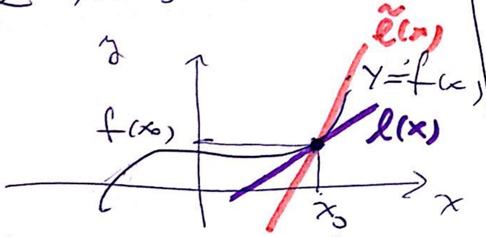
Teórica 12: Diferenciación

Sección 14.4 Stewart

Ejercicios 9 a 13, Práctica 4

Derivadas en una variable revisitadas

¿qué es la recta tangente a un gráfico?



La recta tangente es aquella que mejor aproxima a f entre todas las rectas.

¿qué significa esto?

$$\ell(x) = \underbrace{m}_{\text{incógnita}}(x-x_0) + f(x_0)$$

$$f(x) = \ell(x) + \text{error}.$$

$$f(x) = m(x-x_0) + f(x_0) + \text{error}$$

$$\text{error} = f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)$$

Tener una buena aproximación significa que el error debe ser pequeño en términos relativos. Esto es

$$\text{error} \ll |x-x_0|$$

Decimos que

error $<<|x-x_0|$

si $\dfrac{\text{error}}{|x-x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

$f(x)$ tiene una recta tangente $l(x)$ en x_0 si

$$l(x) = m(x-x_0) + f(x_0)$$

y $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-l(x)}{|x-x_0|} = 0$.

Pero, si

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}, \text{ entonces}$$

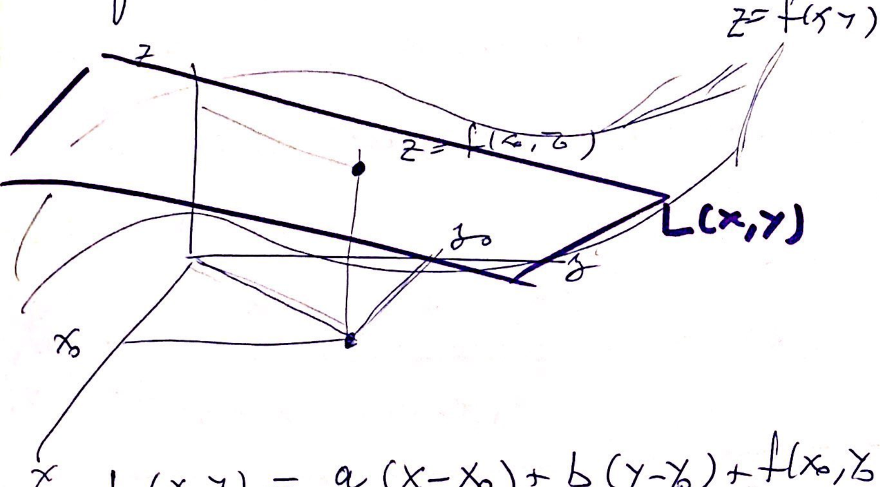
$$\frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Equivalentemente

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= f'(x_0).$$

$\boxed{\text{IDEA}}$ Extender esta noción a funciones de varias variables.



$z = L(x,y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$

Decimos que $z = L(x,y)$ es el plano tangente a f en (x_0, y_0) si es el plano que mejor aproxima al gráfico de f

$f(x,y) = L(x,y) + \text{error}$

$\Rightarrow \text{error} = f(x,y) - L(x,y)$

$= f(x,y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)$

El error relativo es chico si

$\text{error} << |x - x_0|$

y $\text{error} << |y - y_0|$

equivalentemente,

$\text{error} << |(x - x_0, y - y_0)|$

$$|(x - x_0, y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Definición

Decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existe

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)$$

tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

Análogamente al caso de 1 variable $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Si luego tomamos $x = x_0$ y $y \to y_0^+$, se obtiene que $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Ahora, si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$

Tomo $y = y_0$ y $x \to x_0^+$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0)}{(x-x_0)} = 0$$

Definición

f es diferenciable en (x_0, y_0)

si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

existen y

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.}$$

obs recordemos que $\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$

Luego f es dif. en (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

Ej $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$

Verifica que f es diferenciable en (x_0, y_0) y usar el plano tangente para aproximar f en $(1.1, 0.95)$.

Res $f_x(x,y) = 4x \quad ; \quad f_y(x,y) = 2y$

$f_x(1,1) = 4 \quad ; \quad f_y(1,1) = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y) - f(1,1) - 4(x-1) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 + y^2 - 3 - 4(x-1) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} =$$

$x^2 = ((x-1)+1)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$

$y^2 = ((y-1)+1)^2 = (y-1)^2 + 2(y-1) + 1$

$2x^2 + y^2 = 2(x-1)^2 + 4(x-1) + 2 + (y-1)^2 + 2(y-1) + 1$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)^2 + (y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

$$\underbrace{2(x-1)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}}_{\leq 1} + \underbrace{(y-1)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}}_{\leq 1}$$

Como f es diferenciable tenemos que

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$2x^2+y^2 \approx 3 + 4(x-1) + 2(y-1)$$

$x = 1.1$, $y = 0.95$

$$\underbrace{2(1.1)^2 + (0.95)^2}_{3.3225} \approx 3 + 4\,0.1 + 2(-0.05)$$

$$3 + 0.4 - 0.1$$

$$3.3$$

Ej

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verificar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Res

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0}-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\overbrace{f(0,k)}^{=0}-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{k}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\overbrace{f(0,0)}^{=0}-\overbrace{f_x(0,0)}^{=0}x-\overbrace{f_y(0,0)}^{=0}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x.y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Tomo $y=x$

$$\frac{x^2}{(2x^2)^{3/2}}=\frac{\cancel{x^2}}{2^{3/2}.x^{\cancel{3}}}\xrightarrow[x\to 0]{}\infty$$

Luego f no es dif. en $(0,0)$

Teorema

Si f es tal que f_x y f_y existen y son continuas en un entorno de (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0)

Ej $f(x,y) = x e^{xy}$

usar el plano tangente en $(1,0)$ para aproximar $f(1.1, -0.1)$

Res

$f_x(x,y) = e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y = e^{xy}(1+xy)$

$f_y(x,y) = x\, e^{xy} \cdot x = x^2 e^{xy}$

Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable en $(1,0)$.

$f(1,0) = 1$ | $f_y(1,0) = 1$

$f_x(1,0) = 1$

$$f(x,y) \simeq f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0)$$

$$x e^{xy} \simeq 1 + (x-1) + y = x+y$$

$$\underbrace{(1.1)e^{1.1\cdot(-0.1)}}_{0.985..} \simeq 1.1 + (-0.1) = 1$$