Método de la Potencia

Álgebra Lineal Computacional

30 de Septiembre de 2025

Autovalores

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A si existe una solución no trivial x del sistema

$$Ax = \lambda x$$

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A si existe una solución no trivial x del sistema
$$Ax = \lambda x$$
- En este caso, x es llamado autovector asociado a λ.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A si existe una solución no trivial x del sistema

$$Ax = \lambda x$$

- En este caso, x es llamado autovector asociado a λ.

Veamos un ejemplo más gráfico

Respaso: Matrices diagonales

Veamos un ejemplo de transformación diagonal con esta animación

Intuición

Siendo A la matriz de una transformación lineal:

Intuición

Siendo A la matriz de una transformación lineal:

¿Podremos hallar una base donde A se comporta como diagonal?

Intuición

Siendo A la matriz de una transformación lineal:

¿Podremos hallar una base donde A se comporta como diagonal?

Spoiler: Diagonalización

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Intuición

Siendo A la matriz de una transformación lineal:

¿Podremos hallar una base donde A se comporta como diagonal?

Spoiler: Diagonalización

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Propiedades

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable?

Propiedades

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable? **No!**

Propiedades

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable? **No!**

Teorema

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable sí y solo sí A tiene n autovectores linealmente independientes (las columnas de P).

Ejemplito

Veamos una animación que nos ayude a interpretar todo esta cosa.

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n \times n}$

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$A^2 =$$

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} =$$

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

En general

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

En general

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Obs: D^k se puede computar en $O(n)$

Cálculo de autovalores y autovectores

Gugul: The \$ 25.000.000.000 eigenvector

THE \$25,000,000,000* EIGENVECTOR THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/∼bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

AMS subject classifications. 15-01, 15A18, 15A51

1. Introduction. When Google went online in the late 1990's, one thing that set it apart from other search engines was that its search result listings always seemed deliver the "good stuff" up front. With other search engines you often had to wade through screen after screen of links to irrelevant web pages that just happened to match the search text. Part of the magic behind Google is its PageRank algorithm, which quantitatively rates the importance of each page on the web, allowing Google to rank the pages and thereby present to the user the more important (and typically most relevant and helpful) pages first.

Calculando autovectores: Método de la Potencia

Animación

Power Animation!

Método de la Potencia

Cuentitas

Supongamos $A \in \mathbb{R}^2$ con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y sus autovectores asociados v_1 y v_2 que forman una base. Dado un x_0, se puede escribir como:

Método de la Potencia

Cuentitas

Supongamos A $\in \mathbb{R}^2$ con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y sus autovectores asociados v_1 y v_2 que forman una base. Dado un x_0, se puede escribir como:

$$x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Método de la Potencia

Cuentitas

Supongamos A $\in \mathbb{R}^2$ con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y sus autovectores asociados v_1 y v_2 que forman una base. Dado un x_0, se puede escribir como:

$$x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$Ax_0 = A(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

Método de la Potencia

Cuentitas

Supongamos A $\in \mathbb{R}^2$ con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y sus autovectores asociados v_1 y v_2 que forman una base. Dado un x_0, se puede escribir como:

$$x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$Ax_0 = A(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

$$Ax_0 = \alpha A v_1 + \beta A v_2$$

Método de la Potencia

Cuentitas

Supongamos A $\in \mathbb{R}^2$ con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y sus autovectores asociados v_1 y v_2 que forman una base. Dado un x_0, se puede escribir como:

$$x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$Ax_0 = A(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

$$Ax_0 = \alpha A v_1 + \beta A v_2$$

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

Obs

Multiplicar por A es equivalente a estirar cada componente de w por los autovalores correspondientes

