PRODUCTO VECTORIAL
o
PRODUCTO CRUZ

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

Busco $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que

$\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$

$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

$\boxed{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0}$

$\boxed{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0}$

$$\boxed{a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0}$$

$$\boxed{b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0}$$

multiplico la 1° ecuación por b_3, obtengo

$$(1) \quad a_1 b_3 c_1 + a_2 b_3 c_2 + a_3 b_3 c_3 = 0$$

multiplico la 2° ecuación por a_3 y obtengo

$$(2) \quad a_3 b_1 c_1 + a_3 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 = 0$$

$$(1)-(2) \quad \begin{array}{r} a_1 b_3 c_1 + a_2 b_3 c_2 + \cancel{a_3 b_3 c_3} = 0 \\ - \quad a_3 b_1 c_1 + a_3 b_2 c_2 + \cancel{a_3 b_3 c_3} = 0 \\ \hline (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, c_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, c_2 = 0 \end{array}$$

$$(a_1 b_3 - a_3 b_1)\, c_1 = -\underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}\, c_2$$

Si tomo $\quad c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

y $\quad c_2 = -(a_1 b_3 - a_3 b_1)$

Luego $\quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

<u>Def:</u>

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\hat{\imath} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\,\hat{\jmath} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES

(1) $a \times b \perp a$

$a \times b \perp b$

(2) $a \times a = 0$

(3) $a \times b = -(b \times a)$

(4) $t \in \mathbb{R}$, $(ta) \times b = t(a \times b) = a \times (tb)$

(5) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

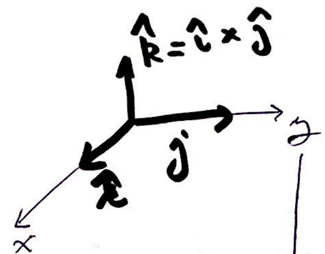
(6) $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

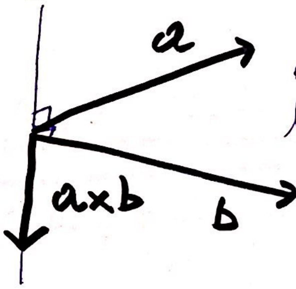
(7) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c$

INTERPRETACION GEOMÉTRICA

$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ $\quad$ $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$

$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$





siguiendo la regla de la mano derecha.

Falta determinar su longitud.

Teorema

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cdot \operatorname{sen}\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. $0 \leq \theta \leq \pi$ ó $180°$

Dem

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = \underbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)^2}_{} + \underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)^2}_{} + \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}_{} =$$

$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_3^2b_1^2 +$$

$$+ a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$$

$$= \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}_{}\underbrace{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}_{} - \underbrace{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}_{}$$

$$= \underbrace{|\mathbf{a}|^2}_{}\ \underbrace{|\mathbf{b}|^2}_{} - \underbrace{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}_{\substack{\parallel \\ (|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta)^2}} = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta$$

$$= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \qquad \blacksquare$$

COROLARIOS

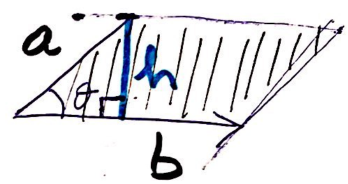
(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

$(\Rightarrow)$ $0 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ o π

$(\Leftarrow)$ ejercicio

(2) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| =$ área del paralelogramo generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$



área $= |\mathbf{b}| \cdot h$

Por trigonometría elemental

$h = |\mathbf{a}| \cdot \operatorname{sen}\theta$.

PRODUCTO TRIPLE

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$

Lema

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

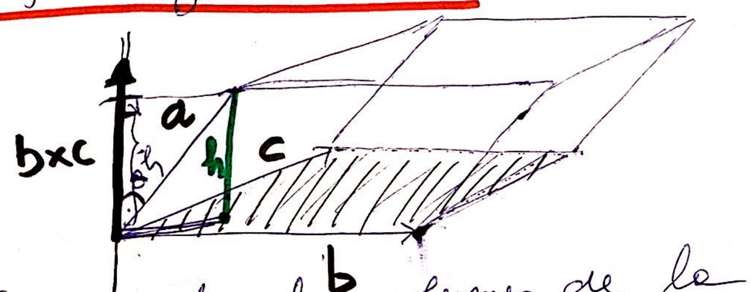
D/

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_2 c_3 - b_3 c_2, -(b_1 c_3 - b_3 c_1), b_1 c_2 - b_2 c_1 \rangle$$

$$= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \left\langle \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right\rangle =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \blacksquare$$

Significado geométrico



¿Cómo calculo el volumen de la caja?

$$V = \underbrace{\text{sup. de la base}}_{= \, |\mathbf{c}\times\mathbf{b}|} \times \underbrace{\text{altura}}_{= \, h}$$

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}$

$\Rightarrow h = |\mathbf{a}| \cos\theta$

$$V = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}|\,|\cos\theta|$$

$$= |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$$

Luego, el producto triple (su valor absoluto) es el volumen del paralelepípedo que generan los 3 vectores.

En consecuencia, el valor absoluto del determinante es el volumen del paralelepípedo generado por las filas de la matriz.