Uji Hipotesis

Utriweni Mukhaiyar

Pengertian

- Hipotesis adalah suatu anggapan yang mungkin benar atau tidak mengenai satu populasi atau lebih yang perlu diuji kebenarannya

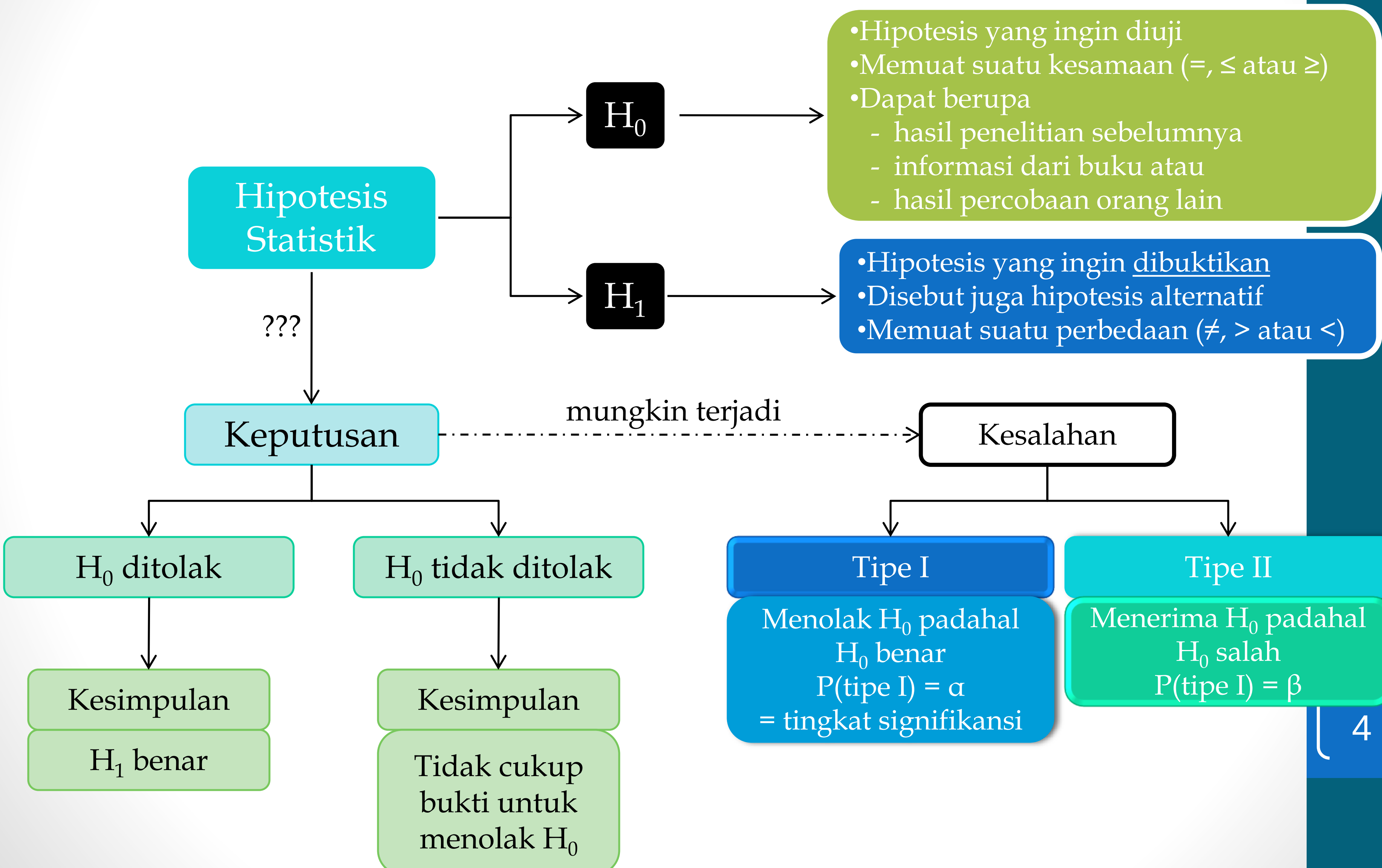
1. Hipotesis nol (H_0) ; pernyataan yang mengandung tanda kesamaan ($=$, $\leq$, atau $\geq$)
2. Hipotesis tandingan (H_1) ; tandingan hipotesis H_0, mengandung tanda $\neq$, $>$, atau $<$.

