

Tema 7: Estudio local de una función. Aplicación de derivadas

Ramon Ceballos

17/4/2021

1. Estudio local de una función. Introducción

Dada una función real de variable real f , en esta sección vamos a ver cómo podemos **representarla gráficamente** analizando un conjunto de características de la mismas, donde la mayoría de ellas están basadas en la **función derivada**.

Antes de realizar dicho estudio necesitamos:

- analizar el crecimiento, decrecimiento y extremos locales de la función f en el caso general, es decir, estudiando las derivadas de orden superior
- analizar la concavidad y la convexidad de la función f que definiremos más adelante.

2. Crecimiento y extremos

El teorema siguiente nos dice cuándo una función es creciente o decreciente y nos da condiciones para los extremos a partir de condiciones que tienen que verificar derivadas de orden superior de la función.

Teorema.

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $x_0 \in (a, b)$ un punto interior del dominio de f . Supongamos que existe un natural n tal que f es derivable hasta orden $2n+2$ en un entorno de x_0 . Entonces:

- Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ y $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, resulta que:
 - si $f^{(2n+1)}(x_0) > 0$, f es creciente en x_0 ,
 - si $f^{(2n+1)}(x_0) < 0$, f es decreciente en x_0 .
- Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$, resulta que:
 - si $f^{(2n)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo en $x = x_0$,
 - si $f^{(2n)}(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo en $x = x_0$.

Observación. Si aplicamos la primera parte del teorema anterior para $n = 0$, tenemos un resultado conocido: si $f'(x_0) > 0$, f es creciente en x_0 y si $f'(x_0) < 0$, f es decreciente en x_0 . Por tanto, la primera parte del teorema generaliza dicho resultado.

Respecto a la segunda parte del teorema, sabíamos que si f tiene un extremo relativo en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$ y también sabíamos que el recíproco era falso. Esta segunda parte nos dice cuando dicho recíproco es cierto. Si lo aplicamos en el caso sencillo de que $n = 1$, nos dice que si $f''(x_0) > 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo de f y si $f''(x_0) < 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo de f .

Demostración (Contenido bastante técnico)

Consideremos la expresión del polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ en x_0 junto con la expresión del resto de Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_{2n+1}(x - x_0)$$

Teniendo en cuenta que $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{2n}(x_0) = 0$, la expresión anterior queda de la forma siguiente al ser 0 los sumandos para $k = 1, 2, \dots, 2n$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} \cdot (x - x_0)^{2n+1} + R_{2n+1}(x - x_0)$$

Por tanto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} = \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} + \frac{R_{2n+1}(x - x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}}$$

Como $R_{2n+1}(x - x_0) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \cdot (x - x_0)^{2n+2}$, con $c \in (x, x_0)$, se verificará que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{2n+1}(x - x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \cdot (x - x_0) = 0$$

La condición anterior nos dice que el término dominante en la expresión de $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}}$ es el primero, $\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}$, ya que el segundo, $\frac{R_{2n+1}(x - x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}}$, tiende a cero. Por tanto, para x suficientemente próximo a x_0 , el signo coincide.

$$\text{signo} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} \right) = \text{signo} \left(\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} \right)$$

Probemos a continuación las tesis de la primera parte del teorema:

- supongamos que $f^{(2n+1)}(x_0) > 0$. En este caso, como $\text{signo} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} \right) = \text{signo} \left(\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} \right)$, tendremos que $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} > 0$, y, como consecuencia $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} > 0$ (ya que $2n + 1$ es impar y el signo de $(x - x_0)^{2n+1}$ y $x - x_0$ es el mismo), condición que equivale a decir que f es creciente en x_0 .
- supongamos que $f^{(2n+1)}(x_0) < 0$. En este caso, como $\text{signo} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} \right) = \text{signo} \left(\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} \right)$, tendremos que $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n+1}} < 0$, y, como consecuencia $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} < 0$ (por la misma razón que antes), condición que equivale a decir que f es decreciente en x_0 .

Para la demostración de la segunda parte, consideremos la expresión del polinomio de Taylor de grado $2n$ en x_0 junto con la expresión del resto de Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_{2n}(x - x_0)$$

Teniendo en cuenta que $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{2n-1}(x_0) = 0$, la expresión anterior queda de la forma siguiente al ser 0 los sumandos para $k = 1, 2, \dots, 2n - 1$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} \cdot (x - x_0)^{2n} + R_{2n}(x - x_0)$$

Por tanto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} = \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} + \frac{R_{2n}(x - x_0)}{(x - x_0)^{2n}}$$

Como $R_{2n}(x - x_0) = \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} \cdot (x - x_0)^{2n+1}$, con $c \in \langle x, x_0 \rangle$, se verificará que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{2n}(x - x_0)}{(x - x_0)^{2n}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} \cdot (x - x_0) = 0$$

La condición anterior nos dice que el término dominante en la expresión de $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}}$ es el primero, $\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}$, ya que el segundo, $\frac{R_{2n}(x - x_0)}{(x - x_0)^{2n}}$, tiende a cero. Por tanto, para x suficientemente próximo a x_0 , tenemos:

$$\text{signo} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} \right) = \text{signo} \left(\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} \right)$$

Probemos a continuación las tesis de la segunda parte del teorema:

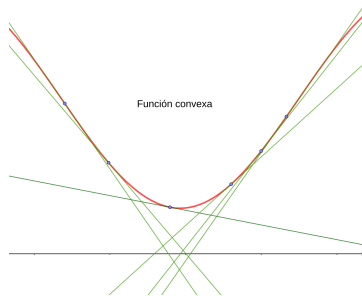
- si $f^{(2n)}(x_0) > 0$, como $\text{signo} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} \right) = \text{signo} \left(\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} \right)$, tendremos que $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} > 0$, y, como consecuencia $f(x) - f(x_0) > 0$ (ya que $2n$ es par y el signo de $(x - x_0)^{2n}$ siempre es positivo), condición que equivale a decir que f tiene un mínimo en x_0 .
- si $f^{(2n)}(x_0) < 0$, como $\text{signo} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} \right) = \text{signo} \left(\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} \right)$, tendremos que $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} < 0$, y, como consecuencia $f(x) - f(x_0) < 0$ (por la misma razón que antes), condición que equivale a decir que f tiene un máximo en x_0 .

