# PERTEMUAN 12

## TEORI GRAF LANJUTAN

# Representasi Graf

Representasi graf

Untuk maksud pemprosesan graf dengan program komputer, graf harus dipresentasikan di dalam memori. Terdapat beberapa representasi yang mungkin untuk graf. Dalam bab ini akan dibahas 3 jenis representasi yang sering digunakan, yaitu matriks ketetanggaan, matriks bersisian dan senarai ketetanggaan.

1. Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*)

representasi jenis ini yang paling umum. Misalkan G=(V,E) adalah graf dengan n simpul n≥1. Matriks ketetanggaan G adalah matriks dwimatra yang berukuran n x n. Jika matriks dinamakan A = [aij] maka

$$aij = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul I dan j bertetangga} \\ 0, \text{ jika simpul I dan j tidak bertetangga} \end{cases}$$

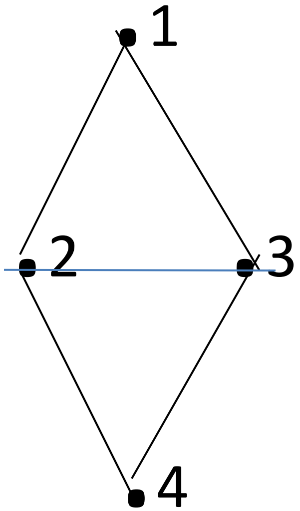
# Representasi Matrik ketetanggaan

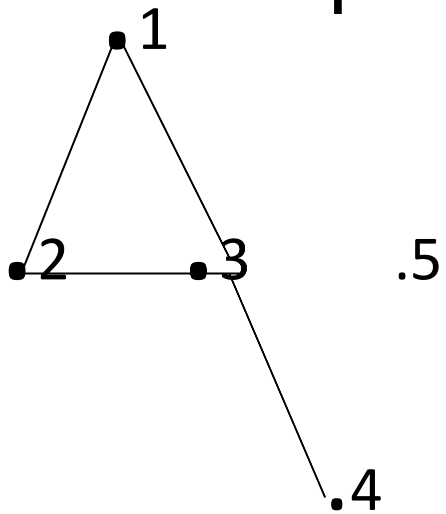
Matriks ketetanggan hanya bernilai 0 dan 1, maka matriks tersebut dinamakan matriks nol-satu ( *zero-one*).selain itu matriks juga bisa dinyatakan dengan nilai false(menyatakan 0) dan true (menyatakan 1). Matriks ketetanggan didasarkan pada pengurutan nomor simpul, disini terdapat n! cara pengurutan nomor simpul berarti ada n! matriks ketetanggan berbeda untuk graf dengan n simpul.

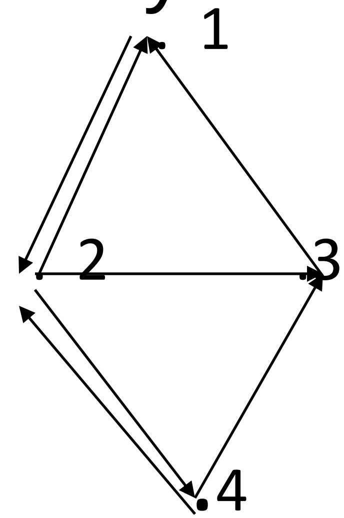
Contoh:

Perhatikan graf sederhana dan matriks ketetanggaannya, dari graf terhubung, graf tak terhubung dan graf berarah berikut ini!

# Bentuk Graf dan representasinya




$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

# Kelemahan matrik ketetanggaan dan matrik bersisian

Kelemahan dari matriks ketetanggaan adalah tidak dapat untuk mempresentasikan graf yang mempunyai sisi ganda. Untuk mengatasinya, maka elemen aij pada matriks ketetanggaan sama dengan jumlah sisi yang berasosiasi dengan (vi,vj). Matriks ketetanggaannya bukan lagi matriks nol-satu. Untuk graf semu, gelang pada simpul vi dinyatakan dengan nilai 1 pada posisi (i,i) dimatrks ketetanggaannya.

