Integración en $\mathbb{R}^2$, en dominios más generales

Clase pasada: integrales iteradas: $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ cont.

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \ ; \quad \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Teorema (Fubini), $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continua.

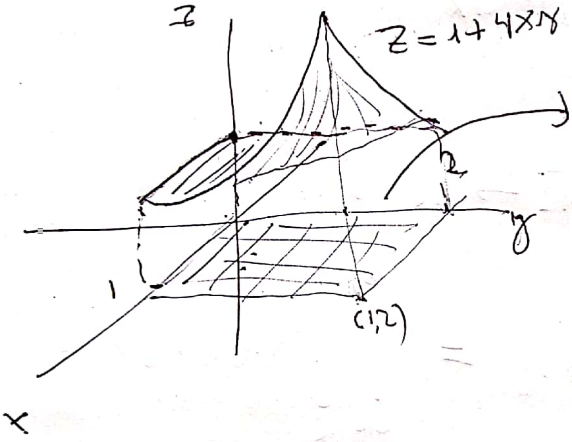
vale

$$\underbrace{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA}_{\text{límite de las sumas de Riemann}} = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx .$$

Ejemplo: Calcular $\iint_{[0,1]\times[0,2]} 1+4xy\,dA = \int_0^1\left(\int_0^2 \underbrace{(1+4xy)}_{\substack{\text{primitiva}\\ \text{respecto de } y\\ (x=cte)}}dy\right)dx =$

$$= \int_0^1\left(\underbrace{y+2xy^2\Big|_{y=0}^{y=2}}\right)dx = \int_0^1 2+8x-\{0\}\,dx = 2x+4x^2\Big|_0^1 = 2+4-0=6.$$

2) Ejemplo: Calcular el volumen del sólido comprendido entre el rectángulo $[0,1]\times[0,2]$ y la gráfica $z = 1+4xy$



volumen: $\iint_{[0,1]\times[0,2]} 1+4xy \, dA = 6.$

Suma de Riemann de $f(x,y)$ en $[a,b]\times[c,d]$

$$S = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \frac{b-a}{n} \cdot \underbrace{\frac{d-c}{m}}_{\text{factor común}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dA$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{d-c}{m} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, \underbrace{y_j^*}_{\text{fijo}}) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{m} \frac{d-c}{m} \overbrace{\left(\int_a^b f(x, y_j^*)\, dx \right)}^{F(y_j^*)}$$

La suma entre paréntesis es la suma de Riemann de 3

$f(x, y_j^k)$ en $[a,b]$
fijo

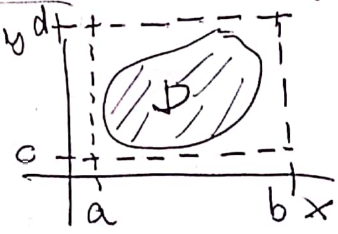
Estamos llamando $F(y_j^k) = \int_a^b f(x, y_j^k)\,dx$; lo que quedó luego de tomar límite $(n \to \infty)$ es una suma de Riemann F $\left(F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \right)$

$$\xrightarrow[m \to \infty]{} \int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Integrales en dominios más generales que rectángulos.

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

D acotado (lo podemos cubrir con un disco)

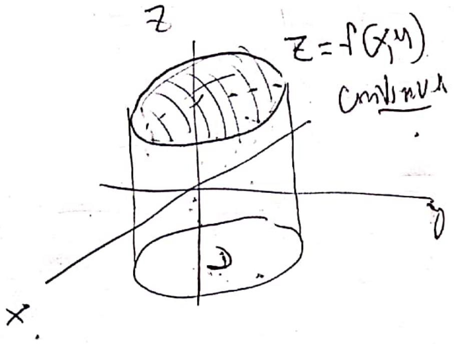


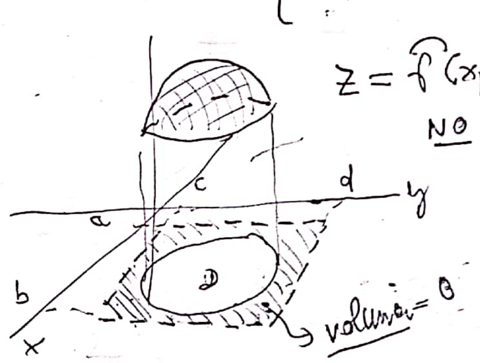
1º cubrimos a D con un rectángulo $[a,b] \times [c,d]$

4

en $[a,b]\times[c,d]$ definimos una extensión de f: se llama

$$\tilde{f} : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R} \ ; \quad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in D \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin D \end{cases}$$



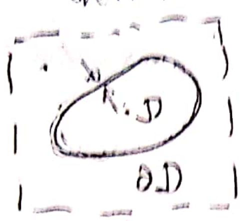


Observación: el volumen del sólido comprendido entre D y $z=f(x,y)$ es igual al volumen comprendido entre $[a,b]\times[c,d]$ y $z=\tilde{f}(x,y)$

Es decir $$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)\,dA .$$

¡definición!

f definida a $[a,b]\times[c,d]$ es discontinua en



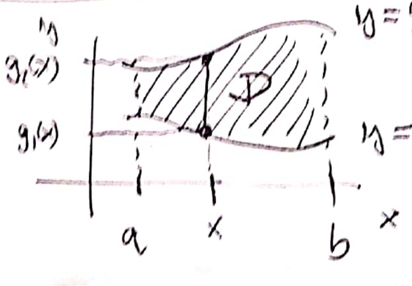
∂D (frontera o borde de D)

$\downarrow$

área $= 0$ → vale Fubini.

