

Pertemuan 6

Pendahuluan Aljabar Boolean

Definisi dan hukum aljabar Boolean

1. Definisi Aljabar Boolean

Aljabar Boolean (B) merupakan aljabar yang terdiri atas suatu himpunan dengan operasi jumlah/disjungsi, kali/konjungsi dan komplemen/negasi serta elemen 0 dan 1 ditulis sebagai $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ yang memenuhi sifat-sifat:

1. Hukum identitas

(i) $a + 0 = a$

(ii) $a \cdot 1 = a$

3. Hukum komplemen

(i) $a + a' = 1$

(ii) $a \cdot a' = 0$

5. Hukum involusi

(i) $(a')' = a$

2. Hukum idempoten

(i) $a + a = a$

(ii) $a \cdot a = a$

4. hukum dominasi

(i) $a \cdot 0 = 0$

(ii) $a + 1 = 1$

6. Hukum penyerapan

(i) $a + (a \cdot b) = a$

(ii) $a \cdot (a + b) = a$

Lanjutan hukum aljabar Boolean

7. Hukum komutatif

(i) $a+b = b+a$

(ii) $a.b = b.a$

9. Hukum distributif

(i) $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$

(ii) $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$

11. Hukum 0/1

(i) $0' = 1$

(ii) $1' = 0$

8. Hukum asosiatif

(i) $a+(b+c) = (a+b)+c$

(ii) $a.(b.c) = (a.b).c$

10. Hukum De Morgan

(i) $(a+b)' = a'.b'$

(ii) $(ab)' = a'+b'$

Catatan:

Untuk penyederhanaan penulisan, penulisan $a.b$ sebagai ab

Perbedaan aljabar Boolean dan aljabar biasa

Perbedaan antara aljabar Boolean dan aljabar biasa untuk aritmatika bilangan riil :

1. Hukum distributif + dan . Seperti $a+(b.c) = (a+b) . (a+c)$ benar untuk aljabar Boolean tetapi tidak benar untuk aljabar biasa.
2. Aljabar Boolean tidak memiliki kebalikan perkalian (*multiplicative inverse*) dan penjumlahan, sehingga tidak ada operasi pembagian dan pengurangan.
3. Sifat no 2 mendefinisikan operator yang dinamakan komplemen yang tidak tersedia pada aljabar biasa.
4. Aljabar biasa memperlakukan bilangan riil dengan himpunan yang tidak berhingga. Aljabar Boolean memperlakukan himpunan elemen B yang sampai sekarang belum didefinisikan, tetapi pada aljabar Boolean dua nilai yaitu nilai 0 dan 1

Syarat Aljabar Boolean

Hal lain yang penting adalah membedakan elemen himpunan dan peubah (variabel) pada sistem aljabar.

	elemen himpunan	peubah
Aljabar biasa	bil riil	a, b, c
Aljabar Boolean	bil riil	x, y, z

Suatu aljabar Boolean harus memenuhi 3 syarat :

1. Elemen himpunan B
2. Kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner
3. Himpunan B , bersama-sama dengan dua operator tersebut, memenuhi postulat Huntington.

Aljabar Boolean dua nilai

2. Aljabar Boolean dua-nilai

Aljabar Boolean dua-nilai (*two-valued Boolean algebra*) didefinisikan pada sebuah himpunan dengan dua buah elemen, $B = \{0, 1\}$, dengan kaidah untuk operator $+$ dan \cdot .

Perhatikan:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	A'
0	1
1	0

Prinsip Dualitas

Prinsip Dualitas

Misalkan S adalah kesamaan tentang aljabar Boolean yang melibatkan operasi $+$, $.$, dan komplemen, maka jika pernyataan S^* diperoleh dengan cara mengganti:

- . Dengan $+$
- $+$ dengan $.$
- 0 dengan 1
- 1 dengan 0

Maka kesamaan S^* juga benar. S^* disebut sebagai dual dari S .

Contoh dualitas

Contoh :

Tentukan dual dari (i) $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$

(ii) $a+0 = a$

Jawab:

(i) $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$

(ii) $a+0 = a$ mempunyai dual $a.1 = a$

Beberapa bukti dari sifat-sifat aljabar Boolean:

(2i) $a+a = (a+a) (1)$	(identitas)
$= (a+a) (a+a')$	(komplemen)
$= a+ (a.a')$	(distributif)
$= a+0$	(komplemen)
$= a$	(identitas)

Soal latihan

Soal :

Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean:

- (i) $a + a'b = a + b$
- (ii) $a(a' + b) = ab$
- (iii) $a + 1 = 1$
- (iv) $(ab)' = a' + b'$

Jawab:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$	penyerapan
$= a + (ab + a'b)$	Asosiatif
$= a(a + a')b$	distributif
$= a + 1.b$	Komplemen
$= a + b$	Identitas

Fungsi Boolean

Fungsi Boolean

Pada aljabar Boolean dua-nilai $B\{0,1\}$. Peubah (variable) x disebut peubah boolean atau peubah biner jika nilainya hanya dari B . Fungsi Boolean (disebut juga fungsi biner) adalah ekspresi yang dibentuk dari peubah biner, dua buah operator $+$ dan $.$, operator uner ($\bar{}$)/ $'$, tanda kurung dan tanda sama dengan $=$. Setiap peubah boolean, termasuk komplemennya disebut **literal**.

