Tema 09 - Cálculo de primitivas

Ramon Ceballos

23/4/2021

1. Introducción al cálculo de primitivas

En el tema anterior, vimos que para calcular la **integral definida** de una función f integrable en un cierto intervalo $[a, b]$, es fundamental saber calcular una **primitiva** F de dicha función ya que dicha integral, usando la **regla de Barrow**, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En este tema, vamos a dar las técnicas para calcular **primitivas** de las funciones más usuales como pueden ser funciones **polinómicas**, **racionales**, **trigonométricas**, funciones definidas como la raíz cuadrada de un polinomio hasta de grado 2, etc

Recordad que dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo $[a, b]$, una **primitiva** es una función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el mismo intervalo tal que $F'(x) = f(x)$.

Ésta es la razón que la **primitiva** de una función también se llame **antiderivada** ya que hallar **primitivas** es la operación **inversa** respecto a la operación de **derivar**. Si **derivar** es equivalente a dar un paso hacia delante, hallar una **primitiva** es dar un paso hacia atrás.

Recordemos que, dada una función f, existen una multitud de **primitivas** de la misma: dada una **primitiva** $F(x)$ de la misma, la función $F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera es también otra primitiva ya que si $F'(x) = f(x)$, también se cumple que $(F(x) + C)' = f(x)$.

A hallar una **primitiva** de una función f también se conoce como hallar una **integral indefinida** de dicha función y lo denotaremos por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Sin escribir los extremos de integración y añadiendo una constante cualquiera C para poder de manifiesto que, como hemos indicado antes, existen una multitud de primitivas.

Supongamos que para una función f particular, nos dan una **primitiva** F. Es decir $F'(x) = f(x)$ o $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Entonces, si en lugar de considerar la función f consideramos la función siguiente $f(g(x)) \cdot g'(x)$, donde $g(x)$ es una función cualquiera, tenemos que una **primitiva** de dicha función es $(F \circ g)(x) = F(g(x))$ ya que usando la regla de la cadena, se obtiene:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tal como queríamos ver.

Es decir, si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$.

En resumen, si somos capaces de hallar una **primitiva** para una cierta función f, somos capaces de hallar una **primitiva** para toda la familia de funciones $f(g(x)) \cdot g'(x)$, donde $g(x)$ es una función cualquiera.

En resumen, cualquier fórmula de cálculo de **primitivas** de una cierta función f, equivale a tener un conjunto de fórmulas de cálculo de **primitivas** de la familia de funciones $f(g(x)) \cdot g'(x)$, para cualquier función g.

Hemos de pensar que para la mayoría de las funciones no se puede hallar una **primitiva** usando las técnicas explicadas en este capítulo.

Es decir, dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **integrable**, una función **primitiva** sería:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

El problema es que, en general, no podemos hallar una expresión de $F(x)$ en términos de funciones conocidas.Se tienen que usar técnicas de **análisis numérico** para hallar la integral definida correspondiente.

Hagamos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo

En el capítulo anterior, vimos que una primitiva de la función monomio $f(x) = x^n$, con $n \geq 1$ natural era $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

La comprobación es muy fácil.

Usando lo que hemos dicho anteriormente, tenemos que una primitiva de la función $g(x)^n \cdot g'(x)$, donde g es una función cualquiera, es $\frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + C$.

$$\int g(x)^n \cdot g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Por ejemplo, si consideramos $g(x) = \sin x$, podemos escribir: $\int \sin^n x \cdot \cos x\,dx = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$.

Si consideramos $g(x) = 4x^2 + 2$, podemos escribir: $\int (4x + 2)^n \cdot 4\,dx = \dfrac{(4x + 2)^{n+1}}{n+1} + C$.

Si consideramos $g(x) = \ln x$, podemos escribir: $\int \dfrac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C$.

Y así sucesivamente, eligiendo la función g que queramos.

2. Integrales inmediatas

Vamos a dar una lista de **integrales indefinidas** que serán la base para el cálculo de las demás.

Les llamaremos **integrales inmediatas** ya que para ver su veracidad, basta derivar la expresión correspondiente y ver que el resultado de la derivada es la función que integramos.

En cada fila, vamos a considerar aparte de la **integral inmediata** correspondiente, la versión de dicha integral usando una función cualquiera $g(x)$ tal como hemos comentado en la introducción.

