Teórica 13: Regla de la Cadena

Sección 14.5 Stewart

Ejercicios 14 a 21 de la Guía 4

Empecemos revisitando la definición de diferenciabilidad.

Def $f=f(x,y)$, decimos que f es diferenciable en (a,b) si existen $f_x(a,b)$ a $f_y(a,b)$ y

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-a)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

Equivalentemente,

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$
$$+\ \varepsilon\,|(x-a,y-b)|$$

Con $\varepsilon \longrightarrow 0$ si $(x,y)\to(a,b)$.

Si recordamos que

$$|x-a|\le|(x-a,y-b)|,$$
$$|y-b|\le|(x-a,y-b)|$$

y

$$|(x-a,y-b)|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$\le\sqrt{2\max\{(x-a)^2,(y-b)^2\}}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\max\{|x-a|;|y-b|\}$$
$$\le\sqrt{2}\,(|x-a|+|y-b|)$$

Concluimos que la diferenciabilidad resulta equivalente a

$$\boxed{f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \varepsilon_1|x-a|+\varepsilon_2|y-b|}$$

y $\varepsilon_1 \xrightarrow[x\to a]{} 0$

$\varepsilon_2 \xrightarrow[y\to b]{} 0$.

Regla de la cadena en 1 variable

$y=f(x)$ pero $x=g(t)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

¿Cómo se calcula $\frac{dy}{dt}$?

$y=f(g(t))$

$[f(g(t))]'=f'(g(t))\cdot g'(t)$

$$\frac{dy}{dt}=\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{x'(t)}$$

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon|x-a|$

con $\varepsilon \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

$x(t_0)=a \qquad x=x(t)$

$$f(x(t))=f(x(t_0))+f'(x(t_0))(x(t)-x(t_0)) + \varepsilon|x(t)-x(t_0)|$$

$$f(x(t))-f(x(t_0))=f'(x(t_0))(x(t)-x(t_0)) + \varepsilon|x(t)-x(t_0)|$$

$$\frac{f(x(t)) - f(x(t_0))}{t - t_0} = f'(x(t_0)) \underbrace{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}_{x'(t_0)} + \underbrace{\varepsilon}_{0} \underbrace{\frac{|x(t) - x(t_0)|}{t - t_0}}_{\text{acotado}}$$

Cuando $t \longrightarrow t_0$, $x(t) \longrightarrow x(t_0) \Longrightarrow \varepsilon \longrightarrow 0$ si $t \to t_0$

$$\left| \frac{|x(t) - x(t_0)|}{t - t_0} \right| = \left| \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right| \longrightarrow |x'(t_0)|$$

Luego $\boxed{\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}}$

Caso varias variables

Regla de la cadena

Versión 1

$Z = f(x,y)$ y $x = g(t)$; $y = h(t)$

$\mathbf{r}(t) = (x,y) = (g(t), h(t))$

Queremos calcular $\dfrac{dZ}{dt}$.

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(y-b)$$

$$f(x,y) - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(y-b)$$

$\varepsilon_1 \to 0$
$\varepsilon_2 \to 0$ si $(x,y) \to (a,b)$.

$x = x(t)$; $x(t_0) = a$
$y = y(t)$; $y(t_0) = b$.

$$f(x(t),y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) =$$

$$= f_x(x(t_0),y(t_0))(x(t) - x(t_0)) + f_y(x(t_0),y(t_0))(y(t)-y(t_0)) + \varepsilon_1(x(t)-x(t_0)) + \varepsilon_2(y(t)-y(t_0))$$

Dividiendo por $(t - t_0)$

$$\frac{f(x(t),y(t)) - f(x(t_0),y(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= f_x(x(t_0),y(t_0))\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + f_y(x(t_0),y(t_0))\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} + \varepsilon_1\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + \varepsilon_2\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t}.$$

