# Tema 6 - Polinomios de Taylor

Ramon Ceballos

14/4/2021

## 1. Fórmula de Taylor. Introducción

La idea fundamental de la **fórmula de Taylor** es aproximar localmente una función en un entorno de un valor determinado por las funciones más manejables que se conocen, los polinomios.

Dicho de manera más explícita, consideremos una función $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ que se puede derivar hasta un cierto orden, pongamos $n+1$, para un cierto valor $n$ natural, y sea $x_0\in(a,b)$ un punto del interior del dominio de $f$. Queremos hallar un polinomio $P_n(x)$ tal que se verifique que $f$ y $P_n$ sean "iguales" en $x_0$ hasta orden $n$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^m}=0,\ \text{para } m=0,1,\ldots,n$$

La condición anterior para $m=0$ es la siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-P_n(x)=0,\ \Rightarrow P_n(x_0)=f(x_0)$$

Es decir, la función y el polinomio a hallar deben coincidir en el valor $x_0$.

La condición anterior para $m=1$ es la siguiente:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)}=0,\ \Rightarrow P_n'(x_0)=f'(x_0)$$

Es decir, la derivada de la función y el polinomio a hallar deben coincidir en el valor $x_0$ ya que si aplicamos la regla de L'Hôpital (el límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ ya que recordemos que $P_n(x_0)=f(x_0)$).

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{1}=0$$

En general, la condición para $m$ entre 0 y $n$ es la siguiente:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^m}=0,\ \Rightarrow P_n^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0)$$

Es decir, la derivada $m$-ésima de la función y el polinomio a hallar deben coincidir en el valor $x_0$ ya que si aplicamos la regla de L'Hôpital $m$ veces (el límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ ya que recordemos que $P_n^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)$ para los $i$ anteriores desde 0 hasta $m-1$), obtenemos que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^m}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{m(x-x_0)^{m-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(m)}(x)-P_n^{(m)}(x)}{m!}=0$$

**Importante:** Las condiciones que debe verificar el polinomio $P_n(x)$ para aproximar la función $f(x)$ hasta orden $n$ en un entorno del punto $x_0$ son las siguientes:

$$P_n^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0),\ \text{para } m=0,\ldots,n$$

En este caso decimos que el polinomio $P_n(x)$ tiene en el punto $x_0$ **orden de contacto** con $f$ superior a $n$.

**Ejemplo ilustrativo**.

En el enlace siguiente enlace se muestra la función $f(x)=\sin x$ (en rojo) y los polinomios de grado 1, $P_1(x)$ (la recta en azul discontinua), de grado 3, $P_3(x)$ (la curva en azul discontinua) para $x_0=0$. El polinomio $P_2(x)$ coincide con el polinomio de grado 1 en este caso ya que el coeficiente de $x^2$ vale 0 como veremos más adelante.

En la casilla *expansion point* podéis cambiar el valor $x_0$. Intentad escribir `pi/2` y `pi` y observad qué ocurre.

Si clicáis en la casilla *More terms* en la parte de arriba del gráfico veréis los polinomios de grado 5, $P_5(x)$ y de grado 7, $P_7(x)$. Observad cómo cada vez los polinomios se aproximan más a la función $f(x)$.

**Observación.** La elección del punto $x_0$ no es arbitraria. Hemos de elegir un valor $x_0$ del que conozcamos el valor $f(x_0)$ y las derivadas de cualquier orden en $x_0$, $f^{(m)}(x_0)$, $m=1,2,\ldots$

En el ejemplo anterior donde recordemos que $f(x)=\sin x$, debemos elegir un punto $x_0$ en el cual conozcamos los valores de $\sin x_0$ y $\cos x_0$ ya que si conocemos dichos valores, conoceremos $f(x_0)$ y las derivadas de cualquier orden.

$$f(x_0)=\sin x_0,\ f'(x_0)=\cos x_0,\ f''(x_0)=-\sin x_0,\ f'''(x_0)=-\cos x_0,\ f^{iv}(x_0)=\sin x_0,\ldots$$

Algunos valores $x_0$ elegibles en este caso son los siguientes: $x_0=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\pi$ ya que conocemos el valor de $\sin(x_0)$ y $\cos(x_0)$ tal como se observa en la tabla siguiente:

| $x_0$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x_0)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\cos(x_0)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ |

# 2. Cálculo del polinomio de Taylor

El resultado siguiente nos da una expresión del polinomio de Taylor.

