Tema 8 - Integración de Riemann

Ramon Ceballos

20/4/2021

1. Introducción a la integración

La idea de **integración** nace de la necesidad de calcular **áreas.**

El cálculo de un **área** es la medición de la cantidad de unidades de **superficie** necesarias para una cobertura exacta de una determinada **figura plana.**

A partir de un **cuadrado unitario** el área de un rectángulo se puede calcular multiplicando la **longitud** por la **anchura** del mismo.

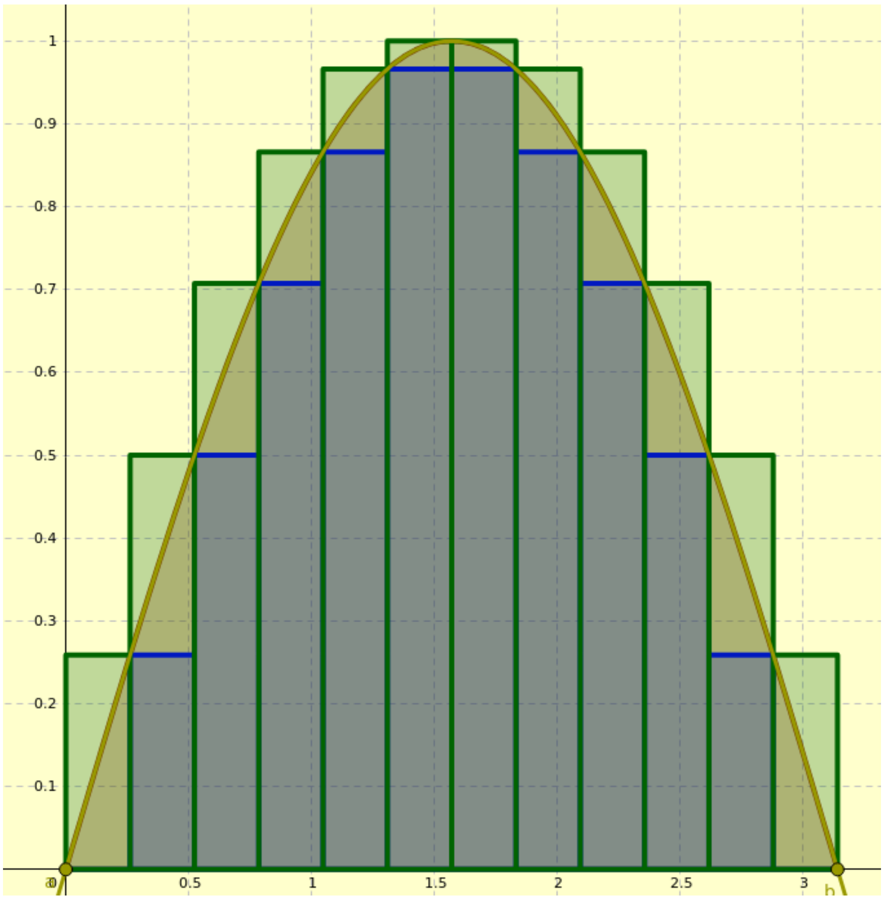
Dado que un **triángulo** se puede **diseccionar** y volver a montar para formar un **rectángulo**, el área del mismo se puede calcular dividiendo por dos el **área** del rectángulo correspondiente.

Usando la mismo idea, y dado que un **polígono** se puede **diseccionar** en **triángulos**, el área de cualquier polígono también se puede calcular sumando el área de los **triángulos** involucrados.

Sin embargo, cuando la figura es **curva**, el cálculo de su área se complica mucho. Usando el mismo razonamiento que el cálculo del área de polígonos, podíamos considerar los **polígonos inscritos** y **circunscritos** como **cotas inferiores y superiores** del área de la figura a calcular.

Si hacemos dichos polígonos más “precisos” progresivamente, podemos considerar que el área de la **figura curva** sería el límite del **área** de cada colección de dichos polígonos. Ver figura siguiente.

Ésta es la idea fundamental de la **integración de Riemman** y es la que vamos a desarrollar seguidamente.



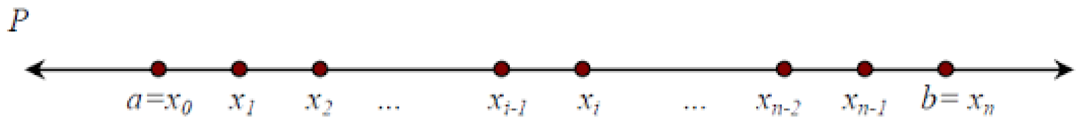
2. Definición de integral de Riemann

2.1. **Partición de un intervalo**

Para definir las áreas de los **polígonos inscritos** y **circunscritos** como aproximaciones al área de una figura **curva** cualquiera, necesitamos definir el concepto de **partición** de un intervalo que será dónde “descansarán” los polígonos anteriores.

Definición de partición de un intervalo.

Sea $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervalo de la recta real. Una **partición** $P=\{x_0=a<x_1<\dots,x_n=b\}$ del intervalo anterior es un conjunto finito de puntos ordenados dentro del intervalo donde el mínimo coincide con a y el máximo, con b. A los subintervalos $[x_i,x_{i+1}]$, para $i=0,\dots,n-1$ se le denomina subintervalos de la partición $[a,b]$.



Para aproximar cada vez más el área de la **figura curva** al área de la **colección de polígonos**, necesitamos introducir el concepto de **partición más fina** en el sentido de que cuánta más fina sea una partición, más buena será la aproximación del área de los **polígonos** que descansan sobre ella.

Definición de partición más fina.

Sea $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervalo de la recta real. Sean P y P' dos **particiones** del intervalo $[a,b]$. Diremos que la **partición** P' es más fina que la partición P si $P\subseteq P'$, es decir si todos los puntos de la partición P son puntos de la partición P', o si se quiere decir en otros términos, si todo **subintervalo** de P' está incluido en algún **subintervalo** de P.

El **diámetro** de una partición es una forma de medir la finura de la misma.

Definición de diámetro de una partición.

Sea $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervalo de la recta real. Sea $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n\}$ una partición del intervalo. Llamaremos **diámetro** de la partición P y lo denotaremos por $|P|$ a la longitud máxima de los subintervalos de la misma.

$$|P|=\max_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})$$

Ejemplo de partición del intervalo $[0,1]$

Consideramos la partición siguiente del intervalo $[0,1]$.

$$P=\left\{x_0=0<x_1=\frac{1}{3}<x_2=\frac{2}{3}<x_3=1\right\}$$

La siguiente partición P' es más fina que P.

$$P'=\left\{x_0'=0<x_1'=\frac{1}{6}<x_2'=\frac{1}{3}<x_3'=\frac{1}{2}<x_4'=\frac{2}{3}<x_5'=1\right\}$$

Observar que $P\subseteq P'$ ya que $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}\subseteq\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$.

Además, cualquier subintervalo de la partición P' está incluido en algún **subintervalo** de la partición P:

$$\left[0,\frac{1}{6}\right]\subseteq\left[0,\frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]\subseteq\left[0,\frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\subseteq\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\ \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\subseteq\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\ \left[\frac{2}{3},1\right]\subseteq\left[\frac{2}{3},1\right]$$

En el ejemplo anterior, tendremos que los diámetros de las particiones consideradas serán:

$$|P|=\max\left\{\frac{1}{3}-0,\frac{2}{3}-\frac{1}{3},1-\frac{2}{3}\right\}=\frac{1}{3},\ |P'|=\max\left\{\frac{1}{6}-0,\frac{1}{3}-\frac{1}{6},\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{2}{3}-\frac{1}{2},1-\frac{2}{3}\right\}=\frac{1}{3}$$

Observamos que las dos particiones tienen el mismo diámetro.

Observación. Dadas dos particiones, si P' es más **fina** que P, se verifica que el diámetro de la más fina es menor o igual que el diámetro de la menos fina ya que ésta incluye todos los subintervalos de la más fina: $|P'|\le|P|$.

2.2. **Sumas inferiores y superiores**

A continuación vamos a definir las **aproximaciones inferior y superior** del área de la función curva a calcular usando como **colección de polígonos** los rectángulos con base en los subintervalos de las particiones y cuyas alturas serán los valores ínfimo y supremo, respectivamente, de la función en cada subintervalo.

Definición de sumas inferiores y superiores.

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo de la recta real. Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n\}$ una partición del intervalo. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en dicho intervalo. Definimos para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ el valor ínfimo y supremo de la función en dicho subintervalo.

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

La **suma inferior** correspondiente a la partición P a la función f se define como:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

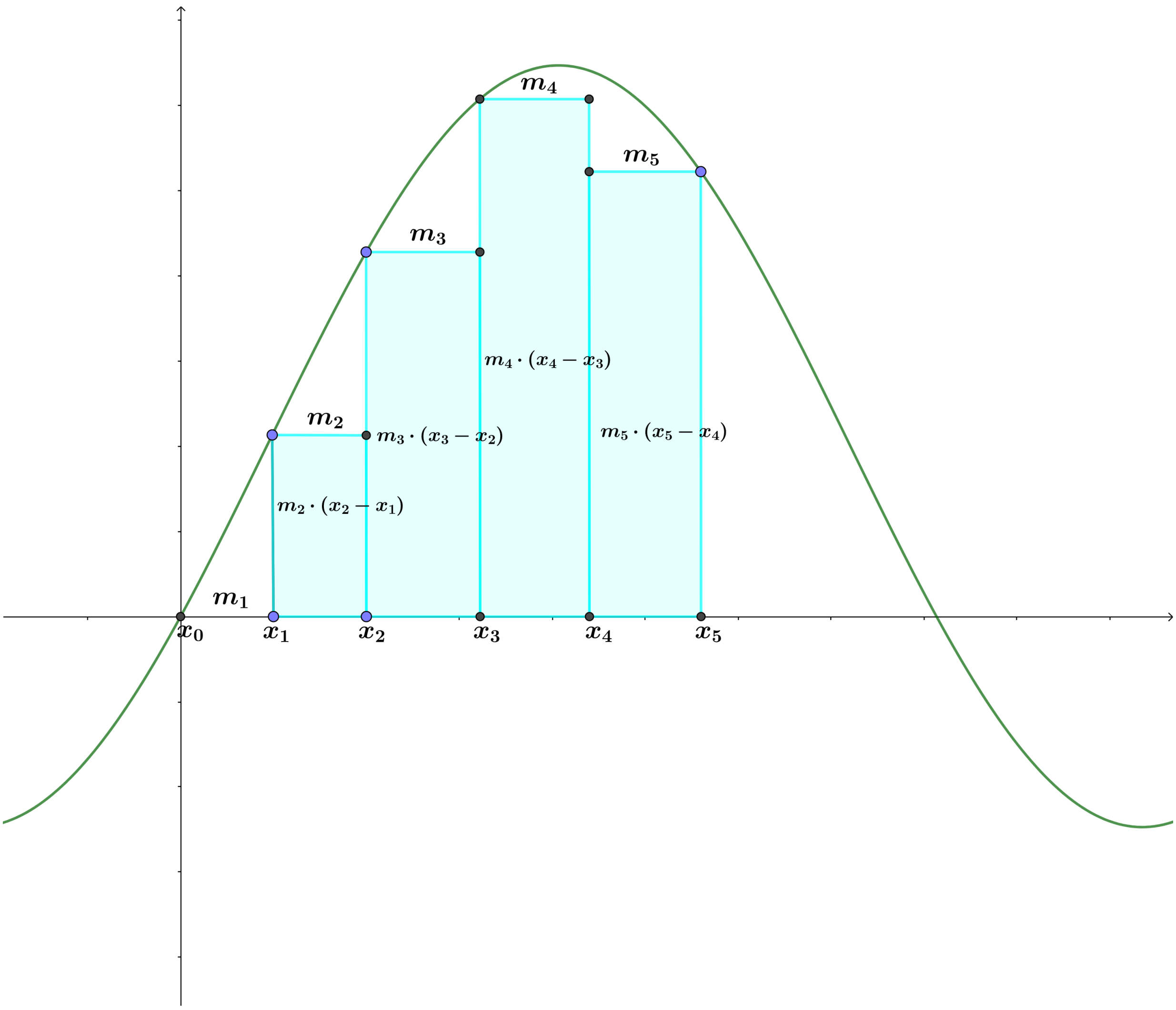
La **suma superior** correspondiente a la partición P a la función f se define como:

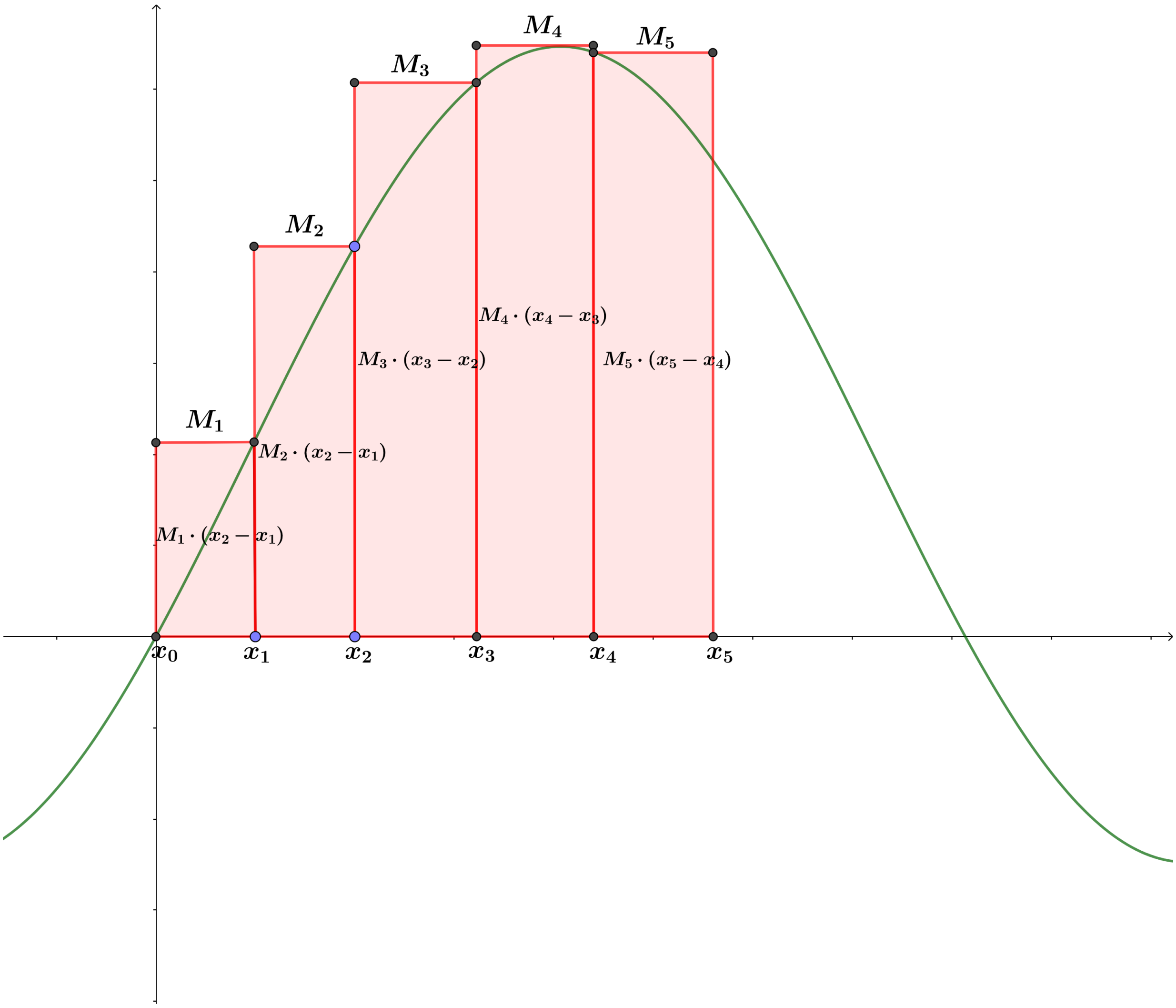
$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Observación. El nombre de L en la notación de **suma inferior** viene del inglés “lower” y el nombre de U en la **suma superior**, de “upper”.

