Teórica 16: Planos tangentes a Superficies

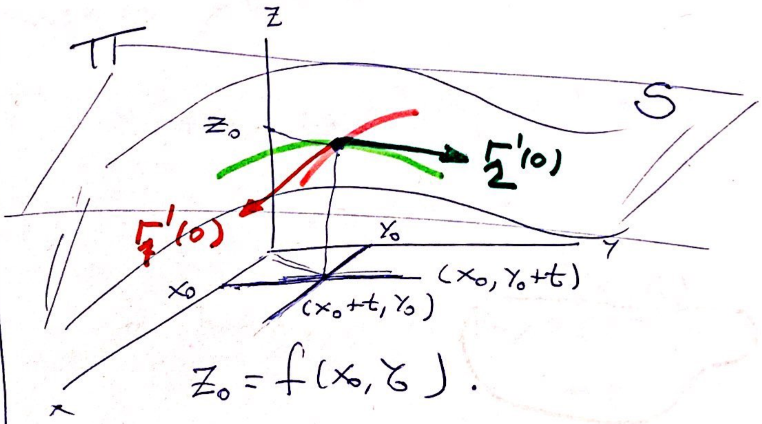
(o todo lo que no entró en la teórica 15)

Esta sí es la última teórica previa al parcial.

Cubre los ej. 33, 34 y 35 de la Guía 4.

Parte final de la sección 14.6 del libro de Stewart (Pág. 940 en adelante).

Repaso tenemos una superficie dada por $z = f(x,y)$



$z_0 = f(x_0, y_0)$.

$r_1(t) = (x_0+t, y_0, f(x_0+t, y_0))$

$r_2(t) = (x_0, y_0+t, f(x_0, y_0+t))$

Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y)\}$

$\Rightarrow r_1(t), r_2(t) \in S \quad \forall t$.

Luego $r_1'(0)$ y $r_2'(0)$ son tangentes a S en (x_0, y_0, z_0)

$\Gamma_1'(t) = \frac{d}{dt}(x_0+t, y_0, f(x_0+t, y_0))$

$= (1, 0, f_x(x_0+t, y_0)\cdot 1)$

$\Rightarrow \Gamma_1'(0) = (1, 0, f_x(x_0, y_0))$

Análogamente

$\Gamma_2'(0) = (0, 1, f_y(x_0, y_0))$

Como $\Gamma_1'(0)$ y $\Gamma_2'(0)$ son l.i. resultan ser generadores del plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0)

Si llamamos Π al plano tangente, el mismo va a tener ecuación paramétrica

$\Pi: \alpha(1, 0, f_x(x_0,y_0)) + \beta(0, 1, f_y(x_0,y_0))$

$+ (x_0, y_0, \underset{f(x_0,y_0)}{\underset{\shortparallel}{z_0}})$

$= (\alpha + x_0, \beta + y_0, \underbrace{\alpha f_x(x_0,y_0) + \beta f_y(x_0,y_0) + z_0}_{})$

Si $(x, y, z) = (\alpha + x_0, \beta + y_0, \overbrace{\cancel{\quad}}^{\alpha f_x(x_0,y_0)+\beta f_y(x_0,y_0)+z_0} \circledast)$

$x = \alpha + x_0 \to \alpha = x - x_0$

$y = \beta + y_0 \to \beta = y - y_0$

$z = \alpha f_x(x_0,y_0) + \beta f_y(x_0,y_0) + z_0$

$$\Rightarrow \quad z - \underbrace{z_0}_{f(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$-f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

$$\underbrace{\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)}_{N} \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$$N = (1,0,f_x(x_0,y_0)) \times (0,1,f_y(x_0,y_0))$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

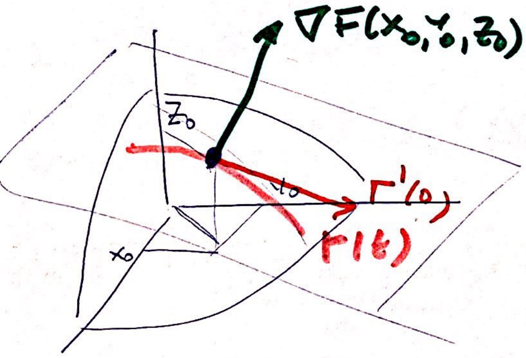
$$= \left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)$$

Superficies dadas de forma implícita

$S_k = \{F(x,y,z) = k\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / F(x,y,z) = k\}$.