**Teorema. Expresión del polinomio de Taylor.** Sea $n$ un valor natural. Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0\in(a,b)$ un punto interior del dominio de $f$. Supongamos que $f$ es derivable $n+1$ veces en $x_0$. Entonces el polinomio de Taylor de grado $n$ con **orden de contacto** con $f$ superior a $n$ en $x_0$ es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = \quad & f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \\
& + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

**Demostración** (Contenido bastante técnico)

Vamos a demostrar la fórmula anterior por inducción sobre $n$.

Para $n = 0$, $P_0(x) = f(x_0)$, que por definición es el **polinomio de Taylor** de grado 0 o constante.

Suponemos cierto para $n$, es decir suponemos que:

$$
P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n
$$

Hemos de demostrar que:

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(x) = \quad & f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \\
& + \tfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} = P_n(x) + \tfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Por hipótesis de inducción, sabemos que $P_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, para $i = 0, \ldots, n$ ya que recordemos que $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado $n$.

Para verificar que $P_{n+1}(x)$ correspondiente a la expresión anterior es el polinomio de Taylor de grado $n+1$, hay que verificar las igualdades siguientes: $P_{n+1}^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, para $i = 0, \ldots, n+1$.

Si $i$ está entre 0 y $n$, tenemos que:

$$
P_{n+1}^{(i)}(x) = P_n^{(i)}(x) + (n+1)\cdots(n+2-i)\cdot\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1-i}
$$

Si evaluamos la expresión anterior en $x = x_0$, obtenemos:

$$
P_{n+1}^{(i)}(x_0) = P_n^{(i)}(x_0) + (n+1)\cdots(n+2-i)\cdot\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x_0-x_0)^{n+1-i} = P_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)
$$

Ya que $n + 1 - i > 0$ por lo que el segundo sumando será nulo y la última igualdad es cierta por hipótesis de inducción.

Sólo falta demostrar el caso $i = n+1$. Si calculamos la derivada $n+1$-ésima del polinomio $P_{n+1}(x)$ obtenemos:

$$
P_{n+1}^{(n+1)}(x) = P_n^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)
$$

Ya que $P_n^{(n+1)}(x) = 0$ al ser $P_n(x)$ un polinomio de grado $n$ y por tanto la derivada $n+1$-ésima del mismo será 0.

Concluimos por tanto que la derivada $n+1$-ésima del polinomio $P_{n+1}(x)$ será la constante $f^{(n+1)}(x_0)$ y, en particular, se cumplirá que $P_{n+1}^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$, tal como queríamos demostrar.

**Ejemplo series de Taylor**

Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$ y el punto $x_0 = 0$. Vamos a hallar el polinomio de Taylor de grado $n$ de $f(x)$ en $x_0 = 0$.

Lo primero que hemos de calcular a la vista de la expresión vista en el teorema anterior que nos da la expresión del polinomio de Taylor es el valor de la función en $x_0$, $f(x_0)$ y el valor de las derivadas de $f$ en $x_0$, $f^{(m)}(x_0)$, para $m = 1, 2, \ldots$

Los valores de $f^{(m)}(0)$ valen lo siguiente:

$$f(0) = \sin 0 = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,\ f''(0) = -\sin 0 = 0,\ f'''(0) = -\cos 0 = -1,\ f^{(iv)}(0) = \sin 0 = 0, \ldots$$

A partir de los cálculos anteriores podemos deducir que $f^{(n)}(0) = 0$, si $n$ es par y $f^{(n)}(0) = \pm 1$, si $n$ es impar y valdrá 1 si $n = 1, 5, 9, \ldots$ y $-1$ si $n = 3, 7, 11, \ldots$

Intentemos escribir el resultado anterior de forma más “compacta”. Decir que $n$ es par es equivalente a decir que existe un valor $k$ natural tal que $n = 2k$ y decir que $n$ es impar es equivalente a decir que existe un valor $k$ natural tal que $n = 2k + 1$. Por tanto, las condiciones anteriores se pueden escribir como: $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = \pm 1$.