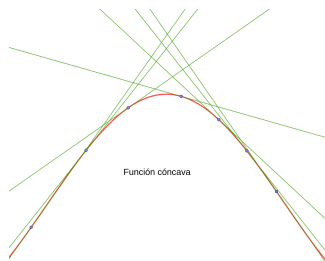
3. Concavidad y convexidad

La **concavidad/concavidad** de una función es una propiedad muy útil a la hora de representar dicha función.

De forma intuitiva, una **función convexa** es aquella que está por **encima** de las rectas tangentes en sus puntos de su gráfica y una **función cóncava** es aquella que está por **debajo**.

Ver las dos gráficas siguientes.





Definición, convexa. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es **convexa** si, y sólo si, dados $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $t \in [0, 1]$ entonces:

$$f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2)$$

Definición, cóncava. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es **cóncava** si, y sólo si, dados $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $t \in [0, 1]$ entonces:

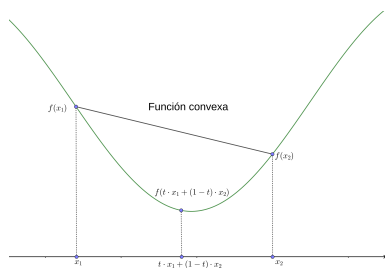
$$f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) \geq t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2)$$

Diremos que f es **estrictamente convexa** o **estrictamente cóncava** si las desigualdades anteriores son estrictas.

Observación. Las características de **concavidad** y **convexidad** están definidas para intervalos de la función y, por tanto, son **propiedades globales** de la función f .

Gráficamente una función es convexa cuando dados dos valores cualesquiera $x_1 < x_2$ dentro del dominio de la función, el trozo de la gráfica de la función entre x_1 y x_2 está **por debajo** de la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Se puede ver en la figura siguiente.



La condición anterior es equivalente a que para todo punto x del intervalo $[x_1, x_2]$, $f(x)$ es menor o igual que la imagen de x por la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$

La ecuación de la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ es la siguiente:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Entonces decir que $f(x)$ es menor o igual que la imagen de x por la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ equivale a la expresión siguiente:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Los puntos x que están en el intervalo $[x_1, x_2]$ se pueden escribir como $t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2$ variando t en el intervalo $[0, 1]$. Por ejemplo, para $t = 0$, obtenemos el extremo izquierdo x_1 , para $t = 1$, el extremo derecho x_2 y para $t = \frac{1}{2}$, el punto medio entre los dos valores $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

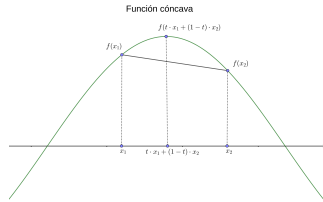
La condición de convexidad sería la siguiente, dados $x_1 < x_2$ y $t \in [0, 1]$ se verifica:

$$\begin{aligned} f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2 - x_1) \\ f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (1 - t) \cdot (x_2 - x_1) \\ f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) &\leq f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1)) \cdot (1 - t) \\ f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) &\leq t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

La última desigualdad es la condición que tenemos en la definición de convexidad.

La concavidad se razona de la misma manera, sólo se tiene que tener en cuenta que ahora dados dos valores cualesquiera $x_1 < x_2$ dentro del dominio de la función, el trozo de la gráfica de la función entre x_1 y x_2 está **por encima** de la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Se puede ver en la figura siguiente.



3.1. Relación entre la concavidad y la convexidad con la recta tangente

La proposición siguiente nos dice que la recta tangente en un punto de la gráfica de una función **convexa** (**cóncava**) está por **debajo** (**encima**) de la función tal como enunciamos al introducir los conceptos de **convexidad** y **concavidad**.

Proposición 1. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Suponemos que f es derivable en (a, b) con derivada continua. Entonces:

- f es **convexa** en (a, b) si, y sólo si, se verifica que $f(x) \geq f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$, para todo valor $x, \hat{x} \in (a, b)$ en dicho dominio.
- si f es **cóncava** en (a, b) si, y sólo si, se verifica que $f(x) \leq f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$, para todo valor $x, \hat{x} \in (a, b)$ en dicho dominio.

Observación. Las condiciones anteriores equivalen a decir que si f es **convexa** en un intervalo (a, b) y $x, \hat{x} \in (a, b)$, entonces la imagen de f en x es mayor que la imagen de x por la recta tangente de f en \hat{x} . Por tanto, la recta tangente de f en \hat{x} tiene la ecuación siguiente: $y = f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$, por tanto, la imagen de x por la recta tangente será: $y = f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$.

Entonces afirmar que $f(x) \geq f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$ equivale a afirmar que la función en x está por **encima** de la recta tangente en \hat{x} tal como se observaba en el gráfico anterior.

En el caso de que f sea **cóncava**, la observación anterior es la misma pero en lugar de decir que la función está por encima, hemos de decir que la función está por **debajo**.

Demostración de la proposición (Contenido bastante técnico)

\Rightarrow Supongamos que f es convexa en (a, b) .

Sean $x, \hat{x} \in (a, b)$ dos valores del dominio de f . Por ser f convexa, se verifica la condición siguiente para todo valor $t \in [0, 1]$

$$f(t \cdot x + (1 - t) \cdot \hat{x}) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(\hat{x})$$

Operando, obtenemos:

$$\frac{f(\hat{x} + t \cdot (x - \hat{x})) - f(\hat{x})}{t} \leq f(x) - f(\hat{x})$$

Como la desigualdad anterior es cierta para todo valor de $t \in [0, 1]$, si hacemos tender $t \rightarrow 0$ la parte de la izquierda obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + t \cdot (x - \hat{x})) - f(\hat{x})}{t} &\leq f(x) - f(\hat{x}) \\ f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) &\leq f(x) - f(\hat{x}) \\ f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) &\leq f(x) \end{aligned}$$

Tal como queríamos ver.

El cálculo del límite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + t \cdot (x - \hat{x})) - f(\hat{x})}{t}$ se puede realizar usando la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + t \cdot (x - \hat{x})) - f(\hat{x})}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(f(\hat{x} + t \cdot (x - \hat{x})) - f(\hat{x}))}{1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} f'(\hat{x} + t \cdot (x - \hat{x})) \cdot (x - \hat{x}) = f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \end{aligned}$$

Donde hemos aplicado la regla de la cadena al derivar respecto la variable t .

El caso en que f sea **cóncava** se razona de manera similar.

