$\boxed{\text{Teórica 15:}}$ Teorema de la función implícita y aplicaciones

Última teórica para el parcial: $\boxed{\text{8 de Junio (lunes) 10 – 14 hs.}}$

Camscanner

¡OJO! VA A HABER OTRA TEO...

Simulacro de parcial: Lunes 1 de Junio

$\boxed{\text{Atención}}$ Este tema $\boxed{\text{no}}$ está contenido en el libro de Stewart

... sin embargo... ver: sección 14.5, págs 928 a 930

sección 14.6, págs 940 y 941

Ahora pueden $\boxed{\text{Y DEBEN}}$ hacer TODA la práctica 4

HASTA EL EJ. 32

Objetivo

Dada $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, queremos estudiar cómo es la estructura de los conjuntos de nivel de f.

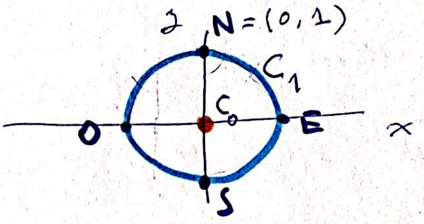
$k\in\mathbb{R}$; $C_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)=k\}$

Ej: $f(x,y)=x^2+y^2$.

$C_{-1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=-1\}=\emptyset$

$C_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}=\{(0,0)\}$

$C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}=\mathcal{C}$



$x^2+y^2=1$

$y^2=1-x^2$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

elijo $\phi(x)=\sqrt{1-x^2}$

Con lo cual $y=\phi(x)$

pues pasa por $(0,1)$

$x^2=1-y^2$

$x=\pm\sqrt{1-y^2}$

si elijo **E**

$x=\psi(y)=\sqrt{1-y^2}$.

$f(\psi(y),y)=1$

$\forall y$.

$$f(x,\phi(x))=x^2+[\phi(x)]^2$$
$$=x^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$
$$=\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}$$

Ej $f(x,y)=x^3+y^3-xy$

$C_0=?$

Tratemos de entender ahora cómo es el caso general.

$$f(x,y)=k.$$

Busco si es posible despejar y de esta ecuación.

1°) Necesito que $k \in \mathrm{Im} f$

Equivalentemente, existe (x_0, y_0) tal que $f(x_0,y_0)=k$

$((x_0,y_0) \in C_k)$.

2°) Despejar y significa encontrar una función $y=\phi(x)$ tal que $f(x,\phi(x))=k$ $\forall x$.

y $\phi(x_0)=y_0$

3°) C_k es el gráfico de ϕ "cerca" del punto (x_0,y_0)

Supongamos primero que f es una función lineal.

$$f(x,y)=ax+by+c$$

$\Rightarrow$ $ax+by+c=k$

$by=k-c-ax$

si $b\neq 0 \Rightarrow y=\dfrac{k-c-ax}{b}=\phi(x)$

Si $f(x,y)=a(x)+b(x)\cdot y$

$f(x,y)=k$

$a(x)+b(x)\cdot y=k \Rightarrow y=\dfrac{k-a(x)}{b(x)}$

La idea para el caso general es linealizar f

¿qué es linealizar?

Linealizar es cambiar f por su mejor aproximación lineal.

Sea $(x_0, y_0) \in C_k \Rightarrow f(x_0, y_0) = k$.

Luego

$$f(x,y) = \overbrace{f(x_0,y_0)}^{k} + \overbrace{\nabla f(x_0,y_0)}^{(f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0))} \cdot (x-x_0, y-y_0)$$

$$+ \varepsilon_f(x,y,x_0,y_0)$$

Si f es diferenciable en (x_0, y_0)

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\varepsilon_f(x,y,x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Luego, podemos despreciar el error de aproximación.

$\varepsilon_f(x,y,x_0,y_0)$.

$$f(x,y) \approx k + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(x,y) = k$$

??

$$\cancel{k} + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = \cancel{k}$$

$$\Rightarrow f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = -f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0) \qquad f_y(x_0,y_0) \neq 0$$

$$y = y_0 - \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

Escaneado con CamScanner

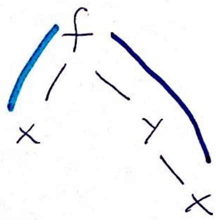
Teorema de la función implícita

Sea $f(x,y)$ una función de clase C^1 ($\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas). Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = k$ y supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Entonces existe $\phi(x)$ tal que $\phi(x_0) = y_0$, ϕ es de clase C^1 y $f(x, \phi(x)) = k \quad \forall x$.

Obs

$$f(x, \overset{y}{\overset{\parallel}{\phi(x)}}) = k \quad \forall x$$

Derivo respecto de x a ambos lados.



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \cdot \underset{\phi'(x)}{\underset{\parallel}{\frac{\partial y}{\partial x}}} = 0$$

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

$x = x_0$, $\phi(x_0) = y_0$

$$\Rightarrow \phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

Ej $x^3+y^3=2xy$

Calcular $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(1,1)$

$f(x,y)=x^3+y^3-2xy$

$C_0=\{f(x,y)=0\}$

$(1,1)\in C_0$. $f(1,1)=0$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=1\neq 0$.

Luego, por el TFI

$\exists\ y=y(x)$ $y(1)=1$ tq $x^3+y(x)^3=2x\,y(x)$ $\forall x$.

$$y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-2y$

$$\Rightarrow y'=-\frac{3x^2-2y}{3y^2-2x}$$

$y'(1)=-1$

Este Teorema se extiende a

$$f(x,y,z)=k.$$

Busco despejar Z

$$z=\phi(x,y)$$

$$f(x,y,\phi(x,y))=k \quad \forall (x,y)$$

T. F. I.

f de clase C^1, $f(x_0,y_0,z_0)=k$

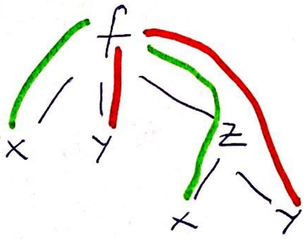
y $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Entonces

existe $\phi(x,y)$ tal que $\phi(x_0,y_0)=z_0$

y $f(x,y,\underbrace{\phi(x,y)}_{z})=k \quad \forall (x,y)$.

OBS

$$f(x,y,z)=k$$



$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y,z)\right]=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y,z)\right]=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\phi_x(x,y)=-\frac{f_x(x,y,\phi(x,y))}{f_z(x,y,\phi(x,y))}$$

$$\phi_y(x,y)=-\frac{f_y(x,y,\phi(x,y))}{f_z(x,y,\phi(x,y))}$$

Ej: $x^3+y^3+z^3+6xyz = 1$

$(0,0,1)$

$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+6xyz = 1$

$f(0,0,1) = 1$.

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2+6xy$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 3 \neq 0$.

TFI $\Rightarrow \exists\, z=\phi(x,y)$ despeje

tal que $\phi(0,0)=1$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0) = -\frac{f_x(0,0,1)}{f_z(0,0,1)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) = -\frac{f_y(0,0,1)}{f_z(0,0,1)}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2+6yz$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2+6xz$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1) = 0$

$\phi_x(0,0) = 0$

$\phi_y(0,0) = 0$