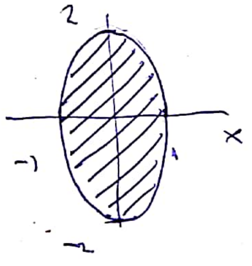
Teorica 20: Extremos (absolutos) de funciones definidas en regiones.

$$f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dominio}}}{A} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

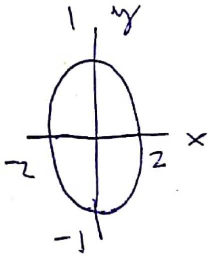
A es un conjunto cerrado. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado si los puntos que están en el borde de A (frontera de A) (en símbolos ∂A), forman parte de A.

Ejemplos:

1) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{y^2}{4} \textcircled{$\leq$} 1 \right\}$

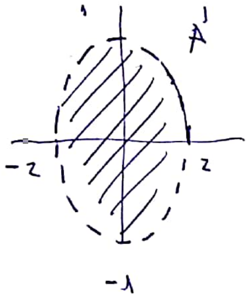


la frontera ∂A :



$\partial A \subset A \Rightarrow A$ es cerrado.

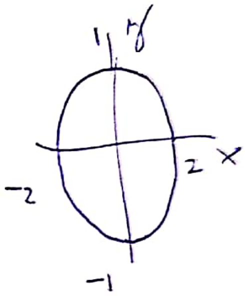
2) $A' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \}$



A' NO es cerrado.

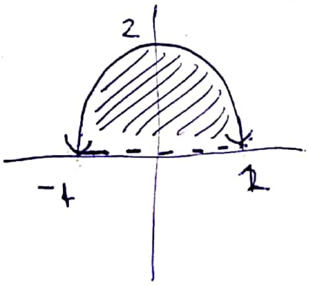
$\partial A' = \partial A$

$\partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \}$.

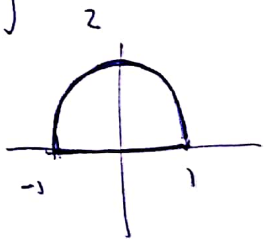


¿es cerrado? $\partial(\partial A) = \partial A$ → es cerrado

3) $A'' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \ \ y > 0 \}$



$\partial A'' =$



A'' NO es cerrado.

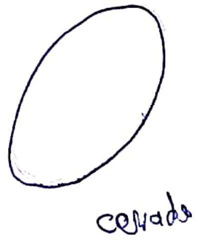
Definición (analítica): P está en la frontera de A ($P \in \partial A$) si cumple: para cualquier radio $r>0$, $D_r(P)$ (disco de centro P y radio r) / en $D_r(P)$ hay puntos de A y puntos que NO son de A

Volvemos a $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Buscamos extremos de f en A.
$\uparrow$ conjunto cerrado.

---

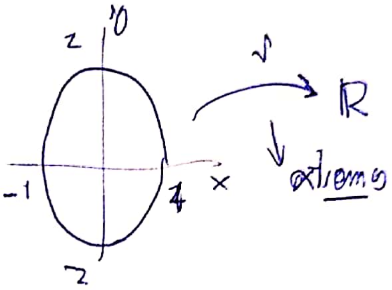
1. A una curva

ó



, que además es un conjunto cerrado de A.

$A = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$



$\downarrow$

necesitamos parametrizar A.

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

$x = \cos t \;,\; \frac{y}{2} = \operatorname{sen} t \;,\; t \in [0, 2\pi]$

$f(x,y) = x - y.$

$r(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t) \;,\; t \in [0, 2\pi].$

