Material 29/8 | (1)

Bases continuación

$B = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V

Algunas consecuencias

1) Un conjunto de elementos de V con menos de m elementos $\Rightarrow$ no genera V

Dem Si tiene r elementos y genera $\Rightarrow r \geq m$ absurdo

2) Un conjunto de m elementos de V l.i $\Rightarrow$ es base de V

Dem si no es base $\Rightarrow \exists w \in V$ tal que $\{w_1, \dots, w_m, w\}$ es l.i pero es l.i $\Rightarrow m \geq m+1$ absurdo.

3) Un conjunto de más de m elementos de $V \Rightarrow$ no es l.i.

Dem $\{w_1, \dots, w_s\}$ l.i $\Rightarrow m \geq s$ absurdo pues $s > m$.

La idea ahora es poder quedarnos con una base a partir de un conjunto de generadores.

Prop. Sea V un K e.v de dimensión n y S un conjunto de generadores de V de m elementos con $m > n \Rightarrow$ podemos extraer un subconjunto de n elementos que sea base de V.

Dem S no puede ser l.i pues por lema $n \le m$.

$S = \{w_1, \dots, w_m\}$ al ser l.d

$a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = 0$ con alguna $\neq 0$

Supongamos que es el último (si no se ordena)

$$\Rightarrow \quad w_m = \frac{-a_1 w_1 - a_2 w_2 - \dots - a_{m-1} w_{m-1}}{a_m}$$

luego $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ generan el mismo espacio.

Si $m-1 > n$ repito esto hasta que me queden n generadores y tienen que ser l.i

pues si no la dimensión sería menor.

$\Rightarrow$ tengo una base.

Ejemplo $S = \{(1,2,1)(1,1,1)\ (2,3,2)(0,1,0)\}$

Ponemos vectores en Fila y triangulamos

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Eso significa que los 2 últimos eran combinación lineal de los otros. como ya está escalonada

$\Rightarrow$ $S = \{(1,2,1)(1,1,1)\}$ y $\dim(S) = 2$

La idea ahora es extender a una base para eso

Prop. Sea V un $\mathbb{K}$ e.v de dimensión n y $L = \{v_1, \dots, v_r\}$ l.i $(r \leq n)$

$\Rightarrow$ existen $w_{r+1}, \dots, w_n \in V$ tal que

$\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es base de V.

Dem. · Si $r = n$ ✓

· $r < n$ $\{v_1, \dots, v_r\}$ no es base $\Rightarrow$

$\exists\ w_{r+1} \in V$ con $w_{r+1} \notin \langle v_1, \dots, v_r \rangle$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}\}$ es l.i (pues: $\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + a_{r+1} w_{r+1} = 0$

$\Rightarrow a_{r+1} = 0$ pues si no $w_{r+1} \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$

$\Rightarrow$ por ser $\{v_1, \dots, v_r\}$ l.i $a_i = 0$ $i = 1, \dots, r$)

$\Downarrow$

Repito esto si $r+1 < n$

$\Downarrow$

Hasta llegar a obtener n vectores. Por ser l.i

y tener n $\Rightarrow$ es una base.

Corolario: Todo espacio de dimensión finita tiene una base

¿ Cómo se extiende ?

La idea es triangular para que sea más fácil completarla a una base.

g) $L = \{(2,1,1,1)\ (1,0,1,1)\}$ extender a base de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$\leftrightarrow$ generan el mismo espacio pues use operaciones entre filas.

Luego solo tengo que buscar 2 vectores que dejan formen un conjunto l.i con estos dos

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

] agrego de manera que me quede triangulado con coeficiente principal no nulo.

$\mathcal{B} = \{\underbrace{(2,1,1,1)\ (1,0,1,1)}\ (0\,0\,1\,0)\ (0\,0\,0\,1)\}$

vuelvo a poner los elementos originales.

es una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejemplos

• Base canónica de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ se nota E

$\mathbb{C}^{m \times n}$ como $\mathbb{C}$ e.v base de $\mathbb{C}^{2\times3} = \left\{ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\}$

• $\mathbb{R}_6[x]$ como $\mathbb{R}$ e.v: polinomios de grado ≤ 6

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ probar que es una base.

Coordenadas

Dado V un $\mathbb{K}$ e.v de dimensión n y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V.

Todo $w \in V$ $\quad w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ y a $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se llaman coordenadas de w en la base B. y se nota

$[w]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$[w]_E = (w_1, \ldots, w_n)$ cuando E es la base canónica.

Matriz de cambio de Base

En muchos casos vamos a querer buscar dadas las coordenadas de w en la base B, las coordenadas de w en otra base B'.