\Leftarrow Supongamos ahora que $f(x) \geq f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$, para todo valor $x, \hat{x} \in (a, b)$ en dicho dominio.

Sea $t \in [0, 1]$. Entonces, como $x_t = t \cdot x + (1 - t) \cdot \hat{x} \in (a, b)$ podemos escribir que:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_t) + f'(x_t) \cdot (x - x_t), \\ f(\hat{x}) &\geq f(x_t) + f'(x_t) \cdot (\hat{x} - x_t) \end{aligned}$$

Multiplicando la primera desigualdad por t y la segunda por $1 - t$ y sumando, obtenemos:

$$t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(\hat{x}) \geq f(x_t) + f'(x_t)(t \cdot (x - x_t) + (1 - t) \cdot (\hat{x} - x_t))$$

Pero:

$$t \cdot (x - x_t) + (1 - t) \cdot (\hat{x} - x_t) = t \cdot x + (1 - t) \cdot \hat{x} - t \cdot x_t - (1 - t) \cdot x_t = x_t - t \cdot x_t - x_t + t \cdot x_t = 0$$

En conclusión:

$$t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(\hat{x}) \geq f(x_t) = f(t \cdot x + (1 - t) \cdot \hat{x})$$

Condición que equivale a decir que f es **convexa** en el intervalo (a, b) .

La demostración en el caso en que f sea **cóncava** se razona de manera similar.

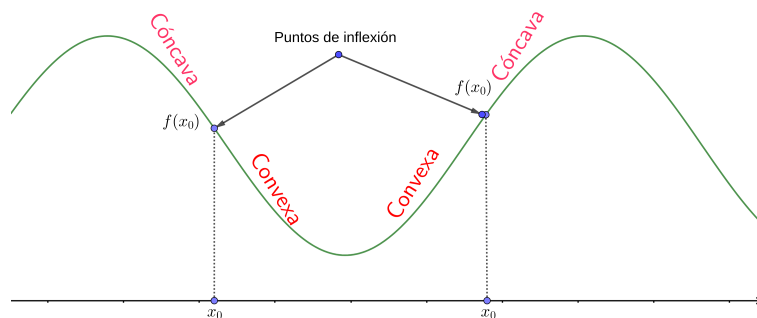
4. Concavidad y convexidad. Punto de inflexión.

Un punto de inflexión de una función es un punto donde a la izquierda del mismo la función tiene un tipo de convexidad (cóncava o convexa) y a la derecha, otro tipo de convexidad. Es decir, se pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava:

Definición de punto de inflexión.

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto del interior del dominio de f . Diremos que x_0 es un punto de inflexión si existe un valor $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, f es **concava** (**convexa**) en x y si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, f es **convexa** (**concava**) en x .

Se puede ver en la figura siguiente.



El siguiente resultado caracteriza la concavidad y la convexidad de una función a partir de sus derivadas.

Teorema. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto del interior del dominio de f . Supongamos que f es derivable tres veces con f''' continua. Entonces:

- si $f''(x_0) \neq 0$, entonces
 - si $f''(x_0) > 0$, tenemos que f es **convexa** en un entorno de x_0
 - si $f''(x_0) < 0$, tenemos que f es **cóncava** en un entorno de x_0 .
- si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un **punto de inflexión** en $x = x_0$.

Observación. Si aplicamos el teorema anterior, obtenemos que si $f''(x_0) > 0$, o, equivalentemente, que f' es una función creciente en x_0 , f es **convexa** en un entorno de x_0 y si $f''(x_0) < 0$, o, equivalentemente, que f' es una función decreciente en x_0 , f es **cóncava** en un entorno de x_0 .

En el gráfico que vimos al principio de la sección se muestran en verde un conjunto de rectas tangentes a una función convexa en rojo. Fijaos que a medida que la variable x aumenta, la pendiente de las rectas tangentes, es decir, la derivada va aumentando. Es decir, las rectas tangentes van subiendo. Se empieza con rectas tangentes de pendiente negativa, se llega a la recta tangente de pendiente cero (el mínimo) y se acaba con rectas tangentes de pendiente positiva.

En el segundo gráfico que vimos al principio de la sección se muestra lo mismo pero para una función cóncava. Fijaos que a medida que la variable x aumenta, la pendiente de las rectas tangentes, es decir, la derivada va disminuyendo. Es decir, las rectas tangentes van bajando. Se empieza con rectas tangentes de pendiente positiva, se llega a la recta tangente de pendiente cero (el máximo) y se acaba con rectas tangentes de pendiente negativa.

Demostración del teorema. (Contenido bastante técnico)

Demostremos la primera parte del teorema: supongamos que $f''(x_0) > 0$. Vamos a ver que f es **convexa** en un entorno de x_0 .

Como f'' es continua al ser f tres veces derivable y $f''(x_0) > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $f''(x) > 0$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Es decir, f'' es positiva en un entorno del punto x_0 .

Sean $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Consideremos el desarrollo de Taylor de f en x_1 de grado 1, es decir, el polinomio de Taylor en x_1 de grado 1 junto con el resto de Lagrange y aplicamos dicho desarrollo a x_2 .

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \frac{f''(c_{12})}{2!} \cdot (x_2 - x_1)^2$$

Donde $c_{12} \in (x_1, x_2) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Como f'' es positiva en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tendremos que $f''(c_{12}) > 0$ y por tanto:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

Ya que $\frac{f''(c_{12})}{2!} \cdot (x_2 - x_1)^2 > 0$.

La condición anterior equivale a afirmar que f es **convexa** en el entorno de x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, usando la proposición anterior.

El caso $f''(x_0) < 0$ (**cóncava**) se razona de manera similar.

Demostremos la segunda parte del teorema: supongamos ahora que $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.

Supongamos para fijar ideas que $f'''(x_0) > 0$ (el caso $f'''(x_0) < 0$ se razonaría de forma similar).

Como $f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, tendremos que existe $\delta > 0$ tal que $f''(x) > 0$ si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Sean $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0)$. Si consideramos otra vez el desarrollo de Taylor de f en x_1 de grado 1, y aplicamos dicho desarrollo a x_2 , obtenemos:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \frac{f''(c_{12})}{2!} \cdot (x_2 - x_1)^2$$

Donde $c_{12} \in (x_1, x_2) \subseteq (x_0 - \delta, x_0)$.

Como f'' es negativa en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$, tendremos que $f''(c_{12}) < 0$ y por tanto:

$$f(x_2) \leq f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

Ya que $\frac{f''(c_{12})}{2!} \cdot (x_2 - x_1)^2 < 0$. Es decir, f es **cóncava** en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$.

