Multiplicadores de Lagrange

Cálculo extremos de funciones $f = f(x,y)$ (o $f = f(x,y,z)$) en dominio dados por ecuaciones (Una curva $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = k\}$ en $\mathbb{R}^2$; una superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = k\}$

Clase pasada: $f = f(x,y)$, extremos en $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ → parametrizando C

— $f = f(x,y,z)$, extremos en $x + y + z^2 = 1$.

despejar, y reemplazar en la f.

Enfoque general para estos problemas.

Teorema (multiplicadores de Lagrange) - Versión 1.

Supongamos que una función f ($f = f(x,y)$ ó $f = f(x,y,z)$) ~~tiene un~~ considerada en un dominio dado por una ecuación ($g(x,y) = k$, o $g(x,y,z) = k$)

tiene un extremo (local) en p. Además f, g son diferenciables en p y

$\nabla g(p)$ NO es el vector $\vec{0}$.

$$\Rightarrow \quad \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

λ ↓ multiplicador de Lagrange.

Veámos como funciona en un ejemplo.

1) Calcular los extremos de $f(x,y) = 1 - xy$ en la curva
función

$x^2 + 2y^2 = 4$
restricción / dominio.
$g(x,y)$

. f, g son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

$\nabla g(p) \neq (0,0)$.

$p = (x,y)$ / $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

$(-y, -x) = \lambda(2x, 4y)$

agregar la ecuación

$x^2 + 2y^2 = 4$.

$$\begin{cases} -y = 2\lambda x \\ -x = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

3

$-y = 2\lambda\cdot(-4\lambda y)$; $y = 8\lambda^2 y$; $y(1-8\lambda^2) = 0$

CASO 1 $y=0$ CASO 2 : $1-8\lambda^2=0$

CASO 1: $y=0$

el sistema queda: $\begin{cases} 0 = 2\lambda x \\ -x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \emptyset$.

CASO 2 : $1-8\lambda^2=0 \rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{8} \rightarrow$ CASO 2.1 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

CASO 2.2 : $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

CASO 2.1 : $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. el sistema queda: $\begin{cases} -y = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x \\ -x = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot y = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot y = \sqrt{2}\cdot y \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$

1ª $-y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ son la misma

2ª $-x = \sqrt{2}y$

en la 3ª: $x^2 + 2\cdot\frac{x^2}{2} = 4$; $x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \to y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = -1$ $\boxed{P_1 = (\sqrt{2}, -1)}$ $\left(\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$x = -\sqrt{2} \to y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2}) = 1$; $\boxed{P_2 = (-\sqrt{2}, 1)}$ (")

CASO 2.2: $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ... $\boxed{P_3 = (\sqrt{2}, 1)}$; $\boxed{P_4 = (-\sqrt{2}, -1)}$.

Estos son todo los posibles extremos.

La curva/restricción: $x^2 + 2y^2 = 4$ → elipse → compacto

cerrado

acotado

- T. de W.
  hay máximo y mínimo (ABSOLUTOS)
- T. (m. de L.)
  Los posibles (Ejercicio $\nabla g(P_i) \neq (0,0)$, $i=1,2,3,4$) extremos son P_1, P_2, P_3, P_4.

$\underset{MAX.}{f(P_1)} = 1 + \sqrt{2}$, $\underset{MAX.}{f(P_2)} = 1 + \sqrt{2}$; $\underset{MIN.}{f(P_3)} = 1 - \sqrt{2}$; $\underset{MIN.}{f(P_4)} = 1 - \sqrt{2}$

$f(x,y) = 1 - xy$

Otro ejemplo (en $\mathbb{R}^3$)

Hallar extremos de $\overbrace{f(x,y,z) = x+y-2z}^{\text{la función}}$

en el dominio $\underbrace{x^2+\frac{y^2}{4}+z^2}_{g(x,y,z)}=1$] la restricción.

f, g son dif. en $\mathbb{R}^3$.

