Tarea: Intervalos

Ramon Ceballos

1/4/2021

1. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $|x-1|<3$

Resolvemos la desigualdad obteniendo dos intervalos que cumplen la condición descrita: $x<4$ y $x>-2$. Por tanto, la solución de la inecuación será el intervalo $(-2,4)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr = abs(x-1)

result = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr<3,x)

print(result)
```

```
## (-2 < x) & (x < 4)
```

b. $|2-3x|<1$

Resolvemos la desigualdad obteniendo dos intervalos que cumplen la condición descrita: $x<1$ y $x>\frac{1}{3}$. Por tanto, la solución de la inecuación será el intervalo $(\frac{1}{3},1)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr = abs(2-3*x)

result = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr<1,x)

print(result)
```

```
## (1/3 < x) & (x < 1)
```

c. $|x-2|>3$

Resolvemos la desigualdad obteniendo dos intervalos que cumplen la condición descrita: $x<-1$ y $x>5$. Por tanto, la solución de la inecuación será el intervalo $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr = abs(x-2)

result = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr>3,x)

print(result)
```

```
## ((-oo < x) & (x < -1)) | ((5 < x) & (x < oo))
```

2. Resuelve analiticamente y graficamente las siguientes inecuaciones:

a. $|5 - \frac{1}{x}| < 1$

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr = abs(5-(1/x))

result = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr<1,x)

print(result)
```

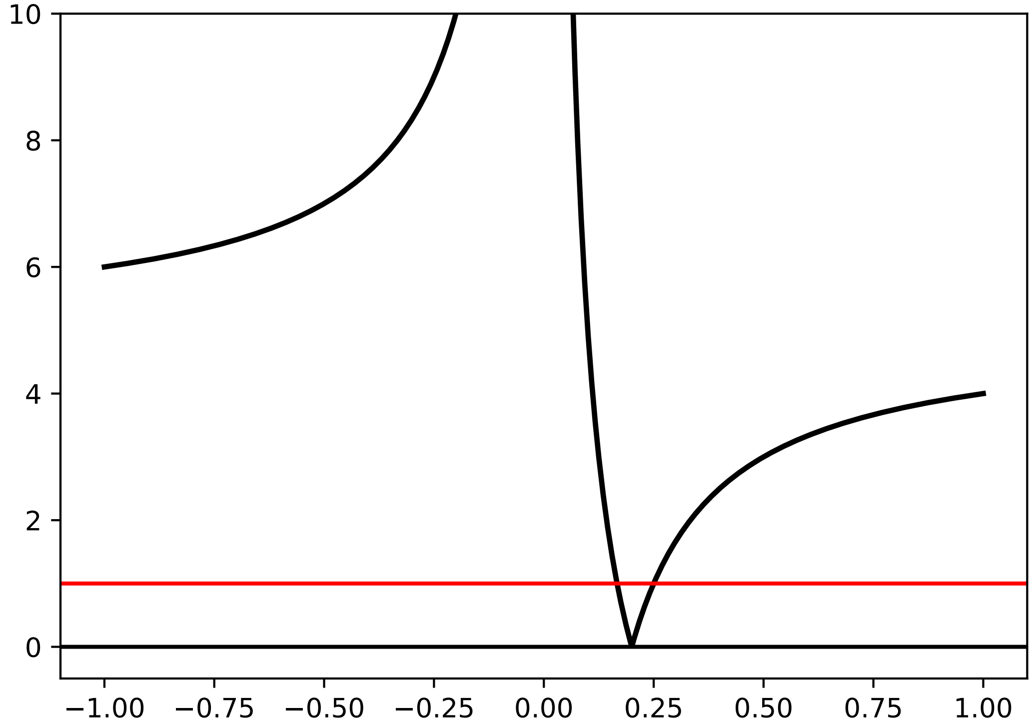
```
## (1/6 < x) & (x < 1/4)
```

El intervalo que resuelve la inecuación será por tanto: $(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(1,-1,1000)
def f (x):
  return abs(5-(1/x))
plt.plot(x, f(x),color="black",linewidth=2)
plt.axhline(1,0,color="red")
plt.axhline(0,0,color="black")
plt.ylim(-0.5,10)
```

```
## (-0.5, 10.0)
```

```
plt.show()
```



b. $|x^2 - 2| \leq 2$

Se cumple que $|x^2 - 2| \leq 2$, si y solo si, $-2 \leq x^2 - 2 \leq 2$, es decir, si $0 \leq x^2 \leq 4$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr = abs(x**2-2)

result = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr<=2,x)

print(result)
```

```
## (-2 <= x) & (x <= 2)
```