Sean ahora $x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$. Si consideramos otra vez el desarrollo de Taylor de f en x_1 de grado 1, y aplicamos dicho desarrollo a x_2 , obtenemos:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \frac{f''(c_{12})}{2!} \cdot (x_2 - x_1)^2$$

Donde $c_{12} \in (x_1, x_2) \subseteq (x_0, x_0 + \delta)$.

Como f'' es positiva en el intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$, tendremos que $f''(c_{12}) > 0$ y por tanto:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

Ya que $\frac{f''(c_{12})}{2!} \cdot (x_2 - x_1)^2 > 0$. Es decir, f es **convexa** en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$.

En resumen, acabamos de demostrar que x_0 es un punto de inflexión, tal como queríamos ver.

Ejemplo: estudio de la concavidad y convexidad de una función cúbica

Consideremos una **función cúbica** general dependiente de cuatro **parámetros**: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, definida en todo el conjunto de números reales \mathbb{R} , donde a, b, c y d son los parámetros de los que depende donde suponemos que $a \neq 0$.

Usando el resultado anterior, estudiar la **concavidad y convexidad** equivale a estudiar el signo de la **derivada segunda**: $f''(x) = 2(3ax + b)$. Entonces:

- si $f''(x) > 0$, o si $x > -\frac{b}{3a}$, la función es **convexa**
- si $f''(x) < 0$, o si $x < -\frac{b}{3a}$, la función es **cóncava**
- si $f''(x) = 0$, o si $x = -\frac{b}{3a}$, como $f'''(x) = 6a \neq 0$, f tiene un **punto de inflexión** en dicho punto



En el enlace siguiente [se muestra la gráfica de la función \$f\(x\) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1\$](#) , donde puede observarse que es convexa en la región $(-\frac{b}{3a}, \infty) = (-\frac{-3}{3 \cdot 1}, \infty) = (1, \infty)$, cóncava en la región $(-\infty, 1)$ y tiene un punto de inflexión en el punto $(1, -1)$.

5. Estudio local de una función

Una de las aplicaciones más usadas del estudio de las derivadas de primer y segundo orden es la **representación aproximada de funciones**.

Las derivadas son una herramienta muy útil para calcular las regiones donde la función **crece y decrece**, donde la función es **convexa y cóncava** así como determinar los **extremos relativos (máximos y mínimos)** y los **puntos de inflexión**.

Sin embargo, aparte del crecimiento y la concavidad, de cara a poder realizar una **representación aproximada de la gráfica de una función**, necesitamos estudiar otras propiedades.

Concretamente, dichas propiedades son las siguientes:

- Determinación del **dominio** de la función.
- Cálculo del conjunto formado por sus **puntos de discontinuidad**.
- Cálculo de los **puntos de corte** con el eje de abscisas o eje de las x y el de ordenadas o eje de las y .
- Estudio de las **simetrías** con respecto al eje de ordenadas o eje de las y y respecto con el origen $(0, 0)$.
- Cálculo de las posibles **asíntotas**.
- Cálculo de los **extremos relativos**, es decir, los **máximos y mínimos** de la función así como los intervalos de **crecimiento y decrecimiento** de la misma.
- Cálculo de los **puntos de inflexión** de la función así como los intervalos de **convexidad y concavidad** de la misma.

5.1. Determinación del dominio de la función

Recordemos que el **dominio** de una función es el subconjunto de \mathbb{R} donde está definida.

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^3-x}$.

Al ser una función **racional** (cociente de dos **polinomios**), el **dominio** de la misma serán todos los valores reales excepto aquellos que anulen el denominador.

$$x^3 - x = 0, \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 1) = 0, \Leftrightarrow x = 0, x^2 - 1 = 0, \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$$

Por tanto, el dominio de f será el conjunto siguiente: $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

5.2. Cálculo del conjunto formado por sus puntos de discontinuidad

Recordemos que el conjunto de **puntos de discontinuidad** de una función son aquellos puntos de su dominio en los que la función no es continua.

En el ejemplo anterior en donde $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^3-x}$, no hay **puntos de discontinuidad** ya que los únicos puntos en los que f no es continua serían aquellos en los que el denominador se anula pero éstos no pertenecen al dominio.

5.3. Cálculo de los puntos de corte

Para calcular los **puntos de corte** de una función $f(x)$ se tienen que realizar los procedimientos siguientes:

- **Puntos de corte** con el eje de abscisas o eje de las x . Hay que resolver la ecuación $f(x) = 0$. Sean (en caso que existan) x_1, \dots, x_n sus soluciones. Entonces los puntos de corte son $(x_1, 0), \dots, (x_n, 0)$.
- **Punto de corte** con el eje de ordenadas o eje de las y . En este caso, sólo hay un punto de corte y es el siguiente: $(0, f(0))$.

Ejemplo (continuación)

Los puntos de corte para la función $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^3-x}$ son los siguientes:

- Eje de abscisas o eje X. Hay que resolver la ecuación siguiente: $\frac{x^3-3x+2}{x^3-x} = 0$, que equivale a resolver $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Una solución de la ecuación anterior es $x = 1$. Para hallar las demás, podemos descomponer el polinomio anterior usando la regla de Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Las demás soluciones serán los ceros del polinomio $x^2 + x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1, -2$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas o eje X son los siguientes: $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

- El punto de corte con el eje de ordenadas o eje Y no existe en este caso ya que el valor $x = 0$ no es del dominio de la función tal como hemos indicado anteriormente.

5.4. Estudio de las simetrías

Averiguar si una función tiene **simetrías** es muy importante de cara a realizar una representación de la misma ya que nos dice cuál es el valor de $f(-x)$ a partir del valor de $f(x)$ para cualquier valor de x de su dominio.

Existen dos tipos de **simetrías**:

- **Simetría** con respecto al eje de ordenadas o eje de las y .
- **Simetría** con respecto al origen de coordenadas $(0, 0)$.

Definición de simetría con respecto al eje de ordenadas o eje de las y . Dada f una función real de variable real con dominio D , diremos que tiene simetría con respecto al eje Y si para cualquier valor x del dominio D , $-x$ también está en D y además $f(-x) = f(x)$.

