Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

1° Cuatrimestre 2018 – Segundo Parcial – 7/07/18 Tema 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = (5\,\text{sen}(x) + y^3, 2\cos(y) + y)$$

   a) Probar que existen un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \in U$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(0,2) \in V$ y una función inversa para F, $F^{-1}: V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(0,2) = (0,0)$.

   b) Sea $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = e^x - \cos(x) + 3\,\text{sen}(y)$. Calcular la recta tangente y la recta normal a la curva dada de forma implícita por $g \circ F^{-1}(x,y) = 0$ en el punto $(0,2)$.
   Observación: normal quiere decir perpendicular.

2) Sea $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1; x \leq y\right\}$. Calcular los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 6x$$

   en la región D.

3) Decidir si la siguiente integral impropia converge o diverge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)\,(x+2)\cos(x)}{\sqrt{x^5 + 2x^4 + 3x^3}}\,dx$$

4) Calcular el volumen del sólido limitado inferiormente por la superficie

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 2\}$$

   y superiormente por la superficie

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2; z \leq 0\}$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

RESPUESTAS

2do PARCIAL 2018 1er Cuatrimestre - Tema 1

PROBLEMA 1:

a) F es $\mathcal{C}^1$ dado que sus funciones componentes son funciones $\mathcal{C}^1$, $(0,0) \in (\mathrm{Dom}(F))^\circ = (\mathbb{R}^2)^\circ = \mathbb{R}^2$, $\det\big(DF(0,0)\big) = \det\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, entonces, por el TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA…

b) La ecuación paramétrica de la recta normal al conjunto de nivel 0 de $g \circ F^{-1}$ en el punto $P = (0,2)$ es:

$$\mathbb{L}_N : (x, y) = \lambda(1,15) + (0,2) \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

La ecuación paramétrica de la recta tangente al conjunto de nivel 0 de $g \circ F^{-1}$ en el punto $P = (0,2)$ es:

$$\mathbb{L}_T : (x, y) = \lambda(-15,1) + (0,2) \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Extra 1: (Para a) Se puede concluir que $DF^{-1}(0,2) = \big(DF(0,0)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Extra 2: (Para b) Usar que el gradiente es ortogonal a los conjuntos de nivel de una función escalar.

Extra 3: (Para b) Se puede hallar ecuaciones explícitas para ambas rectas simplemente desparametrizándolas. Y resulta que:

$$\mathbb{L}_N : y = 15x + 2$$

$$\mathbb{L}_T : y = -\frac{1}{15}x + 2$$

PROBLEMA 2:

En $P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ la función f alcanza máximo absoluto de valor $f(P_1) = \frac{8+12\sqrt{5}}{5}$.
En $P_2 = (-1,0)$ la función f alcanza mínimo absoluto de valor $f(P_2) = -5$.

Extra: El Teorema de Weierstrass garantiza que si $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en A compacto (conjunto cerrado y acotado), entonces f alcanza máximo absoluto y mínimo absoluto.

PROBLEMA 3:

Converge

Extra 1: Llamo $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)(x+2)\cos(x)}{\sqrt{x^5+2x^4+3x^3}}$.

Hay que analizar por separado:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Extra 2: Converge aproximadamente a 2,10616.

PROBLEMA 4:

$$\boxed{\mathrm{Vol} = \frac{5}{6}\pi}$$

Extra: Conviene usar una transformación cilíndrica del tipo

$$T:\begin{cases} x &= r\cos(t) + x_0 \\ y &= r\,\mathrm{sen}(t) + y_0 \\ z &= w \end{cases}$$

con $(x_0, y_0) = (0,0)$.

La región a integrar queda definida como:

$$0 \leq t \leq 2\pi \,;\; 0 \leq r \leq 1 \,;\; r^2 - 2 \leq w \leq -r$$

Entonces, el volumen encerrado puede calcularse como:

$$\mathrm{Vol} = \iiint_D dV = \iiint_{D^*=T^{-1}(D)} |JT(r,t,w)| dV = \iiint_{D^*=T^{-1}(D)} r dV$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2-2}^{-r} r dw \right) dr \right) dt = \cdots = \frac{5}{6}\pi$$