$\nabla g = \left(2x, \frac{y}{2}, 2z\right)$. Debe ocurrir $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ $(p=(x,y,z))$

agregs: $\begin{cases} (1,1,-2) = \lambda\left(2x, \frac{y}{2}, 2z\right) \\ x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1 \end{cases}$

$(\lambda \neq 0)$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \longrightarrow x = \frac{1}{2\lambda} \\ 1 = \frac{1}{2}\lambda y \longrightarrow y = \frac{2}{\lambda} \\ -2 = 2\lambda z \longrightarrow z = -\frac{1}{\lambda} \\ x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1 \end{cases}$$

metemos esto en la 4ª:

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{4}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1 \quad ; \quad \frac{9}{4\lambda^2}=1 \quad ; \quad \lambda^2=\frac{9}{4}.$$

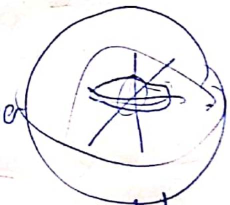
Caso 1: $\lambda = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $y = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; $z = -\frac{2}{3}$

$\boxed{P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$.

Caso 2: $\lambda = -\frac{3}{2}$ $x = -\frac{1}{3}$; $y = -\frac{4}{3}$; $z = \frac{2}{3}$

$\boxed{P_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}$.

La restricción/dominio: $\underbrace{x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1}_{\text{cerrado}}$ $\rightarrow$ cáscara de un huevo



acotado

$\rightarrow$ compacto $\rightarrow$ T.W. $\rightarrow$ hay máx y mín ABS.

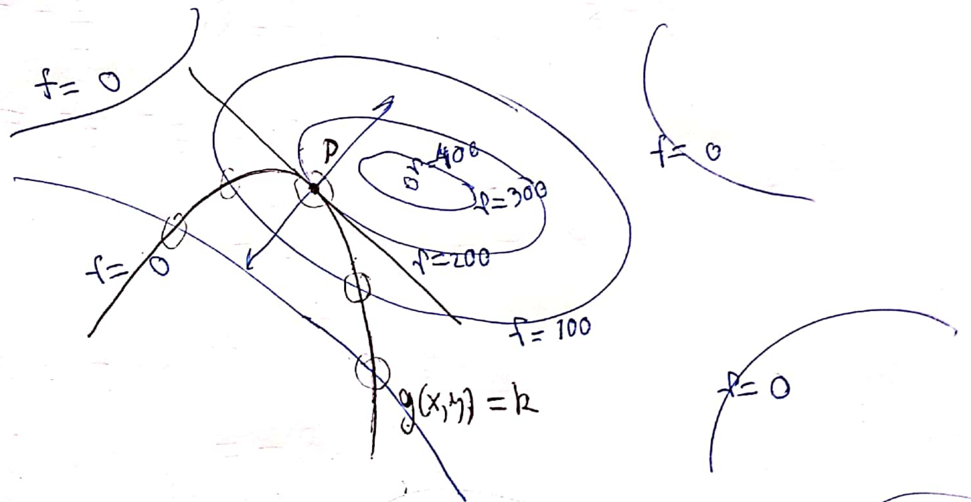
$f(P_1) = 3$; $f(P_2) = -3$.

MAX. ABS ; MIN. ABS.

Por qué tienen que ser múltiplos los gradientes?

7

en $\mathbb{R}^2$ buscamos máximo de $f = f(x,y)$ → altura (del terreno)
con la restricción $g(x,y) = k$



