Teórica 14: Derivadas direccionales

[Sección 14.6 Stewart
Ejercicios 22 a 29, práctica 4]

Derivadas parciales

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(x_0, y_0) \in D$. Se definen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) como

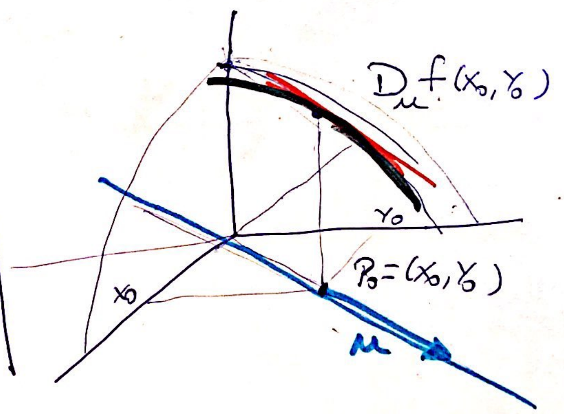
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Las derivadas parciales representan la razón de cambio de f cuando me muevo en la dirección de los ejes coordenados.

Estos ejes (o estas direcciones) están dadas por los vectores $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$

¿Qué sucede si se quiere calcular la razón de cambio de f en otra dirección?



Definición

Dado un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$

(unitario significa que $|\mathbf{u}| = 1$)

se define la derivada direccional de f en la dirección dada por $\mathbf{u}$ a

$$\boxed{\begin{aligned} D_u f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\mathbf{u}) - f(P_0)}{h} \end{aligned}}$$

$$\left(D_{\hat{i}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; D_{\hat{j}} f = \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Ej Sea $f(x, y) = x + 2y$

$P_0 = (1, 1)$ y $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$

Calcula $D_u f(P_0)$.

Res

$$D_u f(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h \cdot \frac{1}{2}, 1 + h\frac{\sqrt{3}}{2}) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{h}{2}) + 2(1 + \frac{\sqrt{3}h}{2}) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{h}{2} + \cancel{2} + \sqrt{3}h \cancel{-3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(\frac{1}{2} + \sqrt{3})}{\cancel{h}} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$$

Teorema

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

Ej $f(x, y) = x^2 y^3 - 4y$

$\mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$, $P_0 = (2, -1)$.

Calcular la razón de cambio de f en la dirección dada por $\mathbf{v}$ en P_0.

Res

Definimos $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{\langle 2, 5 \rangle}{\sqrt{29}}$

$$= \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle.$$

Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 x y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^3 = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, -1) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-1)^2 - 4 = 8$$

$$\nabla f(2, -1) = (-4, 8)$$

$$\Rightarrow D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u}$$

$$= (-4, 8) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Dem del Teo

Definimos

$$\mathbf{r}(t) = P_0 + t\,\mathbf{u}$$

$$= (\underbrace{x_0 + ta}_{x(t)},\ \underbrace{y_0 + tb}_{y(t)})$$

luego

$$f(x_0 + ha, y_0 + hb) = f(\mathbf{r}(h))$$

$$\Rightarrow D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{r}(h)) - f(\mathbf{r}(0))}{h}$$

$$= \left[f(\mathbf{r}(t))\right]'\Big|_{t=0} = (f \circ \mathbf{r})'\Big|_{t=0}$$

$$= \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(0)}_{\langle a, b\rangle = \mathbf{u}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \underbrace{x'(0)}_{a} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \underbrace{y'(0)}_{b}$$

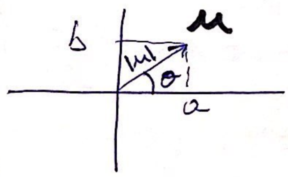
Ej $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$

Calcular $D_u f(1,2)$ donde $\mathbf{u}$ viene dado por $\theta = \pi/6$.

Res

$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ $\quad a = \overbrace{|\mathbf{u}|}^{1} \cos\theta$

$\quad b = \underbrace{|\mathbf{u}|}_{1} \operatorname{sen}\theta$



$$\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle = \langle \cos\tfrac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6}\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \Big| \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 8y \quad \Big| \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 13$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow \nabla f(1,2) = (-3, 13)$

luego, $D_u f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot u$

$= (-3, 13) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{-3\sqrt{3} + 13}{2}$.

¿Qué pasa en R^3?

Ej $f(x,y,z) = x \cdot \text{sen}(yz)$

$v = (1, 2, -1)$.

Calcula la derivada direccional de f en la dirección dada por v en el punto $(1,3,0)$.

Res

$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{sen}(yz)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos(yz)\, z$

$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cos(yz)\, y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1,3,0) = 3$

$u = \frac{v}{|v|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$

$D_u f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-3}{\sqrt{6}}$.

Escaneado con CamScanner

¿Cuál es la dirección de mayor crecimiento de una función f?

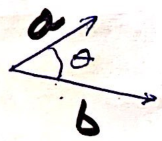
Equivalentemente, determinar el vector unitario $\mathbf{u}$ tal que $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ sea lo más grande posible.

Teorema Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$, f diferenciable en (x_0, y_0). El vector dirección $\mathbf{u}$ donde $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es máximo viene dado por $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$ si $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es $|\nabla f(x_0, y_0)|$

Dem

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$



Luego

$$D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot u$$
$$= |\nabla f(x_0,y_0)| \cdot \underbrace{|u|}_{=1} \cdot \cos\theta$$
$$= |\nabla f(x_0,y_0)| \cdot \underbrace{\cos\theta}_{-1 \le \cdot \le 1}$$

Esta cantidad es máxima si $\cos\theta = 1$ y $0 \le \theta \le \pi$

$\Leftrightarrow$ $\theta = 0$.

Es decir u y $\nabla f(x_0,y_0)$ tienen misma dirección y sentido

$$\Rightarrow u = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$$

La misma cuenta muestra que si $\theta = 0$ (y por ende $\cos\theta = 1$)

$\Rightarrow$ $D_u f(x_0,y_0) = |\nabla f(x_0,y_0)|$ $\boxtimes$

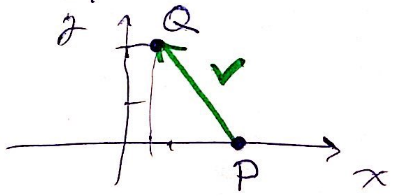
Ej Sea $f(x,y) = x e^y$

- Calcula la razón de cambio de f en el punto $P = (2,0)$ en la dirección que une P con $Q = (\frac{1}{2}, 2)$
- En qué dirección la razón de cambio es máxima y cuál es esa razón de cambio.

Res

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 2$$



$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \left\langle \tfrac{1}{2} - 2, 2 - 0 \right\rangle$$

$$= \left\langle -\tfrac{3}{2}, 2 \right\rangle$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\left\langle -\frac{3}{2}, 2 \right\rangle}{\underbrace{\sqrt{\frac{9}{4}+4}}_{\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}}} = \left\langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \right\rangle$$

$$D_{\mathbf{u}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \mathbf{u} = (1,2) \cdot \left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right)$$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1.$$

La dirección que hace máxima la razón de cambio es

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(2,0)}{|\nabla f(2,0)|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

y $D_{\mathbf{u}} f(2,0) = |\nabla f(2,0)| = \sqrt{5}$.