Observemos además que los valores de $n$ para los que la derivada $n$-ésima valía 1, ($n = 1, 5, 9, \ldots$) corresponde a valores de $k$ par ya que $1 = 2 \cdot 0 + 1,\ 5 = 2 \cdot 2 + 1,\ 9 = 2 \cdot 4 + 1, \ldots$ y los valores de $n$ para los que la derivada $n$-ésima valía $-1$ ($n = 3, 7, 11, \ldots$) corresponde a valores de $k$ impar ya que $3 = 2 \cdot 1 + 1,\ 7 = 2 \cdot 3 + 1,\ 11 = 2 \cdot 5 + 1, \ldots$

Por tanto, la condición $f^{(2k+1)}(0) = \pm 1$ puede escribirse como $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ ya que la expresión $(-1)^k$ da 1 para los $k$ pares y $-1$, para los $k$ impares.

En resumen, tenemos lo siguiente: $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Sea $n$ un natural, consideremos dos casos:

- **1.** $n$ **par.** En este caso, el polinomio de Taylor de grado $n$ es el siguiente:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n$$

Observemos que el último término del polinomio anterior será 0 ya que hemos dicho que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n$ par.

Entonces el polinomio $P_n(x)$ se puede escribir como:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$$

Si eliminamos los términos correspondientes a derivadas pares al ser nulos, nos queda la expresión siguiente:

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Donde $k$ es tal que $n - 1 = 2k + 1$, o, lo que es lo mismo, $k = \frac{n-2}{2}$.

Consideremos por ejemplo $n = 14$, en este caso $k = \frac{14-2}{2} = 6$. El polinomio de Taylor de $f(x) = \sin x$ de grado 14 en $x_0 = 0$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} P_{14}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}, \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800} + \frac{x^{13}}{6227020800}. \end{aligned}$$

- **2.** $n$ **impar.** En este caso, el polinomio de Taylor de grado $n$ es el siguiente:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n$$

Si eliminamos los términos correspondientes a derivadas pares al ser nulos, nos queda la expresión siguiente:

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Donde $k$ es tal que $n = 2k+1$, o, lo que es lo mismo, $k = \frac{n-1}{2}$.

Consideremos por ejemplo $n = 11$, en este caso $k = \frac{11-1}{2} = 5$. El polinomio de Taylor de $f(x) = \sin x$ de grado 11 en $x_0 = 0$ es el siguiente:

$$P_{11}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800}$$

Si váis al enlace siguiente y apretáis una vez la casilla `More terms` en la sección `Series expansion at x=0` os aparecerá el polinomio de Taylor de grado 11 y si volvéis a apretar, os aparecerá el polinomio de Taylor de grado 19 que "incluye" el polinomio de Taylor de grado 14.

## 3. Desarrollos y polinomios de MacLaurin

**Ejercicio.** Hallar el polinomio de Taylor de grado $n$ para la misma función que el ejemplo anterior en el punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

**Definición.** Dada una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ veces derivable tal que $0 \in (a, b)$ y sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado $n$ en $x_0 = 0$. Dicho polinomio se denomina **polinomio o expansión de MacLaurin de grado $n$ de $f$** .

En el ejemplo anterior, hemos hallado el polinomio de MacLaurin de grado $n$ de la función $f(x) = \sin x$.

## 4. Error en el polinomio de Taylor

Una vez conocido cómo hallar el **polinomio de Taylor** de una función $f(x)$ en un punto $x_0$ de su dominio, podemos usar dicho polinomio o dicha expansión para **aproximar** el valor de dicha función $f(x)$ para valores $x$ **cercanos** a $x_0$.

Ahora bien, si no tenemos manera de estimar o calcular alguna **cota del error** que estamos cometiendo, dicha aproximación no tiene ningún sentido ya que sería como ir a ciegas, es decir, no sabemos hasta qué punto el valor $P_n(x)$ aproxima bien o no el valor de $f(x)$.

El siguiente resultado nos da una expresión que permite acotar el error cometido usando el polinomio de Taylor.

<l class=“prop”>**Teorema. Error en la fórmula de Taylor.** Sea $f$ una función $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, sea $x_0\in(a,b)$ un punto interior del dominio de $f$ y supongamos que $f$ es $n+1$ veces derivable en un entorno de $x_0$. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado $n$ en $x_0$. Entonces si $x$ es un punto del entorno anterior de $x_0$, se verifica:

$$Error = f(x)-P_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{m\cdot n!}\cdot(x-c)^{n-m+1}\cdot(x-x_0)^m$$

Donde $c$ es un punto que está situado entre $x_0$ y $x$ (o entre $x$ y $x_0$, dependiendo de cuál de los dos valores es el menor y el mayor) y se denota por $x\in<x_0,x>$ y $m$ es un natural entre 1 y $n+1$. Dicha expresión es conocida por **resto de Cauchy**.

