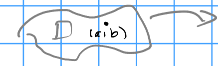
Práctica 3: Límites

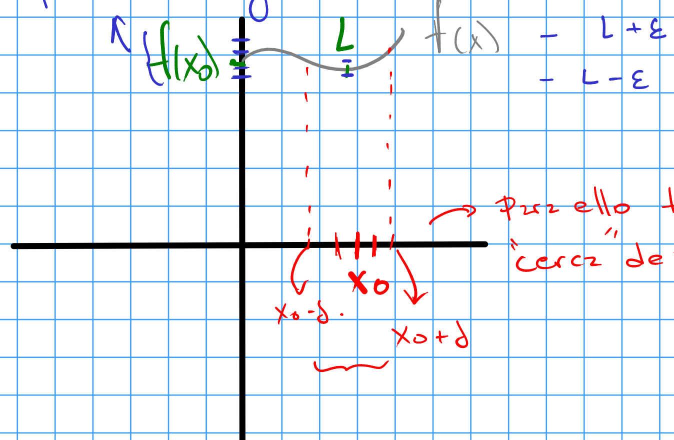


Definición: Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$ (con $D \subseteq \mathbb{R}^2$) cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a,b), decimos que el límite cuando (x,y) tiende a (a,b) de $f(x,y)$ es L si:

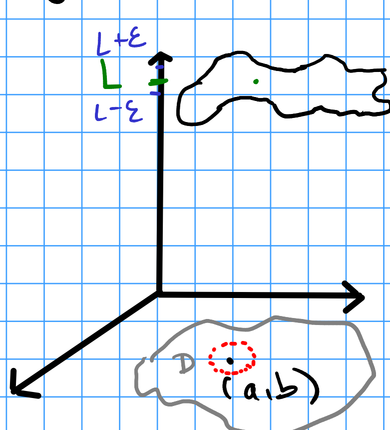
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Idea:

Quiero asegurar que las imágenes estén cerca (en la banda $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$)



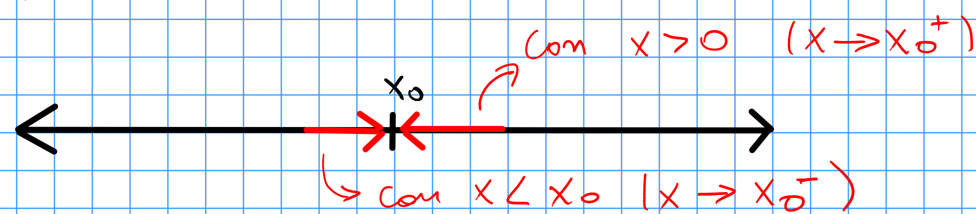
Decimos que el $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tq si $0 < d((x,y),(a,b)) < \delta$ entonces $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.



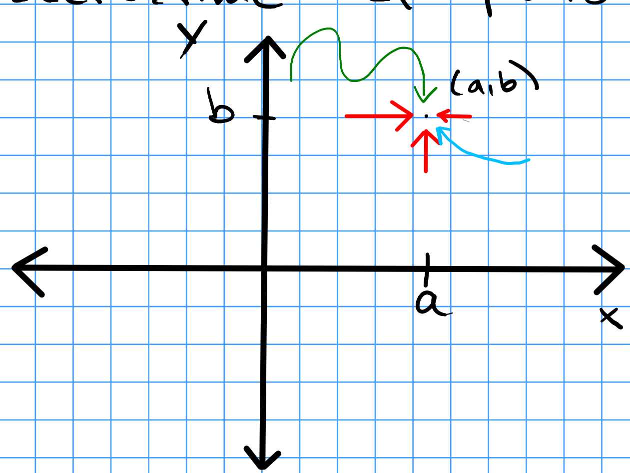
Obs importante:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$:

En $\mathbb{R}$ tengo dos formas de acercarme a "x_0":



Sin embargo, en el plano hay muchas (infinitas) formas de acercarme al punto (a,b):



Como la definición de límite refiere a que $f(x,y)$ tiende a L cuando (x,y) está cerca de (a,b) en términos de distancia (y no habla de la forma de aproximación), de existir el límite, tiene que dar lo mismo a lo largo de cualquier trayectoria

Ejemplos:

1) Calcular $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x + 2y$.

