Tema 5 - Derivabilidad de funciones

Ramon Ceballos

14/4/2021

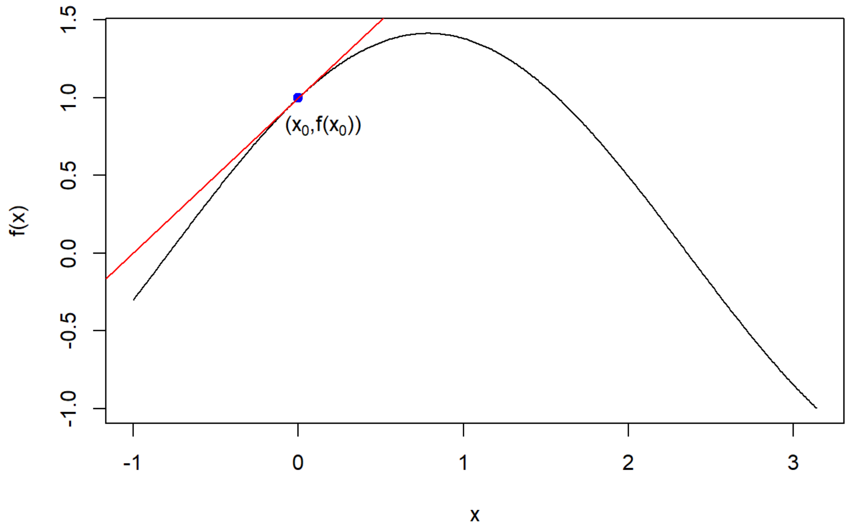
1. Derivada de una función en un punto de su dominio

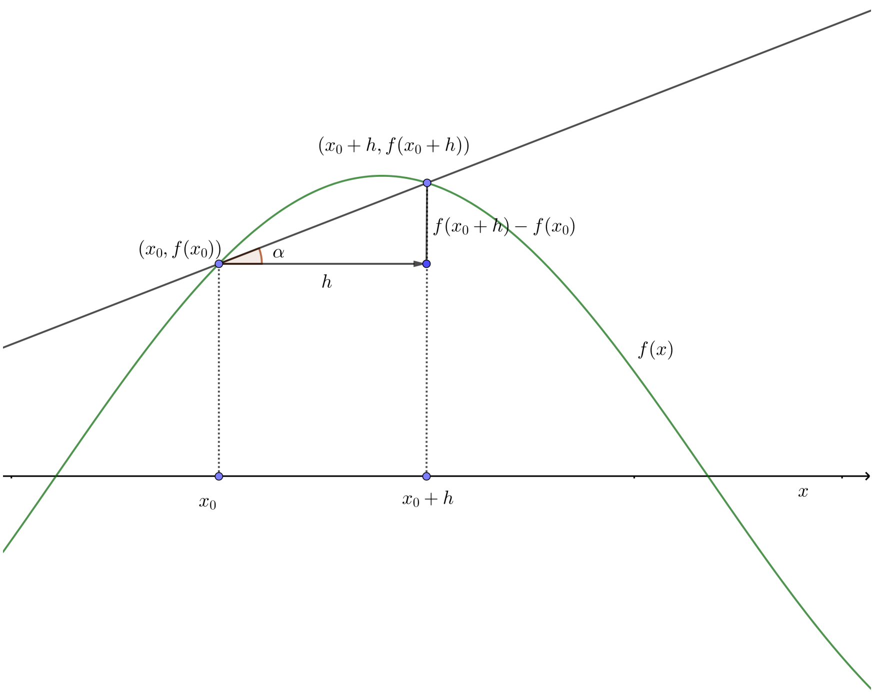
La derivada de una función sirve para formalizar la noción de **recta tangente** en un punto x_0 para una función $f(x)$.

En el gráfico siguiente, podemos observar un ejemplo del dibujo de una función junto con la recta tangente en un punto x_0 de su dominio.

La pendiente de la recta tangente (en rojo) vendría a representar lo que denominaremos la derivada de la función $f(x)$ en $x = x_0$.

```
x=seq(from=-1,to=pi, by=0.01)
f = function(x){sin(x)+cos(x)}
plot(x,f(x),type="l")
x0=0
text(x0+0.15,f(x0)-0.175,expression(paste("(",x[0],",f(",x[0],"))")))
points(x0,f(x0),pch=19,col="blue")
m=cos(x0)-sin(x0)
abline(f(x0)-m*x0,m,col="red")
```





1.1. Definición de derivada de una función en un punto

Consideremos la figura anterior.

La pendiente de una recta recordemos que se define como la tangente del ángulo con el eje de las x.

Hemos dibujado una función $f(x)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ junto con una recta secante que pasa por el punto.

Otro punto de dicha recta dado un valor h sería $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Intuitivamente dicha recta secante "tiende" a la tangente cuando el valor h tiende a cero.

La pendiente de la recta secante como puede observarse es la tangente del ángulo α que vale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Entonces, la **definición de derivada de $f(x)$ en $x = x_0$** es la siguiente:

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$. Diremos que f es **derivable** en x_0 o que **existe la derivada de f en x_0** cuando existe el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En caso en que exista, llamaremos a dicho límite con el nombre de **derivada de la función f en x_0** escrita matemáticamente como $f'(x_0)$.

Observación 1.

La derivada de una función es un propiedad **local**, es decir, está definida en un punto x_0 del dominio.

Cuando, haciendo un abuso del lenguaje, se dice que la función f es **derivable**, se quiere decir que dicha función es derivable en todos los puntos del dominio de la misma.

Observación 2.

La derivada de una función f en un punto de su dominio x_0 se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Para comprobar la afirmación anterior, basta considerar el cambio de variable siguiente $x = x_0 + h$, de donde $h = x - x_0$ y aplicar la definición de derivada.

Fijaos que decir que h tiende a cero es equivalente a decir que x tiende a x_0.

Ejemplos: **Derivada de la función constante**

EJEMPLO 1. Veamos que si la función f es constante en todo su dominio, $f(x) = k$, para todo x del dominio, la derivada de f en cualquier punto del mismo es nula.

Sea x_0 un punto del dominio de f. La **derivada** de f en x_0 será:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0$$

EJEMPLO 2. Calculemos la derivada de función f si ésta vale $f(x) = x^n$, donde n es un valor natural mayor que 1 $(n = 1, 2, \dots)$.