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int g(x)^n \cdot g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\int a^{g(x)} \cdot g'(x)dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)} \cdot g'(x)dx = e^{g(x)} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(g(x)) \cdot g'(x)dx = -\cos(g(x)) + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(g(x)) \cdot g'(x)dx = \sin(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{g'(x)dx}{\cos^2(g(x))} = \tan(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{g'(x)dx}{\sin^2(g(x))} = -\cot(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	$\int \frac{g'(x)dx}{1+g(x)^2} = \arctan(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \arcsin(g(x)) + C$

3. Integración de funciones racionales

3.1. Introducción

En esta sección vamos a aprender técnicas para calcular **integrales indefinidas** de funciones racionales, es decir, funciones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios a coeficientes reales.

Distinguiremos dos casos.

3.2. PRIMER CASO: Caso en que el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador

Supongamos que el grado del polinomio $P(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$: $\text{grado}(P) \geq \text{grado}(Q)$.

En este caso, hemos de dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$ obteniendo un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$, donde $\text{grado}(R) < \text{grado}(Q)$.

La relación entre los cuatro polinomios anteriores es la siguiente:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Si dividimos la expresión anterior por el polinomio $Q(x)$, obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Y podemos escribir la integral indefinida de la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

La integral indefinida $\displaystyle\int C(x)\,dx$ es sencilla de calcular ya que se trata de la integral indefinida de un polinomio que se puede escribir como la suma de integrales de monomios de la forma $\displaystyle\int x^k\,dx$ multiplicadas por constantes. Las integrales $\displaystyle\int x^k\,dx$ valen $\frac{x^{k+1}}{k+1}+C$ como está indicado en la tabla de integrales inmediatas.

La integral restante $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ se trata de una integral racional con la particularidad de que el grado del denominador es menor que el grado del numerado que sería el segundo caso a considerar.

En resumen, dada una integral racional, siempre podemos suponer que el grado del denominador es menor estricto que el grado del numerador ya que, en caso contrario, realizaríamos la operación indicada y estaríamos en este caso.

3.3. SEGUNDO CASO: Caso en que el grado del numerador es menor que el del denominador

Supongamos que el grado del polinomio $P(x)$ es menor estrictamente que el grado del polinomio $Q(x)$: $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$.

Supondremos además que el polinomio $Q(x)$ del denominador es mónico, es decir, el coeficiente correspondiente al término principal o del monomio de mayor grado vale 1. Si éste no fuera el caso, dividimos todos los términos por dicho coeficiente y "sacamos" fuera de la integral dicho coeficiente.

Más concretamente, supongamos que $Q(x) = Cx^q + \cdots$, donde q es el grado del denominador $Q(x)$. En este caso hacemos lo siguiente:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{C}\int \frac{P(x)}{\frac{Q(x)}{C}}\,dx$$

Y ahora el polinomio $\frac{Q(x)}{C}$ sería mónico. Por tanto, si no lo fuera, realizamos la operación indicada anteriormente y ya estaríamos en el caso en que el denominador es mónico.

Seguidamente, descomponemos el denominador $Q(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q(x) = \quad & (x-a_1)^{n_1}\cdot(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\cdot \\ & ((x-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}\cdot((x-b_2)^2+c_2^2)^{m_2}\cdots((x-b_l)^2+c_l^2)^{m_l}, \end{aligned}$$

Donde $a_1,\ldots,a_k$ serían las raíces reales de multiplicidad $n_1,\ldots,n_k$, respectivamente y los términos $((x-b_1)^2+c_1^2),\ldots,((x-b_l)^2+c_l^2)$ representan los términos de las raíces no reales de multiplicidad $m_1\ldots,m_l$, respectivamente.

Ejercicio: Descomposición de la fracción racional

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales, es decir:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

Con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Demostrar que si $z = z_1 + \mathrm{i}z_2$, z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$, es una raíz compleja del polinomio $P(x)$, es decir $P(z) = 0$, también lo es su conjugada $\overline{z} = z_1 - \mathrm{i}z_2$, $P(\overline{z}) = 0$, y en este caso, el polinomio $P(x)$ es divisible por el polinomio de segundo grado $(x^2 - 2z_1x + z_1^2 + z_2^2)$.

Los números complejos están introducidos en el curso de Álgebra lineal:

https://www.udemy.com/course/algebralineal/?couponCode=51CABC7FFF4982E6CBB7

En primer lugar, supongamos que estamos en el caso en que las multiplicidades de los términos correspondientes a las raíces no reales son simples, es decir, suponemos que $m_1 = \cdots = m_l = 1$.