Sea $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ $\quad B' = \{z_1, \ldots, z_n\}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{base canonica}}}{w} = \underbrace{[v_1 \ldots v_n]}_{C_{BE}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coordenadas base } B}}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}} \qquad w = \underbrace{[z_1 \ldots z_n]}_{C_{B'E}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coordenadas en base } B'}}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}$$

$$w = C_{BE}[w]_B = C_{B'E}[w]_{B'}$$

$$\Rightarrow \boxed{[w]_{B'} = C_{B'E}^{-1} C_{BE}[w]_B}$$

Donde $C_{\beta\mathcal{E}}$ es la matriz que dado las coordenadas en la base β te devuelve las coordenadas en la base $\mathcal{E}$.

$C_{\beta'\mathcal{E}}$ lo mismo pero con β'

de esta forma la inversa $C_{\beta'\mathcal{E}}^{-1}$ hace

lo contrario

$w_{\mathcal{E}} \to w_{\beta'}$

$$\underbrace{C_{\beta'\mathcal{E}}^{-1} \underbrace{C_{\beta\mathcal{E}} w_{\beta}}_{\text{coordenadas de } w \text{ en base } \mathcal{E}}}_{\text{coordenadas de } w \text{ en base } \beta'}$$

$$[w]_{\beta} \xrightarrow{C_{\beta\mathcal{E}}} [w]_{\mathcal{E}} \xrightarrow{C_{\beta'\mathcal{E}}^{-1}} [w]_{\beta'}$$

Otro camino, Forma directa.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases.

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$$
$$v_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$$
$$v_3 = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 w_3$$

y entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$ es la matriz cambio de base.

Si $w = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3$

$r = [w]_{\beta}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2 + \gamma_1 r_3 \\ \alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 + \gamma_2 r_3 \\ \alpha_3 r_1 + \beta_3 r_2 + \gamma_3 r_3 \end{pmatrix}$$

$$C_{\beta\beta'} [w]_{\beta} =$$

$$w = r_1(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3) +$$
$$r_2(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3) +$$
$$r_3(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 w_3)$$

$$= (r_1 \alpha_1 + r_2 \beta_1 + r_3 \gamma_1).w_1 +$$
$$(r_1 \alpha_2 + r_2 \beta_2 + r_3 \gamma_2).w_2 +$$
$$(r_1 \alpha_3 + r_2 \beta_3 + r_3 \gamma_3).w_3$$

$\Rightarrow$ Las coordenadas en la base B' son esas y

$$[w]_{B'} = C\,[w]_B$$

y se nota $C_{BB'}$

Ejemplo $B = \{(1,1)\ (0,1)\}$ $B' = \{(1,1), (-1,1)\}$

Armo la matriz a partir de las coordenadas de los elementos de B en la base B'

$$(1,1) = 1(1,1) + 0(-1,1)$$
$$(0,1) = \frac{(1,1)}{2} + \frac{(-1,1)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

por ejemplo si $[w]_B = (1,3)$

$$\Rightarrow [w]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

De hecho verifico

$w = 1(1,1) + 3(0,1) = (1,4)$

$\frac{5}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(-1,1) = (1,4)$ ✓

Efectivamente esas son las coordenadas en esa base

Material 29/08 (8)

continuación

Recordemos que una matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$ se nota

como a_{ij} donde $i=1,\dots,m \to$ filas

$j=1,\dots,n \to$ columnas

Sabemos que multiplicar se hace así

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Eso en general se nota con el símbolo de sumatoria de la forma:

Si coeficientes de A son a_{ij} $\quad i=1,\dots,m \quad A\in\mathbb{K}^{m\times n}$

$j=1,\dots,n$

de B son b_{jk} $\quad k=1,\dots,p \quad B\in\mathbb{K}^{n\times p}$

$$c_{ip} = (AB)_{ip} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jp}$$

coeficiente ip del producto

m filas p columnas.

m filas n columnas

n filas p columnas

La idea es que usemos esta expresión con la sumatoria.

PARA LA PARTE DE PRODUCTOS POR BLOQUE VER MATERIAL EXTRA

Def: Se define como traspuesta de $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

a la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$ que cumple

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,m}}$$

Propiedades

Ej 16 de la GUIA

- $(A^t)^t = A$ ✓
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$ →

Ejercicio, lo vamos a hacer pero la idea es que lo piensen antes.

Demo Como $(B^t A^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B^t)_{ik} (A^t)_{kj}$

$A \in \mathbb{K}^{n\times m}$

$A^t \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$B \in \mathbb{K}^{m\times p}$

$B^t \in \mathbb{K}^{p\times m}$

$= \sum_{k=1}^{m} b_{ki}\, a_{jk} =$

Uso def de traspuesta

$= \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki}$

$= (AB)_{ji} =$

$= ((AB)^t)_{ij}$

def de traspuesta.

Def: Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ se define la traza como ~~los elementos~~ la suma de los elementos de la diagonal $tr(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$ observar acá A es cuadrada.

