Clase Práctica 2: Espacios vectoriales

Temas relacionados a los ejercicios 5-17 de la Guía Práctica 1.

Introducción

Por lo general trabajaremos con los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^{m\times n}$, pero en los siguientes enunciados V representará cualquier espacio de *dimensión finita*, la cual denotamos por $\dim(V)$. Usamos la notación $W \leq V$ para indicar que W es un *subespacio vectorial* de V. Para estas notas se asumen conocidas las definiciones básicas de *combinación lineal, conjuntos generadores, bases, dimensión, dependencia e independencia lineal*, entre otros. Algunas propiedades puntuales serán enunciadas en la medida que se resuelvan los ejercicios. Si alguna de estas no les resultan familiares, insto a que las intenten demostrar, o que busquen sus demostraciones en los libros de la materia (o pídanle la demostración a la IA de su preferencia, pero como último recurso).

Ejercicios

Ejercicio 1. Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Demuestre que

$$\mathrm{COM}(B) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AB = BA \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y halle una base de este espacio.

Solución. Primero, veamos que si $A, A' \in \mathrm{COM}(B)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda A + A' \in \mathrm{COM}(B)$. En efecto, por propiedades de multiplicación de matrices tenemos que

$$\begin{aligned}(\lambda A + A')B &= (\lambda A)B + A'B \\ &= \lambda(AB) + A'B \\ &= \lambda(BA) + BA' \\ &= B(\lambda A) + BA' \\ &= B(\lambda A + A')\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\mathrm{COM}(B)$ es subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Para hallar una base de este espacio, consideremos una matriz genérica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, y veamos las condiciones sobre los términos a, b, c, d para los cuáles $AB = BA$. Como veremos, esto se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b & a+2b \\ 2c+d & c+2d \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$$

Igualando coeficiente a coeficiente las matrices de la derecha obtenemos que necesariamente

$$\begin{aligned} a &= d \\ b &= c \end{aligned}$$

En otras palabras, para que A conmute con B debe ocurrir que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que las matrices de la derecha son linealmente independientes (l.i.) pues $A = 0$ implica que $a = b = 0$. Entonces,

$$\mathrm{COM}(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle^{*}$$

$\square$

En las notas de la clase anterior se definió el rango de una matriz en términos de *pivotes* y de cómo se pueden obtener estos a partir de operaciones elementales. Un concepto equivalente de rango se puede dar en términos más algebraicos.

Definición 1. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Definimos el *espacio fila* de A como $F(A) = \langle F_1(A), \ldots, F_m(A)\rangle$, es decir, el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores filas de A. Definimos el *rango de A* como $\mathrm{rango}(A) = \dim(F(A))$.[†]

Ejercicio 2. Determine si los vectores $(i, 3, -1, 2+i), (1, -i, -1, -i), (1, i, -2-i, -1) \in \mathbb{C}^4$ son l.i. Si no lo son, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

Solución. Por definición, si estos vectores fuesen l.i. ocurriría que

$$\alpha(i, 3, -1, 2+i) + \beta(1, -i, -1, -i) + \gamma(1, i, -2-i, -1) = (0, 0, 0, 0) \tag{1}$$

solo sucede cuando $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Notemos que (1) se puede escribir como el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 3 & -i & i \\ -1 & -1 & -2-i \\ 2+i & -i & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{2}$$

Si el sistema (2) es determinado, entonces los vectores son l.i. y el sistema (2) es determinado si y solo si $\mathrm{rango}(A) = 3$. Entonces reduzcamos la matriz con operaciones elementales:

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 3 & -i & i \\ -1 & -1 & -2-i \\ 2+i & -i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{43}(2+i)]{\substack{E_{13}(i) \\ E_{23}(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2-2i \\ 0 & -3-i & -6-2i \\ -1 & -1 & -2-i \\ 0 & -2-2i & -4-4i \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{E_3(-1) \\ E_4((-2-2i)^{-1})}]{\substack{E_1((1-i)^{-1}) \\ E_2((-3-i)^{-1})}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2+i \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{41}(-1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2+i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta última matriz tenemos que el sistema (1) se cumple cuando $\alpha = -i\gamma$ y $\beta = -2\gamma$, por lo que el sistema es indeterminado. Por otra parte, cuando tomamos $\gamma = -1$, podemos reescribir (1) como

$$(1, i, -2-i, -1) = i \cdot (i, 3, -1, 2+i) + 2 \cdot (1, -i, -1, -i). \tag{3}$$

$\square$

---

[*] La notación $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ indica el espacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Si estos son l.i. entonces queda implícito que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base del espacio generado.

[†] Como bien saben, también se puede definir el *espacio columna* de A, pero este es isomorfo al espacio fila de A^t. Un resultado conocido dice que $\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(A^t)$ para toda matriz A.

En el ejercicio anterior, notemos que existen infinitos valores α, β, γ que hacen verdadera a la igualdad (1), pero $\alpha = i$ y $\beta = 2$ son los únicos valores para los cuales se cumple (3) (analice esto). Esto implica que los vectores $(i, 3, -1, 2+i), (1, -i, -1, -i)$ forman una base de $F(A^t)$. Por otra parte, el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} -i\gamma \\ -2\gamma \\ \gamma \end{bmatrix} \;\middle|\; \gamma \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^3.$$

Más generalmente, trabajaremos con la siguiente noción.

Definición 2. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Definimos el *kernel* o *espacio nulo* de A como $\ker(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, es decir, el espacio de soluciones del sistema homogéneo asociado a A. Definimos la *nulidad* de A como $\mathrm{nul}(A) = \dim(\ker(A))$.