Sea x_0 un punto del dominio de f. La **derivada** de f en x_0 será:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

La derivada de la función anterior en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative+of+x%5En)

EJEMPLO 3. Consideremos la función $f(x) = |x|$, valor absoluto de x, definida en todo $\mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad de f en $x_0 = 0$, es decir, veamos si el límite siguiente existe: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Si hacemos el límite anterior por la derecha o para los valores $x > 0$, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

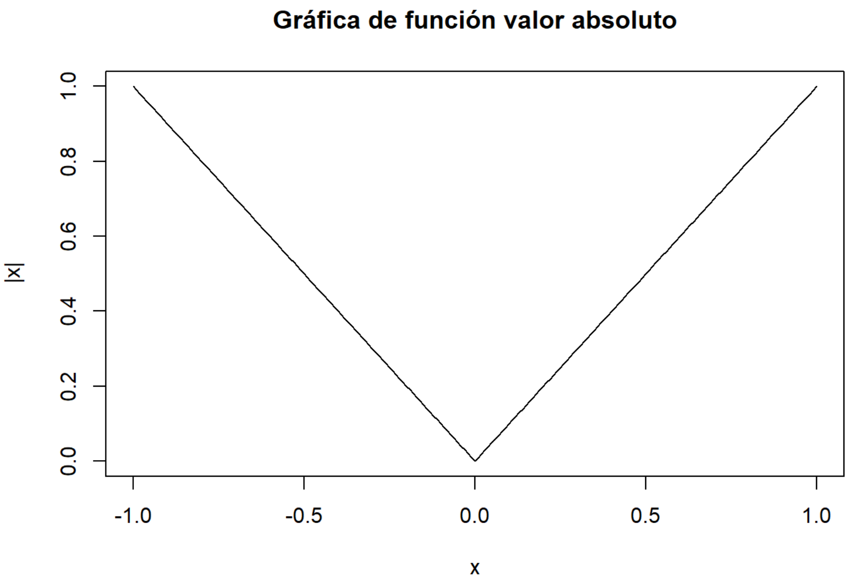
En cambio, si lo hacemos por la izquierda o para los valores $x < 0$, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

Como los límites anteriores no coinciden, concluimos que el límite $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe y por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

Gráficamente se observa que la función anterior tiene una punta en $x = 0$ y, por tanto, f no puede ser derivable en dicho punto.

Este comportamiento es el usual cuando una función no es derivable en un punto x_0, es decir, se observa gráficamente que en dicho punto, la función no tiene un comportamiento suave.



La gráfica del valor absoluto en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+of+%7Cx%7C)

2. Propiedades de las funciones derivables

2.1. Derivabilidad implica continuidad

Teorema. Sea f una función real de variable real y sea x_0 un punto del dominio de f. Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Demostración.

Definimos la función siguiente en un entorno de punto x_0.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{si } x \neq x_0, \\ f'(x_0), & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Usando que f es derivable en x_0, tenemos que la función g definida anteriormente será continua en x_0 ya que:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = g(x_0)$$

Si despejamos $f(x)$ de la expresión de $g(x)$ obtenemos $f(x) = f(x_0) + g(x)\cdot(x-x_0)$.

Veamos que f es continua en x_0, tal como queríamos ver.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + g(x)\cdot(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

2.2. La derivada de la suma es suma de derivadas

Proposición. Sean f y g dos funciones reales de variable real y sea x_0 un valor del dominio de f y de g. Si f y g son derivables en x_0, también lo es la función suma $f+g$, y se verifica que: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0). \end{aligned}$$

2.3. La derivada de una función por una constante es la constante por la derivada de la función

Proposición. Sea $k \in \mathbb{R}$ un valor real, f una función real de variable real y x_0 un punto del dominio de f. Entonce si f es derivable en x_0, también lo es $k\cdot f$ y se verifica que: $(k\cdot f)'(x_0) = k\cdot f'(x_0)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(k\cdot f)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(k\cdot f)(x)-(k\cdot f)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{k\cdot f(x)-k\cdot f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{k\cdot(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= k\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = kf'(x_0).\end{aligned}$$

2.4. La derivada del producto de funciones

Proposición. Sean f y g dos funciones reales de variable real y sea x_0 un punto del dominio de f y de g. Si f y g son derivables en x_0, también lo es la función producto $f\cdot g$, y se verifica que: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)+f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot(g(x)-g(x_0))+(f(x)-f(x_0))\cdot g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0) = f(x_0)\cdot g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0).\end{aligned}$$

2.5. La derivada del cociente de funciones

Proposición. Sean f y g dos funciones reales de variable real y sea x_0 un punto del dominio de f y de g tal que $g'(x_0)\neq 0$. Si f y g son derivables en x_0, también lo es la función cociente $\frac{f}{g}$, y se verifica que: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Demostración.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \frac{1}{g(x_0)^2}(f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)).\end{aligned}$$

3. Derivada de la función inversa

Proposición. Sea f una función real de variable real y x_0 un punto del dominio de f. Suponemos que f es derivable en x_0 y que $f'(x_0)\neq 0$. Supongamos que f admite inversa g, es decir, existe una función g tal que $g\circ f=\mathrm{Id}$, es decir, para cualquier valor x del dominio de f, se cumple que $g(f(x))=x$. Además, suponemos que g es continua en $f(x_0)$. Entonces g es derivable en $f(x_0)$ y se verifica que:

$$g'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Demostración.

El valor de $g'(f(x_0))$ es: $g'(f(x_0))=\lim_{y\to f(x_0)}\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}$.

Para el cálculo del límite anterior, hacemos el cambio de variable siguiente: $y=f(x)$, o lo que es lo mismo, $x=g(y)$. Como y tiende a $f(x_0)$, tendremos con la variable nueva que $f(x)$ tiende a $f(x_0)$ pero como g es continua en $f(x_0)$, deducimos que $g(f(x))=x$ tiende a $g(f(x_0))=x_0$. En resumen, el límite anterior puede escribirse como:

$$g'(f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Ejemplo: derivada de la función $g(x)=\sqrt[n]{x}$.

La función $g(x)=\sqrt[n]{x}$ es la inversa de la función $f(x)=x^n$ ya que: $g(f(x))=g(x^n)=\sqrt[n]{x^n}=x$.

Usando la expresión vista anteriormente, podemos escribir que: $g'(f(x))=g'(x^n)=\frac{1}{f'(x)}$.

