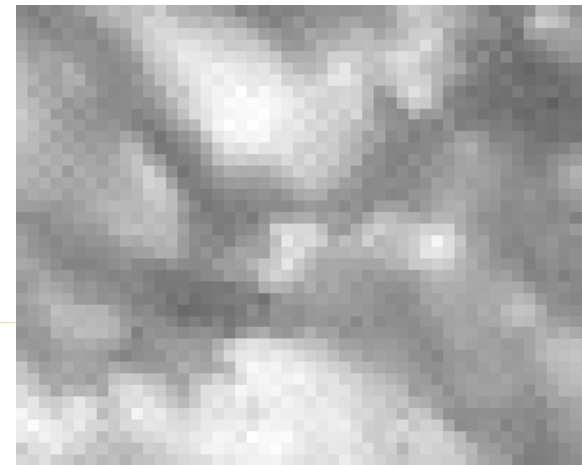
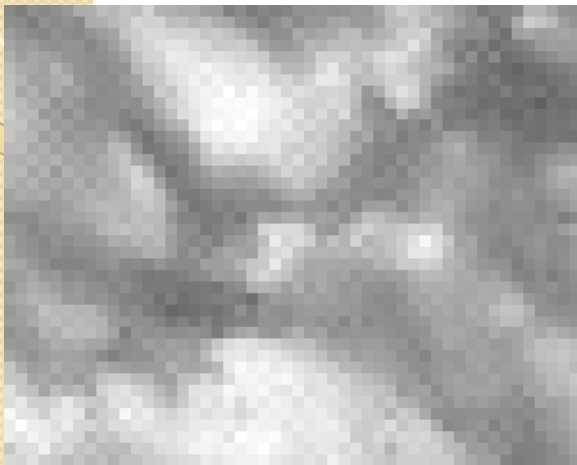
Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	102	20	38	32	76	192	234	166	154
0	148	106	50	26	36	44	174	196	226
0	112	124	128	66	52	48	34	128	202
0	100	60	94	128	116	66	28	66	148
0	126	44	36	62	182	116	34	22	78
0	102	70	30	52	92	130	66	8	52
0	104	82	26	62	110	110	74	10	40
0	136	94	94	82	56	80	60	6	18
0	110	114	110	68	18	38	60	34	40

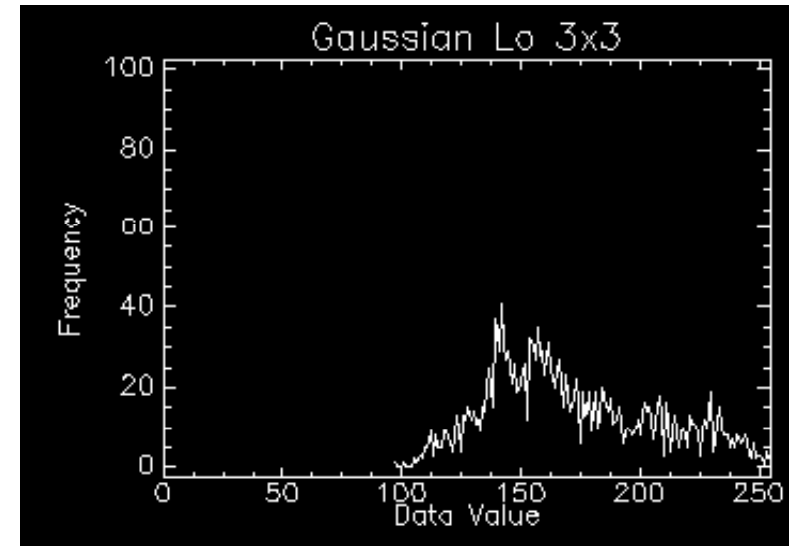
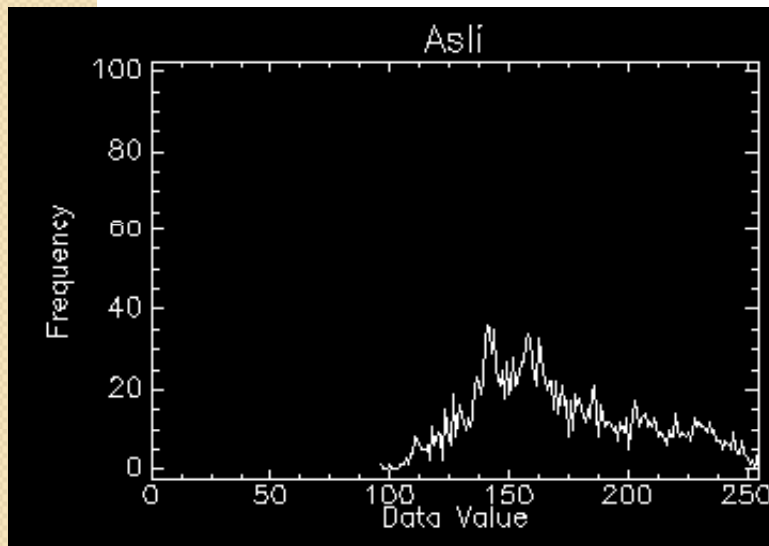
$$\begin{aligned}
 106 &= \left| (154 + 2 \times 157 + 145) - (138 + 2 \times 125 + 145) \right| \\
 &\quad + \left| (145 + 2 \times 133 + 145) - (138 + 2 \times 145 + 154) \right| \\
 &= \left| 633 - 533 \right| + \left| 556 - 582 \right| \\
 &= 90 + 16
 \end{aligned}$$

