Material 26/08

Definiremos suma, intersección de subespacios

Def: Si S y T son subespacios de un K e.v V se define SUMA

$S+T = \{s+t : s \in S, t \in T\}$

el conjunto de todas las suma posibles entre elementos de S y T.

Ejercicio: Probar que $S+T$ es un subespacio.

Sea 1) $0 \in S+T$ pues $0 \in S$ y $0 \in T \Rightarrow 0+0=0 \in S+T$

2) $w \in S+T$, $v \in S+T$ $\Rightarrow$ $w = s_1 + t_1$ $s_1 \in S$, $t_1 \in T$; $v = s_2 + t_2$ $s_2 \in S$, $t_2 \in T$

por def de suma $\Rightarrow w+v = \underbrace{(s_1+s_2)}_{\in S} + \underbrace{(t_1+t_2)}_{\in T}$

$\Rightarrow w+v \in S+T$

3) $\lambda \in K$ y $w \in S+T \Rightarrow \lambda w = \lambda(s+t)$

$w = \underbrace{s}_{\in S} + \underbrace{t}_{\in T}$

$= \underbrace{\underbrace{\lambda s}_{\in S} + \underbrace{\lambda t}_{\in T}}_{\text{Debido a que son subespacios.}} \in S+T$

Def :

S , T subespacios de un K . e.v

se define

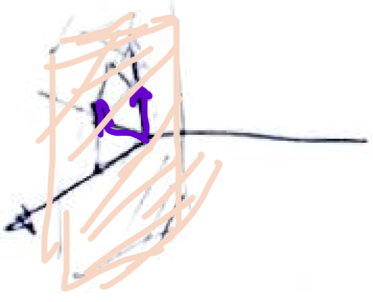
$$S \cap T = \{ v \in V : v \in S \text{ y } v \in T \}$$

ejercicio: Probar que es un subespacio.

Ojo: En general $S \cup T$ no es un subespacio. ver el ejercicio 9 de la guía y hacerlo. Es importante para practicar un típico ejercicio teórico.

Ejemplo de representación de S+T

$S = \langle (1,0,1) \rangle$ $\qquad T = \langle (0,0,1) \rangle$



$$S+T = \{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha(1,0,1) + \beta(0,0,1) \}$$

$$= \langle (1,0,1) \ (0,0,1) \rangle$$

Son todas las posibles combinaciones lineales entre ambos vectores

Veamos esto en general.

$\boxed{\text{Proposición}}$ Sean S y T $\mathbb{K}$-e.v subespacios de

$$S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \qquad T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$$

entonces $S + T = \langle s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m \rangle$

Dem $S+T = \{ s+t : s \in S, t \in T \}$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j t_j \quad \begin{matrix} \alpha_i \in \mathbb{K} \\ \beta_j \in \mathbb{K} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k w_k : \gamma_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \langle w_1, \dots, w_{n+m} \rangle$$

donde, $\gamma_i = \alpha_i$, $w_i = s_i$ $\quad i = 1, \dots, n$

$\gamma_{i+n} = \beta_i$, $w_{i+n} = t_i$ $\quad i = 1, \dots, m$

Vamos a ver que en muchos casos no es necesario quedarnos con todos los elementos

Ej $S = \langle (1,1,1)\ (0,1,1) \rangle$ $\quad T = \langle (1,2,2)(0,0,1) \rangle$

$S + T = \langle (1,1,1)\ (0,1,1)\ (1,2,2)\ (0,0,1) \rangle$

$(1,2,2) = (1,1,1) + (0,1,1)$ $\rightarrow$ luego este elemento "está de más" o sea $S+T = \langle (1,1,1)\ (0,1,1)\ (0,0,1) \rangle$

no significa que lo otro no fuera correcto, simplemente podemos eliminar un vector y sigue generando el mismo subespacio.

Veremos esto después en general.

Ejemplo
(Intersección)

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$

$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$

La intersección en este caso es justamente un conjunto donde cumplan ambas ecuaciones:

$S \cap T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{matrix}\}$

o sea resolver el sistema en este caso sería $S \cap T = \langle (1,1,-1) \rangle$

<u>Observación</u>: Para determinar $S+T$ conviene que ambos (S y T) estén dados por generadores.