**Observación.** A la expresión $f(x)-P_n(x)$ se le denota por $R_n(x-x_0)$, $R$ de resto.

**Corolario.**

En las condiciones del teorema anterior, considerando $m=n+1$, tenemos la expresión siguiente conocida como **resto de Lagrange**.

$$Error = f(x)-P_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Esta es la expresión más conocida de la expresión del error del **polinomio de Taylor** de grado $n$.

**Demostración** (Contenido muy técnico)

Sea $x\in(a,b)$ un valor del interior del entorno de $x_0$ donde $f$ es $n+1$ veces derivable. Fijado dicho valor de $x$, se considera la función siguiente que depende de la variable $t$:

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k$$

Dicha función $F(t)$ es continua y derivable en el intervalo $<x_0,x>$ (recordemos que dicha expresión vale $(x_0,x)$, si $x>x_0$ y $(x,x_0)$ si $x<x_0$) ya que es suma de productos de continuas y derivables: pensad que $f$ es derivable por hipótesis, $f^{(k)}$ será derivable ya que $k\leq n$ y por ser $f$ derivable $n+1$ veces por hipótesis y la función $(x-t)^k$ será derivable al ser un polinomio en $t$.

Hallemos el valor de la derivada de $F$, $F'(t)$.

$$\begin{aligned}
F'(t)= &\quad f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k-1}\\
= &\quad f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\\
= &\quad f'(t)+\tfrac{f''(t)}{1!}\cdot(x-t)+\tfrac{f'''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}+\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n\\
&\quad -\left(f'(t)+\tfrac{f''(t)}{1!}\cdot(x-t)+\tfrac{f'''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right)=\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n
\end{aligned}$$

Consideremos ahora una función $G$ cualquiera continua en el intervalo $<x_0,x>$ cerrado y diferenciable en el mismo intervalo anterior pero abierto tal que $G'(t)\neq 0$ para todo $t\in<x_0,x>$ y $G(x_0)\neq G(x)$.

Si aplicamos el Teorema del valor medio de Cauchy al intervalo $<x_0,x>$ a las funciones $F$ y $G$, tenemos que existe un valor $c\in<x_0,x>$ tal que:

$$G'(c) \cdot (F(x) - F(x_0)) = F'(c) \cdot (G(x) - G(x_0))$$

El valor de $F(x) - F(x_0)$ es precisamente el error que cometemos al aproximar $f(x)$ por el polinomio de Taylor de grado $n$, $P_n(x)$ ya que:

$$F(x) - F(x_0) = f(t) - \left( f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \right) = f(x) - P_n(x)$$

Usando la expresión deducida del Teorema del valor medio de Cauchy, podemos escribir que:

$$F(x) - F(x_0) = f(x) - P_n(x) = R_n(x - x_0) = \frac{F'(c)}{G'(c)} \cdot (G(x) - G(x_0))$$

Diferentes expresiones del error se obtienen eligiendo $G$ de una determinada forma:

- Si $G(t) = (x - t)^{n+1}$, tenemos que $G'(t) = -(n+1) \cdot (x - t)^n$ y, por tanto:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \tfrac{F'(c)}{G'(c)} \cdot (G(x) - G(x_0)) = \tfrac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n}{-(n+1) \cdot (x-c)^n} \cdot \left(-(x - x_0)^{n+1}\right) \\ &= \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- Si $G(t) = (x - t)^m$, con $m$ natural entre 1 y $n + 1$, tenemos que $G'(t) = -m \cdot (x - t)^{m-1}$ y, por tanto:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \tfrac{F'(c)}{G'(c)} \cdot (G(x) - G(x_0)) = \tfrac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n}{-m \cdot (x-c)^{m-1}} \cdot (-(x - x_0)^m) \\ &= \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{m \cdot n!} \cdot (x - c)^{n-m+1} \cdot (x - x_0)^m \end{aligned}$$

Esto es lo que queríamos demostrar.

