ANEXO (a la teórica 19): Prueba del criterio del Hessiano:

Teorema: $f = f(x,y)$ es C^2 en D (disco) centrado en (a,b).
(a,b) es un un punto crítico ($f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$).

1) Si $f_{xx}(a,b) > 0$, $\det Hf(a,b) > 0 \Rightarrow$ en (a,b) f tiene un mínimo local estricto.

2) Si $f_{xx}(a,b) < 0$, $\det Hf(a,b) > 0 \Rightarrow$ en (a,b) f tiene un máximo local estricto.

3) Si $\det Hf(a,b) < 0 \Rightarrow$ en (a,b) f tiene un punto silla.

Observación: si $\det Hf(a,b) > 0$, NO puede ser $f_{xx}(a,b) = 0$ (Ejercicio)
El único caso que NO cubre este criterio es $\det Hf(a,b) = 0$.

Escribimos el desarrollo de orden 2 de Taylor de f, centrado en (a,b).

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(y-b)^2 + R_2(x,y).$$

Abreviaturas $f_{xx}(a,b) = A$; $f_{xy}(a,b) = B$; $f_{yy}(a,b) = C$.

$X = x-a$; $Y = y-b$.

$$\frac{A}{2} \cdot X^2 + BXY + \frac{C}{2} Y^2 = Q(X,Y).$$

Lema 1) $A>0$, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 > 0$, entonces existe un $0 < r$ / $Q(X,Y) \geq r(X^2+Y^2)$ (para todo X,Y)

2) $A<0$, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 > 0$, entonces existe un $0 < s$ / $Q(X,Y) \leq -s(X^2+Y^2)$ (para todo X,Y)

3) $AC - B^2 < 0$, entonces hay $V = (v_1, v_2)$; $W = (w_1, w_2)$ 3

tales que $\varphi(v_1, v_2) > 0$; $\varphi(w_1, w_2) < 0$.

Prueba del Lema:

1) $A > 0$, $AC - B^2 > 0$

$$\varphi(X,Y) = \frac{A}{2}X^2 + BXY + \frac{C}{2}Y^2 \geqslant \underbrace{r\left(X^2+Y^2\right)}_{rX^2 + rY^2}$$ para un $r > 0$ adecuado.

es equivalente

$$\underbrace{\left(\frac{A}{2} - r\right)}_{\frac{A-2r}{2}} X^2 + BXY + \underbrace{\left(\frac{C}{2} - r\right)}_{\frac{C-2r}{2}} Y^2 \geqslant 0 \quad \Leftarrow$$

sacamos factor común $\frac{A}{2} - r$

tomamos r / $\frac{A}{2} - r = \frac{A-2r}{2} > 0$

es decir $r < \frac{A}{2}$ $\left(0 < r < \frac{A}{2} \right)$ 4

$$\overset{0}{\wedge}\ \frac{A-2r}{2} \cdot \Big\{ \underbrace{\overbrace{X^2 + \frac{2B}{A-2r} XY}^{\text{completar cuadrado}} + \frac{C-2r}{A-2r} \cdot Y^2}_{\text{elegir } / \geq 0} \Big\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(X + \frac{B}{A-2r} \cdot Y \right)^2}_{\geq 0} - \frac{B^2}{(A-2r)^2} \cdot Y^2 + \frac{C-2r}{A-2r} \cdot Y^2$$

$$= \left(X + \frac{B}{A-2r} \cdot Y \right)^2 + Y^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{(A-2r)(C-2r) - B^2}{\underbrace{(A-2r)^2}_{\geq 0}} \right)}^{¿\geq 0?}$$

$$g(r) = (A-2r)(C-2r) - B^2 \xrightarrow[r \to 0]{} AC - B^2 > 0 \Rightarrow g(r) > 0 \text{ si } 0 < r < \delta$$

hay $\sigma > 0$ / $0 < r < \sigma$ $\left(r < \frac{A}{2}\right)$ $\Rightarrow \left(X + \frac{B}{A-2r} Y\right)^2 + Y^2 \cdot \frac{(A-2r)(C-2r) - B^2}{(A-2r)^2} \geq 0$ 5

equivalea: $\varphi(X,Y) \geq r\,(X^2+Y^2)$
(para un r elegido)