Contoh-contoh fungsi Boolean:

1. $f(x) = x$
2. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x,y) = x' y'$
4. $f(x,y) = (x+y)'$
5. $f(x,y,z) = xyz'$

Cara menyatakan fungsi boolean

Pada contoh 5 terdiri dari 3 literal yaitu x , y dan z' . Fungsi tersebut akan bernilai 1 jika $x = 1$, $y = 1$, dan $z = 0$ sebab $F(1,1,0) = 1.1.0' = (1.1).1 = 1.1 = 1$ dan bernilai 0 untuk yang lainnya.

Selain secara aljabar fungsi Boolean bisa dinyatakan dengan tabel kebenaran (truth table)

Contoh:

dari contoh 5 $f(x,y,z) = xyz'$ nyatakan f dalam tabel kebenaran.

Tabel kebenaran fungsi boolean

x	y	z	z'	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Fungsi Komplemen

Fungsi Komplemen

Fungsi komplemen dari suatu fungsi f yaitu f' dapat dicari dengan menukarkan nilai 0 menjadi 1 dan nilai 1 menjadi 0 serta menukar $+$ menjadi $.$ Dan $.$ menjadi $+$.

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membentuk fungsi komplemen:

1. Menggunakan hukum De Morgan

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)' = x_1' \cdot x_2' \cdot \dots \cdot x_n'$$

dan dualnya:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)' = x_1' + x_2' + \dots + x_n'$$

Contoh: misal $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$ maka

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= x' + (y'z' + yz)' \\ &= x' + (y'z')' (yz)' = x' + (y + z) (y' + z') \end{aligned}$$

Mencari komplemen dengan dualitas

2. Menggunakan prinsip dualitas.

Cari dual dari f , lalu komplemenkan setiap literalnya.

Contoh:

misal $f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$ maka

Dual dari f : $x + (y' + z')(y + z)$

Komplemenkan tiap literalnya: $x' + (y + z)(y' + z') = f'$

Jadi, $f'(x,y,z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Latihan soal

Cari komplemen dari

1. $f(x,y,z) = x'(yz' + y'z)$
2. $f(x) = x$
3. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$
4. $f(x,y) = x' y'$
5. $f(x,y) = (x+y)'$
6. $f(x,y,z) = xyz'$

Soal-soal latihan

Soal 1 dan 2

1. aljabar yang terdiri atas suatu himpunan dengan operasi jumlah/disjungsi, kali/konjungsi dan komplemen/negasi serta elemen 0 dan 1 disebut.....
 - a. pernyataan
 - b. Aritmatika
 - c. Aljabar Real
 - d. Geometri
 - e. Aljabar Boolean

2. Di bawah ini yang merupakan hukum dominasi adalah.....
 - a. $a + 0 = a$
 - b. $a.a = a$
 - c. $a + a' = 1$
 - d. $a + 1 = 1$
 - e. $a.b = b.a$

Soal 2 dan 3

2. Di bawah ini yang merupakan hukum dominasi adalah.....

a. $a + 0 = a$

d. $a + 1 = 1$

b. $a.a = a$

e. $a.b = b.a$

c. $a + a' = 1$

3. Peubah dalam Boolean disebut dengan.....

a. Relasi

d. Komplemen

b. Literal

e. Variabel

c. Fungsi

Soal 3 dan 4

3. Peubah dalam Boolean disebut dengan.....

- a. Relasi
- b. Literal
- c. Fungsi
- d. Komplemen
- e. Variabel

4. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$ jika dicari komplemennya menjadi.....

- a. $f'(x,y) = (x+y')(x'+y)y$
- b. $f'(x,y) = xy' + x'y + y$
- c. $f'(x,y) = x'y + xy' + y'$
- d. $f'(x,y) = (x' + y)(x+y')y'$
- e. Salah semua

Soal 4 dan 5

4. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$ jika dicari komplemennya menjadi.....

a. $f'(x,y) = (x+y')(x'+y)y$

b. $f'(x,y) = xy' + x'y + y$

c. $f'(x,y) = x'y + xy' + y'$

d. $f'(x,y) = (x' + y)(x+y')y'$

e. Salah semua

5. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$ jika dicari bentuk dualnya menjadi.....

a. $f'(x,y) = (x+y')(x'+y)y$

b. $f'(x,y) = xy' + x'y + y$

c. $f'(x,y) = x'y + xy' + y'$

d. $f'(x,y) = (x' + y)(x+y')y'$

e. Salah semua

Soal 5 dan 1

5. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$ jika dicari bentuk dualnya menjadi.....

a. $f'(x,y) = (x+y')(x'+y)y$

d. $f'(x,y) = (x' + y)(x+y')y'$

b. $f'(x,y) = xy' + x'y + y$

e. Salah semua

c. $f'(x,y) = x'y + xy' + y'$

1. aljabar yang terdiri atas suatu himpunan dengan operasi jumlah/disjungsi, kali/konjungsi dan komplemen/negasi serta elemen 0 dan 1 disebut.....

a. pernyataan

d. Geometri

b. Aritmatika

e. Aljabar Boolean

c. Aljabar Real