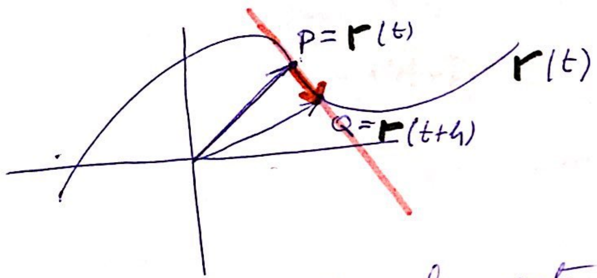
Teórica 10

Diferenciabilidad de curvas y rectas tangentes.

Sección 13.2 - Stewart

Ejercicios 1 a 4, Práctica 4



El vector dirección a la recta secante a la curva que pasa por los puntos $P = \mathbf{r}(t)$ y $Q = \mathbf{r}(t+h)$ viene dado por $\underbrace{Q-P}_{\overrightarrow{PQ}} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$

Observemos que el vector

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

tiene la misma dirección y el mismo sentido que $\overrightarrow{PQ}$.

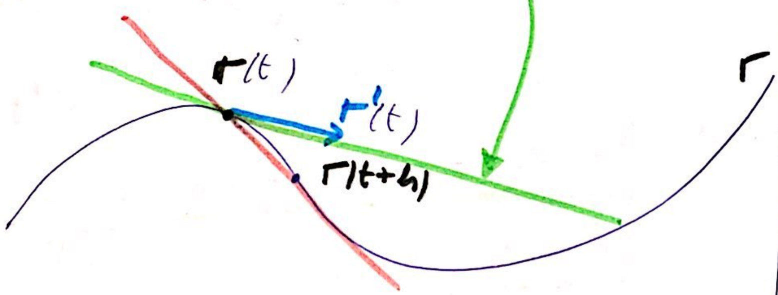
Def: Decimos que $\mathbf{r}$ es diferenciable en t si existe el siguiente límite

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Si $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, decimos entonces que la parametrización admite una recta tangente en $P = \mathbf{r}(t)$

y la misma viene dada por

$$\boxed{\lambda \cdot \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t)}$$



<u>Teorema</u>

si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$

$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$

<u>Dem</u>

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\delta) - \mathbf{r}(t)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \Big(\langle f(t+\delta), g(t+\delta), h(t+\delta) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \Big)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left\langle \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta}, \frac{g(t+\delta) - g(t)}{\delta}, \frac{h(t+\delta) - h(t)}{\delta} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\delta \to 0} \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta}, \lim_{\delta \to 0} \frac{g(t+\delta) - g(t)}{\delta}, \lim_{\delta \to 0} \frac{h(t+\delta) - h(t)}{\delta} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle .$$

Ej $\mathbf{r}(t) = (1+t^3)\,\hat{\imath} + t e^{-t}\,\hat{\jmath} + \operatorname{sen} 2t\,\hat{k}$

(1) Calcular el vector derivado de $\mathbf{r}$

(2) ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta tangente en $\mathbf{r}(0) = \hat{\imath}$?

Res

(1) $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2,\ e^{-t} + t(-e^{-t}),\ (\cos 2t)\cdot 2 \rangle = \langle 3t^2,\ e^{-t}(1-t),\ 2\cos 2t \rangle.$

(2) $\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$ y tiene dirección $(0,1,2)$

La recta tangente, pasa por el $(1,0,0)$

$$\boxed{\lambda \cdot (0,1,2) + (1,0,0)}$$

Obs Si llamamos T al vector tangente normalizado, se tiene

que $\quad T(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad$ si $\mathbf{r}'(t) \neq 0.$

$$\lambda(1, f'(x_0)) + (x_0, f(x_0))$$

$$(\lambda + x_0, \lambda \cdot f'(x_0) + f(x_0))$$

$$\begin{cases} x = \lambda + x_0 \longrightarrow \boxed{\lambda = x - x_0} \\ y = \lambda \cdot f'(x_0) + f(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Teorema (reglas de derivación)

Sean $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ dos funciones vectoriales. Supongamos que ambas son diferenciables en t.

Entonces

(1) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})'(t) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

(2) $(\lambda \mathbf{u})'(t) = \lambda \cdot \mathbf{u}'(t)$

(3) $[f(t)\mathbf{u}(t)]' = f'(t) \cdot \mathbf{u}(t) + f(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$

(4) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})'(t) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

(5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'(t) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

(6) $[\mathbf{u}(f(t))]' = \mathbf{u}'(f(t)) \cdot f'(t)$

Dem de (4)

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle$$

$$\mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(t) = f_1(t)\cdot g_1(t) + f_2(t) g_2(t) + f_3(t) g_3(t)$$

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) g_1(t) \\ + f_2'(t) g_2(t) \\ + f_3'(t) g_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) g_1'(t) \\ + f_2(t) g_2'(t) \\ + f_3(t) g_3'(t) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \cdot (g_1(t), g_2(t), g_3(t))} + \underbrace{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \cdot (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t))}$$

$$= \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$$

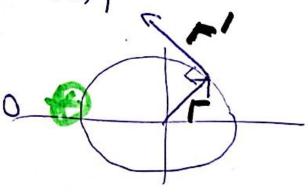
Aplicación

Sup. que $\mathbf{r}(t)$ diferenciable tal que $|\mathbf{r}(t)| = c$ (cte.)

Entonces $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$ $\forall t$.

Res

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$



$$\Rightarrow (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})'(t) = 0 \quad \circledast$$

Pero

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})' = \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'$$
$$= 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' \quad \circledast$$

$\circledast$ y $\circledast$ $\Rightarrow$ $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = 0$ ▨