

Pertemuan 9

Fungsi Boolean, Bentuk Kanonik
Bentuk Baku dan aplikasinya

Penyajian aljabar boolean berbeda mempunyai nilai fungsi yang sama

Bentuk fungsi Boolean mungkin mempunyai ekspresi aljabar yang berbeda akan tetapi sebenarnya nilai fungsinya sama.

Contoh:

$$f(x,y) = x'y' \quad \text{dan} \quad h(x,y) = (x + y)'$$

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + xyz \quad \text{dan}$$

$$g(x,y,z) = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z)$$

Adalah dua buah fungsi yang sama. Fungsi yang pertama f muncul dalam bentuk penjumlahan dari perkalian, sedangkan fungsi yang kedua g muncul dalam bentuk perkalian dari hasil jumlah. Perhatikan juga bahwa setiap suku (term) mengandung literal yang lengkap x, y , dan z .

Bentuk Kanonik

Bentuk Kanonik

Adalah fungsi Boolean yang dinyatakan sebagai jumlah dari hasil kali, hasil kali dari jumlah dengan setiap suku mengandung literal yang lengkap.

Ada dua macam bentuk kanonik:

1. Minterm atau sum-of-product (SOP)
2. Maxterm atau product-of-sum (POS)

x	y	Minterm		Maxterm	
		suku	lambang	suku	lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	xy	m_3	$x' + y'$	M_3

Tabel kanonik untuk 3 variabel

x	y	z	Minterm		Maxterm	
			suku	lambang	Suku	lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Perbedaan Minterm dan Maxterm

Perbedaan minterm dan maxterm adalah:

Untuk membentuk minterm perhatikan kombinasi peubah yang menghasilkan nilai 1. Kombinasi 001, 100 dan 111 dituliskan $x' y' z$, $xy' z'$ dan xyz .

Untuk membentuk maxterm perhatikan kombinasi peubah yang menghasilkan nilai 0. kombinasi 000, 010, 011, 101 dan 110 dituliskan $(x+y+z)$, $(x+y' +z)$, $(x+y' +z')$, $(x' +y+z')$ dan $(x' +y' +z)$

Notasi Σ dan Π berguna untuk mempersingkat penulisan ekspresi dalam bentuk SOP dan POS.

Soal Diberikan sebuah tabel kebenaran

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Dari tabel diatas nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk kanonik SOP dan POS!

Jawaban dari tabel kebenaran sebelumnya

Jawab:

1. SOP: perhatikan kombinasi peubah yang menghasilkan nilai 1

$$f(x,y,z) = x' y' z + xy' z' + xyz$$

dalam bentuk lain

$$f(x,y,z) = m_1 + m_4 + m_7 = \Sigma(1,4,7)$$

2. POS: perhatikan kombinasi peubah yang menghasilkan nilai 0

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y' +z)(x+y' +z')(x' +y+z')(x' +y' +z)$$

dalam bentuk lain

$$f(x,y,z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \Pi(0,2,3,5,6)$$

Latihan soal dan Konversi bentuk Kanonik

Latihan:

1. Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = x + y'z$ dalam SOP dan POS.
2. Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = xy + x'z$ dalam bentuk POS.
3. Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x,y,z) = y' + xy + x'yz'$

Konversi antar bentuk kanonik

$$m_j' = M_j$$

Fungsi Boolean dalam bentuk SOP: $f(x,y,z) = \Sigma(1,4,5,6,7)$
dikonversikan ke bentuk POS menjadi $f(x,y,z) = \Pi(0,2,3)$

Bentuk Baku fungsi Boolean

Bentuk Baku

Dua bentuk kanonik adalah bentuk dasar yang diperoleh dengan membaca fungsi dari tabel kebenaran. Bentuk ini umumnya sangat jarang muncul karena setiap suku (term) di dalam bentuk kanonik harus mengandung literal atau peubah yang lengkap baik dalam bentuk normal x atau dalam bentuk komplementnya x' .

Cara lain untuk mengekspresikan fungsi Boolean adalah bentuk baku (standard). Pada bentuk ini suku-suku yang dibentuk fungsi dapat mengandung satu, dua, atau sejumlah literal. Dua tipe bentuk baku adalah baku SOP dan baku POS.

Contoh:

$$f(x,y,z) = y' + xy + x'yz \quad (\text{bentuk baku SOP})$$

$$F(x,y,z) = x(y' + z)(x' + y + z') \quad (\text{bentuk baku POS})$$

Aplikasi Aljabar Boolean

Aplikasi Aljabar Boolean

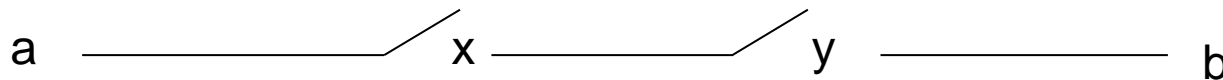
Aljabar Boolean mempunyai aplikasi yang luas, antara lain bidang jaringan pensaklaran dan rangkaian digital.

