Clase Práctica 1: Sistemas de ecuaciones

Temas relacionados a los ejercicios 1-4 de la Guía Práctica 1.

Introducción

Definición 1. Se denomina *sistema de ecuaciones lineal de m ecuaciones con n incógnitas* a una expresión del siguiente tipo:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{1}$$

donde los a_{ij} son denominados *coeficientes*, x_i son las *incógnitas* y b_i el *término independiente*. Los coeficientes y los términos independientes se asumen que pertenecen a un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (que por lo general será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Si $b_i = 0$ para todo i, decimos que (1) es *homogéneo*. Una *solución* de (1) es una tupla $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que todas las igualdades se cumplen cuando sustituimos x_i por c_i para todo i.

Muchos métodos para hallar el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se basan en reescrituras a sistemas equivalentes.

Proposición 1. Las soluciones del sistema (1) coinciden con las soluciones de los sistemas que se obtienen realizando las siguientes operaciones:

a) Multiplicar una ecuación por un escalar **no nulo**.

b) Intercambio de dos ecuaciones.

c) Sumar a una ecuación un múltiplo de una ecuación distinta.

Notemos que todas las operaciones de la proposición anterior se pueden deshacer con operaciones del mismo tipo para volver a obtener (1), es decir, todas estas operaciones son "invertibles". Por ejemplo, si la i-ésima ecuación de un sistema se multiplica por λ, para recuperar la ecuación original debemos multiplicar por $1/\lambda$. Recordemos que una estrategia usual para resolver un sistema lineal es el de eliminación de variables o simplificación.

Ejemplo 1. Por la Proposición 1 los siguientes sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z + w = 1 \\ -2x + y + 2z = 7 \\ y - w = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathrm{ec}_2 + 2\mathrm{ec}_1{}^{\dagger}} \left.\begin{array}{r} x + 3y - z + w = 1 \\ 7y + 2w = 9 \\ y - w = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\mathrm{ec}_2 - 7\mathrm{ec}_3]{\mathrm{ec}_1 - 3\mathrm{ec}_3} \left.\begin{array}{r} x - z + 4w = 1 \\ 9w = 9 \\ y - w = 0 \end{array}\right\}$$

Notemos que del último sistema deducimos fácilmente que $y = w = 1$ y la primera ecuación queda simplificada a $x = z - 3$. En otras palabras, el sistema de ecuaciones (en cualquiera de sus formas) tiene infinitas soluciones las cuáles son $\{(a - 3, 1, a, 1) \mid a \in \mathbb{K}\}$.

---

† Léase como "a la ecuación 2 se le suma el doble de la ecuación 1".

Cuando un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución se denomina *compatible* o *consistente*, y en caso contrario, *incompatible* o *inconsistente*. Notemos que todo sistema homogéneo siempre es compatible, ya que admite la *solución trivial* $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Cuando un sistema de ecuaciones es consistente y tiene solución única se dice *determinado*, y en caso de tener más de una solución, *indeterminado*.

Al aplicar el proceso de eliminación, un sistema se puede demostrar incompatible si se llega a una ecuación de la forma $0 = b$ con $b \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Ejemplo 2. Procediendo de manera similar al ejemplo anterior,

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\mathrm{ec}_3 - 2\mathrm{ec}_1} \left.\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

y esto último es un completo sin sentido.

Una forma de aplicar el proceso de eliminación con algo de estructura y orden se logra por medio del *método de Gauss*, que consiste en "triangular" un sistema de ecuaciones. Para ilustrar mejor esta idea, conviene replantear los conceptos vistos en términos más algebraicos.

Definición 2. El sistema de ecuaciones (1) se puede reescribir con operaciones matriciales de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A \in \mathbb{K}^{m\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} \in \mathbb{K}^{m\times 1}} \tag{2}$$

Llamamos a A *la matriz de coeficientes*. La *matriz extendida* es la matriz $[A \mid \mathbf{b}] \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ definida como aquella cuyas primeras n columnas son iguales a las de A y la columna $n+1$ es igual al vector $\mathbf{b}$. A $[A \mid \mathbf{b}]$ también se le llama *matriz asociada a* (1). Si (1) es homogéneo, tomamos la matriz asociada simplemente como A.