A continuación, descomponemos la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \; & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \cdots \\ & + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}} \\ & + \frac{B_1x+C_1}{((x-b_1)^2+c_1^2)} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{((x-b_l)^2+c_l^2)}\end{aligned}$$

Hallando los coeficientes A_{ij}, B_i y C_i correspondientes.

Para hallar dichos coeficientes hemos de sumar la parte de la derecha de la igualdad anterior reduciendo a común denominador y nos quedará una igualdad del tipo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{H(x)}{Q(x)}$$

Donde los coeficientes del polinomio $H(x)$ dependen de los coeficientes A_{ij}, B_i y C_i. A continuación, para $k = 1, \ldots,$ grado P, igualamos los coeficientes de x^k del polinomio $P(x)$ y del polinomio $H(x)$.

Al final nos saldrá un sistema de ecuaciones lineal en los coeficientes A_{ij}, B_i y C_i que tendremos que resolver.

Una vez hallados los coeficientes A_{ij}, B_i y C_i, descomponemos la integral racional $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \; & A_{11} \int \frac{1}{x-a_1}\, dx + \cdots + A_{1n_1} \int \frac{1}{(x-a_1)^{n_1}}\, dx + \\ & + \cdots + A_{k1} \int \frac{1}{x-a_k}\, dx + \cdots + A_{kn_k} \int \frac{1}{(x-a_k)^{n_k}}\, dx + \\ & + \int \frac{B_1x+C_1}{((x-b_1)^2+c_1^2)}\, dx + \cdots + \int \frac{B_lx+C_l}{((x-b_l)^2+c_l^2)}\, dx\end{aligned}$$

Cálculo de las integrales indefinidas de la descomposición

Hemos reducido el problema a hallar integrales indefinidas del tipo:

$$\int \frac{1}{(x-a)^i}\, dx, \quad \int \frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2}\, dx$$

Para $i = 1, 2, \ldots$

El valor de las integrales indefinidas del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^i}\, dx$ es el siguiente:

- si $i = 1$: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)}\, dx = \ln|x-a| + C$, ver la segunda fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = x - a$.

- si $i \geq 2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)^i}\,dx &= \int (x-a)^{-i}\,dx = \frac{(x-a)^{-i+1}}{-i+1} + C\\ &= \frac{1}{(1-i)\cdot(x-a)^{i-1}} + C\end{aligned}$$

Ver la primera fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = x - a$.

El cálculo de las integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2}\,dx$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2D}{B}}{(x-b)^2+c^2}\,dx\\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2(x-b)+2b+\frac{2D}{B}}{(x-b)^2+c^2}\,dx\\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2(x-b)}{(x-b)^2+c^2}\,dx + \frac{B}{2}\int \frac{2b+\frac{2D}{B}}{(x-b)^2+c^2}\,dx\end{aligned}$$

La primera de la integrales anteriores $\displaystyle\frac{B}{2}\int \frac{2(x-b)}{(x-b)^2+c^2}\,dx$ es inmediata, ver segunda fila de la tabla de integrales inmediatas, con $g(x) = (x-b)^2 + c^2$.

$$\frac{B}{2}\int \frac{2(x-b)}{(x-b)^2+c^2}\,dx = \frac{B}{2}\ln|(x-b)^2+c^2| + C$$

El cálculo de la segunda integral es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{B}{2}\int \frac{2b+\frac{2D}{B}}{(x-b)^2+c^2}\,dx &= B\left(b+\frac{D}{B}\right)\int \frac{1}{(x-b)^2+c^2}\,dx\\ &= \frac{Bb+D}{c^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-b}{c}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{Bb+D}{c}\int \frac{\frac{1}{c}}{\left(\frac{x-b}{c}\right)^2+1}\,dx\end{aligned}$$

La integral $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{c}}{\left(\frac{x-b}{c}\right)^2+1}\,dx$ es inmediata, ver novena fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \frac{x-b}{c}$.

$$\int \frac{\frac{1}{c}}{\left(\frac{x-b}{c}\right)^2+1}\,dx = \arctan\left(\frac{x-b}{c}\right) + C$$

En resumen:

$$\int \frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2}\,dx = \frac{B}{2}\ln|(x-b)^2+c^2| + \frac{(Bb+D)}{c}\arctan\left(\frac{x-b}{c}\right) + C$$

3.4. Método de Ostrogradski

Falta estudiar el caso en que algún $m_i > 1$ de las raíces complejas, donde i puede ser $i = 1, \ldots, l$.

En este caso, aplicaremos el llamado **Método de Ostrogradski**.

