TURUNAN
(*DIFERENSIAL*)

Edi Sutomo, M.Pd
e_mail: edisutomo1985@gmail.com
twitter: @ed_1st

Abstrak: Turunan merupakan kajian yang sangat penting dari tema kalkulus dan salah satu tema yang memiliki banyak aplikasi pada kajian ilmu lain. Makalah ini menjelaskan garis besar tentang turunan beserta sifat-sifat dan beberapa contoh penggunaannya. Beberapa pembuktian diberikan untuk memperjelas kajian namun cocok untuk siswa di level SMA/MA. Makalah ini memberikan deskripsi yang bersifat analisis namun dikhususkan pada kajian turunan di SMA/MA. Makalah ini tidak memberikan banyak latihan soal maupun persoalan yang berkaitan dengan turunan karena memang difokuskan pada teori turunan, untuk latihan soal yang beragam akan dibahas pada makalah berikutnya.

Kata Kunci: *Kalkulus, Turunan*

A. PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan topik yang sangat umum di SMA dan universitas dizaman modern ini. Sejarah mencatat bahwa kalkulus telah dikembangkan terlebih dahulu di Mesir, Yunani, Tiongkok, India, Iraq, Persia, dan Jepang, namun penggunaaan kalkulus modern dimulai di Eropa pada abad ke-17 ketika Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz mengembangkan prinsip dasar kalkulus. Hasil kerja mereka kemudian memberikan pengaruh yang kuat terhadap perkembangan fisika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan modern, aplikasi kalkulus khususnya diferensial meliputi perhitungan kecepatan dan percepatan, kemiringan suatu kurva, dan optimalisasi. Aplikasi dari kalkulus integral meliputi perhitungan luas, volume, panjang busur, pusat massa, kerja, dan tekanan. Aplikasi lebih jauh meliputi deret pangkat dan deret Fourier.

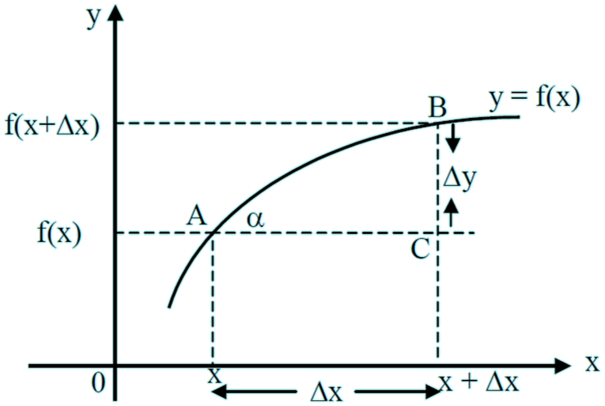
Kalkulus dapat digunakan untuk mendapatkan pemahaman yang lebih rinci mengenai ruang, waktu, dan gerak. Selama berabad-abad, para matematikawan dan filsuf berusaha memecahkan paradoks yang meliputi pembagian bilangan dengan nol ataupun jumlah dari deret takterhingga. Seorang filsuf Yunani kuno memberikan beberapa contoh terkenal seperti paradoks Zeno. Kalkulus memberikan solusi, terutama di bidang limit dan deret tak terhingga, yang kemudian berhasil memecahkan paradoks tersebut.

Turunan selain sebagai salah satu kajian matematika yang digunakan untuk menyatakan hubungan kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau varianel bebas lainnya juga merupakan salah satu dasar atau fondasi dalam analisis sehingga penguasaan terhadap berbagai konsep dan prinsip turunan fungsi dapat membantu dalam memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Suatu fungsi dapat dianalisis berdasarkan ide naik atau turun, keoptimalan, dan titik beloknya dengan menggunakan konsep turunan. Pada bagian berikut, akan dikaji pelbagai permasalahan nyata serta mempelajari beberapa kasus untuk menemukan konsep turunan secara holistik. Dalam kehidupan sehari-hari, sering dijumpai apa yang disebut dengan laju perubahan. Laju perubahan erat kaitannya dengan kecepatan. Pada pembahasan berikut, penulis terfokus pada subbab turunan fungsi Trigonometri dan aplikasinya.

B. PENGERTIAN DASAR

Secara umum sebelum mendiskusikan tema tentang turunan, perlu diingat kembali konsep tentang limit, hal ini cukup diperlukan mengingat turunan merupakan kelanjutan dari kajian tentang limit. Teori tentang limit sebuah fungsi merupakan "akar" dari aljabar kalkulus. Oleh sebab itu uraian mengenai kalkulus selalu diawali dengan bahasan tentang limit. Untuk selanjutnya, kajian tentang diferensiasi dan integral merupakan dua operasi matematis yang saling berkebalikan, seperti halnya antara penjulmahan dan pengurangan atau antara perkalian dan pembagian. Pada intinya,diferensial (teori tentang diferensiasi) berkenaan dengan penentuan tingkat perubahan suatu fungsi, sedangkan integral (teori tentangintegrasi) berkenaan dengan pembentukan persamaan sutau fungsi apabila tingkat perubahan fungsi yang bersangkutan diketahui

Untuk memahami konsep dasar turunan, tinjaulah dua masalah yang kelihatannya berbeda. Masalah pertama adalah masalah garis singgung atau gradien, sedangkan masalah kedua adalah masalah kecepatan sesaat. Satu dari kedua masalah itu menyangkut geometri dan lainnya yang menyangkut mekanika seolah – olah terlihat seperti tidak ada hubungan. Sebenarnya, kedua masalah itu merupakan persoalan yang identik. Agar lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut.



Gambar 1. Perubahan Nilai Fungsi

Perhatikan perubahan nilai fungsi $y = f(x)$ yang awalnya $f(x)$ bergerak menuju $f(\, x + \Delta x)$ atau terdapat perubahan nilai pada y yang disimbolkan dengan Δy. Secara matematis ditulis dengan $\Delta y = f(\, x + \Delta x) - f(x)$. Jika Δy disebut sebagai perubahan atau diferensiasi nilai y dan Δx disebut sebagai perubahan atau diferensiasi nilai x sedemikian sehingga apabila titik B bergerak menuju titik A maka nilai perbandingan fungsi yang diperoleh adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\, x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

apabila pergerakan titik B mendekati A sehingga “delta” atau perubahan yang terjadi semakin kecil atau mendekati nol mengakibatkan titik B berimpit dengan A, maka diperolehlah nilai limit yang diwakili oleh persamaan berikut ini:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\, x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nilai limit ini disebut sebagai turunan (*derivative*) fungsi $f(x)$. Nilai turunan ini muncul sebagai perbandingan diferensial (perubahan) atau pergerakan perubahan nilai fungsi $f(x)$. Untuk selanjutnya notasi turunan disimbolkan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau y' atau $f'(x)$, dan secara formal dituliskan dengan

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\,x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ldots (1)$$

Jika diperhatikan lebih lanjut, nilai perbandingan diferensiasi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ merupakan gradien tali busur AB dan nilai gradien tersebut tak lain adalag $\tan \alpha$. Apabila $\Delta x \to 0$ maka tali busur AB akan menjadi garis singgung pada titik A, sehingga secara geometris nilai turunan tak lain adalah gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $\big(x, f(x)\big)$. Untuk masalah selanjutnya adalah pada perubahan laju suatu objek terhadap perubahan waktu. Untuk lebih jelasnya, diberikan sebuah kasus yang berkaitan dengan kecepatan sesaat suatu objek. Diberikan suatu fungsi yang mewakili pergerakan suatu objek yaitu $y = 15x^2 + 20x$, sedemikian sehingga y mewakili jarak yang ditempuh dan x mewakili satuan waktu. Dalam hal ini nilai x berada pada interval $0 \leq x \leq 2$. Di kajian tentang persamaan kecepatan suatu benda diberikan bahwa kecepatan rata – rata suatu benda merupakan perbandingan antara perubahan jarak terhadap perubahan waktu atau $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Sehingga kecepatan rata – rata objek tersebut selama melakukan pergerakan dengan interval $0 \leq x \leq 2$ adalah $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{(15\cdot 2^2+20\cdot x)-(15\cdot 0^2+20\cdot 0)}{2} = 50$ satuan jarak/waktu. Sekarang, perhatikan kecepatan rata – rata pergerakan objek dalam interval $0 \leq x \leq 2$ yang ditunjukan pada tabel berikut ini:

Tabel 1. Tabel kecepatan rata – rata

Selang Waktu	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
0 – 1	35
0,8 – 1	47
0,9 – 1	48,5
0,99 – 1	49,85
0,999 – 1	49,9850
0,9999 – 1	49,9985
1 – 1,0001	50,0015
1 – 1,001	50,015
1 – 1,01	50,15
1 – 1,5	57,5
1 – 2	65

Pada tabel 1 tersebut nampak bahwa $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ menuju ke bilangan 50 jika lebar selang waktunya dibuat semakin mengecil (Δx mendekati nol) sehingga angka 50 tersebut dikatakan sebagai *kecepatan* (*sesaat*) *pada* $x = 1$. Sehingga, dapat dikatakan bahwa kecepatan sesaat diperoleh melalui proses limit terhadap kecepatan rata – rata dengan membuat Δx mendekati nol. Jika dinotasikan dalam notasi matematika, maka kecepatan sesaat pada $x = 1$ adalah

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{15(1+\Delta x)^2 + 20(1+\Delta x) - (15 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{50 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 50
\end{aligned}$$

Sehingga kecepatan objek pada saat $x = 1$ adalah 50 satuan jarak/waktu. Dengan demikian, uraian tersebut mendeskripsikan kecepatan sesaat (v) di $x = a$, sehingga diperoleh:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_{\text{rata}-\text{rata}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \ldots (2)$$

Uraian diatas menyebutkan bahwa formula (1) yang mewakili kemiringan suatu garis dan (2) yang mendeskripsikan kecepatan sesaat merupakan dua hal yang identik namun berada pada situasi yang berbeda.