El intervalo que resuelve la inecuación será por tanto: $[-2, 2]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(10,-10,1000)
def f (x):
  return abs(x**2-2)
plt.plot(x, f(x),color="black",linewidth=2)
plt.axhline(2,0,color="red")
```

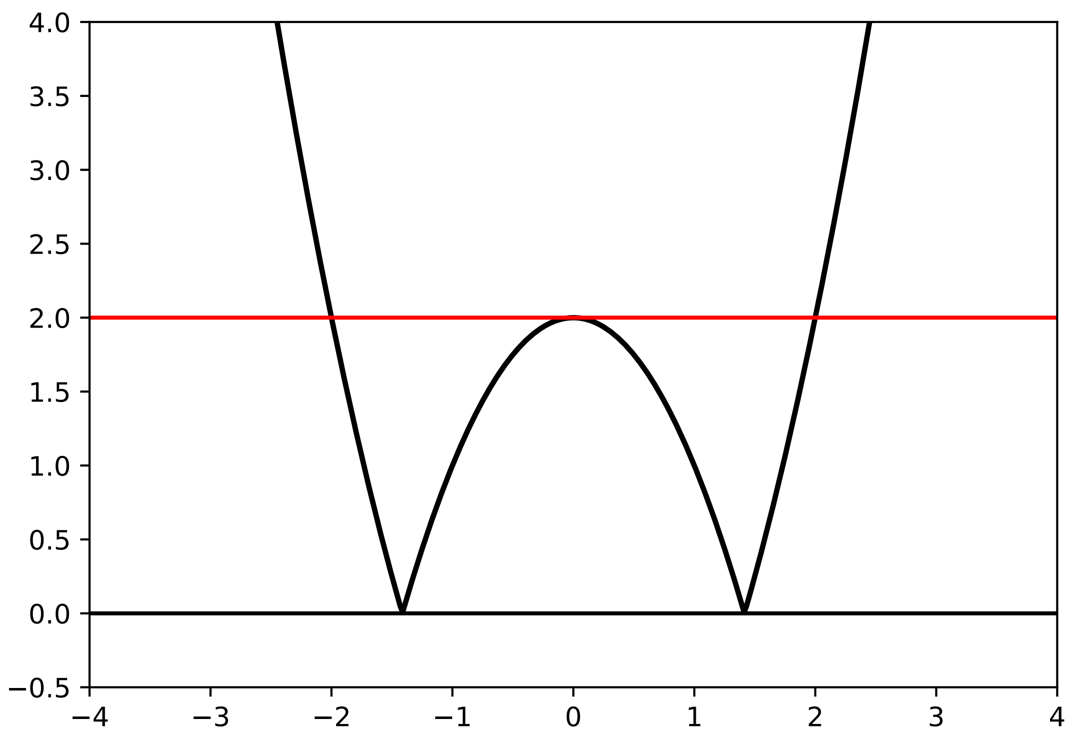
```
plt.axhline(0,0,color="black")
plt.ylim(-0.5,4)
```

```
## (-0.5, 4.0)
```

```
plt.xlim(-4,4)
```

```
## (-4.0, 4.0)
```

```
plt.show()
```



3. Resuelve analiticamente y graficamente la inecuacion:

Tenemos la inecuación $|x-4| < |x+2|$.

Partiendo de que $|x|^2 = x^2$, entonces deducimos que:

$$(|x-4|)^2 < (|x+2|)^2$$
$$x^2 - 8x + 16 < x^2 + 4x + 4$$
$$12x > 12 \;\rightarrow\; x > 1$$

Se deduce que le intervalo que resuelve la inecuación para x es $(1, +\infty)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```python
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr1 = abs(x-4)
expr2 =abs(x+2)

result = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr1<expr2,x)

print(result)
```

```
## (1 < x) & (x < oo)
```

