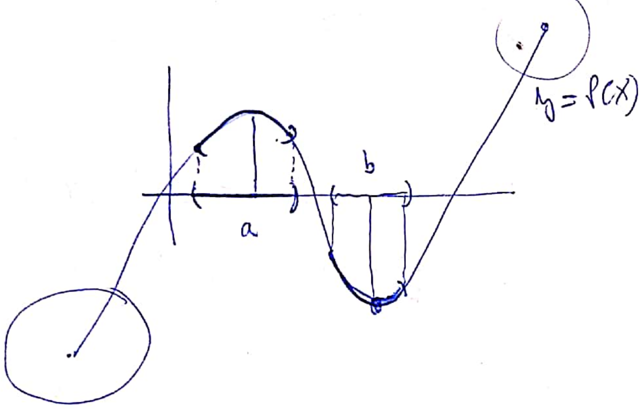
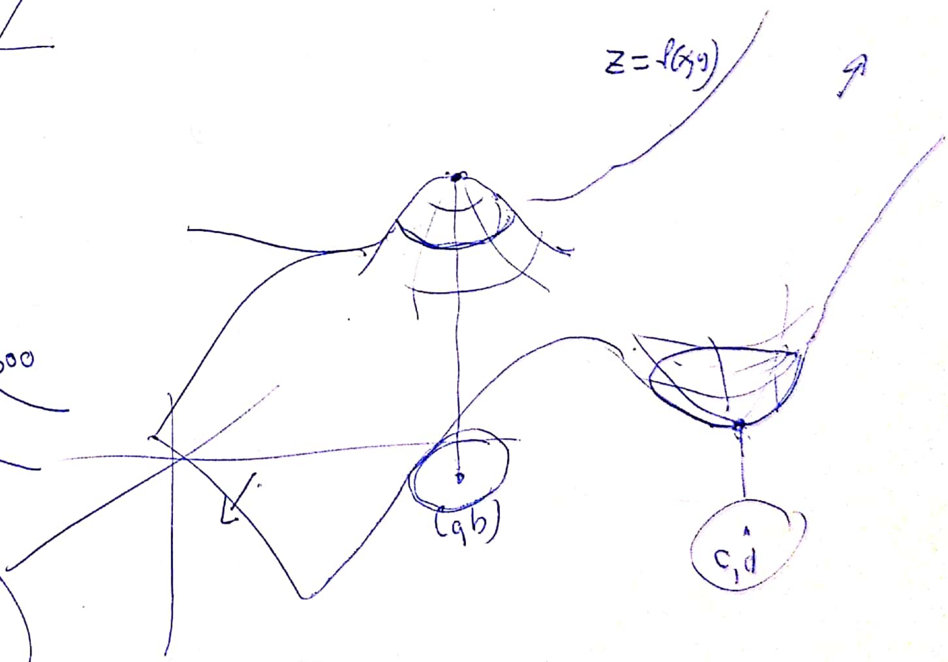
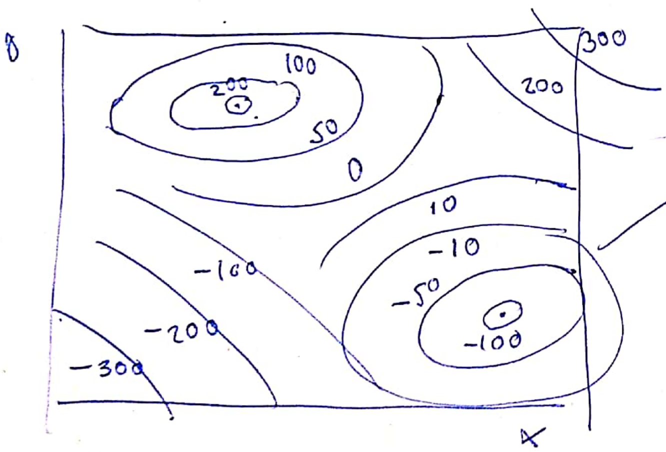
Extremos (locales) de $f = f(x,y)$







2

Definiciones: $f = f(x,y)$ tiene un máximo local en (a,b) si hay un disco D centrado en (a,b) / para todo (x,y) en D,

$f(x,y) \leq f(a,b)$.

f tiene un mínimo local en (c,d) si hay un disco D' centrado en (c,d) / para todo $(x,y) \in D'$, $f(x,y) \geq f(c,d)$.

