

# **ANALISIS VARIANSI DWIFAKTOR**

# ANOVA one-way vs two-way

- Dalam ANOVA one-way ( satu faktor), diperhatikan hanya satu faktor saja yang berpengaruh
- Dalam ANOVA dwifaktor, diperhatikan dua faktor yang berpengaruh dalam suatu percobaan, sekaligus **interaksi** dari kedua faktor tersebut.
- Contoh: dalam kasus peragian, diperhatikan jumlah ragi yang dihasilkan dengan faktor yang mempengaruhinya yaitu waktu, suhu dan interaksi antara waktu dan suhu tersebut.

# ANOVA dwifaktor

- Pandanglah  $n$  replikasi pada tiap kombinasi perlakuan bila faktor A diamati pada  $a$  taraf dan faktor B diamati pada  $b$  taraf. Dapat dilihat pada matriks, yang barisnya menyatakan taraf faktor A dan kolom menyatakan taraf faktor B.
- Kombinasi perlakuan menentukan suatu sel dalam matrik. Jika terdapat sebanyak  $ab$  sel, masing-masing berisi  $n$  pengamatan. Nyatakanlah pengamatan ke  $k$  yang diambil pada taraf ke  $i$  dari A dan taraf ke  $j$  dari B dengan  $y_{ijk}$

# Batasan-batasan

- Tiap pengamatan dapat ditulis:  $y_{ijk} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$
- $(\alpha\beta)_{ij}$  : pengaruh interaksi faktor A taraf ke-*i* dan faktor B taraf ke-*j*
- $\alpha_i$  : faktor A taraf ke-*i*
- $\beta_j$  : faktor B taraf ke-*j*
- $\mu$  : rataan keseluruhan
- Persamaan menjadi:  $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$  dengan batasan:

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0 , \sum_{j=1}^b \beta_j = 0 , \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0 , \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

# Beberapa Notasi

- $T_{ij.}$  : jumlah pengamatan pada sel ke  $ij$
- $T_{i..}$  : jumlah pengamatan pada taraf ke  $i$  factor A
- $T_{.j.}$  : jumlah pengamatan pada taraf ke  $j$  factor B
- $T_{...}$  : jumlah seluruh  $abn$  pengamatan
- $\bar{y}_{ij.}$  : rataan pengamatan pada sel ke  $ij$
- $\bar{y}_{i..}$  : rataan pengamatan pada taraf ke  $i$  factor A
- $\bar{y}_{.j.}$  : rataan pengamatan pada taraf ke  $j$  factor B
- $\bar{y}_{...}$  : rataan seluruh  $abn$  pengamatan

# Hipotesis yang akan diuji

1.  $H_0': \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$

$H_1':$  paling sedikit satu  $\alpha_i$  yang tidak sama dengan 0

2.  $H_0'': \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_a = 0$

$H_1'':$  paling sedikit satu  $\beta_i$  yang tidak sama dengan 0

3.  $H_0''': (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \dots = (\alpha\beta)_{ab} = 0$

$H_1''':$  paling sedikit satu  $(\alpha\beta)_{ab}$  yang tidak sama dengan 0

# Jumlah Kuadrat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 &= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 \\ &\quad + an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\ &\quad + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

- $\text{JKT} = \text{JKA} + \text{JKB} + \text{JK(AB)} + \text{JKG}$

# Susunan Data

hasil jumlah

A	B				Jumlah
	1	2	....	b	
1	$T_{11.}$	$T_{12.}$	....	$T_{1b.}$	$T_{1..}$
2	$T_{21.}$	$T_{22.}$	...	$T_{2b.}$	$T_{2..}$
.			.		.
.			.		.
.			.		.
a	$T_{a1.}$	$T_{a2.}$	....	$T_{ab.}$	$T_{a..}$
Jumlah	$T_{.b.}$	$T_{.b.}$	....	$T_{.b.}$	$T_{...}$

# Tabel Anova untuk percobaan dwifaktor dengan $n$ replikasi

Sumber variansi	Jumlah kuadrat	Derajat kebebasan	Rataan kuadrat	F hitung	F tabel
Pengaruh utama					
A	JKA	a-1	$S_1^2 = \frac{JKA}{a - 1}$	$f_1 = \frac{S_1^2}{S^2}$	$f_\alpha [a - 1, ab(n - 1)]$
B	JKB	b-1	$S_2^2 = \frac{JKB}{b - 1}$	$f_2 = \frac{S_2^2}{S^2}$	$f_\alpha [b - 1, ab(n - 1)]$
Intaraksi dwifaktor					
AB	JKA(AB)	(a-1)(b-1)	$S_3^2 = \frac{JK(AB)}{(a - 1)(b - 1)}$	$f_3 = \frac{S_3^2}{S^2}$	$f_\alpha [(a - 1)(b - 1), ab(n - 1)]$
Galat	JKG	ab(n-1)	$S^2 = \frac{JKG}{ab(n - 1)}$		

# Perhitungan Resaran ANOVA

$$JKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk})^2 - \frac{\mathbf{T}_{...}^2}{abn}$$

$$JKA = \frac{\sum_{i=1}^a T_{i..}^2}{bn} - \frac{\mathbf{T}_{...}^2}{abn}$$

$$JKB = \frac{\sum_{j=1}^b T_{j..}^2}{an} - \frac{\mathbf{T}_{...}^2}{abn}$$

$$JK(AB) = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b T_{ij..}^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^a T_{i..}^2}{bn} - \frac{\sum_{j=1}^b T_{j..}^2}{an} + \frac{\mathbf{T}_{...}^2}{abn}$$