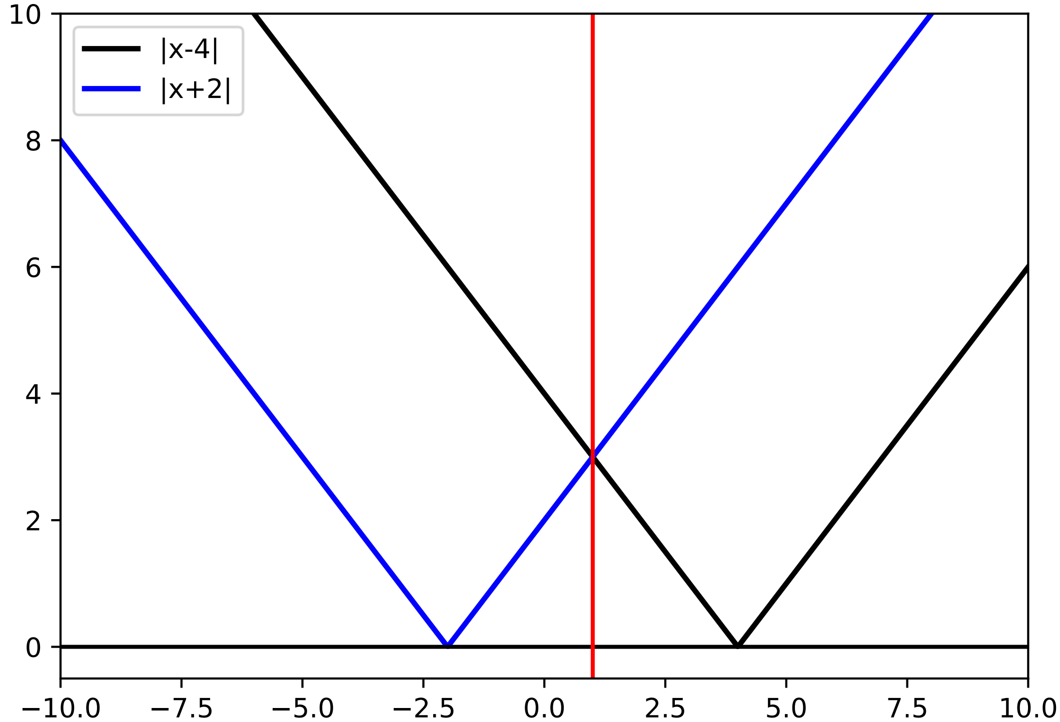
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(10,-10,1000)
def f1 (x):
  return abs(x-4)
def f2 (x):
  return abs(x+2)
plt.plot(x, f1(x),color="black",linewidth=2,label="|x-4|")
plt.plot(x, f2(x),color="blue",linewidth=2, label="|x+2|")
plt.axhline(0,0,color="black")
plt.axvline(1,0,color="red")
plt.ylim(-0.5,10)
```

```
## (-0.5, 10.0)
```

```python
plt.xlim(-10,10)
```

```
## (-10.0, 10.0)
```

```python
plt.legend()
plt.show()
```



4. Resuelve la siguiente inecuacion:

Tenemos: $x < x^2 - 12 < 3x$

Hemos de resolver dos inecuaciones para luego realziar una intersección de lo obtenido en ambas.

En el primer caso $x < x^2 - 12$, al resolver la inecuación de segundo grado se obtiene que la variable x debe cumplir: $x < -3$ y $x > 4$. Por tanto el intervalo que resuelve esta primera parte es $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

En el segundo caso $x^2 - 12 < 3x$, al resolver esta inecuación de segundo grado se obtiene que la variable x debe cumplir: $x < \frac{3+\sqrt{57}}{2}$ y $x > \frac{3-\sqrt{57}}{2}$. Por tanto, el intervalo que resuelve este apartado es $(\frac{3-\sqrt{57}}{2}, \frac{3+\sqrt{57}}{2})$

Si hacemos la intersección entre ambos resultados $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty) \cap (\frac{3-\sqrt{57}}{2}, \frac{3+\sqrt{57}}{2})$, obtenemos que el intervalo que resuelve la expresión pedida en el ejercicio es $(4, \frac{3+\sqrt{57}}{2})$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr1 = x
expr2 = (x**2)-12
expr3 = 3*x

result1 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr1<expr2,x)
print(result1)
```