2) Probar que $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \operatorname{sen}(x\cdot(y-2)).y = 0$.

3) calcular

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

4) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x).y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1) Calcular $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x+2y$.

$f(x,y) = x+2y$. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

En este caso podemos reemplazar y tenemos un candidato a límite.

También podemos calcular con $x=1$ el límite de una variable $\lim_{y\to 2} f(1,y) = \lim_{y\to 2} 1+2y = 5$

También podemos calcular con $y=2$: $\lim_{x\to 1} f(x,2)$

$= \lim_{x\to 1} x+4 = 5$.

Por ejemplo podríamos tomar también $y=2x$

$\sigma(x) = (x, 2x)$ Cuando $x\to 1$ $\sigma(x)\to(1,2)$

Tomamos $\lim_{x\to 1} f(x,2x) = \lim_{x\to 1} x+4x = \lim_{x\to 1} 5x = 5$.

¡Tengo que ver que $(x,y)\to(1,2)$!

Nos convencimos de que el límite debería ser 5. Vamos a probarlo:

Sea $\varepsilon > 0$. Arrancamos por $|f(x,y) - L|$ y usando desigualdades vamos a tratar de llegar a $\|(x,y)-(a,b)\|$.

En nuestro caso: $|z+w| \leq |z|+|w|$ (desig. triangular)

Sea $\varepsilon>0$

$$|x+2y-5| = |\overbrace{x-1}^{z} + \overbrace{2y-4}^{w}| \leq \underbrace{|x-1+2y-4|}_{\to 0} \leq \underbrace{|x-1|}_{\to 0}+\underbrace{|2y-4|}_{\to 0}$$

$$\underbrace{|x-1|}_{\to 0} + 2\underbrace{|y-2|}_{\to 0} \leq \underbrace{\|(x,y)-(1,2)\|}_{\to 0} + 2\underbrace{\|(x,y)-(1,2)\|}_{\to 0.}$$

$|x-1| \leq \|(x,y)-(1,2)\|$

$|y-2| \leq \|(x,y)-(1,2)\|$

Cálculos auxiliares:

$$(*) \quad |x-a| \leq \|(x,y)-(a,b)\|$$

$$|y-b| \leq \|(x,y)-(a,b)\|$$

$$(*): \quad |x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \|(x,y)-(a,b)\|.$$

Volviendo a nuestro caso:

Queríamos encontrar una condición del tipo $\underbrace{\|(x,y)-(1,2)\|}<\delta$.

$\hookrightarrow$ Queremos que aparezca en la cadena de desig.

Recapitulando:

Empezamos con $|f(x,y)-5| = |x+2y-5|$

$\leq \dots \leq 3\|(x,y)-(1,2)\| < \varepsilon$

Y tenemos para elegir δ: si $\delta = \varepsilon/3$

$\|(x,y)-(1,2)\| < \delta = \varepsilon/3$

Obtenemos $3\|(x,y)-(1,2)\| < \varepsilon$

Esto prueba que el $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 5.$

Conclusión: Dado $\varepsilon>0$, $\|(x,y)-(1,2)\| < \varepsilon/3=\delta \Rightarrow |f(x,y)-5|<\varepsilon.$

2) Calcular

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$

Sol:

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\quad Dom(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$

Como antes buscamos 1ero un candidato x curvas:

$x=0$: $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ $\Big\}\neq$'s.

$\underline{y=0}$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Si existiera el límite, tendría que dar lo mismo por cualquier curva. Como encontramos dos curvas donde el lim dió distinto **el Límite no existe**.

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$

Probamos 1ero por curvas:

$x=0$ $\quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = 0.$

$y=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$

$(*) \to$ si tratamos de acotar.

Probamos con la curva $y = x$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$(x,x) \xrightarrow[x\to 0]{} (0,0)$ (y estábamos mirando el lím en $(0,0)$)

Como encontramos dos curvas que dan $\neq$, el lím no existe.

(*)

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x|\cdot|y|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|\cdot\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|^2} = \underbrace{1}_{\not\to 0}$$

(no we sirve)