En las dos figuras siguientes se puede ver un ejemplo de una partición de 6 puntos indicando los infimos m_i y los supremos M_i de la función representada en verde en cada subintervalo de la partición.

La suma de las áreas de los rectángulos en azul sería la suma inferior $L(f,P)$ correspondiente a la partición P de la función f y la suma de las áreas de los rectángulos en rojo, la suma superior $U(f,P)$ correspondiente a dicha partición P de la función f.





Ejemplo

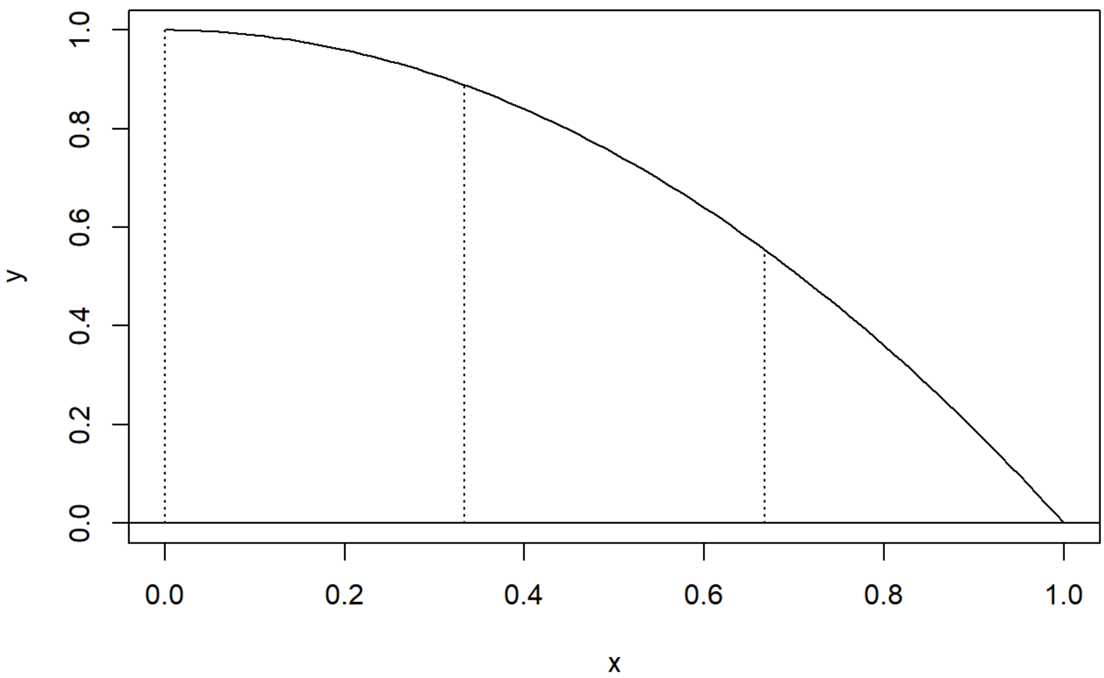
Consideremos la función $f(x) = 1 - x^2$ definida en el intervalo $[0, 1]$ y la partición vista anteriormente.

$$P = \left\{x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1\right\}$$

La suma inferior de f correspondiente a la partición P, $L(f, P)$ sería:

$$L(f,P) = \inf_{x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]} f(x) \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \inf_{x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} f(x) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \inf_{x\in\left[\frac{2}{3},1\right]} f(x) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

La función $f(x) = 1 - x^2$ es decreciente en el intervalo $[0, 1]$ tal como muestra su gráfica. Hemos indicado con rectas verticales discontinuas los valores de la partición considerada en el eje X.



Otra forma de ver que la función es decreciente es observar el signo de la derivada en el intervalo considerado $[0,1]$.

El valor de la derivada es $f'(x)=-2x$ y su valor será negativo para todo valor x en el intervalo $[0,1]$. Por tanto, recordemos que en este caso la función es decreciente.

Usando la observación anterior, podemos afirmar que, en general, el ínfimo de la función f en un subintervalo cualquiera $[x_{i-1},x_i]$ de la partición se alcanzará en el valor x_i.

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_i)$$

El valor de la suma inferior será, pues:

$$\begin{aligned} L(f,P) &= f\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot\tfrac{1}{3}+f\left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot\tfrac{1}{3}+f(1)\cdot\tfrac{1}{3}=\left(1-\tfrac{1}{9}\right)\cdot\tfrac{1}{3}+\left(1-\tfrac{4}{9}\right)\cdot\tfrac{1}{3}+(1-1)\cdot\tfrac{1}{3}\\ &=\tfrac{13}{27}\approx 0.4815\end{aligned}$$

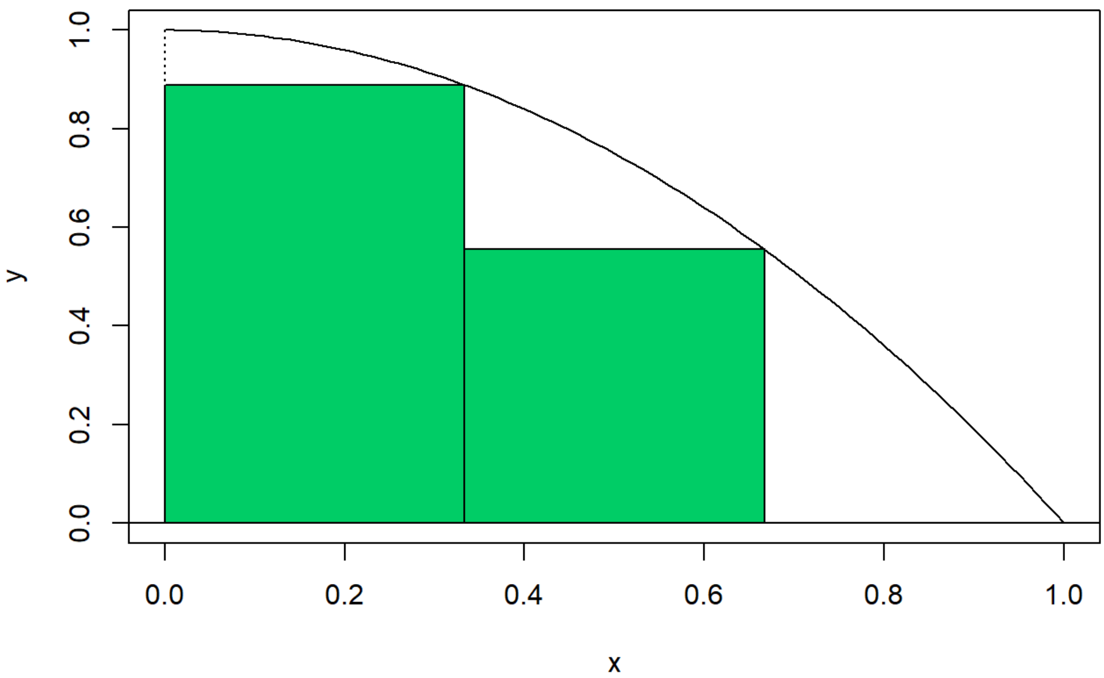
Razonando de manera similar, podemos afirmar que, en general, el supremo de la función f en un subintervalo cualquiera $[x_{i-1},x_i]$ de la partición se alcanzará en el valor x_{i-1}.

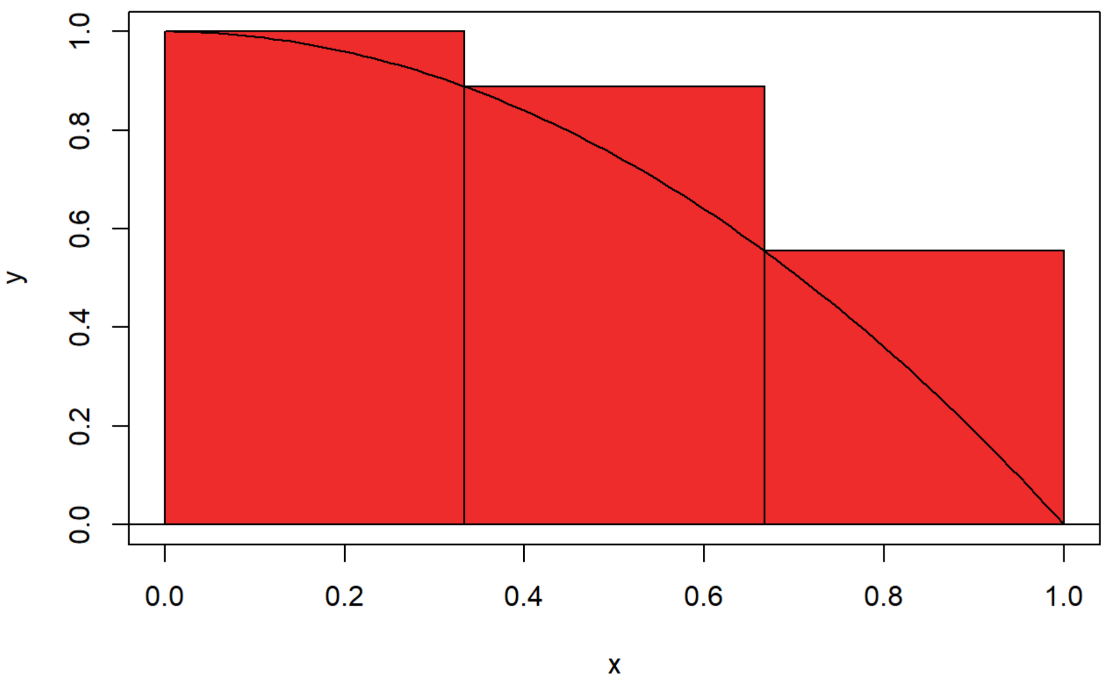
$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_{i-1})$$

El valor de la suma superior será, pues:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= f(0)\cdot\tfrac{1}{3}+f\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot\tfrac{1}{3}+f\left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot\tfrac{1}{3}=(1-0)\cdot\tfrac{1}{3}+\left(1-\tfrac{1}{9}\right)\cdot\tfrac{1}{3}+\left(1-\tfrac{4}{9}\right)\cdot\tfrac{1}{3}\\ &=\tfrac{22}{27}\approx 0.8148\end{aligned}$$

En las dos figuras siguientes, hemos dibujado en verde los rectángulos correspondientes a la suma inferior $L(f,P)$ y en rojo, los correspondientes a la suma superior $U(f,P)$. Los valores obtenidos anteriormente serían, pues, la suma de las áreas de los rectángulos en verde para $L(f,P)$ y la suma de las áreas de los rectángulos en rojo para $U(f,P)$.





El cálculo de la suma inferior y superior en `python` es el siguiente:

```
import numpy as np
def f(x):
 return(1-x**2)

x = np.linspace(0,1,num=4);
suma_inferior = 0;
suma_superior = 0;
for i in range(1,len(x)):
  suma_inferior = suma_inferior+f(x[i])*(x[i]-x[i-1]);
  suma_superior = suma_superior+f(x[i-1])*(x[i]-x[i-1]);
```

```
print('Suma inferior={res}'.format(x=x, res=suma_inferior))
```

```
## Suma inferior=0.48148148148148145
```

```
print('Suma superior={res}'.format(x=x, res=suma_superior))
```

```
## Suma superior=0.8148148148148148
```

Ejercicio. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$.

Sea $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$ el ínfimo de la función f en el intervalo considerado $[a,b]$ y M, el supremo: $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$. Demostrar que se verifican las desigualdades siguientes:

$$m\cdot(b-a)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq M\cdot(b-a)$$

Indicación: pensad que $m_i\geq m$ y $M_i\leq M$, para todo subintervalo de la partición P.

Proposición.

El resultado siguiente nos dice cómo se comportan las **sumas inferiores y superiores** a medida que hacemos más **finas** las particiones del intervalo en cuestión.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada. Sean P y P' dos particiones del intervalo $[a,b]$. Entonces:

- Si la partición P' es más fina que la partición P, se verifica:

$$L(f,P')\geq L(f,P),\quad U(f,P')\leq U(f,P)$$

- Siempre se verifica que:

$$L(f,P)\leq U(f,P')$$

Observación. La proposición anterior nos dice que a medida que las **particiones** se hacen más **finas**, las **sumas inferiores van creciendo** y las **sumas superiores van disminuyendo.**

O, dicho en otros términos, cuánto más **fina** es la partición, el **área por defecto** de la función f va **creciendo** y el **área por exceso** va **disminuyendo.**

La segunda parte nos dice que cualquier suma superior de cualquier partición siempre supera cualquier suma inferior de otra partición cualquiera. Es decir, cualquier área por exceso siempre supera cualquier área por defecto.

Demostración (Contenido bastante técnico)

Demostremos en primer lugar que $L(f,P')\geq L(f,P)$.

Sea $P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n\}$ la partición P. Como la partición P' es más fina que la partición P, cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de P contendrá puntos de la partición de P'. Llamaremos $x_{i-1}=x_{i,0}<x_{i,1}<\cdots<x_{i,n_i}=x_i$ a los puntos de la partición P' incluidos en el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$. Notar que hemos llamado $x_{i,0}=x_{i-1}$ al extremo de la izquierda y $x_{i,n_i}=x_i$ al extremo de la derecha del subintervalo $[x_{i-1},x_i]$.

