Primer parcial - 08/06/2020 (1)

1) $C: \begin{cases} x^2+z^2=9 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

a) Hallar una función $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ cuyo imagen describe la curva C.

Puedo parametrizar la curva C usando coordenadas polares:

$x = r.\cos(\theta)$
$y = y$
$z = r.\text{sen}(\theta)$

Como $y = x+z$

Entonces $y = r.\cos(\theta) + r.\text{sen}(\theta)$
$y = r.(\cos(\theta)+\text{sen}(\theta))$

Primero encuentro el valor de r

$x^2+z^2=9 \longrightarrow (r.\cos(\theta))^2+(r.\text{sen}(\theta))^2=9$

$r^2.\underbrace{(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta))}_{=1} = 9$

$r^2=9$

$r=3$ (se trata del radio uso solo la r^+)

. Ahora que ya sé cuanto vale (x,y,z) en coordenadas polares, defino $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ cuyo imagen será la que describe la curva C.

$\boxed{r(\theta)=(3.\cos(\theta), 3.(\cos(\theta)+\text{sen}(\theta)), 3.\text{sen}(\theta)) \quad \text{con } \theta\in[0;2\pi)}$

B

b) Verifico que el punto $P=(3,3,0)$ pertenezca a la curva C

$(3,3,0)=(3.\cos(\theta), 3.(\cos\theta+\text{sen}\,\theta), 3.\text{sen}(\theta))$

aquí veo que la primer coordenada da 3 cuando $\theta=0$, así que ahora veo si las otras coordenadas con $\theta=0$ también satisfacen el punto $P=(3,3,0)$

$(3,3,0)=(3.\underbrace{\cos(0)}_{=1}, 3.(\underbrace{\cos(0)+\text{sen}(0)}_{=1}), \underbrace{3.\text{sen}(0)}_{0}) = (3,3,0)$ ✓

La ecuación de la LL tangente a C en el punto P, tendrá esta forma

$LL: (x,y,z) = P + \lambda.r'(0) \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$

$r(\theta)=(3.\cos(\theta), 3.(\cos(\theta)+\text{sen}(\theta)), 3\,\text{sen}(\theta))$

$r'(\theta)=(-3\,\text{sen}(\theta), 3.(\cos(\theta)-\text{sen}(\theta)), 3\cos(\theta))$

$r'(0)=(0,3,3)$

∴ La ecuación de la recta tangente a C en el punto $P=(3,3,0)$ será

$\boxed{LL: (x,y,z)=(3,3,0)+\lambda.(0,3,3) \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}}$

B

Escaneado con CamScanner

Primer parcial - 08/06/2020

2) Analizar la existencia de los sgtes. límites

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2\cdot(y-1)}{x^3+(y-1)^3}$

analizo el posible valor de este límite (si es que existe) por iterados.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1} \frac{x^2\cdot\overbrace{(y-1)}^{0}}{x^3+(y-1)^3}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^2}^{0}\cdot(y-1)}{x^3+(y-1)^3}\right) = \lim_{y\to 1} 0 = 0$$

(los límites iterados me coincidieron, así que de existir el límite, el límite debe valer 0.) ✓

. Ahora pruebo la existencia de este límite cuando $l=0$, por definición

. Dado $\varepsilon>0$ busco $\delta>0$ de modo que si $\|(x,y)-(0,1)\|=\|(x,y-1)\|<\delta$ valga que $|f(x,y)-\underset{l}{0}|<\varepsilon$

$|x+(y-1)| \leq |x|+|y-1|$. El valor te trae problemas. Pero además está dividiendo: $\dfrac{1}{|x+(y-1)|} \geq \dfrac{1}{|x|+|y-1|}$ se da vuelta la desigualdad y NO te sirve.

Entonces, $|f(x,y)| = \left|\dfrac{x^2\cdot(y-1)}{x^3+(y-1)^3}\right| \leq \dfrac{|x|^2\cdot|y-1|}{|x|^3+|y-1|^3} \leq \dfrac{\|(x,y-1)\|^2\cdot\|(x,y-1)\|}{\|(x,y-1)\|^3+\|(x,y-1)\|^3} =$ NO

$= \dfrac{\|(x,y-1)\|^3}{2\cdot\|(x,y-1)\|^3} \leq \dfrac{\|(x,y-1)\|^{4}}{2\cdot\|(x,y-1)\|^3} = \dfrac{\|(x,y-1)\|}{2} < \varepsilon$ NO

¿cómo se convirtió en un 4?

Entonces $\|(x,y-1)\|<2\cdot\varepsilon$, $\therefore \delta = 2\varepsilon$

$\boxed{\text{Concluyo que sirve } \delta=2\cdot\varepsilon}$, $\boxed{\text{luego } \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=0}$ Mal. (De hecho, el límite NO existe).

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\cdot sen(x^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{(x^2+y^2)}\cdot\dfrac{sen(x^2)}{x^2}\cdot x^2 =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\cdot x^2}{(x^2+y^2)}\cdot\dfrac{sen(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y}_{\to 0}\cdot\underbrace{\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)}}_{\text{acot.(entre 0 y 1)}}\cdot\underbrace{\dfrac{sen(x^2)}{x^2}}_{\to 1} = \boxed{0}$

B.

