UNIVERSITAS

# PERTEMUAN KE-3

# QUANTIFIER (KUANTOR) dan Induksi matematika

PERTEMUAN KE-3

 

# KUANTOR PERNYATAAN

Misalkan P(x) adalah pernyataan yang menyangkut variabel x dan D adalah sebuah himpunan, maka P adalah fungsi proposisi jika untuk setiap $x \in D$, berlaku P(x) adalah sebuah proposisi.

# CONTOH KUANTOR PERNYATAAN

**Contoh:**

Misalkan P(x) merupakan pernyataan :

*x adalah sebuah bilangan bulat genap.*

Misalkan D = himpunan bilangan bulat positif

Maka fungsi proposisi P(x) dapat ditulis:

jika x = 1 maka proposisinya

*1 adalah bilangan bulat genap*. (F)

jika x = 2 maka proposisinya

*2 adalah bilangan bulat genap*. (T)

dst.

Untuk menyatakan kuantitas suatu objek proposisi digunakan notasi yang disebut <u>kuantor</u>

# Macam-macam Kuantor

- Untuk setiap x, P(x)

  disebut kuantor universal

  Simbol: $\forall$
- Untuk beberapa x, P(x)

  disebut kuantor eksistensial

  Simbol: $\exists$

**Contoh:**

Misalkan x himpunan warga negara Indonesia,

P predikat membayar pajak, R predikat membeli Ms Word,

# Cara penerapan kuantor

**Maka:**

1. $\forall x, P(x)$

   artinya: semua warga negara membayar pajak

2. $\exists x, R(x), P(x)$

   artinya: ada beberapa warga negara membeli  Ms word membayar pajak

3. $\forall x, R(x) \rightarrow P(x)$

   artinya: semua warga negara jika membeli ms word maka membayar pajak

4. $\exists x, R(x) \wedge \overline{P(x)}$

   artinya: ada warga negara membeli ms word dan tidak membayar pajak

# Negasi Kuantor

$\sim\forall x = \exists x$

$\sim\exists x = \forall x$

Sehingga:

$\sim(\forall x, P(x)) = \exists x, \overline{P(x)}$

$\sim(\exists x, P(x)) = \forall x, \overline{P(x)}$

$\sim(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) = \exists x, \overline{( P(x) \rightarrow Q(x))}$

$= \exists x, P(x) \wedge Q(x)$

1. Tentukan validitas pernyataan di bawah ini bila domain pembicaraannya himpunan bilangan real

(a) $\forall x, \forall y, P(x^2 < y+1)$

$\forall x, \exists y, P(x^2 < y+1)$

$\exists x, \forall y, P(x^2 < y+1)$

$\exists x, \exists y, P(x^2 < y+1)$

(b) $\forall x, \forall y, P[(x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$

$\forall x, \exists y, P[(x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$

$\exists x, \forall y, P[(x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$

$\exists x, \exists y, P[(x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$

2. Negasikan setiap pernyataan di bawah ini:

(a) $\forall x, P(x) \wedge \exists y, Q(y)$

(b) $\exists x, P(x) \vee \forall y, Q(y)$

(c) $\forall x, \exists y, [P(x) \vee Q(y)]$

# Argumen Matematika

## Perhatikan argumen matematik berikut ini:

1. P(n) :Jumlah bilangan bulat positif dari
   sampai 1 sampai n adalah n(n + 1)/2

   misal untuk n = 5 adalah 5(5+1)/2=15

   terlihat: 1+2+3+4+5=15
2. P(n) : Jumlah dari n buah bilangan ganjil
   positif pertama adalah $n^2$

   misal untuk n = 3 adalah $3^2 = 9$

   terlihat : 1 + 3 + 5 = 9

# Induksi Matematika

Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku dalam matematik, khususnya menyangkut bilangan bulat positif.

Prinsip Induksi Sederhana

Misalkan P(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya menunjukkan bahwa:

## Syarat Pembuktian dalam induksi matematika

*1. p(1) benar, dan*

*2. Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$,*

*jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar.*

- ❖ Langkah 1 dinamakan basis induksi
- ❖ Langkah 2 dinamakan langkah induksi
- ❖ Asumsi jika p(n) benar dinamakan hipotesis induksi.

Contoh:

Tunjukkan bahwa

untuk $n \geq 1$, $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$

# Langkah pembuktian 1

**Bukti:**

Basis induksi. Untuk n=1 kita peroleh 1 = 1(1+1)/2, ini jelas benar sebab

$$\begin{aligned} 1 &= 1\,(1+1)/2 \\ &= 1\,(2)/2 \\ &= 2/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Langkah induksi. Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan

$1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$ adalah benar (hipotesis induksi)

Kita harus menunjukkan bahwa:

$1+2+3+\ldots+n + (n+1) = (n+1)[(n+1)]/2$ juga benar

## Langkah pembuktian 2

Untuk membuktikan ini tunjukkan bahwa:

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) \\
&= [n(n+1)/2]+(n+1) \\
&= [n^2+n)/2]+(n+1) \\
&= [(n^2+n)/2]+[(2n+2)/2] \\
&= (n^2+3n+2)/2 \\
&= (n+1)[(n+1)+1]/2
\end{aligned}
$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa:

$1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$

# Latihan

Buktikan dengan induksi matematik

1. Jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah $n^2$
2. Untuk semua n ≥ 1 maka $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3
3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$