Sea m_{ij} el ínfimo de la función f en el subintervalo $[x_{i,j-1}, x_{i,j}]$: $m_{ij} = \inf_{x\in[x_{i,j-1},x_{i,j}]} f(x)$, y m_i, al ínfimo de la función f en el subintervalo grande $[x_{i-1}, x_i]$: $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Usando la notación anterior, podemos escribir la suma inferior de f respecto las particiones P' y P de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} L(f,P') &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\cdot(x_{i,j}-x_{i,j-1}), \\ L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot(x_i-x_{i-1}) \end{aligned}$$

De cara a realizar la resta de las dos sumas inferiores anteriores, necesitamos escribir la suma inferior $L(f,P)$ como la suma doble que aparece en la suma inferior $L(f,P')$. Para ello, notemos lo siguiente:

$$x_i - x_{i-1} = x_{i,n_i} - x_{i,0} = x_{i,n_i} - x_{i,n_i-1} + x_{i,n_i-1} + \cdots - x_{i,1} + x_{i,1} - x_{i,0}$$

Es decir, vamos sumando y restando los valores de la partición P' que están en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ distintos de los extremos x_{i-1} y x_i.

De esta manera obtenemos la expresión siguiente:

$$x_i - x_{i-1} = \sum_{j=1}^{n_i}(x_{i,j} - x_{i,j-1})$$

La expresión anterior nos permite escribir la suma inferior de f respecto la partición P en términos de la suma doble que aparece en la expresión de la suma inferior de f respecto la partición más fina P' permitiendo obtener $L(f,P') - L(f,P)$ de forma relativamente sencilla.

$$\begin{aligned} L(f,P') &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\cdot(x_{i,j}-x_{i,j-1}), \\ L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} m_i\cdot(x_{i,j}-x_{i,j-1}) \end{aligned}$$

Usando las expresiones anteriores, la expresión de $L(f,P') - L(f,P)$ será:

$$L(f,P') - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(m_{ij} - m_i)\cdot(x_{i,j} - x_{i,j-1})$$

El objetivo es demostrar que $L(f,P') - L(f,P) \geq 0$, o que $L(f,P') \geq L(f,P)$. Para ello, basta observar que los sumandos que aparecen en la suma doble de la expresión anterior son positivos ya que en primer lugar, $x_{i,j} - x_{i,j-1} \geq 0$ y $m_{ij} - m_i \geq 0$, o $m_{i,j} \geq m_i$ ya que $m_{i,j}$ es el ínfimo de la función f en el subintervalo $[x_{i,j-1}, x_{i,j}]$ y m_i, el ínfimo de la función f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Como el subintervalo $[x_{i,j-1}, x_{i,j}]$ está incluído en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el valor de su ínfimo será mayor al ser el primer subintervalo "más pequeño que el segundo".

Queda visto por tanto que $L(f,P') \geq L(f,P)$.

Para demostrar que $U(f,P') \leq U(f,P)$, escribamos dichas sumas de la forma siguiente siguiendo un razonamiento similar al realizado anteriormente:

$$\begin{aligned} U(f,P') &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} M_{ij}\cdot(x_{i,j}-x_{i,j-1}), \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} M_i\cdot(x_{i,j}-x_{i,j-1}) \end{aligned}$$

Donde M_{ij} es el supremo de la función f en el subintervalo $[x_{i,j-1}, x_{i,j}]$: $M_{ij} = \sup_{x\in[x_{i,j-1},x_{i,j}]} f(x)$, y M_i, el supremo de la función f en el subintervalo grande $[x_{i-1}, x_i]$: $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

La expresión de $U(f,P')-U(f,P)$ será:

$$U(f,P')-U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(M_{ij}-M_i)\cdot(x_{i,j}-x_{i,j-1})$$

El objetivo es demostrar que $U(f,P')-U(f,P)\leq 0$, o que $U(f,P')\leq U(f,P)$. Para ello, basta observar que los sumandos que aparecen en la suma doble de la expresión anterior son negativos ya que en primer lugar, $x_{i,j}-x_{i,j-1}\geq 0$ y $M_{ij}-M_i\leq 0$, o $M_{i,j}\leq M_i$ ya que $M_{i,j}$ es el supremo de la función f en el subintervalo $[x_{i,j-1},x_{i,j}]$ y M_i, el supremo de la función f en el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$.

Como el subintervalo $[x_{i,j-1},x_{i,j}]$ está incluído en el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, el valor de su supremo será menor al ser el primer subintervalo "más pequeño que el segundo".

Queda visto por tanto que $U(f,P')\leq U(f,P)$.

Falta demostrar que $L(f,P)\leq U(f,P')$.

$$L(f,P)\leq L(f,P')\leq U(f,P')$$

La primera desigualdad es consecuencia de la primera parte de esta demostración, la segunda desigualdad, consecuencia del hecho de que cualquier suma inferior siempre es menor que cualquier suma superior.

Ejemplo

Consideremos la función $f(x)=1-x^2$ definida en el intervalo $[0,1]$ y las particines siguientes donde P', como puede observarse, es más fina que P.

$$\begin{aligned} P &= \left\{x_0=0<x_1=\tfrac{1}{3}<x_2=\tfrac{2}{3}<x_3=1\right\}, \\ P' &= \left\{x_{0,0}=0<x_{0,1}=\tfrac{1}{6}<x_{1,0}=\tfrac{1}{3}<x_{1,1}=\tfrac{1}{2}<x_{1,2}=\tfrac{7}{12}<x_{2,0}=\tfrac{2}{3}<x_{2,1}=\tfrac{5}{6}<x_{3,0}=1\right\} \end{aligned}$$

Comprobemos en `python` que $L(f,P')\geq L(f,P)$ y $U(f,P')\leq U(f,P)$:

```
def f(x):
 return(1-x**2)

P = [0.,1./3.,2./3.,1.];
P2 = [0.,1./6.,1./3.,1./2.,7./12.,2./3.,5./6.,1.]
suma_inferior_P = 0;
suma_inferior_P2 = 0;
suma_superior_P = 0;
suma_superior_P2 = 0;

for i in range(1,len(P)):
  suma_inferior_P = suma_inferior_P+f(P[i])*(P[i]-P[i-1]);
  suma_superior_P = suma_superior_P+f(P[i-1])*(P[i]-P[i-1]);

for i in range(1,len(P2)):
  suma_inferior_P2 = suma_inferior_P2+f(P2[i])*(P2[i]-P2[i-1]);
  suma_superior_P2 = suma_superior_P2+f(P2[i-1])*(P2[i]-P2[i-1]);
```

```
print('Suma inferior={res}'.format(x=x, res=suma_inferior_P))
```

```
## Suma inferior=0.48148148148148145
```

```
print('Suma inferior particion mas fina={res}'.format(x=x, res=suma_inferior_P2))
```

```
## Suma inferior particion mas fina=0.5873842592592592
```

```
print('Suma superior={res}'.format(x=x, res=suma_superior_P))
```

```
## Suma superior=0.8148148148148148
```

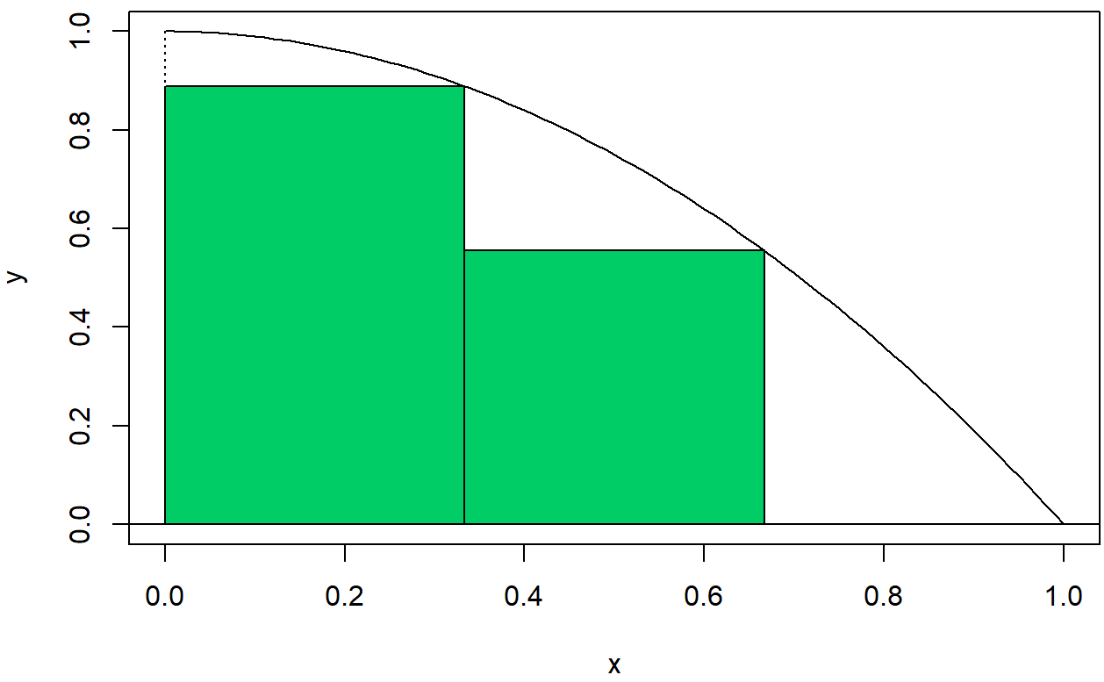
```
print('Suma superior particion mas fina={res}'.format(x=x, res=suma_superior_P2))
```

```
## Suma superior particion mas fina=0.7378472222222222
```

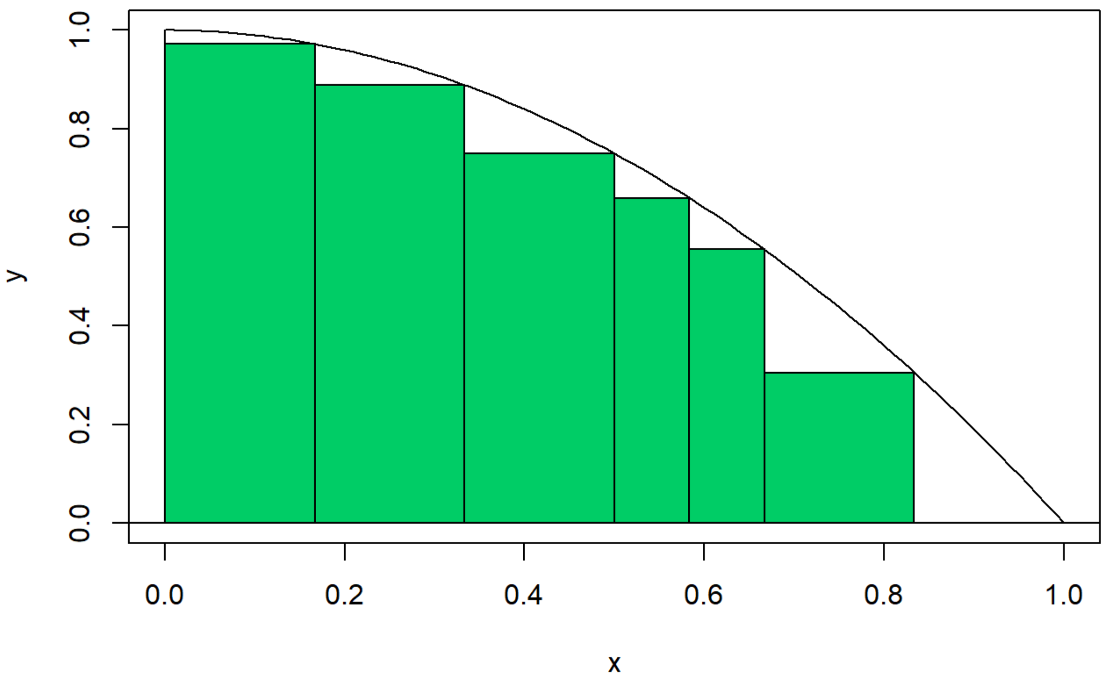
Por último mostramos gráficamente las dos particiones junto con las sumas inferiores y superiores.

Los dos gráficos siguientes corresponden a las sumas inferiores de las dos particiones consideradas empezando con la menos fina y mostrando a continuación la más fina y en los dos gráficos siguientes hacemos lo mismo pero con las sumas superiores.

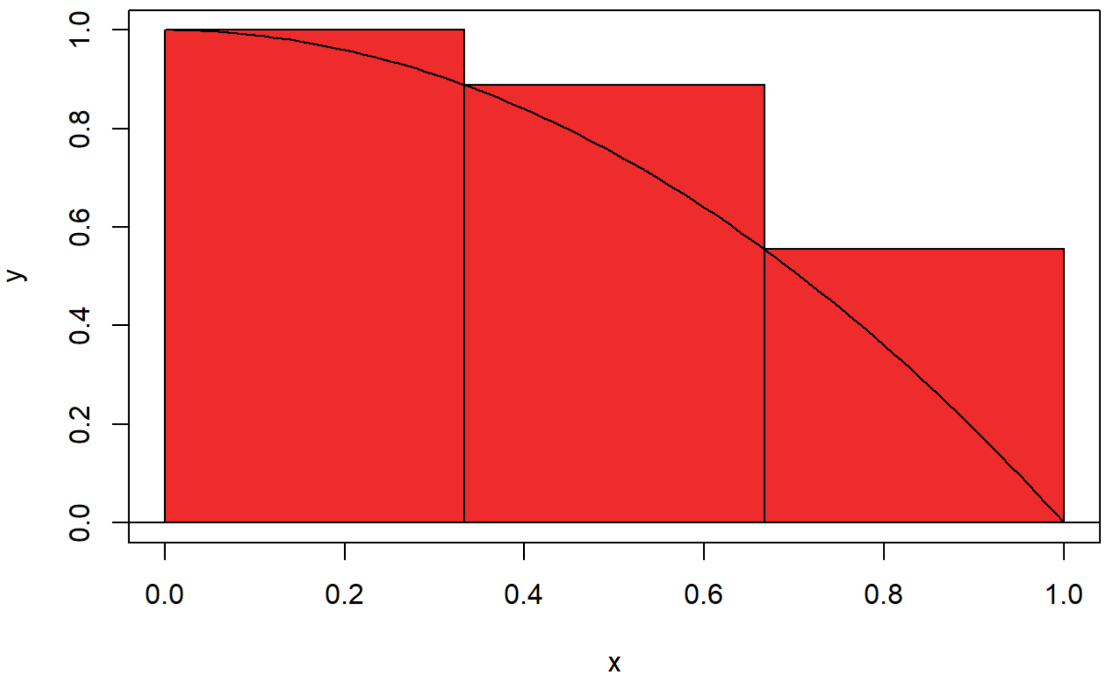
```
x=seq(from=0,to=1,by=0.01)
f=function(x){1-x^2}
plot(x,f(x),type="l",xlab="x",ylab="y")
abline(h=0)
lines(c(0,0),c(0,f(0)),lty=3)
lines(c(1/3,1/3),c(0,f(1/3)),lty=3)
lines(c(2/3,2/3),c(0,f(2/3)),lty=3)
rect(0,0,1/3,f(1/3),col="springgreen3")
rect(1/3,0,2/3,f(2/3),col="springgreen3")
```