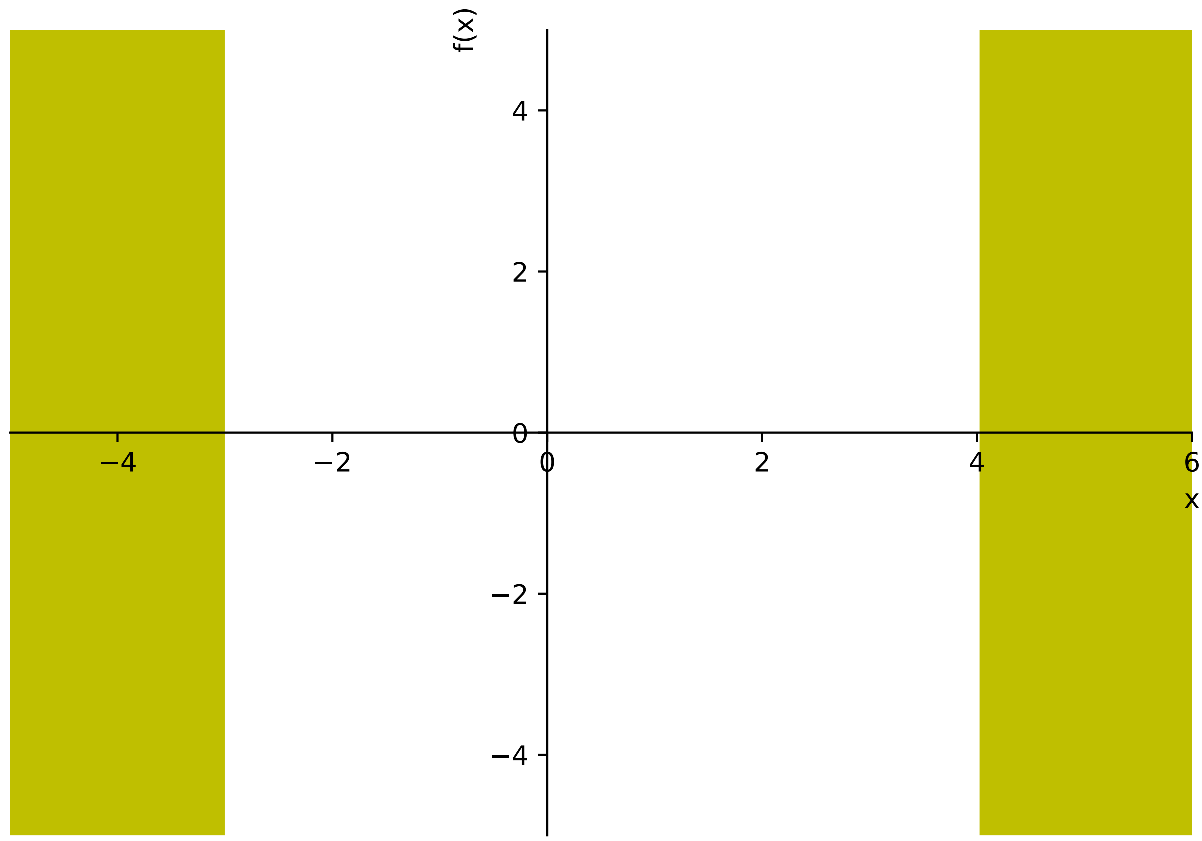
```
## ((-oo < x) & (x < -3)) | ((4 < x) & (x < oo))
```

```
result2 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr2<expr3,x)
print(result2)
```

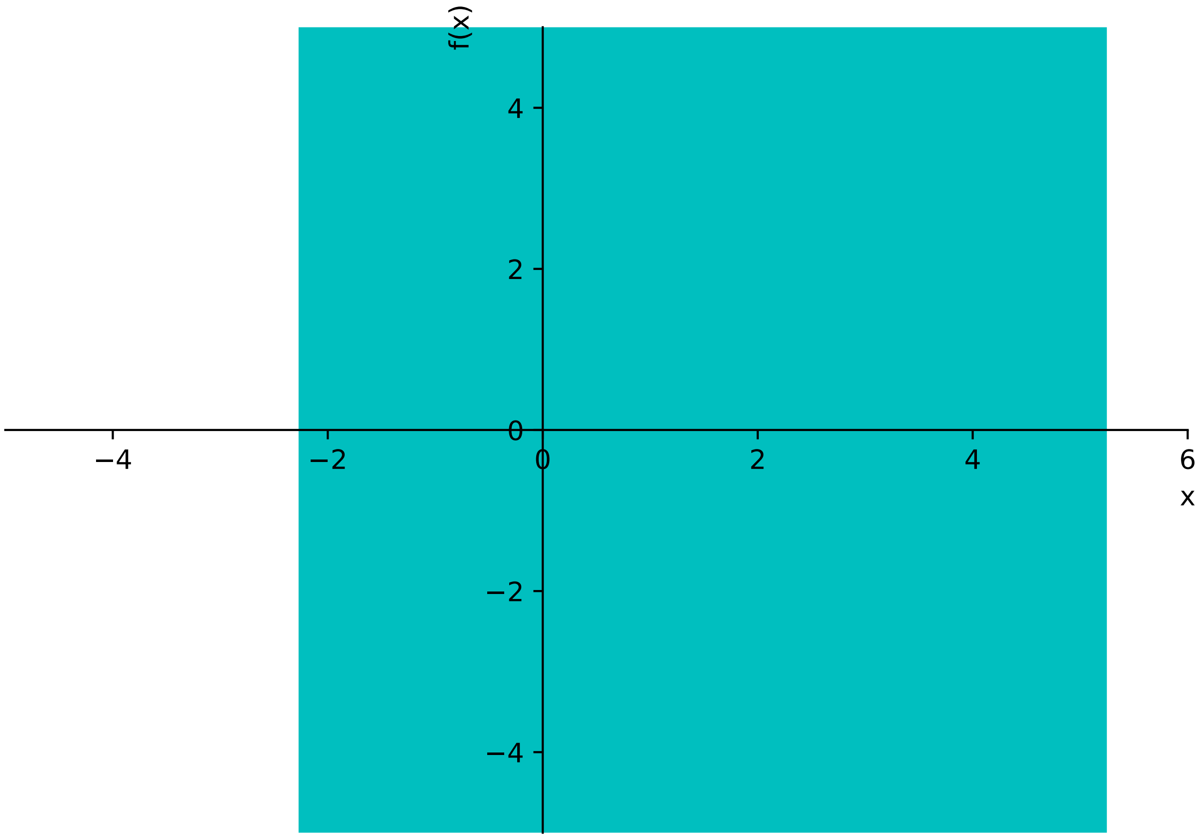
```
## (x < 3/2 + sqrt(57)/2) & (3/2 - sqrt(57)/2 < x)
```

