PRACTICA $\boxed{5}$ Hoja 1

Ej ① iii) Nos pide el ejercio que escribamos al polinomio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x-2$.
Recordemos que, dada una función $f(x)$, su polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 2$ será:

$$T(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(2)}{m!}(x-2)^m$$

que es un polinomio desarrollado en potencias de $x-2$. Además, es el polinomio de orden "m" que mejor aproxima a la función $f(x)$.
Si consideramos al polinomio dado en el ejercicio como una función $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ y le calculamos su polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x_0 = 2$ obtendríamos un polinomio (del grado de $f(x)$) que mejor aproxima a $f(x)$... ¡No puede ser otro que el mismísimo polinomio $f(x)$! Entonces estaríamos escribiendo a $f(x)$ en potencias de $x-2$.

O sea: $$f(x) = T(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{IV}(2)}{4!}(x-2)^4$$

Con $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$, entonces $f(2) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 10x + 1$, " $f'(2) = -7$

$f''(x) = 12x^2 - 30x + 10$, " $f''(2) = -2$

$f'''(x) = 24x - 30$, " $f'''(2) = 18$

$f^{IV}(x) = 24$, " $f^{IV}(2) = 24$

Luego $T(x) = -7(x-2) - \frac{2}{2}(x-2)^2 + \frac{18}{6}(x-2)^3 + \frac{24}{24}(x-2)^4$

O sea: $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2 = (x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$

Ej ③ e) $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$, $P=(1,0)$

El polinomio de Taylor de $f(x)$ (de orden 2) centrado en P es:

$$T(x,y) = f(P) + f_x(P)(x-x_0) + f_y(P)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(P)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(P)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(P)(y-y_0)^2 \right] \quad , \text{con } (x_0,y_0) = (1,0)$$

y la expresión del resto es:

$$R(x,y) = \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(c)(x-x_0)^3 + 3 f_{xxy}(c)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3 f_{xyy}(c)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(c)(y-y_0)^3 \right]$$

Con $c=(c_1,c_2)$ un punto en el segmento que une (x,y) con $P=(1,0)$ con lo cual: c_1 está entre "x" y 1 ; c_2 está entre "y" y cero

Como $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$, entonces $f(P)=1$

$f_x(x,y) = e^{(x-1)^2}\, 2(x-1)\cos(y)$, $f_x(P)=0$

$f_y(x,y) = -e^{(x-1)^2}\operatorname{sen}(y)$; $f_y(P)=0$

$f_{xx}(x,y) = \cos(y)\left[e^{(x-1)^2}\, 4(x-1)^2 + e^{(x-1)^2}\, 2 \right]$

entonces $f_{xx}(P) = 2$

$f_{xy}(x,y) = -2(x-1)\, e^{(x-1)^2}\operatorname{sen}(y)$, $f_{xy}(P)=0$

$f_{yy}(x,y) = -e^{(x-1)^2}\cos(y)$, $f_{yy}(P) = -1.$

$$f_{xxx}(x,y) = \cos(y)\left[e^{(x-1)^2}\, 2(x-1)\, 4(x-1)^2 + e^{(x-1)^2}\, 8(x-1) + 2e^{(x-1)^2}\, 2(x-1) \right]$$

Luego $f_{xxx}(x,y) = \cos(y)\left[e^{(x-1)^2}\, 8(x-1)^3 + 12 e^{(x-1)^2}(x-1) \right]$

$$f_{xxy}(x,y) = -\operatorname{sen}(y)\left[e^{(x-1)^2} 4(x-1)^2 + 2e^{(x-1)^2}\right]$$

$$f_{yyx}(x,y) = -e^{(x-1)^2} 2(x-1)\cos(y)$$

$$f_{yyy}(x,y) = e^{(x-1)^2}\operatorname{sen}(y)$$

Luego el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ centrado en $P=(1,0)$ es:

$$T(x,y) = \overbrace{1}^{f(P)} + \frac{1}{2}\left[\overbrace{2}^{f_{xx}(P)}(x-1)^2 + 2.\overbrace{0}^{f_{xy}(P)}(x-1)y \overbrace{-1}^{f_{yy}(P)} y^2\right]$$

$$T(x,y) = 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la expresión del resto es:

$$R(x,y) = \frac{1}{6}\underbrace{\cos(c_2)\left[e^{(c_1-1)^2} 8(c_1-1)^3 + 12e^{(c_1-1)^2}(c_1-1)\right]}_{f_{xxx}(c)}(x-1)^3 +$$

$$-\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(c_2)\left[e^{(c_1-1)^2}4(c_1-1)^2 + 2e^{(c_1-1)^2}\right]}_{\frac{1}{3!}3\, f_{xxy}(c)}(x-1)^2 y +$$

$$-\underbrace{\frac{1}{\cancel{2}} e^{(c_1-1)^2}\cancel{2}(c_1-1)\cos(c_2)}_{\frac{1}{3!}3\cdot f_{yyx}(c)}(x-1)y^2 +$$

$$+\frac{1}{6}e^{(c_1-1)^2}\operatorname{sen}(c_2)\, y^3$$

con c_1 entre 1 y "x", c_2 entre 0 e "y"