Recordemos que tenemos que hallar la integral indefinida $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ donde suponemos que grado $P <$ grado Q.

Dicho método consiste en descomponer la integral indefinida a calcular de la siguiente manera:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{T(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

Donde $Q_1(x) = \text{mcd}(Q(x), Q'(x))$, es decir, el máximo común divisor entre los polinomios $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ y $Q_2 = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ es el cociente que resulta de dividir el polinomio $Q(x)$ por el polinomio $Q_1(x)$.

Los polinomios $R(x)$ y $T(x)$ son polinomios de grados grado $Q_1 - 1$ y grado $Q_2 - 1$, respectivamente cuyos coeficientes se tienen que hallar derivando la descomposición anterior:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R'(x) \cdot Q_1(x) - R(x) \cdot Q_1'(x)}{Q_1(x)^2} + \frac{T(x)}{Q_2(x)}$$

Si volvemos a aplicar el método propuesto al cálculo de la integral racional $\int \frac{T(x)}{Q_2(x)}\,dx$, los posibles exponentes m_i serán como máximo todos 1 que es el caso que se ha analizado.

4. Integrales trigonométricas

4.1. Introducción

En esta sección vamos a aprender a calcular integrales indefinidas que involucren funciones trigonométricas básicas como $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$.

- $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, donde m y n son números naturales. Producto de senos y cosenos.
- $\int \tan^n x\,dx$, $\int \cot^n x$ donde n es un número natural. Cocientes de senos y cosenos.
- $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$, donde m y n son números naturales.
- $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ donde $R(\sin x, \cos x)$ quiere decir una función racional en las variables $\sin x$ y $\cos x$ como por ejemplo:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x + \cos x + 1}{\cos^2 x - \cos x - 1}$$

Recordemos las identidades trigonométricas que usaremos en el cálculo de las integrales anteriores:

- Seno de la suma/diferencia:

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot cosB \pm \cos A \cdot \sin B$$

- El seno del ángulo doble:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

- Coseno de la suma/diferencia:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

- El coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

- De las identidades anteriores tenemos que:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

- Relación entre el coseno y la tangente:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

O, si se quiere:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \text{ o},\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

- Fórmulas que transforman productos en sumas:

$$\begin{array}{rl} \sin x \cos y & = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos x \cos y & = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin x \sin y & = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \end{array}$$

Las expresiones anteriores se pueden generalizar:

$$\begin{array}{rl} \sin(mx)\cos(ny) & = \frac{1}{2}(\sin(mx+ny) + \sin(mx-ny)) \\ \cos(mx)\cos(ny) & = \frac{1}{2}(\cos(mx+ny) + \cos(mx-ny)) \\ \sin(mx)\sin(ny) & = \frac{1}{2}(\cos(mx-ny) - \cos(mx+ny)) \end{array}$$

Donde m y n son números naturales.

4.2. Primer tipo: Integrales indefinidas de $\sin^m x \cos^n x$

En esta sección vamos a explicar cómo calcular el siguiente tipo de integrales inmediatas $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, con n y m números naturales.

Vamos a distinguir los casos siguientes:

- **1: Uno de los números n o m es 0.** En este caso, distinguimos los subcasos siguientes:

1.1: m **impar**. En este caso, existe un natural m_1 tal que $m = 2m_1 + 1$. La integral indefinida a calcular sería:

$$\int \sin^{2m_1+1} x \, dx = \int (\sin^2 x)^{m_1} \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^{m_1} \sin x \, dx$$

A continuación, si desarrollamos la expresión $(1 - \cos^2 x)^{m_1}$ nos quedará una suma de integrales de la forma $\int \cos^j x \sin x \, dx$, con j natural. Dichas integrales son inmediatas y corresponden a la primera fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \cos x$:

$$\int \cos^j x \sin x \, dx = -\int \cos^j x(-\sin x) \, dx = -\frac{\cos^{j+1} x}{(j+1)} + C$$

1.2: n **impar**. En este caso, existe un natural n_1 tal que $n = 2n_1 + 1$. Este caso es parecido al anterior:

$$\int \cos^{2n_1+1} x \, dx = \int (\cos^2 x)^{n_1} \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^{n_1} \cos x \, dx$$

A continuación, si desarrollamos la expresión $(1 - \sin^2 x)^{n_1}$ nos quedará una suma de integrales de la forma $\int \sin^j x \cos x \, dx$, con j natural. Dichas integrales son inmediatas y corresponden a la primera fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \sin x$:

$$\int \sin^j x \cos x \, dx = \frac{\sin^{j+1} x}{(j+1)} + C$$

1.3 n **par**. En este caso, existe un natural n_1 tal que $n = 2n_1$. El cálculo de la integral es el siguiente:

$$\begin{aligned} \int \cos^{2n_1} x \, dx &= \int (\cos^2 x)^{n_1} \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^{n_1} \, dx \\ &= \frac{1}{2^{n_1+1}} \int (1 + \cos t)^{n_1} \, dt \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos hecho el cambio de variable $t = 2x$.