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) =$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2 x_0 =$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2 x_0 = A(\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2))$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2 x_0 = A(\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2))$$

$$A^2 x_0 = \lambda_1 \alpha (A v_1) + \lambda_2 \beta (A v_2)$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2x_0 = A(\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2))$$

$$A^2x_0 = \lambda_1\alpha(Av_1) + \lambda_2\beta(Av_2)$$

$$A^2x_0 = \lambda_1^2(\alpha v_1) + \lambda_2^2(\beta v_2)$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2x_0 = A(\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2))$$

$$A^2x_0 = \lambda_1\alpha(Av_1) + \lambda_2\beta(Av_2)$$

$$A^2x_0 = \lambda_1^2(\alpha v_1) + \lambda_2^2(\beta v_2)$$

$$\vdots$$

$$A^kx_0 = \lambda_1^k(\alpha v_1) + \lambda_2^k(\beta v_2)$$

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2x_0 = A(\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2))$$

$$A^2x_0 = \lambda_1\alpha(Av_1) + \lambda_2\beta(Av_2)$$

$$A^2x_0 = \lambda_1^2(\alpha v_1) + \lambda_2^2(\beta v_2)$$

$$\vdots$$

$$A^kx_0 = \lambda_1^k(\alpha v_1) + \lambda_2^k(\beta v_2)$$

Obs: Luego de suficientes pasos la componente $v1$ irá venciendo a $v2$ obteniendo un vector cada vez más parecido a v1.

Resumen

De lo anterior se puede obtener un algoritmo iterativo para calcular el autovector asociado al autovalor dominante

Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el Método de la Potencia para calcular λ_1 y v_1.

1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
2. $v \leftarrow x_0$.
3. Para $i = 1, \ldots, niter$
4. $v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
5. Fin Para
6. $\lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
7. Devolver λ, v.

Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el <u>Método de la Potencia</u> para calcular λ_1 y v_1.

MetodoPotencia(B,x_0,niter)
    $v \leftarrow x_0$.
    Para $i = 1, \ldots, niter$
        $v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
    Fin Para
    $\lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
    Devolver λ, v.

Pará.

Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el <u>Método de la Potencia</u> para calcular λ_1 y v_1.

1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
2. $\quad v \leftarrow x_0$.
3. $\quad$ Para $i = 1, \dots, niter$
4. $\qquad v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
5. $\quad$ Fin Para
6. $\quad \lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
7. $\quad$ Devolver λ, v.

Pará. ¿Qué hipótesis necesitamos?

Método de la Potencia Inverso

- Qué relación hay entre los autovectores de A y su inversa?

Método de la Potencia Inverso

- Qué relación hay entre los autovectores de A y su inversa?
  $Av = \lambda v \iff v = A^{-1} v$

- Qué relación hay entre los autovalores de A y su inversa?

Método de la Potencia Inverso

- Qué relación hay entre los autovectores de A y su inversa?
  $Av = \lambda v \iff v = A^{-1}v$

- Qué relación hay entre los autovalores de A y su inversa?
  ...

Corolario: Método de la potencia inverso

Podemos obtener el autovalor más chico de A aplicando el método sobre su inversa.

Preguntas por contestar

- Cuantas iteraciones son suficientes?

Preguntas por contestar

- Cuantas iteraciones son suficientes? $\rightarrow$ experimental ($+$ criterio de corte)
- Que tan rápido es?

Preguntas por contestar

- Cuantas iteraciones son suficientes? $\rightarrow$ experimental ($+$ criterio de corte)
- Que tan rápido es? $\rightarrow$ depende de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
- Que pasa si la multiplicidad de $\lambda_1 > 1$

Preguntas por contestar

- Cuantas iteraciones son suficientes? $\rightarrow$ experimental ($+$ criterio de corte)
- Que tan rápido es? $\rightarrow$ depende de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
- Que pasa si la multiplicidad de $\lambda_1 > 1$ $\rightarrow$ Converge a c.l del autoespacio
- Cómo obtener todos?

Preguntas por contestar

- Cuantas iteraciones son suficientes? $\rightarrow$ experimental ($+$ criterio de corte)
- Que tan rápido es? $\rightarrow$ depende de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
- Que pasa si la multiplicidad de $\lambda_1 > 1 \rightarrow$ Converge a c.l del autoespacio
- Cómo obtener todos? $\rightarrow$ Deflación