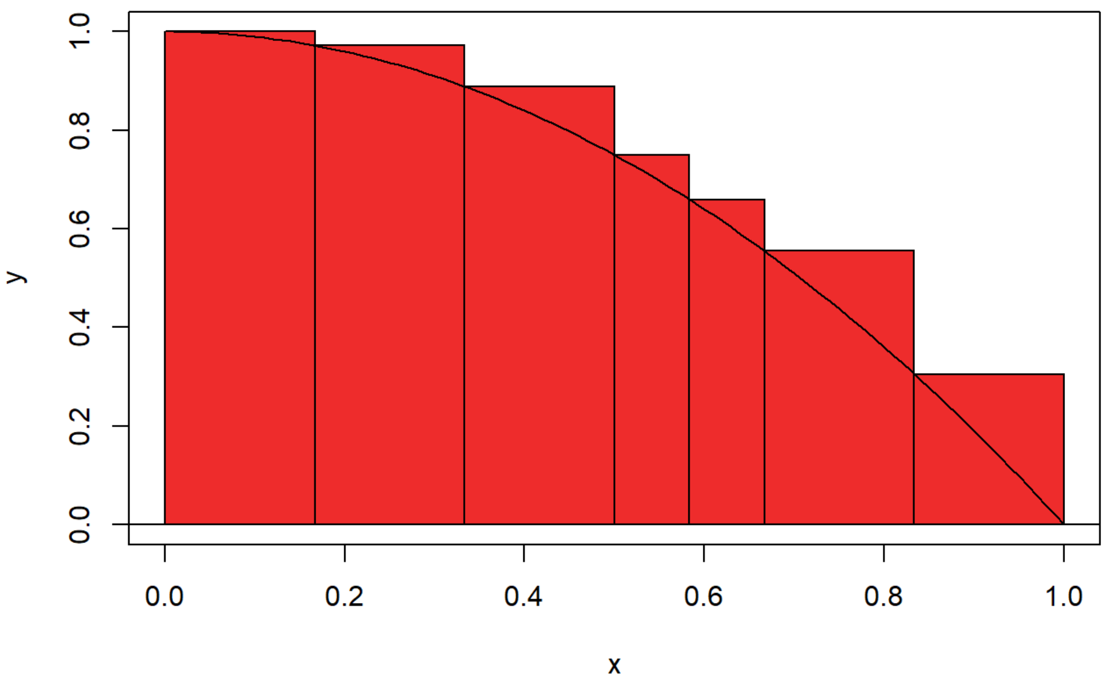

```
x=seq(from=0,to=1,by=0.01)
plot(x,f(x),type="l",xlab="x",ylab="y")
abline(h=0)
particio = c(0,1/6,1/3,1/2,7/12,2/3,5/6,1)
for (i in 1:length(particio)){
  lines(c(particio[i],particio[i]),c(0,f(particio[i])))
}
for (i in 1:(length(particio)-1)){
  rect(particio[i],0,particio[i+1],f(particio[i+1]),col="springgreen3")
}
```




```
x=seq(from=0,to=1,by=0.01)
f=function(x){1-x^2}
plot(x,f(x),type="l",xlab="x",ylab="y")
abline(h=0)
lines(c(0,0),c(0,f(0)),lty=3)
lines(c(1/3,1/3),c(0,f(1/3)),lty=3)
lines(c(2/3,2/3),c(0,f(2/3)),lty=3)
rect(0,0,1/3,f(0),col='firebrick2')
rect(1/3,0,2/3,f(1/3),col='firebrick2')
rect(2/3,0,1,f(2/3),col='firebrick2')
lines(x,f(x))
```




```
x=seq(from=0,to=1,by=0.01)
plot(x,f(x),type="l",xlab="x",ylab="y")
abline(h=0)
particio = c(0,1/6,1/3,1/2,7/12,2/3,5/6,1)
for (i in 1:(length(particio)-1)){
  rect(particio[i],0,particio[i+1],f(particio[i]),col='firebrick2')
}
lines(x,f(x))
```



2.3. **Integral superior e inferior**

Dada una función acotada f, usando la proposición anterior, a medida que hagamos **más finas** las particiones del intervalo de definición de dicha función, las **sumas inferiores** irán **aumentando** y las **sumas superiores** irán **disminuyendo**.

Como cualquier **suma inferior** está acotada **superiormente** por una **suma superior** cualquiera, existirá el **supremo** de dichas **sumas inferiores** para todas las particiones del intervalo.

De la misma manera, como cualquier **suma superior** está acotada **inferiormente** por una **suma inferior** cualquiera, existirá el **ínfimo** de dichas **sumas superiores** para todas las particiones del intervalo.

A dicho **supremo** y a dicho **ínfimo** se le conoce como **integral inferior** y **superior** de la función f, respectivamente.

Definición de integral superior e inferior. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos **integral inferior** e **integral superior** de la función f al **supremo** y al **ínfimo** de las **sumas inferiores** e **superiores** respectivamente para todas las particiones del intervalo.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_P L(f, P), \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_P U(f, P)$$

Observación. Dada una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$ se verifica siempre:

$$L(f, P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f, P)$$

La primera desigualdad es consecuencia de que un elemento (suma inferior de f respecto de una partición P) siempre es menor que el supremo del conjunto (supremo de las sumas inferiores de f respecto de las particiones).

La segunda desigualdad es consecuencia de que siempre cualquier suma inferior respecto de una partición P es menor que cualquier suma superior respecto de cualquier partición P' no necesariamente la misma que P (ver proposición anterior): $L(f, P) \leq U(f, P')$. Si consideramos ínfimos en la parte derecha de la desigualdad anterior, tendremos:

$$L(f, P) \leq \inf_{P'} U(f, P') = \overline{\int_a^b} f$$

Y ahora, como $\overline{\int_a^b} f$ es un valor fijo, si consideramos supremos en la parte izquierda de la desigualdad anterior, tenemos:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_P L(f, P) \leq \overline{\int_a^b} f$$

Tal como queríamos ver.

Por último, la tercera desigualdad es consecuencia de que el ínfimo de un conjunto de elementos (sumas superiores respecto de particiones) siempre es menor que cualquiera de sus elementos (suma superior respecto de la partición P).

La proposición siguiente nos dice que siempre es posible hallar una partición P, tan **fina** como sea posible, tal que la **integral superior** e **inferior** de f se puede aproximar tanto como se quiera a la **suma superior** e **inferior** de f respecto la partición P.

Proposición.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, para todo valor $\epsilon > 0$, siempre es posible hallar un valor $\delta > 0$ tal que si P es una partición del intervalo $[a, b]$ con diámetro menor que δ, $|P| < \delta$, entonces:

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f - L(f, P) < \epsilon, \quad 0 \leq U(f, P) - \overline{\int_a^b} f < \epsilon$$

Observación. La proposición anterior es equivalente a la siguiente. Si $\{P_n\}_n$ es una sucesión de particiones con diámetros tendiendo a cero, $\lim\limits_{n\to\infty} |P_n| = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \underline{\int_a^b} f, \quad \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \overline{\int_a^b} f$$

2.4. **Funciones integrables**

En estos momentos ya estamos en condiciones de definir cuándo una función acotada cualquiera será **integrable**.

La idea es que la **integral superior** e **inferior** de la misma deben coincidir.

Es decir, los límites de las **sumas superiores** e **inferiores** cuando las particiones se hacen más y más finas deben ser las mismas.

Definición de función integrable.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que dicha función es **integrable** si su **integral inferior** y **superior coinciden** y en este caso, llamaremos **integral de f en el intervalo** $[a,b]$ al valor de dichas integrales.

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

La integral también se indica por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

A continuación vamos a dar condiciones y criterios para verificar si una determinada función es o no **integrable**.

La proposición siguiente nos dice que afirmar que una función es **integrable** es equivalente a decir que podemos encontrar un **partición** del intervalo correspondiente tal que la diferencia entre la **sumas inferior** y la **superior** de dicha **partición** se puede hacer tan pequeña como se quiera.

Proposición: condición necesaria y suficiente de integrabilidad. Criterio de Riemann

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable si, y sólo si se verifica la condición siguiente: para todo valor positivo $\epsilon>0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$.

Demostración (Contenido bastante técnico)

La demostración de la proposición anterior se basa en la proposición vista sobre integrales superiores e inferiores.

Veamos primero la implicación directa.

$\Rightarrow$: supongamos que f es integrable. Entonces, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Consideremos un valor $\epsilon>0$. Sabemos que existe un valor $\delta>0$ tal que si P es una partición del intervalo $[a,b]$ con diámetro menor que δ, $|P|<\delta$, se tiene:

$$0\leq \underline{\int_a^b} f - L(f,P) < \frac{\epsilon}{2}, \quad 0\leq U(f,P) - \overline{\int_a^b} f < \frac{\epsilon}{2}$$

Por tanto:

$$0 < U(f,P)-L(f,P) = U(f,P) - \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} f - L(f,P) < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Tal como queríamos ver.

Demostremos ahora la implicación inversa.

$\Leftarrow$: sabemos que dado cualquier $\epsilon>0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$.

Ahora bien, recordemos que:

$$L(f,P)\leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P)$$

Por tanto, usando la condición anterior tenemos que $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon$.

Como la condición es para todo $\epsilon > 0$, necesariamente ha de cumplirse que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, condición que equivale a decir que f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Proposición: condición necesaria y suficiente de integrabilidad.

La condición anterior es difícil de aplicar en la práctica y en su lugar se usa la proposición equivalente siguiente.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\{P_n\}_n$ una sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$, es decir, los diámetros tienden a cero. Entonces f es integrable si, y sólo si $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$ y, en este caso:

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n).$$

Dicha proposición nos dice que para verificar que una función f sea **integrable** en un intervalo $[a, b]$, basta hallar una sucesión de particiones $(P_n)_n$ con diámetros cada vez más pequeños y tendiendo a cero tal que el límite de las **sumas superiores** e **inferiores** tienden hacia el mismo límite siendo dicho límite el valor de la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Demostración (Contenido bastante técnico)

Demostremos primero la implicación directa.

$\Rightarrow$: Supongamos que f es integrable. Entonces, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Usando la proposición anterior, sabemos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una partición P, tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ un valor natural y $\epsilon = \frac{1}{n}$. Entonces existe una partición P_n tal que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n}$. A continuación, consideremos la partición:

$$\hat{P}_n = P_n \cup \{x_0 = a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} < \cdots < b = x_n\}$$

Fijarse que se cumple, por un lado que el diámetro de $\hat{P}_n$ es menor o igual que $\frac{1}{n}$, $|\hat{P}_n| \leq \frac{1}{n}$ y, por otro:

$$0 \leq U(f, \hat{P}_n) - L(f, \hat{P}_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n}$$

Ya que la partición $\hat{P}_n$ es más fina que P_n.

A partir de la condición anterior, haciendo tender $n \to \infty$, tenemos que $I = \lim_{n\to\infty} U(f, \hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, \hat{P}_n)$, tal como queríamos ver. Es decir, existe una sucesión de particiones $\{\hat{P}_n\}_n$ con $\lim_{n\to\infty} |\hat{P}_n| = 0$ tal que $I = \lim_{n\to\infty} U(f, \hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, \hat{P}_n)$.

El valor de I anterior sería el valor de la integral de f en el intervalo $[a, b]$ ya que:

- por un lado, se verifica que: $\overline{\int_a^b} f \leq U(f, \hat{P}_n)$ para todo valor de n. Si pasamos a límite tendremos que $\overline{\int_a^b} f \leq I$;
- por otro lado, tenemos que $\underline{\int_a^b} f \geq L(f, \hat{P}_n)$ para todo valor de n. Si pasamos a límite tendremos que $\underline{\int_a^b} f \geq I$.

En resumen: $I \leq \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \leq I$, lo que implica que $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$.

Hagamos la demostración de la implicación inversa.

$\Leftarrow$: Supongamos que existe una partición $\{P_n\}_n$ con $\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$ tal que $I = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$.

Como $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0$, entonces para todo valor $\epsilon > 0$, existe un valor n_0 tal que si $n \geq n_0$, $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$.

Es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P (cualquier partición P_n con $n \geq n_0$) tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Usando la primera proposición vista que nos da una condición necesaria y suficiente de integrabilidad, tenemos que f será integrable en el intervalo $[a, b]$, tal como queríamos ver.

Ejemplo

Sea $k \geq 1$ un natural cualquiera mayor que 1. Veamos que la función $f(x) = x^k$ es integrable en el intervalo $[0, 1]$.

Para ello, aplicaremos la proposición anterior y consideraremos la suceción de particiones siguiente:

$$P_n = \left\{x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{i}{n} < \cdots < x_n = 1\right\}$$

La partición anterior sería equiespaciada donde $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$. Por tanto el diámetro de P_n sería $|P_n| = \frac{1}{n}$ y se verificará que $\lim\limits_{n\to\infty} |P_n| = 0$.

Calculemos las sumas inferiores y superiores de f respecto las particiones P_n.

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^k \cdot \frac{1}{n}, \\ U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^k \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Como la función $f(x) = x^k$ es creciente en el intervalo $[0, 1]$ tendremos que:

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^k = x_{i-1}^k = \left(\frac{i-1}{n}\right)^k, \qquad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^k = x_i^k = \left(\frac{i}{n}\right)^k$$

Las sumas inferiores y superiores serán, por tanto son:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k, \\ U(f, P_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} i^k \end{aligned}$$

El valor de la diferencia entre las sumas superiores e inferiores será:

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{1}{n^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{n} i^k - \sum_{i=1}^{n}(i-1)^k\right) = \frac{n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}$$

Como el límite de la sucesión $\frac{1}{n}$ es cero, $\lim\limits_{n\to\infty} U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} L(f, P_n)$, condición que, como ya hemos visto, equivale a afirmar que $f(x) = x^k$ es integrable en el intervalo $[0, 1]$.

Usando la última proposición, sabemos que el valor de la integral de la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0, 1]$ vale:

$$\int_0^1 x^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} i^k$$

Los valores de la integral para $k \in \{1, \ldots, 25\}$ en `Wolfram Alpha` se muestran en el enlace siguiente:

(https://www.wolframalpha.com/input/?i=Table%5BLimit%5BSum%5Bi%5Ek%2C+%7Bi%2C+1%2C+n%7D%5D%2Fn%5E%28k+%2B+1%29%2C+n+-%3E+Infinity%5D%2C%7Bk%2C1%2C25%7D%5D)

Parece que el valor de la integral es $\frac{1}{k+1}$. Más adelante veremos que efectivamente así es.

