ANEXO de las teóricas 17 y 18. Fórmulas de Lagrange del resto 1

Fórmula del Resto (de orden n) en 1 variable:

$f: I \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-veces derivable. $a \in I$, $x \in I$.

(I: intervalo abierto)

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$; c en el intervalo abierto de extremos a y x.

Prueba: consideremos que x, a están fijos. Formamos la función

$g: I \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\cdot(x-t) - \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 - \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}.$$

Ajustamos K / $t=a$: $\boxed{g(a) = 0}$

$g : I \to \mathbb{R}$ es derivable y continua. 2

miremos g en el intervalo J de extremos a y x.
(cerrado)

$J \subset I$: en J g es continua, $\mathring{J}$ = intervalo abierto con extremos a, x

g en $\mathring{J}$ es derivable.

$t = a$: $g(a) = 0$.

$t = x$: $g(x) = f(x) - f(x) - 0 = 0$

Teorema: (Rolle): $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continua, derivable en (α, β) y además $g(\alpha) = g(\beta) \Rightarrow$ hay $c \in (\alpha, \beta) \,/\, g'(c) = 0$.

Usando Rolle: hay c estrictamente entre a y x. $(c \neq a, c \neq x)$

$g'(c) = 0$.

$$g'(t) = 0 \cancel{- f'(t)} - \cancel{(-1) \cdot f'(t)} - f''\cancel{(t)} \cdot (x-t) - \cancel{2}^{1}(x-t)\cancel{(-1)} \cdot \frac{f''(t)}{\cancel{2}_{1}} - \frac{f'''\cancel{(t)}}{2}(x-t)^2 -$$

$$- \cancel{3}^{1} \cdot (x-t)^2 \cdot \cancel{(-1)} \cdot \frac{f'''(t)}{\cancel{6}\,2} - \frac{f^{IV}(t)}{\cancel{6}}\cancel{(x-t)^3} - \dots - m\cancel{(x-t)^{m-1}}\cancel{(-1)} \cdot \frac{f^{(m)}(t)}{m!} - \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x-t)^m -$$

$$-\frac{K}{\cancel{(n+1)!}_{\,n!}}\cdot \cancel{(n+1)}(x-t)^n\cdot(-1).$$

Queda: $g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{K}{n!}(x-t)^n$

$t=c$, $0 = g'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n + \frac{K}{n!}(x-c)^n$

queda: $\frac{f^{(n+1)}(c)}{\cancel{n!}}\cancel{(x-c)^n} = \frac{K}{\cancel{n!}}\cdot\cancel{(x-c)^n}$ $\quad c \neq x.$

$$\boxed{f^{(n+1)}(c) = K}$$

— en la fórmula de g ; $t = a$

$$0 = g(a) = f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a) - \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n -$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

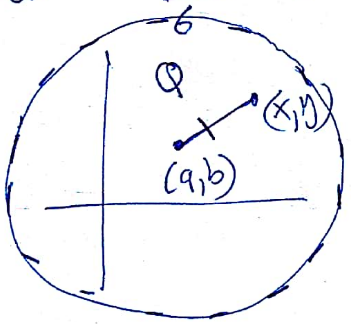
Fórmula de Lagrange del resto $R_2(x)$ y para $f = f(x,y)$.

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D es un disco abierto centrado en $P = (a,b)$

f es C^3 en D. $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$

donde:

$$R_2(x,y) = \frac{f_{xxx}(\varphi)}{6}\cdot(x-a)^3 + \frac{f_{xxy}(\varphi)}{2}\cdot(x-a)^2\cdot(y-b) + \frac{f_{xyy}(\varphi)}{2}\cdot(x-a)(y-b)^2 + \frac{f_{yyy}(\varphi)}{6}(y-b)^3$$



φ en el segmento de extremos (a,b) y (x,y) (estrictamente) prueba: $p=(a,b)$, (x,y) fijos. Formamos la función auxiliar

$$g(t) = f\Big(\underbrace{(a,b) + t\big((x,y)-(a,b)\big)}_{\text{parametriza el segmento de extremos } (a,b) \text{ y } (x,y)}\Big) \quad ; \quad t \in [0,1]$$

la abreviamos $(x(t), y(t))$

g es 3 veces derivable en $(0,1)$: hay g', g'', g''' en $(0,1)$

g''' continua.

Calculamos el desarrollo de Taylor de g en $a=0$, $n=2$.

- $g'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) = f_x(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot y'(t)$

$+ \; x(t) = a + t(x-a)$, $y(t) = b + t(y-b)$ ⊥ $x'(t) = x-a$; $y'(t) = y-b$ ⊥

$$g'(t) = f_x(x(t),y(t)) \cdot (x-a) + f_y(x(t),y(t)) \cdot (y-b)$$

$$g'(0) = f_x(a,b) \cdot (x-a) + f_y(a,b) \cdot (y-b)$$

$$g''(t) = \Big(f_{xx}(x(t),y(t))\cdot(x-a) + f_{xy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)\Big)(x-a) +$$ 6

$$+\Big(f_{yx}(x(t),y(t))\cdot(x-a) + f_{yy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)\Big)(y-b)$$

$$g''(t) = f_{xx}(x(t),y(t))\cdot(x-a)^2 + 2 f_{xy}(x(t),y(t))\cdot(x-a)(y-b) +$$
$$+ f_{yy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)^2.$$

$$\frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(y-b)^2.$$

$$g'''(t) = \Big(f_{xxx}(x(t),y(t))\cdot(x-a) + f_{xxy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)\Big)(x-a)^2 +$$
$$+ 2\Big(f_{xyx}(x(t),y(t))\cdot(x-a) + f_{xyy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)\Big)\cdot(x-a)(y-b) +$$
$$+\Big(f_{yyx}(x(t),y(t))\cdot(x-a) + f_{yyy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)\Big)(y-b)^2.$$

7

$$g'''(t) = f_{xxx}(x(t),y(t))\cdot(x-a)^3 + 3 f_{xxy}(x(t),y(t))(x-a)^2(y-b)$$
$$+ 3 f_{xyy}(x(t),y(t))\cdot(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(x(t),y(t))\cdot(y-b)^3$$

Fórmula de Taylor de orden 2 de g en $a=0$, en $\underline{t=1}$.

$$g(1) = g(0) + g'(0)\cdot(1-0) + \frac{g''(0)}{2}\cdot(1-0)^2 + \frac{g'''(c)}{6}\cdot(1-0)^3$$

$c \in (0,1)$.

$\boxed{(x(c),y(c)) = (a,b) + c((x,y)-(a,b)) = \varphi \text{ en el segmento entre } (a,b) \text{ y } (x,y) \text{; estrictamente.}}$

$g(1) = f(x,y)$;

$$f(x,y) = \left[f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + \frac{f_{yy}}{2}(a,b)\cdot(y-b)^2\right] + \left\{\frac{f_{xxx}(\varphi)}{6}\cdot(x-a)^3 + \frac{f_{xxy}(\varphi)}{2}(x-a)^2(y-b) + \frac{f_{xyy}(\varphi)}{2}(x-a)(y-b)^2 + \frac{f_{yyy}(\varphi)}{6}\cdot(y-b)^3\right\}$$

Quedó:

$$f(x,y) = P_2(x,y) + \underbrace{R_2(x,y)}_{\text{con la expresión que habíamos dicho.}}$$