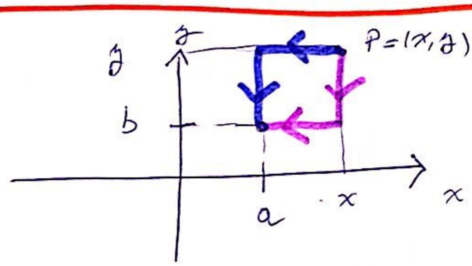
Demostraciones de los lemas de la Teórica 8

Lema 1 (de los límites iterados)

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

$$\Longrightarrow \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L \quad (*)$$

y $$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L \quad (*)$$

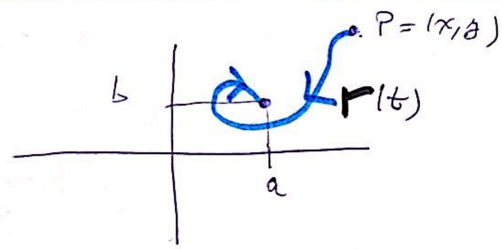


Lema 2 (aproximación por curvas)

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ y

$\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial tal que $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = (a,b)$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0} f(\mathbf{r}(t)) = L$$



Recordatorio

Def (Límite en 1 variable)

Decimos que $\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = a$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|\varphi(t) - a| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |t - t_0| < \delta$$

$\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t_0 \in I$.

Def (Límite de funciones vectoriales)

$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$

$\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $t_0 \in I$.

Decimos que $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = (a, b)$

si $\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = a$ y $\lim_{t \to t_0} \psi(t) = b$

Def (Límite de funciones de $\underbrace{\text{varias}}_{2}$ variables)

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(a, b) \in D$.

Decimos que $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

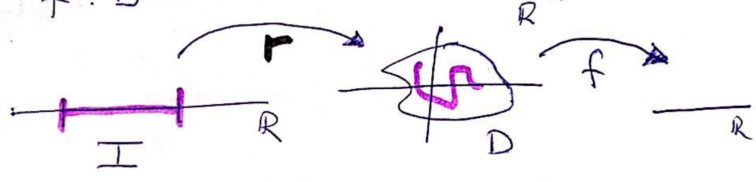
$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |(x-a, y-b)| < \delta$$

$$|(x-a, y-b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Obs: Si $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$\mathbf{r}(t) \in D = \mathrm{Dom}(f) \quad \forall t \in I$

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.



$\Longrightarrow f \circ \mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Para demostrar el Lema 2, debemos ver que

$$\lim_{t\to t_0} \underbrace{f(\mathbf{r}(t))}_{\underbrace{(f\circ\mathbf{r})}_{\text{es una función real (de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R})}(t)} = L$$

Dem

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, entonces existe $e > 0$ tal que

es el que juega el rol de δ en la def. de lím de func. de varias variables.

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ si } 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < e.$$

Sea $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ tal que

$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = (a,b)$, es decir,

$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = a$ y $\lim_{t\to t_0} \psi(t) = b$.

Luego, por la def. de límite, existe $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|\varphi(t) - a| < \frac{e}{\sqrt{2}} \text{ si } 0 < |t-t_0| < \delta_1$$

y

$$|\psi(t) - b| < \frac{e}{\sqrt{2}} \text{ si } 0 < |t-t_0| < \delta_2$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Sup. ahora que $0 < |t - t_0| < \delta$

$\Rightarrow \quad |\varphi(t) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $|\psi(t) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

luego, $\operatorname{dist}(\mathbf{r}(t); (a,b)) \leq \cancel{\sqrt{2}}\, \underbrace{\text{máx}\{|\varphi(t)-a|; |\psi(t)-b|\}}_{< \varepsilon/\cancel{\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow$ si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces

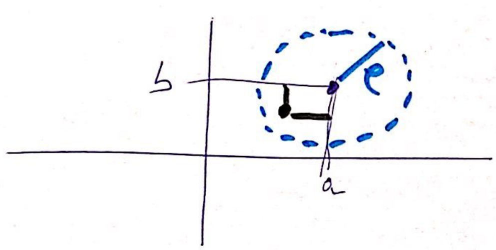
$$\operatorname{dist}(\mathbf{r}(t); (a,b)) < \varepsilon$$

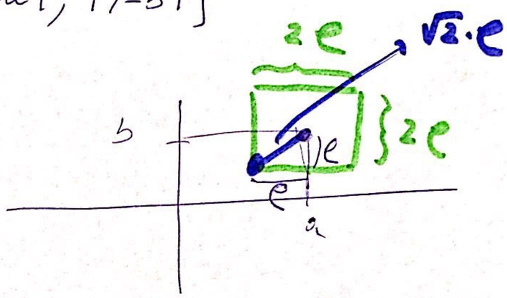
luego, $|f(\mathbf{r}(t)) - L| < \varepsilon$ si $0 < |t - t_0| < \delta$

$\blacksquare$

$$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = dist\,((x,y);(a,b))$$
$$|y-b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = dist\,((x,y);(a,b))$$

$$dist\,((x,y);(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq \sqrt{2\, máx\{(x-a)^2;(y-b)^2\}} =$$
$$= \sqrt{2}\; máx\{|x-a|;|y-b|\}$$





Desigualdades auxiliares