En un ejemplo anterior vimos que $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$. Por tanto: $g'(x^n)=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}$.

Sea $y = x^n$, entonces $x = \sqrt[n]{y}$. Por tanto, $g'(y) = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{y^{n-1}}}$.

La derivada de la función $g(x)$ en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative+of+x%5E%281%2Fn%29)

Ejemplo: derivada de la función $\tan x$.

La función $\tan x$ está definida como $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Calculemos primero la derivada de la función $\sin x$ en un valor x_0.

$$\begin{aligned}(\sin)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = 2\cdot\cos(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\ &= \cos(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos(x_0),\end{aligned}$$

Usando que $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$. La expresión anterior se deduce del hecho de que $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Si se hace el cambio de variable $t = \frac{x-x_0}{2}$ y teniendo en cuenta que como $x \to x_0$, entonces $t \to 0$, los dos límites anteriores son iguales a 1.

Para calcular la derivada de la función $\cos x$, usamos una técnica similar.

$$\begin{aligned}(\cos)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = -2\cdot\sin(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\ &= -\sin(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin(x_0).\end{aligned}$$

Usamos la propiedad de la derivada del cociente, podemos hallar la derivada de la función $\tan x$.

$$\begin{aligned}(\tan)'(x_0) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0) = \frac{\sin'(x_0)\cdot\cos(x_0) - \sin(x_0)\cdot\cos'(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{\cos(x_0)\cdot\cos(x_0) + \sin(x_0)\cdot\sin(x_0)}{\cos^2(x_0)}\\ &= \frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)} = 1 + \tan^2(x_0).\end{aligned}$$

La derivada de la función $\tan x$ en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative+of+tan%28x%29)

4. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

Proposición. Sean f y g dos funciones reales de variable real. Sea x_0 un punto del dominio de f tal que $f(x_0)$ es del dominio de g. Supongamos que g es derivable en $f(x_0)$ y f es derivable en x_0. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en x_0 y se verifica que:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

En el último cálculo, podemos afirmar que el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}$ vale $g'(f(x_0))$ porque como f es derivable en x_0, f será continua en x_0 y si $x \to x_0$, entonces $f(x) \to f(x_0)$ y el límite anterior queda:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{f(x)\to f(x_0)}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

Ejemplo

Hallemos la derivada de la función $h(x) = \arctan(x^3 + x^2 + 1)$.

La función anterior es la composición de la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $g(y) = \arctan y$, es decir: $h(x) = (g \circ f)(x)$.

La derivada de la función $f(x)$ se puede calcular usando la propiedad de la suma de derivadas y la expresión de la derivada del monomio x^n:

$$(x^3 + x^2 + 1)' = (x^3)' + (x^2)' + (1)' = 3x^2 + 2x + 0 = 3x^2 + 2x$$

A continuación, hallemos la derivada de la función $g(y) = \arctan y$. Dicha función es la función inversa de la función $\tan x$. Usando la expresión de la derivada de la función inversa, tenemos:

$$g'(\tan x) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

Para hallar $g'(y)$, tenemos que escribir $y = \tan x$, y, por tanto, $x = \arctan y$:

$$g'(y) = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Donde hemos usado la siguiente relación trigonométrica: $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$.

La derivada de la función $h(x)$ usando la **regla de la cadena** será:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot (3x^2 + 2x) = \frac{3x^2+2x}{1+(x^3+x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^2+2x}{x^6+2x^5+x^4+2x^3+2x^2+2}. \end{aligned}$$

La derivada de la función $h(x)$ en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative+of+arctan%28x%5E3%2Bx%5E2%2B1%29)

4.1. Tablas de derivadas

Si vais al enlace siguiente tablas de derivadas (https://www.google.com/search?tbm=isch&sxsrf=ACYBGNQqojnjJv8BaCiJGV99iyRexZsPcg%3A1578831703469&source=hp&biw=2560&bih=1268&ei=Vw8bXsXVGoKkgweJ7qO4Bw&q=tabla wiz-img.....10..35i362i39j0i131.bUJ_Ou6rWIA) y escribís “tablas de derivadas” en la casilla de búsqueda, encontraréis un montón de tablas de derivadas para las funciones más usadas.

5. Teoremas de derivación

5.1. Derivación y extremos. Extremos absolutos y relativos

Definición de MÁXIMO relativo de una función. Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathrm{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un valor del dominio de f. Diremos que f tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si existe un entorno de x_0, es decir, existe un valor $\delta > 0$, tal que para todo valor x de este entorno, es decir, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, se cumple que $f(x) \leq f(x_0)$.

Si la condición anterior se verifica para cualquier punto $x \in (a, b)$, diremos que f tiene un **máximo absoluto** en el punto x_0.

Definición de MÍNIMO relativo de una función. Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathrm{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un valor del dominio de f. Diremos que f tiene un **mínimo relativo** en el punto x_0 si existe un entorno de x_0, es decir, existe un valor $\delta > 0$, tal que para todo punto x de este entorno, es decir, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, se cumple que $f(x) \geq f(x_0)$.

Si la condición anterior se verifica para cualquier valor $x \in (a, b)$, diremos que f tiene un **mínimo absoluto** en el punto x_0.

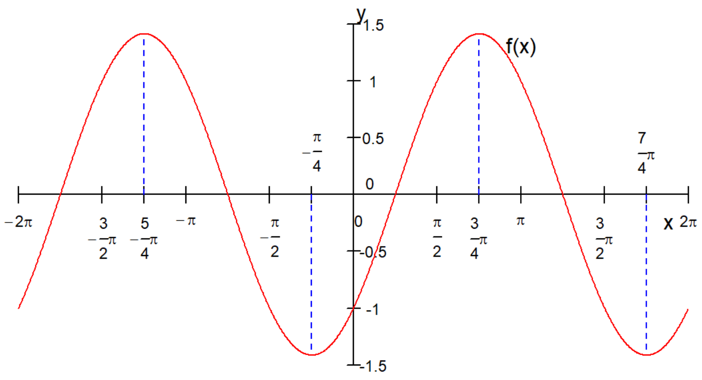
Los puntos donde f presente un **máximo** o un **mínimo relativos** o **absolutos** se denominan **extremos relativos** o **absolutos** de la función.

