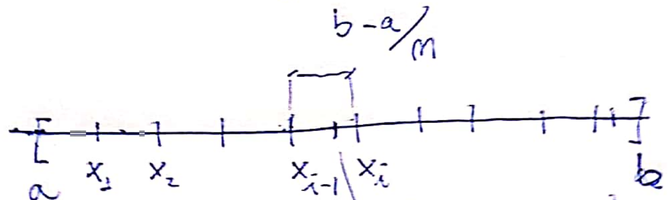
Integración $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

En $\mathbb{R}$: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (continua)

Queremos definir $\int_a^b f(x)\,dx$.



m natural

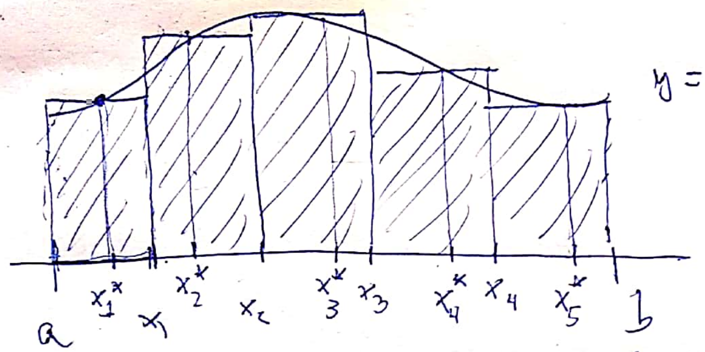
elegimos un punto representativo x_i^*

partición (subintervalos, puntos representativos)

Formamos la suma de Riemann de la partición

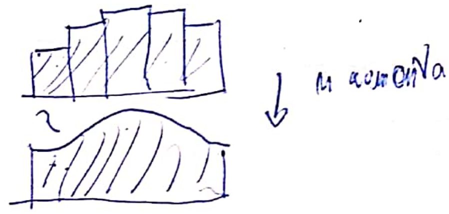
$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i^*) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{m}}_{\Delta x} = f(x_1^*)\cdot\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_m^*)\cdot\Delta x$$

Qué representa esta suma de Riemann: supongamos primero que $f > 0$.



Suma de Riemann = área de la figura sombreada

Idea: aumentar n $\longrightarrow$ se va pareciendo a



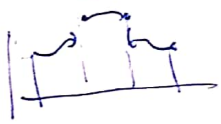
Definición

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\underbrace{\Delta x}_{\frac{b-a}{n}}}_{\text{si este límite existe!}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

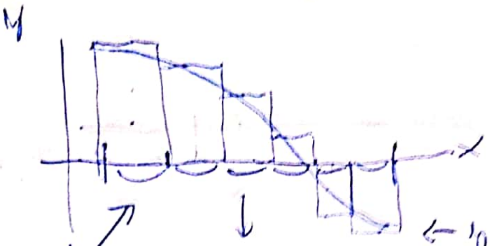
(si $f>0$ mide el área de la figura comprendida entre $[a,b]$ y la gráfica $y=f(x)$)

Esta definición se puede hacer para cualquier f (no nec. positiva)

si f continua $\rightarrow$ f es integral.

;  también es integrable.

¿Qué mide $\int_a^b f(x)\,dx$ si f no es positiva (o en general)



temperatura en un intervalo de tiempo $[a,b]$

$\leftarrow y_0 = f(x)$

posición

todo subintervalo mide $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$

factor común

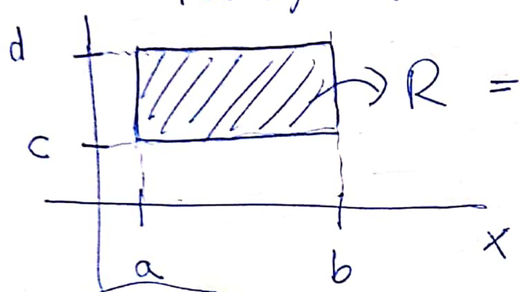
$$= (b-a)\cdot \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)}_{\text{promedio}} = (b-a)\cdot \text{"valor promedio"}$$

