MAKALAH ALJABAR LINEAR

SUB RUANG VEKTOR

Dosen Pengampu :

Darmadi, S.Si, M.Pd

Disusun :

Kelas 5A / Kelompok 5 :

Dian Dwi Rahayu	(08411. 106)
Hefetamala	(08411. 143)
Khoiril Hanafi	(08411. 170)
Lianatul Nihayah	(08411. 174)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA

DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

IKIP PGRI MADIUN

2010

Pendahuluan

Suatu ruang vektor mungkin saja dapat berada di dalam ruang vektor yang lainnya. Pada sub bab sebelumnya bahwa bidang-bidang yang melewati titik asal adalah ruang vektor yang terletak di dalam ruang vektor R^3. Untuk selanjutnya kita akan mempelajari konsep penting ini secara lebih mendetail. Suatu sub bab himpunan dan ruang vektor dan juga merupakan suatu vektor ruang dalam kaitannya dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar vektor yang di definisikan pada V.

SUB RUANG VEKTOR

A. Definisi

Suatu sub himpunan *W* dan suatu ruang vector *V* disebut **sub ruang** dan *V* jika *W* itu sendiri merupakan suatu ruang vector dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang terdefinisi pada *V*.

Teorema 1 :

Jika *W* adalah suatu himpunan yang terdiri dari satu atau lebih vektor dari suatu ruang vector *V*, maka *W* adalah suatu sub ruang dari *V*, jika dan hanya jika syarat berikut terpenuhi:

a) Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada *W* maka **u + v** berada pada *W*.

b) Jika *k* adalah sembarang skalar dan **u** adalah sembarang vektor pada *W* maka *k***u** berada pada *W*.

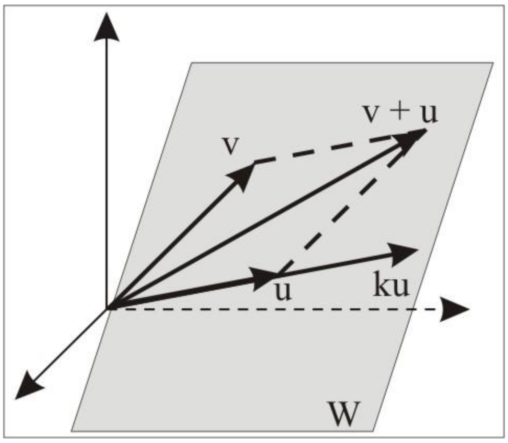
Bukti:

Misalkan **u** adalah vektor sembarang pada *W*. Menurut syarat (b), *k*u berada pada *W* untuk setiap skalar *k*. Dengan membuat *k* = 0, sesuai dengan Teorema 1 diperoleh 0**u** = 0 berada pada *W*, dan dengan mengatur *k* = -1, maka (-1)**u** = **-u** berada pada *W*.

Suatau himpunan *W* yang terdiri dari satu atau lebih vektor dan suatu sub ruang V disebut **tertutup terhadap penjumlahan** jika syarat (a) pada Teorema 1 berlaku, dan dikatakan **tertutup terhadap perkalian skalar** jika syarat (b) berlaku. Jadi, Teorema 4 menyatakan bahwa *W* adalah *sub ruang dari V jika dan hanya jika W tertutup terhadap penjumlahan dan tertutup terhadap perkalian skalar*.

Contoh 1 :

Miasalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor sembarang pada *W*, dan *W* adalah bidang sembarang yang melewati titik asal. Maka **u + v** harus terletak pada *W* karena vektor ini merupakan diagonal dan *paralelogram* yang dibentuk oleh **u** dan **v** (Gambar 2), dan vektor *k**u*** harus terletak pada *W* untuk skalar sembarang *k* karena *k***u** terletak pada garis yang melewati **u**. Jadi, *W* tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, sehingga merupakan sub ruang dan R^3.



Vektor u + v dan ku keduanya
Terletak pada satu bidang yang
sama dengan u dan v.

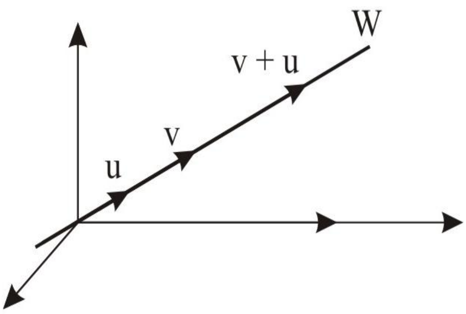
Contoh 2 :

Garis-Garis yang Melewati Titik Asal adalah Sub Ruang

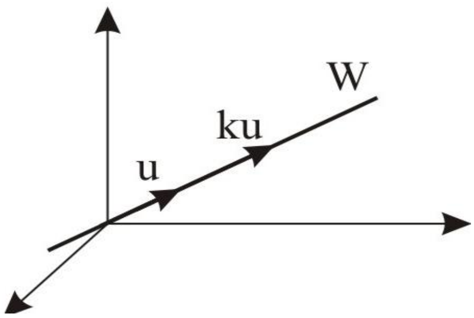
Tunjukkan bahwa suatu garis yang melewati titik asal dari R^3 adalah sub ruang dari R^3.