$\boxed{\therefore \text{ El límite de } f(x,y) \text{ tendiendo al origen es } 0}$

Primer parcial - 08/06/2020

③

3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{27x^3+y^3} = (27x^3+y^3)^{1/3}$

a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en (0,0)

• Hallo las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, luego las evalúo en (0,0), y veo si existen. Aquí puedo derivar algebraicamente, ya que f es cont. en todo $\mathbb{R}^2$ y no es una función partida.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot (27x^3+y^3)^{-2/3} \cdot 27 \cdot \cancel{3} \cdot x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{27x^2}{\sqrt[3]{(27x^3+y^3)^2}} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ no está definida ya que el denom. se anula.}$$

• Análogamente, si calculo $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, tendré un denominador en el que si $(x,y)=(0,0)$ la función $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ no esté definida. a lo que no vale en (0,0) son las reglas de derivación

• Por lo tanto, las derivadas parciales de f en (0,0) ~~no~~ existen, ya que no están definidas en (0,0) NO

b) ~~Para ver si f es diferenciable en (0,0), calculo el sgte. límite cuyo valor deberá ser igual a cero. De lo contrario, f no será diferenciable~~

• Como las derivadas parciales de f evaluadas en el origen no existen, concluyo que f no es diferenciable en el origen. ¡mal!

Hay que calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ por definición, con el cociente incremental

Primer parcial - 8/06/2020

4) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente en el punto $(4,1,f(4,1))$ es $z=-x+3y+7$

Sean $x=g(s,t)=(s+2t)^2$ e $y=h(s,t)=\cos(s).t^2$ y sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $F(s,t)=f(g(s,t),h(s,t))$

Observaciones de los datos del ejercicio

- La función f en el punto $(4,1)$ vale lo mismo que el plano tangente a f en el punto $(4,1)$. Por lo tanto: $f(4,1)=z\Big|_{(4,1)}=-x+3y+7\Big|_{(4,1)}$

$$f(4,1)=-4+3+7$$
$$f(4,1)=6$$

- Llamo a $r(s,t)=(x,y)=(g(s,t),h(s,t))$

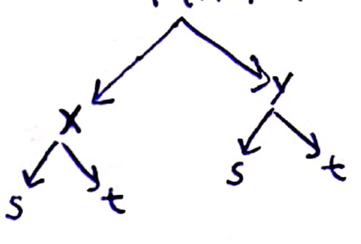
$$\therefore\ F(s,t)=(f\circ r)(s,t)=f(r(s,t))=f(\overbrace{g(s,t)}^{x},\overbrace{h(s,t)}^{y})$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

a) Para calcular las derivadas parciales de F, uso Regla de la Cadena, ya que F es una función compuesta.

Elaboro un diagrama de árbol:

$F(s,t)=(f\circ r)(s,t)$



Veo cuanto vale $r(s,t)$ cuando $(s,t)=(0,-1)$

$$r(0,-1)=\left((0+(2.(-1)))^2,\ \underbrace{\cos(0)}_{1}.(-1)^2\right)$$
$$r(0,-1)=(4,1)$$

- Por dato del ejercicio, sé que los coef. de x e y del plano tang. a f en el $(4,1,6)$ son las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(4,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(4,1)$ respectivamente.

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0,-1)=\frac{\partial f}{\partial x}(r(0,-1)).\frac{\partial x}{\partial s}(0,-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(r(0,-1)).\frac{\partial y}{\partial s}(0,-1)$$

$$=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(4,1)}_{\text{dato del ej.}}.\frac{\partial (s+2t)^2}{\partial s}(0,-1)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(4,1)}_{\text{dato del ej.}}.\frac{\partial(\cos(s).t^2)}{\partial s}(0,-1)$$

Primer parcial - 8/06/2020 (5)

• Hallo $\frac{\partial X}{\partial s}(0,-1)$ y $\frac{\partial Y}{\partial s}(0,-1)$

$$\frac{\partial (s+2t)^2}{\partial s}(0,-1) = (2.(s+2t).1)\Big|_{(0,-1)} = \boxed{-4}$$

$$\frac{\partial (\cos(s).t^2)}{\partial s}(0,-1) = -\operatorname{sen}(s).t^2\Big|_{(0,-1)} = \boxed{0}$$

• Por otro lado, por lo explicado anteriormente, tengo que

$\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(4,-1) = 3$

• Ahora puedo calcular $\frac{\partial F}{\partial s}(0,-1)$

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0,-1) = (-1).(-4) + 3.(0) = 4$$

$\therefore \boxed{\frac{\partial F}{\partial s}(0,-1) = 4}$ → Respuesta

• Para calcular $\frac{\partial F}{\partial t}(0,-1)$, necesito calcular primero $\frac{\partial (s+2t)^2}{\partial t}(0,-1)$ y $\frac{\partial (\cos(s).t^2)}{\partial t}(0,-1)$

$$\frac{\partial (s+2t)^2}{\partial t}(0,-1) = 2.(s+2t).2\Big|_{(0,-1)} = \boxed{-8}$$

$$\frac{\partial (\cos(s).t^2)}{\partial t}(0,-1) = 2t.\cos(s)\Big|_{(0,-1)} = \boxed{-2}$$

ahora $\frac{\partial F}{\partial t}(0,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(4,1) . \frac{\partial (s+2t)^2}{\partial t}(0,-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(4,1) . \frac{\partial (\cos(s).t^2)}{\partial t}(0,-1)$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0,-1) = -1 .(-8) + 3.(-2)$$

$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}(0,-1) = 2}$ → Respuesta

B.