Cuando $n \to \infty$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)}_{(b-a)\cdot f_{promedio}} = \int_a^b f(x)\,dx \quad ; \quad f_{promedio} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Integral en $\mathbb{R}^2$:

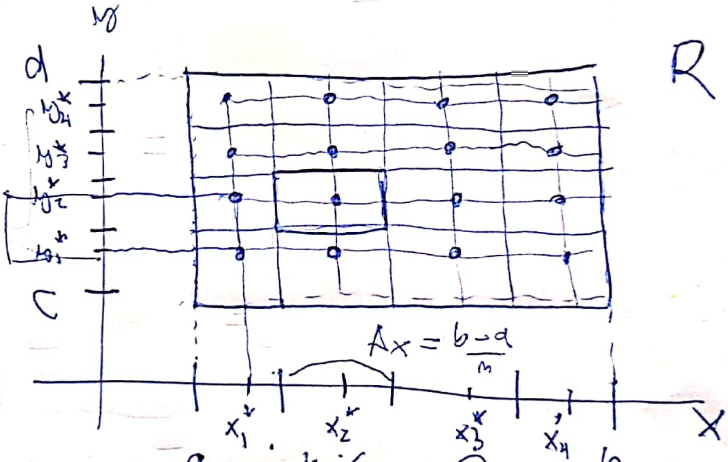
$$f : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{\text{rectángulo } R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] ; y \in [c,d] \}$

"lado // a los ejes"

~~subdi~~ particiones de R



partición con (m) subintervalos

Obtenemos una subdivisión $\Delta_y = \frac{d-c}{m}$ de R en rectangulitos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

