Ej $f(x,y) = \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4}$

¿existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} = \frac{0}{y^4} = 0$$

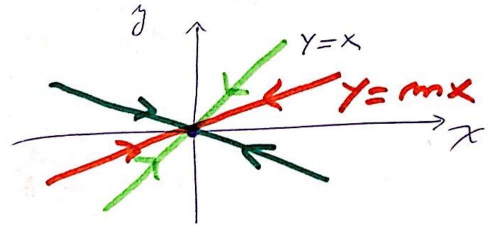
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

Si el límite existe, el mismo debe ser igual a 0.

Probemos acercarnos por algunas direcciones



$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x^2}{x^2+x^4} =$$

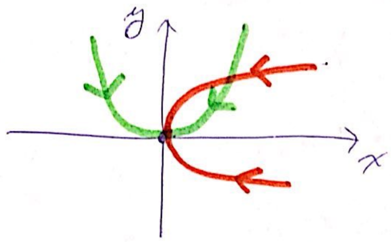
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1+x^2)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(mx)^2}{x^2+(mx)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m^2\cdot x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)} = 0.$$

Probemos ahora por una parábola

$$Y = X^2$$
$$X = Y^2$$



$$\lim_{Y\to 0} f(Y^2, Y) =$$

$$= \lim_{Y\to 0} \frac{Y^2 \cdot Y^2}{(Y^2)^2 + Y^4} = \lim_{Y\to 0} \frac{Y^4}{Y^4+Y^4}$$

$$= \lim_{Y\to 0} \frac{\cancel{Y^4}}{2\cancel{Y^4}} = \frac{1}{2}$$

Luego, el límite no existe.

Ej Calcular, si existe,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2+y^2}.$$

Lema $\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1.$

$$\frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2y}}_{\downarrow (x,y)\to(0,0) \atop 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}}_{\downarrow (x,y)\to(0,0) \atop 0 \ (\text{Teo } 8)}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Lema Sea $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = L$. Sea ahora $f(x,y)$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = t_0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varphi(f(x,y)) = L$$

Ej. Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^{xy}-1}{x\cdot y}$

Sea $\varphi(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$ y $f(x,y) = x\cdot y$

1º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x\cdot y = 0.$

2º) $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} \underset{\frac{0}{0},\ \text{L'Hospital}}{=}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t}{1} = 1.$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} = 1.$

Continuidad

Def Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b) \in D$. Decimos que f es continua en (a,b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Decimos que f es cont. en D si es continua en todos los puntos de su dominio D.

Ej - Toda función polinómica es continua
- Todo cociente de polinomios es continuo en los puntos donde el denominador no se anule.

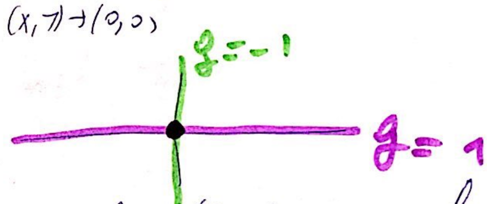
- $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿es cont.?

g resulta cont. en $(x,y) \neq (0,0)$

g es cont. en $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0.$$



pero ese límite vimos en la Teórica 8 que no existe.

Luego, g no es cont. en $(0,0)$

Ej $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$

¿Puede definirse en $(0,0)$ de forma tal que resulte continua?

Para eso, debemos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad (*)$$

Si ese límite existe y da como resultado $L \Rightarrow$ defino $f(0,0)=L$.

Pero $(*)$ lo calculamos en la Teórica 8

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

$\Rightarrow$ Defino $f(0,0)=0$ y así resulta continua.