Definición de simetría con respecto al origen de coordenadas $(0, 0)$. Dada f una función real de variable real con dominio D , diremos que tiene simetría con respecto al origen de coordenadas $(0, 0)$ si para cualquier valor x del dominio D , $-x$ también está en D y además $f(-x) = -f(x)$.

Observación: La única función real de variable real que tiene los dos tipos de **simetrías** es la función idénticamente nula $f(x) = 0$ ya que si suponemos que f tiene los dos tipos de simetrías, tenemos por un lado que $f(-x) = f(x)$ y por otro, que $f(-x) = -f(x)$.

En resumen $f(x) = -f(x)$, de donde deducimos que $f(x) = 0$, para todo valor x de su dominio.

Ejemplo (continuación)

Veamos si la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x}$ tiene algún tipo de simetría.

El valor de $f(-x)$ vale:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3 \cdot (-x) + 2}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 + 3x + 2}{-x^3 + x}$$

Valor que, claramente es diferente de $f(x)$ y de $f(-x)$. Por tanto, la función $f(x)$ no presenta ningún tipo de simetría.

Comprobémoslo con un valor concreto de x de su dominio en **python**, por ejemplo $x = 2$.

```
def f(x):
    return((x**3-3*x+2)/(x**3-x))

f(2.)
```

```
## 0.6666666666666666
```

f(-2.)

-0.0

5.5. Cálculo de las posibles asíntotas

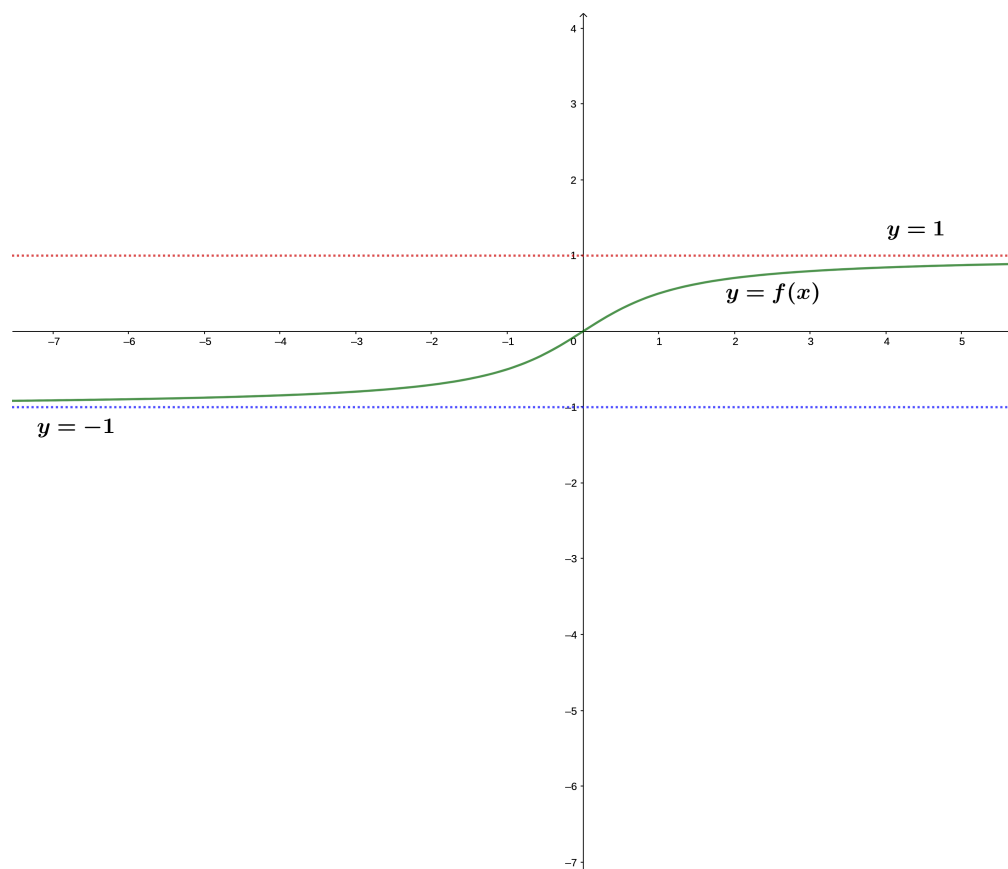
Una **asíntota** es una recta que se aproxima a la función de forma que la distancia entre dicha función y la **asíntota** tiende a cero en un límite determinado.

Su determinación es clave a la hora de realizar una representación de la función ya que nos dice como se comporta dicha función en lugares remotos.

Existen tres tipos de **asíntotas**.

1. Asíntotas horizontales. Diremos que la recta horizontal $y = b$ para un b determinado es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si, y sólo si, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

Es decir, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - b) = 0$. En este caso, se dice que la recta $y = b$ es **tangente** a la función $f(x)$ en el infinito. En la gráfica siguiente vemos una función (en verde) que tiene por un lado, cuando $x \rightarrow \infty$ la **asíntota horizontal** $y = 1$ (en rojo) y, por otro, cuando $x \rightarrow -\infty$ la **asíntota horizontal** $y = -1$ (en azul).

