Pertemuan 4

Kombinatorial

Kaidah Dasar menghitung

Dalam kombinatorial ada dua kaidah dasar yang digunakan untuk menghitung, yaitu kaidah penjumlahan (*rule of sum*) dan kaidah perkalian (*rule of product*)

1. Kaidah Penjumlahan (*rule of sum*)

Bila percobaan 1 mempunyai m hasil percobaan yang mungkin terjadi(atau memiliki sebanyak m kemungkinan jawaban) dan percobaan 2 mempunyai n hasil percobaan yang mungkin (atau memiliki sebanyak n kemungkinan jawaban), maka bila hanya salah satu dari dua percobaan itu saja yang dilakukan (percobaan 1 “atau” percobaan 2), maka terdapat m+n hasil jawaban (atau memiliki m +n kemungkinan jawaban)

Contoh1:

Seorang mahasiswa akan memilih satu mata kuliah yang ditawarkan pagi dan sore. Untuk pagi ada 7 matakuliah dan sore ada 5 matakuliah yang ditawarkan. Maka mahasiswa tadi mempunyai 7+5 pilihan untuk memilih satu matakuliah tersebut.

2.Kaidah Perkalian (rule of product)

Bila percobaan 1 mempunyai m hasil percobaan yang mungkin terjadi(atau memiliki sebanyak m kemungkinan jawaban) dan percobaan 2 mempunyai n hasil percobaan yang mungkin (atau memiliki sebanyak n kemungkinan jawaban), maka bila kedua percobaan1 “dan” percobaan 2 dilakukan , maka terdapat mxn hasil jawaban (atau memiliki m xn kemungkinan jawaban

Perluasan kaidah

Kaidah penjumlahan dan kaidah perkalian di atas dapat diperluas hingga mengandung lebih dari 2 percobaan. Jika n buah percobaan masing-masing mempunyai p1, p2,…,pn hasil percobaan yang mungkin terjadi yang dalam hal ini setiap pi tidak bergantung pada pilihan sebelumnya, maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah:

a. p1 x p2 x … x pn untuk kaidah perkalian

b. p1 + p2 + … + pn untuk kaidah penjumlahan

Contoh:

Jika harus menyusun jadwal tiga ujian ke dalam periode lima hari tanpa ada pembatasan mengenai berapa kali dibolehkan ujian dalam setiap harinya, berapakah kemungkinan jadwal yang dapat dibuat?

Jawab:

Karena penyusunan jadwal tiga ujian dan tanpa ada pembatasan dalam periode lima hari, maka jumlah kombinasi jadwal yang mungkin dibuat:

5.5.5 = 125

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Adalah cara penghitungan dengan menggunakan prinsip perhitungan himpunan.

Contoh: Berapa banyak jumlah byte yang dimulai dengan ‘11’ atau diakhiri dengan ‘11’ ?

Petunjuk Penyelesaian:

Misalkan A = himpunan byte yang dimulai dengan ‘11’

B = himpunan byte yang diakhiri dengan ‘11’

$A \cap B$ = himpunan byte yang berawal dan berakhir dengan ‘11’

Maka

$A \cup B$ = himpunan byte yang berawal dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’

Dengan Rumus:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1. Pengertian Permutasi

suatu susunan data dengan memperhatikan /membedakan urutan. Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian.

Rumus:

1. Permutasi dari n objek seluruhnya:

$${}_nP_n = n! = n.\,(n-1).(n-2)\ldots 2.1$$
$$= n.(n-1)!$$

2. Permutasi sebanyak r dari n objek:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

3. Permutasi keliling (circular permutation)

Sejumlah n objek yang berbeda dapat disusun secara teratur dalam sebuah lingkaran dalam (n-1)! cara

4. Permutasi dari n objek yang tidak seluruhnya dapat dibedakan:

$$\begin{bmatrix} n \\ n1, n2, n3, \ldots, nk \end{bmatrix} = \frac{n!}{n1!.n2!.n3!\ldots nk!}$$

Contoh soal:

1. Ada berapa cara3 buku dapat diurutkan ?

3! = 3.2.1 = 6 cara

2. Ada berapa cara 2 dari 4 buku dapat disusun ?

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12\ cara$$

3. 4 orang mahasiswa melakukan diskusi dengan membentuk sebuah lingkaran, ada berapa cara urutan dari 4 orang tadi?

