Rango de Matrices y matrices Inversibles

2/9 ①

Rango

Espacio columna

Dada una matriz de $K^{m\times m}$ se define

$C(A)$ = el espacio de columna de A

$= \langle c_1, c_2, \ldots, c_m \rangle$

donde $A = [c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c\ ]$ ↳ columnas de A

Núcleo

$N(A) = Nu(A)$ = núcleo $A = \{x \in\ : Ax = \vec{0}\}$

$rango_c(A)$ = dimensión del espacio $C(A)$

$= rg_c(A)$

De la misma forma Especifica

$F(A) = \langle F_1(A), \ldots, F_m(A) \rangle$

y $rango_F(A) = rg_F(A)$ = dimensión de $F(A)$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C(A) = \langle (1,2) \rangle$

pues $(2,4)$ es multiplo de $(1,2)$

$\Rightarrow rg_c(A) = 1$

$F(A) = \langle (1,2) \rangle \Rightarrow \dim F(A) = rg_F(A) = 1$ ②

Propiedad

$rg_F(A) = rg_C(A)$ y con

se lo llamo directamente rango $(A) = rg(A)$

Relación entre matriz inversible y rango

vimos que si queremos resolver $Ax = b$

y $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ va a tener solución

única $\Leftrightarrow$ si escalonamos $A|b$

llegamos a una matriz $\tilde{A}|\tilde{b}$ con

$$\boxed{\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 \cdots 0 & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y con } \tilde{a}_{ii} \neq 0 \quad (I) \quad i = 1, \ldots, m}$$

y esto nos dice que $rg(\tilde{A}) = \langle F_1(\tilde{A}), \ldots, F_m(\tilde{A}) \rangle = m$

pues los filas son l.i

pero como al escalonar estamos usando operaciones elementales

$\langle F_1(A), \ldots, F_m(A) \rangle = \langle F_1(\tilde{A}), \ldots, F_m(\tilde{A}) \rangle$

$\Rightarrow \quad rg(A) = rg(\tilde{A}) = m$

luego probamos

Prop : A es invertible $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$

En general podemos probar q las propiedades
Estos resultados son equivalentes $A \in K^{n \times n}$

1) El sistema $Ax = b$ tiene solución
única para un b particular.

2) El sistema $Ax = b$ tiene solución única
para todo b.

3) A es invertible

4) $rg(A) = n$

5) $det(A) \neq 0$

Dem
1) $\Rightarrow$ 2) Vimos que para que tenga solución
única $\tilde{A}|\tilde{b}$ tiene que ser tal que
$\tilde{A}$ de la forma de (I) luego es independiente
de b.

2) $\Rightarrow$ 3) Si resolvemos $Ax = e_i$ voy a
tener solución única

(4)

para cada i $\Rightarrow$ puedo resolver

$AB = I \Rightarrow$ tengo inversa.

3) $\Rightarrow$ 1) $\quad Ax = b$ se resuelve de manera única

$\Updownarrow$

pues $\quad x = A^{-1}b$

3) $\Leftrightarrow$ 4) Lo vimos antes

4) $\Leftrightarrow$ 5) $\quad \boxed{rg(A) < n \Leftrightarrow det(A) = 0}$ (especialidad propiedad)

si $rg(A) < n \Leftrightarrow$ se escribe como c.L si una fila de A de las otras y vimos por propiedades del determinante que $\Rightarrow det(A) = 0$

si $det(A) = 0$ luego si llevo a A por operaciones elementales a $\tilde{A}$ triangular

como en I $\Rightarrow 0 = det(A) = det(\tilde{A})$

Gauss J

como $\boxed{\tilde{A} \text{ es triangular} \Rightarrow det(\tilde{A}) = \tilde{a}_{11} \cdots \tilde{a}_{nn} = 0}$

algún $\tilde{a}_{ii} = 0 \Rightarrow$ el sistema $\tilde{A}x = b$ no tiene única solución $\Rightarrow rg(\tilde{A}) = rg(A) < n$