Ej ④ b) Queremos aproximar $(0{,}95)^{2{,}01} = f(0{,}95 ; 2{,}01)$ usando el polinomio de Taylor de $f(x,y) = x^y$

Como el punto en el que deseamos evaluar f es $(x,y) = (0{,}95 ; 2{,}01)$ y está cerca de $P = (1,2)$ vamos a usar el punto $P = (1,2)$ para centrar nuestro polinomio. $T(x,y)$

Así valdrá: $f(x,y) \simeq T(x,y)$ para puntos (x,y) cercanos al $(1,2)$

con lo cual podremos aproximar

$$(0{,}95)^{2{,}01} \simeq T(0{,}95 ; 2{,}01)$$

Calculemos el polinomio:

$$T(x,y) = f(P) + f_x(P)(x-1) + f_y(P)(y-2) + \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(P)(x-1)^2 + 2 f_{xy}(P)(x-1)(y-2) + f_{yy}(P)(y-2)^2\Big]$$

Con $f(x,y) = x^y$, entonces $f(P) = f(1,2) = 1$

$f_x(x,y) = y\, x^{y-1}$; $f_x(P) = 2$

$f_y(x,y) = x^y \ln(x)$ (Recordar que la derivada de a^t respecto de la variable "t" es $a^t \ln(a)$)

$$f_y(P) = 0$$

$f_{xx}(x,y) = y(y-1)\, x^{y-2}$, $f_{xx}(P) = 2$

$f_{xy}(x,y) = x^{y-1} + y\, x^{y-1} \ln x$; $f_{xy}(P) = 1$

$f_{yy}(x,y) = x^y (\ln x)^2$; $f_{yy}(P) = 0$

Luego $T(x,y) = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}\Big[2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + 0\Big]$

$$T(x,y) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2)$$

Por lo tanto:

$$(0{,}95)^{2{,}01} = f(0{,}95\,;\,2{,}01) \simeq T(0{,}95\,;\,2{,}01) = 0{,}902$$

ya tenemos aproximado el valor $(0{,}95)^{2{,}01}$, nos falta verificar que el error cometido en esta aproximación es menor a $1/5000 = 0{,}0002$

Para eso debemos calcular (y acotar) el error cometido usando la expresión del Resto (en $(x,y) = (0{,}95\,;\,2{,}01)$)

$$R(0{,}95\,;\,2{,}01) = \frac{1}{3!}\Big[f_{xxx}(c)\,(0{,}95-1)^3 + 3\,f_{xxy}(c)\,(0{,}95-1)^2(2{,}01-2)$$

$$+\,3\,f_{yyx}(c)\,(0{,}95-1)(2{,}01-2)^2 + f_{yyy}(c)\,(2{,}01-2)^3\Big]$$

con $c = (c_1, c_2)$ en el segmento que une a los puntos $(1,2)$ y $(0{,}95\,;\,2{,}01)$

Calculemos las derivadas de tercer orden de f:

$$f_{xxx}(x,y) = y\,(y-1)\,(y-2)\,x^{y-3}$$

$$f_{xxy}(x,y) = (2y-1)\,x^{y-2} + (y^2-y)\,\ln(x)\,x^{y-2}$$

$$\hookrightarrow f_{xx}(x,y) = (y^2-y)\,x^{y-2}$$

$$f_{xyy}(x,y) = y\,x^{y-1}(\ln x)^2 + x^y\,2\ln x\,\frac{1}{x}$$

$$f_{xyy}(x,y) = y\,x^{y-1}(\ln x)^2 + 2\,x^{y-1}\ln x$$

$$f_{yyy}(x,y) = x^y\,(\ln x)^3$$

Con lo cual, teniendo en cuenta que estas derivadas parciales están evaluadas en $c = (c_1, c_2)$ y usando