---

2) $A<0$, $AC-B^2>0$, buscamos s / $\varphi(X,Y) \leq -s(X^2+Y^2)$.

queremos: $\frac{A}{2}X^2 + BXY + \frac{C}{2}Y^2 \leq -s\,(X^2+Y^2)$

o lo que es lo mismo

$$\underbrace{\left(\frac{A}{2}+s\right)}_{\frac{A+2s}{2} < 0}X^2 + BXY + \overbrace{\left(\frac{C}{2}+s\right)}^{C+2s/2}Y^2 \leq 0 \qquad (A<0)$$

$\frac{A+2s}{2}$ → sacamos esto de factor común. tomamos $s>0$ $\quad s < \frac{|A|}{2}$

$s + \frac{A}{2} < 0$

$$\underbrace{\frac{A+2s}{2}}_{<0} \cdot \Big\{ \underbrace{X^2 + \frac{2B}{A+2s} \cdot XY + \frac{C+2s}{A+2s} \cdot Y^2}_{\text{elegir } s\ /\ \geq 0} \Big\}$$

1^{δ}

completamos cuadrado

$$\left(X + \frac{B}{A+2s} \cdot Y\right)^2 - \frac{B^2}{(A+2s)^2} \cdot Y^2 + \frac{C+2s}{A+2s} \cdot Y^2$$

$$= \underbrace{\left(X + \frac{B}{A+2s} \cdot Y\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{Y^2}_{\geq 0} \cdot \frac{(C+2s)(A+2s) - B^2}{\underbrace{(A+2s)^2}_{\geq 0}}$$

buscamos s / $\underbrace{(C+2s)(A+2s) - B^2}_{h(s)} \geq 0$

$\underset{(s \to 0)}{h(s) \to CA - B^2 > 0} \Rightarrow$ si $0 < s < \delta$ $h(s) > 0$

es decir $(C+2s)(A+2s)-B^2>0$ si $0<s<\delta$, $s<\frac{|A|}{2}$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) \leq -s(x^2+y^2).$$

---

3) $AC-B^2<0$; buscamos $V=(v_1,v_2)$, $W=(w_1,w_2)$ / $\varphi(v_1,v_2)>0$; $\varphi(w_1,w_2)<0$.

Caso: $A=0$

$$\varphi(v_1,v_2) = Bv_1v_2 + \frac{C}{2}v_2^2$$

$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B & C \end{pmatrix}$; $\det<0$, $-B^2<0$

$$= v_2\Big(\underset{\neq 0}{B}v_1 + \frac{C}{2}v_2\Big)$$

No puede ser $B=0$

$v_2=1$ $= \underbrace{\overset{\neq 0}{B}v_1 + \frac{C}{2}}_{g(v_1)\ \text{lineal}} \rightarrow$ hay v_1 / $\varphi(v_1,\underset{1}{v_2})>0$

Caso $A \neq 0$

$(A > 0)$ $\quad \phi(v_1, v_2) = \frac{A}{2} v_1^2 + B v_1 v_2 + \frac{C}{2} v_2^2$

$$= \underset{\vee \atop 0}{\frac{A}{2}} \underbrace{\left(v_1^2 + \frac{2B}{A} v_1 v_2 + \frac{C}{A} v_2^2 \right)}_{>0 ?} = \frac{A}{2}\left(\left(v_1 + \frac{B}{A} v_2\right)^2 - \frac{B^2}{A^2} v_2^2 + \frac{C}{A} v_2^2 \right)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(\left(v_1 + \frac{B}{A} v_2\right)^2 + v_2^2 \, \frac{\overset{0 \atop \vee}{CA - B^2}}{A^2} \right)$$

tomem $v_2 = 0$ $\to$ queda : $\frac{A}{2} \cdot (v_1)^2 > 0$

$v_1 \neq 0$.