Notemos que una solución de (2) es un vector columna en el espacio $\mathbb{K}^{n\times 1}$, que puede verse como una solución de (1) vía el isomorfismo natural entre los espacios $\mathbb{K}^{n\times 1}$ y $\mathbb{K}^n$. El método de Gauss se basa en transformar la matriz extendida $[A \mid \mathbf{b}]$ a una matriz con ceros por debajo de la diagonal principal. Estas transformaciones serán el análogo matricial de las operaciones de la Proposición 1.

Definición 3. Una matriz de $\mathbb{K}^{m\times m}$ se dice que es una *matriz elemental* si es una de las siguientes:

a) $E_i(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$, que es igual a la matriz identidad I_m en todas las entradas, salvo en (i, i) donde vale λ.

b) E_{ij} con $i \neq j$, que se obtiene de intercambiar en I_m las filas i y j.

c) $E_{ij}(\lambda)$ con $i \neq j$, que es igual a la matriz identidad I_m en todas las entradas, salvo en (j, i) donde vale λ.

Proposición 2. Todas las matrices elementales son invertibles.

Demostración. Es fácil ver que $(E_i(\lambda))^{-1} = E_i(1/\lambda)$ y que $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$. Para el tercer caso llamemos $A = E_{ij}(\lambda)$ y veamos que $B = E_{ij}(-\lambda)$ es la inversa de A. En efecto, recordemos que la entrada (k, ℓ) del producto AB se define como $F_k(A) \cdot C_\ell(B)$[‡]. Analicemos por casos,

- Si $k \neq j$, entonces $F_k(A) = F_k(I_m)$ y por lo tanto,

$$F_k(A) \cdot C_\ell(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

- Si $k = j$, entonces $F_k(A)$ es el vector con todas las entradas nulas, salvo la i-ésima que vale λ y la j-ésima que vale 1. Notemos que si $\ell = i$ entonces $C_\ell(B)$ es el vector con todas las entradas nulas, salvo la i-ésima que vale 1 y la j-ésima que vale $-\lambda$. Luego, la entrada (j, i) de AB es igual a $\lambda \cdot 1 + 1 \cdot (-\lambda) = 0$. Como $C_\ell(B) = C_\ell(I_m)$ para todo $\ell \neq i$ obtenemos que

$$F_j(A) \cdot C_\ell(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{si } \ell \neq j. \end{cases}$$

Ya que $AB = I_m$, hemos obtenido que $B = A^{-1}$, como queríamos demostrar. □

Es claro que las matrices elementales presentadas en la Definición 3 se corresponden con las operaciones descritas en la Proposición 1, en el siguiente sentido:

- aplicar a (1) la operación 1a) equivale a transformar la matriz $[A \mid \mathbf{b}]$ en $E_i(\lambda) \cdot [A \mid \mathbf{b}]$,
- aplicar a (1) la operación 1b) equivale a transformar la matriz $[A \mid \mathbf{b}]$ en $E_{ij} \cdot [A \mid \mathbf{b}]$,
- aplicar a (1) la operación 1c) equivale a transformar la matriz $[A \mid \mathbf{b}]$ en $E_{ij}(\lambda) \cdot [A \mid \mathbf{b}]$.

Definición 4. Dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ son *equivalentes (a izquierda)* si existe una matriz invertible $E \in \mathbb{K}^{m\times m}$ tal que $A = EB$.

Queda como ejercicio que verifiquen lo siguiente:

Ejercicio 1. La relación $\sim$ sobre $\mathbb{K}^{m\times n}$ dada por $A \sim B$ si y solo si A y B son equivalentes, es una relación de equivalencia (es decir, $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva).

Dado que toda matriz invertible es el producto de matrices elementales, tenemos que una matriz A es equivalente a B si podemos obtener A aplicándole a B una cantidad finita de transformaciones elementales. Bajo esta idea queda formalizado el *método de Gauss* debido a que:

Proposición 3. Toda matriz A es equivalente a una matriz con ceros por debajo de la diagonal principal.