Seguidamente si desarrollamos $(1 + \cos t)^{n_1}$ nos van saliento integrales del tipo $\int \cos^j x \, dx$ donde si j es impar, ya las hemos estudiado en el apartado 1.2 y si j es par, hemos reducido el exponente a la mitad. En el peor de los casos nos saldría la integral $\int \cos^2 x \, dx$ que se resolvería de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \end{aligned}$$

1.4 m **par**. En este caso, existe un natural m_1 tal que $m = 2m_1$. El cálculo de la integral es el siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin^{2m_1} x\,dx &= \int (\sin^2 x)^{m_1}\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^{m_1} dx\\ &= \frac{1}{2^{m_1+1}} \int (1-\cos t)^{m_1}\,dt\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos hecho el cambio de variable $t = 2x$. Seguidamente si desarrollamos $(1+\cos t)^{m_1}$ nos van saliento integrales del tipo $\int \cos^j x\,dx$ que ya están estudiadas en los apartados 1.2 y 1.3.

- **2: Uno de los números** n **o** m **es par y el otro,** *impar*.

2.1: m **es impar y** n **es par**. En este caso, existen dos naturales más, m_1 y n_1 tal que $m = 2m_1 + 1$ y $n = 2n_1$. Para resolver la integral inmediata, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin^{2m_1+1} x \cos^{2n_1} x\,dx &= \int (\sin^2 x)^{m_1} \cos^{2n_1} x \sin x\,dx\\ &= \int (1-\cos^2 x)^{m_1} \cos^{2n_1} x \sin x\,dx\end{aligned}$$

Seguidamente si desarrollamos $(1-\cos^2 x)^{m_1}$ nos van saliento integrales del tipo $\int \cos^j x \sin x\,dx$, que son inmediatas, ver apartado 1.1.

2.2: m **par y** n **impar**. En este caso, existen dos naturales más, m_1 y n_1 tal que $m = 2m_1$ y $n = 2n_1 + 1$. Para resolver la integral inmediata, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin^{2m_1} x \cos^{2n_1+1} x\,dx &= \int \sin^{2m_1} x (\cos^2 x)^{n_1} x \cos x\,dx\\ &= \int \sin^{2m_1} x (1-\sin^2 x)^{n_1} \cos x\,dx\end{aligned}$$

Seguidamente si desarrollamos $(1-\sin^2 x)^{n_1}$ nos van saliento integrales del tipo $\int \sin^j x \cos x\,dx$ que son inmediatas, ver apartado 1.2.

- **3: Las dos potencias** m **y** n **son pares. En este caso, existen dos naturales más,** m_1 **y** n_1 **tal que** $m = 2m_1$ **y** $n = 2n_1$**.** Para resolver la integral inmediata, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin^{2m_1} x \cos^{2n_1} x\,dx &= \int (\sin^2 x)^{m_1} \cos^{2n_1} x\,dx\\ &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^{n_1} dx\\ &= \frac{1}{2^{m_1+n_1+1}} \int (1-\cos t)^{m_1} \cdot (1+\cos t)^{n_1}\,dt\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos hecho el cambio de variable $t = 2x$.

Si desarrollamos las expresiones $(1-\cos t)^{m_1} \cdot (1+\cos t)^{n_1}$ nos quedarán sumas de integrales del tipo $\int \cos^j t\,dt$ que ya han sido estudiadas en los apartados 1.2 y 1.3. * **4: Las dos potencias** m **y** n **son impares. En este caso, existen dos naturales más,** m_1 **y** n_1 **tal que** $m = 2m_1 + 1$ **y** $n = 2n_1 + 1$**.** Para resolver la integral inmediata, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin^{2m_1+1} x \cos^{2n_1+1} x\, dx &= \int \sin^{2m_1+1} x (\cos^2 x)^{n_1} \cos x\, dx \\ &= \int \sin^{2m_1+1} x (1-\sin^2 x)^{n_1} \cos x\, dx\end{aligned}$$

A continuación, si desarrollamos la expresión $(1-\sin^2 x)^{n_1}$ nos quedará una suma de integrales de la forma $\int \sin^j x \cos x\, dx$, con j natural. Dichas integrales son inmediatas, ver apartado 1.2.