$W = (w_1, w_2)$

$A = 0 \to$ fácil (Ejercicio)

$A > 0$: $\frac{A}{2} \Big\{ \underbrace{\left(w_1 + \frac{B}{A} w_2 \right)^2}_{w_2 = 1;\ w_1 = -\frac{B}{A}} + w_2^2 \, \frac{\overset{\text{negativo} \ (-)}{CA - B^2}}{A^2} \Big\} = \frac{A}{2} \Big\{ \frac{CA - B}{A^2} \Big\} < 0.$

demostración del Criterio (Teorema) (usando el lema):

1) $f_{xx}(a,b) > 0$, $\det Hf(a,b) > 0$

$$f(x,y) = f(a,b) + \underbrace{Q(x-a, y-b)}_{\substack{\text{Lema 1)} \\ \text{(hay } r>0)}} + R_2(x,y)$$

$$\geq\ r\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)$$

$$\geq f(a,b) + r\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) + R_2(x,y)$$

$+$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R_2(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^2} = 0 \; ; \text{ dado } \varepsilon = \frac{r}{2}, \text{ hay } \delta > 0 \;/$$

si: $0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Rightarrow \dfrac{|R_2(x,y)|}{(x-a)^2+(y-b)^2} < \dfrac{r}{2}$

Es decir: $(x,y) \in \underbrace{D_\delta(a,b)}$ disco de centro (a,b) y radio δ

$(x,y) \neq (a,b)$

$$\Rightarrow |R_2(x,y)| < \frac{r}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

o sea:

$$\boxed{-\frac{r}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) < R_2(x,y)} < \frac{r}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

$$f(x,y) \geq f(a,b) + r\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) + \underbrace{R_2(x,y)}_{> -\frac{r}{2}((x-a)^2+(y-b)^2)}$$

$$> f(a,b) + r\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) - \frac{r}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

$$f(x,y) > f(a,b) + \frac{r}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) \quad (x,y) \in D_\delta(a,b),\ (x,y) \neq (a,b).$$

$\Rightarrow f(x,y) > f(a,b) \Rightarrow$ en (a,b) hay mínimo estricto de f (LOCAL)

2) $f_{xx}(a,b) < 0$, $\det Hf(a,b) > 0$

$$f(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\Phi(x-a, y-b)}_{\substack{\text{Lema 2)} \\ \leq -s\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) \\ (\text{hay } s>0)}} + R_2(x,y)$$

$$\leq f(a,b) - s\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) + R_2(x,y) < f(a,b) - s\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) + \frac{s}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R_2(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^2} = 0 \Rightarrow \text{Dado } \varepsilon = \frac{s}{2}, \text{ hay } \delta \quad (x,y) \in D_\delta(a,b),\ (x,y) \neq (a,b)$$

$$-\frac{s}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right) < R_2(x,y) < \frac{s}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

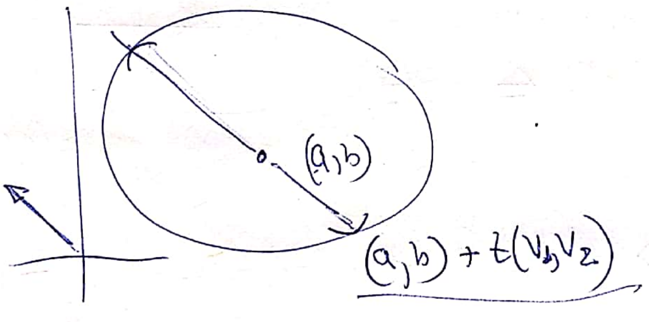
Si $(x,y) \in D_\delta(a,b) \Rightarrow f(x,y) < f(a,b) - \frac{s}{2}\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$

$\Rightarrow f(x,y) < f(a,b)$ si $(x,y) \in D(a,b)$
$(x,y) \neq (a,b)$

$\Rightarrow$ en (a,b) hay un máximo local y estricto.