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

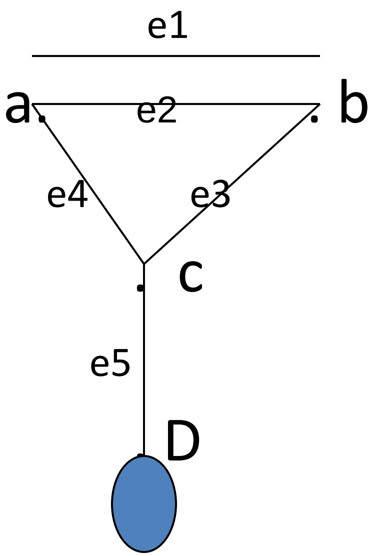
adalah matriks yang menyatakan kebersisian simpul dengan sisi. Misalkan G = (V,E) adalah graf dengan n simpul dan m buah sisi. Matriks bersisian G adalah matriks dwimatra yang berukuran n x m. Baris menunjukkan label simpul, sedangkan kolom menunjukkan label sisinya. Bila matriks disebut A = [aij], maka

# Matrik bersisian dan contoh

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul i bersisian dengan sisi j} \\ 0, \text{ jika simpul i tidak bersisian dengan sisi j} \end{cases}$$

Matriks bersisian dapat digunakan untuk merepresentasikan graf yang mengandung sisi ganda atau sisi gelang.

Contoh:




$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Senarai Ketetanggaan

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)

Kelemahan matriks ketetanggaan adalah bila graf memiliki jumlah sisi relatif sedikit, matriksnya bersifat jarang (*sparse*) yaitu mengandung banyak elemen nol, sedangkan elemen yang bukan nol sedikit. Sehingga jika ditinjau dari teknis implementasi, kebutuhan ruang memorinya boros karena komputer menyimpan elemen 0 yang tidak perlu. Untuk mengatasinya kita gunakan representasi yang ketiga yaitu senarai ketetanggaan. Senarai ketetanggaan mengenumerasi simpul-simpul yang bertetangga dengan setiap simpul di dalam graf.

Contoh: Berdasarkan graf contoh representasi 1, kita buat senarai ketetanggaannya

# Tabel hubungan senarai ketetanggaan

| SIMPUL | SIMPUL TETANGGA |
|---|---|
| 1 | 2,3 |
| 2 | 1,3,4 |
| 3 | 1,2,4 |
| 4 | 2,3 |

| SIMPUL | SIMPUL TETANGGA |
|---|---|
| 1 | 2,3 |
| 2 | 1,3 |
| 3 | 1,2,4 |
| 4 | 3 |
| 5 | - |

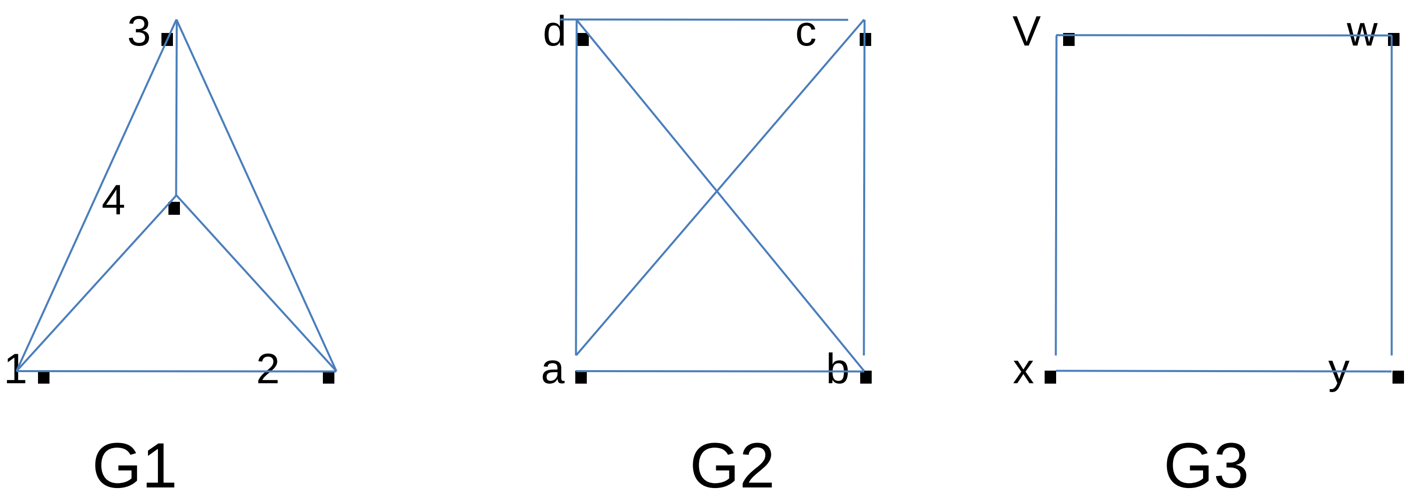
| SIMPUL | SIMPUL TETANGGA |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1,3,4 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2,3 |