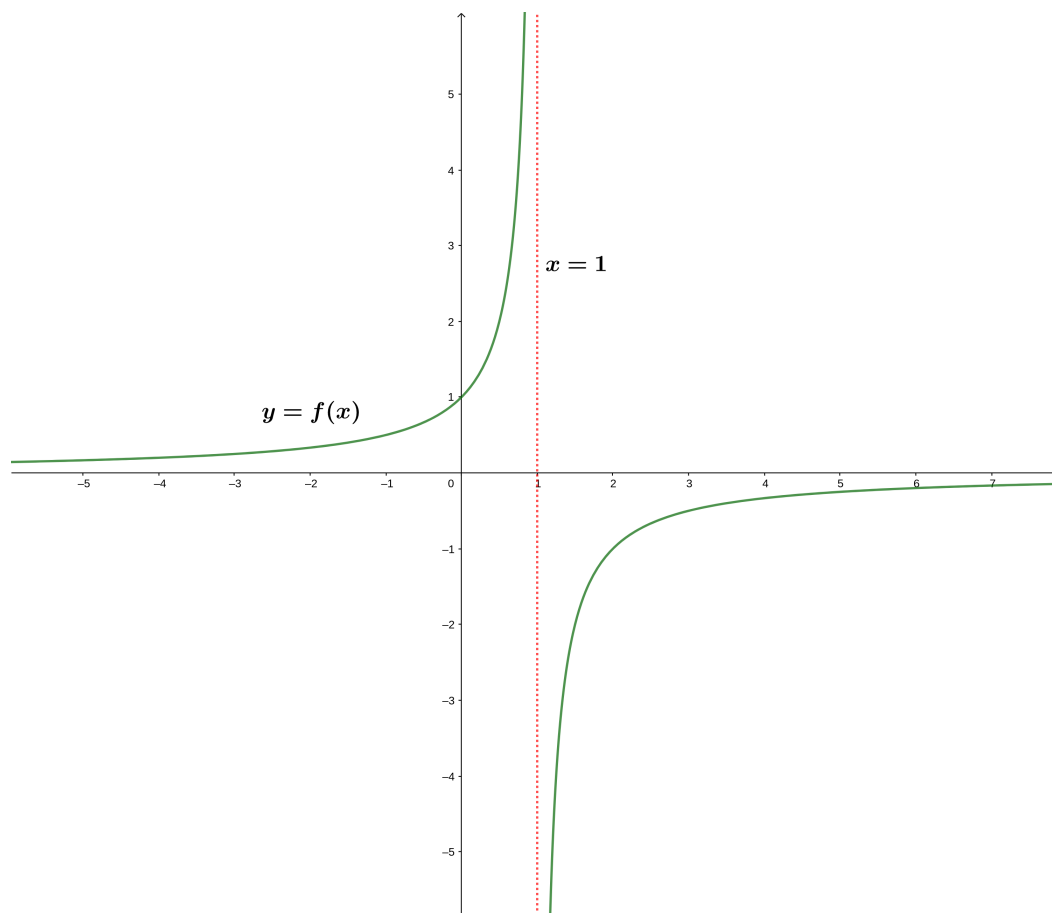


2. Asíntotas verticales. Diremos que la recta vertical $x = a$ para un a determinado es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si, y sólo si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

En este caso, se dice que la recta $x = a$ es **tangente** a la función $f(x)$ en el infinito. En la gráfica siguiente vemos una función (en verde) que tiene una asíntota vertical en $x = 1$ (en rojo). Observar que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Observación: Usualmente, los posibles valores de a son puntos que no pertenecen al dominio de la función f . Por tanto, los puntos de discontinuidad de la función son buenos candidatos para hallar dichos valores de a .



3. Asíntotas oblicuas. Diremos que la recta vertical $y = mx + n$ para unos m y n determinados es una **asíntota oblicua** de la función $y = f(x)$ si, y sólo si, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

En este caso, se dice que la recta $y = mx + n$ es **tangente** a la función $f(x)$ en el infinito.

Para hallar el valor de m , observar que el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + n)}{x} = 0$, ya que el numerador tiende a 0 y el denominador, a $\pm\infty$, y $\frac{0}{\pm\infty} = 0$. Operando el límite anterior, obtenemos m :

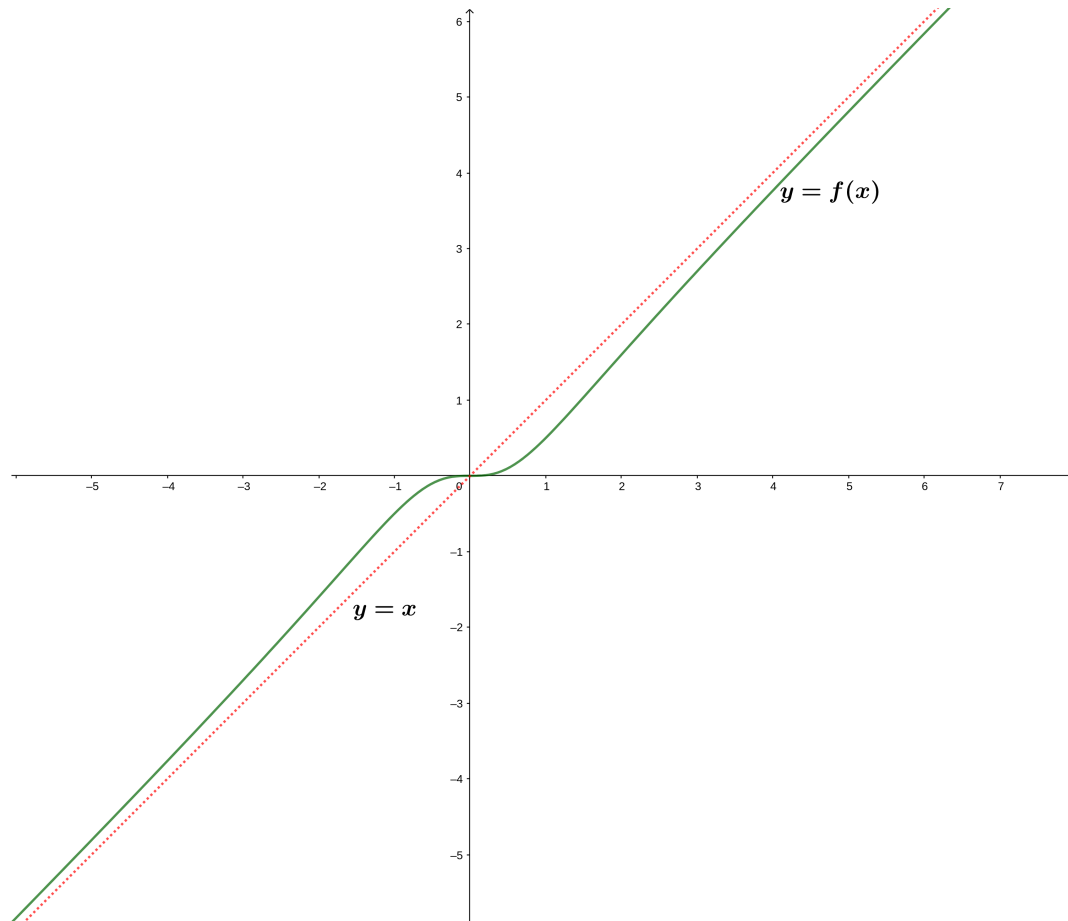
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + n)}{x} = 0, & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right) = 0, \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0, & \Leftrightarrow m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

Para hallar el **valor de n** , basta usar que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ y el valor de m hallado anteriormente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0, & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) - n = 0, \Leftrightarrow \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \end{aligned}$$

En la gráfica siguiente vemos una función (en verde) que tiene la asíntota oblicua en $y = x$ (en rojo). En este caso, tendremos que los valores de m y n serán $m = 1$ y $n = 0$. Se puede observar que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$$



Ejemplo (continuación)

Hallemos las posibles asíntotas para la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x}$:

- Asíntotas horizontales. Para hallar las **asíntotas horizontales**, tenemos que hacer el límite de la función cuando el valor de x tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = 1$$

Entonces la recta horizontal $y = 1$ sería una **asíntota horizontal** de nuestra función.