Untuk selanjutnya, jika fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada $x = a$ sehingga diperolah

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

dan menghasilkan sebuah nilai (terdefinisi) maka nilai tersebut dikatakan sebagai *turunan fungsi* $f(x)$*di* $x = a$. Sehingga turunan fungsi tersebut juga berupa fungsi yang selanjutnya dilambangkan dengan $f'(x)$, manakala fungsi turunan digunakan untuk menunjukan nilai di $x = a$ maka nilai ditentukan oleh $f'(a)$. Sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ atau } f'(a) = \lim_{a \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Selain notasi tersebut terdapat beberapa variasi penulisan limit, diantaranya

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x).$$

C. MENENTUKAN TURUNAN FUNGSI

Secara umum, proses mendapatkan turunan suatu fungsi secara langsung menggunakan definisi turunan, yaitu dengan menyusun hasil bagi selisih $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ kemudian dilanjutkan menghitung nilai limitnya. Namun ada cara lain untuk memperoleh nilai limit dengan cara lain. Diberikan suatu fungsi $f(x) = ax^n$, dengan $n \epsilon N$ (n anggota bilangan Asli).

Jika $n = 1$, maka diperoleh $f(x) = ax$ sehingga turunan fungsinya adalah:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a \ldots \ldots \ldots (3)$$

Jika $n = 2$, maka diperolah $f(x) = ax^2$ sehingga turunan fungsinya adalah:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 - ax^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2ax + a\Delta x$$

$$= 2ax \ldots \ldots (4)$$

Jika $n = 3$, maka diperolah $f(x) = ax^3$ sehingga turunan fungsinya adalah:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^3 - ax^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - ax^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^3 + 3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3 - ax^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3ax^2\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3ax\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= 3ax^2 \ldots \ldots \ldots (5)$$

Jika dicermati lebih jauh, uraian yang menghasilkan (3), (4) dan (5) diperoleh sebuah kesimpulan untuk $f(x) = ax^n$, yaitu

Jika $n = 1$ diperoleh $f(x) = ax$ maka $f'(x) = a$

Jika $n = 2$ diperoleh $f(x) = ax^2$ maka $f'(x) = 2ax$

Jika $n = 3$ diperoleh $f(x) = ax^3$ maka $f'(x) = 3ax^2$

Jika $n \in \mathbb{N}$ diperoleh $f(x) = ax^n$ maka $f'(x) = nax^{n-1}$

sehingga untuk $f(x) = ax^n$ untuk $n \in \mathbb{R}$ (n anggota bilangan Riil) diperoleh bentuk umum turunannya adalah:

$$f'(x) = nax^{n-1}$$

D. TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Trigonometri merupakan salah satu kajian dalam ilmu matematika yang berkaitan erat dengan garis dan sudut suatu segitiga. Hubungan antara garis dan sudut ini lah yang selanjutnya menjadi pelbagai fungsi-fungsi trigonometri. Sebagaimana telah diketahui bersama bahwa terdapat 3 (tiga) fungsi dasar dalam trigonometri yaitu sinus, cosinus, tangen. Dalam kajian fungsi trigonometri, hanya fungsi sinus dan cosinus yang merupakan fungsi kontinu. Sehingga kedua fungsi tersebut memiliki nilai dan turunan di setiap titik.

Fungsi yang memiliki turunan adalah fungsi sinus dan cosinus, untuk fungsi tangen di beberapa titik tertentu tidak memiliki turunan karena di titik – titik tersebut tak kontinu. Seperti pada sudut $90°$ fungsi tangen tak kontinu karena nilai $\tan 90° = undefined$ sehingga dikatakan fungsi tangen bukanlah fungsi yang kontinu.

Turunan bentuk $f(x) = sin\ x$

Sebagaimana telah diuraikan bahwa fungsi sinus $f(x)$ merupakan fungsi yang kontinu sehingga fungsi sinus memiliki nilai untuk setiap titik $x = a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(a+\Delta x) - \sin a}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a \cos \Delta x + \cos a \sin \Delta x - \sin a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a \cos \Delta x - \sin a + \cos a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a\,(\cos \Delta x - 1) + \cos a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a\,(\cos \Delta x - 1) + \cos a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a\left(\left(1 - 2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}\right) - 1\right) + \cos a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a \left(-2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}\right) + \cos a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \sin a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} -2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right] + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \cos a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right]$$

$$= [\sin a \cdot 0] + [\cos a \cdot 1] = \cos a$$

Jadi $\boldsymbol{f(x) = sin\ x}$ **maka** $\boldsymbol{f'(x) = cos\ x}$

Turunan bentuk $\boldsymbol{f(x) = cos\ x}$

Sebagaimana turunan untuk fungsi $f(x) = \sin x$, fungsi cosinus juga merupakan fungsi yang kontinu. Sehingga fungsi cosinus memiliki nilai untuk setiap $x = a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(a + \Delta x) - \cos a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos a \cos \Delta x - \sin a \sin \Delta x - \cos a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos a \cos \Delta x - \cos a - \sin a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos a \,(\cos \Delta x - 1) - \sin a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos a \left(\left(1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\Delta x\right) - 1\right) - \sin a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos a \left(-2\sin^2 \frac{1}{2}\Delta x\right) - \sin a \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \cos a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}\right] - \left[\lim_{\Delta x \to 0} \sin a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right]$$

$$= [\cos a \cdot 0] - [\sin a \cdot 1] = -\sin a$$

Jadi $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$ **maka** $\boldsymbol{f'(x) = -\sin x}$

Turunan bentuk $\boldsymbol{f(x) = tan\ x}$

Nilai tangen merupakan perbandingan antara sinus dan cosinus sehingga diperoleh bahwa $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, dan apabila fungsi tersebut memiliki nilai untuk setiap $x = a \in \mathbb{R}$ sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan(a+\Delta x) - \tan a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\sin(a+\Delta x)}{\cos(a+\Delta x)} - \dfrac{\sin a}{\cos a}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\sin(a+\Delta x)\cos a - \cos(a+\Delta x)\sin a}{\cos(a+\Delta x)\cos a}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(a+\Delta x)\cos a - \cos(a+\Delta x)\sin a}{\Delta x \cos(a+\Delta x)\cos a}$$

bentuk "$\sin(a+\Delta x)\cos a - \cos(a+\Delta x)\sin a$" tak lain adalah $\sin\big((a+\Delta x) - a\big)$ sehingga menjadi "$\sin \Delta x$" , sehingga

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(a+\Delta x)\cos a - \cos(a+\Delta x)\sin a}{\Delta x \cos(a+\Delta x)\cos a}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \cos(a+\Delta x)\cos a}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(a+\Delta x)\cos a} = 1 \cdot \frac{1}{\cos a \cdot \cos a} = \sec^2 a$$

Jadi

$$\boldsymbol{f(x) = \tan\ x \ \text{maka}\ f'(x) = \sec^2 x}$$

E. OPERASI ALJABAR TURUNAN FUNGSI

Setiap kajian dalam matematika tak terlepas dari operasi aljabar. Aljabar sendiri dikatakan sebagai suatu suatu kalimat matematika yang melibatkan angka (konstanta), huruf (variable atau pengubah), koefisien, dan pengerjaan hitung yang dapat mempermudah permasalahan yang sifatnya kompleks menjadi lebih sederhana dengan menggunakan huruf-huruf atau variabel yang belum diketahui dalam perhitungan. Operasi aljabar yang umum dikenal selama ini adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian dan dan pembagian.