Vemos las gráficas de cada uno de las inecuaciones planteadas, para luego hacer una intersección.

```
p1 = sp.plotting.plot_implicit(x<(x**2)-12,(x,-5.,6.),line_color="y")
```




```
p2 = sp.plotting.plot_implicit((x**2)-12<3*x,(x,-5.,6.),line_color="c")
```



5. Resuelve la siguiente inecuacion:

Tenemos: $0 < |x - 3| < \frac{1}{3}$

Al ser valor absoluto de la primera expresión $0 < |x - 3|$ se determina que $x \neq 3$. De la segunda expresión se obtiene que: $\frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$. Por tanto, el intervalo que resuelve el problema es $(\frac{8}{3}, \frac{10}{3})$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr1 = abs(x-3)

result1 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr1>0,x)
print(result1)
```

```
## (x > -oo) & (x < oo) & Ne(x, 3)
```

```
result2 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr1<1/3,x)
print(result2)
```

```
## (2.66666666666667 < x) & (x < 3.33333333333333)
```

6. Resuelve la siguiente inecuacion:

Tenemos: $|x-2|+|x+2| \leq 4$.

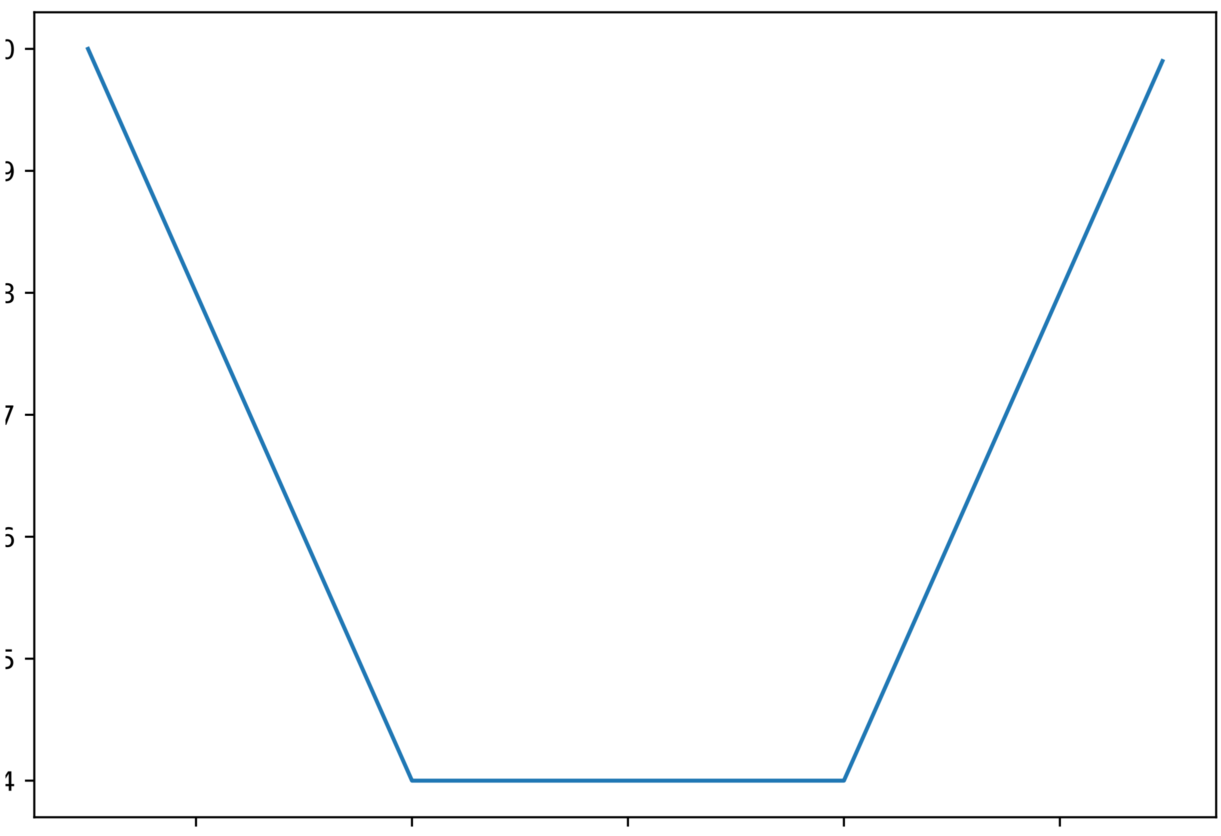
Resolviendo la inecuación obtenemos que $x \leq 2$ y $x \geq -2$. Por tanto, la solución de la inecuación es el intervalo $(-2, 2)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python para graficarlo.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.arange(-5,5,0.05)
y = abs(x-2) + abs(x+2)

plt.plot(x,y)
plt.show()
```



7. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $|x^2-3|>1$

Partimos de la inecuación de segundo grado $|x^2-3|>1$.

Para la resolución de la inecuación es mejor partir de la siguiente expresión $|x^2-3| \leq 1$, la cual al desarrollarla obtenemos: $2 < x^2 < 4$.

Se observa que hay cuatro puntos donde la ecuación varía siendo mayor o menor de 1, estos puntos son $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2$.

Atendiendo a dichos puntos descritos la expresión $|x^2-3| > 1$ se cumplirá en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (\sqrt{-2}, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr1 = abs((x**2)-3)


result1 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr1>1,x)
print(result1)
```

```
## ((-oo < x) & (x < -2)) | ((2 < x) & (x < oo)) | ((x < sqrt(2)) & (-sqrt(2) < x))
```

b. $|x^2-x+1| > 1$

Al igual que en el ejemplo a partimos de la expresión $|x^2-x+1| < 1$. Tenemos la expresión siguiente al desarrollar $-1 < x^2-x+1 < 1$.

Resolvemos cada parte de la inecuación obtenida. La primera parte, $-1 < x^2-x+1$, no presenta soluciones reales al resolver, siendo positiva para todo $\mathbb{R}$. En cuanto a la segunda parte de la inecuación, $x^2-x+1 < 1$, se obtienen dos soluciones (0,1). Estudiando los intervalos que forman se obtiene que el intervalo solución de la inecuación es $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
expr1 = abs((x**2)-x+1)


result1 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr1>1,x)
print(result1)
```

```
## ((-oo < x) & (x < 0)) | ((1 < x) & (x < oo))
```

8. Resuelve la siguiente inecuacion:

La inecuación es $\frac{|x-4|}{|x^2+5|} < 1$.

Se discierne que el denominador de la ecuacíon nunca puede ser cero, podemos poner la siguiente expresión $|x-4| < |x^2+5|$. Si resolvemos, discenimos que no hay solución en la recta real, por tanto el conjunto estudiado o es cierto para todo $\mathbb{R}$ o no lo es. Si sustituimos se comprueba facilmente que la solución de la inecuación es toda la recta real, el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```python
import sympy as sp

x = sp.var("x")
expr = abs(x-4)/abs((x**2)+5)


result1 = sp.solvers.inequalities.solve_univariate_inequality(expr<1,x)
print(result1)
```