Penyelesaian:

Misalkan W adalah suatu garis yang melewati titik asal R^3. Secara geometris tampak bahwa jumlah dua vektor pada W juga akan terletak pada garis tersebut dan perkalian skalar suatu vektor pada garis tersebut juga terletak pada garis tersebut. Jadi, W tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, sehingga merupakan sub ruang dan dan R^3.



(a) W tertutup terhadap penjumlahan.

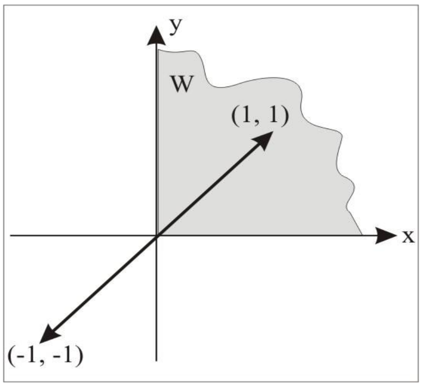


(b) W tertutup terhadap perkalian skalar.

Contoh 3 :

Sub Himpunan dari R^2 yang bukan Merupakan Sub Ruang.

Misalkan *W* adalah himpunan semua titik (x, y) pada R^2 sedemikian rupa sehingga $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Titik ini adalah titik-titik pada kuadran pertama. Himpunan *W* bukan merupakan sub ruang dari R^2 karena tidak tertutup terhadap perkalian skalar. Sebagai contoh, $v = (1,1)$ terletak pada *W*, tetapi bentuk negatifnya $(-1)v = -v(-1,-1)$ tidak terletak pada *W*.(Gambar 4)



W tidak tertutup terhadap perkalian skalar.

Setiap ruang vektor tak nol *V*, memiliki paling tidak dua sub ruang, *yaitu: V* itu sendiri merupakan suatu sub ruang, dan himpunan $\{0\}$yang terdiri dari vektor nol pada V disebut dengan sub ruang nol.Daftar sub ruang dari R^2 dan R^3 sebagai berikut:

Sub ruang dari R^2**:**

- $\{0\}$
- Garis-garis melewati titik asal
- R^2

Sub ruang dari R^3**:**

- $\{0\}$
- Garis-garis melewati titik asal
- Bidang-bidang melewati titik asal
- R^3

Contoh 4 :

Sub Ruang dari M_{nn}

Himpunan matriks simetrik nxn adalah sub ruang dan ruang vektor yang terdiri dari semua matriks nxn. Demikian juga, himpunan matriks segitiga atas nxn, himpunan matriks segitiga bawah nxn, himpunan matriks diagonal nxn, semuanya membentuk sub ruang dari M_{nn}, karena setiap himpunan ini tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar.

Contoh 5 :

Sub Ruang dari Polinomial dengan Pangkat $\leq n$

Misalkan n adalah sebuah bilangan bulat positif dan misalkan W terdiri dari fungsi nol dan semua fungsi polinomial riil yang mempunyai derajat $\leq n$; jadi, W adalah himpunan semua fungsi yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Diamana $a_0, ..., a_n$ adalah bilangan-bilangan riil. Himpunan W adalah sub ruang dari ruang vektor semua fungsi bernilai riil. Untuk melihat ini, misalkanlah **p** dan **q** merupakan polinom-polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Dan

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$$

Maka

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$$

Juga

$$(kp)(x) = kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \cdots + (ka_n)x^n$$

Maka, **p + q** dan *k*p terletak di *W*.

Teorema 2

Tinjaulah sistem *m* persamaan linier pada *n* bilangan tidak diketahui

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Atau, dalam notasi matriks, *A*x = **b**. Sebuah vektor*

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

Pada R^n kita namakan *vektor pemecahan* dari sistem tersebut jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots\ldots, x_n = s_n$ merupakan pemecahan dari sistem tersebut.