# 5. Ejemplos de polinomio de Taylor

## 5.1. Ejemplo: cálculo aproximado de $\sin x$

Vamos a intentar aproximar la función $f(x) = \sin x$ para un $x$ próximo a 0.

Recordemos que el polinomio de Taylor (de hecho, el de MacLaurin) de la función $f(x)$ de grado $n$ es el siguiente:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Con $k = \frac{n-2}{2}$, si $n$ es par y $k = \frac{n-1}{2}$, si $n$ es impar.

El problema que nos planteamos es el siguiente: dado $x$ y $\epsilon$ un error absoluto máximo que estamos dispuestos a cometer, calcular el valor de $P_n(x)$ tal que $|f(x) - P_n(x) = |\sin x - P_n(x)| \leq \epsilon$.

El primer paso es calcular el valor de $n$. Nos fijamos a partir de la expresión de $P_n(x)$ que si $n$ es par el grado del polinomio de MacLaurin tiene grado $n - 1$ ya que la potencia más alta de $x$, $2k + 1$ vale $2k + 1 = n - 1$.

Supondremos que $n$ es par ya que tiene un término menos que si $n$ es impar y esto es una ventaja a la hora de computar $P_n(x)$.

El error cometido $R_n(x)$ usando el teorema anterior vale: (usaremos la fórmula de Lagrange)

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Dicho error se puede acotar por:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq \max_{c \in <0,x>} \left| f^{n+1}(c) \right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Al ser $n$ par, $|f^{n+1}(c)| = |\cos c|$ ya que $n+1$ es impar y recordemos que cualquier derivada impar era $\pm\cos c$. Por tanto, podemos acotar $\max_{c \in <0,x>} \left| f^{n+1}(c) \right|$ por 1: $\max_{c \in <0,x>} \left| f^{n+1}(c) \right| \leq 1$ y la cota del error será:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La $n$ buscada debe verificar: $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \epsilon$.

Como para cualquier valor de $x$ el límite $\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, seguro que existe una $n$ tal que $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \epsilon$.

La función siguiente nos calcula la $n$ dado $x$ y el error en `python` asegurándose que $n$ es par.

```
import math
def n(x,error):
 x=float(x)
 m=2
 while(abs(x)**(m+1)/math.factorial(m+1) >=error):
   m=m+1
 if(m % 2==1):
   m=m+1
 return(m)
```

El valor de $n$ para $x = 0.5$ con un error máximo permitido de 0.0001 será:

```
n(0.5,0.0001)
```

```
## 6
```

El polinomio de Taylor sería en este caso:

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

El valor de $P_6(0.5)$ vale:

```
x=0.5
x-x**3/math.factorial(3)+x**5/math.factorial(5)
```

```
## 0.47942708333333334
```

Sabemos que el valor anterior evalúa $\sin 0.5$ con un error menor que 0.0001. Comprobémoslo en `python`.

```
from sympy import *
valor_pol_taylor = x-x**3/math.factorial(3)+x**5/math.factorial(5)
abs(sin(0.5)-valor_pol_taylor)
```

```
## 1.54472913033166e-6
```

## 5.2. Ejemplo: cálculo de $\mathrm{e}$

Vamos a calcular e con 6 cifras decimales exactas.

Para ello vamos a calcular el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ para $x_0 = 0$, $P_n(x)$ y aproximaremos $f(1) = \mathrm{e}$ por $P_n(1)$ cometiendo un error menor que 0.000001.

Para calcular el polinomio de Taylor de $f(x) = \mathrm{e}^x$, hemos de calcular $f^k(x)$ para cualquier valor $k$ natural. En este caso, observamos que $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ siempre vale lo mismo. Por tanto:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Ya que $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

Seguidamente vamos a calcular el valor que $n$ que nos asegure que el error cometido para $x = 1$ usando la expresión anterior $P_n(1)$ en lugar de $f(1) = \mathrm{e}$ es menor que $e = 0.000001$.