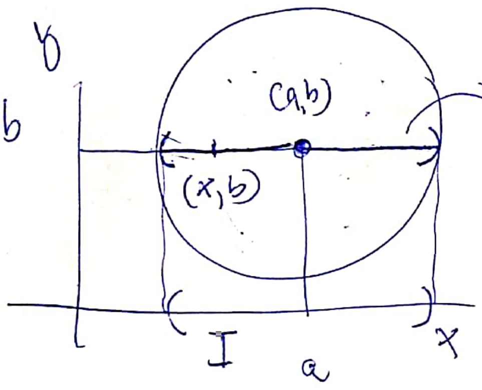
El máximo local (a,b) es máximo absoluto de f si $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todo (x,y) en el dominio de f. Análogamente, definimos mínimo absoluto.

Cómo detectamos extremos locales?

Proposición: f tiene un extremo local en (a,b); y además f tiene derivadas parciales $\Rightarrow \begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0. \end{cases}$

prueba: en (a,b) hay un máximo local.

Hay un disco D centrado en (a,b) / si $(x,y) \in D \Rightarrow f(x,y) \leq f(a,b)$.



$L = \{(x,b) : x \in I\}$

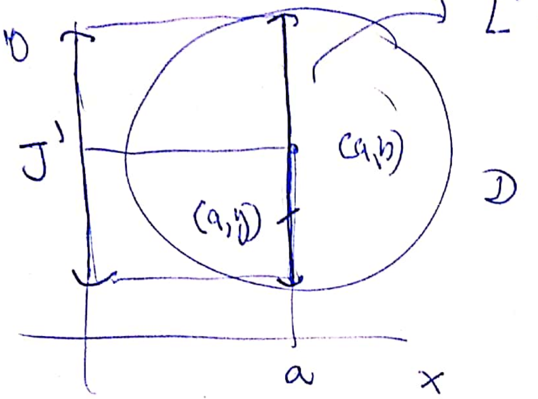
entonces si $(x,b) \in L \Rightarrow f(x,b) \leq f(a,b)$

$g(x) = f(x,b)$, $x \in I$.

$\underset{f(x,b)}{\underset{\shortparallel}{g(x)}} \leq \underset{f(a,b)}{\underset{\shortparallel}{g(a)}}$, $x \in I \rightarrow$ $\boxed{\text{g tiene un máximo a } x=a.}$

$\boxed{\text{g es derivable a } x=a:}$ $g'(a) = \underbrace{f}_{\text{derivar respecto de } x}(x, \underbrace{b}_{\text{fija}})\Big|_{x=a} = f_x(a,b)$

$\Rightarrow g'(a) = 0. \Rightarrow f_x(a,b) = 0.$



$L' = \{(a,y) : y \in J'\}$

$h(y) = f(a,y)$

$f(a,y) \leq f(a,b)$

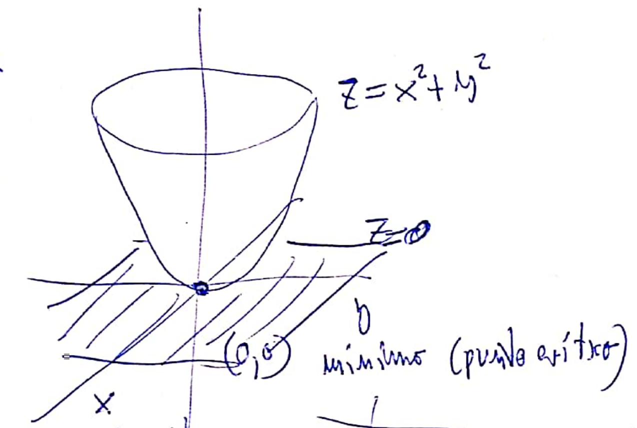
$h(y) \leq h(b)$ ← h tiene máximo en $y=b$.

$$h'(b) = \underset{(\text{respecto de } y)}{\text{derivar}}\; f(a,y)\Big|_{y=b} = f_y(a,b) = 0$$

Definición: llamamos puntos crítico de $f = f(x,y)$ a los puntos (a,b) / $\begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0. \end{cases}$; también llamamos puntos críticos de f a (c,d) / no exista alguna de las dos derivadas parciales de f en (c,d)

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2$



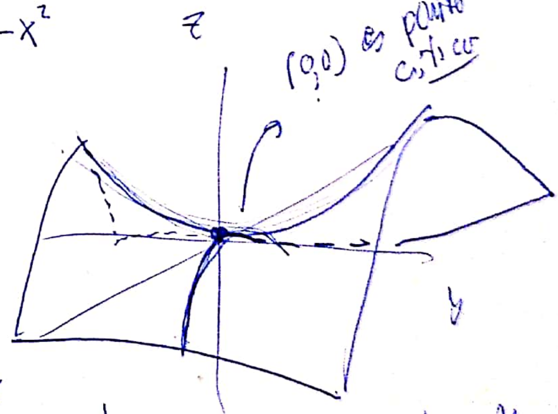
mínimo (punto crítico)

plano tgte en un punto crítico

$z = f(a,b)$

$f(x,y) = y^2 - x^2$

$z = y^2 - x^2$



$(0,0)$ es punto crítico

$(0,0)$

no max, no mín $\}$ → en $(0,0)$ hay punto silla.

