Secciones 13.1 y 14.2

Límite y Continuidad

- Funciones Vectoriales
- Funciones de varias variables

Def una función vectorial es aquella que su argumento es un número real y su resultado es un vector.

Def una función de varias variables es aquella que su argumento es un punto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y su resultado es un número real

una función vectorial

$$\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Ej $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle$

Toda función vectorial es la parametrización de una curva.

Una función de varias variables.

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f = f(x, y) \text{ o } f(x, y, z)$$

Ej $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

$g(x,y,z) = \sqrt{6 - x^2 - y^2 - z^2}$

Def (Límite para funciones Vectoriales)

$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}$

Se define $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$

Ej $\mathbf{r}(t) = \left\langle \overbrace{t^2 - 1}^{f(t)}, \overbrace{\frac{e^t - 1}{t}}^{g(t)}, \overbrace{\frac{1 - \cos t}{t}}^{h(t)} \right\rangle$

Calcular $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$

Res:

•) $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} t^2 - 1 = -1.$

•) $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$

•) $\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \langle -1, 1, 0 \rangle$

Def una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en $t=a$

si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$

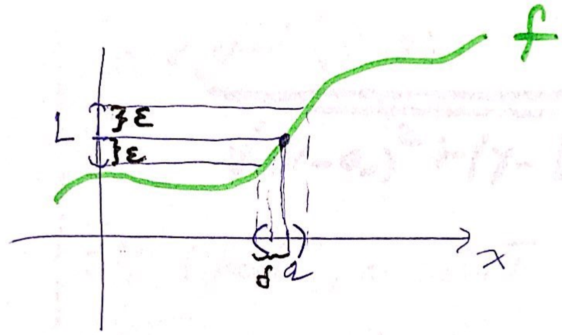
Obs Es equivalente que $\mathbf{r}(t)$ sea continua en $t=a$ a que cada componente sea continua en $t=a$.

Ej $\mathbf{r}(t) = \langle \underbrace{\cos t}_{f(t)}, \underbrace{\operatorname{sen} t}_{g(t)}, \underbrace{t}_{h(t)} \rangle$

Como $\cos t$, $\operatorname{sen} t$, t son continuas concluimos que $\mathbf{r}(t)$ es continua.

Límite para funciones de Varias Variables

¿Cómo era que se definía el concepto de límite para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

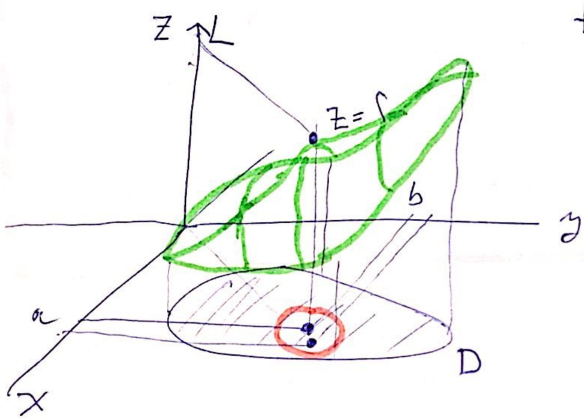
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x-a| < \delta$$

Para extender este concepto a funciones de 2 o 3 variables se razona como sigue.

$f = f(x,y)$

$z = f(x,y)$



$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Def Se dice que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{si}$$

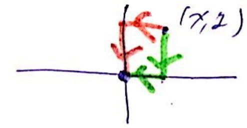
dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{si}$$

$$0 < \underbrace{\text{dist}\big((x,y),(a,b)\big)}_{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} < \delta$$

Ej Calcular, si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}$$



Lema de los límites iterados

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = L$

y $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = L$

$$f(x,y) = \frac{3xy^2}{x^2+y^2}$$

$(a,b) = (0,0)$

calculo los iterados

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \frac{3\cdot 0\cdot y^2}{y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

Veamos ahora que efectivamente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{3xy^2}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} = \underbrace{0}_{L}.$$

$$\left| f(x,y) - L \right| = \left| \frac{3xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| =$$

$$= \left| \frac{3xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{3\,|x|\,y^2}{x^2+y^2} \leq (*)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{array}}$$

$$(*) \leq \frac{3\sqrt{x^2+y^2}\,\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

$$\text{si } \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ “}\delta\text{”}$$

<u>Ej</u> Calcular si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

<u>Res</u> Calculo los iterados.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = -1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

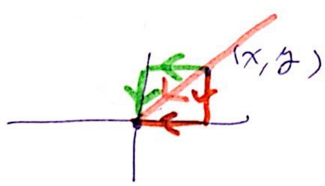
$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

<u>conclusión</u>: no existe el límite

<u>Ej</u> calcular, si existe,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}.$$



calculo primero los iterados.

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\cancel{x}\,y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Tomo la recta $y = x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\overset{1/2}{\frac{x^2}{x^2+x^2}} = \frac{1}{2}$$

<u>conclusión</u>: no existe el límite.

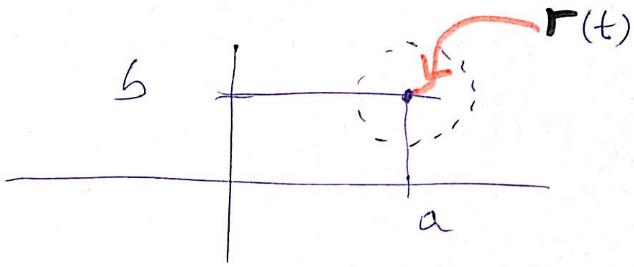
Lema 2 (Aproximación por curvas)

Sup. que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

Entonces para toda función vectorial

$\mathbf{r}(t)$ tal que $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = (a,b)$

Se verifica que $\lim\limits_{t\to t_0} f(\mathbf{r}(t)) = L$



En el ejemplo anterior,

$\mathbf{r}(t) = (t, t)$