Galat (*error*)

	H_0 benar	**H_0 salah**
H_0 ditolak	*P*(menolak H_0 | H_0 benar) = galat tipe I = α	keputusan benar
H_0 tidak ditolak	keputusan benar	*P*(tidak menolak H_0 | H_0 salah) = galat tipe II = β

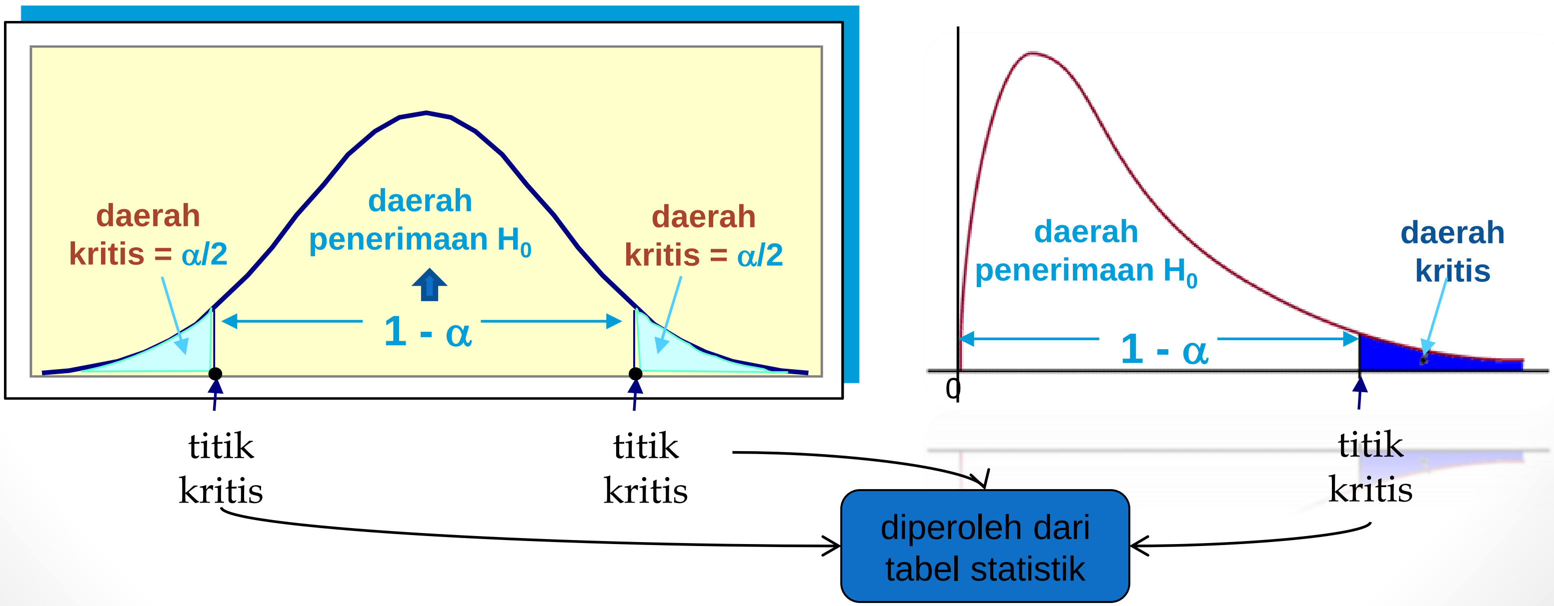
yang dimanfaatkan dalam pokok bahasan ini

Skema Umum Uji Hipotesis



Statistik Uji dan Titik Kritis

- Statistik uji digunakan untuk menguji hipotesis statistik yang telah dirumuskan. Notasinya berpadanan dengan jenis distribusi yang digunakan.
- Titik kritis membatasi daerah penolakan dan penerimaan H_0. Diperoleh dari tabel statistik yang bersangkutan.
- H_0 ditolak jika nilai statistik uji jatuh di daerah kritis.