El cálculo de la integral en `python` se realizaría de la forma siguiente:

```
from sympy import *
from sympy.abc import i, k, n

for k in range(1,10):
  valor=Limit(Sum(i**k, (i, 1, n)).doit()/n**(k+1),n,oo).doit();
  print('k={res}, valor integral={valor}'.format(res=k, valor=valor))
```

```
## k=1, valor integral=1/2
## k=2, valor integral=1/3
## k=3, valor integral=1/4
## k=4, valor integral=1/5
## k=5, valor integral=1/6
## k=6, valor integral=1/7
## k=7, valor integral=1/8
## k=8, valor integral=1/9
## k=9, valor integral=1/10
```

Ejemplo: la integral de una función constante.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función constante: para todo valor de $x\in[a,b]$, $f(x)=C$.

Veamos que siempre f es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$ y además $\displaystyle\int_a^b = C\cdot(b-a)$.

Para ello, consideremos la sucesión de particiones siguiente del intervalo $[a,b]$:

$$P_n=\left\{a=x_0<x_1=a+\frac{b-a}{n}<\cdots<x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}<\cdots<x_n=b\right\}$$

La sucesión de particiones anterior está formada por valores equiespaciados cuya diferencia entre dos valores consecutivos de P_n vale: $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$.

Calculemos a continuación $L(f,P_n)$ y $U(f,P_n)$:

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = C\cdot\sum_{i=1}^n \cdot(x_i-x_{i-1}) = C\cdot(b-a),\\ U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = C\cdot\sum_{i=1}^n \cdot(x_i-x_{i-1}) = C\cdot(b-a), \end{aligned}$$

Ya que $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} C=C$ y $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} C=C$

Como $U(f,P_n)=L(f,P_n)$, tenemos que $\displaystyle\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=C\cdot(b-a)$.

3. Propiedades de las integrales

3.1. **Introducción**

En esta sección vamos a estudiar un conjunto de propiedades relacionadas con la integrabilidad de funciones. Dichas propiedades *grosso modo* son las siguientes:

- Aditividad respecto del intervalo.
- Linealidad de la integral.
- Composición de una función continua con una función integrable es integrable.
- Producto y cociente de funciones integrables son también integrables.
- Monotonía y continuidad de funciones.
- Relación entre la monotonia y continuidad de funciones con integrabilidad.

- Montonía de la integral respecto de la función.
- Teorema de la media para integrales: ver cómo se puede escribir la integral de una función como el producto de la longitud del intervalo de integración por un cierto valor real. También generalizaremos dicho resultado.

3.2. **Aditividad respecto del intervalo**

Teorema. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada y sea $c\in(a,b)$ de tal forma que $a<c<b$. Entonces, f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y, en este caso:

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Observación: Una consecuencia del teorema anterior es que si f es integrable en todo el intervalo $[a,b]$, lo es en cualquier subintervalo.

Separación de una integral en un intervalo

Demostración (Contenido bastante técnico)

Empecemos con la implicación directa.

$\Rightarrow$ Como f es integrable en el intervalo $[a,b]$, para todo valor de $\epsilon>0$, existirá una partición P tal que $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$.

Consideremos la siguiente partición P' del intervalo $[a,b]$: $P'=P\cup\{c\}$. Como P' es más fina que P, se verificará:

$$U(f,P')-L(f,P')\leq U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$$

A continuación consideremos las particiones P_1 y P_2 siguientes de los subintervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente:

$$P_1=P'\cap[a,c],\quad P_2=P'\cap[c,b]$$

Fijémonos $U(f,P')=U(f,P_1)+U(f,P_2)$ y $L(f,P')=L(f,P_1)+L(f,P_2)$. Será:

$$U(f,P')-L(f,P')=(U(f,P_1)-L(f,P_1))+(U(f,P_2)-L(f,P_2))<\epsilon$$

Los valores $U(f,P_1)-L(f,P_1)$ y $U(f,P_2)-L(f,P_2)$ son valores positivos cuya suma es menor que ϵ. Por tanto:

$$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\epsilon,\quad U(f,P_2)-L(f,P_2)<\epsilon$$

En resumen, dado un $\epsilon>0$, hemos hallado una partición P_1 del intervalo $[a,c]$ y una partición P_2 del intervalo $[c,b]$ tal que se verifican las condiciones anteriores. Dicho resultado equivale a afirmar que la función f es integrable en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$.

A continuación, demostremos la implicación contraria.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que f es integrable en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. Sabemos que existen dos particiones $\{P_n\}_n$ y $\{Q_n\}_n$ de los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente, tales que sus diámetros tienden a cero, $\lim\limits_{n\to\infty}|P_n|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_n|=0$ y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\int_a^c f,\quad \lim_{n\to\infty}U(f,Q_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,Q_n)=\int_c^b f$$

Consideremos la sucesión siguiente de particiones dentro del intervalo grande $[a,b]$: $P_n'=P_n\cup Q_n$.

Dado que $U(f,P_n')=U(f,P_n)+U(f,Q_n)$ y $L(f,P_n')=L(f,P_n)+L(f,Q_n)$. Será:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}U(f,P_n') &= \lim_{n\to\infty}U(f,P_n)+\lim_{n\to\infty}U(f,Q_n)=\int_a^c f+\int_c^b f,\\ \lim_{n\to\infty}L(f,P_n') &= \lim_{n\to\infty}L(f,P_n)+\lim_{n\to\infty}L(f,Q_n)=\int_a^c f+\int_c^b f\end{aligned}$$

En resumen, hemos hallado una sucesión de particiones $\{P_n'\}_n$ del intervalo $[a,b]$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P'_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P'_n) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Observación. Dos consecuencias del teorema anterior son las siguientes:

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = -\int_a^b f$$

3.3. **Linealidad de la integral**

Teorema: Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$. Sean α y β dos valores reales. Entonces la función $\alpha f + \beta g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Observación. El teorema anterior es equivalente a afirmar lo siguiente:

a. Si $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y además: $\displaystyle\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$

b. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ y α un valor real, entonces αf es integrable en $[a, b]$ y además $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$

Demostración (Contenido bastante técnico)

Demostremos las dos propiedades de la observación.

Primero veamos la demostración para la suma de funciones.

Supongamos que $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables en $[a, b]$.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$. Se verifica lo siguiente:

$$U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P), \quad L(f + g, P) \geq L(f, P) + L(g, P)$$

Ya que si $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, se cumple:

$$\begin{aligned} U(f+g, P) &= \sum_{i=1}^n \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x) + g(x))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x))(x_i - x_{i-1}) \\ &= U(f, P) + U(g, P) \end{aligned}$$

En la última expresión hemos usado que $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)$, lo que equivale a decir que el supremo de la suma de dos funciones es menor o igual que la suma de supremos.

De la misma manera:

$$\begin{aligned} L(f+g, P) &= \sum_{i=1}^n \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x) + g(x))(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n (\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x))(x_i - x_{i-1}) \\ &= L(f, P) + L(g, P) \end{aligned}$$

En la última expresión hemos usado que $\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x) + g(x)) \geq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)$, lo que equivale a decir que el ínfimo de la suma de dos funciones es mayor o igual que la suma de ínfimos.

Como f y g son integrables en $[a, b]$, existirá una sucesión de particiones $\{P_n\}_n$ con diámetros tendiendo a cero, $\lim\limits_{n\to\infty} |P_n| = 0$, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\int_a^b f,\quad \lim_{n\to\infty} U(g,P_n)=\lim_{n\to\infty} L(g,P_n)=\int_a^b g$$

Entonces, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U(f+g,P_n) &\le \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)+\lim_{n\to\infty} U(g,P_n)=\int_a^b f+\int_a^b g=\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)+\lim_{n\to\infty} L(g,P_n)\\ &\le \lim_{n\to\infty} L(f+g,P_n)\le \lim_{n\to\infty} U(f+g,P_n)\end{aligned}$$

Como en las desigualdades anteriores llegamos al mismo valor inicial, concluimos que las desigualdades son, de hecho, igualdades y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} U(f+g,P_n)=\lim_{n\to\infty} L(f+g,P_n)=\int_a^b f+\int_a^b g$$

En resumen, hemos hallado una sucesión de particiones $\{P_n\}_n$ con diámetros tendiendo a cero, $\lim\limits_{n\to\infty}|P_n|=0$ tal que se verifica las condiciones de la expresión anterior, condición que equivale a afirmar que $f+g$ es integrable en $[a,b]$ y además:

$$\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$$

En segundo lugar, veamos la demostración de la segunda parte referida a la integral de una función por un número real.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$ y α un valor real no nulo. (si $\alpha=0$, la condición a demostrar es trivial)

Consideremos dos casos: $\alpha>0$ y $\alpha<0$.

- Supongamos $\alpha>0$. Sea P una partición del intervalo $[a,b]$. Se verifica:

$$\begin{aligned}U(\alpha f,P) &=\sum_{i=1}^n \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))(x_i-x_{i-1})=\alpha\sum_{i=1}^n \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1})=\alpha U(f,P),\\ L(\alpha f,P) &=\sum_{i=1}^n \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))(x_i-x_{i-1})=\alpha\sum_{i=1}^n \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1})=\alpha L(f,P)\end{aligned}$$

En la última expresión hemos usado que $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))=\alpha\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ y $\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))=\alpha\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ ya que recordemos que $\alpha>0$.

Como f es integrable en $[a,b]$ existirá una sucesión de particiones $\{P_n\}_n$ con diámetros tendiendo a cero, $\lim\limits_{n\to\infty}|P_n|=0$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\int_a^b f$$

Usando las propiedades de las sumas inferiores y superiores de la función αf, podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} U(\alpha f,P_n)=\alpha\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\alpha\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} L(\alpha f,P_n)=\alpha\int_a^b f$$

La expresión anterior equivale a decir que la función αf es integrable en $[a,b]$ y, además: $\displaystyle\int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f$.

- Supongamos $\alpha<0$. Sea P una partición del intervalo $[a,b]$. Se verifica:

$$\begin{aligned}U(\alpha f,P) &=\sum_{i=1}^n \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))(x_i-x_{i-1})=\alpha\sum_{i=1}^n \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1})=\alpha L(f,P),\\ L(\alpha f,P) &=\sum_{i=1}^n \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))(x_i-x_{i-1})=\alpha\sum_{i=1}^n \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1})=\alpha U(f,P)\end{aligned}$$

En la última expresión hemos usado que $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))=\alpha\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ y $\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(\alpha f(x))=\alpha\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ ya que recordemos que $\alpha<0$.

Como f es integrable en $[a,b]$ existirá una sucesión de particiones $\{P_n\}_n$ con diámetros tendiendo a cero, $\lim\limits_{n\to\infty}|P_n|=0$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\int_a^b f$$

Usando las propiedades de las sumas inferiores y superiores de la función αf, podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty}U(\alpha f,P_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(\alpha f,P_n)=\alpha\int_a^b f$$

La expresión anterior equivale a decir que la función αf es integrable en $[a,b]$ y, además: $\displaystyle\int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f$.

3.4. **Composición de función continua con integrable**

Teorema: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo $[a,b]$ y $\phi:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función **continua** en el intervalo $[c,d]$ tal que $f([a,b])\subset[c,d]$. Entonces la función **composición** $\phi\circ f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $\phi\circ f(x)=\phi(f(x))$ es también integrable en el intervalo $[a,b]$.

Demostración (Contenido muy técnico)

Para ver que la función composición $\phi\circ f$ es integrable, bastará demostrar que para todo $\epsilon>0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P)<\epsilon$.

Notemos primero que como la función ϕ es continua en un intervalo cerrado, también será uniformemente continua y también acotada en el intervalo de definición $[c,d]$. Sea K una cota superior de la misma, es decir, para todo $x\in[c,d]$ se verifica que $|\phi(x)|\leq K$.

Consideremos un $\epsilon>0$ arbitrario. Sea $\epsilon'=\frac{\epsilon}{b-a+2K}$. Para este $\epsilon'>0$, al ser la función ϕ uniformemente continua en $[c,d]$, existirá un valor $\delta>0$ que podemos suponer $\delta<\epsilon'$ (si no lo fuera, consideraríamos como nuevo δ el valor $\min\{\delta,\epsilon'\}$ y ya lo cumpliría) tal que dados $x,y\in[c,d]$, si $|x-y|<\delta$, entonces $|\phi(x)-\phi(y)|<\epsilon'$.

Sea ahora el valor $\delta^2>0$. Como f es integrable en el intervalo $[a,b]$, existirá una partición $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ tal que $U(f,P)-L(f,P)<\delta^2$.

Separemos el conjunto de índices $\{1,\ldots,n\}$ en los dos subconjuntos siguientes:

$$A=\{i,\mid M_i(f)-m_i(f)<\delta\},\quad A^c=\{i,\mid M_i(f)-m_i(f)\geq\delta\}$$

Donde recordemos que $M_i(f)=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$ y $m_i(f)=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$.

Observemos que:

$$\begin{aligned}M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f)&=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\phi\circ f(x)-\inf_{y\in[x_{i-1},x_i]}\phi\circ f(y)=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\phi\circ f(x)+\sup_{y\in[x_{i-1},x_i]}(-\phi\circ f(y))\\&=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}(\phi\circ f(x)-\phi\circ f(y))\end{aligned}$$

Ya que en general $-\inf S=\sup -S$, es decir, hallar el ínfimo de un conjunto cualquiera S y cambiarle el signo es equivalente a hallar el supremo del conjunto $-S$ formado por los elementos del conjunto inicial cambiados de signo.

Ahora bien, si $i\in A$ y $x,y\in[x_{i-1},x_i]$, entonces $|f(x)-f(y)|\leq M_i(f)-m_i(f)<\delta$ y por tanto, usando la condición de continuidad uniforme de ϕ, deducimos que $|\phi\circ f(x)-\phi\circ f(y)|<\epsilon'$. Deducimos, por tanto, que si $i\in A$, entonces $M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f)=\sup\limits_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}(\phi\circ f(x)-\phi\circ f(y))\leq\epsilon'$.

