Transformaciones lineales 2/9 ①

Dado $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, si $v \in \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow \left[A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix}\right]^t \in \mathbb{K}^m$ entonces

$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$\quad v \to [A v]^t$ es una función que cumple

Si $v, w \in \mathbb{K}^n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

1) $T_A(v+w) = [A(v+w)]^t = [Av + Aw]^t$
$= [Av]^t + [Aw]^t = T_A(v) + T_A(w)$

2) $T_A(\alpha v) = [A(\alpha v)]^t = \alpha [Av]^t = \alpha T_A(v)$

y en ese caso se dice que es una transformación lineal. esto es

Def: Dados dos espacios vectoriales V y W

$f: V \to W$ es una trasformación lineal (t.l)

si:
1) $f(v+w) = f(v) + f(w)$ $\forall v, w \in V$
2) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ $\forall v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$

observar que cumple $\quad f(0) = f(0v) = 0 f(v) = 0$ (2)

Obs : Si $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una t.l

$\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) =$

$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n)$

$= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot [f(e_i)]^t \right]^t =$

$= \left[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right]^t = [Ax]^t$

donde $\quad A = [c_1 | \ldots | c_n] \quad$ y $\quad c_i = [f(e_i)]^t$

O sea los columnas de A son los valores de f sobre la base canónica.

Ejemplo $\quad$ Si $\quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ x_2)$

$f(1,0) = (1, 1, 0)$
$f(0,1) = (1, -1, 1)$ $\quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f(x_1, x_2) = \left[A \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right]^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right)^t = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2)$

con esto podemos definir la matriz de la transformación lineal de una base en otra.

- Si $f: V \to W$ t.l y B es base de V y B' " " W

luego notamos a $[f]_{BB'}$ la matriz

tal que $[f]_{BB'} (v)_B^t = \underbrace{(f(v))^t}_{B'}$

↓ coordenadas de v en base B

↓ coordenadas de $f(v)$ en la base B'

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ " " W

observe que: $(v_i)_B = e_i$

esto es las coordenadas de un vector de la base en esa base es el vector canónico

ya que $v_i = \underset{\smile}{0} v_1 + \underset{\smile}{0} v_2 + \dots + \underset{\smile}{1} v_i + \dots + \underset{\smile}{0} v_n$

Entonces $[f]_{BB'} (v_i)_B^t = [f]_{BB'} e_i^t =$ columna de $[f]_{BB'}$

$\parallel$

$(f(v_i))_{B'}^t$.

o sea las columnas de $[f]_{BB'}$

son $[(f(v_1))_{B'}^t | \dots | (f(v_n))_{B'}^t]$

O sea que para construir la matriz $[f]_{\beta\beta'}$ hay que calcular $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ y después encontrar las coordenadas de estos vectores en la base β'.

En particular si E_n base canónica de $\mathbb{K}^n$
E_m " " " $\mathbb{K}^m$ $\Rightarrow$

$$[f]_{E_n E_m} = \left[(f(e_1))^t \mid \ldots \mid f(e_n)^t \right]$$

Ej: Si $f(1,0,0) = (1,1)$ $f(0,1,0) = (-1,2)$ $f(0,0,1) = (0,1)$

$$\Rightarrow \quad [f]_{E_3 E_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si tenemos los valores de f en otra base, podemos usar lo siguiente

$$\boxed{[f]_{\tilde{B} B'} \, C(B, \tilde{B}) = [f]_{B B'}}$$

$$[f]_{\tilde{B} B''} \underbrace{C(B, \tilde{B}) \, (v)^t_B}_{(v)^t_{\tilde{B}}}$$

$$\underbrace{[f]_{\tilde{B} B''} \, (v)^t_{\tilde{B}}}_{[(f(v))_{B''}]^t} = [f]_{B B''} (v)^t_B$$

Podemos hacer

$$[f]_{E_3 E_2} = [f]_{\tilde{B} E_2} \, C(E_3, B')$$

E2 Si por ejemplo Sabemos que

$$f(1,1,0) = (1,2)$$
$$f(0,1,1) = (-1,3)$$
$$f(0,0,1) = (1,0)$$

así $\tilde{B} = \{(1,1,0)(0,1,1)(0,0,1)\}$

$C(E,\tilde{B}) \rightarrow$ lo calculamos a partir de $C(\tilde{B},E_3)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordar $C(\tilde{B},E)(1\,0\,0)^t_{\tilde{B}} =$

