Campos en $\mathbb{R}^3$

$F = F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

(abreviado: $F = (P,Q,R)$)

Un campo F es conservativo si existe $f = f(x,y,z)$ /

$F = \nabla f$ ($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) : $\begin{cases} P = f_x \\ Q = f_y \\ R = f_z \end{cases}$, f es un potencial de F.

Operaciones sobre campos vectoriales (rotacional, divergencia)

Rotacional de un campo en $\mathbb{R}^3$:

Definición: $F = (P,Q,R)$; P, Q, R tienen derivadas parciales. Llamamos rotacional de F

$$\operatorname{rot}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Observación: $\operatorname{rot}(F)$ es un nuevo campo vectorial.

regla para acordarse de rot(F):

$$\mathrm{rot}(F) \underset{\text{"det"}}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

← versores de $\mathbb{R}^3$

← operaciones "derivada parcial"

$$= i.\frac{\partial}{\partial y}R + k.\frac{\partial}{\partial x}Q + j\frac{\partial}{\partial z}P - k\frac{\partial}{\partial y}P - i\frac{\partial}{\partial z}Q - j\frac{\partial}{\partial x}R$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = \nabla \times F$$

Ejemplo: $F(x,y,z) = (xy + z^2, xyz, x^2 + y^2 - z^2)$ ← No es conservativo.

$$\mathrm{rot}(F) = (2y - xy, 2z - 2x, yz - x)$$

Teorema 1 $f = f(x,y,z)$ es C^2 $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}(\nabla f) = (0,0,0)$

Consecuencia: si F es un campo conservativo (es decir $F = \nabla f$) $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}(F) = (0,0,0)$.

Otro ejemplo:

$$F(x,y,z) = (yz + 2x,\ xz - 2y,\ xy)$$

¿es conservativo?

$$\text{rot}(F) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz+2x & xz-2y & xy \end{vmatrix} = i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z - i \cdot x - j \cdot y - kz$$

$$= (x - x,\ y - y,\ z - z) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ F podría ser conservativo.

Teorema 2 $F = (P,Q,R)$ con dominio $\mathbb{R}^3$ (también sirve una Bola)

si P,Q,R son C^1, $\text{rot}(F) = (0,0,0) \Longrightarrow F$ es conservativo

(es decir: hay f / $\nabla f = F$).

Entonces el campo $F(x,y,z) = (yz + 2x,\ xz - 2y,\ xy)$ es conservativo. Hallemos entonces un potencial f

$f = f(x,y,z)$ / $\nabla f = F$.

f / ① $\begin{cases} f_x = yz + 2x \\ f_y = xz - 2y \\ f_z = xy \end{cases}$ ② ③

4

empiezo con ① $\underset{\text{y,z constantes}}{f_x = yz + 2x} \rightarrow \underline{f = xyz + x^2 + C(y,z)}$

lo reemplazamos en ②: $\boxed{xz - 2y = f_y = \left(xyz + x^2 + C(y,z)\right)_y = xz + C_y(y,z)}$

$\cancel{xz} - 2y = \cancel{xz} + C_y(y,z)$

$\underbrace{-2y = C_y(y,z)}_{\text{coherente}} \rightarrow C(y,z) = -y^2 + C(z)$

z cte

pasamos: $\underline{f = xyz + x^2 - y^2 + C(z)}$

lo reemplazamos en ③: $\boxed{xy = f_z = \left(xyz + x^2 - y^2 + C(z)\right)_z = xy + C'(z)}$

$\cancel{xy} = \cancel{xy} + C'(z)$; $\underset{\text{coherente}}{0 = C'(z)} \rightarrow C(z) = C$ (constante)

$f(x,y,z) = xyz + x^2 - y^2 + c$

5

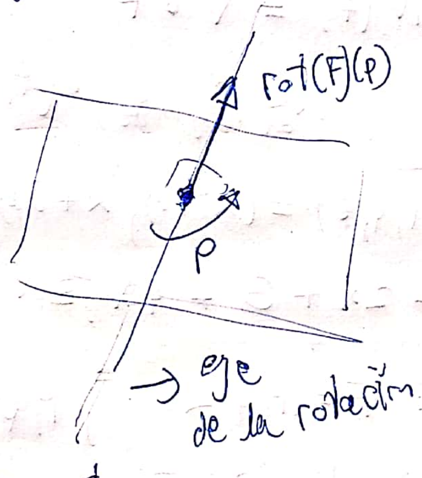
¿Qué mide $rot(F)$?

Si $F(x,y,z)$ = campo de velocidades de un fluido
($F(x,y,z)$ = velocidad del punto (x,y,z))

$rot(F)(p)$ describe cómo rota el campo en p

$|rot(F)(p)|$ = intensidad de la rotación

dirección y sentido de $rot(F)(p)$



Si $rot(F)(p) = (0,0,0) \rightarrow$ en p NO rota.

9/ Divergencia de un campo vectorial

Definición: $F=(P,Q,R)$, P,Q,R tienen derivadas parciales, llamamos divergencia de F

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z$$

Obs: $\operatorname{div}(F)$ es una función a valores numéricos.

$$\operatorname{div}(F) = \underbrace{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)} \cdot F$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P,Q,R)$$

Ejemplo: $F(x,y,z) = (x^2+y, x+3y, 2xyz^2)$;

$$\operatorname{div}(F) = 2x + 3 + 4xyz.$$

Teorema: $F=(P,Q,R)$, P,Q,R son C^2

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$$

Es un criterio para descartar que un campo sea un rotacional.

Ejemplo: $F(x,y,z) = (x^2+y,\ x+3y,\ 2xyz^2)$

¿existe un campo G / $rot(G) = F$?

$div(F) = 2x + 3 + 4xyz \neq 0 \Rightarrow F$ NO es $rot(G)$.

¿Qué mide $div(F)$?

$F(x,y,z)$ = campo de velocidades de un fluido.

$div(F)(p)$ = velocidad con que el fluido se está expandiendo/comprimiendo en p.

Si $div(F) = 0$ en todo (x,y,z): el campo es incompresible.

Prueba de la afirmación 9: $rot(\nabla f) = (0,0,0)$ f es C^2

$$rot(\nabla f) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = (\underbrace{f_{zy} - f_{yz}}_{=0},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy}) = (0,0,0).$$

8

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$ $\quad$ P, Q, R son C^2

$$\operatorname{div}\Big(\underbrace{R_y - Q_z}_{\substack{\text{derivado} \\ \frac{\partial}{\partial x}}}, \underbrace{P_z - R_x}_{\frac{\partial}{\partial y}}, \underbrace{Q_x - P_y}_{\frac{\partial}{\partial z}}\Big) = \cancel{R_{yx}} - \cancel{Q_{zx}} + \cancel{P_{zy}} - \cancel{R_{xy}} + \cancel{Q_{xz}} - \cancel{P_{yz}}$$

$$= 0.$$