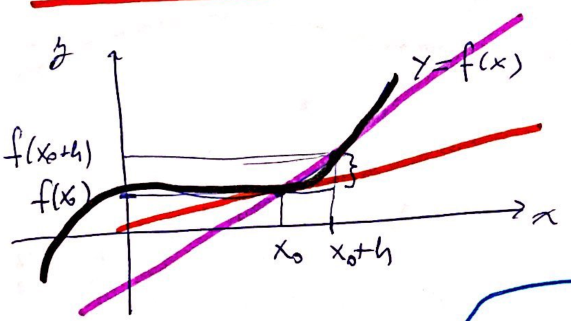
Derivadas Parciales

Sección 14.3 del libro de Stewart.

Ejercicios 4 al 8 de la Práctica 4

Repaso de 1 variable



$$m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}$$

cociente incremental

La ecuación de la recta secante (recta violeta) es

$$y = m_h (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\boxed{y = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

Def Llamamos

derivada $\rightarrow$ $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

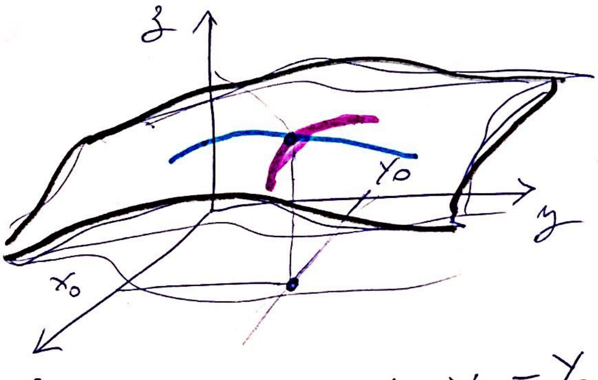
si el límite existe y es finito.

Luego, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f. En ese caso, la ecuación de la recta tangente es $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ (recta roja)

Si ahora tenemos

$f = f(x, y)$

¿Cómo se extiende la noción de derivada?



[Fijemos el valor de $y = y_0$ y permitimos que x varíe]

[Por otro lado, podemos fijar $x = x_0$ y permitir que varíe y]

Se definen entonces las <u>derivadas parciales de f</u>

a

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Si estos límites existen.

Obs

Para calcular f_x se piensa a Y fijo y se ve f como función solo de X y se la deriva.

Para calcular f_Y se toma X fijo y se deriva f como función solo de Y

Ej 1

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$

Res

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$\Rightarrow f_x(2,1) = 12 + 4 = 16.$$

$$f_y(2,1) = 8.$$

Ej 2 $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$

Calcular f_x y f_y.

Res

$$f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot x\left(\frac{-1}{(1+y)^2}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}.$$

Vector gradiente

∇f = el gradiente de f

$$\underbrace{\nabla}_{\text{nabla}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\nabla f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot f =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

En el Ej 1,

$$\nabla f(2,1) = (16, 8)$$

En el Ej 2,

$$\nabla f(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}, -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{x}{(1+y)^2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}\left(1, \frac{-x}{1+y}\right)$$

Ej 3

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

calcular, de forma implícita, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Res

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz\right)}_{3x^2 + 0 + 3z^2 \cdot z_x + 6y \cdot z + 6xy \cdot z_x} = 0$$

$$3x^2 + 0 + 3z^2 \cdot z_x + 6y \cdot z + 6xy \cdot z_x = 0$$

$$(3z^2 + 6xy)\, z_x = -3x^2 - 6yz$$

$$\cancel{3}(z^2 + 2xy)\, z_x = -\cancel{3}(x^2 + 2yz)$$

$$\boxed{z_x = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}}$$

Derivadas de orden superior

obs cuando calculamos las derivadas parciales de una función $f(x,y)$, obtenemos dos funciones

$$f_x(x,y) \text{ y } f_y(x,y).$$

Si a estas les calculamos derivadas parciales, obtenemos

$$\underbrace{(f_x)_x}_{f_{xx}}, \underbrace{(f_x)_y}_{f_{xy}}, \underbrace{(f_y)_x}_{f_{yx}}, \underbrace{(f_y)_y}_{f_{yy}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ej $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

calcular $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

Res

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$

$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$\boxed{f_{xy}}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = \boxed{6xy^2}$$

$$\boxed{f_{yx}}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = \boxed{6xy^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4.$$

Teorema de Clairaut - Schwarz

Sup. que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco $D \subset \mathbb{R}^2$.

Entonces, si $(a,b) \in D$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$