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis Gaussian-bawah



0.0008	0.0286	0.0008
0.0286	1.0000	0.0286
0.0008	0.0286	0.0008



Matriks hasil Gaussian-bawah

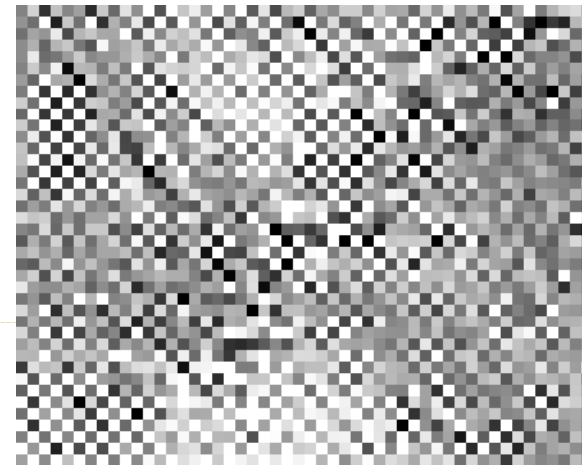
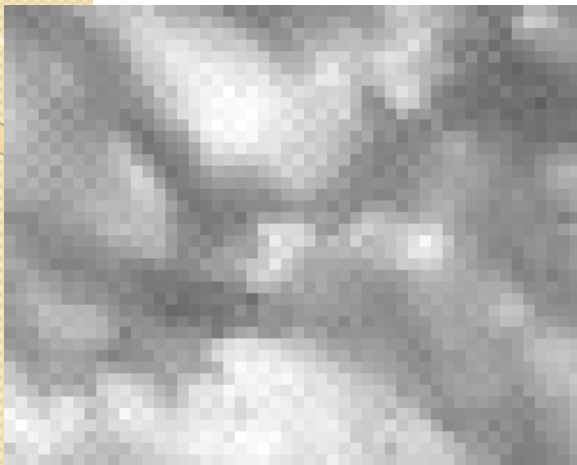
136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

