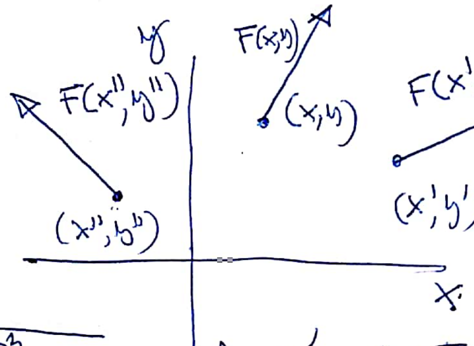
Campos Vectoriales

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una función $F = F(x,y)$

$$\underset{\uparrow \text{ dominio}}{F : D \subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2 \; ; \quad F(x,y) = \big(P(x,y),\, Q(x,y)\big)$$
$$= i\,P(x,y) + j\,Q(x,y).$$

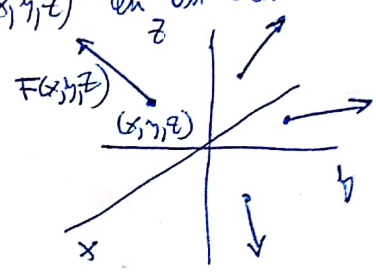
$P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

Gráfico de campos:

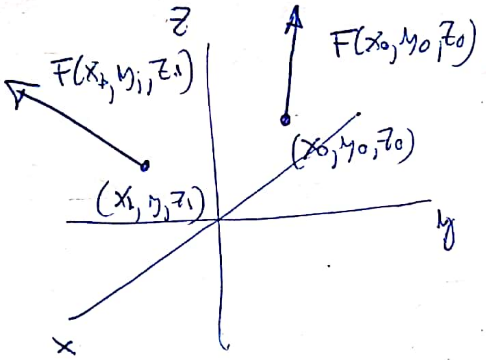


Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, es una función $F = F(x,y,z)$ en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, con valores en $\mathbb{R}^3$: $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\big).$$

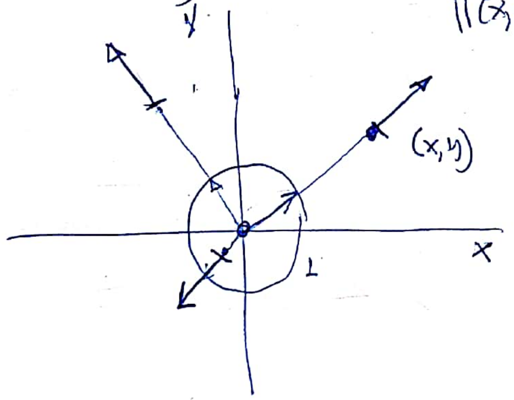


en $\mathbb{R}^3$

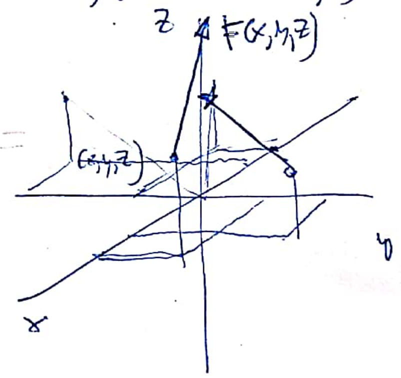


Ejemplos: de gráficas de campos:

1) $F(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



2) $F(x,y,z) = (-x,-y,z)$

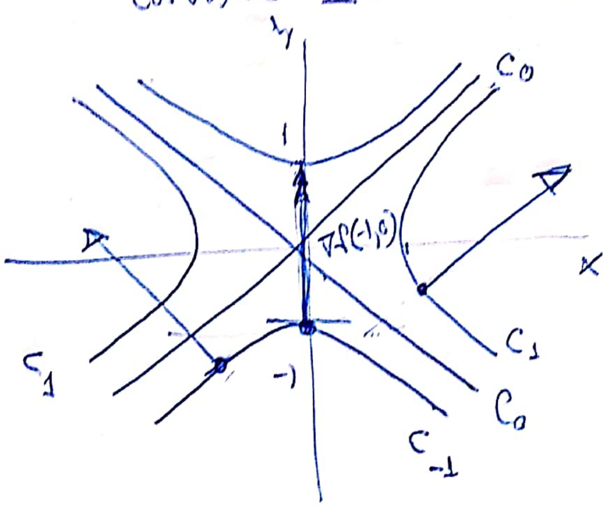


Un modo de obtener campos:

$f = f(x,y)$, con derivadas parciales en D, podemos definir el campo gradiente de f: $\nabla f = (f_x, f_y)$, definido en D.

Ejemplo: $f(x,y) = x^2 - y^2$; $\nabla f = (2x, -2y)$

curvas de nivel $x^2 - y^2 = k$



en cada punto

- $\nabla f \perp$ curva de nivel
- ∇f apunta hacia donde f crece más

Definición: un campo vectorial F es **conservativo** si existe una función f (con el mismo dominio) /

$$F = \nabla f$$ (en esta situación: f se llama un **potencial** de F).

Ejemplo: Ley de gravitación de Newton.