Cuando $t \to t_0$, $x(t) \to x(t_0)$ y $y(t) \to y(t_0)$

Luego, tenemos que $\varepsilon_1 \longrightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \to t_0$

Por otro lado

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} x'(t_0)$$

$$\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} y'(t_0).$$

Juntando todo obtenemos

$$\boxed{\frac{d f(x,y)}{dt} = f_x(x,y) \cdot x' + f_y(x,y) \cdot y'}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Hemos entonces probado el siguiente teorema:

Teorema

Sea $z = f(x,y)$ una función diferenciable en (a,b) y $\mathbf{r}(t) = (g(t), h(t))$ una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t_0) = (a,b)$ y $\mathbf{r}$ es diferenciable en t_0.

Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es diferenciable en t_0 y

$$(f \circ \mathbf{r})'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot g'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot h'(t_0).$$

Ej $Z = x^2 y + 3 x y^4$

$x = \operatorname{sen} 2t; \quad y = \cos t$

Calcular $\left.\dfrac{dZ}{dt}\right|_{t=0}$

Res

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)\cdot 2\cos 2t$$

$$+ (x^2 + 12xy^3)\cdot(-\operatorname{sen} t)$$

si $t=0 \Rightarrow x=0, \; y=1$

$$\left.\frac{dZ}{dt}\right|_{t=0} = (\cancel{2\cdot 0\cdot 1} + 3\,1^4)\cdot 2\cdot 1 + \cancel{(0^2 + 12\cdot 0\cdot 1^3)\cdot(-0)}$$

$$= 6.$$

Obs

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right)}_{\nabla Z}\cdot\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)}_{\mathbf{r}'}$$

$$\frac{d}{dt}\big(f(\mathbf{r}(t))\big) = \nabla f(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)$$

Supongamos ahora que

$z = f(x, y)$ y

$x = g(u, v)$

$y = h(u, v)$

¿Cómo se calculan $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$?

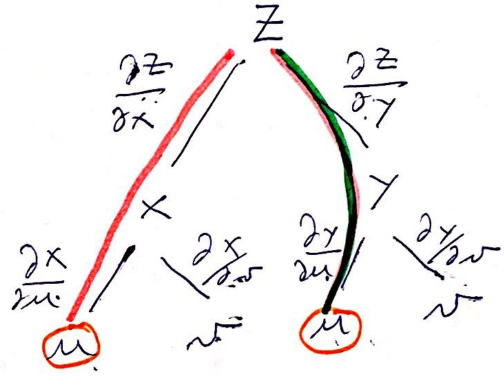
Teorema de regla de la cadena

Versión 2

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Diagrama de árbol



$$z_u = z_x \cdot x_u + z_y \cdot y_u$$

Dem Observamos que calcular z_u significa mantener v constante y mirar x e y como funciones sólo de u. Luego, se reduce al Teo anterior. ☒

Ej $z = e^x \operatorname{sen} y$

$x = u v^2$

$y = u^2 v$

Calcular z_u y z_v.

Res

$z_u = z_x \cdot x_u + z_y \cdot y_u$

$= e^x \operatorname{sen} y \cdot v^2 + e^x \cos y . 2uv$

$= e^{uv^2} \cdot \operatorname{sen}(u^2 v)\, v^2 + e^{uv^2} \cos(u^2 v) \cdot 2uv$

$z_v =$ ej.

$z_v = z_x \cdot x_v + z_y \cdot y_v$

Ej $g(u,v) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$

Probar que g verifica que

$v \cdot g_u + u \cdot g_v = 0$.

Res $z = f(x,y)$; $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$

$g_u = z_u = z_x \cdot x_u + z_y y_u$

$= z_x \cdot 2u + z_y(-2u)$

$= 2u(z_x - z_y)$

$g_v = z_v = z_x \cdot x_v + z_y \cdot y_v$

$= z_x(-2v) + z_y\, 2v$

$= 2v(-z_x + z_y)$