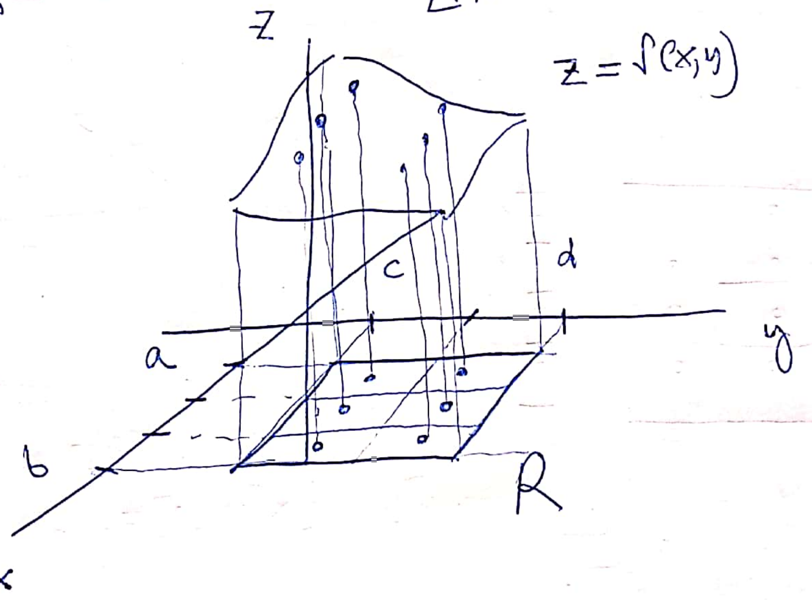
partición con (n) subintervalos

Obtenemos puntos (x_i^*, y_j^*) en R_{ij}, puntos representativos. 5

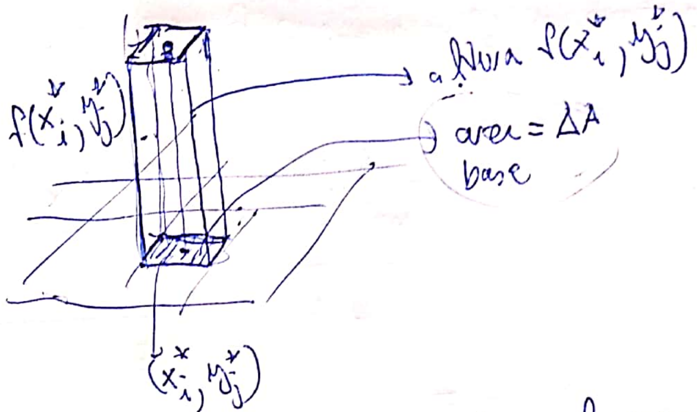
Formamos la suma de Riemann de la partición (rectangulitos + puntos representativos)

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m}}_{\Delta A}$$; qué representa.

f: supongamos que es >0

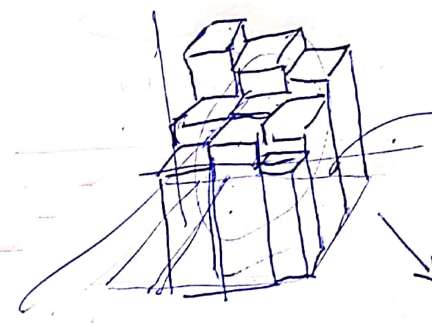


Cuál es el aporte de cada sumando de la suma de Riemann ?



Volumen de la caja de base $[x_{i-1}, x_i^*] \times [y_{j-1}, y_j^*]$ y altura $f(x_i^*, x_j^*)$

la suma de Riemann es una <u>suma</u> de volumenes



Volumen de este cuerpo coincide con la suma de Riemann

si $n \to \infty$
$m \to \infty$

Definición

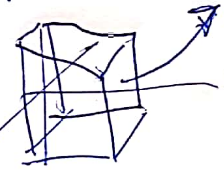
"integral doble"

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A = \iint_R f(x,y)\,dA$$

si este límite existe

$R = [a,b]\times[c,d]$

Si $f \geq 0 \rightarrow \iint_R f(x,y)\,dA$ = Volumen del sólido comprendido entre R y la gráfica $z = f(x,y)$



¡este volumen!

$\iint_R f(x,y)\,dA$ se puede definir para f no necesariamente positiva. ¿Qué mide?

$$(b-a)(d-c)\,\boxed{\frac{1}{n\cdot m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)} \xrightarrow{n,m\to\infty} \cancel{(b-a)(d-c)}\cdot \iint_R f(x,y)\,dA$$

promedio de los valores representativos

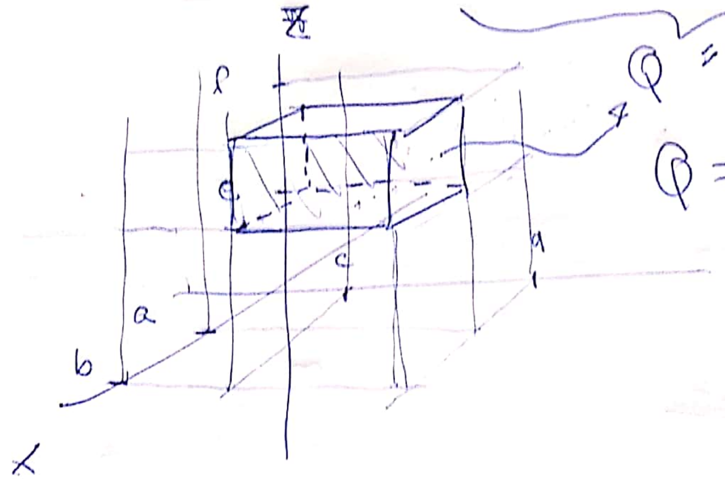
$$= (b-a)(d-c)\cdot f_{\text{promedio}}.$$

$$\frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{area de } R}} = f_{promedio} \quad ; \quad f_{promedio} = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\text{area } (R)}$$