Propiedades (Ejercicios, nuevamente Deben hacerlos) EJ 16 DE LA GUIA (10)

① $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ ③ $tr(A^t) = tr(A)$

② $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$

④ $tr(AB) = tr(BA)$ → $\boxed{\text{Traten de hacerlo sin mirar.}}$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{ui} =$$

$$= \sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a_{iu} b_{ui} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} b_{ui} a_{iu}$$

La idea acá es que vean que pueden dar vuelta los sumatorias y queda lo que queríamos

$$= \sum_{u=1}^{m} (BA)_{uu} = tr(BA)$$

Def: Cuando trabajamos con complejos a veces vamos a necesitar la siguiente matriz denominada adjunta $A^* = \overline{A^t}$ Esto es la traspuesta conjugada.

Acá conjugar es elemento a elemento

ej $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 2 & 2+2i \end{pmatrix}$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & -2i \\ 2 & 2-2i \end{pmatrix}$

$A^* = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -2i & 2-2i \end{pmatrix} = \overline{A^t}$ da lo mismo.

Def: Si $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $A = A^t$ se dice que es simétrica.

Ejercicios con la matriz adjunta

Probar ① $(AB)^* = B^* A^*$ ② $(aA + bB)^* = \bar{a}A^* + \bar{b}B^*$

Matriz identidad e inversa

Def Se define la matriz identidad como

$$Id_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Cumple el rol de "1" ya que:

$$(A\,I)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} I_{kj} = a_{ij}$$

I_{kj}: 1 si $k=j$, 0 si $k \neq j$

solo suma un término.

> Cuando ya sabemos que vivimos en $m \times n$ se usa $Id_{m \times n} = I$

Def Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ se dice inversible si existe $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tal que

$$A\,B = I = B\,A$$ y se nota A^{-1}.

Para buscar / saber si existe esa matriz tenemos que resolver muchos sistemas

Buscamos soluciones de

$$A\,b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sistema 1}$$

$$A\,b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sistema 2}$$

$$\vdots$$

$$A\,b^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sistema } m$$

Eso es, podemos resolver en simultaneo m sistemas.

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right] \longrightarrow \text{Son como muchas matrices ampliadas}$$

Si triangulamos, y seguimos ~~hasta~~ y podemos llegar a I

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & - & 0 & b_{11} & & b_{1n} \\ 0 & 1 & - & 0 & & & \\ 0 & - & - & 1 & b_{n1} & & b_{nn} \end{array}\right)$$

↓ solución del sistema (1)

↓ solución del sistema n

$\Rightarrow$ esa es la inversa

Si haciendo eliminación Gaussiana llegamos a una fila de ceros $\Rightarrow$ no hay solución
$\Rightarrow$ no existe A^{-1}.

Determinante

Vimos determinante para matrices de 2×2 y 3×3
daremos una definición general

Def Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se define recursivamente por filas.

1) si $n=1$ $\det(A) = a_{11}$

2) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$ desarrollo por Fila i

donde M_{ij} es la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la j

Ejemplo $\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^3 (-2) \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

↓ por Fila 1 $= -1 + 2(-1) = -3$

Ejercicio Hacerlo por otra Fila

Propiedades del determinante

1) $\det(I) = 1$

2) $\det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_i + F_i' \\ F_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_i \\ F_m \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_i' \\ F_m \end{pmatrix}$

Ejemplo

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-6} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-3} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-3}$$

¡OJO No es la SUMA de dos matrices!

3) $\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \alpha F_i \\ F_m \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$

4) $\det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_i \\ F_i \\ F_m \end{pmatrix} = 0$

No vale en general $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$!!

De la misma forma se puede definir el determinante por columnas. Se puede probar que se llega a lo mismo.

Propiedades

1) Si A es triangular superior o inferior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ & 0 & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\rightarrow$ Notación para producto

$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$

2) $det(A) = det(A^t)$

3) $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$ $\rightarrow$ sólo sale de propiedad (3) de antes

$$det(\alpha A) = det\begin{pmatrix} \alpha F_1 \\ \alpha F_2 \\ \alpha F_n \end{pmatrix} = \alpha\, det\begin{pmatrix} F_1 \\ \alpha F_2 \\ \alpha F_n \end{pmatrix} = \alpha^2 det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \alpha F_3 \\ \alpha F_n \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \alpha^n det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_n \end{pmatrix}$$

4) $det(AB) = det(A)\, det(B)$

5) Si A es inversible $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

Ejercicio $1 = det(A^{-1}A) = det(A^{-1})\, det(A) \Rightarrow$ sale.

Queremos usar el determinante para saber si una matriz es invertible vamos a probar que

$$\boxed{A \text{ invertible} \iff \det(A) \neq 0}$$

Para eso tenemos que dar primero la noción de rango.

Lo dejamos para el BLOQUE que sigue.

Terminar de leer el material extra del campus sobre operaciones matriciales por bloque. !