SIMULACRO : SEGUNDO PARCIAL.

Hoja 1

Ej 1) a) Como f es de clase C^2 y su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(-1,1)$ es

$$P(x,y) = 2x^2 - xy + 5x - y + 5$$

Entonces vale que:

$f(-1,1) = P(-1,1) = 2$

$f_x(-1,1) = P_x(-1,1) = 4x - y + 5\big|_{(-1,1)} = 0$

$f_y(-1,1) = P_y(-1,1) = -x - 1\big|_{(-1,1)} = 0$

$f_{xx}(-1,1) = P_{xx}(-1,1) = 4$

$f_{xy}(-1,1) = P_{xy}(-1,1) = -1$ (que coincide con $f_{yx}(-1,1)$)

$f_{yy}(-1,1) = 0$

Como $\nabla f(-1,1) = (f_x(-1,1) ; f_y(-1,1)) = (0,0)$ entonces el punto $(-1,1)$ es un punto crítico de f (posible máx. o mín.)

Por otro lado, la matriz Hessiana de f en $(-1,1)$ es:

$$\mathcal{H}f(-1,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,1) & f_{xy}(-1,1) \\ f_{xy}(-1,1) & f_{yy}(-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ tiene

determinante negativo $\left(\det \mathcal{H}f(-1,1) = 4 \cdot 0 - (-1)^2 = -1\right)$ con lo cual el punto $(-1,1)$ es un PUNTO SILLA de f.

Ej 1) b) Como f es de clase C^2, en particular es continua, con lo cual $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) = f(-1,1) = 2$.

Entonces el límite planteado es indeterminado del tipo "$\frac{0}{0}$".

Si llamamos $R(x,y)$ al resto del polinomio de

NOTA

Taylor de Taylor de orden 2 de f centrado en $(-1,1)$, vale que: $f(x,y) = P(x,y) + R(x,y)$ y además:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(-1,1)\|} = 0$$

Luego $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{f(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|} =$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{P(x,y)+R(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{P(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|} + \underbrace{\frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(-1,1)\|}}_{\to 0}$$

Analicemos el límite del primer sumando.
Como $\|(x,y)-(-1,1)\| = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$ está escrito en potencias de $(x+1)$ e $(y-1)$ nos conviene que el numerador de esa expresión también esté escrito así. Para eso reescribamos al polinomio $P(x,y)$ en su forma usual:

$$P(x,y) = f(x,y) + \overbrace{f_x(-1,1)}^{0}(x+1) + \overbrace{f_y(-1,1)}^{0}(y-1) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\overbrace{f_{xx}(-1,1)}^{4}(x+1)^2 + 2\overbrace{f_{xy}(-1,1)}^{-1}(x+1)(y-1) +$$

$$\underbrace{f_{yy}(-1,1)}_{0}(y-1)^2\Big]$$

$$P(x,y) = 2 + 2(x+1)^2 - (x+1)(y-1)$$

NOTA

Con lo cual: $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{P(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2(x+1)^2 - (x+1)(y-1)}{\|(x,y)-(-1,1)\|}$$

Podemos "intuir" que ese límite da cero (pues "el grado" de las potencias del numerador "le gana" a las del denominador) o bien podemos considerar varias curvas que pasen por el $(-1,1)$ y ver que por todas ellas el límite es cero. Probémoslo por definición:

Dado $\varepsilon>0$, busco $\delta>0$ de modo que si $\|(x,y)-(-1,1)\|<\delta$ valga que $\left|\frac{P(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{P(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|}\right| = \frac{|2(x+1)^2-(x+1)(y-1)|}{\|(x,y)-(-1,1)\|} \underset{\text{Desigualdad Triangular}}{\leq}$$

$$\leq \frac{2|x+1|^2 + |x+1|\,|y-1|}{\|(x,y)-(-1,1)\|} \leq$$

$|x+1| \leq \|(x,y)-(-1,1)\|$

$|y-1| \leq \|(x,y)-(-1,1)\|$

$$\leq \frac{3\|(x,y)-(-1,1)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|(x,y)-(-1,1)\|}} = 3\|(x,y)-(-1,1)\| < 3\delta$$

Basta tomar $\delta < \varepsilon/3$.

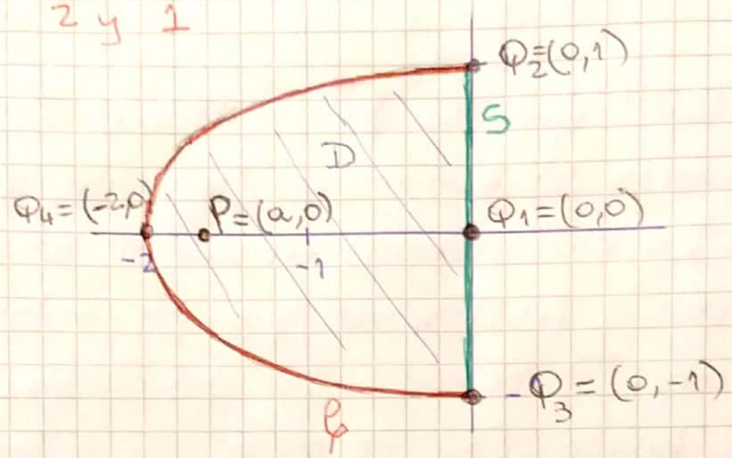
Luego, por algebra de límites, vale que:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{f(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \underbrace{\frac{P(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(-1,1)\|}}_{\to 0}$$