```
## (-oo < x) & (x < oo)
```

9. Representa graficamente los conjuntos de puntos (x, y) tales que:

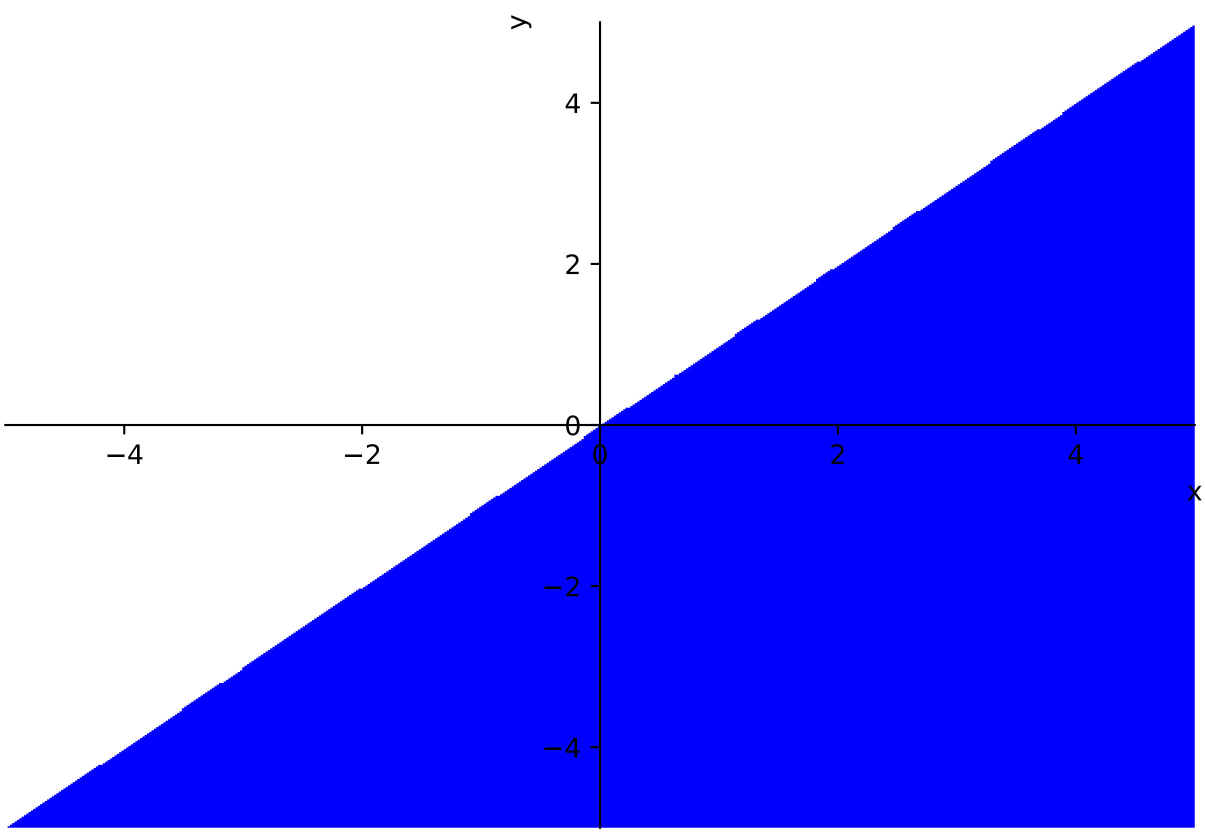
a. $x>y$

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```python
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

p1 = sp.plot_implicit(x>y)
```