- Para $S \cap T$ que estén dados por ecuaciones

<u>Inclusión</u> Dados S y T $\mathbb{K}$-ev subespacio de

$S \subseteq T$ si $\forall v \in S \Rightarrow v \in T$.

Proposición $S = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$ $S \subseteq T$

$\Leftrightarrow$ $s_i \in T$ $\forall i = 1, \dots, m$.

<u>Dem</u> $\Rightarrow$) $S \subseteq T \Rightarrow$ como $s_i \in S \Rightarrow s_i \in T$

$\Leftarrow$) si $s_i \in T \; \forall i \Rightarrow$ Dado $v \in S$

$v = \sum_{i=1}^{m} a_i s_i$ con $a_i \in \mathbb{K}$ como $s_i \in T$

al ser subespacio $\Rightarrow v \in T \Rightarrow S \subseteq T$
(pues probamos que si $v \in S \Rightarrow v \in T$)

<u>Ejemplo</u> $S = \langle (1,1,-2,0)\ (0,0,0,1) \rangle$
$T = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

¿$S \subseteq T$? veamos $1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow (1,1,-2,0) \in T$
$0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0,0,0,1) \in T$

luego $S \subseteq T$

<u>Observación</u>: Para ver si $S \subseteq T$ es más fácil si S está dado por generadores y T está dado por ecuaciones

Suma directa

Def: Dado V un $\mathbb{K}$ e.v y S y T subespacio de V, se dice que están en suma directa si $S \cap T = \{0\}$

y en ese caso $S+T = S \oplus T$ Notación suma directa

Ej Ver si S y T están en suma directa

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^4 \,/\, \textcircled{1}\ x_1 - x_2 = 0 \,,\ \textcircled{2}\ x_4 + x_1 = 0 \}$$
$$T = \{ x \in \mathbb{R}^4 : \textcircled{3}\ x_1 + x_2 = 0 \,,\ \textcircled{4}\ x_4 - x_3 = 0 \}$$

para eso calculamos $S \cap T$ y eso es equivalente a resolver el sistema.

Que involucra las ecuaciones ①, ②, ③ y ④

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_{3 \leftrightarrow} F_2 \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{c} \\ \\ \\ F_4 - F_1 \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{c} \\ \\ \\ F_4 - 2F_2 \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right)$$

$\rightarrow$ Escalonada completa $\Rightarrow$

el sistema es compatible determinado

por ser homogeneo $\Rightarrow$ la única solución

es $\{(0,0,0)\}$

$\Rightarrow$ S y T están en suma directa.

calcular S + T:

Generadores

$S = \langle (1,1,0,-1), (0,0,1,0) \rangle$

$T = \langle (1,-1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$

$S + T = \langle (1,1,0,-1)\ (0,0,1,0)\ (1,-1,0,0)$

$(0,0,1,1) \rangle$

Hasta acá tenemos definidos operaciones entre

subespacios

Necesitamos ver cual es el numero minimo de

generadores para representar un subespacio.

Ejemplo $S = \langle (1,1)\ \ (0,1)\ \ (1,0) \rangle$

como $(1,1) = (0,1) + (1,0) \Rightarrow$

$S = \langle (0,1)(1,0) \rangle$

pero tambien $S = \langle (1,1)(1,0) \rangle$

$(0,1) = (1,1) + (-1)(1,0)$

en todos los casos podemos escribir al $(0,0)$ como combinación lineal (c.l) de los 3 vectores y con algún coeficiente no nulo

$$(0,0)=(0,1)+(1,0)+(-1)(1,1)$$

$$(0,0)=(1,1)+(-1)(1,0)+(-1)(0,1)$$

Cuando pasa esto se dice que los vectores son linealmente dependientes o de lo contrario:

Def: Dado V un $\mathbb{K}$-e.v y $\{v_1,\ldots,v_m\}\subseteq V$ se dice que son linealmente independientes (l.i) si no se puede escribir al $\vec{0}$ como c.l de esos vectores. Esto es si

$$0=a_1v_1+\ldots+a_mv_m \quad \text{con } a_i\in\mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \quad a_1=a_2=\ldots=a_m=0.$$