$= 0.$

Ej 2) Queremos hallar extremos absolutos de $f(x,y) = xy^2 + 2y^2 + 1$ en D, con:

$$D = \{ \underbrace{(x,y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1}_{\text{Región interior de la elipse de semiejes 2 y 1}} \; ; \; \underbrace{x \leq 0}_{\text{2do y 3er cuadrante}} \}$$



Como el conjunto D es compacto y la función f es continua, entonces seguro alcanza extremos absolutos en D. Para hallarlos nos bastará con calcular todos los puntos críticos y ver en cuál de ellos la f tiene mayor/menor valor para decidir cuál es MAXIMO/MINIMO de f en D.

Busquemos puntos críticos:

En el interior de D (D°) los puntos críticos son los que anulan el gradiente de f:

$\nabla f(x,y) = (y^2 \,;\, 2xy + 4y) = (0,0)$ si y solo si

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ y(2x+4) = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación sale que $y = 0$, con lo cual la segunda ecuación se verifica para cualquier valor de x. Obtuvimos infinitos puntos críticos de la forma $P = (a,0)$ con $a \in (-2,0)$ (pues $P \in D^\circ$)

NOTA

En el Borde de D: el borde de D consta de una curva $\mathcal{C}$ y un segmento S

En el segmento S los puntos del segmento son de la forma $(0,y)$ con $-1 \leq y \leq 1$, con lo cual al evaluar f queda:

$f(0,y) = y^2 + 1 = g(y)$; $g: [-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

los puntos críticos de g son:

$y \in (-1,1)$ con $g'(y) = 0$ $(2y = 0)$: $y = 0$

y en los extremos del intervalo: $y = 1$; $y = -1$

Cada punto crítico de g se corresponde con un punto crítico de f en S, por lo cual tenemos tres ptos:

$\varphi_1 = (0,0)$ (con $y=0$) ; $\varphi_2 = (0,1)$ (con $y=1$) , $\varphi_3 = (0,-1)$ $(y=-1)$

En la curva $\mathcal{C}$

Los puntos de la curva verifican $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (con $x \leq 0$)

Considero $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, φ es una función de clase C^1 y su gradiente no se anula en ningún punto de la curva $\mathcal{C}$ (pues $\nabla\varphi = (x/2, 2y)$ que solo se anula en el origen). Además f es también de clase C^1, con lo cual podemos usar Multiplicadores de Lagrange para calcular los puntos críticos.

Tenemos que tener en cuenta que $\varphi(x,y) = 1$ representa a toda la elipse y nosotros solo estamos trabajando con la mitad $(x \leq 0)$ con lo cual descartaremos todo punto que nos dé con primer coordenada positiva, y tenemos que agregar entre los puntos críticos a los de $x = 0$ (que son el "borde" de nuestra curva); aunque esos puntos ya los tenemos (φ_2 y φ_3 aparecieron cuando analizamos el segmento)

Planteamos $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \varphi \\ \varphi = 1 \end{cases}$ si y solo si:

$$\begin{cases} y^2 = \lambda \dfrac{x}{2} \\ 2xy + 4y = \lambda 2y \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{sii} \quad \begin{cases} 2y^2 = \lambda x & \text{(Ec1)} \\ xy + 2y = \lambda y & \text{(Ec2)} \\ x^2 + 4y^2 = 4 & \text{(Ec3)} \end{cases}$$

De (Ec2) tenemos: $y(x+2) = \lambda y$, con lo que:

$\underline{y=0}$ o bien (dividiendo por "y") $\lambda = x+2$

$\downarrow$ (En Ec.3)

$x^2 = 4$, $x = \pm 2$

(pero $x \leq 0$) Luego:

tengo el punto $\varphi_4 = (-2,0)$ (que verifica las tres ecuaciones)

$\underline{\text{Si } \lambda = x+2}$ reemplazando en (Ec1) tenemos: $2y^2 = x(x+2)$

Luego, en (Ec3)

$$4 = x^2 + 2.2y^2 = x^2 + 2x(x+2) = x^2 + 2x^2 + 4x$$

sii $3x^2 + 4x - 4 = 0$ sii $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6}$ sii

$x = \dfrac{-4 \pm 8}{6}$ $\rightarrow x = -2 \rightsquigarrow \varphi_4 = (-2,0)$

$\searrow x = 2/3$ (No sirve pues $x \leq 0$)

Obtuvimos los siguientes puntos críticos:

$P = (a,0)$ con $a \in [-2,0]$ (incluye a $\varphi_1 = (0,0)$ y $\varphi_4 = (-2,0)$)

$\varphi_2 = (0,1)$ y $\varphi_3 = (0,-1)$

Como $f(P) = f(a,0) = 1$ y $f(\varphi_2) = f(\varphi_3) = 3$

Entonces: el MAXIMO valor de f en D es 3 (y lo alcanza en φ_2 y φ_3), el MINIMO valor de f en D es 1 y lo alcanza en los puntos $P=(a,0)$.