Ejemplo

Consideremos la función siguiente definida en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} f: (-2\pi, 2\pi) &\longrightarrow \mathrm{R}, \\ x &\longrightarrow \sin(x) - \cos(x). \end{aligned}$$

El gráfico de dicha función puede observase en la figura siguiente.



Vemos que tiene dos **máximos relativos** en los valores $x = -\frac{5}{4}\pi$ y $x = \frac{3}{4}\pi$ y dos **mínimos relativos** en los valores $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{7}{4}\pi$.

Observamos que dichos máximos y mínimos son **absolutos**.

El gráfico de la función anterior puede verse en `Wolfram Alpha` en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+of+sin%28x%29-cos%28x%29%2C+where++x+is+between+-2+pi+and+2+pi)

5.2. Teorema de derivación y extremos

Teorema. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un valor del dominio de f que sea **extremo relativo** de la función. Entonces si f es **derivable** en el punto x_0, se verifica que $f'(x_0) = 0$.

Intuitivamente, el teorema anterior nos dice que si la función f tiene un comportamiento **suave** en el extremo x_0, la recta tangente en este punto tiene que ser **horizontal**, es decir, su pendiente tiene que ser nula, tal como podemos observar en los extremos del ejemplo anterior.

Demostración.

Como f es derivable en el punto x_0, sabemos que existe el límite siguiente $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Decir que f es derivable en x_0 es equivalente a decir que la función siguiente es continua en x_0.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & \text{si } x \neq x_0, \\ f'(x_0), & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

Veamos a continuación que necesariamente $g(x_0) = f'(x_0) = 0$ y quedará demostrado el teorema.

Supongamos que $g(x_0) > 0$. Como la función g es continua en x_0, por el teorema de conservación del signo de funciones continuas, existirá un entorno de x_0, es decir, existirá un $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, $g(x) > 0$ también será positiva para todos los valores x de dicho entorno.

Es decir, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

Esto es equivalente a decir que el numerador y el denominador de la fracción anterior tienen el mismo signo, dicho en otras palabras:

- si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x > x_0$, entonces $f(x) > f(x_0)$ y,
- si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$.

Las condiciones anteriores contradicen el hecho que x_0 sea un extremo ya que hemos encontrado valores en un entorno del mismo que superan $f(x_0)$ y valores del mismo entorno que son menores que $f(x_0)$.

En conclusión, llegamos a una contradicción al suponer que $g(x_0) = f'(x_0) > 0$.

Al no poder ser que $f'(x_0) >$ ni $f'(x_0) < 0$, necesariamente $f'(x_0) = 0$ tal como queríamos demostrar.

Ejercicio. Suponer que $g(x_0) = f'(x_0) < 0$ y ver que se llega a una contradicción razonando de manera similar.

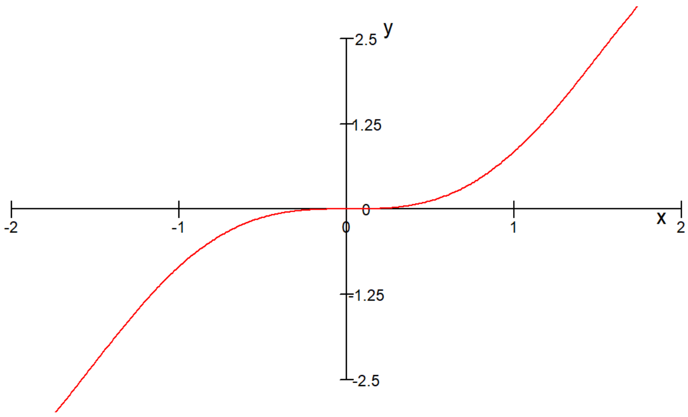
Observación. El recíproco del teorema anterior es falso. Es decir, el hecho que $f'(x_0)$ sea 0, no implica que x_0 sea un **extremo relativo** de la función.

Ejemplo

Considerar, por ejemplo, la función $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$. Si derivamos dicha función, obtenemos:

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

Vemos que $f'(0) = 0$. En cambio f no tiene ningún extremo en este punto tal como se observa en el gráfico de su función:



Para ver que el 0 no es extremo relativo, es facil ver que para $x \in (0, \pi), f(x) \geq 0$ y para $x \in (-\pi, 0), f(x) \leq 0$. Comprobémoslo para unos cuantos valores en `python` , para $x = -0.2, -0.1, 0.1, 0.2$.

```
from sympy import *

def f(x):
 return(x**2*sin(x))
```

```
for x in [-0.2,-0.1,0.1,0.2]:
  print('f({x})={res}'.format(x=x, res=f(x)))
```

```
## f(-0.2)=-0.00794677323180245
## f(-0.1)=-0.000998334166468282
## f(0.1)=0.000998334166468282
## f(0.2)=0.00794677323180245
```

El cálculo de la derivada de la función anterior puede verse en `Wolfram Alpha` en el enlace siguiente:

(https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative+of+x%5E2*sin%28x%29)

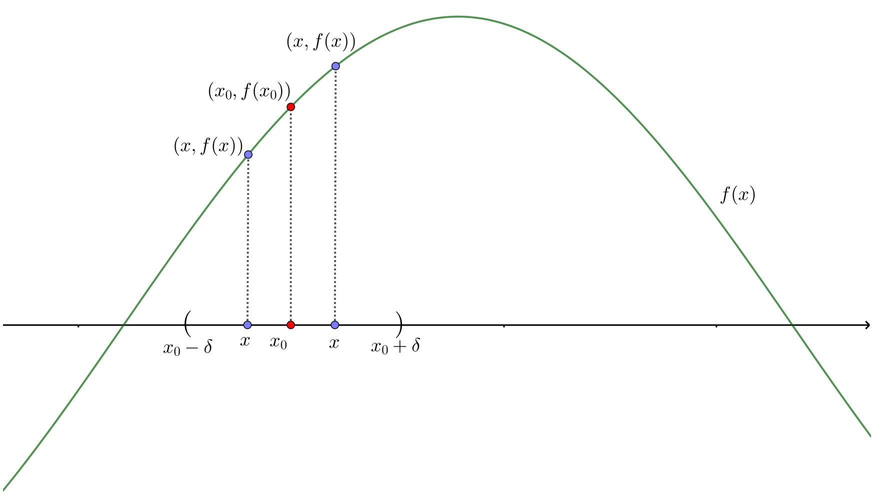
El gráfico de la función anterior puede verse en `Wolfram Alpha` en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+of+x%5E2*sin%28x%29%2C+where+x+is+between+-2+and+2)

5.3. Derivación y extremos. Crecimiento y decrecimiento de una función

Definición de CRECIMIENTO de una función. Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathrm{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un valor del dominio de f. Diremos que f es **estrictamente creciente** en el punto x_0 si existe un entorno de x_0, es decir, existe un valor $\delta > 0$ tal que para todo x de dicho entorno diferente de x_0, o si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, con $x \neq x_0$, se verifica que el cociente siguiente es positivo: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$.