Operasi turunan berbentuk $\boldsymbol{f(x) = c \cdot u(x)}$

Jika diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = c \cdot u(x)$ dalam hal ini c adalah konstanta dan $u(x)$ fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $x = a$ atau fungsi tersebut kontinu di $x = a$ untuk $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(a + \Delta x) - c \cdot u(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\big(u(a + \Delta x) - u(a)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \frac{\big(u(a + \Delta x) - u(a)\big)}{\Delta x}$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(a + \Delta x) - u(a)\big)}{\Delta x} = c \cdot u'(a),$$

sehingga, apabila diberikan fungsi $f(x)$ dan fungsi tersebut terdiferensialkan pada $a \in \mathbb{R}$ serta terdapat $c \in \mathbb{R}$ sehingga berakibat $y = f(a) = c \cdot u(a)$ maka berlaku $f'(a) = c \cdot u'(a)$.

$$\boldsymbol{f(x) = c \cdot u(x)} \textbf{ maka } \boldsymbol{f'(x) = c \cdot u'(x)}.$$

Operasi turunan berbentuk $\boldsymbol{f(x) = u(x) \pm v(x)}$

Jika diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = u(x) \pm v(x)$ dalam hal ini $u(x)$ dan $v(x)$ adlah fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $x = a$ atau fungsi tersebut kontinu di $x = a$ untuk $a \in \mathbb{R}$. Sebagaimana diuraikan sebelumnya, bahwa bentuk umum turunan adalah $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, dengan demikian untuk $f(x) = u(a) + v(a)$, diperoleh:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(a + \Delta x) - v(a + \Delta x)] + [u(a) - v(a)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a + \Delta x) - u(a) + v(a + \Delta x) - v(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a + \Delta x) - u(a)}{\Delta x} += \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(a + \Delta x) - v(a)}{\Delta x} = u'(a) + v'(a)$$

Uraian tersebut mendeskripsikan jika $f(x) = u(x) + v(x)$ maka diperoleh turunannya $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, dengan cara yang sama jika $f(x) = u(x) - v(x)$ maka $f(x) = u'(x) - v'(x)$. Sehingga bisa disimpulkan

jika $\boldsymbol{f(x) = u(x) \pm v(x)}$ maka$\boldsymbol{f'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$

Contoh Pemakaian
Tentukan turunan dari $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 5x^2}$!

Solusi
Dengan menggunakan sifat $f(x) = u(x) + v(x)$ maka
$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Diperoleh
$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2)$.
$= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(5x^2)$ .... (penjumlahan turunan)
$= \frac{d}{dx}(x^3) + 5\frac{d}{dx}(x^2)$............ (turunan fungsi yang dikalikan dengan konstanta)
$= 3x^2 + 10x$ .... (sifat $f'(x) = nax^{n-1}$)

Operasi turunan berbentuk $\boldsymbol{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$

Jika diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, $u(x)$dan $v(x)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $x = a$ sehingga fungsi tersebut kontinu di $x = a$ untuk $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a + \Delta x) \cdot v(a + \Delta x) - u(a) \cdot v(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(a + \Delta x) \cdot v(a + \Delta x) - u(a + \Delta x) \cdot v(a)}{(a + \Delta x)} + \frac{u(a + \Delta x) \cdot v(a) - u(a) \cdot v(a)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(a + \Delta x) \cdot \{v(a + \Delta x) - v(a)\}}{(a + \Delta x)} + \frac{v(a)\{u(a + \Delta x) - u(a)\}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(a + \Delta x) \frac{v(a + \Delta x) - v(a)}{(a + \Delta x)} + \lim_{\Delta x \to 0} v(a) \frac{u(a + \Delta x) - u(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\big(u(a + \Delta x) - u(a)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \frac{\big(u(a + \Delta x) - u(a)\big)}{\Delta x}$$

$$= u(a) \cdot v'(a) + u'(a) \cdot v(a)$$

sehingga, apabila diberikan fungsi $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ dan fungsi tersebut terdiferensialkan pada $a \in \mathbb{R}$ serta $f(a) = u(a) \cdot v(a)$ maka berlaku $f'(a) = u(a) \cdot v'(a) + u'(a) \cdot v(a)$

$$\boldsymbol{f(x) = u(x) \cdot v(x)} \textbf{ maka } \boldsymbol{f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)}$$

Contoh Pemakaian

Tentukan turunan fungsi dari $f(x) = (5x^2 - 1)(3x - 2)$!

Solusi

Bentuk $f(x) = (5x^2 - 1)(3x - 2)$ merupakan salah satu contoh dari bentuk umum $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, yaitu perkalian dua fungsi sehingga $u(x) = (5x^2 - 1)$ dan $v(x) = (3x - 2)$ sehingga diperolah $u'(x) = 10x$ dan $v'(x) = 3$

Menggunakan sifat

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \text{ maka } f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Diperoleh

$$f'(x) = (5x^2 - 1) \cdot 3 + (3x - 2) \cdot 10x = 15x^2 - 3 + 30x^2 - 20x$$

$$= 45x^2 - 20x + 3$$

Operasi turunan berbentuk $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$

Jika diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $u(x)$dan $v(x)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $x = a$ sehingga fungsi tersebut kontinu di $x = a$ untuk $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(a + \Delta x)}{v(a + \Delta x)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a + \Delta x)v(a) - v(a + \Delta x)u(a)}{\Delta x \cdot v(a + \Delta x) \cdot v(a)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(a)\left\{\frac{u(a+\Delta x)-u(a)}{\Delta x}\right\} - u(a)\left\{\frac{v(a+\Delta x)-v(a)}{\Delta x}\right\}}{v(a+\Delta x)\cdot v(a)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(a) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(a+\Delta x)-u(a)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} u(a) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v(a+\Delta x)-v(a)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(a) v(v+\Delta x)}$$

$$\frac{u'(a)\cdot v(a) - u(a)\cdot v'(a)}{v(a)\cdot v(a)} = \frac{u'(a)\cdot v(a) - u(a)\cdot v'(a)}{\left(v(a)\right)^2}$$

sehingga, apabila diberikan fungsi $f(x) = \frac{\boldsymbol{u(x)}}{\boldsymbol{v(x)}}$ dan fungsi tersebut terdiferensialkan pada $a \in \mathbb{R}$ serta $f(a) = \frac{\boldsymbol{u(a)}}{\boldsymbol{v(a)}}$maka berlaku $f'(a) = \frac{u'(a)\cdot v(a) - u(a)\cdot v'(a)}{\left(v(a)\right)^2}$,

Jadi,

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}} \textbf{ maka } \boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}}$$

Contoh Pemakaian
Tentukan turunan fungsi dari $f(x) = \csc x$

Solusi

Bentuk $f(x) = \csc x$ tak lain adalah $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sehingga dengan menggunakan sifat $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$ perlu diidentifikasi $u(x) = 1$ dan $v(x) = \sin x$. Sehingga $u'(x) = 0$ dan $v'(x) = \cos x$, maka

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{0\cdot \sin x - 1\cdot \cos x}{(\sin x)^{\,2}} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x} = -\cot x \csc x$$

Jadi turunan dari $f(x) = \csc x$ adalah $f'(x) = -\cot x \csc x$

Operasi turunan berbentuk $\boldsymbol{f(x) = u^n(x)}$

Jika diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = u^n(x)$, $u(x)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $x = a$ sehingga fungsi tersebut kontinu di $x = a$ untuk $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$u'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a + \Delta x) - u(a)}{\Delta x},$$

Karena fungsi $u(x)$ terdefinisi pada sembarang $a \in \mathbb{R}$, maka berlaku sebuah kondisi

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{sehingga } u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Dikatakan bahwa prinsip umum dari turunan adalah

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \text{ atau } f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Untuk kasus $\Delta x \to 0$ maka berakibat pula $\Delta u \to 0$ sedemikian sehingga

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \text{ dan } u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

sehingga,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Sehingga apabila diberikan sebuah persamaan $f(u) = \big(u(x)\big)^n$ maka diperoleh turunannya fungsinya yaitu $f'(u) = nu^{n-1}$ sehingga

$$\boldsymbol{f(x) = u^n(x) \text{ maka } f'(x) = n \cdot \big(u(x)\big)^{n-1} \cdot u'(x)}$$

Contoh Pemakaian

Tentukan turunan fungsi dari

(i) $f(x) = (2 + 3x^2)^9$!

(ii)$f(x) = 3\sin^3 \frac{1}{x} + 2\cos^2 \frac{x}{2}$!