Uji Rataan Satu Populasi

uji dua arah

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
2. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$
3. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$

uji satu arah

μ_0 adalah suatu konstanta yang diketahui

Statistik Uji untuk Rataan Satu Populasi

1. Kasus σ^2 diketahui

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Tabel Z *(normal baku)*

2. Kasus σ^2 tidak diketahui

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t_{(n\text{-}1)}$$

Tabel t

Daerah Kritis Uji Rataan Satu Populasi

	σ^2 diketahui	σ^2 tidak diketahui
Statistik uji :	**Z**	**T**
$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z < -Z_{1-\alpha/2}$ atau $Z > Z_{1-\alpha/2}$	$T < -T_{\alpha/2}$ atau $T > T_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$	$Z > Z_{1-\alpha}$	$T > T_{\alpha}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$	$Z < -Z_{1-\alpha}$	$T < -T_{\alpha}$

titik kritis dengan derajat kebebasan *n* - 1

Uji Rataan Dua Populasi

uji dua arah

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$
3. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$

uji satu arah

μ_0 adalah suatu konstanta yang diketahui

Statistik Uji untuk Rataan Dua Populasi

1. **Kasus σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui**

$$Z_H = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

2. **Kasus σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$**

$$\tilde{T}_H = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

3. **Kasus σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$**

$$T_H = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \mu_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

dengan

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Daerah Kritis Uji Rataan Dua Populasi

	σ_1^2, σ_2^2 diketahui	σ_1^2, σ_2^2 tidak diketahui	
Statistik uji :	Z	T	
		$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Derajat Kebebasan		$n_1 + n_2 - 2$	$v = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{(n_1-1)}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{(n_2-1)}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$Z < -Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2}$	$T < -T_{\alpha/2}$ atau $T > T_{\alpha/2}$	$T < -T_{\alpha/2}$ atau $T > T_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$Z > Z_\alpha$	$T > T_\alpha$	$T > T_\alpha$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$Z < -Z_\alpha$	$T < -T_\alpha$	$T < -T_\alpha$

Uji untuk Rataan Berpasangan

1. $H_0 : \mu_d = \mu_0$ vs $H_1 : \mu_d \neq \mu_0$
2. $H_0 : \mu_d \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_d > \mu_0$
3. $H_0 : \mu_d \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_d < \mu_0$

- Statistik uji menyerupai statistik untuk kasus satu populasi dengan variansi tidak diketahui.

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_0}{S_d / \sqrt{n}};$$

Contoh 1

Berdasarkan 100 laporan kejadian hujan (dengan lama kejadian hujan sama) di daerah "SH" yang diamati secara acak, diperoleh bahwa rata-rata tingkat curah hujan adalah adalah 71,8 mm dengan simpangan baku 8,9 mm. Berdasarkan literatur diduga bahwa rata-rata tingkat curah hujan di daerah tersebut lebih dari 70 mm.

a. Nyatakan dugaan tersebut dalam pernyataan hipotesis statistik
b. Untuk tingkat signifikansi 5% , benarkah pernyataan literatur tersebut?

Solusi

Diketahui

Ditanya:

a. Hipotesis statistik

b. Kesimpulan uji hipotesis

Jawab:

Parameter yang akan diuji : μ

a. Rumusan hipotesis:

H_0: $\mu \leq 70$

H_1: $\mu > 70$

- b. α = 5%=0.05, maka titik kritis $t_{0.05,(99)}$ = 1.645

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{71,8 - 70}{8,9/\sqrt{100}} = 2,02$$

- Karena t > $t_{0.05,(99)}$, maka t berada pada daerah penolakan sehingga keputusannya H_0 ditolak.
- Jadi sampel yang ada mendukung pernyataan literatur tersebut, yaitu bahwa rata-rata tingkat curah hujan di daerah "SH" lebih dari 70 mm.