$C(\tilde{B},E)(1,0,0)^t$

$=$ columna 1

$= (1\;1\;0)^t_E$

$= (1\;1\;0)^t_E$

$$\Rightarrow C(E,\tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\tilde{B}E_2}\,(v)^t_{\tilde{B}} = (f(v))^t_E$$

$$[f]_{\tilde{B}E_2}\left((1,1,0)_{\tilde{B}}\right)^t = (f(1,1,0))^t$$

$$[f]_{\tilde{B}E_2}\;(1,0,0)^t = (f(1,1,0))^t = (1,2)^t$$

y lo mismo con los otros elementos de la base $\Rightarrow$

$$[f]_{\tilde{B}E_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición: Dada una base β de V y se puede definir de forma única una t.l. sabiendo $f(v_i)$ para todo $i=1,..,n$ con $v_i \in \beta$.

Dem: $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \forall v \in V$

Si sabemos $f(v_i) \Rightarrow$ podemos definir

$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$ que resulta lineal (ejercicio)

y si tengo otra g lineal con $g(v_i) = f(v_i)$

$\Rightarrow \quad g(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(v_i) = f(v) \; \forall v.$

$\square$

Así como definimos el $Nu(A)$ podemos definir

$Im(A) = \{Ax, \; x \in \mathbb{K}^n\} \qquad A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

Ejercicio: Probar que es un subespacio y que

$Im(A) = \langle c_1(A), .., c_n(A) \rangle$ con $c_i(A)$ columnas de A

Por lo tanto $rg(A) = \dim(Im(A))$

Vale el siguiente teorema.

T10 Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\dim(Nu(A)) + \dim(Im(A)) = n.$

__Dem__ Sea $r = \dim(Nu(A))$ por ser subespacio de $\mathbb{K}^n$ $r \leq n$.

Sea $B = \{u_1, .., u_r\}$ base de $Nu(A)$

como $r \leq n$ se puede extender a una base (ver Proposición 1.6 Apunte Acosta-Lazzaro)

$B = \{u_1, .., u_r, \underbrace{w_{r+1}, .., w_n}_{\text{extiendo}}\}$ base de $\mathbb{K}^n$

Dado $v \in \mathbb{K}^n \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i$

$Av = \sum_{i=1}^{r} a_i \underbrace{Au_i}_{0} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i Aw_i = \sum_{i=r+1}^{n} a_i Aw_i$

$\Rightarrow \{Aw_{r+1}, .., Aw_n\}$ generan $Im(A)$

vamos a ver que es base si $\sum_{i=r+1}^{n} \beta_i Aw_i = 0$

$\Rightarrow A\left(\sum_{i=r+1}^{n} \beta_i w_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i w_i \in Nu(A)$

pero $Nu(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ base $Nu(A)$

y $\{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$ l.i $\Rightarrow$

si es combinación lineal de $\{u_1, \dots, u_r\}$

es porque es el vector nulo

$\sum_{i=r+1} \beta_i w_i = 0$ y por ser l.i

$\beta_i = 0 \Rightarrow$ ⊗.

Luego $\{Aw_{r+1}, \dots, Aw_m\}$ es l.i

$\Rightarrow$ base

$\Rightarrow \dim(Im(A)) = m - r$

$\Rightarrow m = \dim Nu(A) + \dim(Im(A))$

<u>Def</u> una transformación lineal es $f: V \to W$

1) un monomorfismo si es inyectiva.

2) " epimorfismo " es sobreyectiva

3) " Isomorfismo si vale (1) y (2).

Propiedades

1) f es monomorfismo $\Leftrightarrow$ $(f(v) = 0 \Rightarrow v = 0)$

2) " " epimorfismo $\Leftrightarrow$ $Im f = W$

3) Si $V = W = \mathbb{K}^n$ son equivalentes
i) f es mono
ii) f es epi
iii) f es iso.

Dem $\Rightarrow$)

1) $f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$

Si $f(v) = 0$ como $f(0) = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Leftarrow$) $f(v) = f(w) \Rightarrow$ por ser t.l $f(v-w) = 0$

$\Rightarrow v - w = 0$

2) $Im(f) = \{ w \in W : f(v) = w \} \underset{\text{por ser epi}}{=} W$

3) i) $\Leftrightarrow$ ii) Sea A matriz de t.l

$\underset{0}{\underbrace{\dim Nu(A)}} + \dim Im(A) = n$

$\Leftrightarrow \dim Im(A) = n$

$\Leftrightarrow Im(A) = K^n$

Luego si es mono $\Leftrightarrow$ epi $\Rightarrow$ es iso

Si es iso $\Rightarrow$ es mono $\Rightarrow$ es iso.