En este caso, concluimos que:

$$\sum_{i\in A}(M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f))(x_i-x_{i-1})\leq\epsilon'\sum_{i\in A}(x_i-x_{i-1})\leq\epsilon'(b-a)$$

Por otra parte, si $i\in A^c$, sólo podemos asegurar que $M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f)\leq 2K$, por tanto:

$$\sum_{i\in A^c}(M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f))(x_i-x_{i-1})\leq 2K\sum_{i\in A^c}(x_i-x_{i-1})$$

Pero recordemos que si $i\in A^c$, $\delta\leq M_i(f)-m_i(f)$, de manera que:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A^c}(x_i-x_{i-1}) &\leq \frac{1}{\delta}\sum_{i\in A^c}(M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1})\leq \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1})\\ &=\frac{1}{\delta}(U(f,P)-L(f,P))<\frac{1}{\delta}\cdot\delta^2=\delta<\epsilon'\end{aligned}$$

Combinando las dos últimas expresiones, deducimos que:

$$\sum_{i\in A^c}(M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f))(x_i-x_{i-1})\leq 2K\epsilon'$$

Al fin, veamos como acotar la expresión $U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P)$.

$$\begin{aligned}U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P) &=\sum_{i=1}^{n}(M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f))(x_i-x_{i-1})\\ &=\sum_{i\in A}(M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f))(x_i-x_{i-1})+\sum_{i\in A^c}(M_i(\phi\circ f)-m_i(\phi\circ f))(x_i-x_{i-1})\\ &<\epsilon'(b-a)+2K\epsilon'=\epsilon\end{aligned}$$

Resumamos lo que hemos realizado: dado un valor cualquiera $\epsilon>0$, hemos sido capaces de hallar una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que:

$$U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P)<\epsilon$$

Condición que equivale a afirmar que la función $\phi\circ f$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ tal como queríamos demostrar.

Ejemplo

Consideremos las funciones $g(x)=\sin(x^3+x^2+x)$ y $h(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ definidas en el intervalo $[0,1]$.

En un ejemplo anterior vimos que las funciones del tipo x^k, con $k\geq 1$ eran integrables. Por tanto, la función $f_1(x)=x^3+x^2+x$ también será integrable ya que es la suma de funciones integrables.

La función $g(x)$ es la composición de la función $f_1(x)$ con la función $\phi(x)=\sin(x)$ ya que $g(x)=(\phi\circ f_1)(x)$. Usando el teorema anterior, podemos afirmar que la función $g(x)$ es integrable en el intervalo $[0,1]$.

De la misma manera, la función $h(x)$ es la composición de la función $f_2(x)=x^2$ con la función $\phi(x)=\mathrm{e}^x$ ya que $h(x)=(\phi\circ f_2)(x)$. Por tanto, usando otra vez el teorema anterior podemos decir que la función $h(x)$ también es integrable en el intervalo $[0,1]$.

3.5. **Producto y cociente de funciones y integrabilidad**

Teorema. Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$. Entonces la función $f\cdot g$ también es integrable en $[a,b]$.

Si además existe una constante k tal que $|g(x)|\geq k$ (no se acerca al entorno de cero), para todo valor $x\in[a,b]$, entonces la función $\frac{f}{g}$ también es integrable en $[a,b]$.

Demostración

Observemos que el producto $f\cdot g$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left((f+g)^2-f^2-g^2\right)$$

Las funciones f^2 y g^2 son integrables al ser composición de las funciones f y g que son integrables por hipótesis con la función $\phi(x)=x^2$ que es continua.

La función $(f+g)^2$ será integrable al ser composición de la función $f+g$ que será integrable al ser suma de integrables con la función $\phi(x)=x^2$.

Por tanto, la función producto $f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ será integrable ya que una combinación lineal de funciones integrables.

Para ver que la función $\frac{f}{g}$ observemos que ésta puede expresarse como $\frac{f}{g} = \frac{1}{g} \cdot f$.

La función $\frac{1}{g}$ es integrable al ser composición de la función g que es integrable con la función $\phi(x) = \frac{1}{x}$ definida en el dominio $|x| \geq k$, hecho que hace que sea continua ya que el denominador nunca se anularía en dicho dominio.

La función $\frac{f}{g} = \frac{1}{g} \cdot f$ será integrable ya que la podemos escribir como producto de dos funciones integrables: $\frac{1}{g}$ y f.

3.6. **Integración y monotonía**

Teorema. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **monótona** (creciente, decreciente…) en el intervalo $[a,b]$. Entonces la función f es integrable en dicho intervalo.

Demostración

Supondremos que la función f es creciente. El caso de que f fuese decreciente se razonaría de manera análoga.

Sea un valor $\epsilon > 0$. Definimos el valor $\delta > 0$ como $\delta = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Dicho valor será positivo ya que al ser f creciente $f(b) > f(a)$.

A continuación, consideramos una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ con diámetro menor que δ, $|P| < \delta$. Si hallamos el valor de $U(f,P) - L(f,P)$, obtenemos:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ya que $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i)$ y $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$, al ser f una función creciente el supremo y el ínfimo se alcanzan en los extremos superior e inferior, respectivamente.

Por tanto:

$$U(f,P) - L(f,P) \leq |P| \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) < \delta \cdot (f(b) - f(a)) < \epsilon$$

En resumen, para todo valor $\epsilon > 0$, hemos sido capaces de hallar una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, condición que equivale a decir que f es integrable en dicho intervalo.

Ejemplo

Cualquier polinomio $p(x)$ es integrable en cualquier intervalo de la forma $[a,b]$, con $b > a > 0$. Veámoslo.

Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n.

Las funciones monomio x^k son funciones crecientes en los intervalos considerados. Por tanto, serán integrables.

El polinomio no es más que una combinación lineal de funciones integrables. Será, por tanto, integrable.

Fijémonos que nuestro razonamiento fallaría en intervalos que contuviesen el valor 0 como por ejemplo el intervalo $[-1,1]$ ya que la función x^2 no es creciente en dicho intervalo al tener un mínimo en $x = 0$ y, en general, esto se aplicaría a todo monomio de exponente par x^{2k}. Vamos a solventar este problema en la siguiente sección donde veremos que toda función contínua es integrable.

3.7. **Integrabilidad y continuidad**

Teorema. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **continua** en el intervalo $[a,b]$. Entonces la función f es integrable en dicho intervalo.

Demostración

Al ser f continua en un intervalo cerrado, será uniformemente continua.

Entonces, dado un valor $\epsilon > 0$ cualquiera, siempre será posible hallar un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$, se cumplirá que $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ con diámetro menor que δ, $|P| < \delta$.

Al ser f continua en todo el intervalo $[a, b]$, también lo será en cada uno de los subintervalos de la partición $[x_{i-1}, x_i]$. Por el teorema de Weierstrass, dado un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, f tendrá máximo y mínimo en dicho subintervalo, es decir, existirán valores $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que:

$$f(u_i) = m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad f(v_i) = M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

Entonces:

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(u_i))(x_i - x_{i-1})$$

Ahora bien, como $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $|v_i - u_i| \leq x_i - x_{i-1} \leq |P| < \delta$ y por la condición de continuidad uniforme de f, podemos asegurar que $f(v_i) - f(u_i) < \frac{\epsilon}{b-a}$. Usando esta última condición, podemos acotar $U(f, P) - L(f, P)$ de la forma siguiente:

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b - a) = \epsilon$$

En resumen, dado $\epsilon > 0$, hemos sido capaces de hallar una partición P del intervalo $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Esto significa que f es integrable en dicho intervalo.

Ejemplo

En el ejemplo anterior afirmamos que cualquier polinomio $p(x)$ era integrable en los intervalos de la forma $[a, b]$, pero teníamos que imponer la condición que $b > a > 0$.

Gracias al teorema anterior podemos afirmar que cualquier polinomio $p(x)$ es integrable en cualquier intervalo ya que $p(x)$ es una función continua. Por ejemplo en los intervalos que contienen el cero, la función polinómica $p(x)$ sería integrable.

3.8. **Monotonía de la función integral**

Proposición.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **integrable** en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo valor $x \in [a, b]$. Entonces la integral de la función f también es positiva:

$$\int_a^b f \geq 0$$

Es decir, si una función está por encima del eje de las x, el área es positiva.

Demostración

Como $f(x) \geq 0$ para todo valor de $x \in [a, b]$, dada una partición cualquiera $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, se verifica que $L(f, P) \geq 0$ ya que:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Pero $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \geq 0$ al ser $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Por tanto: $L(f, P) \geq 0$.

A continuación, tenemos que $\int_a^b f \geq L(f, P) \geq 0$, tal como queríamos ver.

Observación. Usando la proposición anterior podemos afirmar que si tenemos dos funciones $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **integrables** en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$, para cualquier valor $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ ya que basta considerar la función diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$ y aplicar la proposición a la función anterior $h(x)$ usando la linealidad de la integral provada anteriormente.

A continuación veamos que la integral de una función continua que es estrictamente positiva en un punto, es también estrictamente positiva.

Corolario.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **continua** en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo valor $x \in [a, b]$. Supongamos que existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$. Entonces:

$$\int_a^b f > 0.$$

Demostración

Usando la proposición anterior, tendremos que $\int_a^b f \geq 0$ al ser $f(x) \geq 0$, para todo valor $x \in [a, b]$.

Como f es continua en el punto c, podemos encontrar un entorno de dicho punto c de radio δ, $[c - \delta, c + \delta]$ tal que para todo punto $x \in [c - \delta, c + \delta]$ de dicho entorno $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. Si c coincidiese con uno de los extremos del intervalo, por ejemplo si $c = a$, consideraríamos como entorno $[c, c + \delta]$ y si $c = b$, $[c - \delta, c]$.

Consideremos a continuación una partición P del intervalo $[a, b]$ tal que el entorno anterior coincida con uno de sus subintervalos, esto es, que existe un índice j tal que $x_{j-1} = c - \delta$ y $x_j = c + \delta$.

En este caso, se verificará lo siguiente:

$$\int_a^b f \geq L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq m_j(x_j - x_{j-1}) = 2\delta m_j$$

Pero $m_j = \inf\limits_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) = \inf\limits_{x \in [c-\delta, c+\delta]} f(x) > \dfrac{f(c)}{2}$ y deducimos por tanto:

$$\int_a^b f \geq L(f, P) \geq 2\delta m_j > \delta \cdot f(c) > 0$$

Tal como queríamos demostrar.

Otra de las consecuencias de la monotonía de la integral es que el valor absoluto de una integral siempre es menor que la integral del valor absoluto.

Teorema.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **integrable** en el intervalo $[a, b]$. Entonces la función $|f|$ definida por: $|f| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $|f|(x) = |f(x)|$ es también integrable y además:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Antes de pasar a su demostración, necesitamos la condición siguiente que dejamos como ejercicio.

Ejercicio. Sea $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sean:

$$\overline{M} = \sup_{x \in [c,d]} |f(x)|,\ \overline{m} = \inf_{x \in [c,d]} |f(x)|,\ M = \sup_{x \in [c,d]} f(x),\ m = \inf_{x \in [c,d]} f(x)$$

Demostrar que siempre se verifica lo siguiente $\overline{M} - \overline{m} \leq M - m$.

Demostración

Sea P una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Aplicando la condición del ejercicio anterior a cualquier subintervalo de la partición anterior, podemos afirmar que:

$$U(|f|,P) - L(|f|,P) \leq U(f,P) - L(f,P)$$

Como f es integrable en el intervalo $[a,b]$ por hipótesis, para todo valor $\epsilon > 0$, podemos hallar una partición P tal que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

Ahora bien, usando la condición anterior, podemos afirmar que $U(|f|,P) - L(|f|,P) \leq U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Hemos probado que para todo valor $\epsilon > 0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $U(|f|,P) - L(|f|,P) < \epsilon$, lo que equivale a decir que la función $|f|$ es integrable en dicho intervalo.

Probemos la segunda condición del teorema, para todo valor $x \in [a,b]$ se cumple lo siguiente:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Si aplicamos la condición de monotonía de la integral, obtenemos:

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Lo que equivale a afirmar que $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

3.9. **Teorema del valor medio de la integral**

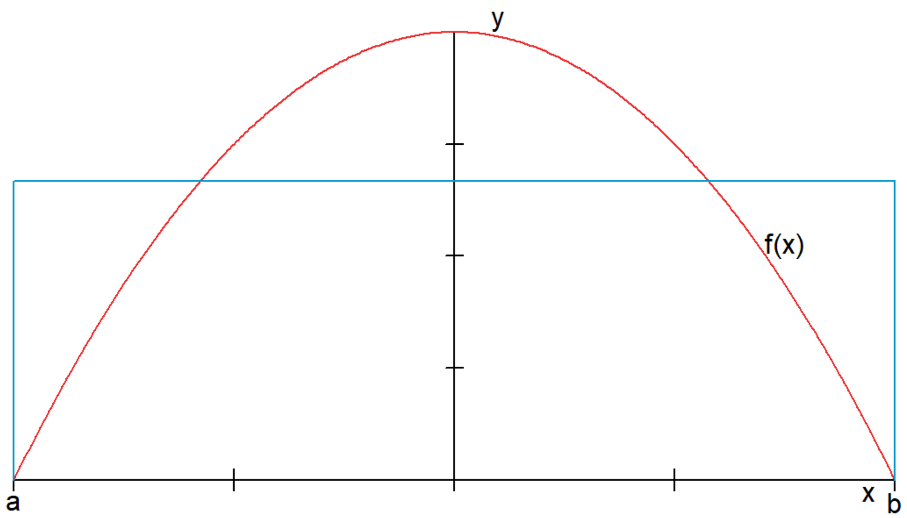
En esta sección vamos a escribir la integral de una función **integrable** en un cierto intervalo $[a,b]$ como el área de un cierto rectángula cuya longitud de la base es la longitud del intervalo, $b-a$ y cuya altura es un valor que se encuentra entre el **ínfimo** y el **supremo** de la función.

En la figura siguiente se indica lo que queremos decir: el àrea de la función en rojo equivale al área del rectángulo en azul.

El **Teorema del valor medio de la integral** nos asegura precisamente esto: para cualquier función, siempre es posible encontrar un rectángulo cuya altura estará siempre entre el ínfimo y el supremo de la función cuyas áreas serán la misma.

```
xmin=-2
xmax=2
ymin=0
ymax=4
tolx=0.01*(xmax-xmin)
toly=0.05*(ymax-ymin)
quantsx=4
quantsy=4
f = function(x){4-x^2}
plot(c(xmin-tolx,xmax+tolx,xmin-tolx,xmax+tolx),c(ymin-toly,ymin-toly,ymax+toly,ymax+toly),type="n",xlab=""
,ylab="",xaxt="n",yaxt="n",axes=FALSE)
x=seq(from=xmin,to=xmax,by=0.01)
#points(x,f(x),type="l")
lines(c(0,0),c(ymin,ymax))
lines(c(xmin,xmax),c(0,0))
text(xmax-3*tolx,-3*tolx,"x")
text(toly,ymax+toly/2,"y")
for (i in 0:(quantsx)){
  lines(rep(xmin+((xmax-xmin)/quantsx)*i,2),c(-0.5*toly,+0.5*toly))
#  text(xmin+((xmax-xmin)/quantsx)*i,-1*toly,xmin+((xmax-xmin)/quantsx)*i,cex=0.75)
  }


for (i in 0:(quantsy)){
  lines(c(-tolx,tolx),ymin+rep(((ymax-ymin)/quantsy)*i,2))
#  text(3*tolx,ymin+((ymax-ymin)/quantsy)*i,ymin+((ymax-ymin)/quantsy)*i,cex=0.75)
}
lines(x,f(x),col='firebrick2')
text(pi,1.3,"f(x)")
lines(c(-2,-2),c(0,8/3),col='deepskyblue3')
lines(c(-2,2),c(8/3,8/3),col='deepskyblue3')
lines(c(2,2),c(0,8/3),col='deepskyblue3')
text(-2,-0.2,"a")
text(2,-0.2,"b")
text(1.5,2.1,"f(x)")
```



Teorema de la media de la integral.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función **integrable** en el intervalo $[a,b]$ y sea $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Entonces siempre es posible hallar un valor $\lambda\in[m,M]$ tal que $\int_a^b f=\lambda\cdot(b-a)$.

