Suarez Ricardo Javier
DNI: 40851203

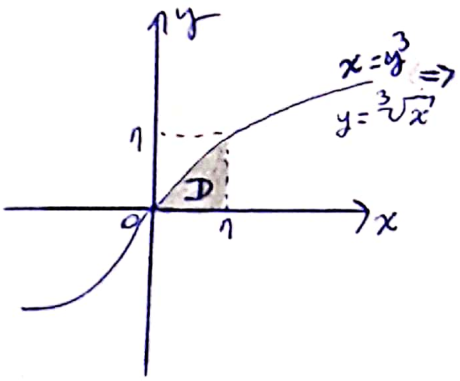
(1)

Segundo parcial - 3/08/2020

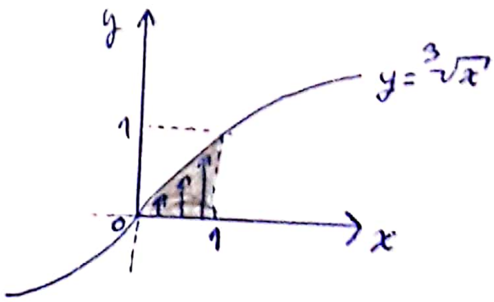
3) Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^3}^1 y^2\cdot\cos(x^2)\,dx\,dy$

Aquí veo que es más conveniente cambiar el orden de integración, para eso voy a graficar la región de integración para observar qué puedo hacer.



Ahora observando esta región D, como una de tipo I me quedaría así



$D: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt[3]{x} = x^{1/3}\}$

$$\therefore \int_0^1\int_{y^3}^1 y^2\cdot\cos(x^2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{x^{1/3}} y^2\cdot\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \cos(x^2)\left[\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=x^{1/3}}\right]dx =$$

$$\int_0^1 \cos(x^2)\cdot\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \cos(x^2)\cdot x\,dx \underset{\text{sustit.}}{=\!=} \frac{1}{3}\int_{t=0}^{t=1}\frac{\cos(t)}{2}\cdot dt = \frac{1}{6}\int_0^1 \cos(t)\,dt = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(t)\Big|_0^1 =$$

$t = x^2$
$dt = 2x\,dx$

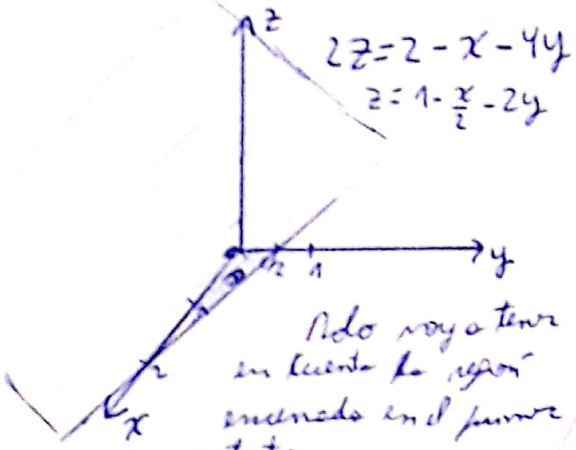
$$= \frac{1}{6}\operatorname{sen}(1) - 0 = \boxed{\frac{\operatorname{sen}(1)}{6}}$$

Escaneado con CamScanner

Muñoz Ricardo Javier

b) $\iiint\limits_E yz\,dv$ donde E es el sólido delimitado por el plano $x+4y+2z=2$ en el primer octante ($x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$).