Solusi

(i) Sebelum menyelesaikan bentuk $f(x) = (2 + 3x^2)^9$ menggunakan sifat $f(x) = u^n(x)$ maka $f'(x) = n \cdot \left(u(x)\right)^{n-1} \cdot u'(x)$ maka perlu diidentifikasi terlebih dahulu $u(x)$, yaitu $u(x) = 2 + 3x^2$, maka $u'(x) = 6x$. Sehingga $f(x) = u^9(x)$, maka diperoleh bentuk turunannya

$$f'(x) = 9u^8(x) \cdot u'(x) = 9(2 + 3x^2)^8 \cdot 6x = 54x(2 + 3x^2)^8$$

(ii) Bentuk $f(x) = 3\sin^3 \frac{1}{x} + 2\cos^2 \frac{x}{2}$ menggunakan sifat $f(x) = u^n(x)$ maka $f'(x) = n \cdot \left(u(x)\right)^{n-1} \cdot u'(x)$ maka bentuk $f(x) = 3\sin^3 \frac{1}{x} + 2\cos^2 \frac{x}{2}$ juga menggunakan sifat operasi penjumlahan turunan karena terdiri dari dua suku yang dijumlahkan yaitu $3\sin^3 \frac{1}{x}$ dan $2\cos^2 \frac{x}{2}$. maka

* untuk $3\sin^3 \frac{1}{x}$ maka $u(x) = 3\sin \frac{1}{x}$ sehingga diperoleh $u'(x) = 3\left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, sehingga turunan dari $3\sin^3 \frac{1}{x}$ adalah $3\left(3\sin^2 \frac{1}{x}\right)\left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

** untuk $2\cos^2 \frac{x}{2}$ maka $v(x) = 2\cos \frac{x}{2}$ diperoleh $v'(x) = -\sin \frac{x}{2}$. Sehingga turunan dari $2\cos^2 \frac{x}{2}$ adalah $-2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ dengan menggunakan sifat persamaan trigonometri $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, maka bentuk $-2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ diubah menjadi $-\sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin x$

Dari (*) dan (**) diperoleh turunan dari $f(x) = 3\sin^3 \frac{1}{x} + 2\cos^2 \frac{x}{2}$ adalah $f'(x) = 3\left(3\sin^2 \frac{1}{x}\right)\left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \sin x$

Aturan Rantai (_Chain Rule_)

Aturan rantai dalam teknik pendiferensialan suatu fungsi merupakan metode yang sangat berguna manakala fungsi yang diberikan adalah fungsi – fungsi komposisi yang disimbolkan dengan $f\left(g(x)\right)$ atau

$(f \circ g)(x)$. Fungsi komposisi merupakan penggabungan dua fungsi dimana daerah hasil fungsi pertama merupakan domain pada fungsi kedua atau manakala $f\big(g(x)\big)$ dimaknai dengan Range (daerah hasil) dari $g(x)$ merupakan Domain (daerah asal) untuk $f(x)$.

Apabila diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = f\big(g(x)\big)$, $g(x)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $x = a$ sehingga fungsi tersebut kontinu di $x = a$ untuk $a \in \mathbb{R}$ dan $f\big(g(x)\big)$ merupakan fungsi yang terdiferensialkan (dapat diturunkan) di $g(x)$ sedemikian sehingga

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'\big(g(a)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(a + \Delta x)\big) - f\big(g(a)\big)}{\Delta x}$$

kemudian persamaan tersebut dikalikan dengan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{g(a + \Delta x) - g(a)},$$

sehingga diperoleh

$$f'\big(g(a)\big) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{g(a + \Delta x) - g(a)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(a + \Delta x)\big) - f\big(g(a)\big)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{g(a + \Delta x) - g(a)}$$

$$f'\big(g(a)\big) \cdot \left(\frac{1}{g'(a)}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(a + \Delta x)\big) - f\big(g(a)\big)}{g(a + \Delta x) - g(a)}$$

$$f'\big(g(a)\big) \cdot \left(\frac{1}{g'(a)}\right) = f'\big(g(a)\big)$$

kemudian, kedua ruas dikalikan dengan $g'(a)$

$$f'\big(g(a)\big) \cdot \left(\frac{1}{g'(a)}\right) \cdot g'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$$

$$f'\big(g(a)\big) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$$

Jadi,

$$\boldsymbol{f\big(g(x)\big)} \textbf{ maka } \boldsymbol{f'\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)}$$

Contoh Pemakaian

Tentukan turunan fungsi dari $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)^6$!

Solusi

Untuk menyelesaikan permasalahan ini bisa menggunakan aturan rantai. Hal ini mempertimbangkan bahwa bentuk $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)^6$ memenuhi kriteria bentuk fungsi komposisi $f\left(g(x)\right) = \left(g(x)\right)^n$. Diperoleh fungsi $g(x) = \sqrt{x} - 3 = x^{\frac{1}{2}} - 3$ sehingga $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Untuk turunan dari $\left(g(x)\right)^6$ sendiri adalah $6\left(g(x)\right)^5$. Dengan semikian turunan dari $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)^6$ sesuai dengan kaidah aturan rantai yaitu $f\left(g(x)\right)$ maka $f'\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ diperoleh

$$f'(x) = 6\left(\sqrt{x} - 3\right)^5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\left(\sqrt{x}-3\right)^5}{\sqrt{x}}$$

F. TURUNAN KEDUA SUATU FUNGSI

Turunan kedua suatu fungsi merupakan kelanjutan dari turunan pertama suatu fungsi. Dalam hal ini turunan pertama dari sebuah fungsi $f(x)$yang disimbolkan dengan $f'(x)$ diturunkan (didiferensialkan) lagi dan disimbolkan dengan $f"(x)$ dan seteruanya sejauh fungsi turunan tersebut kontinu di $x = a \in \mathbb{R}$ sehingga turunan kedua di titik tersebut adalah $f"(a)$. Turunan kedua suatu fungsi ini berguna untuk mempermudah dalam menggambar kurva. Turunan kedua suatu fungsi mendeskripsikan konveksitas suatu kurva dan menunjukkan dengan jelas kondisi maksimum dan minimum suatu kurva. Dalam kajian persamaan gerak dalam fisika, turunan kedua suatu fungsi $f(x)$ menyatakan percepatan sesaat suatu objek pada t (waktu) tertentu. Sedemikian sehingga jika diberikan $x(t)$ merupakan fungsi untuk menyatakan kedudukan suatu objek pada t tertentu, maka $x'(t)$ mewakili kecepatan sesaat pada t tertentu dan $x"(t)$ menyatakan percepatan sesaat objek pada t tertentu.

G. TURUNAN INVERS FUNGSI

Sifat berikutnya adalah turunan yang melibatkan invers suatu fungsi. Invers suatu fungsi yang didiferensialkan terkat dengan kajian sebelumnya yaitu aturan rantai. Jika diberikan fungsi $y = f(x)$, maka x merupakan invers dari y sehingga:

$$y = f(x), maka\ x = f^{-1}(y).$$

Jika $f(x)$dikomposisikan terhadap $f(x)$tak lain adalah x itu sendiri sehingga ditulis

$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, atau dengan kata lain $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x$.

Dengan menggunakan notasi Leibniz dan berbantuan aturan rantai diperoleh

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Turunan $\frac{dx}{dx}$ terhadap x adalah 1, sehingga berlaku

$$1 = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx}$$

maka bentuk turunannya adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ atau } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

H. TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

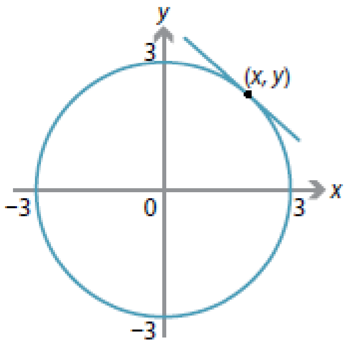
Selama ini banyak dikenal berbagai macam jenis fungsi di matematika. Salah satunya adalah fungsi implisit. Fungsi implisit sendiri merupakan fungsi Fungsi implisit adalah fungsi yang terdiri dari dua atau lebih variabel yakni variabel bebas dan variabel tak bebas, yang berada dalam satu ruas dan tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda. Mendiferensialkan fungsi implisit, pada prinsipnya tak jauh beda dengan mendifereneislkan fungsi variabel tunggal, yakni dengan menggunakan notasi Leibniz $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Hal yang harus dipahami dalam menurunkan fungsi implisit khususnya yang terdiri dari dua variabel (x dan y):

i. Jika hanya mengandung variabel x, maka turunannya: $x\frac{d}{dx}$

ii. Jika hanya mengandung variabel y, maka turunannya: $y\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}$

iii. Jika mengandung variabel x dan y, maka turunannya: $xy\frac{d}{dx} + xy\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}$

Untuk lebih teknisnya perhatikan contoh berikut ini. Diberikan sebuah persamaan $x^2 + y^2 = 9$ yang tak lain adalah persamaan sebuah lingkaran dengan jari – jari 3 dan berpusat di titik $(0,0)$.