Observación. El valor λ es precisamente la altura del rectángulo del que nos referíamos antes. Además, observar que si la función, además de ser **integrable**, es **continua**, podemos decir por el Teorema del valor intermedio que existe un valor $c\in[a,b]$ tal que $\lambda=f(c)$. Entonces, en este caso, podemos escribir la integral de f en $[a,b]$ como: $\int_a^b f=f(c)\cdot(b-a)$.

Demostración

Por definición de los valores m (ínfimo de la función en el intervalo $[a,b]$) y M (supremo de la función en el intervalo $[a,b]$), podemos afirmar que para todo valor $x\in[a,b]$ se cumple que $m\leq f(x)\leq M$.

Usando la proposición relacionada con la monotonía de la integral, tenemos que:

$$\int_a^b m\leq\int_a^b f\leq\int_a^b M$$

Como m y M son funciones constantes, vimos en su momento que $\int_a^b m=m\cdot(b-a)$ y $\int_a^b M=M\cdot(b-a)$. Por tanto:

$$m\cdot(b-a)\leq\int_a^b f\leq M\cdot(b-a),\ \ \Rightarrow m\leq\frac{\int_a^b f}{b-a}\leq M$$

Si definimos $\lambda=\frac{\int_a^b f}{b-a}$, tenemos el resultado del Teorema.

Corolario.

Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones **integrables** en el intervalo $[a,b]$, donde suponemos que $g(x)\geq 0$ para todo valor $x\in[a,b]$ y sea $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Entonces siempre es posible hallar un valor $\lambda\in[m,M]$ tal que:

$$\int_a^b f\cdot g=\lambda\cdot\int_a^b g$$

Observación. El teorema anterior generaliza el Teorema del valor medio ya que basta considerar $g(x)=1\geq 0$ y obtenemos el Teorema del valor medio para integrales. Además, igual que pasaba con el **Teorema del valor medio**, conviene observar que si la función f, además de ser **integrable**, es **continua**, podemos decir por el Teorema del valor intermedio que existe un valor $c\in[a,b]$ tal que $\lambda=f(c)$. Entonces, en este caso, podemos escribir la integral de $f\cdot g$ en $[a,b]$ como:

$$\int_a^b f\cdot g=f(c)\cdot\int_a^b g$$

Demostración

Por definición de los valores m (ínfimo de la función en el intervalo $[a,b]$) y M (supremo de la función en el intervalo $[a,b]$), podemos afirmar que para todo valor $x\in[a,b]$ se cumple que $m\leq f(x)\leq M$.

Como la función $g(x)\geq 0$ para todo valor $x\in[a,b]$, multiplicando por $g(x)$ las desigualdades anteriores, obtenemos $m\cdot g(x)\leq f(x)\cdot g(x)\leq M\cdot g(x)$.

Usando la proposición relacionada con la monotonía de la integral, tenemos que:

$$m\cdot\int_a^b g\leq\int_a^b f\cdot g\leq M\cdot\int_a^b g$$

Si $\int_a^b g=0$, a partir de las desigualdades anteriores deducimos que $\int_a^b f\cdot g=0$ y el Teorema se cumple trivialmente.

Si $\displaystyle\int_a^b g \neq 0$, definimos $\lambda = \dfrac{\int_a^b f\cdot g}{\int_a^b g}$. Por las desigualdades anteriores, $\lambda \in [m, M]$ y además por propia definición, $\displaystyle\int_a^b f\cdot g = \lambda\cdot\int_a^b g$, tal como queríamos ver.

4. Teorema Fundamental del Cálculo

4.1. **Introducción**

Recapitulemos lo que hemos hecho hasta el momento.

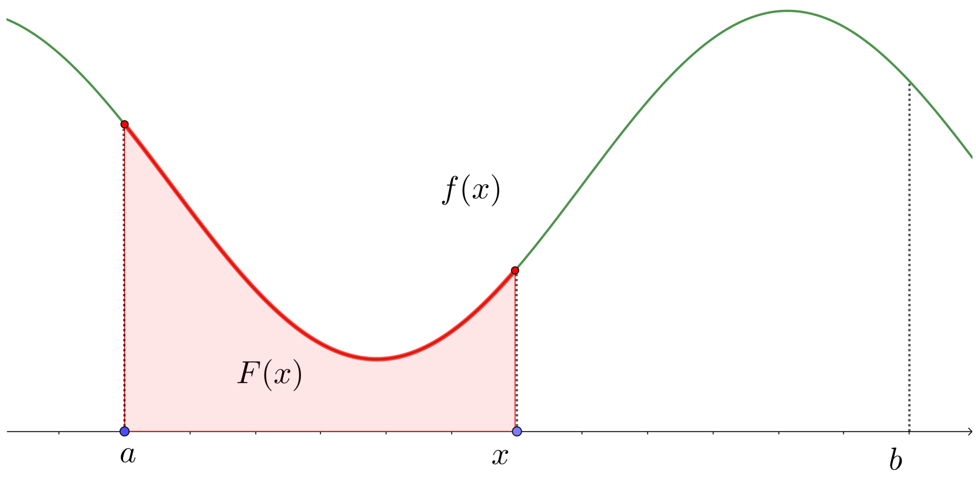
A partir de la idea intuitiva de **área** de una función hemos definido y formalizado la **integral de una función** en un intervalo estudiando posteriormente las propiedades que se derivan de dicho concepto.

Ahora bien, usando todo lo que sabemos, no sabemos o no podemos calcular el área de funciones “conocidas” como **polinomios**, **exponenciales**, **trigonométricas**, etc., recordemos por ejemplo todo el desarrollo que tuvimos que hacer para calcular el área de la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0, 1]$.

Es decir, nos falta un método efectivo para calcular áreas de funciones.

El **Teorema Fundamental del Cálculo** nos resuelve este problema relacionando el problema del cálculo de integrales con el de derivadas.

Más concretamente, consideremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **integrable** en el intervalo $[a, b]$ y definamos a partir de ella la función área $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F(x) = \int_a^x f$, ver gráfica adjunta.



El **Teorema fundamental del cálculo** nos dice que la derivada de la función $F(x)$ es precisamente la función $f(x)$ sobre la que integrábamos o calculábamos el área: $F'(x) = f(x)$.

El problema es que nosotros tenemos la función $f(x)$ y queremos hallar precisamente la función que da el área $F(x)$. A la función $F(x)$ se le llama **primitiva** de la función $f(x)$ o **antiderivada** ya que si $F'(x) = f(x)$, para calcular $F(x)$ a partir de $f(x)$ hemos de realizar la operación contraria de derivar.

Gracias a dicho Teorema, de cara a calcular áreas, hemos de aprender a calcular **primitivas**. En el capítulo siguiente, vamos a aprender a calcular primitivas de las funciones más conocidas.

Seguidamente, vamos a formalizar el **Teorema Fundamental del Cálculo** y a demostarlo.

4.2. **El Teorema Fundamental del Cálculo**

Antes de pasar a su definición, necesitamos introducir la función área $F(x)$ y ver que en general, es una función continua.

Teorema.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función **integrable**, y sea la función **área** definida de la forma siguiente: $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f$. Entonces $F(x)$ es continua para todo valor de $x\in[a,b]$.

Observación. Como el intervalo $[a,b]$ es un intervalo cerrado y acotado, la función área $F(x)$ no sólo es continua en todo valor $x\in[a,b]$ sino que es uniformemente continua en el intervalo.

Demostración

Sea $x\in[a,b]$ un valor cualquiera. Veamos que la función F es continua en x.

Sea $y\in[a,b]$ otro valor en el intervalo $[a,b]$. Entonces:

$$F(y)-F(x)=\int_a^y f-\int_a^x f=\int_x^y f$$

Usando el Teorema del valor medio, podemos afirmar que existe un valor $\lambda\in[\inf f,\sup f]$ tal que: $\displaystyle\int_x^y f=\lambda\cdot(y-x)$.

Para ver que F es continua en x hemos de ver lo siguiente: para todo valor $\epsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que si $y\in[a,b]$ y $|x-y|<\delta$, entonces $|F(y)-F(x)|<\epsilon$.

Consideremos entonces un valor $\epsilon>0$, sea $\delta=\frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Si $y\in[a,b]$ y $|y-x|<\delta$, deducimos que $|F(y)-F(x)|=\left|\displaystyle\int_x^y f\right|=|\lambda\cdot(y-x)|<|\lambda|\cdot\delta=\epsilon$, tal como queríamos ver.

Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función **continua**, y por tanto, **integrable**, y sea la función **área** $F(x)$ definida en el Teorema anterior. Entonces la función F es derivable en todo el intervalo $[a,b]$ y además, $F'(x)=f(x)$, para todo valor $x\in[a,b]$.

Observación. Tal como hemos indicado anteriormente, a la función F se le llama **primitiva** o **antiderivada** de la función f. Observar que dada una función f, ésta tiene infinitas **primitivas** ya que si F es una de ellas, también lo es $F+C$, donde C es una constante cualquiera. Efectivamente: $(F+C)'(x)=F'(x)=f(x)$.

Demostración

Sea x un valor cualquiera del intervalo $[a,b]$. Si y es otro valor cualquiera con $y\geq x$, el **Teorema del valor medio** nos dice que existe un valor $c\in(x,y)$ tal que:

$$\int_x^y f=\int_a^y f-\int_a^x f=F(y)-F(x)=f(c)\cdot(y-x)$$

Por tanto:

$$F'(x)=\lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{f(c)\cdot(y-x)}{y-x}=\lim_{y\to x}f(c)=f(x)$$

Al ser $f(x)$ continua en el punto x. Queda por tanto, visto el Teorema.

4.3. **Regla de Barrow**

La **Regla de Barrow** da la expresión del **área** o la **integral** de la función f en el intervalo $[a,b]$ usando el **Teorema fundamental del cálculo**.

Regla de Barrow.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función **continua**, y por tanto, **integrable**, y sea $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una **primitiva** de f. Entonces, el **área** de la función f entre a y un punto cualquiera del intervalo $x\in[a,b]$ se puede expresar como:

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$

Observación. Si se usa la expresión anterior para $x = b$, se obtiene la expresión del **área** de la función f entre a y b: $\int_a^b f = F(b) - F(a).$

Demostración

Sea $\hat{F}(x) = \int_a^x f$ la primitiva dada por el **Teorema fundamental del cálculo**.

Como $\hat{F}'(x) = F'(x) = f(x)$ tenemos que $(\hat{F} - F)'(x) = \hat{F}'(x) - F'(x) = 0$. Por tanto, existirá una constante C tal que $F(x) - \hat{F}(x) = C$ o $F(x) = \hat{F}(x) + C$.

Seguidamente, observemos que $\hat{F}(a) = \int_a^a f = 0$. Por tanto, $F(a) = \hat{F}(a) + C = C$.

Al fin, concluimos que:

$$F(x) - F(a) = \hat{F}(x) - \hat{F}(a) = \int_a^x f$$

Tal como queríamos ver.

Ejemplo: área de un polinomio

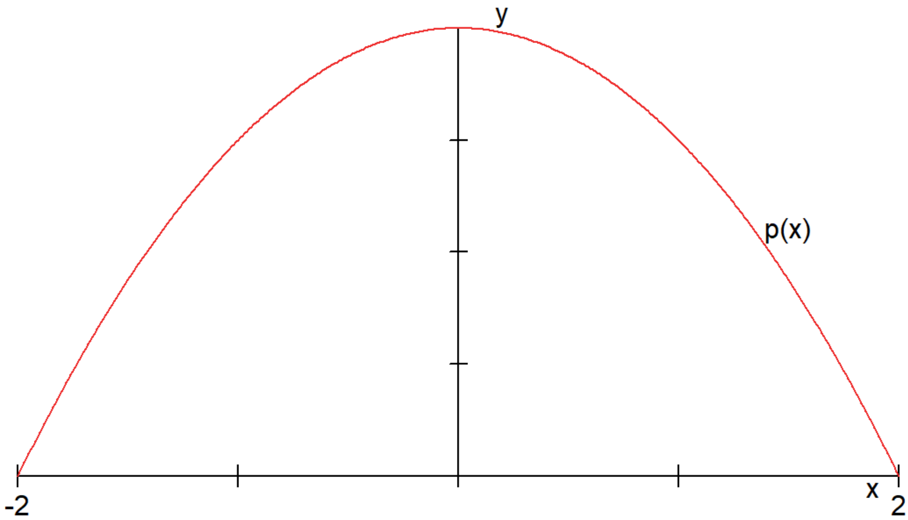
Consideremos un polinomio cualquiera $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado n definido en un intervalo cualquiera $[a, b]$.

Fijarse que una primitiva de la función x^n es $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ya que si derivamos la expresión anterior, obtenemos la función inicial: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n$.

Usando la linealidad de la integral, podemos hallar una primitiva de la función $p(x)$.

$$F(x) = a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_0 x$$

Concretamente, consideremos el polinomio $p(x) = 4 - x^2$ definido en el intervalo $[-2, 2]$.



Una primitiva del polinomio anterior sería: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x$. El área entre $x = -2$ y $x = 2$, sería usando la regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{2} p = F(2) - F(-2) = -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right) = \frac{32}{3} \approx 10.6667$$

El cálculo de la integral en `Wolfram Alpha` se puede ver en el enlace siguiente:

(https://www.wolframalpha.com/input/?i=Integrate%5B4-x%5E2%2C%7Bx%2C-2%2C2%7D%5D)

4.4. Segundo Teorema del valor medio

Usando el **Teorema fundamental del cálculo** vamos a generalizar el **Teorema del valor medio** en el siguiente sentido.

Segundo Teorema de la media (1).

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona, decreciente y no negativa. Entonces, existe un valor $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f \cdot g = g(a) \cdot \int_a^c f$$

Demostración (Contenido muy técnico)

Tal como vimos en un teorema anterior, la función F es una función continua.