Recordemos la expresión de la fórmula del error:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq \max_{c \in <0,x>} \left| f^{n+1}(c) \right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La expresión anterior para $x = 1$ vale:

$$\begin{aligned} |f(1) - P_n(1)| &= |R_n(1)| = \left| \tfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \right| \leq \max_{c \in (0,1)} \left| f^{n+1}(c) \right| \cdot \tfrac{1}{(n+1)!} = \max_{c \in (0,1)} \mathrm{e}^c \cdot \tfrac{1}{(n+1)!} \\ &= \tfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ es creciente y por tanto $\max\limits_{c \in (0,1)} \mathrm{e}^c = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

Vemos que la cota del error depende del valor de e que es precisamente el valor que queremos calcular.

No sabemos el valor exacto de e pero podemos usar que es menor que 3: $\mathrm{e} < 3$.

La cota anterior será, pues:

$$|f(1) - P_n(1)| = |R_n(1)| = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

La función siguiente nos calcula la $n$ dado el error en `python`:

```
def ne(error):
 m=2
 while(3./math.factorial(m+1) >=error):
   m=m+1
 return(m)
```

El valor de $n$ para un error de 0.000001 vale:

```
ne(0.000001)
```

```
## 9
```

El valor de e con 6 cifras decimales exactas será:

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}$$

Si calculamos su valor en `python`, obtenemos:

```
valor_e_aproximado =1
for i in range(1,10):
  valor_e_aproximado=valor_e_aproximado+1./math.factorial(i)
valor_e_aproximado
```

```
## 2.7182815255731922
```

Comprobamos que efectivamente tiene 6 cifras decimales exactas.

```
math.exp(1)
```

```
## 2.718281828459045
```

## 5.3. Ejemplo: generalización del binomio de Newton

Recordemos la fórmula del binomio de Newton, dados $x, y \in \mathbb{R}$ y un natural $N$, podemos desarrollar la potencia $(x+y)^N$ como:

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot x^k \cdot y^{N-k}$$

Sea ahora la función $f(x) = (x+C)^N$, donde $C$ es una constante cualquiera. Sea $x_0$ un valor real. Queremos hallar el polinomio de Taylor de la función anterior alrededor de $x = x_0$.

Usando la fórmula del binomio de Newton anterior, el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado $N$ alrededor del valor $x = x_0$ es relativamente sencillo de obtener:

$$\begin{aligned} f(x) = (x+C)^N \quad &= ((x-x_0) + (C+x_0)) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot (x-x_0)^k \cdot (C+x_0)^{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot (C+x_0)^{N-k} \cdot (x-x_0)^k \end{aligned}$$

Observad que el desarrollo anterior no tiene error ya que la expresión de la izquierda es un polinomio de grado $N$. Otra manera de verlo es usar la expresión de la fórmula del error:

$$f(x) - P_N(x) = R_N(x-x_0) = \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!} \cdot (x-x_0)^{N+1}$$

Ahora bien, como $f(x)$ es un polinomio de grado $N$, la derivada $N+1$-ésima en cualquier valor será 0 ($f^{N+1}(c)=0$) y, por tanto, $R_N(x-x_0)=0$.

Podemos hallar en particular una expresión para $f^{(k)}(x_0)$.

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} &= \binom{N}{k}\cdot (C+x_0)^{N-k},\\
f^{(k)}(x_0) &= \binom{N}{k}\cdot k!\cdot (C+x_0)^{N-k} = N\cdot (N-1)\cdots (N-k+1)\cdot (C+x_0)^{N-k}.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que "generalizamos" la función $f$ de la forma siguiente $f(x)=(x+C)^{\alpha}$, donde $\alpha$ no tiene por qué ser entero sino cualquier valor real. Sea $x_0$ un valor real que supondremos distinto de $-C$ para no tener problemas en caso en que $\alpha<0$ ya que en este caso $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x+C)^{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0} 0^{\alpha} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{0^{-\alpha}}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

¿Cuál sería el polinomio de Taylor de grado $n$ para dicha función $f(x)$ en $x=x_0$?

Estaríamos tentados de generalizar la fórmula anterior de la forma siguiente:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\cdot (C+x_0)^{\alpha-k}\cdot (x-x_0)^k$$

Pero ¿qué vale $\binom{\alpha}{k}$?. Pensad que sabemos calcular $\binom{N}{k}$ si $N$ es natural pero ahora "nuestra" $N$ es $\alpha$ y es un valor real cualquiera.

Como $\binom{N}{k}$ se puede escribir como $\binom{N}{k}=\frac{N\cdot(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}$, podríamos generalizar $\binom{\alpha}{k}$ como $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ y la expresión anterior ya tendría sentido.