Gambar 2. Lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Perlu diperhatikan kembali, bahwa bentuk $x^2 + y^2 = 9$ bukanlah sebuah fungsi melainkan suatu relasi. Hal ini dibuktikan manakala diberikan sebuah nilai x maka akan diperoleh dua nilai y yang berbeda:

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ maka } y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

Meskipun $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ bukanlah fungsi dengan domain x, namun persamaan $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ dikatakan sebagai **fungsi implisit** y terhadap x. Dengan melakukan pendekatan sebagaimana cara untuk memperoleh garis singgung pada titik (x, y) sehingga fungsi yang diperoleh pun $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ dan $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$. Tergantung pada kondisi y.

Pendekatan untuk menyelesaikan persoalan turunan fungsi implisit adalah dengan mendiferensialkannya pada kedua sisi terhadap x. Untuk mendiferensialkan y^2 diperlukan penurunan dengan cara aturan rantai karena y^2 merupakan fungsi dari y dan y merupakan fungsi dengan domain x:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

Selanjutnya kedua sisi didiferensialkan sehingga diperoleh

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Namun perlu digaris bawahi, bahwa persamaan yang terdapat bentuk $\frac{dy}{dx}$ bisa didiferensialkan pada semua titik pada lingkaran kecuali $y = 0$. Ketika $y \neq 0$ diperoleh nilai untuk $\frac{dy}{dx}$ adalah $-\frac{x}{y}$.

I. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG PADA KURVA

Telah dijelaskan sebelumnya, bahwa salah satu penggunaan turunan terdapat pada kajian tentang kemiringan suatu garis kurva. Kemiringan suatu kurva (gradien) ditentukan oleh turunan pertama suatu kurva. Gradien suatu kurva $y = f(x)$ di titik $A\big(a, f(a)\big)$ adalah

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Apabila diketahui koordinat titik $\big(a, f(a)\big)$ dan gradien (m) kurva di titik tersebut maka persamaan garis singgung yang terbentuk di titik tersebut adalah

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Contoh Pemakaian

Tentukan persamaan garis singgung fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ yang:

a. Melalui titik (1,2)
b. Melalui titik (0,3)
c. Sejajar dengan garis $y = -x + 3$
d. Tegak lurus pada garis $y = 3x + 10$

Solusi

a. Titik (1,2) terletak pada fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ karena $2 = 2 + 1 - 1^2$ merupakan pernyataan yang benar. Sehingga $f(x) = 2 + x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x$. Karena $m = f'(a)$ maka $m = f'(1) = 1 - 2 = -1$, sehingga Persamaan Garis Singgung:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$y - 2 = -1(x - 1)$$
$$y = -x + 3$$

b. Titik (0,3) tidak terletak pada fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ karena $3 = 2 + 0 - 0^2$ merupakan pernyataan yang salah.

Salah satu bentuk persamaan garis adalah $y = mx + c$ dan garis ini melalui titik $(0,3)$. Langkah selanjutnya perlu diperoleh dahulu nilai c yaitu dengan mensibstitusikan nilai $x = 0$ dan $y = 3$ pada $y = mx + c$ sehingga,

$$(0,3) \Rightarrow y = mx + c$$
$$3 = m(0) + c$$
$$c = 3.$$

Sehingga persamaan garis sunggung yang dimaksud $y = mx + 3$.

Garis $y = mx + 3$ dan fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ memiliki setidaknya sebuah titik singgung sedemikian sehingga

$$y = f(x)$$
$$mx + 3 = 2 + x - x^2$$
$$x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

Syarat agar garis $y = mx + 3$ menyinggung kurva fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ adalah $D = b^2 - 4ac = 0$ dengan persamaan yang digunakan adalah

$$x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

maka

$$D = b^2 - 4ac = 0$$
$$(m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$
$$m^2 - 2m + 1 - 4 = m^2 - 2m - 3 = 0$$
$$(m-3)(m+1) = 0$$
$$m = -1 \text{ atau } m = 3$$

Karena terdapat dua nilai m atau dua gradien, maka persamaan garis singgung kurva $f(x) = 2 + x - x^2$ di titik $(0,3)$ yaitu

$$y = -x + 3 \text{ dan } y = 3x + 3$$

c. Misal persamaan garis singgung pada fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ adalah $\left(c, f(c)\right)$. Karena garis singgung pada c terhadap fungsi $f(x)$ sejajar dengan garis $y = -x + 3$ maka gradien garis singgungnya $m_{gs} = -1$.

Selanjutnya, turunan dari $f(x) = 2 + x - x^2$ adalah $f'(x) = 1 - 2x$.

Nilai c ditentukan dengan $m_{gs} = f'(c) = -1$, maka:

$$f'(c) = -1$$

$$1 - 2c = -1 \Longrightarrow c = 1$$

Karena $c = 1 \Longrightarrow f(1) = 2 + 1 - 1^2 = 2$

Sehingga diperolah titik singgung yang dimaksud adalah $(1,2)$. Jadi persamaan garis singgung yang diminta sesuai dengan $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ adalah

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 3$$

d. Misal titik singgung pada fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ adalah $\left(c, f(c)\right)$. Karena garis singgungnya tegak lurus terhadap garis $y = 3x + 10$, maka gradien garis singgungnga $m_{gs} = -\frac{1}{3}$.

Kemudian dicari turunan dari $f(x) = 2 + x - x^2$ adalah $f'(x) = 1 - 2x$.

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai c melalui $f'(c) = -\frac{1}{3}$, maka

$$1 - 2c = -\frac{1}{3} \Longrightarrow c = \frac{2}{3}$$

Setelah memperoleh nilai c kemudian diperlukan nilai $f(c)$. Maka

$$f(c) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

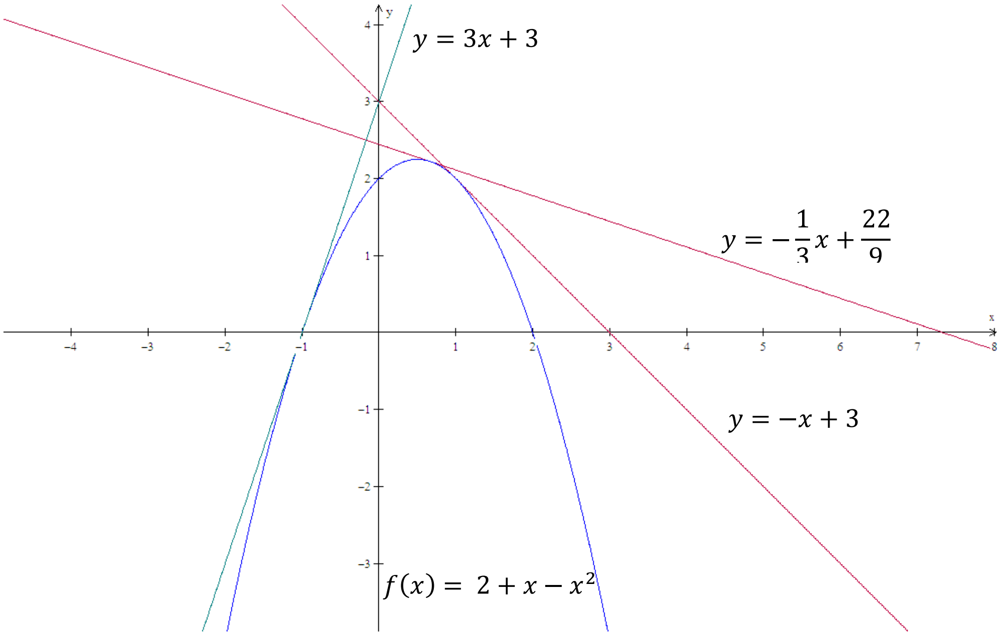
Sehingga diperoleh koordinat titik singgung $\left(c, f(c)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{9}\right)$.

Jadi, persamaan garis singgung yang dimaksud sesuai dengan $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ adalah:

$$y - \frac{20}{9} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{9}$$

Apabila dideskripsikan dalam bentuk kurva beserta garis singgungnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3. Fungsi $f(x) = 2 + x - x^2$ dan garis – garis singgungnya

J. APLIKASI TURUNAN

Sebagaimana kajian matematika secara umum, ilmu matematika sangat terkait dengan cabang ilmu lain baik yang sifatnya eksak maupun sosial. Sebagaimana matematika yang di beberapa bagian tertentu menjadi landasan bagi perkembangan fisika begitu juga sebaliknya. Secara umum, matematika dan ilmu lain saling mengisi dan bersinergi sebagai penyokong perkembangan ilmu pengetahuan. Seperti pada bidang Tekhnik penggunaan turunan dapat membantu programer dalam pembuatan aplikasi dari mesin – mesin yang mutakhir.

