Alvarez Ricardo Javier
DNI: 40851203

Primer Recuperatorio - Segundo Parcial - 10/08/2020

1) Sea $f(x,y)=xe^{2y}$ definida en $\mathbb{R}^2$. Hallar un valor aproximado de $1{,}01.e^{0{,}01}$ usando el Pol. de Taylor de orden dos de f

Sol: • Como $1{,}01.e^{0{,}01}$ está muy cerca de $1.e^{0}$, elijo centrar el polinomio de Taylor en $(x_0,y_0)=(1,0)$.

• Para hallar el pol. de Taylor de f de orden 2 voy a necesitar las derivadas parciales primeras y segundas de f, y esto es posible ya que f es C^2.

• El pol. de Taylor de f de orden 2, centrado en $(x_0,y_0)=(1,0)$ tendrá esta forma:

$$p(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0).(x-x_0)+f_y(x_0,y_0).(y-y_0)+\frac{1}{2!}.\left[f_{xx}(x_0,y_0).(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0).(x-x_0).(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0).(y-y_0)^2\right]$$

• Hallo las derivadas correspondientes

$f(x,y)=xe^{2y}$, $f(1,0)=1$

$f_x(x,y)=e^{2y}$, $f_x(1,0)=1$

$f_y(x,y)=2x.e^{2y}$, $f_y(1,0)=2$

$f_{xx}(x,y)=0$, $f_{xx}(1,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=2.e^{2y}=f_{yx}(x,y)$, $f_{xy}(1,0)=2=f_{yx}(1,0)$

$f_{yy}(x,y)=4xe^{2y}$, $f_{yy}(1,0)=4$

• El pol de Taylor me quedaría así:

$$p(x,y)=1+(x-1)+2.y+\frac{1}{2}.\left(4.(x-1).y+4.y^2\right)$$

$$p(x,y)=1+(x-1)+2y+2(x-1)y+2y^2$$

Escaneado con CamScanner

Suarez Ricardo Javier

Como me pedían hallar un valor aproximado de $1{,}01\cdot e^{0{,}01}$, uso el polinomio de Taylor que construí, de manera que:

$$f(1{,}01;0{,}005) \simeq p(1{,}01;\underbrace{0{,}005}_{\frac{1}{200}})$$

aux:
Si
$x\cdot e^{2y} = 1{,}01\,e^{0{,}01}$
$\Rightarrow \boxed{x = 1{,}01}$
$2y = 0{,}01$
$\boxed{y = \frac{1}{200} = 0{,}005}$

$$p(1{,}01;0{,}005) = 1 + 0{,}01 + 0{,}01 + 2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}005 + \left(\frac{1}{200}\right)^2$$

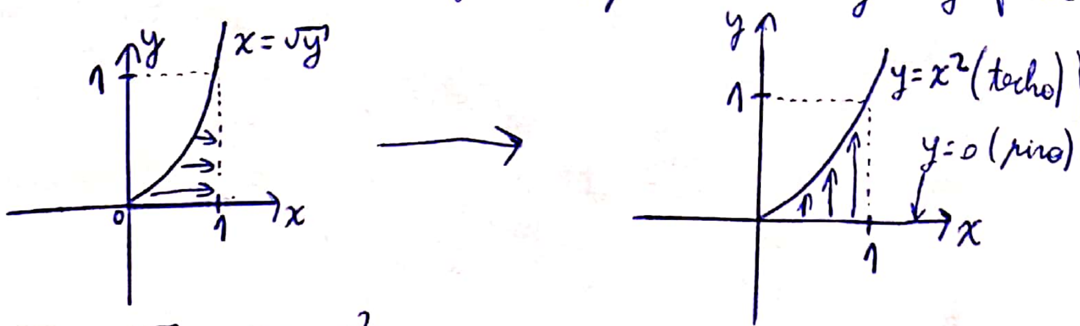
$$p(1{,}01,0{,}005) = \frac{8161}{8000} = 1{,}020125$$

$$\boxed{\therefore\ \underbrace{f(1{,}01;0{,}005)}_{1{,}01\cdot e^{0{,}01}} \simeq 1{,}020125}$$

3) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{sen(x)}{x}\,dx\,dy$

Aquí observo que para poder resolver la integral es más conveniente cambiar el orden de integración, para eso voy a graficar la región de integración.



• En vez de mirar la región como una de tipo II ahora la miro como una de tipo I

$\Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$ con y^+

$$\therefore \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{sen(x)}{x}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{x^2} \frac{sen(x)}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{sen(x)}{(x)}\cdot y\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

→ sigue

Escaneado con CamScanner

Juarez Ricardo Javier

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{(x)} \cdot \left(y \Big|_{y=0}^{y=x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{sen(x)}{\cancel{(x)}} \cdot x^{\cancel{2}}\, dx = \int_0^1 sen(x) \cdot x \, dx \overset{*}{=} sen(x)\Big|_0^1 - \left(x\, Cos(x) \Big|_0^1 \right) =$$