Jawab : (4-1)! = 3.2.1 = 6 cara

4. Dalam berapa cara kata “diskrit” dapat diurutkan?

jawab:

$$\frac{7!}{1!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.1} = 2520\ cara$$

2. Kombinasi

Suatu susunan data tanpa memperhatikan urutannya.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Contoh:

1. Ada berapa cara akan dipilih 2 orang dari 4 orang siswa?

Jawab:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = \frac{12}{2} = 6\,cara$$

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Adalah menyusun obyek di mana tidak semua obyek bisa dibedakan (sama). Untuk rumus permutasi dan kombinasinya sama yaitu:

$$P(n;n1,n2,\ldots,nk) = C(n;n1,n2,\ldots,nk) = \frac{n!}{n1!\,n2!\,n3!\ldots nk!}$$

Contoh:

Berapa banyak string yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata MISSISSIPPI?

Jawab: S = {M,I,S,S,I,S,S,I,P,P,I}

huruf M = 1 buah n1 huruf S = 4 buah n3

huruf I = 4 buah n2 huruf P = 2 buah n4

n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 buah = jumlah elemen himpunan S

Cara 1

Jumlah string = P(11; 1,4,4,2) = $\dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$ = 34650 buah

Cara 2

Jumlah string = C(11,1).C(10,4).C(6,4).C(2,2)

$$\frac{11!}{1!\,10!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{2!}{2!\,0!} = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650 \text{ cara}$$

Kombinasi dengan Pengulangan

Jumlah kombinasi yang membolehkan adanya pengulangan elemen, yaitu dari n buah obyek kita akan mengambil r buah obyek, dengan pengulangan diperbolehkan.

C(n+r – 1, r) = C(n+r-1, n-1)

Contoh:

Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, xi adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Jawab:

misalkan 12 sebagai bola dan xi = 4 sebagai kotak (n=4 dan r=12), sehingga banyak kemungkinan yang bisa terjadi. Namun seluruhnya ada C(4+12-1,12) = C(15,12) = 455 buah kemungkinan solusi

Latihan:

1. Empat buah ujian dilakukan dalam periode enam hari. Berapa banyak pengaturan jadwal yang dapat dilakukan sehingga tidak ada dua ujian atau lebih yang dilakukan pada hari yang sama.
2. Berapa banyak string yang dapat dibentuk yang terdiri dari 4 huruf berbeda dan 3 angka yang berbeda pula?
3. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1,2,3,4,5 jika:

   i. tidak boleh ada pengulangan angka

   ii. Boleh ada pengulangan angka.
4. String biner yang panjangnya 32 bit disusun oleh digit 1 atau 0. Berapa banyak string biner yang tepat berisi 7 buah bit 1?

5. Sebuah karakter dalam sistim ASCII berukuran 1 byte atau 8 bit (1 atau 0).

   a. Berapa banyak pola bit yang terbentuk? (atau berapa banyak karakter yang dapat dipresentasikan?)

   b. Berapa banyak pola bit yang mempunyai 3 bit 1?

   c. berapa banyak pola bit yang mempunyai bit 1 sejumlah genap?

6. Suatu panitia akan dibentuk dengan jumlah 5 orang. Berapa carakah pembentukan panitia tersebut dapat dilakukan jika calon anggota terdiri dari 4 orang pria dan 3 orang wanita dan panitia harus

   a. terbentuk tanpa persyaratan lain

   b. terdiri 3 pria dan 2 wanita

   c. terdiri 2 pria dan 3 wanita