1. Determinar los puntos de continuidad de las funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $x > 0$

   (c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+|\sin x|}}{x}$, $x \neq 0$

   (d) $k(x) = \cos\sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

   Solución:

   (a) Se trata del cociente de dos polinomios, dado que son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, y que el denominador no se anula en ningún punto, la función es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.

   (b) La función $t(x) = \sqrt{x}$, es continua para todo $x > 0$, dado que $g(x) = t(x + t(x))$, es decir, g es la imagen de la composición de dos funciones contiuas, será una función continua, para todo $x > 0$.

   (c) La función $h(x)$ es continua por ser la composición, suma y cociente de funciones continuas para todo $x \neq 0$. Ahora

   $$\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$$

   Resulta que $h(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

   (d) $k(x)$ es una composición y suma de funciones continuas, por lo tanto es continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. ¿Para qué valores de a y de b la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3, \text{ si } x < 1, \\ bx + a, \text{ si } 1 \leq x < 2, \\ 3ax, \text{ si } x > 2. \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathbb{R}$?

Solución: Dado que las tres funciones involucradas son continuas en todo $\mathbb{R}$, sólo tenemos que mirar lo que pasa en los puntos de unión, es decir, en $x = 1$ y en $x = 2$. Tenemos que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = b + a$$

Por lo tanto, para que f sea continua en $x = 1$ debe ser $a + 3 = b + a$, es decir, $b = 3$.

Por otra parte,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2b + a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 6a$$

Por lo tanto, debe ser $2b + a = 6a$ y dado que $b = 3$, será $6 + a = 6a$, es decir que $a = \dfrac{6}{5}$

En definitiva, los valores pedidos son $a = \dfrac{6}{5}$ y $b = 3$.

3. Sean f y g dos funciones continuas en $\mathbb{R}$.

   (a) Demuestra que $\sup\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

   (b) Demuestra que la función $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$

   Solución:

   (a) Sea $x \in \mathbb{R}$, o es $f(x) \leq g(x)$ o $f(x) \geq g(x)$. Supongamos que es $f(x) \leq g(x)$, entonces, por una parte, tenemos que $\sup\{f(x), g(x)\} = g(x)$ y de la otra tenemos que $|f(x)-g(x)| = g(x)-f(x)$, por lo que $\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+(g(x)-f(x)) = g(x)$. Es decir que, en este caso,

   $$\sup\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

   Dado que la expresión és simétrica respecto de f y de g, llegaríamos a la misma conclusión en el caso que $f(x) \geq g(x)$.

   (b) Dado que la suma y la diferencia de funciones continuas en un puntos son funciones continuas, y que el valor absoluto de una función continua también es una función continua, la igualdad demostrada en el apartado anterior nos permite concluir que el supremo puntual de dos funciones continuas es una función continua.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que para todo $q \in \mathbb{Q}$, es

$$f(q) = aq^3 - bq^2 + c.$$

Determina el valor que toma f sobre los puntos irracionales, es decir, calcula $f(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solución: Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sabemos que x es el límite de una sucesión de números racionales: $x = \lim_{n\to\infty} q_n$, con $q_n \in \mathbb{Q}$.

Por otra parte, dado que f es una función continua, la imagen del límite de una sucesión es el límite de las imágenes, por lo tanto:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} (aq_n^3 - bq_n^2 + c) = ax^3 - bx^2 + c.$$

Dado que esta igualdad es válida para cualquier sucesión de racionales con límite x, tnemos que $f(x) = ax^3 - bx^2 + c$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$. Demuestra que entre a y b existe una solución de la ecuación
$$\frac{x^2+1}{x-a} + \frac{x^6+1}{x-b} = 0$$

Solución: Supongamos que $a < b$. Consideremos la función

$$f(x) = (x^2+1)(x-b) + (x^6+1)(x-a)$$

Tenemos que

$$f(a) = (x^2-1)(a-b) < 0 \quad \text{y} \quad f(b) = (x^6+1)(b-a) > 0$$

por lo tanto, dado que f es continua, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Es decir,

$$f(c) = 0 = (c^2+1)(c-b) + (c^6+1)(c-a)$$

es decir,
$$\frac{c^2+1}{c-a} + \frac{c^6+1}{c-b} = 0$$
que era lo que se quería demostrar.

6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestra que existen $a, b \in [0,1]$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = 1 - b$.

   Solución: Debemos demostrar que $f(x)$ y x tienen un punto en común, a. Lo mismo para $f(x)$ y $1 - x$.