4.3. Segundo tipo. Integrales indefinidas de $\tan^n x$ y $\cot^n x$

Vamos a ver cómo se calculan las integrales indefinidas del tipo $\int \tan^n x\, dx$ y $\int \cot^n x\, dx$.

En primer lugar, calculemos las integrales anteriores para $n=1$ y $n=2$.

La integral $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$ es inmediata y corresponde a la segunda fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \cos x$:

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

La integral $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$ es inmediata y corresponde a la segunda fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \sin x$:

$$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

Usando que la derivada de la función $\tan x$ vale $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$, la integral indefinida $\int \tan^2 x\, dx$ es sencilla de calcular:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\, dx &= \int (1+\tan^2 x - 1)\, dx = \int (1+\tan^2 x)\, dx - \int 1\, dx \\ &= \tan x - x + C\end{aligned}$$

De la misma manera, la integral de $\int \cot^2 x\, dx$ se puede calcular usando que $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$:

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x\, dx &= -\int -(1+\cot^2 x - 1)\, dx \\ &= -\int -(1+\cot^2 x)\, dx - \int 1\, dx = -\cot x - x + C\end{aligned}$$

Sea un $n \geq 3$ natural. La integral indefinida $\int \tan^n x\, dx$ se calcularía de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\int \tan^n x\, dx &= \int \tan^{n-2} x (1+\tan^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (1+\tan^2 x)\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

La integral $\int \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x)\, dx$ es inmediata y corresponde a la primera fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \tan x$:

$$\int \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x)\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C$$

En resumen, hemos reducido el cálculo de la integral $\int \tan^n x\, dx$ al cálculo de la integral $\int \tan^{n-2} x\, dx$.

Aplicando la técnica anterior unas $\frac{n}{2}$ veces, llegaríamos a la integral $\int \tan x\, dx$ o $\int \tan^2 x\, dx$ dependiendo de la paridad de n. El valor de dichas integrales ya ha sido calculado.

Para calcular $\int \cot^n x\, dx$, usamos una técnica parecida:

$$\begin{aligned}\int \cot^n x\, dx &= -\int \cot^{n-2} x(-1-\cot^2 x + 1)\, dx \\ &= -\int \cot^{n-2} x(-1-\cot^2 x)\, dx - \int \cot^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

La integral $\int \cot^{n-2} x(-1-\cot^2 x)\, dx$ es inmediata y corresponde a la primera fila de la tabla de integrales inmediatas con $g(x) = \cot x$:

$$\int \cot^{n-2} x(-1-\cot^2 x)\, dx = \frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + C$$

En resumen, hemos reducido el cálculo de la integral $\int \cot^n x\, dx$ al cálculo de la integral $\int \cot^{n-2} x\, dx$.

Aplicando la técnica anterior unas $\frac{n}{2}$ veces, llegaríamos a la integral $\int \cot x\, dx$ o $\int \cot^2 x\, dx$ dependiendo de la paridad de n. El valor de dichas integrales ya ha sido calculado.

4.4. Integrales indefinidas de $\sin(mx)\cos(nx)$

Para resolver dichas integrales consideraremos 3 casos:

- $\int \sin(mx)\sin(nx)\, dx$. Usando la fórmula que transforma el producto de funciones trigonométricas en sumas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin(mx)\sin(nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x))\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n}\right) + C\end{aligned}$$

Si $m \neq n$.

Si $m = n$:

$$\int \sin^2(nx)\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2nx))\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right) + C$$

- $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$. Usando la fórmula que transforma el producto de funciones trigonométricas en sumas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int (\sin((m-n)x)+\sin((m+n)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos((m-n)x)}{m-n}-\frac{\cos((m+n)x)}{m+n}\right)+C\end{aligned}$$

Si $m \neq n$.

Si $m = n$:

$$\int \sin(nx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2nx)\,dx = -\frac{1}{4n}\cos(2nx)+C$$

- $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$. Usando la fórmula que transforma el producto de funciones trigonométricas en sumas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((m-n)x)}{m-n}+\frac{\sin((m+n)x)}{m+n}\right)+C\end{aligned}$$

Si $m \neq n$.