PRACTICA $\boxed{5}$ Hoja 6

que $c_1 \in (0{,}95, 1)$ y que $c_2 \in (2; 2{,}01)$ vamos a poder acotar y estimar el error cometido en la aproximación, pues:

$$|f_{xxx}(c)| = |c_2|\,|c_2-1|\,|c_2-2|\,|c_1^{c_2-3}|$$

con $c_2 \in (2, 2{,}01)$ entonces $|c_2| = c_2 < 2{,}01$

$|c_2 - 1| = c_2 - 1 < 2{,}01 - 1 = 1{,}01$

pues $c_2 > 2$

$|c_2 - 2| = c_2 - 2 < 2{,}01 - 2 = 0{,}01$

además: $2 < c_2 < 2{,}01$, entonces $-1 < c_2 - 3 < -0{,}99$

Como: $0{,}95 < c_1 < 1$, entonces ($h(t) = c_1^t$ es decreciente):

$$c_1^{-0{,}99} < c_1^{c_2-3} < c_1^{-1} = \frac{1}{c_1} < \frac{1}{0{,}95}$$ pues $c_1 > 0{,}95$

Luego: $|c_1^{c_2-3}| = c_1^{c_2-3} < \frac{1}{0{,}95}$

c_1 es positivo, no hace falta módulo

Por lo tanto: $|f_{xxx}(c)| < 2{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{1}{0{,}95} = \frac{0{,}020301}{0{,}95}$

Además $|f_{xxy}(c)| \leq |2c_2 - 1|\, c_1^{c_2-2} + |c_2|\,|c_2-1|\,|\ln c_1|\, c_1^{c_2-2}$

desigualdad triangular

con $c_2 \in (2; 2{,}01)$ Luego $|c_2| = c_2 < 2{,}01$

$1 < c_2 - 1 < 1{,}01$, entonces $|c_2 - 1| = c_2 - 1 < 1{,}01$

$3 < 2c_2 - 1 < 3{,}02$, " $|2c_2 - 1| = 2c_2 - 1 < 3{,}02$

Además: $c_1 \in (0{,}95, 1)$, entonces $(\ln c_1 < 0)$

$$|\ln c_1| = -\ln(c_1) = \ln\left(\frac{1}{c_1}\right) < \ln\left(\frac{1}{0{,}95}\right) < \ln e = 1$$

la función logaritmo natural es creciente, $\frac{1}{c_1} < \frac{1}{0{,}95}$

Como $c_1 < 1$ y $0 < c_2 - 2 < 0{,}1$, vale que:

$$c_1^{0,1} < c_1^{c_2-2} < c_1^{0} = 1$$

Luego: $|f_{xxy}(c)| \leq 3{,}02 + 2{,}01 \cdot 1{,}01 = 5{,}0501$

Además:

$$|f_{yyx}(c)| \leq \underbrace{|c_2|}_{\leq 2{,}01} c_1^{c_2-1} \underbrace{(\ln c_1)^2}_{\leq 1^2 = 1} + c_1^{c_2-1} 2 \underbrace{|\ln c_1|}_{\leq 1}$$

Con $c_1 < 1$ y $1 < c_2 - 1 < 1{,}01$, entonces

$$c_1^{1,01} < c_1^{c_2-1} < c_1^{1} < 1$$

Luego: $|f_{yyx}(c)| \leq 2{,}01 + 2 = 4{,}01$

Por último: $|f_{yyy}(c)| = \underbrace{c_1^{c_2}}_{< c_1^2 < 1^2} \underbrace{(\ln c_1)^3}_{\leq 1} < 1$

Por lo que el error cometido al aproximar $(0{,}95)^{2,01}$ usando el polinomio de Taylor de $f(x,y) = x^y$ es:

$$|E| \leq \frac{1}{3!} \Big[|f_{xxx}(c)|\, |0{,}95-1|^3 + 3\, |f_{xxy}(c)|\, |0{,}95-1|^2\, |2{,}01-2| +$$

Desigualdad Triangular

$$+ 3\, |f_{yyx}(c)|\, |0{,}95-1|\, |2{,}01-2|^2 + |f_{yyy}(c)|\, |2{,}01-2|^3 \Big]$$

$$< \frac{1}{6} \Big[\frac{0{,}020301}{0{,}95} \cdot 1{,}25\ 10^{-4} + 3 \cdot 5{,}0501 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} +$$

$$+ 3 \cdot 4{,}01 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-4} + 10^{-6} \Big]$$

$$|E| < \frac{10^{-4}}{6} \Big[\underbrace{\frac{0{,}020301}{0{,}95} \cdot 1{,}25 + 0{,}3\ 5{,}0501\ 2{,}5 + 3 \cdot 4{,}01 \cdot 0{,}05 + 0{,}01}_{< 12} \Big]$$

Luego, el error cometido es menor a:

$$\frac{10^{-4}}{6} \cdot 12 = 2 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{5000}$$

Ej 8) Como $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x+1; 2y - e^x)$ es diferenciable (mas aún: sus derivadas parciales de cualquier orden son continuas) y también lo es $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; resulta ser $h(x,y) = g \circ f(x,y)$ diferenciable.