Dibujo la región E

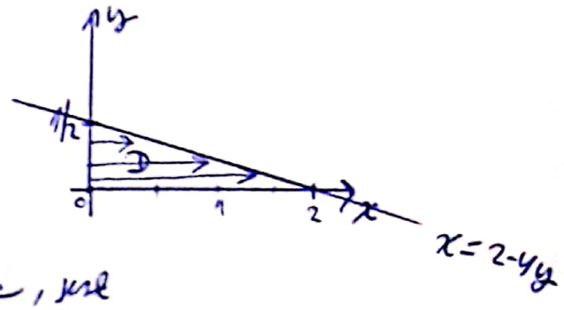


Nada voy a tener en cuenta la región encerrada en el primer octante

. Con el gráfico vemos que claramente el piso es $z=0$ y el techo es el plano $z=1-\frac{x}{2}-2y$ ya que se encuentra por arriba de $z=0$, entonces

$0\leq z\leq 1-\frac{x}{2}-2y$

. Ahora la región D que se encuentra en el plano xy es



. Para hallar la ec. de la recta, use la ec. del plano y evalué $z=0$, quedándome así $0=1-\frac{x}{2}-2y \Rightarrow x=2-4y$ como la ec. de la recta en el plano xy.

. Viendo la región D como una de tipo II me quedaría así

$D: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq y\leq 1/2 \,,\; 0\leq x\leq 2-4y\}$

De esta manera la integral del ejercicio quedaría así:

$$\iiint\limits_E yz\,dv = \int_0^{1/2}\int_0^{2-4y}\int_0^{1-\frac{x}{2}-2y} yz\,dz\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\int_0^{2-4y} y\left[\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-\frac{x}{2}-2y}\right]dx\,dy =$$

$$\int_0^{1/2}\int_0^{2-4y} y\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{2}-2y\right)^2}{2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\int_0^{2-4y} y\cdot\left(1-\frac{x}{2}-2y\right)^2 dx\,dy =$$

Muñoz Ricardo Javier

3

a)

$$\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\int_0^{2-4y} y\cdot\left(1-\frac{x}{2}-2y\right)^2 dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\int_0^{2-4y} y\left(-x+\frac{x^2}{4}+2xy+4y^2-4y+1\right)dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\int_0^{2-4y}\left(-xy+\frac{x^2}{4}y+2xy^2+4y^3-4y^2+y\right)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(\left[\frac{x^2}{2}y+\frac{x^3}{3\cdot 4}\cdot y+2\frac{x^2}{2}y^2+4y^3\cdot x-4y^2\cdot x+y\cdot x\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2-4y}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[-\frac{(2-4y)^2}{2}\cdot y+\frac{(2-4y)^3}{12}\cdot y+(2-4y)^2\cdot y^2+4y^3\cdot(2-4y)-4y^2\cdot(2-4y)+y(2-4y)\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[-\frac{(16y^3-16y^2+4y)}{2}+\frac{(-64y^4+96y^3-48y^2+8y)}{12}+(16y^4-16y^3+4y^2)+\right.$$

$$\left.4\cdot(2y^3-4y^4)-4(2y^2-4y^3)+2y-4y^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\cdots\cdots\Big|^{1/2}\right]=\boxed{\frac{1}{240}}$$

perdón, solo para ganar tiempo, calculé con integral [illegible] aparte

siempre entregá la hoja con las cuentas. Es la justif. de tu resolución!

Muy acordado poner

4) <u>Clave:</u> resolverlo en 2 regiones (es decir a la región encerrada en 2 partes).

~~Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$~~

Primero veamos cuál es div(F), y luego veamos en un gráfico cuál es la región D encerrada por las superficies.

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = (\partial x, \partial y, \partial z) \cdot (F) = \frac{\partial}{\partial x}(-2xyze^{y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zy^3}{3} + zx^2y\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 ye^{y^2})$$