# Graf Isomorfik

**Graf Isomorfik (Isomorphic Graf)**

Adalah dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda

Cont:



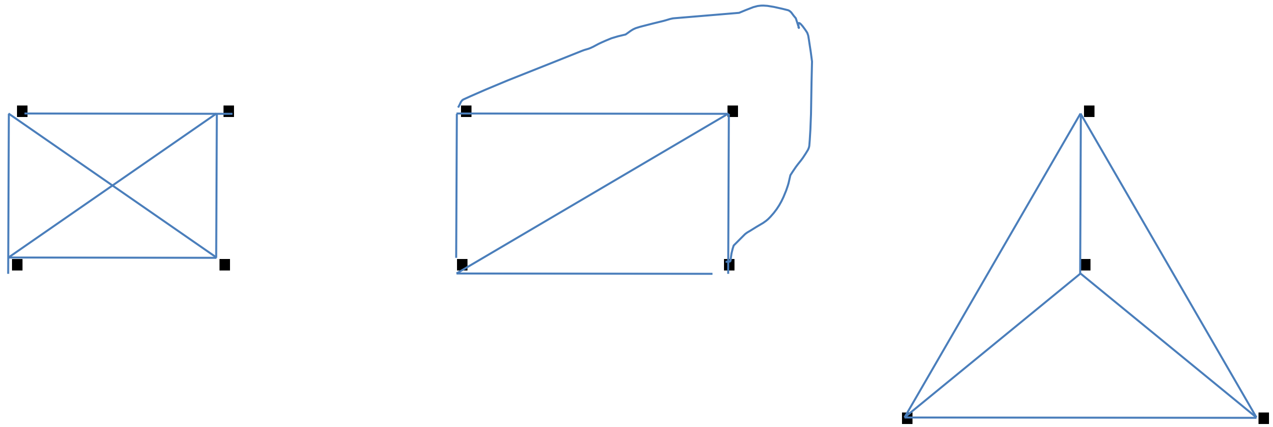

G1 isomorfik dengan G2, tetapi G1 tidak isomorfik dengan G3

# Graf Planar dan Bidang

**Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)**

adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong. Dan graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang (*plane graph*).

Cont:



# Rumus Euler dan graf dual

**Rumus Euler**

Jumlah wilayah (f) pada graf planar sederhana juga dapat dihitung dengan rumus Euler sebagai berikut:

$n - e + f = 2$ atau $f = e - n + 2$

$n$ = jumlah simpul

$e$ = jumlah sisi

Cont:

Misal $e = 11$ dan $n = 7$, maka $f = 11-7+2 = 6$

**Graf Dual**

Adalah graf yang dibuat dengan cara setiap wilayah graf lama buatlah simpul untuk graf baru dan buat sisi baru yang memotong sisi graf lama untuk menghubungkan simpul graf yang baru.

# Lintasan dan sirkuit Euler dan Hamilton

**Lintasan dan Sirkuit Euler**

Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Euler adalah suatu lintasan Euler yang kembali ke simpul awal, membentuk lintasan tertutup, dengan kata lain sirkuit euler adalah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali.

Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graf Euler** sedangkan graf yang mempunyai lintasan Euler disebut graf **semi-Euler.**

**Lintasan dan Sirkuit Hamilton**

Lintasan hamilton adalah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.

Graf yang mempunyai sirkuit Hamilton disebut **graf Hamilton**, sedangkan yang mempunyai lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton**

# Aplikasi Graf

**APLIKASI GRAF**

Terdapat banyak aplikasi graf, yang digunakan sebagai alat untuk merepresentasikan atau memodelkan persoalan. Berdasarkan graf yang dibentuk, barulah persoalan diselesaikan.Beberapa aplikasi yang berkaitan dengan lintasan/sirkuit didalam graf, yaitu menentukan lintasan terpendek (shortest path), persoalan pedagang keliling ( travellingsalesperson problem), dan persoalan tukang pos Cina.