La idea del método de Gauss es hallar tales matrices. El procedimiento lo explicaremos con algunos ejemplos.

Ejemplo 3. Hallaremos una matriz triangular superior equivalente a la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

[‡]Léase “fila k-ésima de A por columna ℓ-ésima de B”. El producto es el producto interno de vectores.

En el siguiente desarrollo no mostraremos explícitamente las matrices elementales, pero sí quedará registrado cuáles se están aplicando.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{23}(5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3}(1/7)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Por Proposición 3, tenemos que $A \sim B$. La matriz invertible E que permite llegar a B a partir de A (es decir, tal que $B = EA$) es

$$E = E_3(1/7) \cdot E_{23}(5) \cdot E_{13}(-2) \cdot E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5/7 & -2/7 & 1/7 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo anterior siempre fue posible obtener un elemento no nulo en la diagonal para eliminar los términos por debajo de la diagonal principal. A las entradas que se utilizan para tal propósito se les denomina *pivotes*. A veces los pivotes pueden estar fuera de la diagonal principal como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. En la siguiente matriz no es posible colocar un pivote[§] en la entrada $(2,2)$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{34}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizar este proceso a la matriz asociada a un sistema permite obtener el conjunto de soluciones con un simple despeje de variables. Supongamos que la matriz del ejemplo anterior es la matriz asociada a un sistema homogéneo. De la última matriz tenemos que las soluciones son las tuplas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5$ tales que $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ y $x_1 = -2x_2$. En este caso, el sistema homogéneo $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es indeterminado.

Para sistemas no homogéneos podemos caracterizar a los sistemas compatibles en términos del rango de la matriz asociada. Hay muchas definiciones (todas equivalentes entre sí) del rango de una matriz, pero tomaremos la siguiente que está directamente relacionada al uso de operaciones elementales ya visto.

Definición 5. El *rango* de una matriz A, denotado $\operatorname{rango}(A)$, es igual al número máximo de pivotes que admite una matriz equivalente a A con ceros por debajo de la diagonal principal.

Notemos que por definición, si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entonces $\operatorname{rango}(A) \le \min\{m, n\}$.

[§] A los pivotes se les pueden imponer más condiciones de posicionamiento, por ejemplo, se puede pedir que aparezcan lo más arriba posible en la matriz. Pero estas son consideraciones que se analizan mejor en términos algorítmicos y que pueden ser discutidos en el laboratorio.

Ejemplo 5. La matriz del Ejemplo 3 tiene rango 3. Por otra parte, la matriz C del Ejemplo 4 tiene rango al menos 3. Notemos que con unas cuantas operaciones elementales más, podemos llegar a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

la cual tiene 4 pivotes, por lo que $\text{rango}(C) = 4$.

Teorema 1 (Rouché-Frobenius)**.** Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ y $\mathbf{x}$ una tupla de n variables. Este sistema es compatible si y solo si $\text{rango}(A) = \text{rango}([A \mid \mathbf{b}])$. Más aún, si el sistema es compatible y $\text{rango}(A) = n$ hay solución única, y si $\text{rango}(A) < n$ hay infinitas soluciones.

No se hará la demostración formal pero la intuición es la siguiente: agregar columnas a una matriz puede aumentar el rango y en caso de que $\text{rango}(A) < \text{rango}([A \mid \mathbf{b}])$ se deduce que es posible colocar un pivote en la última columna de $[A \mid \mathbf{b}]$. En términos de sistemas de ecuaciones, esto se corresponde a obtener un absurdo de la forma $0 = 1$.

