Anexo de la Teórica 9

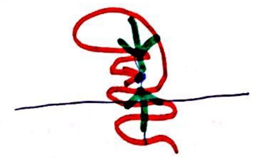
Comenzamos viendo el siguiente lema que fue enunciado en la teórica 9.

Lema Sea $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y asumimos que $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = L$

Sea ahora $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $(a,b) \in D$ tal que $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = t_0$

Entonces $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} \varphi(f(x,y)) = L$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1$$



$f(x,y) = x \cdot y$

$\varphi(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x \cdot y = 0.$

$\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$

Dem Sea $\varepsilon > 0$.

Debo ver que $\exists\, \delta > 0$ tq

$|\varphi(f(x,y)) - L| < \varepsilon$ si

$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$.

Por hipótesis, como $\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = L$,

existe $\eta > 0$ tq

$$|\varphi(t) - L| < \varepsilon \text{ si } |t - t_0| < \eta$$

luego, si $|f(x,y) - t_0| < \eta$, sigue que

$$|\varphi(f(x,y)) - L| < \varepsilon$$

Pero, como $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = t_0$, sigue que

$\exists\, \delta > 0$ tq $|f(x,y) - t_0| < \eta$ si

$$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$$

luego $|\varphi(f(x,y)) - L| < \varepsilon$ si $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta$.

▨

Lema del sandwich

$f, g, h : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Sup. que $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$

$\forall (x,y) \in D$.

Sea $(a,b) \in D$ y supongamos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$$

Entonces, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

Dem Sea $\varepsilon > 0$.

Debo ver que $\exists \delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{si}$$

$$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta.$$

Como $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$, entonces

existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{si}$$

$$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta_1$$

Como $\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$, entonces

existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|h(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{si}$$

$$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta_2.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Sea $(x,y) \in D$ tq $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$.

$$\underbrace{g(x,y) - L}_{> -\varepsilon} \le f(x,y) - L \le h(x,y) - L < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon < f(x,y) - L < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Ej Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{y}$

$$-1 \le \operatorname{sen} \frac{1}{y} \le 1$$

$$\Longrightarrow \underbrace{-x^2}_{\substack{g(x,y)\\ \downarrow\\ 0}} \le \underbrace{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y}}_{f(x,y)} \le \underbrace{x^2}_{\substack{h(x,y)\\ \downarrow\\ 0}}$$

Luego, por el lema del sandwich, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} = 0 .$$

Corolario

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ y

$|g(x,y)| \leq M \;\; \forall (x,y) \in D.$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0 .$$

Dem

$$|f(x,y)\cdot g(x,y)| =$$

$$= |f(x,y)| \cdot |g(x,y)| \leq M \cdot |f(x,y)|$$

$$\Rightarrow \underbrace{-M|f(x,y)|}_{\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0} \leq f(x,y)\cdot g(x,y) \leq \underbrace{M|f(x,y)|}_{\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0}$$

Luego, por el lema del sandwich

$$f(x,y)\cdot g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0 . \quad \square$$

Álgebra de límites

Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(a,b) \in D$ y supongamos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \; ; \; \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$$

Entonces, se tiene

(1) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \pm g(x,y) \right] = L_1 \pm L_2$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \cdot g(x,y) \right] = L_1 \cdot L_2$$

(3) Si $L_2 \neq 0$, $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{L_1}{L_2}$$

Aplicación

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \; ; \; \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b.$$

Luego, usando (1) y (2) concluimos que si $p(x,y)$ es un polinomio en 2 variables, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b).$$

usando, adicionalmente, (3) si $q(x,y)$ es otro polinomio y $q(a,b) \neq 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)} = \frac{p(a,b)}{q(a,b)}.$$

Si ahora $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y p es un polinomio, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varphi(p(x,y)) = \varphi(p(a,b)).$$

Ej $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \log(1+x\cdot y) = \log 3.$

Dem. de (1)

$\left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1\right]$ a $\left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2\right]$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $\delta_1 > 0$ tq $|f(x,y) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta_1$.

Sea $\delta_2 > 0$ tq $|g(x,y) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ si

$$0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta_2$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Entonces, si $0<|(x,y)-(a,b)|<\delta$, tenemos que

$$|f(x,y)+g(x,y)-(L_1+L_2)| =$$

$$= |(f(x,y)-L_1)+(g(x,y)-L_2)|$$

$$\leq |f(x,y)-L_1|+|g(x,y)-L_2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

COROLARIO

Si $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

son continuas en (a,b)

$\Longrightarrow$ (1) $f \pm g$ son cont. en (a,b)

(2) $f \cdot g$ es cont. en (a,b)

(3) si $g(a,b) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es cont. en (a,b).

COROLARIO

Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cont.

y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es cont.

$\Longrightarrow$ $\varphi(f(x,y))$ es cont.

Obs

- Si $p(x,y)$ es un polinomio

$\Longrightarrow$ es continua.

- Si $q(x,y)$ es otro polinomio

$\Longrightarrow$ $\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ es cont. en todos

los puntos (a,b) tq $q(a,b) \neq 0$.