18

En $\mathbb{R}^3$

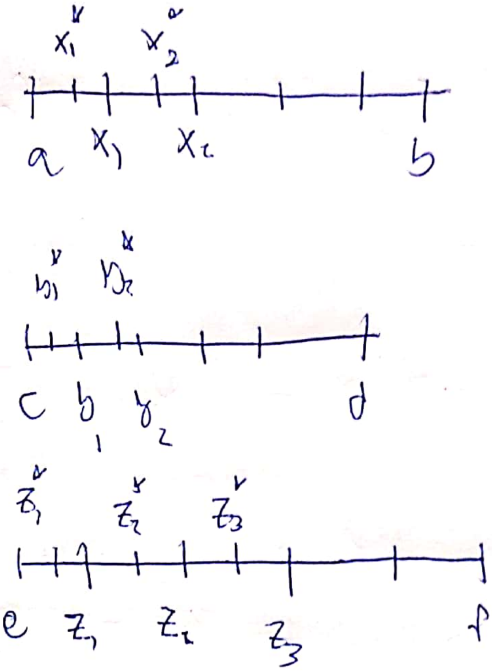
$$f : \underbrace{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]}_{Q = \text{"caja"}} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$Q = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b],\ y \in [c,d],\ z \in [e,f] \}$$

Escaneado con CamScanner

partición de Q



partición de $[a,b]$, n subintervalos

" " $[c,d]$, m subintervalos

" " $[e,f]$, k subintervalos

Formamos una partición de la caja Q, en cajitas

$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{l-1}, z_l] = Q_{ijl}$

todos del mismo volumen.

cada uno con un punto representativo

$(x_i^*, y_j^*, z_l^*) \in Q_{ijl}$

Formamos la suma de Riemann $$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_l^*)\cdot \underbrace{\frac{(b-a)}{n}\cdot\frac{d-c}{m}\cdot\frac{f-e}{k}}_{\Delta V}$$

Definición

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ k\to\infty}} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_l^*) \cdot \Delta V}_{\text{si el límite existe}} = \iiint_Q f(x,y,z)\, dV$$

Qué mide: $\text{vol}(Q) \cdot f_{\text{promedio}} = \iiint_Q f(x,y,z)\, dV$

Cómo se calculan estas integrales.

En $\mathbb{R}$: Regla de Barrow ; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ / existe F tal que $F'(x) = f(x)$ (F una primitiva de f)

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad \left(= F(x) \Big|_a^b \right)$$

Ejemplo: Calcular $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot x\,dx =$

$+$ $F(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ es primitiva de $\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot x$ $+$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}\underbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}_{=1} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)}_{=0} = \frac{1}{\pi}.$$

En $\mathbb{R}^2$: Integrales iteradas

de tipo $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$ ó $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

$+$ $$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Bigg(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{Integrar: } y = \text{cte},\ x = \text{variable}}\Bigg)\,dy = \int_c^d \text{resultado}_{\text{en } y}\,dy.$$

$y = \text{cte}$ { resultado en y

12

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \left(\underbrace{\int_1^2 4xy + 2 \, dx}_{y = cte} \right) dy = \int_0^1 \left(2x^2 y + 2x \Big|_{x=1}^{x=2} \right) dy$

primitiva de $4xy + 2$ (respecto de x) $= 2x^2y + 2x$ (una primitiva!)

$$= \int_0^1 \left(8y + 4 - (2y + 2) \right) dy = \int_0^1 6y + 2 \, dy = 3y^2 + 2y \Big|_0^1$$

$$= 3 + 2 - 0 = 5.$$

el otro tipo: $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dy \, dx = \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^d f(x,y) \, dy}_{x = cte} \right) dx = \int_a^b \text{resultado en } x \, dx$

$x = cte$
integrar respecto de y en $[c,d]$ } resultado con x

13

Ejemplo

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Ejercicio :