Beberapa sub kajian Ilmu ekonomi juga menggunakan aplikasi turunan. Pada bidang ekonomi fungsi turunan dipakai untuk mencari biaya marjinal atau biaya tambahan yang diperlukan untuk tambahan satu unit produk yang dihasilkan. Munculnya MC karena adanya perluasan produksi yang dilakukan perusahaan dalam rangka menambah jumlah produk yang dihasilkannya, yaitu dengan cara menurunkannya dari persamaan biaya total. Bisa ditulis biaya marjinal = biaya total'. Para matematikawan mengenal biaya marjinal sebagai $\frac{dc}{dx}$, perbandingan perubahan C (*cost*) terhadap perubahan x atau jumlah produksi. Selanjutnya ada yang disebut dengan *elastisitas*.

Elastisitas merupakan perbandingan perubahan proporsional dari sebuah variabel dengan perubahan variable lainnya. Dengan kata lain, elastisitas mengukur seberapa besar besar kepekaan atau reaksi konsumen terhadap perubahan harga. Penggunaan paling umum dari konsep elastisitas ini adalah untuk meramalkan barang/jasa apa yang akan dinaikkan. Bagi produsen, pengetahuan ini digunakan sebagai pedoman seberapa besar ia harus mengubah harga produknya. Hal ini sangat berkaitan dengan seberapa besar penerimaan penjualan yang akan ia peroleh.

Sebagai contoh, anggaplah biaya produksi sebuah barang meningkat sehingga seorang produsen terpaksa menaikkan harga jual produknya. Menurut hukum permintaan, tindakan menaikkan harga ini jelas akan menurunkan permintaan. Jika permintaan hanya menurun dalam jumlah yang kecil, kenaikan harga akan menutupi biaya produksi sehingga produsen masih mendapatkan keuntungan. Namun, jika peningkatan harga ini ternyata menurunkan permintaan demikian besar, maka bukan keuntungan yang diperoleh. Hasil penjualannya mungkin saja tidak dapat menutupi biaya produksinya, sehingga produsen menderita kerugian. Jelas di sini bahwa produsen harus mempertimbangkan tingkat elastisitas barang produksinya sebelum membuat suatu keputusan. Produsen harus memperkirakan seberapa besar kepekaan konsumen atau seberapa besar konsumen akan bereaksi jika ia mengubah harga sebesar sepuluh persen, dua puluh persen, dan seterusnya. Definisi matematisnya, koefesien elastisitas diukur dari persentase perubahan kuantitas barang dibagi dengan persentase perubahan harga. Secara sederhana kalimat tersebut dapat dirumuskan bahwa elastisitas "y terhadap x" kemudian Elastisitas biasa disimbolkan sebagai 'E', 'e' atau ε.

Dalam kajian fisika sangat banyak ditemukan aplikasi turunan. Hal yang paling sering ditemui adalah rumus jarak yang ditempuh oleh suatu objek yang bergerak, yaitu $y = \frac{1}{2}gx^2 + v_0x + y_0$ dengan ketentuan y_0 adalah jarak awal dari titik 0. Apabila persamaan ini didiferensialkan $y' = \frac{dy}{dx}$ maka akan menjadi $y = gx + v_0$, v_0 dinyatakan sebagai kecepatan awal.

Persamaan ini masih bisa diturunkan menjadi turunan yang kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$, menjadi $\boldsymbol{y = g}$ (konstan), sehingga ditemukanlah persamaan untuk mencari nilai percepatan, sehingga jika suatu objek dijatuhkan dari ketinggian tertentu di atas permukaan bumi dikatakan percepatan gravitasi.

Untuk menentukan berbagai besaran dalam fisika digunakan turunan sebagai metodenya, misalnya adalah luas yang merupakan hasil turunan satuan panjang dan luas diperoleh dari mengalikan panjang dengan panjang.

Berikut ini adalah berbagai contoh besaran turunan sesuai dengan sistem internasional / SI yang diturunkan dari sistem MKS (meter - kilogram - sekon/*second*) :

- Besaran turunan energi satuannya *joule* dengan lambang J
- Besaran turunan gaya satuannya *newton* dengan lambang N
- Besaran turunan daya satuannya *watt* dengan lambang W
- Besaran turunan tekanan satuannya *pascal* dengan lambang Pa
- Besaran turunan frekuensi satuannya $Hertz$ dengan lambang Hz
- Besaran turunan muatan listrik satuannya *coulomb* dengan lambang C
- Besaran turunan beda potensial satuannya $volt$ dengan lambang V
- Besaran turunan hambatan listrik satuannya *ohm* dengan Ω
- Besaran turunan kapasitas kapasitor satuannya *farad* dengan lambang F
- Besaran turunan fluks magnet satuannya *tesla* dengan $\mathbb{B}$
- Besaran turunan induktansi satuannya *henry* dengan lambang H
- Besaran turunan fluks cahaya satuannya *lumen* dengan lambang ln
- Besaran turunan kuat penerangan satuannya *lux* dengan lambang lx

Tentu masih banyak contoh aplikasi turunan pada bidang lain sehingga menunjukan bahwa turunan merupakan salah satu kajian penting dalam perkembangan dunia ilmu pengetahuan.

Makalah ini akan sedikit membahas secara dasar tentang aplikasi turunan, sehingga untuk pengembangan yang lebih kompleks akan dijelaskan pada makalah yang lain.

Menggambar Grafik Fungsi

Grafik suatu fungsi merupakan komponen penting untuk mencari baik penyelesaian fungsi itu sendiri maupun berbagai kecenderungan yang diakibatkan oleh bentuk fungsinya secara grafis. Setidaknya ada 3 (tiga) komponen utama untuk menggambar suatu fungsi, yaitu:

i. Titik potong terhadap sumbu X dan sumbu Y
ii. Interval kemonotonan fungsi
iii. Titik kritis, dan
iv. Nilai ekstrim (Maksimum dan minimum lokal)

Kemudian, dimana peran turunan untuk menentukan beberapa poin tersebut. Mari perhatikan contoh berikut ini. Ketika diberikan suatu fungsu $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ dan kita diminta untuk menunjukan bagaimana gambaran grafik fungsinya. Beberapa informasi yang harus ada, yaitu:

1. Titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y

   Titik potong terhadap sumbu x diperoleh manakala nilai $y = 0$, sehingga $y = f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2} = 0$, maka diperoleh

   $$x^2 - 2x + 4 = 0$$
   $$(x-1)^2 + 3 = 0$$
   $$(x-1)^2 = -3$$

   Karena tidak ada bilangan kuadrat yang senilai dengan -3 maka fungsi tersebut tidak memiliki titik potong terhadap sumbu x.

   Selanjutnya dicari titik potong terhadap sumbu y, hal ini dipenuhi manakala nilai $x = 0$, sehingga $y = f(x) = \frac{0^2-2\cdot 0+4}{0-2} = -2$. Maka fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ berpotongan di sumbu y pada koordinat $(0, -2)$

2. Selanjutnya harus ditemukan interval kemonotonan, titik kritis dan nilai ekstrim menggunakan turunan pertama.

Fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ diperolah turunan pertamanya

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Selanjutnya fungsi untuk turunan pertama dicari titik potong terhadap sumbu x yang bertujuan untuk mencari batas – batas kemonotonan fungsi, sehingga

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0, \text{maka}$$

Diperoleh titik – titik yang akan digunakan sebagai batas interval yaitu $x = 0, x = 4$ dan $x \neq 2$.

Kemudian, dicari kemonotonan fungsi tersebut dengan mengambil titik uji yang disbustitusikan ke fungsi $f'(x)$,

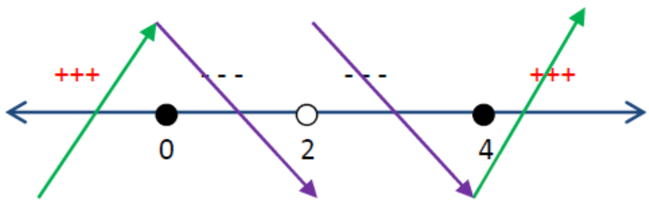
untuk $x = 1$, nilai $f'(x) = \frac{1(1-4)}{(1-2)^2} = \frac{-3}{1} = -3$

untuk $x = 3$, nilai $f'(x) = \frac{3(3-4)}{(3-2)^2} = \frac{-3}{1} = -3$

untuk $x = -1$, nilai $f'(x) = \frac{(-1)(-1-4)}{(-1-2)^2} = \frac{5}{9}$

untuk $x = 5$, nilai $f'(x) = \frac{5(5-4)}{(5-2)^2} = \frac{5}{9}$

sehingga diperoleh batas – batasnya,



Gambar 4. Batas Kemonotonan Fungsi

Berdasarkan gambar diatas, diperoleh suatu kesimpulan yaitu:

a) Interval kemonotonan, terjadi apabila

   i. Monoton naik apabila $f'(x) \geq 0$, yaitu pada interval $x \leq 0$ atau $x \geq 4$

ii. Monoton turun apabila $f'(x) \leq 0$, yaitu pada interval
$0 \leq x < 2$ atau $2 < x \leq 4$

b) Titik kritis, yaitu:

i. Titik stasioner, $f'(x) = 0$ berada pada $x = 0$ dan $x = 4$

ii. Titik singular, $f'(x)$ $\boldsymbol{tidak\ ada}$ yaitu pada $x = 2$

c) Nilai Ekstrem (Nilai Maksimum dan Minimum Lokal), yaitu nilai $f(c)$ manakala di titik $\big(c, f(c)\big)$ terjadi perubahan kemonotonan. Untuk fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ terdapat 3 (tiga) nilai ekstrem, yaitu:

i. $c = 0$, maka $f(0) = -2$ (maksimum, terjadi perubahan tanda dari monoton naik ke monoton turun)

ii. $c = 4$, maka $f(4) = 6$ (minimum, terjadi perubahan tanda dari monoton turun ke monoton naik) dan

iii. $c = 2$, maka $f(2) = tidak\ ada$ (sehingga bukan nilai maksimum maupun minimum lokal)

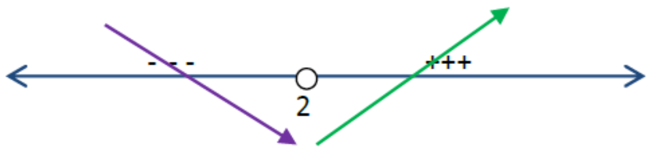
3. Turunan Kedua

Fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ bila diturunkan sekali diperoleh $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ dan apabila diturunkan sekali lagi diperoleh $f"(x) = \frac{8}{(x-2)^3}, x \neq 2$, turunan kedua ini digunakan untuk mencari

i. Interval kecekungan, dengan kriteria
Cekung ke atas manakala $f"(x) \geq 0$, yaitu pada $(2, \infty)$ (*silakan dibuktikan dengan menggunakan titik uji*)

Cekung ke bawah manakala $f"(x) \leq 0$, yaitu pada $(-\infty, 2)$ (*silakan dibuktikan dengan menggunakan titik uji*)

ii. Titik belok, terjadi manakala terdapat sebuah titik yang merupakan batas interval, namun tidak mengalami perubahan tanda pada nilai yang lebih kecil maupun yang lebih besar dari titik tersebut atau secara matematis disimbolkan dengan $f"(x) = 0$ atau $f"(x)\; nilainya\; tidak\; ada$ (tidak terjadi perubahan kemonotonan). Karena $f"(2)\; tidak\; ada\; nilainya$ maka titik belok terjadi pada $x = 2$.



Gambar 5. Interval kecekungan

4. Asimtot

Asimtot merupakan garis lurus yang didekati oleh grafik fungsi $f(x)$. Terdapat 3 (tiga) jenis asimtot, yaitu:

a. *Asimtot Tegak*. Garis $x = c$ dikatakan asimtot tegak dari $f(x)$ apabila $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

b. *Asimtot Datar*. Garis $y = b$ dikatakan Asimtot Datar dari $f(x)$ apabila $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

c. *Asimtot Miring*. Garis $y = ax + b$ dikatakan Asimtot Miring dari $f(x)$ apabila $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ dan $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

Untuk menemukan Asimtot dari fungsi $f(x)$ harus diperoleh terlebih dahulu

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ dan $\lim_{x\to c} f(x)$ serta $f(c) = tidak\ ada$

a. *Asimtot Tegak*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty$$

Sehingga fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ memiliki *Asimtot Tegak* pada garis $x = 2$

b. *Asimtot Datar*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \pm\infty$$

Sehingga fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ tidak memiliki *Asimtot Datar*

c. *Asimtot Miring*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2 + \frac{4}{x}}{x - 2} = 1$$

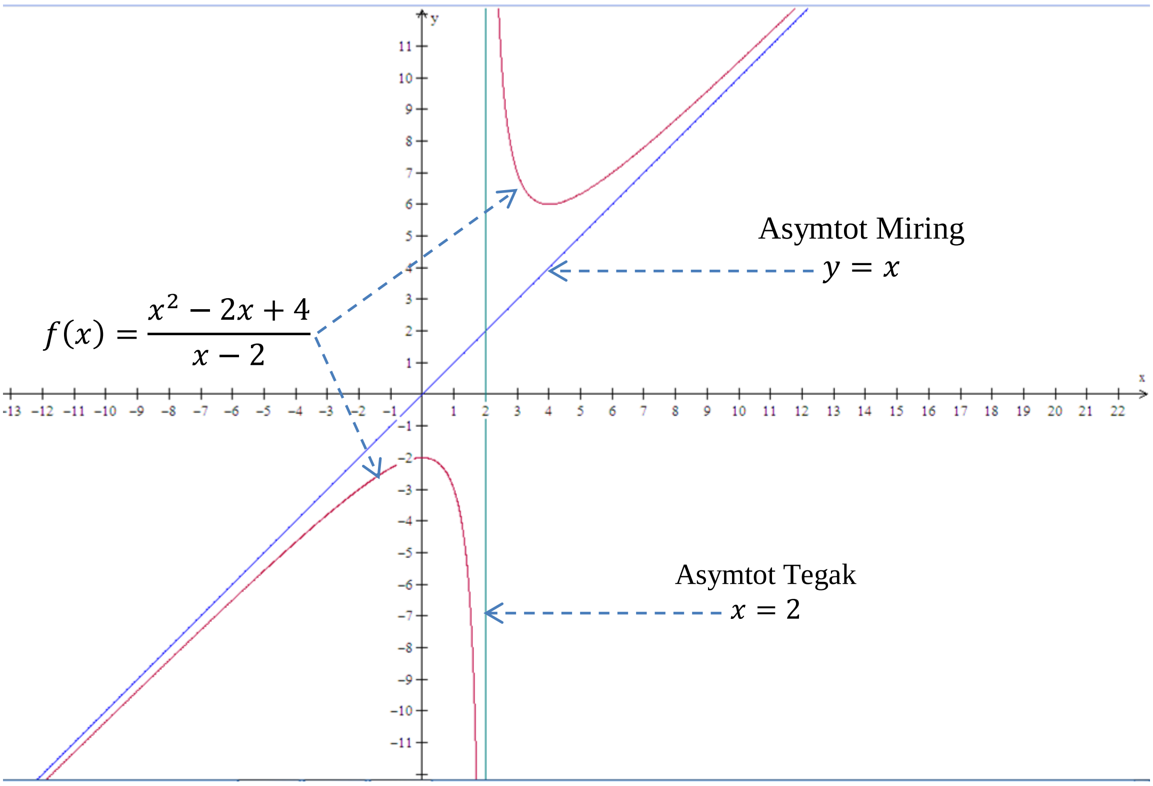
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x - 2} = 0$$

Jadi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ memiliki *Asimtot Miring* yaitu garis $y = x$

Dari serangkaian proses tersebut diatas, bentuk Grafik fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ adalah



Gambar 6. Fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

Aturan L'Hopital

Dalil Guillaume de l'Hospital atau lebih dikenal dengan aturan L'Hôpital merupakan suatu dalil yang sangat berguna dan menjadi salah satu sumbangan dalam kajian kalkulus. Terdapat perbedaan tentang penemuan dalil ini. Salah satu sumber menyatakan bahwa Dalil L' Hopital ini ditemukan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis yang bernama Guillaume de L' Hopital. Dalil ini pertama kali diperkenalkan melalui bukunya yang berjudul *Infiniment L'Analyse des Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*. Jika diterjemahkan sederhananya judul buku ini adalah Analisa Mendalam Pemahaman Kurva dan Garis. Buku tersebut dikenal sebagai buku acuan pertama dalam pelajaran Kalkulus diferensial. Di lain kesempatan, aturan ini juga ditemukan oleh ahli matematika dari Swiss yang bernama Johan Bernaoulli. Penemuan yang dilakukan oleh Bernaoulli ini sama dengan yang ditemukan L'Hopital, dari pengakuannya Bernaoulli mengatakan dia tidak meniru L' Hopital. Hal tersebut juga dikuatkan dengan pembuktian dengan melakukan cara yang bebeda oleh Bernaoulli tentang dalil ini

Dalil L'Hôpital menyatakan bahwa dalam kondisi tertentu, limit dari pembagian $\frac{f(x)}{g(x)}$ dapat ditentukan dengan menggunakan limit pembagian dari turunan-turunannya, yaitu:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}, g'(x) \neq 0$$

Atau secara formal dinyatakan dengan:

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang memiliki turunan pada interval terbuka (a, b) yang memuat c, kecuali pada c itu sendiri. Apabila $g(x) \neq 0$ untuk setiap x di (a, b), kecuali pada c itu sendiri. Jika limit dari $\frac{f(x)}{g(x)}$ untuk x mendekati c menghasilkan bentuk tidak tentu $\frac{0}{0}$, maka

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

apabila limit di ruas kanan ada (atau tak hingga). Hasil ini juga dapat diterapkan jika limit $\frac{f(x)}{g(x)}$ untuk x mendekati c menghasilkan bentuk-bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$ dan $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Bukti Dalil L'Hôpital:

Karena $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ berimplikasi pada $f(c) = 0$ dan $\mathrm{g(c)} = 0$ sehingga $f(x) = f(x) - f(c)$ dan $g(x) = g(x) - g(c)$. Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$ dapat dituliskan dengan $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$ untuk $a < x < b$. Sehingga,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{\frac{1}{(x-c)}}{\frac{1}{(x-c)}} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)}}{\frac{g(x)-g(c)}{(x-c)}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)}}{\lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{(x-c)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Terbukti bahwa jika

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Catatan:

Jika niai $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ masih menghasilkan bentuk tak tentu, maka bisa diturunkan sekali lagi sampai menghasilkan nilai limitnya.

Contoh Pemakaian

Tentukan limit dari:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$

b. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5}$

c. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc x$

d. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

Solusi

a. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ apabila langsung disubstitusikan langsung maka akan menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$. Untuk mencari nilai limitnya menggunakan aturan L'Hôpital, maka

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x}{2} = \frac{4\cdot\cos 0}{2} = 2$$

$*$ Catatan: dari bentuk $\operatorname{Lim}_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ diturunkan sekali sehingga menghasilkan

$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x}$ namun bila disubstitusikan masih menghasilkan $\frac{0}{0}$, maka

perlu diturunkan sekali lagi sehingga menjadi $\lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x}{2}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5}$ bila disubstitusikan merupakan bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, maka perlu dturunkan sekali sehingga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

c. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc x$ merupakan bentuk limit yang menghasilkan $0 \cdot \infty$ sehingga bentuk ini perlu diubah menjadi bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ agar memenuhi syarat untuk penggunaan Dalil L'Hôpital. Sehingga proses pengerjaannya adalah:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \csc x = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\cos x} = \frac{2\cdot 0}{\cos 0} = 0$$

d. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$ merupakan bentuk limit $\infty - \infty$ bila disubstitusikan langsung. Sehingga proses penyelesaiannya adalah,

$$\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Mencari nilai Maksimum/Minimum

Turunan dapat dipergunakan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan masalah memaksimumkan/meminimumkan fungsi. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah memodelkan masalah tersebut menjadi fungsi satu peubah. **Setelah itu gunakan aturan-aturan turunan untuk menentukan nilai maksimum atau nilai minimum.**

Contoh Pemakaian

Tentukan ukuran segi empat yang dibuat dari kawat sepanjang $100\ cm$ sehingga diperoleh luas yang maksimum!

Solusi

Guna menyelesaikan persoalan ini, perlu dibuat terlebih dahulu model matematikanya, yaitu:
Misal $x =$ panjang dan $y =$ lebar, sehingga dengan mengacu pada luas persegi panjang yaitu $L = pl = x \cdot y$. Persoalan ini memiliki dua acuan, yaitu kawat sepanjang 100 cm dan akan dibuat sebuah segi empat. Maka panjang dan lebar harus diketahui terlebih dahulu menggunakan pendekatan keliling. Keliling persegi panjang adalah

$$2p + 2l = 100cm \text{ atau } 2x + 2y = 100$$

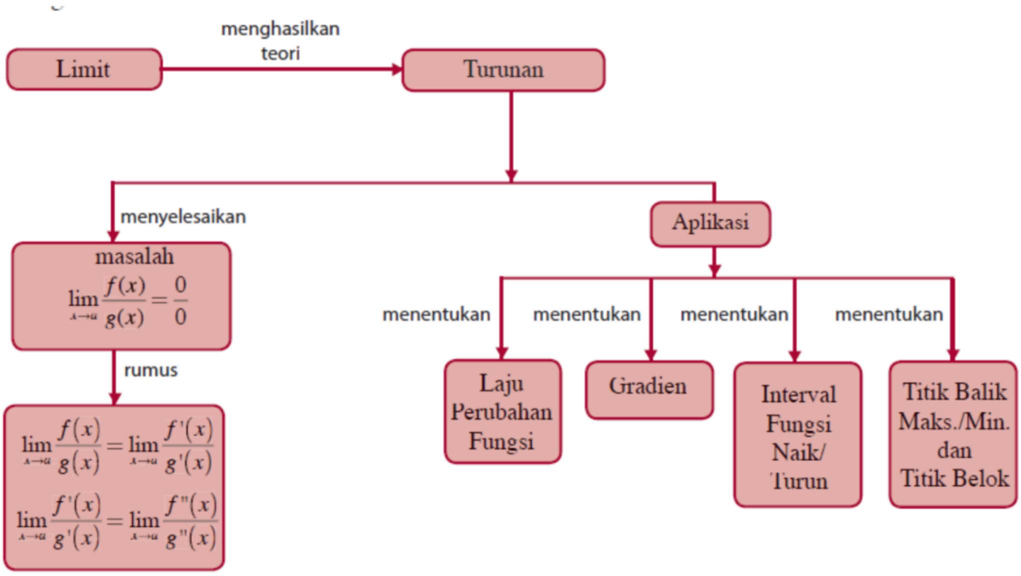
Sehingga menghasilkan $y = 50 - x$, dengan demikian luas yang diperoleh adalah

$$L(x) = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2, 0 \leq x \leq 50$$

Bentuk $L(x)$ diturunkan sekali untuk memperoleh nilai maksimum dan diperoleh $L'(x) = 50 - 2x = 0$ sehingga $x = 25$.

Karena $L''(25) = -2$ atau menghasilkan nilai negatif, maka dikatakan $x = 25$ adalah nilai maksimum lokal. Dengan demikian nilai y yang diperoleh ketika $x = 25$ adalah $y = 25$. Sehingga luas maksimum yang diperoleh adalah $L = x \cdot y = 25 \cdot 25 = 625$

Secara umum, aplikasi dan penggunaan turunan dapat diterjemahkan kedalam diagram berikut ini



Gambar 7. Diagram Alur Aplikasi Turunan

K. KESIMPULAN

Uraian diatas menunjukan secara analitik tentang turunan dan beberapa aplikasinya. Berdasarkan uraian yang dijelaskan dapat diambil beberapa point penting, yaitu:

a. $f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

b. $f(x) = ax^n$ maka $f'(x) = nax^{n-1}$

c. $f(x) = sin\ x$ maka $f'(x) = cos\ x$

d. $f(x) = \cos x$ maka $f'(x) = -\sin x$

e. $f(x) = \tan\ x$ maka $f'(x) = \sec^2 x$

f. $f(x) = c \cdot u(x)$ maka $f'(x) = c \cdot u'(x)$.

g. $f(x) = u(x) \pm v(x)$ maka$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

h. $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ maka $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$

i. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

j. $f(x) = u^n(x)$ maka $f'(x) = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$

k. $f(g(x))$ maka $f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Sebagaimana kajian matematika secara umum, ilmu matematika sangat terkait dengan cabang ilmu lain baik yang sifatnya eksak maupun sosial. Sebagaimana matematika yang di beberapa bagian tertentu menjadi landasan bagi perkembangan fisika begitu juga sebaliknya. Secara umum, matematika dan ilmu lain saling mengisi dan bersinergi sebagai penyokong perkembangan ilmu pengetahuan.

L. DAFTAR PUSTAKA

Alders, CJ. 1989. *Ilmu Ljabar Untuk SMA*. Jakarta: Paramita

Australian Government Department of Education *2013. Introduction to differential calculus – A guide for teachers (Years 11–12)*.The University of Melbourne (www.amsi.org.au)

Bartle R.G., Sherbert D.R., 2011. *Introduction to Real Analysis* (*Fourth Edition*). University of Illinois, Urbana-Champaign: JohnWiley & Sons

Purcell, E.J., Varberg, D., Rigdon, S.E.,. 2007. *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2* (*Ed.9 Cet.2*). Jakarta: Erlangga.

Tampomas, Husein. 2008. *Seribu Pena Matematika SMA Kelas XI.* Jakarta: Erlangga