El polinomio de Taylor de $h(x,y)$ centrado en $(0,0)$ es:

$$p(x,y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy$$

Como las derivadas de hasta orden 2 de h evaluadas en $(0,0)$ coinciden con las de $p(x,y)$ (evaluadas en $(0,0)$)

Tenemos que:

$$h_x(0,0) = p_x(0,0) = 3 - 2x + 5y \Big|_{(0,0)} = 3$$

$$h_y(0,0) = p_y(0,0) = -2 + 5x \Big|_{(0,0)} = -2$$

Por otro lado, h es una función compuesta por lo cual para calcular sus derivadas parciales debemos usar Regla de la Cadena.

$$\begin{tikzcd} \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Luego vale que:

$$h = g \circ f = g(\underbrace{x+1}_{u}; \underbrace{2y - e^x}_{v})$$

$$3 = h_x(0,0) = g_u(f(0,0)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + g_v(f(0,0)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

$$-2 = h_y(0,0) = g_u(f(0,0)) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) + g_v(f(0,0)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$$

Donde $f(0,0) = (1,-1)$

Es decir, que:

$$\begin{cases} 3 = g_u(1,-1) + g_v(1,-1) \cdot (-e^x)\big|_{(0,0)} \\ -2 = g_u(1,-1) \cdot 0 + g_v(1,-1) \cdot 2 \end{cases}$$

Nos queda un sistema lineal de dos ecuaciones del cual podemos despejar $g_u(1,-1)$ y $g_v(1,-1)$

Pues: $\begin{cases} 3 = g_u(1,-1) - g_v(1,-1) \\ -2 = 2\, g_v(1,-1) \end{cases}$

Entonces $g_v(1,-1) = -1$ y (reemplazando en la primer ecuación) sale que: $g_u(1,-1) = 2$

Con lo cual $\nabla g(1,-1) = (g_u(1,-1), g_v(1,-1))$

$$\nabla g(1,-1) = (2,-1)$$

Ej 9 a) Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$ centrado en $(0,0)$ necesitamos hallar sus derivadas parciales de orden uno y dos

$f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$, entonces $f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = e^{xy}\, y\cos(x+y) - e^{xy}\operatorname{sen}(x+y)$; $f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = e^{xy}\, x\cos(x+y) - e^{xy}\operatorname{sen}(x+y)$; $f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = e^{xy}\, y^2\cos(x+y) - e^{xy}\, y\operatorname{sen}(x+y) -$
$- e^{xy}\, y\operatorname{sen}(x+y) - e^{xy}\cos(x+y)$

$$f_{xx}(0,0) = -1$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{xy} y\right] \cos(x+y) - e^{xy} y \operatorname{sen}(x+y) -$$

$$- e^{xy} x \operatorname{sen}(x+y) - e^{xy} \cos(x+y)$$

$$f_{xy}(x,y) = \left[e^{xy} xy + e^{xy}\right] \cos(x+y) - e^{xy} y \operatorname{sen}(x+y) -$$

$$- e^{xy} x \operatorname{sen}(x+y) - e^{xy} \cos(x+y)$$

$$f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{xy} x^2 \cos(x+y) - e^{xy} x \operatorname{sen}(x+y) -$$

$$- e^{xy} x \operatorname{sen}(x+y) - e^{xy} \cos(x+y)$$

$$f_{yy}(0,0) = -1$$

Luego, el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ centrado en $(0,0)$ es:

$$T(x,y) = 1 + 0.x + 0.y + \frac{1}{2}\left[-1\, x^2 - 0.xy - 1.y^2\right]$$

$$T(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Ej 9 ii) Recordemos que: Si $T(x,y)$ es el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ y $R(x,y)$ es el resto, entonces vale que:

$$f(x,y) = T(x,y) + R(x,y)$$, y además:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0.$$

Con lo cual obtenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{T(x,y) + R(x,y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{1} - 1/2\,(x^2+y^2) + x^2+y^2 \cancel{- 1} + R(x,y)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1/2\,(x^2+y^2) + R(x,y)}{x^2+y^2} =$$

$x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/2 + \underbrace{\frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2}}_{\to 0} = 1/2$$