---

3) $\det Hf(a,b) < 0$: Lema 3) : hay $v = (v_1, v_2)$ / $\varphi(v_1,v_2) > 0$
$w = (w_1, w_2)$ / $\varphi(w_1,w_2) < 0$



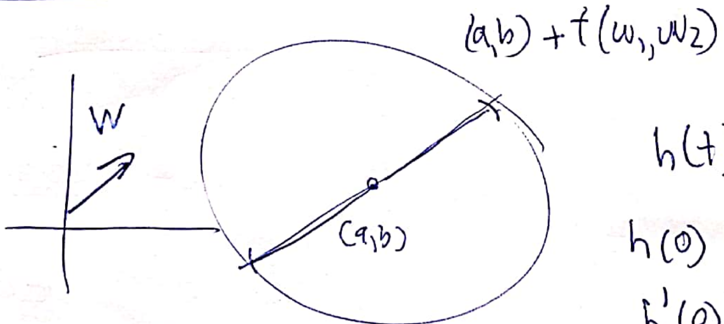
$$g(t) = f((a,b) + t(v_1,v_2))$$
$$t \in (-\delta, \delta)$$
$$g(0) = f(a,b)$$
$$g'(0) = \underbrace{f_x(a,b)}_{=0} \cdot v_1 + \underbrace{f_y(a,b)}_{=0} \cdot v_2 = 0$$

$$g''(0) = f_{xx}(a,b)\cdot v_1^2 + 2 f_{xy}(a,b)\cdot v_1 v_2 + f_{yy}(a,b)\cdot v_2^2$$

$$= 2\, Q(v_1, v_2) > 0$$

$g''(0) > 0$

en $t=0$ $\quad g'(0)=0,\ g''(0)>0 \Rightarrow g$ tiene un mínimo local en $t=0$.



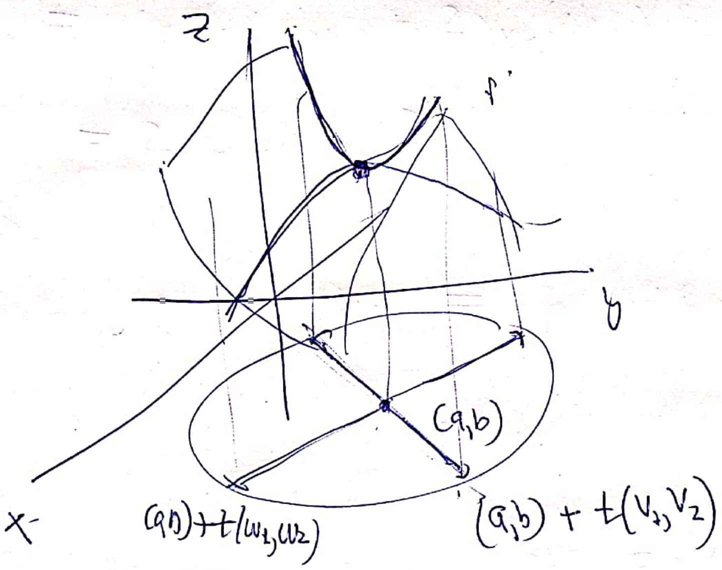
$h(t) = f((a,b) + t(w_1,w_2))$

$h(0) = f(a,b)$

$h'(0) = 0$

$h''(0) = Q(w_1,w_2) < 0$

$\Rightarrow$ h tiene un máximo local en $t=0$.



$\Longrightarrow$ en (a,b), f tiene un punto silla.