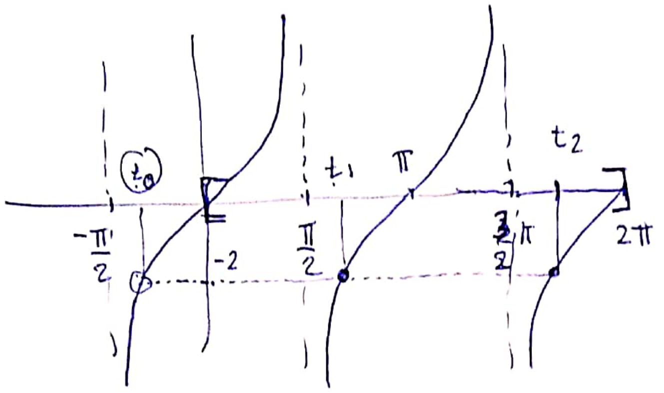
extremos de f en A : $f \circ r(t) \;,\; t \in [0, 2\pi].$

$g = f \circ r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$g(t) = f \circ r(t) = \cos t - 2 \operatorname{sen} t$. Estudiamos el crecimiento de g

$g' = -\operatorname{sen} t - 2 \cos t = 0 \qquad -\operatorname{sen} t = 2 \cos t \qquad (\cos t \neq 0)$

$\operatorname{tg}(t) = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -2 \;\rightarrow\; t_0 = \operatorname{arctg}(-2)$



$\rightarrow t_1 = t_0 + \pi$

$\rightarrow t_2 = t_0 + 2\pi$

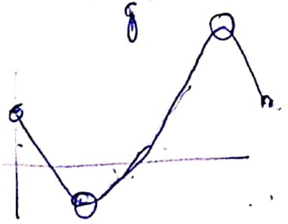
$g = \cos(t) - 2\operatorname{sen} t$

$g' = -\operatorname{sen} t - 2\cos t$

	0	$(0, t_1)$	t_1	(t_1, t_2)	t_2	$(t_2, 2\pi)$	2π
g'		$\pi/2 : g'(\frac{\pi}{2}) = -1$ ⊖	0	$\pi : g'(\pi) = 2$ ⊕	0	⊖	
g		↘	mínimo local ABSOLUTO	↗	máximo local ABSOLUTO	↘	

$g(0) = 1$

$g(2\pi) = 1$



Teorema (Weierstrass) VERSIÓN 1

$g:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua $\Rightarrow$ g alcanza máximo y mínimo absolutos en $[a,b]$.

---

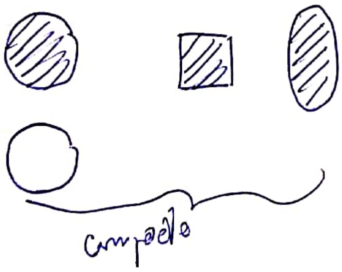
2) Otros dominios en $\mathbb{R}^2$.

Definición: $A \subset \mathbb{R}^2$ se llama compacto si cumple que

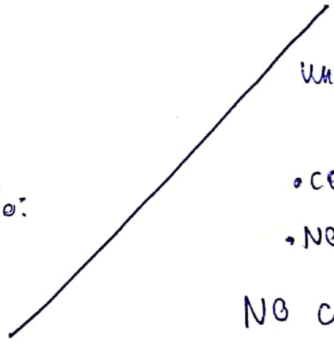
- A es cerrado
- A es acotado → hay un disco D / $A \subset D$.

(lo podemos cubrir con un disco.

Ejemplo:



NO compacto:
- No cerrado



una recta
- cerrado
- NO acotado

NO compacto

Teorema (Weierstrass) VERSION 2

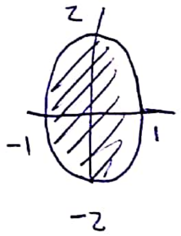
$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, A cerrado y acotado (compacto)

$\Rightarrow$ f alcanza máximo absoluto y mínimo absoluto en A.

Ejemplo:

Hallar los extremos absolutos de $\overbrace{f(x,y) = x - y}^{\text{continua}}$

en $A = \left\{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$



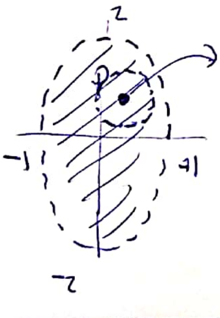
- cerrado
- acotado

$\Rightarrow$ hay max y min absolutos.