- Asíntotas verticales. Como ya hemos indicado anteriormente, unos buenos candidatos para las posibles **asíntotas verticales** $x = a$ serían los valores de a correspondientes a los puntos de discontinuidad. Recordemos que tenemos tres puntos de discontinuidad: $-1, 0, 1$. Probemos con cada uno de ellos haciendo el límite correspondiente:

$$- x = -1: \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{4}{0} = \infty$$

De hecho para ser más explícitos, tendríamos que escribir:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = +\infty$$

Ya que si $x \rightarrow -1^-$, significa que $x < -1$ pero está cerca de -1 . Veamos cuál es su signo para el valor $x = -1.001$ por ejemplo:

```
f(-1.001)
```

```
## -1997.0019980021598
```

Es decir, su valor tiende a $-\infty$.

Si hacemos $x \rightarrow -1^+$, significa que $x > -1$ pero está cerca de -1 . Veamos cuál es su signo para el valor $x = -0.999$ por ejemplo:

```
f(-0.999)
```

```
## 2003.0020020020036
```

Es decir, su valor tiende a $+\infty$ tal como hemos indicado anteriormente. Por tanto, la recta vertical $x = -1$ es una **asíntota vertical**.

- $x = 0: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{2}{0} = \infty.$

De hecho para ser más explícitos, tendríamos que escribir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = -\infty$$

Por tanto, la recta vertical $x = 0$ es una **asíntota vertical**.

- $x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{0}{0}$

Como hemos obtenido una indeterminación, la resolvemos descomponiendo los polinomios del numerador y del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2) \cdot (x - 1)}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{x \cdot (x + 1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Entonces, la recta $x = 1$ no sería una **asíntota vertical**.

- Asíntotas oblicuas. Existe la creencia sin justificar que dice que si una función tiene **asíntotas horizontales**, entonces no tiene **asíntotas oblicuas**. La razón de dicha creencia es que si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \neq 0$, entonces el valor de la pendiente m en la posible **asíntota oblicua** sería 0, siendo dicha asíntota una **asíntota horizontal** ya que:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{\pm\infty} = 0$$

Dicho razonamiento, aunque es válido la mayoría de las veces, tiene un pequeño problema en su línea argumental. No podemos asegurar que no exista una función $f(x)$ donde por ejemplo pase lo siguiente:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ pero $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$. Es decir, que $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** cuando x tiende a $+\infty$ y una **asíntota oblicua** cuando $x \rightarrow -\infty$.

En resumen, aunque la mayoría de las veces no hace falta comprobar que haya **asíntotas oblicuas** si hay **horizontales**, hay que hacer la comprobación correspondiente.

En nuestro ejemplo, no hay **asíntotas oblicuas** ya que la pendiente correspondiente es 0.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x \cdot (x^3 - x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - x^2} = 0$$

5.6. Estudio del crecimiento y los extremos relativos de la función

Para realizar una representación aproximada de una función, sólo es necesario conocer dos propiedades fundamentales: sus **asíntotas** y sus **extremos relativos**, es decir, sus **máximos y mínimos relativos**.

Seguidamente, para confirmar que nuestro esbozo es correcto, podemos determinar sus **intervalos de crecimiento y decrecimiento** de la misma y comprobar que los resultados obtenidos son los observados visualmente.

Vamos a dar un método práctico para realizar las dos tareas mencionadas anteriormente: el cálculo de sus **extremos relativos** y los **intervalos de crecimiento y decrecimiento**.

Recordemos que una función **crece** en una región determinada de \mathbb{R} si su derivada es **positiva** y **decrece** si su derivada es **negativa**.

Recordemos también que los **extremos relativos** de la función deben verificar que su **derivada** debe ser nula. El primer paso será, pues, calcular los ceros de la ecuación $f'(x) = 0$ calculando así los candidatos a **extremos relativos**.





Sean, pues, x_1, \dots, x_n los ceros de la ecuación $f'(x) = 0$ que son los candidatos a **extremos relativos**.

Sean también y_1, \dots, y_k los **puntos de discontinuidad** de la función $f(x)$.

Consideremos el conjunto unión de los conjuntos anteriores $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ y nombremos z_i , $i = 1, \dots, k + n$ a sus elementos suponiendo éstos por orden creciente.

$$\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\} = \{z_1 < \dots < z_{k+n}\}$$

A continuación construimos la tabla siguiente:

x	$-\infty$	z_1	z_2	\dots	z_{k+n}	∞
y'		\pm	\pm	\dots	\pm	\pm
y				\dots		

En la segunda fila indicamos el signo de la derivada en los intervalos correspondientes, esto es, escribimos $+$ si el signo de la derivada en el intervalo $(-\infty, z_1)$ es positivo y escribimos $-$ si es negativo. Y lo mismo para los intervalos siguientes (z_1, z_2) hasta llegar a (z_{k+n}, ∞) . Para saber el signo de la derivada en un intervalo cualquiera, digamos (z_{i-1}, z_i) , elegimos un valor z que pertenezca a dicho intervalo, por ejemplo su punto

medio $z = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}$ y calculamos $f'(z)$ para saber su signo.

En la tercera fila, dependiendo del signo de la derivada, indicamos el comportamiento de la función escribiendo el signo \nearrow si la derivada es positiva $+$ y escribiendo el signo \searrow si la derivada es negativa $-$.

De esta manera si en un valor z_i , a la izquierda del mismo aparece el signo \nearrow y a la derecha, el signo \searrow observándose $\nearrow \searrow$ sabemos que en z_i hay un **máximo relativo**. Si en cambio es al revés, es decir, a la izquierda del mismo aparece el signo \searrow y a la derecha, el signo \nearrow observándose $\searrow \nearrow$, sabemos que en z_i hay un **mínimo relativo**.

Los **intervalos de crecimiento** de la función f serán aquéllos en los que aparece el signo \nearrow y los **intervalos de decrecimiento** serán aquéllos en los que aparece el signo \searrow .