De acuerdo, todo lo escrito hasta ahora está muy bien, pero ¿es cierta la fórmula anterior?

Veamos que sí, que la fórmula anterior es cierta.

Primero calculemos las derivadas sucesivas de $f(x)=(x+C)^{\alpha}$:

$$f'(x)=\alpha\cdot (x+C)^{\alpha-1},\ f''(x)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot (x+C)^{\alpha-2},\ f'''(x)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot (x+C)^{\alpha-3}$$

Y, en general:

$$f^{(k)}(x)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\cdot (x+C)^{\alpha-k}$$

Si evaluamos en $x=x_0$ obtenemos:

$$f^{(k)}(x_0)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\cdot (x_0+C)^{\alpha-k}=\binom{\alpha}{k}\cdot k!\cdot (x_0+C)^{\alpha-k}$$

El polinomio de Taylor de grado $n$ de $f(x)$ en $x=x_0$ será:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot (x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot (x_0+C)^{\alpha-k}\cdot (x-x_0)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\cdot (x_0+C)^{\alpha-k}\cdot (x-x_0)^k
\end{aligned}$$

Esto es lo que queríamos ver.

El error cometido será:

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}=\binom{\alpha}{n+1}\cdot(c+C)^{\alpha-n-1}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Donde $c\in<x_0,x>$.

Como **aplicación de este polinomio del binomio de Newton**, calculemos el polinomio de Taylor de la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ para $x_0=2$.

En este caso $\alpha=-\frac{1}{2}$ y $C=1$.

Los valores de $\binom{-\frac{1}{2}}{k}$ son los siguientes:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{(2k-1)}{2}\right)}{k!}=\frac{(-1)^k\cdot(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}$$

El polinomio de Taylor de grado $n$ para $f(x)$ en $x_0=2$ será:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}\cdot 3^{-\frac{1}{2}-k}\cdot(x-2)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot(2k-1)!!}{2^k\cdot\sqrt{3^{2k+1}}\cdot k!}\cdot(x-2)^k$$

El error cometido será:

$$R_n(x-2)=\binom{-\frac{1}{2}}{n+1}\cdot(1+c)^{-\frac{1}{2}-n-1}\cdot(x-2)^{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)!!}{2^{n+1}\cdot\sqrt{(1+c)^{2n+3}}\cdot(n+1)!}\cdot(x-2)^{n+1}$$

Si suponemos que $x>2$, usando que $c\in(2,x)$, y, por tanto, $\frac{1}{1+c}\leq\frac{1}{3}$, podemos acotar el error cometido por:

$$|R_n(x-2)|\leq\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\cdot\sqrt{3^{2n+3}}\cdot(n+1)!}\cdot(x-2)^{n+1}$$

Consideremos $x=2.25$. Calculemos el valor de $n$ para calcular $f(2.25)$ con un error menor que 0.000001.

```
def doublefactorial(n):
  if n in (0, 1):
    return 1
  else:
    return n * doublefactorial(n-2)
```

```
def calculo_n(error):
  x=2.25
  m=2
  cota_error=(doublefactorial(2*m+1)/(2.**(m+1)*math.sqrt(3.)**(2*m+3)*
    math.factorial(m+1)))*(x-2)**(m+1)
  while(cota_error >= error):
    m=m+1
    cota_error=(doublefactorial(2*m+1)/(2.**(m+1)*math.sqrt(3.)**(2*m+3)*
      math.factorial(m+1)))*(x-2)**(m+1)
  return(m)
```

El valor del grado $n$ del polinomio de Taylor será:

```
calculo_n(0.000001)
```

```
## 4
```

El polinomio de Taylor será:

$$P_4(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot (x-2) + \frac{1}{24\sqrt{3}} \cdot (x-2)^2 - \frac{5}{432\sqrt{3}} \cdot (x-2)^3 + \frac{35}{10368\sqrt{3}} \cdot (x-2)^4$$

Calculemos el valor de $P_4(2.25)$.

```
coeficientes=[1.,-1./6,1./24,-5./432,35./10368]
coeficientes=[(1./math.sqrt(3.))*c for c in coeficientes]
x=2.25
y=x-2
potencias=[1,y,y**2,y**3,y**4]
import numpy
numpy.dot(potencias,coeficientes)
```

```
## 0.5547007267350142
```

Comprobemos que tiene efectivamente 6 cifras decimales exactas.

```
1/math.sqrt(2.25+1.)
```

```
## 0.5547001962252291
```

# 6. Propiedades del desarrollo de Taylor

La proposición siguiente es útil si queremos hallar el polinomio de Taylor de una función que puede escribirse como suma, producto o cociente de funciones donde es más fácil conocer su polinomio de Taylor.