Si $m = n$:

$$\int \cos^2(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2nx))\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin(2nx)}{2n}\right)+C$$

4.5. Integrales indefinidas de $R(\sin x, \cos x)$

En esta sección, vamos a dar un método para resolver integrales trigonométricas racionales del tipo $R(\sin x, \cos x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ donde P y Q son dos polinomios en las variable $\sin x$ y $\cos x$.

Para resolver este tipo de integrales, hemos de realizar el cambio de variable general $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Veamos cómo se transforman $\sin x$ y $\cos x$ como funciones de t.

En primer lugar, usando que $1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, deducimos que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1+t^2}$.

A continuación, usando que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$, deducimos que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

De la misma manera, $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$.

La relación entre los diferenciales será la siguiente:

$$dt = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \frac{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx \;\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Después de realizar el cambio, la integral indefinida nos quedará, en función de la nueva variable t:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

Se trata de la integral indefinida de una función racional en t que ya hemos estudiado.

El cambio que hemos propuesto nos sirve para resolver cualquier integral racional en $\sin x$ y $\cos x$.

El problema es que la integral racional que nos sale, en muchas ocasiones, tiene el término $(1+t^2)^k$ con $k \geq 2$ en el denominador. Esto obliga a que tengamos que aplicar el método de Ostrogradski haciendo que el cálculo de la integral sea muy tedioso.

En algunas ocasiones, si la función R verifica una cierta condición, podemos realizar otro cambio para transformar nuestra integral $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ en una integral racional más simple. Veamos a continuación en qué casos podemos hacer estos cambios más sencillos indicando dichos cambios.

- Supongamos que la función R es par en las variables $\sin x$ y $\cos x$: $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$. Entonces, sólo nos pueden salir potencias pares en $\sin x$ y $\cos x$.

En este caso hacemos el cambio $t = \tan x$, con $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

- Supongamos que la función R es impar en la variable $\sin x$: $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$. Entonces, sólo nos pueden salir potencias impares en $\sin x$.

En este caso hacemos el cambio $t = \cos x$, con $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

- Supongamos que la función R es impar en la variable $\cos x$: $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$. Entonces, sólo nos pueden salir potencias impares en $\cos x$.

En este caso hacemos el cambio $t = \sin x$, con $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

5. Integrales que contienen radicales $\sqrt{ax^2+bx+c}$

5.1. Introducción

En esta sección vamos a estudiar la integral indefinida de un conjunto de funciones que contienen la raíz cuadrada de un polinomio de segundo grado $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Concretamente, las integrales indefinidas que nos planteamos tienen la forma siguiente: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$, donde $P(x)$ es un polinomio en la variable x.

Vamos a realizar el estudio del cálculo de la integral indefinida correspondiente dependiendo del signo del término principal a y de si el polinomio ax^2+bx+c tiene o no raíces reales.

5.2. Caso $a > 0$ y tiene raíces reales $(b^2 - 4ac > 0)$

En este caso, la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ tiene dos raíces reales.

En primer lugar, "arreglamos" el término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}\sqrt{x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}} = \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{c}{a}-\tfrac{b^2}{4a^2}}\\ &= \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} = \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a}}\sqrt{y^2-1},\end{aligned}$$

Con $y = \frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$.

A continuación, nos planteamos el cambio de variable siguiente: $y = \sec t = \frac{1}{\cos t}$, o si se quiere:

$$\frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

La relación entre los diferenciales es la siguiente:

$$\frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\,dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \ \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$

El término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se nos transforma en función de la variable t en:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a}}\sqrt{\tfrac{1}{\cos^2 t}-1} = \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a}}\tfrac{\sin t}{\cos t}\\ &= \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a}}\tan t\end{aligned}$$

De esta manera, hemos transformado la integral indefinida que contiene el término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ en una integral racional en $\sin t$, $\cos t$, $\displaystyle\int R(\sin t,\cos t)\,dx$, que ya han sido estudiadas:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{P\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a\cos t}-\frac{b}{2a}\right)}{\cos t}\,dt$$

5.3. Caso $a > 0$ y $b^2-4ac < 0$

En este caso, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales.

El "arreglo" del término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ será, en este caso:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}\sqrt{x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}} = \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{c}{a}-\tfrac{b^2}{4a^2}}\\ &= \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}} = \sqrt{\tfrac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{y^2+1}\end{aligned}$$

Con $y = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$.