$$= sen(1) - \left(Cos(1) \right)$$

$$\boxed{= sen(1) - Cos(1)}$$

(*) **Aux:**

$u = x \qquad dv = sen(x)\,dx$

$du = 1\,dx \qquad v = -Cos(x)$

Usando $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v\, du =$

$= x \cdot -Cos(x) - \int -Cos(x)\,dx =$

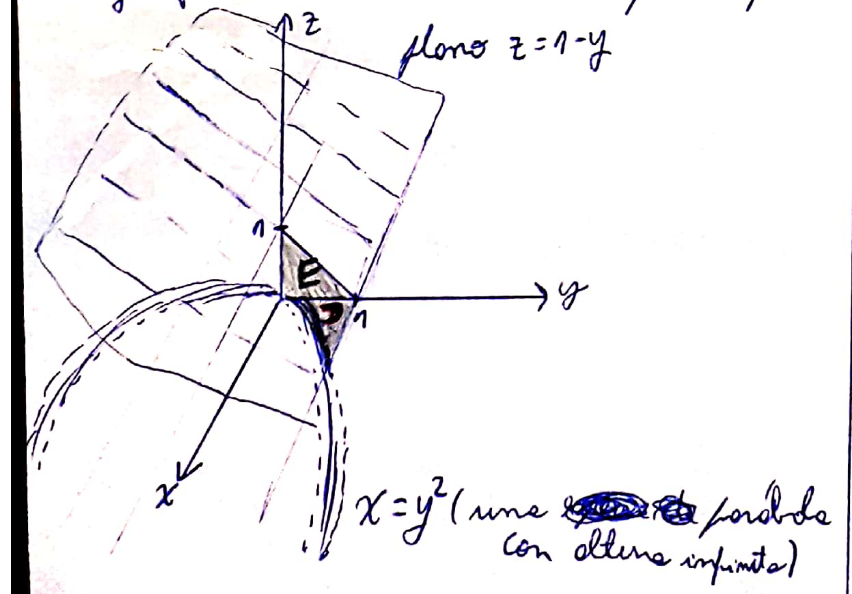
$= -Cos(x) \cdot x - (-sen(x))$

$= -Cos(x) \cdot x + sen(x)$

$= sen(x) - x\,Cos(x)$

b) $\iiint_E (y+z)\, dV$ donde E es el sólido delimitado por el plano $z = 1-y$ y la superficie $x = y^2$ en el primer octante $(x, y, z \geq 0)$.

· Grafico cuál es el sólido E para poder escribir los límites de la región.

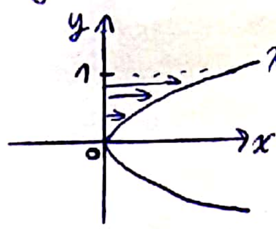


· Como los puntos de z empiezan en $z=0$ (por dato de primer octante) como "piso", y terminan en el plano $z = 1-y$ como techo, entonces

$0 \leq z \leq 1-y$

· Para la región D que se encuentra en el plano xy $(z=0)$, veo que

$0 \leq y \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq y^2$



solo nos interesa la parte y^+ por dato de primer octante

Suarez Ricardo Javier

De esta manera, los límites del sólido E quedarían así:

$$\iiint_E (y+z)\,dV = \int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y}(y+z)\,dz\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{y^2}\left(y.z+\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_0^1\int_0^{y^2}\left(y.(1-y)+\frac{(1-y)^2}{2}\right)dx\,dy = \int_0^1\left(y.(1-y).x+\frac{(1-y)^2}{2}.x\Big|_{x=0}^{x=y^2}\right)dy =$$

$$\int_0^1\left(y^3.(1-y)+\frac{y^2.(1-y)^2}{2}\right)dy = \int_0^1\left(y^3-y^4+\frac{y^2.(y^2-2y+1)}{2}\right)dy =$$

$$\int_0^1\left(\cancel{y^3}-y^4+\frac{y^4}{2}-\cancel{\frac{2y^3}{2}}+\frac{y^2}{2}\right)dy = \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2}\right)dy = \left(\frac{y^3}{6}-\frac{y^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{15}}$$

4) La densidad de un sólido esférico de radio R está dada por $(1+\rho^3)^{-1}$ donde ρ es la distancia al centro de la esfera. Calcular la masa total de la esfera.

• La fórmula de la masa total de un cuerpo es:

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$$

• En este caso:

$$\iiint_E \left(1+\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3\right)^{-1} dx\,dy\,dz =$$

En coordenadas esféricas tengo que:
$$\begin{cases} x=\rho\cos(\theta).\operatorname{sen}(\phi) \\ y=\rho\operatorname{sen}(\theta).\operatorname{sen}(\phi) \\ z=\rho\cos(\phi) \end{cases}$$

Como es un <u>sólido esférico de radio R</u>

$$E=\{0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le R\}$$

→ sigue

Escaneado con CamScanner

Alvarez Ricardo Javier

⑤

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dV = \iiint_E \left(1 + \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3\right)^{-1} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{E^*} (1+\rho^3)^{-1} \cdot \underbrace{\rho^2 \cdot \operatorname{sen}(\phi)}_{\text{Jacobiano}}\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho^2}{1+\rho^3} \cdot \operatorname{sen}(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \rho^3+1 \\ dt &= 3\rho^2\, d\rho \end{aligned}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\phi) \cdot \int_1^{R^3+1} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\, dt\; d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen}(\phi) \cdot \frac{\ln(t)}{3}\Big|_1^{R^3+1} \right) d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\phi) \cdot \frac{\ln(R^3+1)}{3}\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(R^3+1)}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\ln(R^3+1)}{3} - \cos(\phi)\Big|_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ln(R^3+1)}{3} + 2 \right) d\theta = \frac{\ln(R^3+1)}{3} \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} + 2\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \boxed{\frac{\ln(R^3+1)}{3} \cdot 2\pi + 4\pi}$$

Escaneado con CamScanner