Dominios elementales en $\mathbb{R}^2$

Dominios de tipo I:

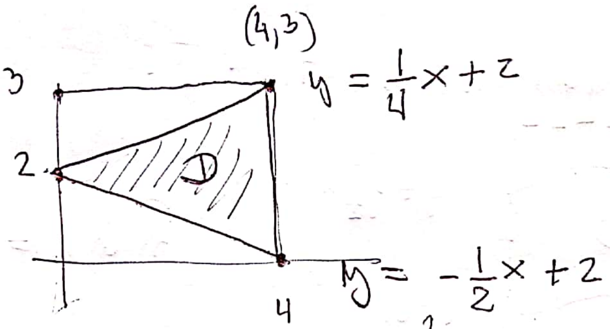


→ continuas en $[a,b]$, $g_1(x) \leq g_2(x)$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \,;\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

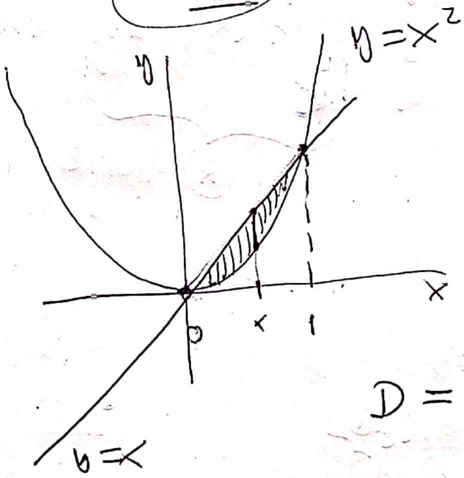
Ejemplos:

1)



$$D = \left\{ 0 \leq x \leq 4 \, ; \, \underbrace{-\frac{1}{2}x + 2}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{\frac{1}{4}x + 2}_{g_2(x)} \right\}$$

2) D el dominio acotado limitado por las líneas $y = x^2$ e $y = x$



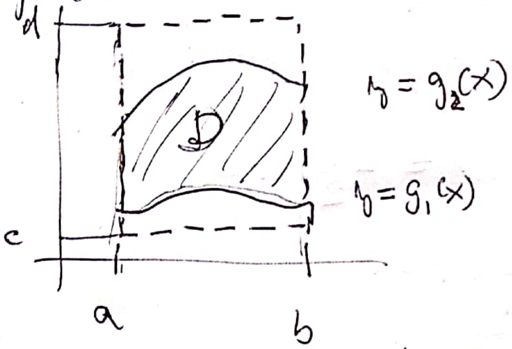
$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x = x^2$$

$$0 = x^2 - x$$

$x = 0$ $\quad$ $x = 1$

$$D = \{ 0 \leq x \leq 1 \, ; \, x^2 \leq y \leq x \}$$

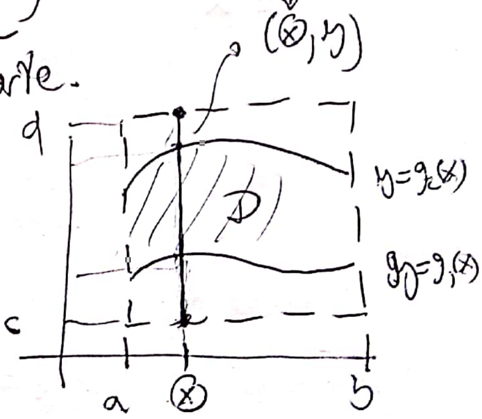
Integrales en dominios de tipo I.