B. Definisi

Suatu vektor *W* disebut suatu *kombinasi linier* dari vektor-vektor $V_1, V_2, \ldots, V_n$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{k_1 v_1} + \boldsymbol{k_2 v_2} + \cdots + \boldsymbol{k_r v_r}$$

Dimana $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar

Contoh 1:

Memeriksa Kombinasi Linier

misalkan vektor-vektor **u** = (0, 1, 2) dan **v** = (-1, 2, 3) pada R^3. Tunjukkan bahwa **w** = (1, 0, 1) adalah suatu kombinasi linier dari u dan v dan bahwa **x** = (5, -1, 7) bukan merupakan kombinasi linier dari **u** dan **v.**

Penyelesaian:

Agar **w** dapat menjadi kombinasi linier dari **u** dan **v**, maka harus terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga **w** = $k_1 u + k_2 v$, yaitu:

(1, 0, 1) = $k_1(0, 1, 2) + k_2(-1, 2, 3)$

(1, 0, 1) = $\big((0)k_1 + (-1)k_2, k_1 + 2k_2, 2k_1 + 3k_2\big)$

Dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh:

$$-k_2 = 1$$
$$k_1 + 2k_2 = 0$$
$$2k_1 + 3k_2 = 1$$

Dengan menyelesaikan sistem ini, akan mnghasilkan $k_1 = 2, k_2 = -1$, sehingga:

$$W = 2u - v$$

Demikian juga agar x dapat merupakan kombinasi linier dari u dan v, harus terdapat skalar $k_1$dan $k_2$sedemikian rupa sehingga x = $k_1u + k_2v$, yaitu:

$$(5, -1, 7) = k_1(0,1,2) + k_2(-1,2,3)$$

$$(5, -1, 7) = \big((0)k_1 + (-1)k_2, k_1 + 2k_2, 2k_1 + 3k_2\big)$$

Dengan menyetarakan komponen- komponen yang bersesuaian diperoleh:

$$-k_2 = 5$$

$$k_1 + 2k_2 = -1$$

$$2k_1 + 3k_2 = 7$$

Sistem persamaan ini tidak konsisten, sehingga tidak terdapat skalar k_1 dan k_2. Sebagai konsekuensinya, **x** bukan merupakan kombinasi linier dari **u** dan **v**.

C. Definisi

Jika $v_1, v_2, \dots, v_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor *V* dan jika masing-masing vektor pada *V* dapat dinyatakan dalam kombinasi linier $v_1, v_2, \dots, v_r$ maka dapat dinyatakan bahwa vektor-vektor ini ***merentang V.***

Teorema 1

Jika $v_1, v_2, \dots, v_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V, maka:

(a) Himpunan W dari semua kombinasi linier $v_1, v_2, \dots, v_r$ adalah subruang V.

(b) W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung $v_1, v_2, \dots, v_r$ dalam arti bahwa setiap subruang lain dari V yang mengandung $v_1, v_2, \dots, v_r$ harus mengandung W.

Kombinasi linier $v_1, v_2, \dots, v_r$ maka kita dapatkan sub ruang *V*. Sub ruang tersebut kita namakan *ruang linier terrentang* oleh: $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, atau dengan lebih sederhana dinamakan *ruang terentang* oleh: $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$.

Teorema 2

Jika S = $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor *V*, maka sub ruang *W* dari *V* yang terdiri dari semua kombinari linier vektor-vektor pada S disebut sebagai ruang yang direntang oleh $v_1, v_2, \dots, v_r$ dan vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_r$ merentang *W*. Untuk menyatakan bahwa *W* adalah ruang yang direntang oleh vektor-vektor pada himpunan S = $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ kita menuliskan

W = rentang (S) atau W = rentang $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$

Teorema 3

Jika S = $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ dan $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah dua himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor maka:

$$\textit{Rentang}\ \{v_1, v_2, \dots, v_r\} = \textit{rentang}\ \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$$

Jika dan hanya jika setiap vektor pada S adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor pada S' dan setiap vektor pada S' adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor pada S.

Penutup

Dari sub ruang yang telah kami bahas dapat disimpulkan bahwa dalam sub ruang itu meliputi:

1). Garis-garis yang melewati titik asal adalah sub ruang.

2). Sub himpunan dari R^3 yang bukan merupakan sub ruang dari $M_{n.n}$.

3). Sub ruang dari polinomial dengan pangkat ≤ n dalam sub ruang vector

juga membahas kombinasi linier dan vektor-vektor yang merentang.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1993. Aljabar Linear Elementer edisi 5. Jakarta : Erlangga

Anton, Howard. 2002. Aljabar Linear Elementer Jilid 1 edisi 8. Jakarta : Erlangga

Purwanto, Heri. 2005. Aljabar Linear. Jakarta : PT Ercontara Rajawali