A continuación, nos planteamos el cambio de variable siguiente: $y = \tan t$, o si se quiere:

$$\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \tan t$$

La relación entre los diferenciales es la siguiente:

$$\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\,dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt, \ \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

El término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se nos transforma en función de la variable t en:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{\tan^2 t+1} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\frac{1}{\cos t}$$

De esta manera, hemos transformado la integral indefinida que contiene el término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ en una integral racional en $\sin t$, $\cos t$, $\int R(\sin t, \cos t)\, dx$, que ya han sido estudiadas:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{P\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}\tan t}{2a} - \frac{b}{2a}\right)}{\cos t}\, dt$$

5.4. Caso $a < 0$ y $b^2 - 4ac > 0$

En este caso, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos raíces reales.

El "arreglo" del término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ será, en este caso:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{-a}\sqrt{-x^2-\tfrac{b}{a}x-\tfrac{c}{a}} = \sqrt{-a}\sqrt{-\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{c}{a}+\tfrac{b^2}{4a^2}} \\ &= \sqrt{-a}\sqrt{-\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} = \sqrt{\tfrac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{1-y^2}\end{aligned}$$

Con $y = \frac{2|a|}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{-2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$.

A continuación, nos planteamos el cambio de variable siguiente: $y = \sin t$, o si se quiere:

$$\frac{-2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \sin t$$

La relación entre los diferenciales es la siguiente:

$$\frac{-2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\, dx = \cos t\, dt, \ \Rightarrow dx = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot \cos t\, dt$$

El término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se nos transforma en función de la variable t en:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cos t$$

De esta manera, hemos transformado la integral indefinida que contiene el término $\sqrt{ax^2+bx+c}$ en una integral racional en $\sin t$, $\cos t$, $\int R(\sin t, \cos t)\, dx$, que ya han sido estudiadas:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \int P\left(-\frac{\sqrt{b^2-4ac}\sin t}{2a} - \frac{b}{2a}\right)\, dt$$

5.5. Caso $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$

En este caso, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales.

Este caso no tendría sentido considerarlo ya que para todo valor $x \in \mathbb{R}$ real, $ax^2+bx+c < 0$. Por tanto, el dominio de la función $\sqrt{ax^2+bx+c}$ sería el conjunto vacío, $\emptyset$.

5.6. Otras integrales indefinidas que contienen $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Veamos otras integrales indefinidas donde se pueden aplicar las técnicas de integración vistas en esta sección.

Para calcular la integral indefinida del tipo $\displaystyle\int \frac{dx}{(ex+f)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, donde a, b, c, e y f son constantes, podemos considerar el cambio siguiente: $t = \frac{1}{ex+f}$.

La relación entre los diferenciales es el siguiente: $dt = -\frac{e}{(ex+f)^2}\,dx = -et^2\,dx$. Por tanto, $dx = -\frac{1}{et^2}\,dt$. Entonces la integral en la nueva variable t sería:

$$\int \frac{dx}{(ex+f)\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(af^2-bef+ce^2)t^2+(be-2af)t+a}}$$

La última integral sería del tipo que hemos estudiado antes.

Para calcular una integral indefinida del tipo $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, podemos realizar los cambios indicados en esta sección y quedarán transformadas en integrales trigonométricas del tipo $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ que ya han sido estudiadas.

6. Integración de otras funciones racionales

6.1. Introducción

En esta sección nos planteamos el cálculo de integrales indefinidas del tipo:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_k}\right) dx$$

Donde R es una función racional en las variables x, $\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_k}$, y los valores r_i son valores racionales de la forma $r_i = \frac{p_i}{q_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

6.2. Cambio de variable

Para el cálculo de integrales de este tipo, consideramos el cambio de variable siguiente: $t^n = \frac{ax+b}{cx+e}$, donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los valores r_i: $n = \mathrm{mcm}(q_1, \ldots, q_k)$.

La relación entre los diferenciales es la siguiente:

$$nt^{n-1}\,dt = \frac{ae-bc}{(cx+e)^2}\,dx \;\Rightarrow dx = \frac{(ae-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt$$

Sean los números naturales $\alpha_i = \frac{np_i}{q_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Dichos números son naturales ya que como n és múltiplo de p_i, $\frac{n}{q_i} \in \mathbb{N}$.

El valor de la integral a calcular en la nueva variable t sería:

$$\int R\left(\frac{et^n-b}{a-ct^n}, t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \ldots, t^{\alpha_k}\right) \frac{(ae-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt$$

Se trataría de una integral racional en la variable t y, por tanto, ya las sabemos resolver ya que han sido estudiadas anteriormente.