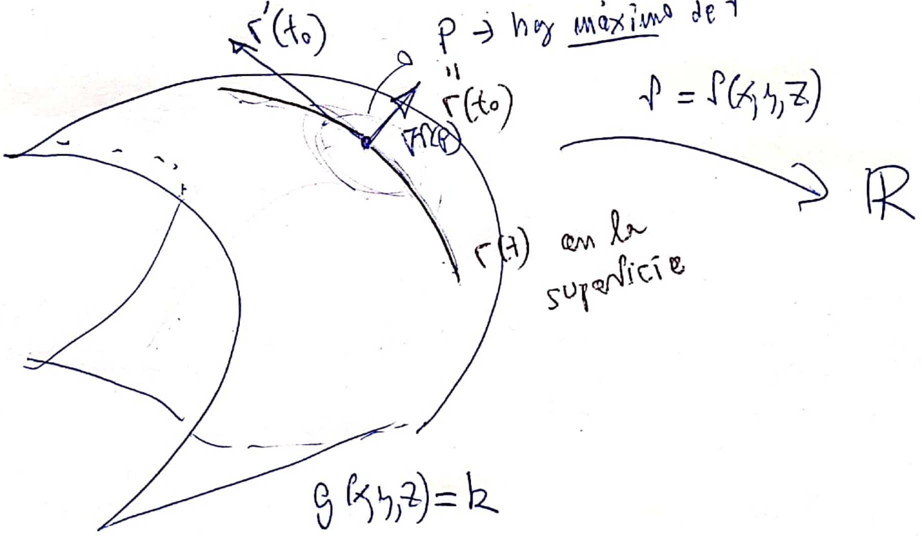
en P, si hay máximo, tgte (f(x,y) = 200) y tgte (g(x,y) = k) coinciden

normal $\nabla f(p)$ normal $\nabla g(p)$

$$\Rightarrow \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

8

Otra forma de verlo (por que $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ en un extremo p de $f(x,y,z)$ en el dominio $g(x,y,z) = k$).



$f(r(t))$ tiene un máximo si $t = t_0$ (cuando pasamos por P)

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{dt} f(r(t)) \right|_{t=t_0} = \boxed{0 = \nabla f(p) \cdot r'(t_0)}$$ (regla de la cadena)

$\nabla f(p)$ es $\perp$ a cualquier vector tangente a la superficie $g(x,y,z)=k$.

· $\nabla f(p)$ es un vector normal a la superficie en P.

· $\nabla g(p)$ es otro vector " " " " P.

$$\Longrightarrow \quad \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Qué pasa cuando hay más de una restricción:

Teorema (mult. de Lagrange - Versión 2)

Supongamos que $f = f(x,y,z)$ ~~tiene un extremo~~ con dominio en la curva $\begin{cases} g(x,y,z)=k \\ h(x,y,z)=l \end{cases}$ tiene un extremo en P.

Además f, g, h son dif. en P; $\nabla g(p)$, $\nabla h(p)$ no son uno múltiplo del otro.

Entonces: $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) + \mu \nabla h(p)$

multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo: Calcular los extremos de $f(x,y,z) = x + 2z$

en la curva $\begin{cases} \underbrace{2x^2 + y^2}_{g} = 1 \\ \underbrace{x + y - z}_{h} = 2 \end{cases}$

f, g, h son dif. en $\mathbb{R}^3$.

$$\nabla g = (4x, 2y, 0)$$
$$\nabla h = (1, 1, -2)$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

$$(1, 0, 2) = \lambda (4x, 2y, 0) + \mu (1, 1, -2)$$

además $2x^2 + y^2 = 1$

$x + y - z = 2$

Escaneado con CamScanner

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x + \mu \\ 0 = 2\lambda y + \mu \\ 2 = -2\mu \longrightarrow \boxed{\mu = -1} \\ 2x^2 + y^2 = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} 4\lambda x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} \\ 2\lambda y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2\lambda} \\ 2x^2 + y^2 = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

en la 3º: $2 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$; $\frac{3}{4\lambda^2} = 1$; $\lambda^2 = \frac{4}{3}$

CASO 1: $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $z = x + y - 2 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} - 2}$

CASO 2: $\lambda = -\frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2$

P_1 ; P_2 : $\nabla g(P_i)$ NO es múltiplo de $\nabla h(P_i)$. (Ejercicio)

12

dominio $\begin{cases} 2x^2+y^2=1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

cerrado

T. W. hay extremos absolutos.