Observación. La definición anterior es equivalente a decir que existe un valor $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ o $x > x_0$, entonces $f(x) > f(x_0)$ y si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ o $x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$. Ver el gráfico siguiente.

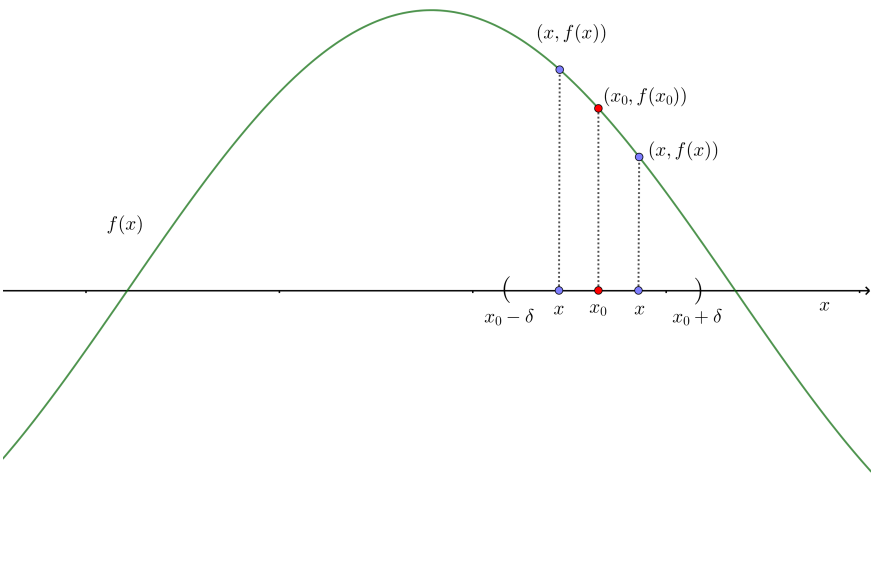
Función creciente en el punto x_0



Definición de DECRECIMIENTO de una función. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un valor del dominio de f. Diremos que f es **estrictamente decreciente** en el punto x_0 si existe un entorno de x_0, es decir, existe un valor $\delta > 0$ tal que para todo x de dicho entorno diferente de x_0, o si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, con $x \neq x_0$, se verifica que el cociente siguiente es negativo: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$.

Observación. La definición anterior es equivalente a decir que existe un valor $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ o $x > x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$ y si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ o $x < x_0$, entonces $f(x) > f(x_0)$. Ver gráfico siguiente.

Función decreciente en el punto x_0



Observación. Si la desigualdad $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ no es estricta, se dice que f es **creciente**.

Observación. Si la desigualdad $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ no es estricta, se dice que f es **decreciente**.

Proposición 1.

Sea $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0\in(a,b)$ un valor del dominio de f. Supongamos que f es derivable en x_0. Entonces si $f'(x_0)>0$ o f tiene **derivada positiva** en x_0, entonces f es **estrictamente creciente** en x_0.

Demostración

Como $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, usando la definición de límite tenemos que:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.q. si } |x-x_0|<\delta,\ \text{entonces } \left|f'(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<\epsilon$$

La última condición se puede escribir de la siguiente manera:

$$f'(x_0)-\epsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<f'(x_0)+\epsilon$$

Como $f'(x_0)>0$, siempre es posible hallar un $\epsilon>0$ tal que $f'(x_0)-\epsilon>0$.

Para este $\epsilon>0$, podemos encontrar un entorno de x_0, es decir, un $\delta>0$ tal que si $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, entonces:

$$0<f'(x_0)-\epsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<f'(x_0)+\epsilon$$

De donde deducimos que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ para todo x del entorno, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, lo que equivale a decir que f es estrictamente creciente en x_0.

Proposición 2.

Sea $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0\in(a,b)$ un valor del dominio de f. Supongamos que f es derivable en x_0. Entonces si $f'(x_0)<0$ o f tiene **derivada negativa** en x_0, entonces f es **estrictamente decreciente** en x_0.

Ejercicio. Demostrar la proposición anterior usando la misma técnica que para demostrar que si $f'(x_0)>0$, entonces f es **estrictamente creciente** en x_0.

Ejemplo

Consideremos la función siguiente de un ejemplo anterior: $f(x)=\sin(x)-\cos(x)$.

La derivada de la función f vale: $f'(x)=\cos(x)+\sin(x)$.

Dicha función se anula en los **extremos** $x=-\frac{5}{4}\pi,\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$ y $\frac{7}{4}\pi$.

```
def df(x):
 return(cos(x)+sin(x))

for x in [-5*pi/4,-pi/4,3*pi/4,7*pi/4]:
  print("f'({x})={res}".format(x=x, res=df(x)))
```

```
## f'(-5*pi/4)=0
## f'(-pi/4)=0
## f'(3*pi/4)=0
## f'(7*pi/4)=0
```

En los puntos $x=-\frac{3}{2}\pi$ y $x=\frac{\pi}{2}$ la función es **estrictamente creciente** al tener derivada positiva en dichos puntos.

```
for x in [-3*pi/2,pi/2]:
  print("f'({x})={res}".format(x=x, res=df(x)))
```

```
## f'(-3*pi/2)=1
## f'(pi/2)=1
```

En cambio, en los puntos $x=-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3}{2}\pi$ la función es **estrictamente decreciente** al tener derivada negativa en dichos puntos.

```
for x in [-pi/2,3*pi/2]:
  print("f'({x})={res}".format(x=x, res=df(x)))
```