Por el Teorema de Weierstrass, la función F tendrá mínimo y máximo dentro del intervalo $[a, b]$. Sea $m = \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$ y $M = \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$.

Dada una partición P cualquiera $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ definimos el valor $\sigma(P)$ asociado a la partición P de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma(P) = & \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ = & -g(x_0)F(x_0) + g(x_0)F(x_1) - g(x_1)F(x_1) + g(x_1)F(x_2) - \cdots \\ & +g(x_{n-1})F(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + [F(x_n)g(x_{n-1})] \end{aligned}$$

Como la función g es decreciente todos los términos del sumatorio anterior serán positivos y, usando que $m = \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$ y $M = \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$ podemos escribir que:

$$m \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) \quad +mg(x_{n-1}) \leq \sigma(P)$$

$$\sigma(P) \leq M \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + Mg(x_{n-1})$$

Las sumas anteriores se simplifican de la forma siguiente:

$$mg(a) \leq \sigma(P) \leq Mg(a)$$

Y por tanto deducimos que $\sigma(P) \in [mg(a), Mg(a)]$, siendo $a = x_0$

A continuación, acotamos $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sigma(P)\right|$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f\cdot g-\sigma(P)\right| &= \left|\int_a^b f\cdot g-\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\cdot g-\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_{i-1})f\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(g-g(x_{i-1}))\right| \end{aligned}$$

Como f es integrable, también será acotada. Sea M_f el valor tal que para todo valor $x\in[a,b]$, $|f(x)|<M_f$.

Como g es monónota decreciente, para todo valor $x\in[x_{i-1},x_i]$, se verifica que $|g(x)-g(x_{i-1})|=g(x_{i-1})-g(x)<g(x_{i-1})-g(x_i)$. Por tanto, la última expresión se puede acotar por:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f\cdot g-\sigma(P)\right| &\le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f||g-g(x_{i-1})| \le M_f\sum_{i=1}^n (g(x_{i-1})-g(x_i))(x_i-x_{i-1}) \\ &\le M_f\cdot|P|\sum_{i=1}^n (g(x_{i-1})-g(x_i)) = M_f\cdot|P|\cdot(g(a)-g(b)) \end{aligned}$$

A continuación veamos que:

$$mg(a)\le\int_a^b f\cdot g\le Mg(a)$$

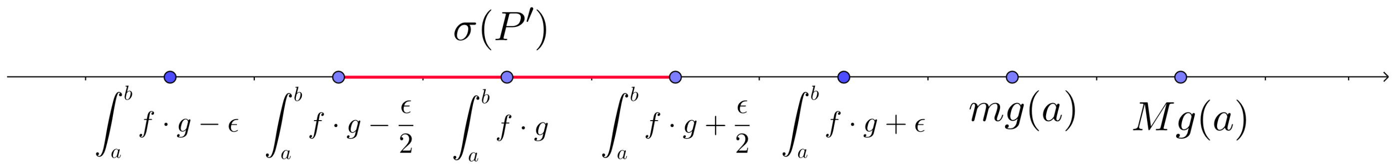
Supongamos que la expresión anterior no es cierta, es decir, $\displaystyle\int_a^b f\cdot g\neq[mg(a),Mg(a)]$, o, lo que es lo mismo $\displaystyle\int_a^b f\cdot g\in\mathbb{R}\setminus[mg(a),Mg(a)]$. Como el conjunto $\in\mathbb{R}\setminus[mg(a),Mg(a)]$ es un conjunto abierto, existe un valor $\epsilon>0$ tal que:

$$\left(\int_a^b f\cdot g-\epsilon,\int_a^b f\cdot g+\epsilon\right)\subset\mathbb{R}\setminus[mg(a),Mg(a)]$$

Consideremos una partición P' del intervalo $[a,b]$ tal que su diámetro cumple $|P'|<\frac{\epsilon}{2M_f(g(a)-g(b))}$, (si $g(a)=g(b)$, g sería una función constante y el resultado del teorema es trivial). Para dicha partición, tenemos que, usando un resultado anterior:

$$\left|\int_a^b f\cdot g-\sigma(P')\right|\le M_f\cdot|P'|\cdot(g(a)-g(b))<\frac{\epsilon}{2}$$

Tenemos la situación siguiente:



Como se puede observar en la figura anterior, $\sigma(P') \notin [mg(a), Mg(a)]$, hecho que niega lo que hemos demostrado antes. Hemos llegado a una contradicción. Por tanto:

$$mg(a) \leq \int_a^b f \cdot g \leq Mg(a)$$

Observemos que $g(a) > 0$ ya que si $g(a) = 0$, como g es decreciente y no negativa, $g(x) = 0$ para todo valor $x \in [a, b]$ y el resultado del teorema sería trivial.

Deducimos por tanto, $m \leq \frac{\int_a^b f \cdot g}{g(a)} \leq M$.

Como la función F es continua tal como vimos en un teorema anterior, y $m \leq \frac{\int_a^b f \cdot g}{g(a)} \leq M$, aplicando el teorema de los valores intermedios, existe un valor c tal que $F(c) = \frac{\int_a^b f \cdot g}{g(a)}$. Por tanto:

$$\int_a^b f \cdot g = g(a) \cdot F(c) = g(a) \cdot \int_a^c f$$

Tal como queríamos demostrar.

Segundo Teorema del valor medio (2).

El teorema siguiente es otra versión del segundo teorema de la media.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona, creciente y no negativa. Entonces, existe un punto $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f \cdot g = g(b) \cdot \int_c^b f$$

Ejercicio. Demostrar el teorema anterior. Indicación: considerar $\tilde{g}(x) = g(b) - g(x)$ y aplicar el segundo teorema del valor medio.

5. Técnicas de integración

5.1. **Introducción**

En esta sección vamos a ver dos técnicas de integración que nos serán útiles para calcular áreas o integrales:

- Cambio de variable: algunas veces, cambiar de variable de integración puede simplificar los cálculos a la hora de hallar una **primitiva** de la función de integración f.
- Integración por partes: sería aplicar la fórmula de la **derivada del producto** al **cálculo de primitivas.**

Pero antes de introducir dichas técnicas vamos a cambiar de notación para denotar la integral de una función f en un intervalo $[a, b]$. En concreto, usaremos la notación siguiente:

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\, dx$$

Ya que de esta manera indicamos cuál es la variable que se integra o, dicho en otros términos, cuál es la variable sobre la cual está definida la función de integración $f(x)$.

El valor dx se llama diferencial de x y es para indicar precisamente cuál es la variable de integración. Por ejemplo si escribo $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dx$, significa que integro la función $f(t)$ que está en función de una variable t pero la variable sobre la que integramos es x debido al dx.

Para que la integral anterior se pueda realizar, necesitamos saber cuál es la relación entre las variables t y x, es decir, cuál es la función g que pasa de una variable a la otra de la forma siguiente $t = g(x)$ y de esta manera la integral anterior sería: $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\, dx$.

5.2. **Teorema del cambio de variable**

Teorema del cambio de variable.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **continua** en el intervalo $[a, b]$ y por tanto, **integrable**. Sea ϕ una función de clase $\mathcal{C}^1$ (derivable de clase continua) en su intervalo de definición, es decir, una función **derivable** con función derivada continua. Supongamos el intervalo de definición de ϕ es $[\alpha, \beta]$, es decir $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\phi(\alpha) = a$ y $\phi(\beta) = b$ de tal forma que $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Entonces, en estas condiciones:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt$$

Observación. El **Teorema del cambio de variable** nos permite pasar de integrar la función f respecto de la variable x a integrar dicha función pero respecto de una nueva variable t de tal forma que la relación entre x y t nos la da la función ϕ: $x = \phi(t)$.

Para aplicar el teorema anterior en la práctica, lo que hacemos es lo siguiente:

- Escribimos $x = \phi(t)$ la relación entre las variables. Si tenemos $t = \phi^{-1}(x)$, no hace falta obtener la relación $x = \phi(t)$.
- Hallamos la relación entre los diferenciales (diferencial de x, dx y diferencial de t, dt):
  - Si tenemos la relación $x = \phi(t)$, la relación entre diferenciales es $dx = \phi'(t)dt$.
  - Si tenemos la relación $t = \phi^{-1}(x)$, la relación entre diferenciales es $dx = \frac{dt}{\phi^{-1'}(x)}$, asegurándose que la parte de la derecha sólo dependa de t.

- Miramos cómo cambian los extremos de integración, es decir para $x = a$, hallamos el valor de t correspondiente: $a = \phi(\alpha)$ y para $x = b$, hacemos lo mismo, $b = \phi(\beta)$.
- Por último escribimos la integral a hallar en función de la nueva variable t usando los cambios anteriores.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt$$

Muchas veces integrar respecto la variable t es mucho más sencillo que integrar respecto la variable original x.

Hallar la variable t que permite simplificar o hacer más sencilla la integral es todo un arte y necesita de mucha práctica.

Demostración

Sea F una primitiva de la función f en $[a, b]$. Veamos, aplicando la regla de la cadena, que la función $F \circ \phi$ es una primitiva de la función $(f \circ \phi) \cdot \phi'$.

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

Usando la regla de Barrow, podemos escribir:

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = (F \circ \phi)(\beta) - (F \circ \phi)(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Tal como queríamos demostrar.

Ejemplo

Nos piden hallar la integral siguiente: $\displaystyle\int_{-1}^4 (2x+3)^5\, dx$.

Una manera de realizar dicha integral es desarrollar la expresión $(2x+3)^5$ usando el binomio de Newton e integrar cada término. Dicho método es muy tedioso ya que comporta mucho cálculo aumentando la probabilidad de que nos equivoquemos.

Hagamos el siguiente cambio de variable $t = 2x + 3$. Fijaos que escrito de esta manera, hemos dado t en función de x y no x en función de t tal como está escrito en el teorema anterior. El valor de $\phi(t)$ será pues:

$$t = 2x + 3, \ \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} = \phi(t)$$

De todas formas, de cara al cálculo de la integral, no es necesario realizar el paso anterior.

Los pasos a realizar serían los siguientes:

- Relación entre los diferenciales: como $t = 2x + 3$, $dt = (2x+3)'dx = 2dx$, y, por tanto, $dx = \frac{dt}{2}$.
- Cambio en los extremos de integración: para $x = -1$, el valor de t será: $t = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$ y para $x = 4$, el valor de t será: $t = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.
- La integral en función de la nueva variable t será:

$$\int_{-1}^4 (2x+3)^5\, dx = \int_1^{11} t^5 \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^{11} t^5\, dt$$

Ahora ya hemos puesto la integral a calcular con respecto la nueva variable t.

Observamos que ha valido la pena el cambio ya que integrar la función t^5 es mucho más sencillo que integrar la función $(2x+3)^5$.

Como ya hemos indicado en un ejemplo anterior, una primitiva de la función t^5 es $\frac{t^6}{6}$. La integral valdrá entonces aplicando la regla de Barrow:

$$\frac{1}{2}\int_1^{11} t^5\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^6}{6}\right]_1^{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{11^6}{6} - \frac{1^6}{6}\right) = 147630$$

El cálculo de la integral en `Wolfram Alpha` se puede ver en el enlace siguiente:

(https://www.wolframalpha.com/input/?i=Integrate%5B%282x%2B3%29%5E5%2C%7Bx%2C-1%2C4%7D%5D)

5.3. **Integración por partes**

Supongamos que podemos escribir nuestra función de integración $f(x)$ de la siguiente manera: $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$, es decir, como el producto de una función $u(x)$ por la derivada de otra función $v(x)$.

La técnica de **integración por partes** nos permite escribir la integral de la función anterior pero en lugar de integrar $u(x) \cdot v'(x)$, integrar $u'(x) \cdot v(x)$, es decir, cambiando *los papeles* de las funciones $u(x)$ y $v(x)$.

Muchas veces es más sencillo integrar $u'(x) \cdot v(x)$ que integrar $u(x) \cdot v'(x)$ y de ahí su aplicación.

La demostración de dicha técnica está basada como veremos en la fórmula de derivación del producto.

Teorema de integración por partes.

Sean $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ (es decir, derivables con derivada continua) en el intervalo $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = (u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)) - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Observación. La aplicación de la fórmula de integración por partes se aplica en la práctica de la siguiente manera:

- Para realizar la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, tenemos que descomponer el integrando, $f(x)\, dx$ en dos partes de la forma $f(x)\, dx = u(x) \cdot dv(x)$.
    - La parte correspondiente a $u(x)$ tiene que ser de tal forma que cuando derivemos $u(x)$, ésta se simplifique bastante.
    - La parte correspondiente a $dv(x)$ tiene que ser de tal forma que cuando la integremos, ésta no se complique demasiado porque pensemos que se complicará.
- Derivamos la parte que hemos llamado $u(x)$ obteniendo $u'(x)$ y integramos la parte que hemos llamado $dv(x)$ hallando $v(x)$.
- Aplicamos la fórmula de integración por partes intentando integrar $u'(x) \cdot v(x)$ en lugar de $u(x) \cdot v'(x)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = \quad & (u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)) \\ & - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx\end{aligned}$$

Demostración

Las funciones $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $u' \cdot v$ y $u \cdot v'$ son integrables al ser continuas.

Una primitiva de la función $(u \cdot v)'$ es óbviamente la función $u \cdot v$. Por tanto, si aplicamos la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))'\, dx = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$$

Ahora bien, como $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\int_a^b (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x))\, dx = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$$

Y por tanto:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a) - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Tal como queríamos ver.

Ejemplo

Nos piden hallar la integral siguiente $\int_0^2 x\mathrm{e}^x\,dx$.

Sigamos los pasos de la integración por partes:

- Tenemos que separar $x \cdot \mathrm{e}^x\,dx = u(x) \cdot dv(x)$ en dos partes. Llamaremos $u(x) = x$ ya que al derivar se simplificará y $dv(x) = \mathrm{e}^x\,dx$ ya que al integrar se quedará igual, observar que una primitiva de la función e^x es ella misma, e^x.
- Calculamos $u'(x) = 1$ y $v(x) = \int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x$.
- Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\mathrm{e}^x\,dx &= u(2)\cdot v(2) - u(0)\cdot v(0) - \int_0^2 u'(x)\cdot v(x)\,dx = 2\cdot \mathrm{e}^2 - 0\cdot \mathrm{e}^0 - \int_0^2 1\cdot \mathrm{e}^x\,dx \\ &= 2\cdot \mathrm{e}^2 - [\mathrm{e}^x]_0^2 = 2\cdot \mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^2 - 1) = \mathrm{e}^2 + 1 \approx 8.3891\end{aligned}$$

El cálculo de la integral en `Wolfram Alpha` se puede ver en el enlace siguiente:

(https://www.wolframalpha.com/input/?i=Integrate%5Bx+E%5Ex%2C%7Bx%2C0%2C2%7D%5D)