1. Aplikasi dalam jaringan pensaklaran (Switching Network)

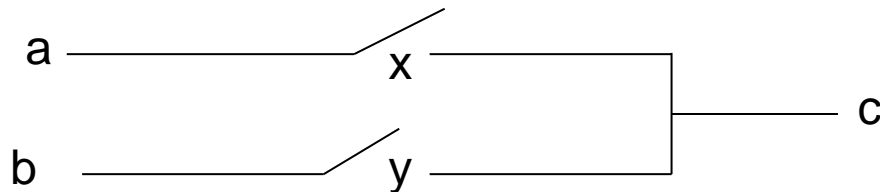
Saklar adalah obyek yang mempunyai dua buah keadaan: buka dan tutup. Kita asosiasikan setiap peubah dalam fungsi Boolean sebagai “gerbang” (gate) didalam sebuah saluran yang dialiri listrik, air, gas, informasi atau benda lain yang mengalir secara fisik, gerbang ini dapat berupa kran di dalam pipa hidrolik, transistor atau dioda dalam rangkaian listrik, dispatcher pada alat rumah tangga, atau sembarang alat lain yang dapat melewatkan atau menghambat aliran.

Rangkaian seri dan paralel#1

Kita dapat menyatakan fungsi logika untuk gerbang yang bersesuaian. Pada fungsi tersebut, peubah komplement menyatakan closed gate, sedangkan peubah bukan komplement menyatakan opened gate.



Saklar dalam hubungan SERI: logika AND



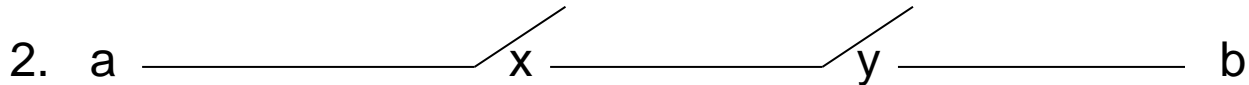
Saklar dalam hubungan PARALEL: logika OR

Rangkaian seri dan paralel#2

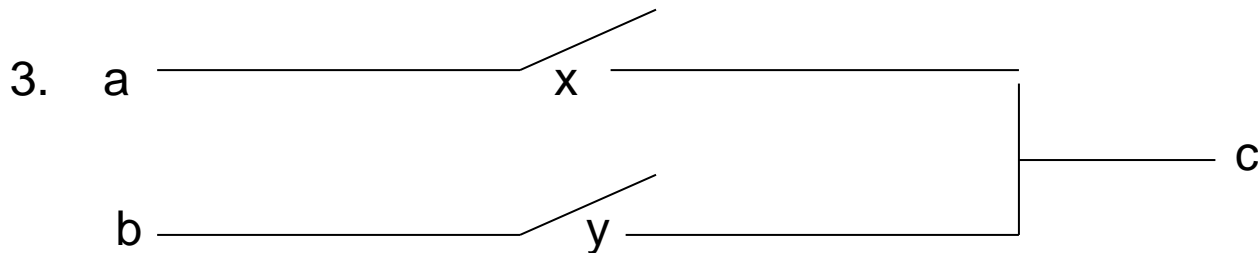
Contoh: tiga bentuk gate paling sederhana:



Output b hanya ada jika dan hanya jika x tertutup $\Rightarrow x$



Output b hanya ada jika dan hanya jika x dan y tertutup $\Rightarrow xy$



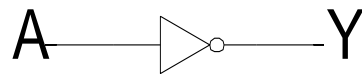
Output c hanya ada jika dan hanya jika x atau y tertutup $\Rightarrow x + y$

Aplikasi dalam rangkaian digital

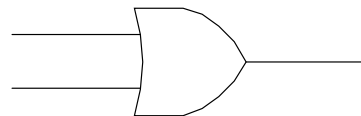
2. Aplikasi dalam rangkaian digital elektronik

Rangkaian digital elektronik biasanya dimodelkan dalam bentuk gerbang logika. Ada tiga macam gerbang logika dasar: AND, OR dan NOT. Secara fisik, rangkaian logika diimplementasikan dalam rangkaian listrik spesifik

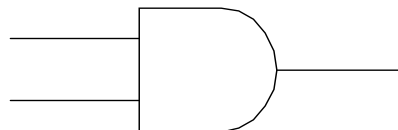
Gerbang NOT(inverter)



Gerbang OR



Gerbang AND



Latihan soal

Latihan:

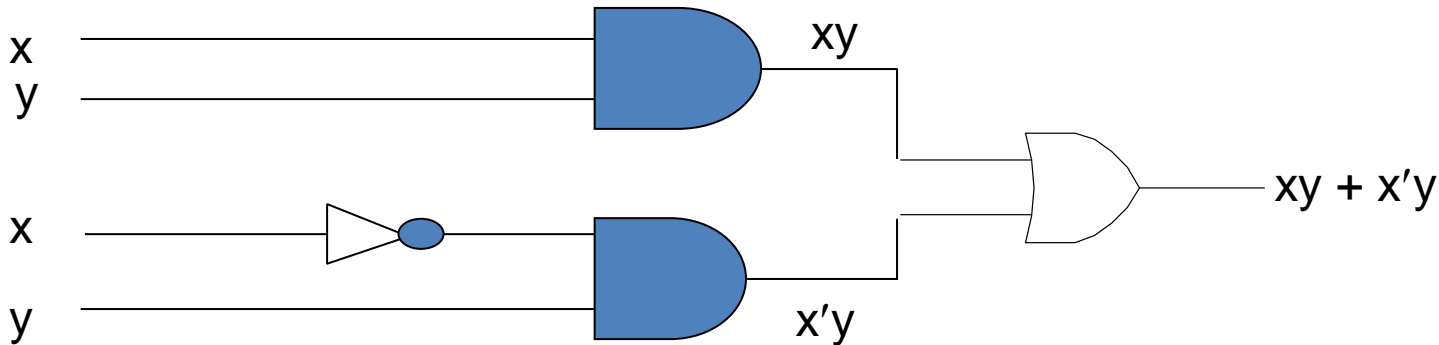
Nyatakan fungsi Boolean berikut ke dalam bentuk rangkaian pensaklaran dan rangkaian digital.

1. $f(x,y,z) = x'y + (x'+xy)z + x(y+y'z+z)$
2. $f(x,y) = xy' + x'y$
3. $f(x,y,z) = xy + xy'z + y(x' + z) + y'z'$

Contoh bentuk rangkaian digital

Contoh:

Nyatakan fungsi $f(x,y,z) = xy + x'y$ ke dalam rangkaian logika.



Penyederhanaan Fungsi Boolean

Penyederhanaan Fungsi Boolean

Fungsi Boolean seringkali mengandung operasi-operasi biner yang tidak perlu, literal atau suku-suku yang berlebihan.

Contoh:

$f(x,y) = x'y + xy' + y'$ dapat disederhanakan menjadi $f(x,y) = x' + y'$

Penyederhanaan fungsi Boolean dapat dilakukan dengan 3 cara:

1. Secara aljabar, menggunakan rumus-rumus/aksioma-aksioma yang berlaku pada fungsi Boolean.
2. Menggunakan Peta Karnaugh
3. Menggunakan metode Quine Mc Cluskey (metode tabulasi)

Cara Aljabar

1. Aljabar

Jumlah literal di dalam sebuah fungsi Boolean dapat diminimumkan dengan manipulasi aljabar. Sayangnya tidak ada aturan khusus yang harus diikuti yang akan menjamin menuju ke jawaban akhir. Metode yang tersedia adalah prosedur ***cut-and-try*** yang memanfaatkan postulat, teorema dasar, dan metode manipulasi lain yang sudah dikenal.

Contoh:

1. $f(x,y) = x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y$
2. $f(x,y) = x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$

Cara Peta Karnaugh

2. Peta Karnaugh

Adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak yang bersisian. Tiap kotak merepresentasikan sebuah minterm. Peta Karnaugh dengan jumlah kotak lebih dari empat buah akan memiliki sisi yang berseberangan. Sisi yang berseberangan tersebut sebenarnya merupakan sisi yang bersisian juga. Artinya sebuah Peta Karnaugh dapat dibayangkan sebagai sebuah kubus atau balok atau silinder yang tersusun atas kotak-kotak itu.

Pembangunan Peta Karnaugh biasanya didasarkan pada tabel kebenaran fungsi Boolean yang akan disederhanakan.

Peta Karnaugh dengan 2 peubah

a. Peta Karnaugh dengan dua peubah

m_0	m_1
m_2	m_3

			Y
		0	1
X	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

Diberikan tabel kebenaran dan Peta Karnaugh-nya

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

			Y
		0	1
X	0	0	0
	1	0	1

Fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel diatas adalah $f(x,y) = xy$

Peta Karnaugh dengan 3 peubah

b. Peta dengan tiga peubah

m0	m1	m3	m2
m4	m5	m7	m6

x 0
1

	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Diberikan tabel kebenaran dan Peta Karnaugh-nya

X	y	Z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

x 0
1

	yz			
	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran adalah
 $f(x,y,z) = x'yz' + xyz' + xyz$

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

Penggunaan Peta Karnaugh dalam penyederhanaan fungsi Boolean dilakukan dengan menggabungkan kotak-kotak yang bersisian. Perhatikan bahwa kotak yang berseberangan juga dianggap sebagai kotak yang bersisian.

Contoh: Sederhanakan fungsi Boolean

$$f(x,y,z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$$

Jawab: Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

		00	01	11	10	yz
x	0	0	0	1	0	
	1	1	0	1	1	

Latihan soal

Hasil penyederhanaan: $f(x,y,z) = yz + xz'$

Latihan:

a. Sederhanakan dengan cara Aljabar

1. $f(x,y,z) = x'y'z + x'yz + xy'$
2. $f(x,y,z) = xy + x'z + yz$
3. $f(x,y,z) = (x + y)(x' + z)(y + z)$

b. Sederhanakan dengan metode Peta Karnaugh dan gambarkan rangkaian logika sebelum dan setelah disederhanakan

$$f(x,y,z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$$