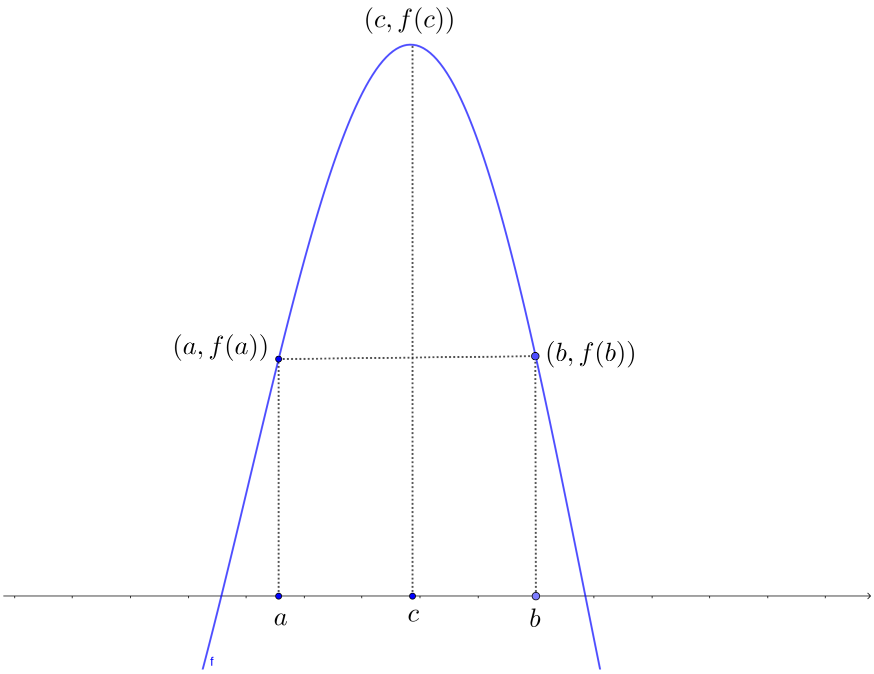
```
## f'(-pi/2)=-1
## f'(3*pi/2)=-1
```

5.4. Teoremas de Rolle y del valor medio de Cauchy y Lagrange

Las proposiciones vistas hasta ahora nos permiten determinar el comportamiento local de una función en un punto en términos de su crecimiento dependiendo del signo de la derivada de dicha función en dicho punto.

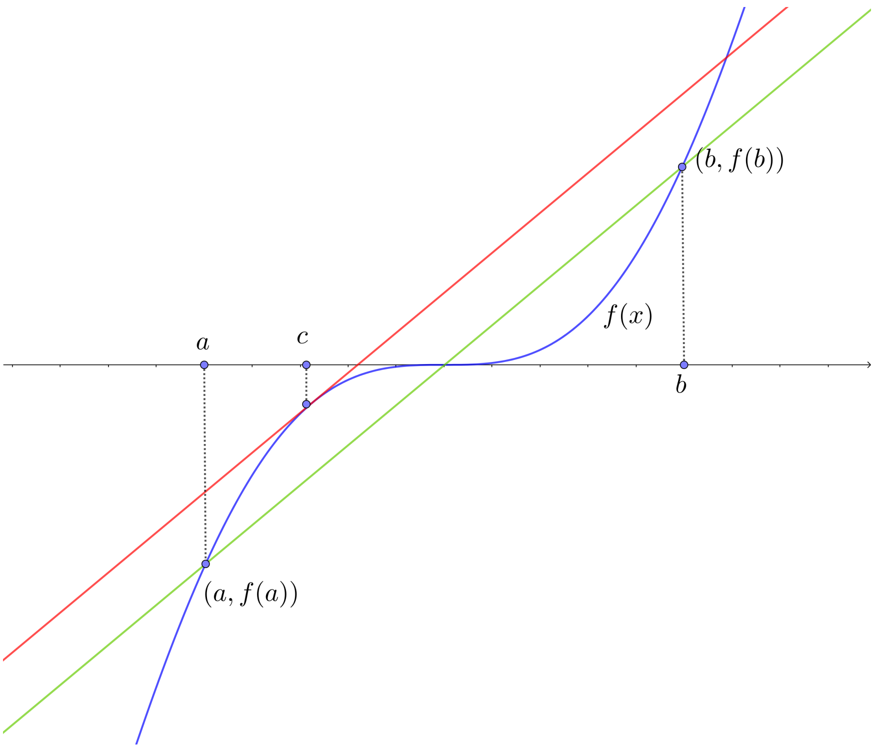
Vamos a ver dos resultados que nos permiten determinar las propiedades globales de la función en todo su dominio a partir del comportamiento de la función derivada de dicha función.

El **teorema de Rolle** dice que si los valores de una función derivable en todo el interior de un intervalo, los valores coinciden en los extremos del mismo, necesariamente ha de tener al menos un máximo o un mínimo. Intuitivamente, el resultado es claro ya que si suponemos por ejemplo que la función crece en su extremo izquierdo a, como $f(a) = f(b)$, donde b es su extremo derecho, en algún momento tiene que decrecer. Por tanto, en *dicho momento*, la función tendrá un extremo o un máximo en este caso.



El **teorema del valor medio** dice que dada una función derivable en todo su dominio, ha de existir un punto en el que recta tangente en dicho punto sea paralela a la recta que pasa por los extremos del dominio de la función.

En el gráfico siguiente la recta verde es la recta que pasa por los extremos de la función (en azul) y la recta roja es la recta tangente al punto c que pertenece al dominio de la función.



5.4.1 Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Supongamos que f es continua en todo su dominio $[a, b]$ y derivable en los puntos del interior (a, b). Supongamos además que las imágenes en los extremos coinciden, es decir, $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Observación. En el dominio de definición de f están incluidos los extremos del intervalo.

Demostración.

Como la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, deducimos que f tiene un máximo absoluto M y un mínimo absoluto m.

Pueden ocurrir dos casos:

- Que el máximo absoluto se alcance en el extremo a y el mínimo, en el extremo b, con $f(a) = M$ y $f(b) = m$ o al revés, es decir, que el máximo absoluto se alcance en el extremo b y el mínimo, en el extremo a, con $f(a) = m$ y $f(b) = M$. Como $f(a) = f(b)$, resulta que $M = m$ y la única función en un intervalo en donde su máximo coincide con su mínimo es la función constante. En este caso $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$ como ya vimos anteriormente y el teorema quedaría demostrado en este caso.
- Supongamos que el máximo o el mínimo de la función se alcanza en un punto $c \in (a, b)$ del interior del intervalo. Por un teorema visto anteriormente, tenemos que $f'(c) = 0$ y el teorema quedaría demostrado también en este caso.