Buscamos en el interior, y en el borde

en el interior

$A - \partial A$



$\rightarrow$ en P hay un extremo de f (absoluto)

$\Rightarrow$ P es extremo local de f $\Rightarrow$ P es punto crítico de f. $\Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$; en este ejemplo: $\begin{matrix} f_x = 1 \\ f_y = -1 \end{matrix}$ $\rightarrow$ NO HAY EXTREMOS EN EL

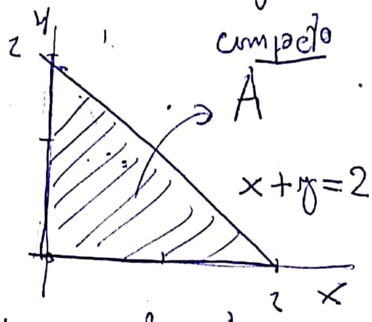
INTERIOR DE A.

en $\underline{\partial A}$: $\partial A : \{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ → ya lo resolvimos. encontramos

$P_1 = (\cos t_1, 2 \operatorname{sen} t_1)$, $P_2 = (\cos t_2, 2 \operatorname{sen} t_2)$

mínimo de f en A   máximo de f en A.

Otro ejemplo: Dominio A = triangulo de vértices (0,0) ; (2,0) ; (0,2) (con el interior). compacto



$f(x,y) = -x^2 + 2x - 3y^2 + 6y + xy$

continua

⇒ hay extremos absolutos de f en A.

- En el interior: puntos críticos de f (que estén en el interior de A)

$$\begin{cases} f_x = -2x + 2 + y = 0 \longrightarrow y = 2x - 2 \\ f_y = -6y + 6 + x = 0 \end{cases}$$

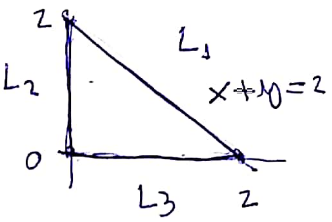
$$\downarrow$$

$$-6(2x-2) + 6 + x = 0$$

$x = \frac{18}{11}$; $y = \frac{14}{11}$ $\qquad$ $\cancel{P_1 = \left(\frac{18}{11}, \frac{14}{11}\right)}$ **NO** esté en el interior de A.

$\frac{18}{11} + \frac{14}{11} = \frac{32}{11}$ casi 3

- en el **Borde**



$x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$

posibles extremos en L_1 : parametrizamos $(x, 2-x)$, $x \in [0,2]$

" " " L_2 : " $(0, y)$, $y \in [0,2]$

" " " L_3 : " $(x, 0)$, $x \in [0,2]$

$f(x, 2-x) = -x^2 + 2x - 3(2-x)^2 + 6(2-x) + x(2-x)$ en $[0,2]$. P_1, P_2 (max y min)

$f(0,y) = -3y^2 + 6y$ en $[0,2]$ P_3, P_4 (max y min)

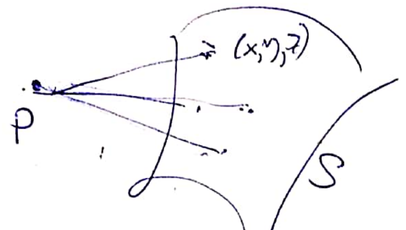
$f(x,0) = -x^2 + 2x$ en $[0,2]$ P_5, P_6 (max y min)

$\Big\}$ f en P_1, P_2, P_3, P_4 P_5, P_6 ↓ donde

vale más : máximo) absoluto de f a A.
donde vale menos mínimo)

Problemas de distancia

Hallar la distancia mínima (o máxima) de una curva/superficie a un punto fijo P.



cuál está más próximo.