Contoh 1-modifikasi 1

Berdasarkan 100 laporan kejadian hujan (dengan lama kejadian hujan sama) di daerah "SH" yang diamati secara acak, diperoleh bahwa rata-rata tingkat curah hujan adalah adalah 71,8 mm dengan simpangan baku 8,9 mm. **Berdasarkan literatur diduga bahwa rata-rata tingkat curah hujan di daerah tersebut tidak lebih dari 70 mm**.

a. Nyatakan dugaan tersebut dalam pernyataan hipotesis statistik

Rumusan hipotesis akan sama dengan Contoh 1

Contoh 1-modifikasi 2

Berdasarkan 100 laporan kejadian hujan (dengan lama kejadian hujan sama) di daerah "SH" yang diamati secara acak, diperoleh bahwa rata-rata tingkat curah hujan adalah adalah 71,8 mm dengan simpangan baku 8,9 mm. **Berdasarkan literatur diduga bahwa rata-rata tingkat curah hujan di daerah tersebut tidak kurang dari 70 mm**.

a. Nyatakan dugaan tersebut dalam pernyataan hipotesis statistik

Rumusan hipotesis akan berbeda dengan Contoh 1, menjadi:

H_0: $\mu \geq 70$

H_1: $\mu < 70$

Contoh 2

Suatu percobaan dilakukan untuk membandingkan keausan yang diakibatkan oleh gosokan, dari dua bahan yang dilapisi. Dua belas potong bahan 1 diuji dengan memasukan tiap potong bahan ke dalam mesin pengukur aus. Sepuluh potong bahan 2 diuji dengan cara yang sama. Dalam tiap hal, diamati dalamnya keausan.

Sampel bahan 1 memberikan rata-rata keausan (sesudah disandi) sebanyak 85 satuan dengan simpangan baku sampel 4, sedangkan sampel bahan 2 memberikan rata-rata keausan sebanyak 81 dengan simpangan baku sampel 5.

Dapatkah disimpulkan, pada taraf keberartian 5%, bahwa rata-rata keausan bahan 1 melampaui rata-rata keausan bahan 2 lebih dari dua satuan? Anggaplah kedua populasi berdistribusi hampir normal dengan variansi yang sama.

Solusi

Misalkan μ_1 dan μ_2 masing-masing menyatakan rata-rata populasi bahan 1 dan populasi bahan 2.

Variansi populasi kedua bahan tidak diketahui, yang diketahui adalah variansi sampel.

Diasumsikan variansi populasi kedua bahan adalah sama. Rumusan hipotesis yang diuji adalah:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 2$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 2$

- Tingkat keberartian, $\alpha = 0.05$

$$\bar{x}_1 = 85,\quad s_1 = 4,\quad n_1 = 12$$
$$\bar{x}_2 = 81,\quad s_2 = 5,\quad n_2 = 10$$

- Kita gunakan statistik uji untuk variansi kedua populasi tak diketahui tapi diangga

$$t_H = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

- denga

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(11)(16) + (9)(25)}{12 + 10 - 2}} = 4.478$$

- Maka diperoleh :

$$t_H = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{(85 - 81) - 2}{4.478\sqrt{(1/12) + (1/10)}} = 1.04$$

- Statistik uji *t* berdistribusi *t*-student dengan derajat kebebasan $n_1+n_2-2 = 12 + 10 - 2 = 20$, sehingga titik kritisnya adalah $t_{0.05,20} = 1.725$.
- Karena $t < 1.725$, maka H_0 tidak ditolak. Tidak dapat disimpulkan bahwa rata-rata keausan bahan 1 melampaui rata-rata keausan bahan 2 lebih dari 2 satuan.

Contoh 2 – modifikasi 1

Suatu percobaan dilakukan untuk membandingkan keausan yang diakibatkan oleh gosokan, dari dua bahan yang dilapisi. Dua belas potong bahan 1 diuji dengan memasukan tiap potong bahan ke dalam mesin pengukur aus. Sepuluh potong bahan 2 diuji dengan cara yang sama. Dalam tiap hal, diamati dalamnya keausan.

Sampel bahan 1 memberikan rata-rata keausan (sesudah disandi) sebanyak 85 satuan dengan simpangan baku sampel 4, sedangkan sampel bahan 2 memberikan rata-rata keausan sebanyak 81 dengan simpangan baku sampel 5.

Dapatkah disimpulkan, pada taraf keberartian 5%, bahwa **rata-rata keausan bahan 1 melampaui rata-rata keausan bahan 2** sebesar **dua satuan**? Anggaplah kedua populasi berdistribusi hampir normal dengan variansi yang sama.