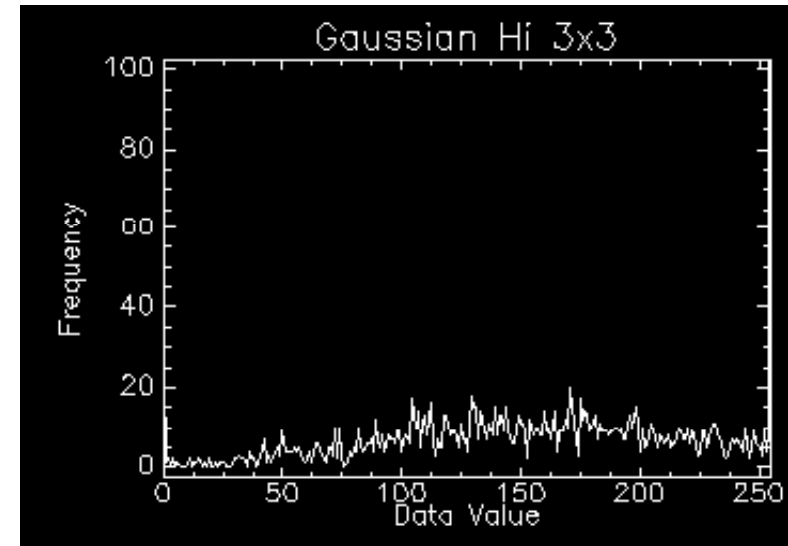
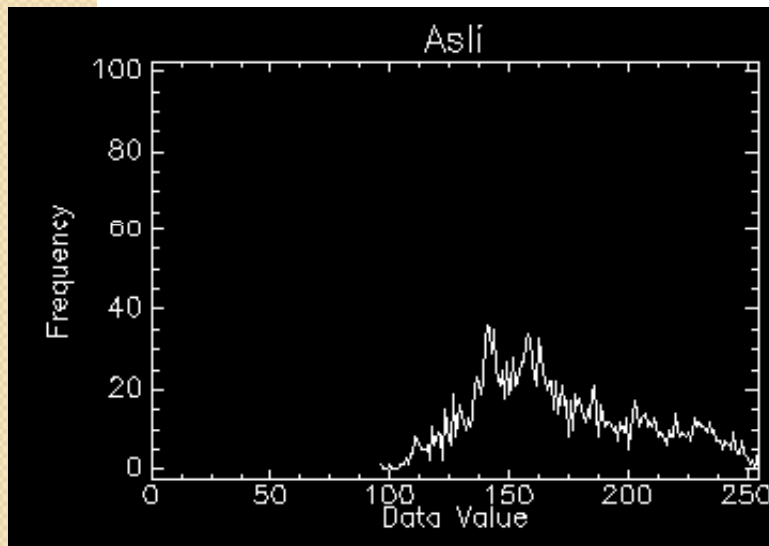
135	127	140	135	142	152	170	173	188	184
143	137	126	143	138	144	138	169	175	184
156	145	139	134	145	139	136	147	157	165
164	154	156	145	143	146	146	134	146	158
173	158	166	161	157	147	145	140	142	149
184	169	166	159	178	160	146	142	137	144
189	179	162	162	172	176	149	141	140	139
191	167	175	159	170	157	159	144	137	140
192	185	170	170	148	157	147	137	139	140
203	184	182	154	158	143	155	142	140	140

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas

Penapis Gaussian-atas



-0.0008	-0.0286	-0.0008
-0.0286	0.1052	-0.0286
-0.0008	-0.0286	-0.0008



Matriks hasil Gaussian-atas

136	127	142	135	143	152	172	173	189	184
143	138	125	145	138	145	137	171	175	185
157	145	139	133	146	139	136	147	157	164
165	154	157	145	143	147	147	133	146	158
174	158	167	162	158	147	146	140	142	149
185	169	167	159	180	160	146	143	137	145
190	180	161	162	172	178	149	141	141	139
192	166	177	158	172	156	161	144	137	141
192	186	170	172	146	159	147	137	140	140
205	184	184	152	160	142	157	142	140	141

Matriks citra semula
Sampel 10x10 kiri atas

131	210	50	193	134	160	44	201	105	226
147	111	255	31	200	113	255	48	177	129
113	164	149	234	74	181	199	168	167	255
140	176	101	181	199	119	85	247	160	171
140	234	108	118	156	202	136	150	151	175
131	202	138	241	11	184	179	124	191	123
156	101	255	169	177	1	218	172	118	199
125	255	53	255	41	255	48	144	179	130
206	112	255	29	255	55	206	197	126	157
104	255	53	255	55	255	34	168	172	108

Matriks citra hasil penapisan
Sampel 10x10 kiri atas