UNIVERSITAS

Pertemuan 6

Pendahuluan Aljabar Boolean

Definisi dan hukum aljabar Boolean

1. Definisi Aljabar Boolean

Aljabar Boolean (B) merupakan aljabar yang terdiri atas suatu himpunan dengan operasi jumlah/disjungsi, kali/konjungsi dan komplemen/negasi serta elemen 0 dan 1 ditulis sebagai <B,+, . , ‘ ,0,1> yang memenuhi sifat-sifat:

1.Hukum identitas
   (i) a + 0 = a
   (ii) a . 1 = a

2. Hukum idempoten
   (i) a+a = a
   (ii) a.a = a

3. Hukum komplemen
   (i) a+a’ = 1
   (ii) a.a’ = 0

4. hukum dominasi
   (i) a.0 = 0
   (ii) a+1 = 1

5. Hukum involusi
   (i) (a’)’ = a

6. Hukum penyerapan
   (i) a+(a.b) = a
   (ii) a.(a+b) = a

Lajutan hukum aljabar Boolean

7. Hukum komutatif
   (i) $a+b = b+a$
   (ii) $a.b = b.a$

8. Hukum asosiatif
   (i) $a+(b+c) = (a+b)+c$
   (ii) $a.(b.c) = (a.b).c$

9. Hukum distributif
   (i) $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$
   (ii) $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$

10. Hukum De Morgan
   (i) $(a+b)' = a'.b'$
   (ii) $(ab)' = a'+b'$

11. Hukum 0/1
   (i) $0' = 1$
   (ii) $1' = 0$

Catatan:

Untuk penyederhanaan penulisan, penulisan a.b sebagai ab

Perbedaan aljabar Boolean dan aljabar biasa

Perbedaan antara aljabar Boolean dan aljabar biasa untuk aritmatika bilangan riil :

1. Hukum distributif + dan . Seperti a+(b.c) = (a+b) . (a+c) benar untuk aljabar Boolean tetapi tidak benar untuk aljabar biasa.
2. Aljabar Boolean tidak memiliki kebalikan perkalian (*multiplicative inverse*) dan penjumlahan, sehingga tidak ada operasi pembagian dan pengurangan.
3. Sifat no 2 mendefinisikan operator yang dinamakan komplemen yang tidak tersedia pada aljabar biasa.
4. Aljabar biasa memperlakukan bilangan riil dengan himpunan yang tidak berhingga. Aljabar Boolean memperlakukan himpunan elemen B yang sampai sekarang belum didefinisikan, tetapi pada aljabar Boolean dua nilai yaitu nilai 0 dan 1

Syarat Aljabar Boolean

Hal lain yang penting adalah membedakan elemen himpunan dan peubah (variabel) pada sistem aljabar.

	elemen himpunan	peubah
Aljabar biasa	bil riil	a, b, c
Aljabar Boolean	bil riil	x, y, z

Suatu aljabar Boolean harus memenuhi 3 syarat :

1. Elemen himpunan B
2. Kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner
3. Himpunan B, bersama-sama dengan dua operator tersebut,memenuhi postulat Huntington.

Aljabar Boolean dua nilai

2. Aljabar Boolean dua-nilai

Aljabar Boolean dua-nilai (*two-valued Boolean algebra*) didefinisikan pada sebuah himpunan dengan dua buah elemen, B = {0,1}, dengan kaidah untuk operator + dan .

Perhatikan:

a	b	a.b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	A’
0	1
1	0

Prinsip Dualitas

Prinsip Dualitas

Misalkan S adalah kesamaan tentang aljabar Boolean yang melibatkan operasi +, . , dan komplemen, maka jika pernyataan S* diperoleh dengan cara mengganti:

. Dengan +

+ dengan .

0 dengan 1

1 dengan 0

Maka kesamaan S* juga benar. S* disebut sebagai dual dari S.