Sea $(x_0, y_0, z_0) \in S$ (es decir $F(x_0,y_0,z_0) = k$).

Queremos encontrar el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0).



Sea $r(t)$ una curva con la propiedad que $r(t) \in S$ $\forall t$.

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $r(0) = (x_0, y_0, z_0)$

$F(x(t), y(t), z(t)) = k$ $\forall t$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right] = 0.$

$F_x(r(t)) \cdot x'(t) + F_y(r(t)) \cdot y'(t) + F_z(r(t)) \cdot z'(t) = 0$

Evalúo en $t = 0$

$F_x(x_0,y_0,z_0)\, x'(0) + F_y(x_0,y_0,z_0)\, y'(0) + F_z(x_0,y_0,z_0)\, z'(0) = 0$

$$\underbrace{\left(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)\right)}_{\nabla F(x_0,y_0,z_0)} \cdot \underbrace{\left(x'(0), y'(0), z'(0)\right)}_{r'(0)} = 0$$

$\Rightarrow$ $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot r'(0) = 0$

$\Rightarrow \nabla F(x_0,y_0,z_0) \perp r'(0)$

Luego, como $\Gamma(t)$ es cualquier curva que pasa por (x_0, y_0, z_0)

Concluimos que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp S$ en el punto (x_0, y_0, z_0)

~~Así~~ En consecuencia, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es el vector normal al plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0)

$$\Rightarrow \Pi: \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\neq 0} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

__Ej__ $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$

$P_0 = (-2, 1, -3)$

Hallar el plano tangente a la superficie en el punto P_0.

__Res__ Sea $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$

$$\nabla F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$$

$$= \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{2z}{9}\right)$$

$$\nabla F(-2, 1, -3) = \left(-1, 2, -\frac{2}{3}\right) = N.$$

$$N \cdot (x + 2, y - 1, z + 3) = 0$$

$$\left(-1, 2, -\frac{2}{3}\right)(x + 2, y - 1, z + 3) = 0$$

$$-x + 2y - \frac{2}{3}z = 6.$$

Relación entre sup. implícitas y gráficos

$F(x,y,z)=k$ sup. implícita

$z=f(x,y)$ gráfico

Todo gráfico es una sup. implícita.

$F(x,y,z)= z-f(x,y)=0$

(x_0,y_0,z_0) en la sup. $(z_0=f(x_0,y_0))$

$\Rightarrow$ por lo visto para gráficos,

el vector normal a la sup.

en (x_0,y_0,z_0) es $(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

Si ahora tratamos a la sup. como implícita, se obtiene

$N=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$

$\nabla F=(F_x,F_y,F_z)$

$=(-f_x,-f_y,1)$

que, como era de esperar, es el mismo vector normal que antes.

Sobre la condición $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$.

Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, entonces alguna de F_x, F_y, F_z en (x_0, y_0, z_0) será $\neq 0$.

Sup. que $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

$S_k = \{ F(x,y,z) = k \}$, $(x_0, y_0, z_0) \in S_k$

y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Por el T.F.I., puedo despejar z de la ecuación $F(x,y,z) = k$ y obtengo que $z = \varphi(x,y)$ con $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Luego, la sup. implícita $F(x,y,z) = k$ coincide (localmente) con el gráfico de φ.

¿Cómo es el plano tangente al gráfico de φ en (x_0, y_0, z_0)?

El vector normal al plano tangente es

$$N = (-\varphi_x(x_0,y_0), -\varphi_y(x_0,y_0), 1)$$

Por el T. F. I.

$$\varphi_x(x_0,y_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\varphi_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\Rightarrow N = \left(-\varphi_x(x_0,y_0), -\varphi_y(x_0,y_0), 1\right)$$

$$= \left(\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}, \frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}, 1\right)$$

$$= \frac{1}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \underbrace{\left(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)\right)}_{\nabla F(x_0,y_0,z_0)}$$