# Contoh

- Dalam suatu percobaan yang dilakukan untuk menentukan yang mana yang lebih baik dari tiga rudal yang berlainan , diukur laju pembakaran bahan bakar dari 24 penembakan statis. Empat jenis bahan bakar yang berlainan dicoba. Percobaan menghasilkan replikasi pengamatan laju pembakaran pada tiap kombinasi perlakuan. Datanya:

Sistem rudal	Jenis bahan bakar			
	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>
a <sub>1</sub>	34,0	30,1	29,8	29,0
	32,7	32,8	26,7	28,9
a <sub>2</sub>	32,0	30,2	28,7	27,6
	33,2	29,8	28,1	27,8
a <sub>3</sub>	28,4	27,3	29,7	28,8
	29,3	28,9	27,3	29,1

# Contoh

pertanyaan

- Gunakan taraf signifikansi 0,05 untuk menguji hipotesis berikut
- $H_0'$  : tidak ada beda antara rataan laju pembakaran bahan bakar bila digunakan system rudal yang berlainan
- $H_0''$  : tidak ada beda rataan laju pembakaran keempat jenis bahan bakar
- $H_0'''$  : tidak ada interaksi antara system rudal yang berlainan dengan jenis bahan bakar

# Contoh

## Jawab

1.  $H_0'$ :  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$

$H_1'$ : paling sedikit satu  $\alpha_i$  yang tidak sama dengan 0

2.  $H_0''$ :  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_a = 0$

$H_1''$ : paling sedikit satu  $\beta_i$  yang tidak sama dengan 0

3.  $H_0'''$ :  $(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \dots = (\alpha\beta)_{ab} = 0$

$H_1'''$ : paling sedikit satu  $(\alpha\beta)_{ab}$  yang tidak sama dengan 0

Tingkat signifikansi  $\alpha = 0,05$  maka titik dan daerah kritis:

1.  $f_1 > 3,89$
2.  $f_2 > 3,49$
3.  $f_3 > 3,00$

# Contoh

## Perhitungan

	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	jumlah
a <sub>1</sub>	66,7	62,9	56,5	57,9	244,0
a <sub>2</sub>	65,2	60,0	56,8	55,4	237,4
a <sub>3</sub>	57,7	56,2	57,0	57,9	228,8
jumlah	189,6	179,1	170,3	171,2	710,2

$$JKT = 34,0^2 + 32,7^2 + \dots + 29,1^2 - \frac{710^2}{24} = 91,6$$

$$JKA = 244^2 + 237,4^2 + 228,8^2 - \frac{710^2}{24} = 14,52$$

$$JKB = 189,6^2 + \dots + 171,2^2 - \frac{710^2}{24} = 40,8$$

$$JK(AB) = (66,7^2 + \dots + 57,9^2)/2 - 21.030,52 - 21.056,08 + 21.016,00 = 22,17$$

$$JKG = 14,91$$

# Contoh

Tabel ANOVA

Sumber variasi	Jumlah kuadrat	Drajat kebebasan	Rataan kuadrat	F hitung
System rudal	14,52	2	7,26	5,85
Jenis bahan bakar	40,08	3	13,36	10,77
Interaksi	22,17	6	3,70	2,98
Galat	14,91	12	1,24	
Jumlah	91,68	23		

Keputusan :

$H_0'$  ditolak artinya system rudal berlainan menghasilkan laju pembakaran yang berbeda

$H_0''$  ditolak artinya rataan laju pembakaran bahan bakar tidak sama untuk keempat jenis bahan bakar

$H_0'''$  Interaksi hampir berarti menunjukan bahwa interaksi seharusnya diperhatikan secara sungguh-sungguh

# Latihan

- Suatu percobaan dilakukan untuk meneliti pengaruh suhu dan jenis tungku terhadap umur sejenis suku cadang tertentu diuji. Empat jenis tungku dan tiga taraf suhu dipakai dalam percobaan tersebut. Duapuluhan empat buah suku cadang dibagi secara acak, dua pada tiap kombinasi perlakuan, dan hasilnya sbb:

Suhu (°C)	Tungku			
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>
500	227	214	225	260
	221	259	236	229
550	187	181	232	246
	208	179	198	273
600	174	198	178	206
	202	194	213	219

- Gunakan taraf keberartian 0,05, uji hipotesis bahwa:
  - Suhu yang berbeda tidak berpengaruh pada umur susku cadang
  - Tungku yang berlainan tidak berpengaruh pada umur suku cadang
  - Jenis tungku dan suhu tidak berinteraksi

# Referensi

- Walpole, Ronald E. Dan Myers, Raymond H., *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi 4, Bandung: Penerbit ITB, 1995.
- Walpole, Ronald E., et.al, *Statistic for Scientist and Engineering*, 8th Ed., 2007.

# Referensi

- Djauhari, M.A., 2001, *Catatan Kuliah Analisis Data*.
- Walpole, Ronald E., et.al, *Statistic for Scientist and Engineering*, 8th Ed., 2007.
- Pasaribu, U.S., 2007, *Catatan Kuliah Biostatistika*.