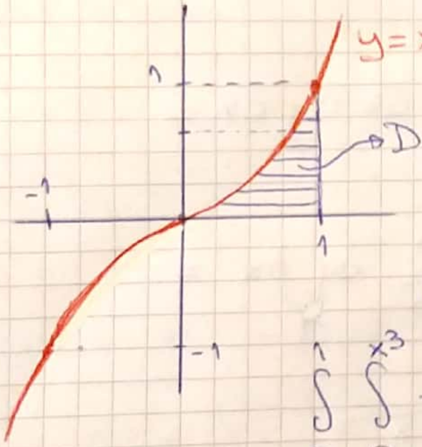
NOTA

Ej 3) a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx\, dy$.

La primitiva de la función $\frac{1}{1+x^4}$ respecto de la variable "x" no parece ser calculable. Intentemos integrar primero respecto de la variable "y", para lo cual debemos describir la región de integración (que llamaré D) de otro modo:

$$D = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 \ , \ \sqrt[3]{y} \leq x \leq 1 \}$$

Pero la curva $\sqrt[3]{y} = x$ es $y = x^3$:



Luego:

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ ; \ 0 \leq y \leq x^3\}$$

Con lo cual la integral pedida queda:

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} \frac{1}{1+x^4}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, y \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\, dx = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{t} \frac{dt}{4} =$$

SUSTITUYO $t = x^4 + 1$

$dt = 4x^3$

$$= \frac{\ln|t|}{4}\Big|_1^2 = \boxed{\frac{\ln(2)}{4}}$$

Ej 3) b) $\iiint_E x z^2 \, dV$, donde E es el sólido de $\mathbb{R}^3$ acotado por encima del rectangulo R (del plano xy) y por debajo de la superficie $z = x^2$ (notar que $z \geq 0$ en todo punto $(x,y) \in R$)

Como la superficie $z = x^2$ se mantiene siempre por encima del plano xy (plano $z=0$) entonces podemos describir E así: para cada $(x,y) \in R$, la variable z varía desde el "piso" ($z=0$) hasta la superficie $z = x^2$

$$E: \begin{cases} (x,y) \in R = [0,1] \times [2,3] \\ 0 \leq z \leq x^2 \end{cases}$$

Luego: la integral es: $\int_0^1 \int_2^3 \int_0^{x^2} x z^2 \, dz \, dy \, dx =$

$$= \int_0^1 \int_2^3 x \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{z=x^2} dy \, dx = \int_0^1 \int_2^3 \frac{x^7}{3} \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^7}{3} \underbrace{y \Big|_2^3}_{=1} dx = \frac{x^8}{24} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{24}}$$

Ej 4) Llamemos E al sólido acotado por las superficies $z = e^{4x^2+4y^2}$ y $z = e^4$ (es un plano horizontal pues $e^4 \simeq 54,6$ es constante).

Calculemos la intersección de ambas superficies:

$$e^{4x^2+4y^2} = e^4 \quad \text{sii}$$

$$4x^2 + 4y^2 = 4 \quad \text{sii}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

NOTA

que representa una circunferencia en el plano del piso $(z=0)$ y que encierra al dominio D:

$$D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$$

Notemos que (sin necesidad de graficar) podemos ver que para cada $(x,y)\in D$ vale que

$$x^2+y^2 \leq 1 \quad \text{con lo cual}$$

$$4(x^2+y^2) \leq 4 \quad \text{o sea que:}$$

$$e^{4x^2+4y^2} \leq e^4$$

Es decir: que la superficie $z=e^{4x^2+4y^2}$ se mantiene por debajo del plano $z=e^4$. Describimos E así:

$$E: \begin{cases} (x,y)\in D \\ \underbrace{4(x^2+y^2)}_{\text{PISO}} \leq z \leq \underbrace{e^4}_{\text{TECHO}} \end{cases}$$

Luego, el volumen de E es:

COORDENADAS POLARES p/ describir D $(r^2=x^2+y^2)$

$$Vol(E)=\iint_D \left[e^4-e^{4(x^2+y^2)}\right]dA =$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[e^4-e^{4r^2}\right]\underbrace{r}_{|\text{Jacobiano}|}\,d\theta\, dr = \int_0^1 \left[e^4 r-e^{4r^2}r\right]\theta\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= 2\pi\left[e^4\underbrace{\frac{r^2}{2}\Big|_0^1}_{1/2}-\int_0^4 e^{4r^2}r\,dr\right]=$$

SUST: $t=4r^2$
$dt=8r\,dr$

$$=2\pi\left[\frac{e^4}{2}-\int_0^4 e^t\,\frac{dt}{8}\right]=e^4\pi-\cancel{2}\pi\frac{e^t}{\cancel{8}_4}\Big|_0^4=$$

$$=\boxed{e^4\pi-\frac{e^4}{4}\pi+\frac{\pi}{4}}$$