A. Lintasan Terpendek (Shortest Path)

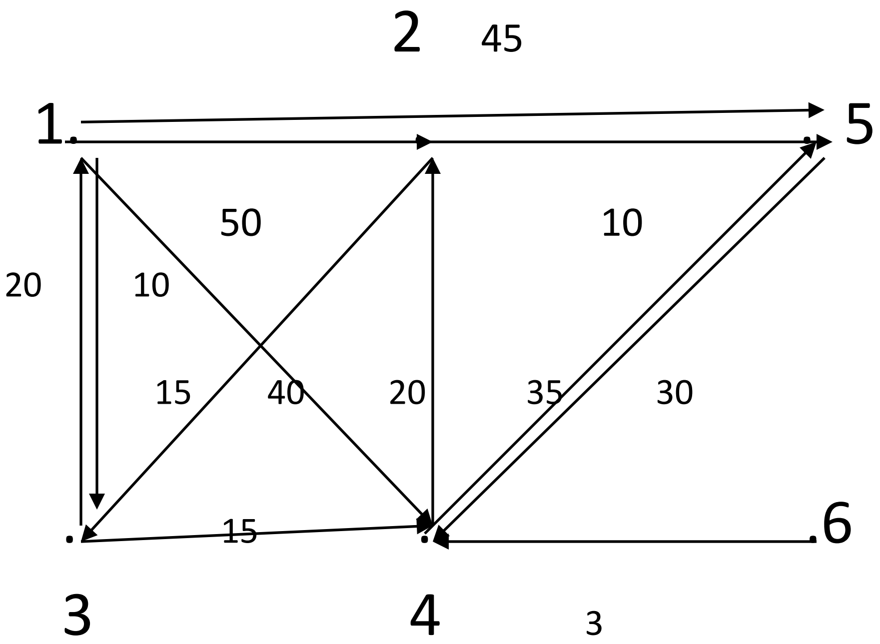
Ciri:

1. lintasan memiliki arah
2. setiap lintasan ada bobotnya
3. setiap lintasan harus terhubung dengan simpul

# Contoh aplikasi graf dalam lintasan terpendek

Misalkan simpul pada graf dapat merupakan terminal komputer atau simpul komunikasi dalam suatu jaringan, sedangkan sisi menyatakan saluran komunikasi yang menghubungkan dua terminal. Bobot pada graf dapat menyatakan biaya pemakaian saluran komunikasi antara dua terminal, jarak antara dua buah terminal, atau waktu pengiriman pesan (message) antara dua terminal. Persoalan lintasan terpendek disini adalah menentukan jalur komunikasi terpendek antara dua buah terminal komputer. Lintasan terpendek akan menghemat waktu pengiriman pesan dan biaya komunikasi.

# Latihan graf lintasan terpendek

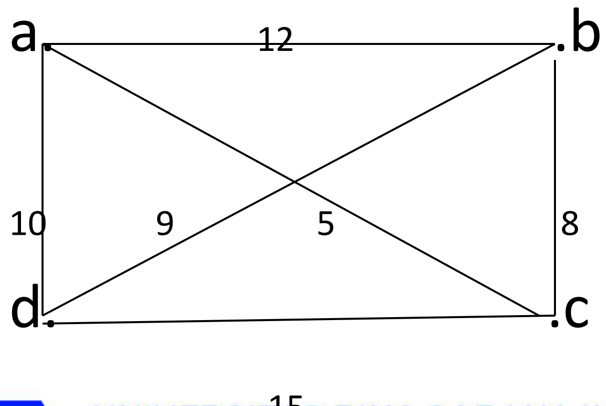



Tentukan lintasan terpendeknya !

# Masalah perjalanan pedagang (travelling salesman)

B. Peroalan perjalanan pedagang ( travelling salesperson problem TSP)

Persoalan ini diilhami oleh seorang pedagang yang mengunjungi sejumlah kota. Uraiannya sebagai berikut: diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali ke kota asal berangkat.



# Persoalan Tukang Pos

C. Persoalan tukang pos Cina ( Chinese Postman Problem)

Ditemukan pertama kali oleh Mei Gan tahun 1962. Masalahnya adalah sebagai berikut:

“Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan disuatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.