Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 9: Integración

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

Integrales en una variable (repaso)

1. Calcular:

(a) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,\ln^2 x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \ln x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\,dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ +\ 4x\ +\ 9}$.

Integrales impropias

2. Graficar cada una de las siguientes funciones del integrando en el intervalo indicado. Luego analizar la convergencia de las integrales impropias e interpretar.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1\ +\ x^2}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\lambda^2\ +\ x^2}$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1\ -\ x^2}}$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\ +\ 4x\ +\ 9}$, (con $\lambda \neq 0$).

3. Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

i. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ ii. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

4. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^3}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+cos^2(e^x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

Integración en $\mathbb{R}^2$

5. Usar una suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R xe^{-xy}\, dA$, donde $R = [0,2] \times [0,1]$. Tomar los puntos de muestra como las esquinas superiores derechas.

6. Calcular las siguientes integrales identificandolas primero como el volumen de un sólido.

   (a) $\displaystyle\iint_R 3\, dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 6\}$,

   (b) $\displaystyle\iint_R (5-x)\, dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3\}$.

7. Calcular las siguientes integrales.

   (a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_0^2 (6x^2 y - 2x)\, dy \right) dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^2 y^3 e^{2x}\, dx \right) dy,$

   (c) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\int_{-1}^5 \cos(y)\, dx \right) dy,$ (d) $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_1^5 \frac{\ln(y)}{xy}\, dy \right) dx.$

8. Calcular las siguientes integrales.

   (a) $\displaystyle\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\, dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1,\ -3 \leq y \leq 3\}$,

   (b) $\displaystyle\iint_R \frac{x}{1+xy}\, dA$, donde $R = [0,1] \times [0,1]$.

9. Calcular el volumen del sólido dado en cada uno de los siguientes casos.

   (a) Bajo del paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ y arriba del rectángulo $R = [-1,1] \times [1,2]$.

   (b) Acotado por $z = 16 - x^2$ y el plano $y = 5$ en el primer octante.

10. Dibujar el dominio de integración las siguientes integrales y calcularlas.

    (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2\, dx\, dy,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x (1+2y)\, dy\, dx.$

11. Calcular las siguientes integrales.

    (a) $\displaystyle\iint_D y^2\, dA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq y \leq 1,\ -y-2 \leq x \leq y\}$,

    (b) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^5+1}\, dA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$.

12. Expresar D como región de tipo I y también como región de tipo II. Luego, calcular de las dos maneras la integral.

    (a) $\displaystyle\iint_D x\,dA$, donde D está encerrada por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$,

    (b) $\displaystyle\iint_D xy\,dA$, donde D está encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = 3x$.

13. Calcular las siguientes integrales.

    (a) $\displaystyle\iint_D x\cos(y)\,dA$, donde D está acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$,

    (b) $\displaystyle\iint_D y^2\,dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0,1)$, $(1,2)$ y $(4,1)$,

    (c) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dA$, donde D está encerrada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1-y^2}$.

14. Calcular el volumen del sólido dado en cada uno de los siguientes casos.

    (a) Bajo la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y arriba de la región en el plano xy acotada $x = y^2$ y $x = 4$.

    (b) Acotado por los planos coordenados y el plano $3x + 2y + z = 6$.

    (c) Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante.

15. Calcular las siguientes integrales invirtiendo el orden de integración.

$$\text{(a)} \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx.$$

Aplicaciones

16. Supongamos que tenemos una lámina que ocupa una región D del plano xy y su densidad (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x, y)$, donde ρ es una función continua en D, entonces, la masa de dicha lámina m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA.$$

    Los físicos consideran también otros tipos de densidad que se pueden tratar de la misma manera. Por ejemplo, si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\sigma(x, y)$, entonces, la carga total Q está dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\,dA.$$

Una carga eléctrica está distribuida sobre el rectángula $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$ de manera que la densidad de carga en un punto (x, y) está dada por $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Calcular la carga total en el rectángulo.

17. El momento de una partícula respecto a un eje se define como el producto de su masa y su distancia respecto a dicho eje. Supongamos que tenemos una lámina que ocupa una región D del plano xy y su densidad en un punto (x, y) está dada por $\rho(x, y)$. Luego, el **momento** de toda la lámina **respecto al eje x** está dado por

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)\, dA.$$

De manera similar, el **momento respecto al eje y** está dado por

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y)\, dA.$$

Finalmente, el **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ (es decir, el punto en el cual la lámina de equilibra horizontalmente) está dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde m es la masa de la lámina.

Sea D la región acotada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$. Calcular la masa y el centro de masa de una lámina que ocupa la región D cuya densidad en un punto (x, y) esta dada por $\rho(x, y) = y$.

18. El momento de inercia (o segundo momento) de una partícula respecto a un eje se define como el producto de su masa y su distancia respecto a dicho eje al cuadrado. Supongamos que tenemos una lámina que ocupa una región D del plano xy y su densidad en un punto (x, y) está dada por $\rho(x, y)$. Luego, el **momento de inercia** de toda la lámina **respecto al eje x** está dado por

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)\, dA.$$

De manera similar, el **momento de inercia respecto al eje y** está dado por

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)\, dA.$$

También es de interés calcular el **momento de inercia respecto al origen**:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA.$$

Calcular los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio anterior.

19. Supongamos que se considera el nivel de colesterol de una persona elegida al azar de un cierto grupo de edad, o la estatura de una persona elegida al azar, o la duración de una batería de cierto tipo elegida en forma aleatoria. Tales cantidades se llaman **variables aleatorias continuas**, porque sus valores varían en realidad en un intervalo de números reales. Puede ser de interés conocer la probabilidad de que el nivel de colesterol sea mayor que 250, o la probabilidad de que la altura de una persona esté entre 60 y 70 pulgadas, o la probabilidad de que la duración de la batería sea de entre 100 y 200 horas. Si X representa la duración de la batería, dicha probabilidad se denota como $P(100 \leq X \leq 200)$.

    Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad** $f(x)$ que verifica que
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
    La función de densidad $f(x)$ cumple que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

    Consideremos ahora un par de variables aleatorias continuas X e Y. La **función de densidad conjunta** de X e Y es una función $f(x, y)$ de dos variables que verifica que la probabilidad de que (X, Y) esté en una región D es
$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\,dA.$$
    La función de densidad $f(x, y)$ cumple que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dA = 1$.

    Sean X e Y dos variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es
$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

    a) Encontrar el valor de la constante C.

    b) Calcular $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$.

Integración en $\mathbb{R}^3$

20. Calcular la siguiente integral
$$\iiint_E (xy + z^2)\,dV$$
    donde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$.

21. Calcular las siguientes integrales.
$$\text{(a)} \int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{(b)} \int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln(x)} xe^{-y}\,dy\,dx\,dz.$$

22. Calcular las siguientes integrales

    (a) $\displaystyle\iiint_E y\,dV$,
    donde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x,\ x - y \le z \le x + y\}$,

    (b) $\displaystyle\iiint_E e^{z/y}\,dV$, donde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1,\ 0 \le z \le xy\}$,

    (c) $\displaystyle\iiint_E xy\,dV$, donde E está acotada por los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = x + y$,

    (d) $\displaystyle\iiint_E x\ dV$, donde E está acotado por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$.

23. Calcular el volumen del sólido encerrado por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $y = -1$ y $y + z = 4$ usando una integral triple.

24. Considerar la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx.$$

    (a) Graficar la región de integración.

    (b) Reescribir la integral en los otros cinco ordenes posibles.