Sean $f$, $g$ funciones reales de variable real $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas en $(a, b)$ y sea $x_0 \in (a, b)$ un punto del interior de su dominio. Sean $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ los polinomios de Taylor de grado $n$ de las funciones $f$ y $g$, respectivamente en un entorno del punto $x_0$.

## Proposición.

- El polinomio de Taylor de toda función escrita como combinación lineal de $f$ y $g$, $\lambda f + \mu g$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ constantes reales es $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$.
- La función producto $f \cdot g$ admite un polinomio de Taylor en el mismo entorno del punto $x_0$. Dicho polinomio de Taylor de la función $f \cdot g$ se calcula realizando el producto de los dos polinomios, $P_n(x) \cdot Q_n(x)$ y eliminando todos los términos de grado mayor o igual que $n+1$ en $(x - x_0)$.
- Si $g(x_0) \neq 0$, el cociente $\frac{f}{g}$ admite un polinomio de Taylor en este entorno. Dicho polinomio de Taylor de la función $\frac{f}{g}$ se calcula de realizar la operación $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, desarrollando esta expresión en potencias de $(x - x_0)$ y eliminando todos los términos de grado mayor o igual que $n+1$.

**Ejemplo**

Como ejemplo de aplicación, calculemos el polinomio de Taylor grado $n$ de la función $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ en un punto $x_0$ cualquiera distinto de $\pm 1$ ya que los valores $\pm 1$ no pertenecen al dominio de $f(x)$. Pensad que $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Podemos descomponer la función $f(x)$ de la forma siguiente:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

Para calcular los polinomios de Taylor de las funciones $f_1(x)=\frac{1}{1-x}$ y $f_2(x)=\frac{1}{1+x}$ en un punto cualquiera $x_0$, a los que llamaremos $P_{1,n}(x)$ y $P_{2,n}(x)$, respectivamente, podemos usar la técnica vista en el ejemplo anterior donde generalizábamos la fórmula de Newton.

Escribimos $f_1(x)$ de la forma siguiente: $f_1(x)=-\frac{1}{x-1}$. Entonces el valor de $\alpha$ vale $\alpha=-1$ y $C=-1$. El polinomio $P_{1,n}(x)$ será el siguiente:

$$P_{1,n}(x)=-\sum_{k=0}^{n}\binom{-1}{k}\cdot(x_0-1)^{-1-k}\cdot(x-x_0)^k$$

Calculemos el valor de $\binom{-1}{k}$:

$$\binom{-1}{k}=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-1-k+1)}{k!}=\frac{(-1)^k\cdot k!}{k!}=(-1)^k$$

El valor del polinomio $P_{1,n}(x)$ será el siguiente:

$$P_{1,n}(x)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x_0-1)^{k+1}}\cdot(x-x_0)^k$$

Usando el mismo razonamiento anterior, podemos obtener el polinomio $P_{2,n}(x)$ donde $\alpha=-1$ y $C=1$.

$$P_{2,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x_0+1)^{k+1}}\cdot(x-x_0)^k$$

Usando que $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$, el polinomio de Taylor de la función $f(x)$ en $x_0$ de grado $n$ será:

$$P_n(x)=\frac{1}{2}\left(P_{1,n}(x)+P_{2,n}(x)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{(x_0+1)^{k+1}}-\frac{1}{(x_0-1)^{k+1}}\right)\cdot(x-x_0)^k$$

En el enlace siguiente se muestra el desarrollo de Taylor de la función $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ hasta orden 5, es decir, hasta el polinomio de grado 5, $P_5(x)$. Si apretáis el botón `More terms` en la sección `Series expansion at x=x0`, `Mathematica` os calculará más términos del desarrollo de Taylor o aumentará el grado del polinomio.

Comparad los valores que da el `Mathematica` con la solución obtenida.

En la sección `Series representation at x = x0` da una expresión muy parecida a la obtenida.