

Práctica 7: Polinomio de Taylor

1. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $f(x) = \ln(x+1)^2$.
(b) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $g(x) = e^{x+2}$.
(c) Desarrollar la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;
(d) Desarrollar la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.
2. (a) Hallar p el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.
(b) Estimar el error que se comete al aproximar $f(0,2)$ por $p(0,2)$.
3. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del resto.
 - (a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$,
 - (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$,
 - (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$,
 - (d) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$,
 - (e) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$,
 - (f) $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$,
 - (g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$,
 - (h) $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2, 3, 4)$.
4. Sea $f(x, y) = 1 + e^{x+y-7x^2-9y^2}$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 y 2 de f en $P = (0, 0)$. Usando geogebra graficar f y superponer el gráfico de cada uno de los polinomios. Hacer lo mismo para $f(x, y) = \sin(xy)$ y para $f(x, y) = e^{x-y}$.
5. Utilizando el polinomio de Taylor de $f(x, y) = x^y$, aproximar $(0.95)^{2.01}$
 - (a) con error menor que $1/200$.
 - (b) con error menor que $1/5000$.
6. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xe^y$.
 - (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 0)$.
 - (b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0.98, 0.02)$. Estimar el error cometido.

7. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$.

(a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 1)$.

(b) Usar el ítem anterior para aproximar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$.
Comprobar que el error cometido es menor que 0.3.

8. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \sin(x) \sin(y).$$

9. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tales que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$p(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular $\nabla g(1, -1)$.

10. Sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que su polinomio de McLaurin de orden 2 es $p(x, y) = 3x + 2y - x^2 + y^2 - 2xy$. Sea $f(x, y) = \ln(1 + g(x, y))$. Calcular el polinomio de McLaurin de orden 2 de f .

11. Sea f de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el $P = (1, \frac{\pi}{2})$ es $p(x, y) = -\pi + 4(y - \frac{\pi}{2}) + 2(x - 1)^2 + (x - 1)(y - \frac{\pi}{2})$. Sea $g(x, y) = f(x, y)y^2 + x \sin(y)$. Hallar $\frac{\partial g}{\partial v}(P)$ con $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y luego hallar $Hg(P)$.

12. Mostrar que $ye^{xy} = 1$ define una función implícita $y = f(x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0, y_0 = 1$. Hallar el polinomio de McLaurin de orden 2 de f .

13. Sea $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$.

(a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(0, 0)$.

(b) Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

14. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en $(1, 1)$ es $p(x, y) = 1 - 3x + x^2 + xy + y^2 - y^3$. Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|^2}.$$