Simulación de compañía de seguros

Orlando R. de la Torre Leal

13 de abril de 2025

1. Introducción

Contexto

En el proyecto se modela una compañía de seguros de daños donde los titulares de póliza o asegurados realizan reclamaciones de acuerdo a procesos de Poisson independientes con una tasa en comun λ y el costo de cada reclamación tiene distribución F. Nuevos clientes se unen a la compañia acorde a un proceso de Poisson con un ratio v. Cada cliente permanece en la compañía por un tiempo exponencial con tasa μ antes de darse de baja. Cada asegurado paga a la compañía de seguros una cantidad c por unidad de tiempo.

Objetivos

Dada una condición inicial de n_0 clientes y un capital inicial $a_0 \geq 0$, se busca estimar que a probabilidad de que el capital de la compañía nunca sea negativo en el intervalo de tiempo $[0, T]$.

Variables que describen el problema

Para simular el sistema anterior, definimos las variables y eventos de la siguiente manera:
Variables:

- Variable de tiempo: t.
- Variable de estado del sistema (n, a), donde n es el numero de asegurados y a es el capital actual de la compañía.
- Tasa de llegada de nuevos clientes: v

- Tasa de abandono por cliente: μ
- Tasa de reclamaciones por clientes: λ

Eventos:

- LLegada de un nuevo asegurado(titulares)
- Pérdida de un asegurado
- Reclamación de un asegurado

La lista de eventos consiste en un único valor: el tiempo en el que ocurrirá el próximo evento.
Notación: $EL = t_E$ Si el estado actual es (n, a) en tiempo t, el próximo evento ocurrirá en $t + X$, donde X es una variable aleatoria exponencial con tasa:

$$\text{Tasa Total} = v + n\mu + n\lambda$$

Aún así, no importa cuando ocurra el próximo evento, este ocurrirá con una probabilidad:

- Nuevo asegurado: $\frac{v}{v+n\mu+n\lambda}$
- Pérdida de asegurado: $\frac{n\mu}{v+n\mu+n\lambda}$
- Reclamación: $\frac{n\lambda}{v+n\mu+n\lambda}$

Tras determinar cuándo ocurre el proximo evento se genera un número aleatorio para identificar cuál de los tres eventos ocurrió. Luego se actualiza el estado del sistema (n, a) en función del evento seleccionado.

Para un estado (n, a):

- X: Variable aleatorio exponencial con tasa $v + n\mu + n\lambda$(tiempo hasta el próximo evento).
- J: Variable aleatoria que representa el tipo de evento.

$$J = \begin{cases} 1 & \text{Nuevo asegurado,} \quad \text{con probabilidad } \dfrac{\nu}{\nu + n\mu + n\lambda}, \\ 2 & \text{Pérdida de asegurado,} \quad \text{con probabilidad } \dfrac{n\mu}{\nu + n\mu + n\lambda}, \\ 3 & \text{Reclamación,} \quad \text{con probabilidad } \dfrac{n\lambda}{\nu + n\mu + n\lambda} \end{cases} \tag{1}$$

- Y: Variable aleatoria con distribución F(costo de la reclamación)
- I: Indicador del éxito financiero:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{, si el capital es no negativo,} \\ 0 & \text{, en caso contrario} \end{cases} \tag{2}$$

2. Detalles de Implementación

Inicialización

Para simular el sistema, inicializamos las variables de la siguiente manera:

1. **Inicialización inicial**:

$$t = 0,$$
$$a = a_0,$$
$$n = n_0$$

2. Generar $X \sim \text{Exponencial}(\nu + n\mu + n\lambda)$(tiempo de espera hasta la siguiente evaluación) e inicializar:

$$t_E = X$$

Actualización

Para actualizar el sistema, avanzamos al siguiente evento, verificando primero si nos lleva más allá del tiempo T:

1. **Caso 1**: Si $t_E > T$:
   - Asignar $I = 1$ y finalizar esta ejecución.

2. **Caso 2**: Si $t_E \leq T$:

   a) Reiniciar:

$$a = a + n \cdot c \cdot (t_E)$$
$$t = t_E$$

   b) Generar J:

$$J = \begin{cases} 1: & n = n + 1 \\ 2: & n = n - 1 \\ & \text{Generar } Y \sim F. \\ 3: & \text{Si } Y > a, \text{ asignar } I = 0 \text{ y terminar.} \\ & \text{En otro caso, } a = a - Y \quad \text{(Pagar reclamación)} \end{cases}$$

   c) Generar $X \sim \text{Exponencial}(\nu + n\mu + n\lambda)$ y actualizar:

$$t_E = t + X$$

El paso de actualización se repite continuamente hasta que se completa una ejecución.

3. Resultados y Experimentos

Hallazgos de la simulación

Para los siguientes valores iniciales:

- $v = 0{,}6$ Tasa de nuevos clientes
- $\mu = 0{,}3$ Tasa de abandono de clientes
- $\lambda = 0{,}2$ Tasa de reclamaciones de clientes
- $c = 2{,}5$ Pago de clientes por unidad de tiempo
- $a_0 = 10$ Capital Inicial
- $n_0 = 5$ Cantidad Inicial de clientes
- $T = 500$ Tiempo máximo

Durante 1000 simulaciones hemos obtenido los siguientes resultados:

- Probabilidad de no arruinarse: 0.743 %
- Tiempo promedio hasta arruinarse: 75.59 unidades de tiempo

Interpretación de los resultados

El costo actual (c = 2.5) es suficiente para evitar la ruina en al menos el 74.3 % de los casos. Las reclamaciones grandes (¿a_0) son la principal causa de ruina temprana (antes de T/2).

Hipótesis extraídas

- El aumento del costo por cliente aumenta la probabilidad de éxito pero no es rentable.
- El aumento de la frecuencia de reclamaciones disminuye la probabilidad de exito drámaticamente.

Experimentos de validación

- Para la Hipótesis 1 se aumento el costo de 2.5 a 3.0(20 %) y se obtuvo un aumento en la probabilidad de exito de 74.3 % a 77.87 % un mero 3 %, no es rentable. Podría aumentar el descontento ocasionando mas reclamaciones.

- Para la Hipótesis 2 se aumento el ratio de reclamaciones(λ = 0,2 -¿λ = 0,6) y disminuyó la probabilidad de éxito hasta un 38.4 % con tiempo estimado de ruina de 41.72u de tiempo

Análisis estadístico

- Variables de interés

- Métodos estadísticos utilizados

Análisis de parada

Si se llega al valor de ruina $a = 0$ se puede detener la simulación.

4. Conclusiones

Para maximizar el éxito de una compañía de seguros es importante controlar que la tasa de ingreso de clientes sea mayor que la de retirada($\mu > \lambda$). Y en base a la cantidad de clientes hay un límite de hasta donde aumentar el precio es rentable para maximizar las ganancias y minimizando las reclamaciones.