Contoh dualitas

Contoh :

Tentukan dual dari (i) $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$

(ii) $a+0 = a$

Jawab:

(i) $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$

(ii) $a+0 = a$ mempunyai dual $a.1 = a$

Beberapa bukti dari sifat-sifat aljabar Boolean:

(2i) $a+a = (a+a)\,(1)$ (identitas)

$= (a+a)\,(a+a')$ (komplemen)

$= a+(a.a')$ (distributif)

$= a+0$ (komplemen)

$= a$ (identitas)

Soal latihan

Soal :

Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean:

(i) $a+a'b = a+b$

(ii) $a(a'+b) = ab$

(iii) $a+1 = 1$

(iv) $(ab)' = a' + b'$

Jawab:

(i) $a+a'b = (a+ab) + a'b$ penyerapan

$= a+(ab+a'b)$ Asosiatif

$= a(a+a')b$ distributif

$= a+1.b$ Komplemen

$= a+b$ Identitas

Fungsi Boolean

Fungsi Boolean

Pada aljabar Boolean dua-nilai B{0,1}. Peubah (variable) x disebut peubah boolean atau peubah biner jika nilainya hanya dari B. Fungsi Boolean (disebut juaga fungsi biner) adalah ekspresi yang dibentuk dari peubah biner, dua buah operator + dan . , operator uner (¯)/ ′, tanda kurung dan tanda sama dengan =. Setiap peubah boolen, termasuk komplemennya disebut **literal**.

Contoh-contoh fungsi Boolean:

1. $f(x) = x$
2. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x,y) = x' y'$
4. $f(x,y) = (x+y)'$
5. $f(x,y,z) = xyz'$

Cara menyatakan fungsi boolean

Pada contoh 5 terdiri dari 3 literal yaitu x, y dan z′. Fungsi tersebut akan bernilai 1 jika x = 1, y = 1, dan z = 0 sebab

F(1,1,0) = 1.1.0′ = (1.1).1 = 1.1 = 1 dan bernilai 0 untuk yang lainnya.

Selain secara aljabar fungsi Boolean bisa dinyatakan dengan tabel kebenaran (truth table)

Contoh:

dari contoh 5 f(x,y,z) = xyz′ nyatakan f dalam tabel kebenaran.

Tabel kebenaran fungsi boolean

x	y	z	z′	f(x,y,z)
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Fungsi Komplemen

Fungsi Komplemen

Fungsi komplemen dari suatu fungsi f yaitu f' dapat dicari dengan menukarkan nilai 0 menjadi 1 dan nilai 1 menjadi 0 serta menukar + menjadi . Dan . menjadi +.

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membentuk fungsi komplemen:

1. Menggunakan hukum De Morgan

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)' = x_1'\, x_2' \ldots x_n'$$

dan dualnya:

$$(x_1.x_2. \ldots . x_n)' = x_1'+ x_2'+ \ldots + x_n'$$

Contoh: misal $f(x,y,z) = x(y'z'+ yz)$ maka

$$f'(x,y,z) = x'+ (y'z'+yz)'$$

$$= x'+ (y'z')' (yz)' = x'+(y +z) (y'+z')$$

Mencari komplemen dengan dualitas

2. Menggunakan prinsip dualitas.

   Cari dual dari f, lalu komplemenkan setiap literalnya.

Contoh:

misal $f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$ maka

Dual dari f: $x + (y' + z')(y + z)$

Komplemenkan tiap literalnya: $x' + (y+z)(y'+z') = f'$

Jadi, $f'(x,y,z) = x' + (y+z)(y'+z')$

Latihan soal

Cari komplemen dari

1. $f(x,y,z) = x'(yz'+y'z)$
2. $f(x) = x$
3. $f(x,y) = x'y + xy' + y'$
4. $f(x,y) = x' y'$
5. $f(x,y) = (x+y)'$
6. $f(x,y,z) = xyz'$