Ejemplo veamos si son l.i

$$\{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}\ \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}\ \underbrace{(0,1,1)}_{v_3}\}$$

Si $0=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=(\alpha,\beta+\gamma,\alpha+\gamma)$

$\Rightarrow \alpha=0 \quad \gamma=0 \quad \beta=0$

$\Rightarrow$ son l.i

es equivalente a resolver

$$[v_1 \vdots v_2 \vdots v_3]\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ y que la única solución sea $(0,0,0)$

o sea $\Leftrightarrow$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 1&0&1&0\end{array}\right)$$
tiene una única solución

__método 1__ pongo $v_1\, v_2 \ldots v_m$ triangulo y si es escalonada sin fila nula $\Rightarrow$ l.i.

__método 2__
v_1
v_2
v_m
triangulo ① si hay una fila nula $\Rightarrow$ son l.d
② Ninguna nula $\Rightarrow$ son l.i.

__Ejemplo__ $\{(1,1,1)\ (0,1,1)\ (1,0,0)\}$ ver si son l.i

$$\begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{matrix} \rightarrow \text{Fila nula} \Rightarrow \text{l.d}$$

__Obs__: ~~El método solo sirve desde si~~
El método 2 solo me sirve para ver si son l.d pero no me da los coeficientes.

$\boxed{\text{Proposición}}$ Sea V un $\mathbb{K}$ e.v cf

$\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto l.i $\Rightarrow$
$\forall w \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ se escribe de forma única como c.l de $\{v_1, \dots, v_m\}$

Dem

$w = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$

$w = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$

supongamos que se escribe como c.l de estas dos formas

$\Downarrow$

resto

$0 = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_m - b_m)v_m$

Por ser $\{v_1, \dots, v_m\}$ l.i $\rightarrow a_1 - b_1 = 0$
$\vdots$
$a_m - b_m = 0$

$\Rightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$

Base y dimensión

Def. Sea V un $\mathbb{K}$ e.v el conjunto

$B = \{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de V si

1) $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ 2) $\{v_1, \dots, v_m\}$ es l.i

La idea es "medir" el tamaño de un espacio vectorial

Teorema. Sea V un $\mathbb{K}$ e.v y $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V $\Rightarrow$ cualquier otra base de V tiene el mismo número de elementos

Lema Dado V un $\mathbb{K}$ e.v. Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de generadores y $\{w_1, \dots, w_s\}$ es l.i $\Rightarrow r \geq s$

Dem Como $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un generador

(1) $$w_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j$$ pues los v_i generan

Para cada w_i tengo una tira de coeficientes

ponemos la matriz con esos coeficientes

Aels $\qquad A_{ij} = \alpha_{ij}$

veamos que la única solución de $Ab = 0$ es el 0.

$$\begin{array}{cc} & \text{s columnas} \\ \text{r filas} & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \cdots & & \alpha_{2s} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{r1} & \cdots & & \alpha_{rs} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, s \end{array}$$

Luego $$\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij} b_i = 0 \quad \forall j \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij} b_i \right) v_j = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j \right) b_i = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} w_i b_i = 0$$

pero por ser l.i $\{w_1, \dots, w_s\} \Rightarrow b_i = 0 \ \forall i$

Lo que nos dice que la única solución del homogéneo es $\vec{0}$ $\boxed{Ab=0}$

$\tilde{A}$ tiene r filas y s columnas

y para que sea compatible determinado tiene que ser $r \geq s$ listo

luego con este Lema concluimos que si $\{v_1, ..., v_m\}$ es una base cualquier otra base tiene el mismo número de elementos

A ese no de elementos se lo nota por dimensión en nuestro caso trabajaremos con espacios con bases finitas

ejemplo $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$
(base canónica)

por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

ejemplo 2 : Dado $S = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$

encontrar una base de S y calcular la dimensión

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

→ ya triangulado son l.i

$$\Rightarrow \boxed{\dim(S) = 2}$$