Rumusan hipotesis menjadi :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 2$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 2$

Contoh 3 (data berpasangan)

- Pada tahun 1976, J.A. Weson memeriksa pengaruh obat *succinylcholine* terhadap kadar peredaran hormon androgen dalam darah. Sampel darah dari rusa liar yang hidup bebas diambil melalui urat nadi leher segera setelah *succinylcholine* disuntikkan pada otot rusa. Rusa kemudian diambil lagi darahnya kira-kira 30 menit setelah suntikan dan kemudian rusa tersebut dilepaskan. Kadar androgen pada waktu ditangkap dan 30 menit kemudian diukur dalam nanogram per ml (ng/ml) untuk 15 rusa. Data terdapat pada tabel berikut

No.	Kadar androgen (ng/ml) sesaat setelah disuntik	Kadar androgen (ng/ml) 30 menit setelah disuntik	Selisih (d_i)
1	2.76	7.02	4.26
2	5.18	3.10	-2.08
3	2.68	5.44	2.76
4	3.05	3.99	0.94
5	4.10	5.21	1.11
6	7.05	10.26	3.21
7	6.60	13.91	7.31
8	4.79	18.53	13.74
9	7.39	7.91	0.52
10	7.30	4.85	-2.45
11	11.78	11.10	-0.68
12	3.90	3.74	-0.16
13	26.00	94.03	68.03
14	67.48	94.03	26.55
15	17.04	41.70	24.66

Anggap populasi androden sesaat setelah suntikan dan 30 menit kemudian berdistribusi normal. Ujilah, pada tingkat keberartian 5%, apakah konsentrasi androgen berubah setelah ditunggu 30 menit.

Solusi

Ini adalah data berpasangan karena masing-masing unit percobaan (rusa) memperoleh dua kali pengukuran

Misalkan μ_1 dan μ_2 masing-masing menyatakan rata-rata konsentrasi androgen sesaat setelah suntikan dan 30 menit kemudian. Rumusan hipotesis yang diuji adalah

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ atau $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Tingkat signifikansi yang digunakan adalah $\alpha = 5\% = 0.05$

- Rata-rata sampel dan variansi sampel untuk selisih (d_i) adalah

$$\bar{d} = 9.848 \quad \text{dan} \quad s_d = 18.474$$

- Statistik uji yang digunakan adalah,

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

- Dalam hal ini,

$$t = \frac{9.848 - 0}{18.474 / \sqrt{15}} = 2.06$$

- Statistik uji t berdistribusi t-student dengan derajat kebebasan $n - 1 = 15 - 1 = 14$. Pada tingkat keberartian 0.05, H_0 ditolak jika

$$t < -t_{0.025,14} = -2.145 \text{ atau } t > t_{0.025,14} = 2.145.$$

- Karena nilai $t = 2.06$, maka nilai t tidak berada pada daerah penolakan. Dengan demikian, H_0 tidak ditolak. Kendati demikian, nilai $t = 2.06$ mendekati nilai $t_{0.025,14} = 2.145$. Jadi perbedaan rata-rata kadar peredaran androgen bisa diabaikan.

Uji Hipotesis Tentang Variansi Satu Populasi

- Bentuk hipotesis nol dan tandingannya untuk kasus variansi satu populasi adalah

$$1.\ H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs\ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$2.\ H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \ \ vs\ \ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$3.\ H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \ \ vs\ \ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

- Dengan σ_0^2 menyatakan suatu konstanta mengenai variansi yang diketahui.

- Statistisk uji yang digunakan untuk menguji ketiga hipotesis di atas adalah :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- Jika H_0 benar, maka statistik uji tersebut berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan *n*-1.