Algunas propiedades bastante conocidas que vinculan los conceptos de rango y nulidad de una matriz son los siguientes:

Proposición 1. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Entonces

- $\mathbb{K}^n = F(A) \oplus \ker(A)$, y
- $\mathrm{rango}(A) + \mathrm{nul}(A) = n$.

Por ejemplo, para la matriz A del Ejercicio 2 se cumple que

$$\underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}_{F(A)} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{\ker(A)} = \mathbb{C}^3.$$

La descomposición de un espacio en suma directa de subespacios será un tema central de este curso, en especial cuando lidiemos con problemas de diagonalización. Un problema vinculado a esto último es el de *representabilidad* o *cambio de base*. En $\mathbb{K}^n$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial contamos con la llamada *base canónica*, que es el conjunto ordenado[‡]

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Todo elemento de $\mathbb{K}^n$ se puede escribir trivialmente como combinación lineal de estos vectores, pero esta base puede resultar inapropiada para representar matricialmente operadores lineales de $\mathbb{K}^n$, o para realizar operaciones complejas sobre matrices, como potenciación o inversión de matrices no singulares. Con esta motivación, recordemos la noción de *vector coordenado* y de *cambio de base*.

Definición 3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V. Para todo $\mathbf{v} \in V$, definimos el *vector coordenado* de $\mathbf{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}$ como

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

donde los coeficientes λ_i son tales que $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$.

[‡]Si bien una base en general es simplemente un conjunto sin estructura, la condición de orden resulta necesaria para conceptualizar y computar varias herramientas, como la matriz cambio de base.

Por propiedades de base y de independencia lineal, $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Notemos que si $V = \mathbb{K}^n$ y $\mathcal{C}$ es la base canónica, entonces $[\,\cdot\,]_{\mathcal{C}}$ es la función identidad.

Ejercicio 3. Halle el vector coordenado de cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ respecto a la base (ordenada)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución. Supongamos que $\mathbf{v} = [a, b, c]^t$ y hallemos coeficientes α, β, γ tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

el cual se puede reescribir como el sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \\ i & 2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Procedemos a reducir la matriz asociada al sistema[§]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ i & 2 & -1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E_{31}(-i)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & 0 & c - ai \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & -4 & c - ai - 2b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{4})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{ai+2b-c}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[E_{23}(-2)]{E_{13}(-i)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5a-(2b-c)i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-ai+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{ai+2b-c}{4} \end{array}\right]$$

De donde obtenemos que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{4} \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

□

Definición 4. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V. Denotamos por $C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ a la única matriz cuadrada tal que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

para todo $\mathbf{v} \in V$ y denominamos a $C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la *matriz cambio de base* de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Por ejemplo, la matriz P del Ejercicio 3 es igual a $C_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^3$. En general, puede ser útil la siguiente propiedad:

Proposición 2. Las matrices $C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ son invertibles y

$$C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

[§] La siguiente reducción es análoga a invertir la matriz de la izquierda.

En el siguiente ejercicios abordaremos propiedades de suma de espacios y dimensión. Recordemos que dado un par de espacios vectoriales V_1, V_2, la suma $V_1 + V_2$ se define como

$$\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2\}.$$

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial. Probar que si la dimensión de la suma de dos subespacios de V es una unidad mayor que la dimensión de su intersección entonces la suma coincide con uno de ellos y la intersección con el otro.

Solución. Sean $L_1 \leq V$ y $L_2 \leq V$ tales que $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1 \cap L_2) + 1$. Para ver que cualquiera de los L_i coincide con $L_1 \cap L_2$ o $L_1 + L_2$, usaremos la siguiente propiedad:

Afirmación

Si $V_1 \leq V_2$ y $\dim(V_1) = \dim(V_2)$, entonces $V_1 = V_2$.[¶]

Sabemos que

$$L_1 \cap L_2 \leq L_i \leq L_1 + L_2$$

y por propiedades de dimensión (e hipótesis)

$$\dim(L_1 \cap L_2) \leq \dim(L_i) \leq \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1 \cap L_2) + 1.$$

De esta desigualdad y de la Afirmación se deduce que

- si $\dim(L_i) < \dim(L_1 \cap L_2) + 1$ entonces $L_i = L_1 \cap L_2$ y
- si $\dim(L_1 \cap L_2) < \dim(L_i)$ entonces $L_i = L_1 + L_2$.

Solo queda por demostrar que si $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1 \cap L_2) + 1$ entonces $L_i = L_1 \cap L_2$ y $L_j = L_1 + L_2$ con $i \neq j$, pero esto es equivalente a ver que

$$L_1 \subsetneq L_2 \quad \text{o} \quad L_2 \subsetneq L_1.$$

Notemos que no puede suceder que $L_1 = L_2$, ya que en este caso $L_1 + L_2 = L_1 \cap L_2$ y no se cumpliría la hipótesis de la dimensión. Supongamos que $L_1 \not\subseteq L_2$ y probemos que $L_2 \subsetneq L_1$. Sea $u \in L_1 - L_2$ y $\mathcal{B}$ una base de $L_1 \cap L_2$. Entonces $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{u\}$ es l.i. y por hipótesis, $\mathcal{B}'$ es una base de $L_1 + L_2$. Como todos los elementos de $\mathcal{B}'$ también son elementos de L_1, entonces $L_1 = L_1 + L_2$. De acá se obtiene directamente que $L_2 \subsetneq L_1$. $\square$

[¶]Esta propiedad es consecuencia directa del siguiente hecho bien conocido: Si un espacio vectorial V es de dimensión n, entonces cualquier conjunto linealmente independiente de n elementos es base de V.