$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & ; \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

$f : D \to \mathbb{R}$; queremos hacer $\iint_D f(x,y)\,dA$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \hat{f}(x,y)\,dA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini!}}}{=} \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d \hat{f}(\overset{\text{fijo}}{x},y)\,dy \right)}_{(*)\ \text{aparte.}} dx$$



$$(*) = \int_c^d \hat{f}(\otimes, y)\,dy$$

$$\hat{f}(\otimes,y) = \begin{cases} 0 & ; \ y \in [c, g_1(\otimes)) \\ f(\otimes,y) & ; \ y \in [g_1(\otimes), g_2(\otimes)] \\ 0 & ; \ y \in (g_2(\otimes), d] \end{cases}$$

$$\circledast = \cancel{\int_{c}^{g_1(x)} 0\, dy} + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy + \cancel{\int_{g_2(x)}^{d} 0\, dy}$$

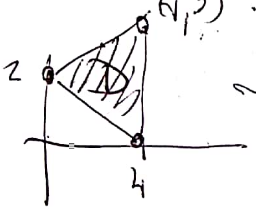
$$= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy .$$

Volvemos a la cuenta principal:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dA = \cdots = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx}$$

$$D = \{ a \leq x \leq b \ ; g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

Ejemplo $\iint_D 3x - 2y \, dA$; D triángulo de vértices $(0,2)$; $(4,0)$; $(4,3)$.



$$D = \left\{ 0 \leq x \leq 4 \ ; \underbrace{-\frac{1}{2}x + 2}_{g_1} \leq y \leq \underbrace{\frac{1}{4}x + 2}_{g_2} \right\}$$

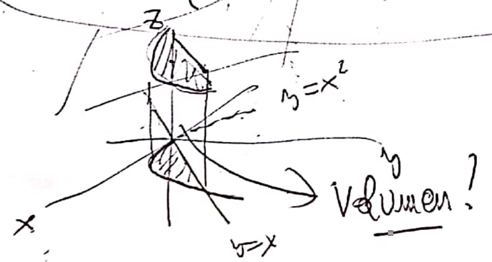
$$\iint_D 3x-2y\,dA = \int_0^4 \left(\int_{-\frac{1}{2}x+2}^{\frac{1}{4}x+2} (3x-2y)\,dy\right)dx$$

primitiva respecto de y

$$= \int_0^4 \left(3xy - y^2 \Big|_{y=-\frac{1}{2}x+2}^{y=\frac{1}{4}x+2} \right) dx = \int_0^4 3x\cdot\left(\frac{1}{4}x+2\right) - \left(\frac{1}{4}x+2\right)^2 -$$

$$-\left\{ 3x\cdot\left(-\frac{1}{2}x+2\right) - \left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2 \right\} dx = \int_0^4 \left(\text{cuadrática en } x\right) dx = \cdots$$

Otro ejemplo: Calcular el volumen comprendido entre $D = \{ 0 \le x \le 1 ;\ x^2 \le y \le x \}$ y la gráfica $z = 1 + 2x + 3y$



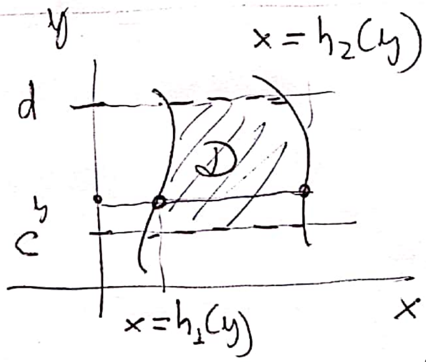
$$\iint_D 1+2x+3y\,dA =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (1+2x+3y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(y + 2xy + \frac{3}{2}y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx$$ 10

números

$$= \int_0^1 x + 2x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \left\{ x^2 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^4 \right\} dx = \cdots$$

Dominios de tipo II.



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; c \leq y \leq d \; ; \; h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \right\}$$

Escaneado con CamScanner

Razonando como antes: 1° cubrimos a D con un rectángulo
2° definimos $\tilde{f}$
3° integramos $\tilde{f}$ con Fubini → primero dx

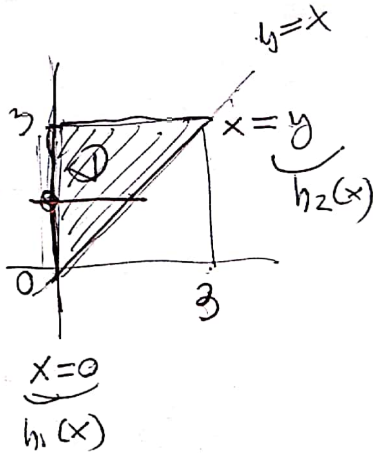
$f : D \to \mathbb{R}$
continua

$$D = \{ c \leq y \leq d \; ; \; h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Ejemplo: Calcular $\iint_D e^{y^2}\, dA$, $D =$

$$D = \{ 0 \leq y \leq 3 \; ; \; 0 \leq x \leq y \}$$



$$\iint_D e^{y^2}\,dA = \int_0^3 \left(\int_0^y \underbrace{e^{y^2}}_{\text{primitiva respecto de } x!} dx \right) dy \qquad R$$

$$= \int_0^3 \left(x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \int_0^3 y e^{y^2} - 0 \, dy$$

$$= \int_0^3 \underbrace{y e^{y^2}}_{\text{sustitución!}} dy = \frac{e^{y^2}}{2} \Big|_0^3 = \frac{e^9}{2} - \frac{1}{2}.$$