- Untuk hipotesis $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, tolak H_0 pada tingkat keberartian α jika :

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)} \text{ atau } \chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$$

- Untuk hipotesis $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, tolak H_0 pada tingkat keberartian α jika

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha,(n-1)}$$

- Untuk hipotesis $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, tolak H_0 pada tingkat keberartian α jika

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha,(n-1)}$$

nilai dari tabel distribusi chi-square dengan derajat kebebasan n - 1

Uji Hipotesis Tentang Variansi Dua Populasi

- Bentuk hipotesis nol dan tandingannya untuk uji hipotesis mengenai variansi dua populasi adalah,

$$1.\ H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$2.\ H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$3.\ H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

- Dengan σ_1^2 dan σ_2^2 masing-masing adalah variansi populasi ke-1 dan variansi populasi ke-2

- Statistisk uji yang digunakan untuk menguji ketiga hipotesis di atas adalah,

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- Jika H_0 benar, statistik uji tersebut berdistribusi Fisher dengan derajat kebebasan,

$v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 2$

Untuk hipotesis $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ pada tingkat keberartian α jika :

$$F < f_{1-\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)} \text{ atau } F > f_{\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)}$$

Untuk hipotesis $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; vs \;\; H_1 : \; \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ pada tingkat keberartian α jika :

$$F < f_{1-\alpha,(v_1,v_2)}$$

Untuk hipotesis $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ pada tingkat keberartian α jika :

$$F > f_{\alpha,(v_1,v_2)}$$

$f_{\alpha,(v_1,v_2)}$, $f_{1-\alpha,(v_1,v_2)}$, $f_{\alpha/2,(v_1,v_2)}$, dan $f_{1-\alpha/2,(v_1,v_2)}$ adalah nilai-nilai dari tabel distribusi Fisher dengan derajat kebebasan v_1 dan v_2

Contoh 4

- Suatu perusahaan baterai mobil menyatakan bahwa umur baterainya berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku 0.9 tahun. Bila sampel acak 10 baterai tersebut menghasilkan simpangan baku 1.2 tahun, apakah anda setuju bahwa $\sigma > 0.9$ tahun? Gunakan taraf kebartian 5%!

Solusi

$H_0 : \sigma^2 = 0.81$
$H_1 : \sigma^2 > 0.81$
$\alpha = 0.05$

Diketahui simpangan baku sampel, s = 1.2
Statistik uji

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(9)(1.44)}{0.81} = 16$$

Titik kritis adalah

$$\chi^2{}_{\alpha,n-1} = \chi^2{}_{0.05,9} = 16.919$$

Karena $\chi^2 < \chi^2{}_{0.05,9}$, maka H_0 tidak ditolak.

Simpulkan
bahwa simpangan baku umur baterai tidak melebihi 0.9

Contoh 5

- Dalam pengujian keausan kedua bahan di contoh 2, dianggap bahwa kedua variansi yang tidak diketahui sama besarnya. Ujilah anggapan ini! Gunakan taraf keberartian 0.10.

Solusi

- Misalkan σ_1^2 dan σ_2^2 adalah variansi populasi dari masing-masing keausan bahan 1 dan bahan 2. rumusan hipotesis yang akan diuji adalah

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\alpha = 0.10$

Statistik uji $f = s_1^2 / s_2^2 = 16 / 25 = 0.64$

H_0 ditolak dengan tingkat keberartian α jika

$$f < f_{1-\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)} \quad \text{atau} \quad f > f_{\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)}$$

$\alpha = 0.10$, $v_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11$, dan $v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$.

Maka

$$f_{1-\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)} = f_{0.95,(11.9)} = 0.34$$ dan $$f_{\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)} = f_{0.05,(11.9)} = 3.11$$

Karena $f_{1-\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)} < f < f_{\frac{\alpha}{2},(v_1,v_2)}$ maka jangan tolak H_0.

Simpulkan bahwa tidak cukup kenyataan untuk menyatakan bahwa variansinya berbeda.

Referensi

- Devore, J.L. and Peck, R., *Statistics – The Exploration and Analysis of Data*, USA: Duxbury Press, 1997.
- Pasaribu, U.S., 2007, *Catatan Kuliah Biostatistika*.
- Wild, C.J. and Seber, G.A.F., *Chance Encounters – A first Course in Data Analysis and Inference*, USA: John Wiley&Sons,Inc., 2000.
- Walpole, Ronald E. Dan Myers, Raymond H., *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi 4, Bandung: Penerbit ITB, 1995.
- Walpole, Ronald E. et.al., *Probability & Statistics for Enginerrs & Scientists*, Eight edition, New Jersey : Pearson Prentice Hall, 2007.