Ejemplo: calcular los puntos críticos de

$$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 3xy.$$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 3y = 0 \\ f_y = 4y - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{3}{4}x \text{; reemplazamos en la 1era.}$$

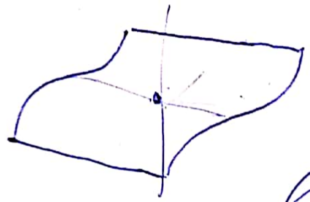
$$4x^3 - 3\left(\frac{3}{4}x\right) = 0 \;;\; 4x^3 - \frac{9}{4}x = 0 \;;\; x\left(4x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0$$

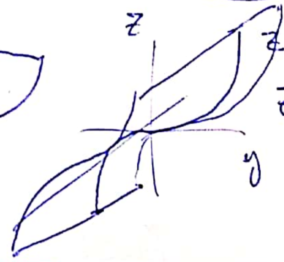
caso 1: $x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \rightarrow \boxed{(0,0).}$

caso 2: $4x^2 - \frac{9}{4} = 0 \;;\; x^2 = \frac{9}{16}$

$\nearrow x = \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \;;\; \boxed{\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)}$

$\searrow x = -\frac{3}{4} \rightarrow \boxed{\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)}.$





$z = y^3 \quad f(x,y) = y^3$

$(0,0)$ es punto crítico.

Recordar: f tiene derivadas segundas:

Matriz Hessiana de f: $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$; $Hf(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$

Teorema (Criterio del Hessiano)

$f = f(x,y)$ que C^2 en un disco D, $(a,b) \in D$, es un punto crítico de f $\left(\begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0 \end{cases} \right)$. $Hf(a,b)$, $d = \det(Hf(a,b))$.

1) si $f_{xx}(a,b) > 0$; $d > 0 \Rightarrow$ en (a,b) hay un mínimo local (estricto) de f. $\left[f(x,y) > f(a,b) \quad , \underset{\text{en } D}{(x,y) \neq (a,b)} \right]$

2) si $f_{xx}(a,b) < 0$; $d > 0 \Rightarrow$ en (a,b) hay un máximo local (estricto) de f.

3) $d < 0 \Rightarrow$ en (a,b) hay un punto silla.

Retomemos el ejemplo $f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 3xy$

puntos críticos $(0,0)$; $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$; $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$.

$f_x = 4x^3 - 3y$ $\qquad f_{xx} = 12x^2$

$f_y = 4y - 3x$ $\qquad f_{xy} = -3 = f_{yx}$ $\qquad Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$f_{yy} = 4$

En $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \to d = -9 < 0 \Rightarrow \text{en } (0,0) \text{ hay un punto silla}$$

En $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$: $Hf\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right) = \begin{pmatrix} \overbrace{12 \cdot \frac{9}{16}}^{27/4} & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $f_{xx}\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right) > 0$; $d = \frac{27}{4} \cdot 4 - (-3)^2$

$= 27 - 9 = 18 > 0$

$\Rightarrow$ en $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$ hay un mínimo local estricto de f.

En $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$: $Hf\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right) = \begin{pmatrix} 27/4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow$ aquí también hay un mínimo local estricto.

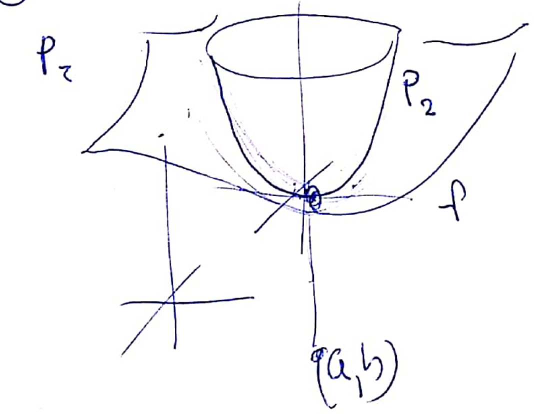
ANEXO: la demostración del criterio del Hessiano.

Idea: en (a,b) p. crítico.

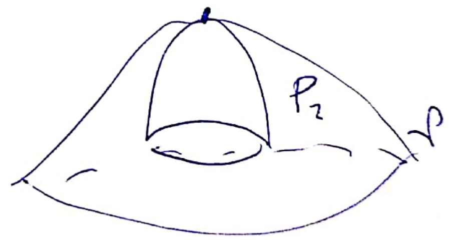
$P_2(x,y)$ centrado en (a,b) de $f = f(x,y)$

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(y-b)^2$$

si 1 del criterio



si 2



3