Ejemplo Hallar el punto (o los puntos) de la superficie $\overbrace{x+y+z^2=1}^{S}$ que está más próximo a (0,0,0). La función a considerar es la distancia entre $(x,y,z) \in S$ y $(0,0,0)$: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ que sea mínima

↳ lo será cuando lo que está adentro es mínimo

$f = x^2+y^2+z^2.$

entre (x,y,z) que están en S: que cumplan $\boxed{x+y+z^2=1}$

Cerrado

$\boxed{z^2 = 1-x-y}$

nueva función: $g(x,y) = x^2+y^2+1-x-y$

mínimo de esta función.

puntos críticos de g:
$$\begin{cases} g_x = 2x-1 = 0 \\ g_y = 2y-1 = 0 \end{cases} \rightarrow P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

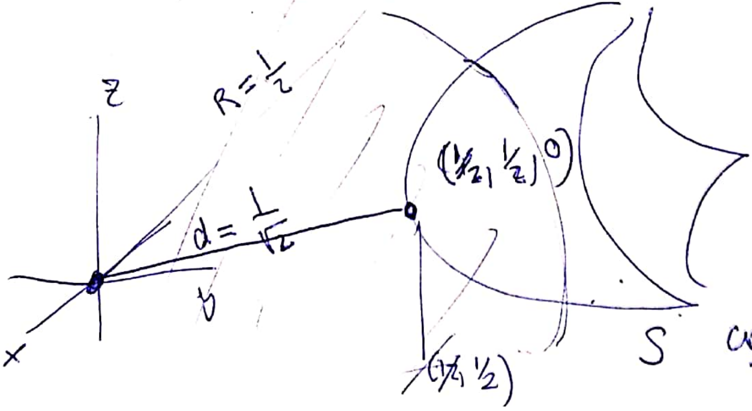
$$Hg = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2>0;\ \det 4>0 \rightarrow \text{a} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ hay mínimo local}$$

$x=\frac{1}{2}$

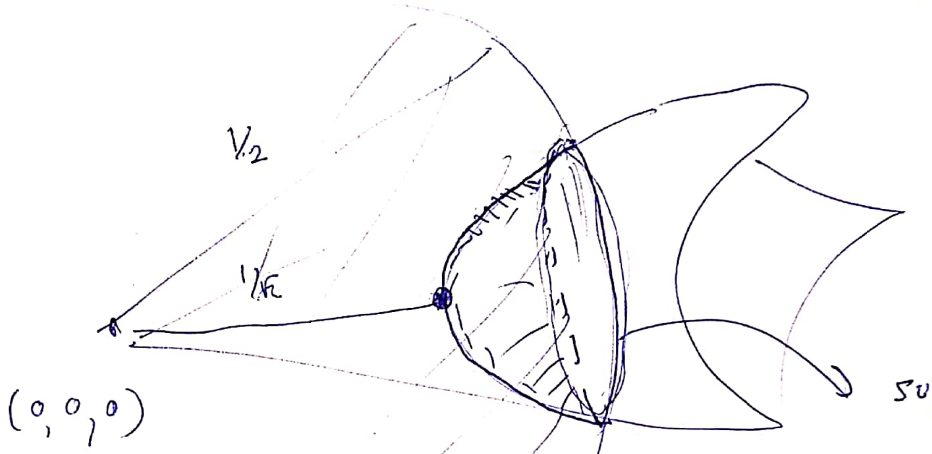
$y=\frac{1}{2}$

$¿z=?$

$z^2=1-x-y=0$



compacto? NO



superficie S ∩ Bola

sí es compacto

Bola cerrada de radio $= \frac{1}{2}$

la distancia tiene mínimo

máximos

mínimo $(d = \frac{1}{2})$

S ∩ Bola cerrada de radio $\frac{1}{2}$

Teorema (W. - versión 3)

$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua

A cerrado y acotado

el borde está incluido

lo tapa una bola

f alcanza máximo y mínimo absolutos en A.

en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ la distancia es mínima.