Ejemplo 6. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + 2z &= 2 \\ 5x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}\right\}$$

y analicemos para cuáles valores de a y b el sistema es compatible. Reduciremos la matriz asociada al sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{13}(-a)]{E_{12}(-5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 2a & 2-ab & 2-3a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-\frac{a}{6})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 2-\frac{ab}{6} & 2-\frac{2}{3}a \end{array}\right] \xrightarrow{E_3(6)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 12-ab & 12-4a \end{array}\right]$$

De esta última matriz podemos sacar las siguientes conclusiones analizadas por casos:

- Si $ab \neq 12$, entonces podemos colocar un pivote en la posición $(3, 3)$, y en tal caso, el sistema de ecuaciones es compatible y determinado.
- Si $ab = 12$ pero $a \neq 3$, podemos colocar un pivote en la posición $(3, 4)$, pero por Teorema 1, concluimos que el sistema es incompatible.
- Si $ab = 12$ y $a = 3$, entonces $b = 4$ y el sistema es compatible e indeterminado con conjunto de soluciones igual a $\{(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}z, -\frac{7}{6} + \frac{5}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{K}\}$.

Ejercicios adicionales

A veces usaremos números complejos. Recordemos que para un número $z = a + bi$ se definen las siguientes expresiones aritméticas:

$$\bar{z} = a - bi, \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ si } z \neq 0.$$

Ejercicio 2. Indique si el siguiente sistema es compatible y determinado. En tal caso, plantear la solución.

$$\left.\begin{aligned} ix+y+z&=5+i\\ x-iy+z&=4-2i\\ x+y-iz&=3-3i \end{aligned}\right\}$$

Solución. Usemos la matriz asociada al sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 1 & 5+i\\ 1 & -i & 1 & 4-2i\\ 1 & 1 & -i & 3-3i \end{array}\right] \xrightarrow[E_{23}(-1)]{E_{21}(-i)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1-i & 3-3i\\ 1 & -i & 1 & 4-2i\\ 0 & 1+i & -1-i & -1-i \end{array}\right] \xrightarrow[E_3((1+i)^{-1})]{E_1((1-i)^{-1})} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & -i & 1 & 4-2i\\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{21}(-1)]{E_{31}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & -i & 0 & 1-2i\\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}(i)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Así, la solución del sistema es $x=1$, $y=2$ y $z=3$.

Ejercicio 3. ¿Puede existir una parábola que pase por los puntos $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,15)$ y $(3,37)$? ¿Es única?

Solución. Recordemos que la ecuación de una parábola es de la forma ax^2+bx+c. Si tal parábola existe, deben haber valores a,b,c para los cuales se cumplen las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} c&=1\\ a+b+c&=3\\ 4a+2b+c&=15\\ 9a+3b+c&=37 \end{aligned}\right\}$$

El cual se puede reducir al más simple

$$\left.\begin{aligned} a+b&=2\\ 4a+2b&=14\\ 9a+3b&=36 \end{aligned}\right\}$$

Determine si este sistema tiene solución y responda la pregunta del enunciado.

Para matrices cuadradas invertibles podemos usar la conocida *regla de Cramer*. Denotaremos por $|A|$ al determinante de una matriz cuadrada A.

Teorema 2. Consideremos el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ con $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ invertible y $\mathbf{b}\in\mathbb{K}^{n\times 1}$. Entonces el sistema es determinado y la única solución $\mathbf{x}^t=(x_1,\dots,x_n)$ viene dada por

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|},\quad \text{para todo } 1\le i\le n,$$

donde A_i es la matriz que se obtiene de sustituir en A la columna i-ésima por $\mathbf{b}$.

Ejercicio 4. Resolver el siguiente sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=8\\ x+2z&=1\\ 2y-w&=1\\ x+w&=4 \end{aligned}\right\}$$

Solución. Consideremos primero la matriz de coeficientes (asumiendo el orden de las incógnitas como (x, y, z, w))

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A es invertible pues[¶]

$$|A| = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

por lo que podemos proceder con la regla de Cramer. Solo haremos el cálculo para x y z, la verificación para el resto de las variables se deja como ejercicio.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(16 - 12 - 3) = -2,$$

de donde $x = \frac{|A_1|}{|A|} = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned} |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3 - 12) + (16 - 3 - 4) = 0 \end{aligned}$$

de donde $z = \frac{|A_3|}{|A|} = 0$. De manera similar se puede obtener que $y = 2$ y $w = 3$.

[¶] Estamos usando el método de determinantes por menores, desarrollando la suma con la tercera columna.