Ejemplo (continuación)

Para hallar los **extremos relativos** y los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** de la función $\frac{x^3-3x+2}{x^3-x}$, tal como hemos indicado, resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

En primer lugar, calculemos la función derivada $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2-3) \cdot (x^3-x) - (x^3-3x+2) \cdot (3x^2-1)}{(x^3-x)^2} = \frac{3x^5-6x^3+3x-(3x^5-10x^3+6x^2+3x-2)}{(x^3-x)^2} \\ &= \frac{4x^3-6x^2+2}{(x^3-x)^2} = \frac{(4x+2) \cdot (x-1)^2}{x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{4x+2}{x^2 \cdot (x+1)^2} \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación $f'(x) = 0$, hemos de igualar a cero el numerador de la expresión anterior $4x+2 = 0$, obteniendo $x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Recordemos que los puntos de discontinuidad de la función f eran $-1, 0, 1$. El conjunto de los z_i será en nuestro caso: $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$.

A continuación construimos la tabla anterior para calcular los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** y los **máximos y mínimos relativos** de la función:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	∞
y'		$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y		\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow

Observando la tabla anterior, concluimos que:

- Hay un **mínimo relativo** en el punto $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, 9)$
- La función **crece** en la siguiente región de \mathbb{R} : $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$
- La función **decrece** en la siguiente región de \mathbb{R} : $(-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$

5.7. Concavidad y convexidad

Saber en qué regiones una función es **cóncava o convexa**, ayuda de forma significativa a su representación.

Vamos a dar un método parecido al estudio del **crecimiento y decrecimiento** de una función cambiando los papeles de f' por f'' .

Recordemos que una función es **convexa** en una región de \mathbb{R} si su derivada segunda es **positiva** y es **convexa**, si es **negativa**.

Recordemos también que los **puntos de inflexión** deben verificar que su derivada segunda debe ser nula. El primer paso será, pues, calcular los ceros de la ecuación $f''(x) = 0$ calculando de esta manera los candidatos a **puntos de inflexión**.

Sean $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$ los ceros de la ecuación $f''(x) = 0$ que son los candidatos a los **puntos de inflexión**.

Recordemos que y_1, \dots, y_k eran los **puntos de discontinuidad** de la función $f(x)$.

Igual que antes, consideramos el conjunto unión de los conjuntos $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ y nombramos $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{k+m}$ a sus elementos suponiendo éstos por orden creciente:

$$\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m\} \cup \{y_1, \dots, y_k\} = \{\hat{z}_1 < \dots < \hat{z}_{k+m}\}$$

A continuación construimos la tabla siguiente:

x	$-\infty$	\hat{z}_1	\hat{z}_2	\dots	\hat{z}_{k+m}	∞
y''		\pm	\pm	\dots	\pm	\pm
y		$\cup \cap$	$\cup \cap$	\dots	$\cup \cap$	$\cup \cap$

En la segunda fila indicamos el signo de la derivada segunda en los intervalos correspondientes, esto es, escribimos $+$ si el signo de la derivada en el intervalo $(-\infty, \hat{z}_1)$ es positivo y escribimos $-$ si es negativo. Y lo mismo para los intervalos siguientes (\hat{z}_1, \hat{z}_2) hasta llegar a (\hat{z}_{k+m}, ∞) . Para saber el signo de la derivada en un intervalo cualquiera, digamos (z_{i-1}, z_i) , elegimos un valor z que pertenezca a dicho intervalo, por ejemplo su punto medio $z = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}$ y calculamos $f''(z)$ para saber su signo.

En la tercera fila, dependiendo del signo de la derivada segunda, indicamos el comportamiento de la función escribiendo el signo \cup si la derivada segunda es positiva $+$ y escribiendo el signo \cap si la derivada segunda es negativa $-$.

De esta manera si en un valor \hat{z}_i , a la izquierda del mismo aparece el signo \cup y a la derecha, el signo \cap , o viceversa observándose $\cup \cap$, o $\cap \cup$ sabemos que en z_i hay un **punto de inflexión**.

Los **intervalos de convexidad** de la función f serán aquéllos en los que aparece el signo \cup y los **intervalos de concavidad** serán aquéllos en los que aparece el signo \cap .

Ejemplo (continuación)

Para hallar los **puntos de inflexión** y los **intervalos de convexidad y concavidad** de la función $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x}$, tal como hemos indicado, resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.

En primer lugar, calculemos la función derivada $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4 \cdot x^2 \cdot (x+1)^2 - (4x+2) \cdot (2x \cdot (x+1)^2 + 2x^2 \cdot (x+1))}{x^4 \cdot (x+1)^4} \\ &= \frac{4 \cdot x \cdot (x+1) - (4x+2) \cdot (2(x+1) + 2x)}{x^3 \cdot (x+1)^3} = \frac{-4(3x^2 + 3x + 1)}{x^3 \cdot (x+1)^3} \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación $f''(x) = 0$, hemos de igualar a cero el numerador de la expresión anterior $3x^2 + 3x + 1 = 0$, obteniendo $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-3 \cdot 4}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{6}$. No tiene solución real, por tanto, la función no tiene **puntos de inflexión**.

Recordemos que los puntos de discontinuidad de la función f eran $-1, 0, 1$. El conjunto de los \hat{z}_i será en nuestro caso: $\{-1, 0, 1\}$

A continuación construimos la tabla anterior para calcular los **intervalos de convexidad y concavidad** de la función.

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
y''		$-$	$+$	$-$	$-$
y		\cap	\cup	\cap	\cap

Observando la tabla anterior, concluimos que:

- la función es **convexa** en la siguiente región de \mathbb{R} : $(-1, 0)$
- la función es **cóncava** en la siguiente región de \mathbb{R} : $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

Las propiedades que hemos estado hallando que en forma de resumen son las siguientes:

- Corte con los ejes: $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.
- Asíntotas: $y = 1$, $x = -1$ y $x = 0$.
- Mínimo en $(-\frac{1}{2}, 9)$, f crece en $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ y decrece en $(-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$.
- No tiene puntos de inflexión, es convexa en $(-1, 0)$ y cóncava en $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

En el gráfico siguiente hemos indicado las asíntotas (en rojo), los puntos de corte y el mínimo (\cup). ¿Seríais capaces de acabar la representación gráfica?

Si queréis ver el gráfico de la función que hemos desarrollado en **Wolfram Alpha**, id al enlace siguiente:

