Asignatura: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Curso 2023, eds.

Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

ÁNALISIS DEL MODELO PARA LA EVALUACIÓN ECONÓMICA

Rafael Acosta Márquez

Eisler F. Valles Rodríguez

Jorge Pichardo Cabrera

Orlando Rafael de la Torre Leal

Ernesto Alejandro Bárcenas Trujillo

RESUMEN

En este trabajo se realizo un análisis experimental de los resultados fundamentales del artículo Modelo para la evaluación Económica, se llevaron a cabo comprobaciones de los cálculos mediante la programación de un RK4 , se demostró la estabilidad del sistema, se realizaron y mostró el diagrama de fase lo cual corroboró los resultados acerca de la estabilidad.

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo, escrito por Roberto Pradas Velasco, Fernando Antoñanzas Villar, Javier Mar, fue publicado en la revista Gaceta Sanitaria en el año 2009. Dicha revista contaba con un factor de impacto de 1.172 en el año 2009 y tuvo un factor de impacto de 2.479 en el año 2022, lo que indica su relevancia en el ámbito académico. El artículo trata sobre la utilización conjunta de árboles de decisión y modelos epidemiológicos basados en ecuaciones diferenciales como un método apropiado para la evaluación económica de medidas profilácticas ante enfermedades infecciosas. Estos modelos permiten combinar el comportamiento dinámico de la enfermedad con el consumo de recursos sanitarios. Para ilustrar este tipo de modelos se ajusta un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales al comportamiento epidémico de la gripe en España, con el fin de proyectar el impacto epidemiológico de la vacunación antigripal. Se han recreado los experimentos realizados para hallar las soluciones al sistema en los distintos instantes de tiempo $t \in [1,52]$

1.1. Estructura del trabajo

El artículo esta estructurado de la siguiente manera: en primer lugar se tiene un resumen de dicho artículo, procede una introducción donde se expone la problemática a analizar. Luego viene la sección Material y Métodos en la cual se muestran los datos que se tienen sobre el problema y los métodos que se utlizaron en la resolución del mismo. Vendría después la sección de los Resultados donde, valga la redundancia, se exponen los resultados de utilizar los métodos para resolver el problema, esto es relevado por la sección de la Discusión, donde se analizan dichos resultados y se sacan conclusiones. Por último está la bibliografía.

2. RESULTADOS FUNDAMENTALES.

2.1. Modelo Dinámico

Para mostrar el desarrollo de los modelos dinámicos se van a utilizar datos referentes al contexto de la vacunación antigripal de población sana en edad laboral, en Espanã, para una hipotética cohorte de 100.000 individuos. A partir de la situación de 1 año epidemiológico, la cadena de contagio susceptible, infectivo y resistente se adapta correctamente al comportamiento epidémico de la gripe. La población quedará dividida en 3 clases de individuos: los susceptibles (que están en condiciones de ser contagiados), los infectivos (aquellos que infectan o pueden infectar a los susceptibles) y los resistentes (los que presentan resistencia al agente infeccioso al recuperarse de la enfermedad así sea por inmunización natural o al quedar inmunizados por un programa de inmunización)

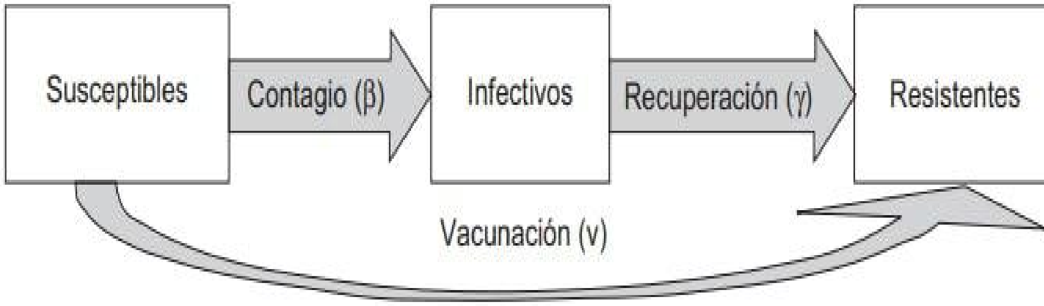

Figura 1: Dinámica epidémica de la enfermedad

2.1.1. Declaración de Variables

Variables:
N —— Número total de individuos
t —— Tiempo en semanas
$S(t)$ — Cantidad de suceptibles en un tiempo t
$I(t)$ — Cantidad de infectados en un tiempo t
$R(t)$ — Cantidad de resistentes en un tiempo t
$V(t)$ — Cantidad de vacunados en un tiempo t
β – Coeficiente de transmisión de la enfermedad
γ - Coeficiente de retiro natural de la enfermedad
ε - Índice de per cápita de eficiencia de la vacuna
ν —— Índice de per cápita de cobertura vacunal
V —— Cantidad de vacunados en una semana

2.1.2. Ecuaciones

Sistema de ecuaciones empleado:

$$\begin{pmatrix} S' \\ I' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{array}{l} S'(x) = -\beta * I(t) * S(t) - V(t) \\ I'(x) = \beta * I(t) * S(t) - \gamma * I(t);\ siendo\ N = S(t) + I(t) + R(t) \\ R'(x) = \gamma * I(t) + V(t) \end{array} \tag{1}$$

$$V(t) = \begin{cases} 0\ si\ 0 \leq t \leq 9 \\ V\ \ si\ 9 < t \leq 18 \\ 0\ si\ 18 < t \leq 51 \end{cases} \tag{2}$$

2.2. Linealización y Estabilidad

El sistema (1) al tratar de ser resuelto para el vector solución nulo arroja como condición necesaria y suficiente que la función I(t) sea nula y que $t > 19$.

Por otra parte la matriz jacobiana del sistema viene dada por la expresión:

$$\begin{pmatrix} f_S(S_0,I_0,R_0) & f_I(S_0,I_0,R_0) & f_R(S_0,I_0,R_0) \\ g_S(S_0,I_0,R_0) & g_I(S_0,I_0,R_0) & g_R(S_0,I_0,R_0) \\ h_S(S_0,I_0,R_0) & h_I(S_0,I_0,R_0) & h_R(S_0,I_0,R_0) \end{pmatrix}$$

Y sus valores son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3.05 & 0 \\ 0 & -0.41 & 0 \\ 0 & 3.47 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se convierte en una matriz de coeficientes para el sistema linealizado $X' = J * x$ donde X' es el vector compuesto por las funciones u_1', u_2', u_3' tal que $u_1 = S(t) - S_0$, $u_2 = I(t) - I_0$ y $u_3 = R(t) - R_0$, X es la transpuesta del vector compuesto por las funciones u_1, u_2, u_3 y el punto (S_0, I_0, R_0) es el punto de equilibrio analizado.

Los valores propios del Jacobiano evaluados en el punto de equilibrio son: 0, 0 y -0.4171 por lo cual podemos concluir que el punto de equilibrio en cuestión es un nodo estable ya que los ceros no aportan información y al ser el resto de los valores, en este caso uno, negativos se confirma la estabilidad de dicho nodo.

2.3. Métodos y algoritmos utilizados

Para corroborar los resultados mostrados en este paper, se demostro la estabilidad del sistema, se recrearon los diagramas de fase y se usó el método de Runge-Kutta de 4to orden (RK4) teniendo en cuenta la tabla de valores iniciales(Cuadro 1).

Cuadro 1: Valores iniciales usados en la simulación

Párametro	**Valor**
Índice per cápita de cobertura vacunal,	0,20
Número total de individuos	100'000
Coeficiente de transmisión(β)	$3{,}614 \times 10^{-}5$
Coeficiente de retiro natural(γ)	3.47
Índice per cápita de eficacia de la vacuna	0.67
Susceptibles iniciales	99'986
Infectivos iniciales	14
Resistentes iniciales	0
Semanas de estudio epidm.	52

REFERENCIAS

https://www.gacetasanitaria.org/es-uno-coma-uno-siete-dos-tenemos-factor-articulo-S0213911110001743 https://www.gacetasanitaria.org/es-gaceta-sanitaria-2022-maximo-factor-articulo-S0213911123000092 Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la Frontera. C/'omputo y Modelado. Cuarta Edici/'on. Aut: C. Henry Edwards, David E. Penney

GRÁFICOS

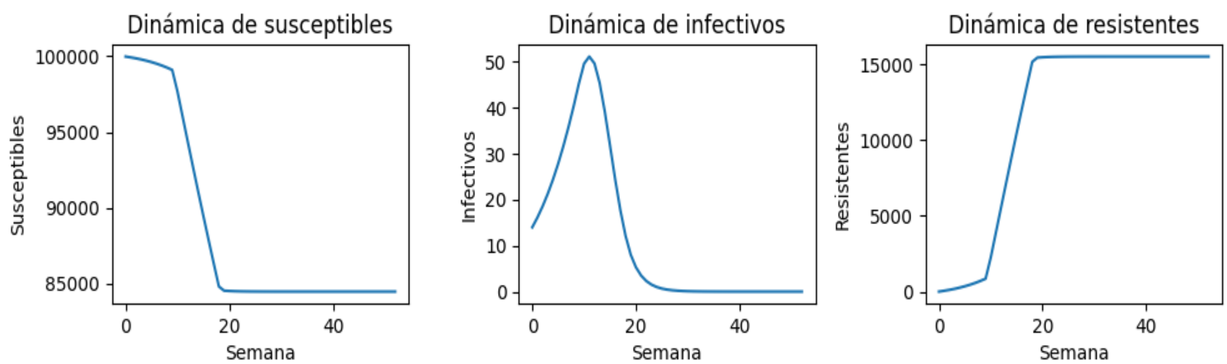

Figura 2: Gráficas en función del tiempo si se realiza la vacunación

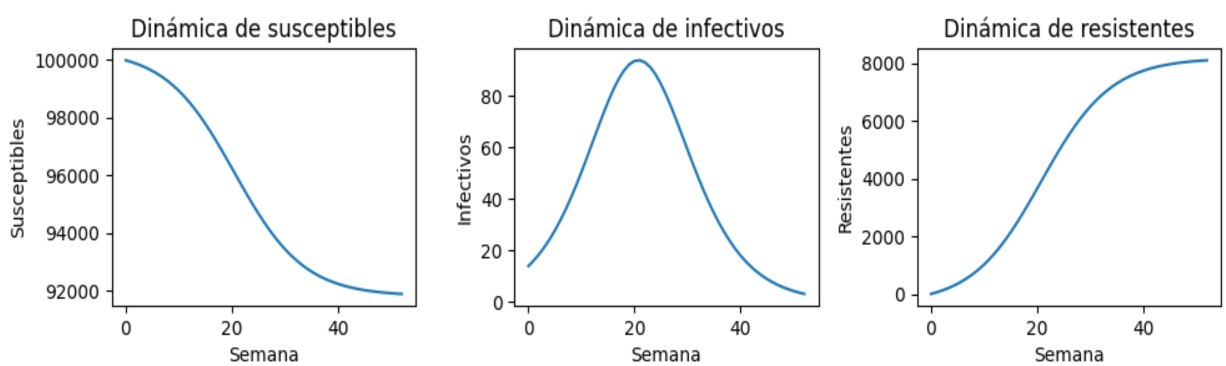

Figura 3: Gráficas en función del tiempo si no se realiza la vacunación

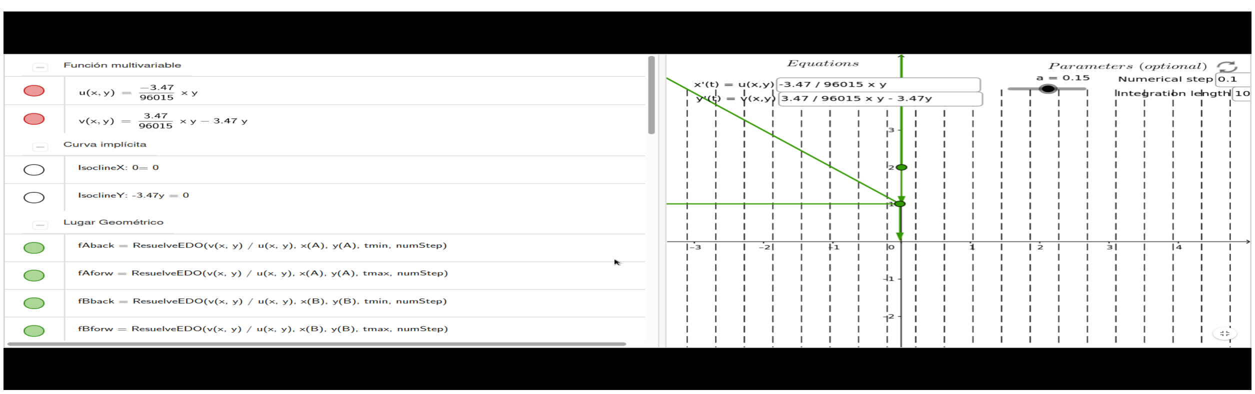

Figura 4: Diagrama de Fases

A. ANEXOS

```
def tamanno_poblacion <- 100000;
def susceptibles <- 99986;
def infectivos <- 14;
def resistentes <- 0;
def susceptibles_auge_onda_epidemica <- 96015;
def coeficiente_retiro_natural <- 3.47;
def eficacia_vacuna: float <- 0.67;
def cobertura_vacunal: float <- 0.20;
def coeficiente_transmision <- coeficiente_retiro_natural
                               /susceptibles_auge_onda_epidemica;

funcion edo(t, valores):
        (dx, dy, dz) <- valores;
        dxdt <- -coeficiente_transmision*dy*dx-Vacunados(t);
        dydt <- coeficiente_transmision*dy*dx
                   -coeficiente_retiro_natural*dy;
        dzdt <- coeficiente_retiro_natural*dy+Vacunados(t);
        retorna Arreglo(dxdt, dydt, dzdt);

funcion Vacunados(tiempo):
        Si tiempo >= 0 y tiempo <= 9 Entonces
                retorna 0
        Si tiempo > 9 y tiempo <= 18 Entonces
                retorna tamanno_poblacion*eficacia_vacuna*
                                cobertura_vacunal/9.0
        Si tiempo>18 Entonces
                retorna 0

funcion runge_kutta4(f, x0, y0, h, n):
        ArregloSoluciones <- [(x0, y0)]
        Desde i=1 hasta n Hacer
                (xi, yi) <- ArregloSoluciones.UltimoElemento
                k1 <- h * f(xi, yi)
                k2 <- h * f(xi + h/2, yi + k1/2)
                k3 <- h * f(xi + h/2, yi + k2/2)
                k4 <- h * f(xi + h, yi + k3)
                y_next <- yi + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
                x_next <- xi + h
                ArregloSoluciones.Annadir((x_next, y_next))
        Siguiente

        retorna ArregloSoluciones

Resultados = runge_kutta4(edo, 0, [99986, 14, 0], 1, 52)
```