   Consideremos pues, en primer lugar, la función $f_1(x) = f(x) - x$. Es $f_1(0) = f(0) \geq 0$ y $f_1(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Si $f(0) = 0$ entonces, ya hemos acabado. Si $f(1) = 1$, ya hemos acabado. En cualquier otro caso tenemos que $f_1(0) > 0$ y $f_1(1) < 0$, por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe $a \in [0,1]$ tal que $f_1(a) = 0$, es decir que $f(a) = a$.

   Para demostrar la otra parte, es suficiente considerar la función $f_2(x) = f(x) - (1 - x)$ y aplicar razonamientos similares para obtener un punto b tal que $f(b) = 1 - b$.

7. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$ es $|x - y| \leq |f(x) - f(y)|$. Demuestra que $f(x) = x$ o que $f(x) = 1 - x$.

   Solución: En primer lugar, tenemos que $1 = |1 - 0| \leq |f(1) - f(0)|$, es decir que

   $$1 = f(1) - f(0) \quad \text{o} \quad 1 = f(0) - f(1).$$

   En el primer caso, dado que $f(0), f(1) \in [0,1]$, la única posibilidad es que sea $f(1) = 1$ y $f(0) = 0$. Por lo tanto $x = |x - 0| \leq |f(x) - f(0)| = f(x)$ y, además $1 - x = |1 - x| \leq |f(1) - f(x)| = 1 - f(x)$, es decir que $f(x) \leq x$. En definitiva es $f(x) = x$.

   Por otra parte, si es $1 = f(0) - f(1)$, entonces ha de ser $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, por lo tanto $1 - x = |1 - x| \leq |f(1) - f(x)| = f(x)$. Además $x = |0 - x| \leq |f(0) - f(x)| = 1 - f(x)$, es decir que $f(x) \leq 1 - x$. En definitiva, es $f(x) = 1 - x$, que era lo que queríamos demostrar.

8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestra que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$

   Solución: Por ser f continua en un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo, en particular, existe x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Sea $\alpha = f(x_0)$. Veamos que que α no puede ser 0. En efecto, si $\alpha = f(x_0) = 0$, entonces, por el teorema de la conservación del signo, exisitirian puntos en un entorno de x_0 en los que f seria positiva y puntos en los que f seria negativa, lo cual es absurdo, puesto que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, por lo tanto, $\alpha > 0$ y $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$, que era lo que teníamos que demostrar.

9. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Demuestra que f tiene al menos un punto fijo, es decir que existe $x_0 \in [a,b]$, tal que $f(x_0) = x_0$.

   Solución: Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, hemos acabado. Supongamos pues que $f(a) > a$ y que $f(b) < b$, por lo tanto, la función $g(x) = f(x) - x$ es continua, por ser diferencia de dos continuas y, además $g(a) = f(a) - a > 0$ y $g(b) = f(b) - b < 0$.

   El teorema de Bolzano no asegura, pues, que existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $g(x_0) = 0$, es decir que $f(x_0) - x_0 = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

10. Un ciclista parte de un punto a las 8 de la mañana de un dia y sube a una ermita para la que sólo se accede por una camino. El ciclista pasa la noche en la ermita y, a la mañana siguiente, también a las 8, regresa al punto de partida por el mismo camino. Demuestra que existe al menos un punto del camino en el que estará a la misma hora los dos dias.

    Solución: Si d es la distancia entre el punto de partida y la ermita y si d' es la distancia recorrida en un instante dado en la ida, para la vuelta, ese mismo punto serà $d - d'$.

    Supongamos ahora, para fijar ideas, que el ciclista emplea dos horas para subir. Sea $f : [8, 10] \to \mathbb{R}$ la función que indica la distancia recorrida del camino en cada instante t de la subida. Y sea $g : [8, 10] \to \mathbb{R}$ la función que indica la distancia recorrida en cada instante t de la bajada. Tenemos que

    $$f(8) = g(8) = 0 \quad \text{y que} \quad f(10) = g(10) = d$$

    Conideremos la función $h(t) = f(t) - (d - g(t))$. Se trata de una función continua, puesto que es suma y diferencia de funciones continuas. Además

    $$h(8) = f(8) - (d - g(8)) = 0 - d = -d < 0 \text{ y}$$

    $$h(10) = f(10) - (d - g(10)) = d > 0$$

    Por el teorema de Bolzano, existe un $t_0 \in (8, 10)$ tal que $h(t_0) = 0$, es decir $f(t_0) = d - g(t_0)$ y t_0 es el instante pedido.