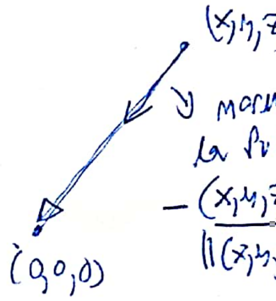
la magnitud (módulo) de la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas m, M:

$$|F| = \frac{m \cdot M \cdot G}{r^2}$$; r = distancia entre los dos cuerpos

uno de los objetos, la tierra, con masa M, ubicada en $(0,0,0)$

el otro objeto: un punto (x,y,z)

$$|F(x,y,z)| = m \cdot M \cdot G \cdot \frac{1}{\|(x,y,z)\|^2}.$$



normalizamos la fuerza $-\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$

$$F(x,y,z) = m \cdot M \cdot G \cdot \frac{1}{\|(x,y,z)\|^2} \cdot \left(- \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right)$$

$$= -m \cdot M \cdot G \, \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3} = -cte \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

se le puede encontrar un potencial

$F = \nabla f$: $f(x,y,z) = m \cdot M \cdot G \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. (Ejercicio)

No todo campo vectorial es conservativo.

Teorema ① $F = (P, Q)$, P, Q son C^1. Si F es conservativo

$\Rightarrow$ $Q_x = P_y$

Ejemplo: 1) $F(x,y) = (y, -x)$; $P(x,y) = y$; $Q(x,y) = -x$

¿F es conservativo? $Q_x = (-x)_x = -1$ vs $P_y = (y)_y = 1$ $\Rightarrow$ NO.

Otro ejemplo: $F(x,y) = (2x, -2y)$; $P = 2x$; $Q = -2y$

$Q_x = (-2y)_x = 0$ vs $P_y = (2x)_y = 0$ para la prueba.

$(2x, -2y) = \nabla f$; $f(x,y) = x^2 - y^2$: F es conservativo.

Teorema: 2 $F = (P, Q)$ definido en $\mathbb{R}^2$ (también vale en un Disco)

si P, Q son C^1 y cumplen que $Q_x = P_y \Longrightarrow$ F es conservativo.

demostración del Teorema 1 (F conservativo, P, Q $C^1 \Rightarrow Q_x = P_y$)

$F = \nabla f \rightarrow \begin{cases} f_x = P \leftarrow \text{es } C^1 \rightarrow P_x, P_y \text{ son cont.} \\ f_y = Q \leftarrow \text{es } C^1 \rightarrow Q_x, Q_y \text{ son cont} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{ll} P_x = (f_x)_x & \text{continua} \\ P_y = (f_x)_y & \text{"} \\ Q_x = (f_y)_x & \text{"} \\ Q_y = (f_y)_y & \# \end{array}\right\}$ f es C^2

Teorema (Clairault): $\underbrace{f_{xy}}_{P_y} = \overbrace{f_{yx}}^{Q_x}$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Consideremos $F(x,y) = (\cos y, -x \operatorname{sen} y)$

decidir si F es conservativo, y en caso que sí, calcular un potencial:

$P = \cos y$ test $Q_x = -\operatorname{sen} y$

$Q = -x \operatorname{sen} y$ P, Q son C^1 vs   coinciden

$P_y = -\operatorname{sen} y$

Dominio $= \mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ es conservativo.

Buscamos un potencial f: $f \Big/ \begin{cases} f_x = \cos y \\ f_y = -x \operatorname{sen} y \end{cases}$

tomamos la primera: $f_x = \underbrace{\cos y}_{\substack{\text{cte} \\ (y = \text{cte})}} \Rightarrow \boxed{f = x \cdot \cos y + \underbrace{c(y)}_{\text{constante!}}}$

vemos si el candidato obtenido, cumple la segunda ecuación

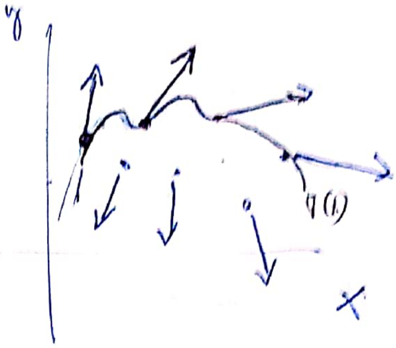
$-x \operatorname{sen} y = f_y = x \cdot (-\operatorname{sen} y) + c'(y)$; $\cancel{-x \operatorname{sen} y} = \cancel{-x \operatorname{sen} y} + c'(y)$

$0 = c'(y)$

$C(y) = cte$ (incluso, $cte = 0$)

$f(x,y) = x\cos y + cte.$

Líneas de Flujo



dado un campo vectorial $F = F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ una curva $\bar r(t)$, $t \in \mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^2$: $\bar r(t) = (x(t), y(t))$ se llama línea de flujo del campo F, si F es el campo de velocidades de $\bar r(t)$:

$$\boxed{\bar r'(t) = F(\bar r(t)).}$$

Ejemplo: $F(x,y) = (-x,-y)$

hallar líneas de flujo de F. $\sigma(t) = (x(t), y(t))$

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

$$(x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t)) = (-x(t), -y(t))$$

buscamos $x(t), y(t)$ /

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \rightarrow x(t) = c \cdot e^{-t} \\ y'(t) = -y(t) \rightarrow y(t) = d\, e^{-t} \end{cases}$$

$$\sigma(t) = (c e^{-t}, d e^{-t}).$$

Ejemplo nos dan una curva $\sigma(t)$, nos piden encontrar un campo $F(x,y)$ / $\sigma(t)$ sea línea de flujo de F.

$\sigma(t) = (t, t^2)$; $\sigma'(t) = (1, 2t)$; buscamos $F(x,y)$ /

10

$F(r(t)) = r'(t) \quad (P(\underbrace{t}_{x},\underbrace{t^2}_{y}), Q(\underbrace{t}_{x},\underbrace{t^2}_{y})) = (1, 2t)$

$2t \to 2x$

$x = t, \; y = t^2$

$\cancel{x}$ $F(x,y) = (1, 2x)$