5.4.2 **Teorema del valor medio de Cauchy**

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ del interior del intervalo tal que:

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$$

Demostración.

Consideramos la función siguiente:

$$h(x) = f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a))$$

Que será continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) al ser suma de productos de funciones continuas y derivables por constantes.

La idea es aplicar el **teorema de Rolle** a la función $h(x)$. Calculemos $h(a)$ y $h(b)$:

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) \cdot (g(b) - g(a)) - g(a) \cdot (f(b) - f(a)) = f(a) \cdot g(b) - g(a) \cdot f(b), \\ h(b) &= f(b) \cdot (g(b) - g(a)) - g(b) \cdot (f(b) - f(a)) = -f(b) \cdot g(a) + g(b) \cdot f(a). \end{aligned}$$

Se cumple, por tanto, que $h(a) = h(b)$. Aplicando el **teorema de Rolle** a la función h, tenemos que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.

$$h'(c) = f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) = 0$$

De donde deducimos lo que dice la tesis del teorema:

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$$

5.4.3 **Teorema del valor medio de Lagrange (colorario)**

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ del interior del intervalo tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Ejercicio. Demostrar el teorema del valor medio de Lagrange. Indicación: considerar $f(x)$ la función del teorema, $g(x) = x$ y aplicar el **teorema del valor medio de Cauchy**.

Observación. El **Teorema del valor medio de Lagrange** es equivalente a afirmar lo que hemos dicho anteriormente: si f es derivable en el intervalo abierto y continua en el cerrado, existe un punto c del interior del intervalo tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es decir, la pendiente de la recta tangente en el punto c coincide con la pendiente de la recta que pasa por los extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Es decir, la recta tangente en el punto c es paralela a la recta que pasa por los extremos del intervalo de definición de la función f.

5.5. **Consecuencias de los teoremas**

Colorario 1.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces f es constante.

Demostración.

Sea $x \in (a, b]$. Veamos que $f(x) = f(a)$ y, por tanto, f será constante.

Para ello, consideremos la función f restringida al intervalo $[a, x]$, $f : [a, x] \longrightarrow \mathbb{R}$, que será continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x). Si aplicamos el **teorema del valor medio de Lagrange**, tenemos que existe un $c \in (a, x)$ tal que:

$$f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x - a) = 0$$

Ya que nos dicen que $f'(c) = 0$ al ser la derivada nula en cualquier punto del intervalo (a, b).

Deducimos, por tanto, que $f(x) = f(a)$, condición que equivale a que la función f es constante.

Colorario 2.

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces $f(x) - g(x)$ es constante.

Ejercicio. Demostrar el corolario anterior. Indicación: aplicar el resultado que hemos visto antes a la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Colorario 3.

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto del intervalo (a, b).

Entonces, f es creciente en (a, b) si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$ del intervalo.

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que la función f es creciente en (a, b). Esto significa que fijado $x_0 \in (a, b)$ en el intervalo, existe un entorno de x_0, es decir, existe un $\delta > 0$, tal que para todo valor $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se verifica que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Entonces, usando que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tendremos que $f'(x_0) \geq 0$, tal como queríamos ver.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $f'(x_0) \geq 0$, para todo valor $x_0 \in (a, b)$ dentro del intervalo. Veamos que f es creciente en x_0.

Sea $x > x_0$. Si aplicamos el **teorema del valor medio de Lagrange** a la función f restringida al intervalo $[x_0, x]$ tenemos que existe un punto c tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Sea ahora $x < x_0$. Si volvemos a aplicar el el **teorema del valor medio de Lagrange** a la función f restringida al intervalo $[x, x_0]$ tenemos que existe un punto c tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

En resumen, el cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ siempre es positivo, condición que equivale a afirmar que f es creciente en x_0.

De hecho, hubiera sido suficiente demostrar que el cociente anterior es positivo en un entorno de x_0 pero hemos demostrado más, hemos visto que dicho cociente siempre es positivo sea cual sea el valor $x \in (a, b)$ del intervalo.

Colorario 4.

Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathrm{R}$ una función derivable en todo punto del intervalo (a, b).

Entonces, f es decreciente en (a, b) si, y sólo si, $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$ del intervalo.

Ejercicio. Demostrar el corolario anterior usando la misma técnica de demostración para el caso en que la función f es creciente.

Ejemplo empleando los teoremas

Consideremos la función vista anteriormente $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Como $f(-\pi) = 1 = f(\pi)$, aplicando el **teorema de Rolle**, sabemos que existe como mínimo un punto c tal que $f'(c) = 0$. De hecho, hay dos como hemos visto anteriormente: $c = -\frac{\pi}{4}$ y $c = \frac{3}{4}\pi$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) + \sin(x), \\ f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{aligned}$$

Si ahora consideramos la función anterior pero definida en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos que existe un punto c tal que:

$$f'(c) = \cos(c) + \sin(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 - (-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Hallemos a continuación el valor c.

$$\begin{aligned} \cos(c) + \sin(c) &= \frac{2}{\pi}, \\ \cos(c) &= \frac{2}{\pi} - \sin(c), \\ \pm\sqrt{1 - \sin^2(c)} &= \frac{2}{\pi} - \sin(c), \\ 1 - \sin^2(c) &= \left(\frac{2}{\pi} - \sin(c)\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} + \sin^2(c) - \frac{4}{\pi}\sin(c), \\ 2\sin^2(c) - \frac{4}{\pi}\sin(c) + \frac{4}{\pi^2} - 1 &= 0, \\ \sin(c) &= \frac{\frac{4}{\pi} \pm \sqrt{\frac{16}{\pi^2} - 8\cdot\left(\frac{4}{\pi^2} - 1\right)}}{4}, \\ \sin(c) &= \frac{\frac{4}{\pi} \pm \sqrt{8 - \frac{16}{\pi^2}}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8\pi^2 - 16}}{4\pi} = \frac{2 \pm \sqrt{2\pi^2 - 4}}{2\pi}. \end{aligned}$$

El valor de $\cos(c)$ será:

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2 \pm \sqrt{2\pi^2 - 4}}{2\pi}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{2\pi^2 \pm 4\sqrt{2\pi^2 - 4}}{4\pi^2}} = \pm\sqrt{\frac{2\pi^2 \mp 4\sqrt{2\pi^2 - 4}}{4\pi^2}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{(2 \mp \sqrt{2\pi^2 - 4})^2}{4\pi^2}} = \pm\frac{(2 \mp \sqrt{2\pi^2 - 4})}{2\pi} \end{aligned}$$

Entonces las parejas $(\sin(c), \cos(c))$ son las siguientes:

- si $\sin(c) = \frac{2+\sqrt{2\pi^2-4}}{2\pi}$, entonces $\cos(c) = \frac{2-\sqrt{2\pi^2-4}}{2\pi}$
- si $\sin(c) = \frac{2-\sqrt{2\pi^2-4}}{2\pi}$, entonces $\cos(c) = \frac{2+\sqrt{2\pi^2-4}}{2\pi}$

El primer caso no puede ser ya que $\cos(c) < 0$ y como estamos en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la función coseno es positiva.