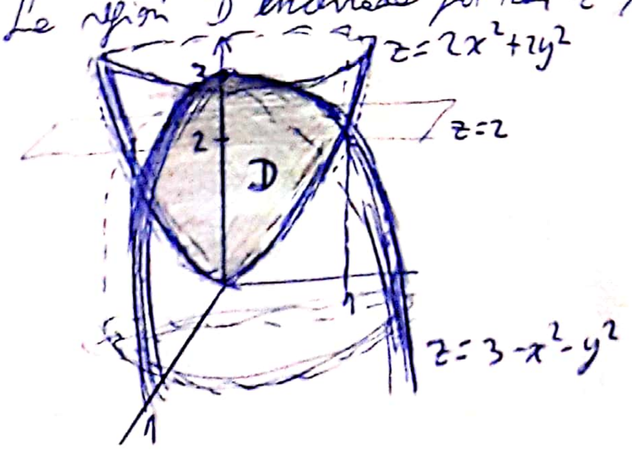
$$\frac{\partial}{\partial x}(-2xyze^{y^2}) = -2yze^{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zy^3}{3} + zx^2y\right) = \frac{z\cancel{3}y^2}{\cancel{3}} + zx^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z^2ye^{y^2}) = 2z \cdot y \cdot e^{y^2}$$

$$\therefore \operatorname{div}(F) = -2yze^{y^2} + zy^2 + zx^2 + 2z \cdot ye^{y^2} = z \cdot (-2ye^{y^2} + y^2 + x^2 + 2ye^{y^2})$$
$$= z \cdot (y^2 + x^2)$$

La región D encerrada por las 2 superficies es



Estas 2 superficies, se intersecan formando una circunferencia de radio $r = 1$, siendo $z = 2x^2 + 2y^2 \wedge z = 3 - x^2 - y^2$

$$2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$$
$$3x^2 + 3y^2 = 3$$
$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{es de una circunferencia}$$
$$r = 1$$

¿En qué punto de z se intersecan?

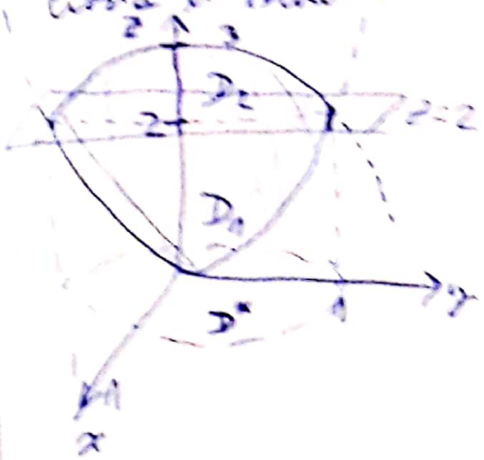
(5)

De intersecan en $z = 2x^2+2y^2 = 2\underbrace{(x^2+y^2)}_{1}$

$\therefore$ en $z=2$

De esta manera, D* la región D puedo dividirla en 2 partes. ~~...~~
una parte que vaya desde el piso de nuestra región D hasta $z=2$, y otra parte que vaya desde $z=2$ hasta el techo de nuestra región D.

No se lee bien.



La región D* que se encuentra en el plano xy ya la habíamos hallado (ahora en vez de "=" ponemos "≤")

y es $x^2+y^2 \leq 1$
$\downarrow r=1$

En cuanto a z veo que

$2x^2+2y^2 \leq z \leq 2$ para la región D_1

Para la región D_2 veo que

$2 \leq z \leq 3-x^2-y^2$ → Podés calcularlo todo junto.

Utilizando coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$, todo lo anterior quedaría así:

$D_1 \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2\cdot(r^2) \leq z \leq 2 \\ 2\cdot(x^2+y^2) \leq z \leq 2 \end{cases}$

$D_2 \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq z \leq 3-\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} \end{cases}$

Escaneado con CamScanner

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{2r^2}^{3-r^2} z \cdot r^2 \cdot r \, dz\, dr\, d\theta$$

Muñoz Ricardo Javier

6

$$\iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{2r^2}^{2} z \cdot r^2 \cdot \overset{\text{jacobiano}}{r} \, dz\, d\theta\, dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_2^{3-r^2} z \cdot r^2 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^3 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{2r^2}^{2} \right) d\theta\, dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_2^{3-r^2} d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cdot \left(2 - 2 \cdot r^4\right) d\theta\, dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \left[\frac{(3-r^2)^2}{2} - 2 \right] d\theta\, dr =$$

¿Cómo termina la cuenta?

Escaneado con CamScanner