Sólo será solución el segundo caso, donde el valor de c será aproximadamente: -0.318.

Comprobemos usando `python` que el valor de c hallado es el correcto.

```
from numpy import *
c=arcsin((2-sqrt(2*pi**2-4))/(2*pi))
derivada_c = sin(c)+cos(c)
k=2/pi
print('El valor de c es: {c}'.format(c=c))
```

```
## El valor de c es: -0.3184557133984764
```

```
print('El valor de la derivada de f en c es: {x}'.format(x=derivada_c))
```

```
## El valor de la derivada de f en c es: 0.6366197723675814
```

```
print('El valor de 2/pi es: {k}'.format(k=k))
```

```
## El valor de 2/pi es: 0.6366197723675814
```

6. Regla de L'Hôpital

Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es su aplicación al cálculo de límites de funciones.

La regla de L'Hôpital permite resolver indeterminaciones usando derivadas.

Teorema: regla de L'Hôpital. Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathrm{R}$ dos funciones derivables en un punto $c \in (a, b)$. Supongamos:

- $f(c) = g(c) = 0$
- $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$ para todo punto x del entorno de c diferente de c

Si se verifican las condiciones anteriores y el límite siguiente existe $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y vale L, entonces también existe el límite $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y vale L.

Demostración.

Sea $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a, b)$ y donde se cumplen las condiciones del teorema.

Sea $x \in (c-\delta, c+\delta)$ un punto del entorno. En el intervalo $[c, x]$ se cumplen las hipótesis del **Teorema del valor medio de Cauchy**, ya que f y g son derivables en (c, x) al serlo en todo el entorno $(c-\delta, c+\delta)$, y continuas en $[c, x]$, ya que como son derivables en todo el entorno, serán continuas y como $[c, x] \subset (c-\delta, c+\delta)$, también serán continuas en el intervalo $[c, x]$.

Usando por tanto el **Teorema del valor medio de Cauchy**, podemos afirmar que existe un punto $d \in (c, x)$ tal que:

$$f'(d) \cdot (g(d) - g(c)) = g'(d) \cdot (f(d) - f(c))$$

Recordemos que $f(c) = g(c) = 0$, $f'(d) \neq 0$ y $g'(d) \neq 0$ ya que suponíamos que las derivadas f' y g' no se anulaban en el entorno de c. Usando las condiciones anteriores, podemos simplificar la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(d)}{g(d)}$$

Si hacemos tender $x \to c$, como $d \in (c, x)$, tendremos que $d \to c$. Por tanto tenemos que por hipótesis:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

En resumen, si existe $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existe el límite $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y los dos coinciden.

Observación. El teorema sigue siendo cierto en el caso en que a, b, c o L son $\pm\infty$. Es decir, si existe el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existe el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y los dos coinciden y pueden tener como resultado $\pm\infty$.

Ejemplo 1

Calculemos el valor del límite siguiente $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x - x\cos x}$.

Observemos que si sustituimos por el valor 0, obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Usando la regla de L'Hôpital, calculemos el límite anterior.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x - x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1 - \cos x + x\sin x} = \frac{0}{0}$$

Nos vuelve a dar la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital por segunda vez, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1 - \cos x + x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x + \sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \frac{0}{0}$$

Nos vuelve a dar la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital por tercera vez, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-1}{3}$$

El límite tiene el valor $-\frac{1}{3}$.

El límite anterior en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente: (https://www.wolframalpha.com/input/?i=limit+of+%28sin%28x%29-x%29%2F%28x-x*cos%28x%29%29+when+x+tends+to+0)

¡Cuidado! La Regla de L'Hôpital sólo se puede aplicar en un sentido. Es decir, si existe el límite $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, bajo las condiciones del teorema anterior, existe el $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales; ahora bien, si no existe el límite $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, no podemos decir nada acerca del límite $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$. Véase el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2

Consideremos el límite siguiente: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

Si sustituimos x por 0 en el límite anterior obtenemos el valor $\frac{0}{0}$, pensad que $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ vale 0 ya que es el límite de una funció que tiende a 0 (x^2) por una función acotada $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Apliquemos pues la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x} - \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x} = 0 - \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

El límite $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$ vale 0 ya que el denominador tiende a 1 cuando $x\to 0$ y el numerador es el límite de una función que tiende a 0 ($2x$) por una función acotada $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

El límite del cociente de derivadas no existe ya que si consideramos la sucesión $x_n = \frac{1}{2\pi n}\longrightarrow 0$, si $n\to\infty$, el límite de la sucesión $\frac{\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\cos x_n}$ vale:

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2\pi n)}{\cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right)} = -1$$

En cambio, si consideramos la sucesión $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\longrightarrow 0$, si $n\to\infty$, el límite de la sucesión $\frac{\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)}{\cos y_n}$ vale:

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}{\cos\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)} = 0$$

A continuación estaríamos tentados a decir que nuestro límite inicial $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ no existe, pero esto es falso ya que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0$$

El primer límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$ vale 1 ya que vimos en su momento que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, por tanto, si hacemos el límite de su recíproco también será 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

El segundo límite $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ vale 0 ya que es el límite de una función que tiende a 0 (x) por una función acotada $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

En resumen, que no exista el límite una vez aplicada la regla de l'Hôpital no significa que no exista el límite inicial que nos hemos planteado.

El límite anterior en `Wolfram Alpha` se muestra en el enlace siguiente:

(https://www.wolframalpha.com/input/?i=limit+of+%28x%5E2*sin%281%2Fx%29%29%2Fsin%28x%29+when+x+tends+to+0)