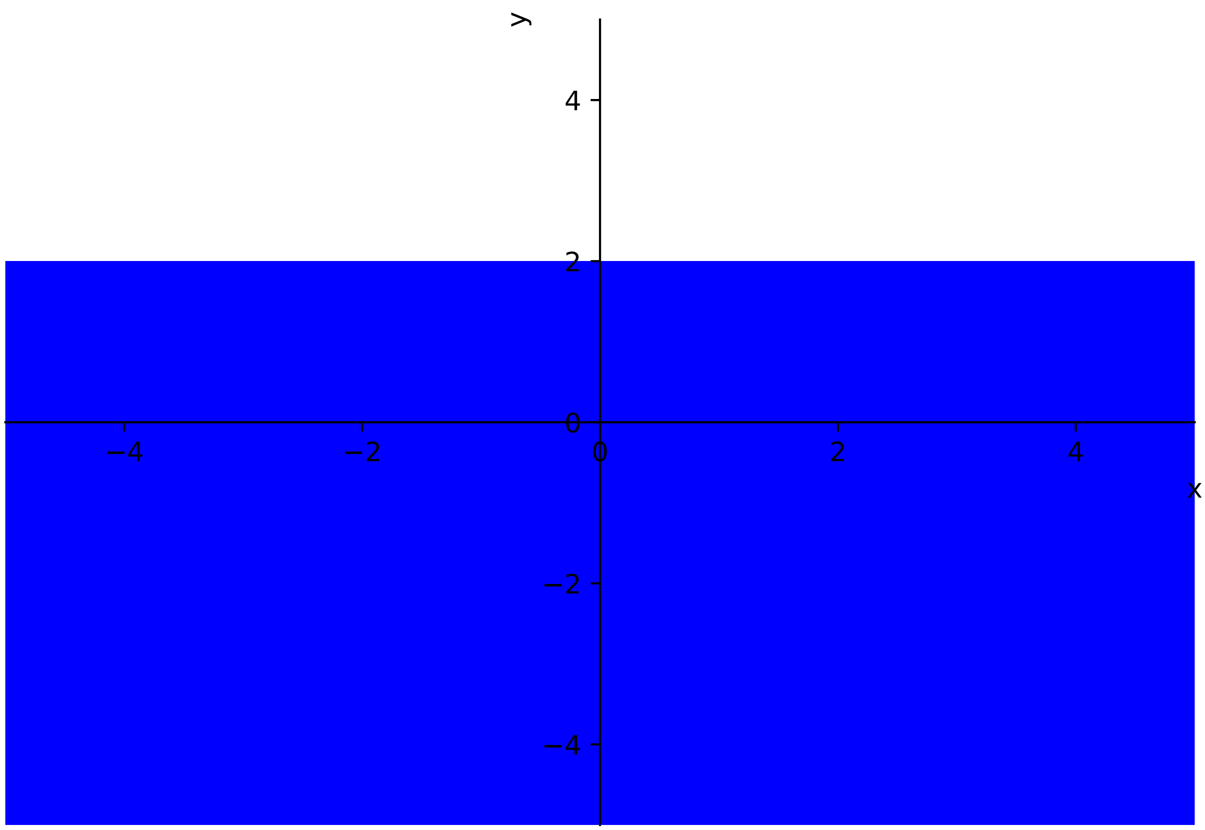
b. $y \leq 2$

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

p1 = sp.plot_implicit(y<=2,x)
```



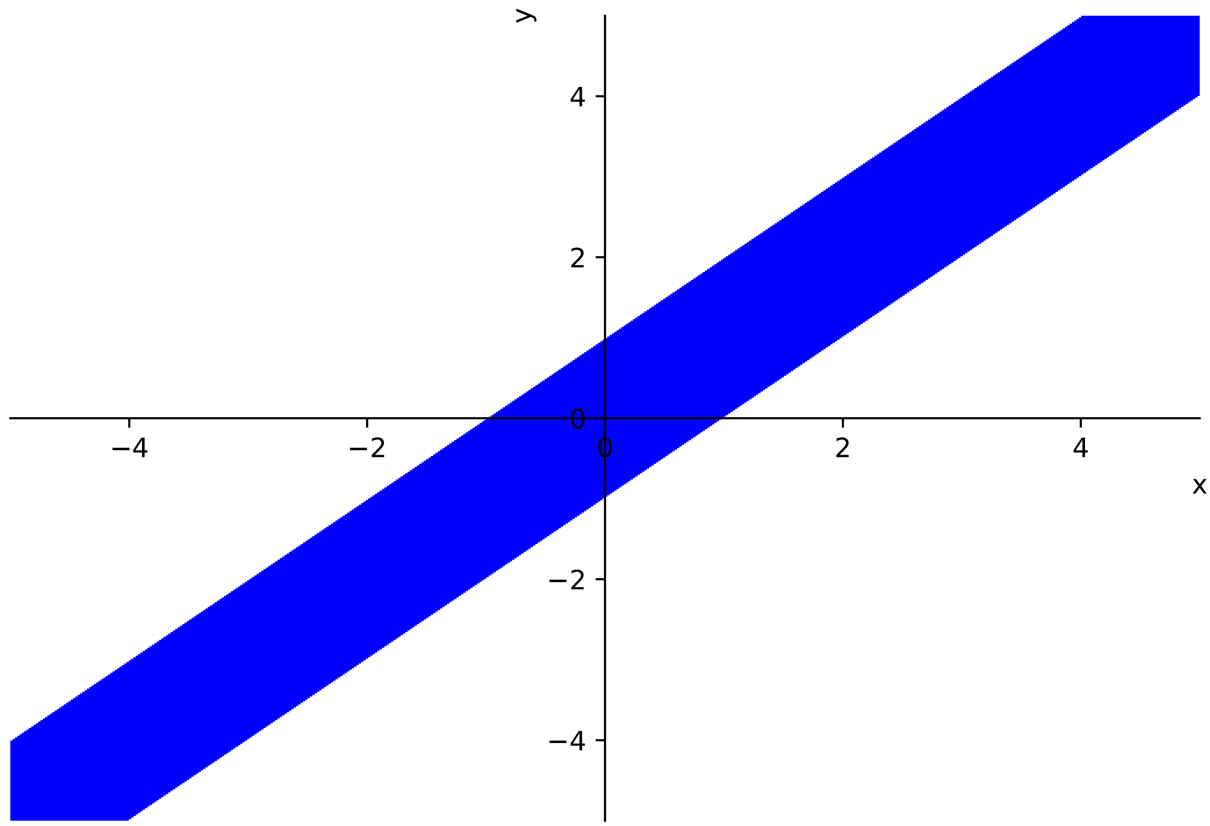
c. $|x - y| < 1$

Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

p1 = sp.plot_implicit(abs(x-y)<1)
```



10. Representa graficamente los conjuntos de puntos (x, y) tales que:

a. $|x| + |y| = 1$

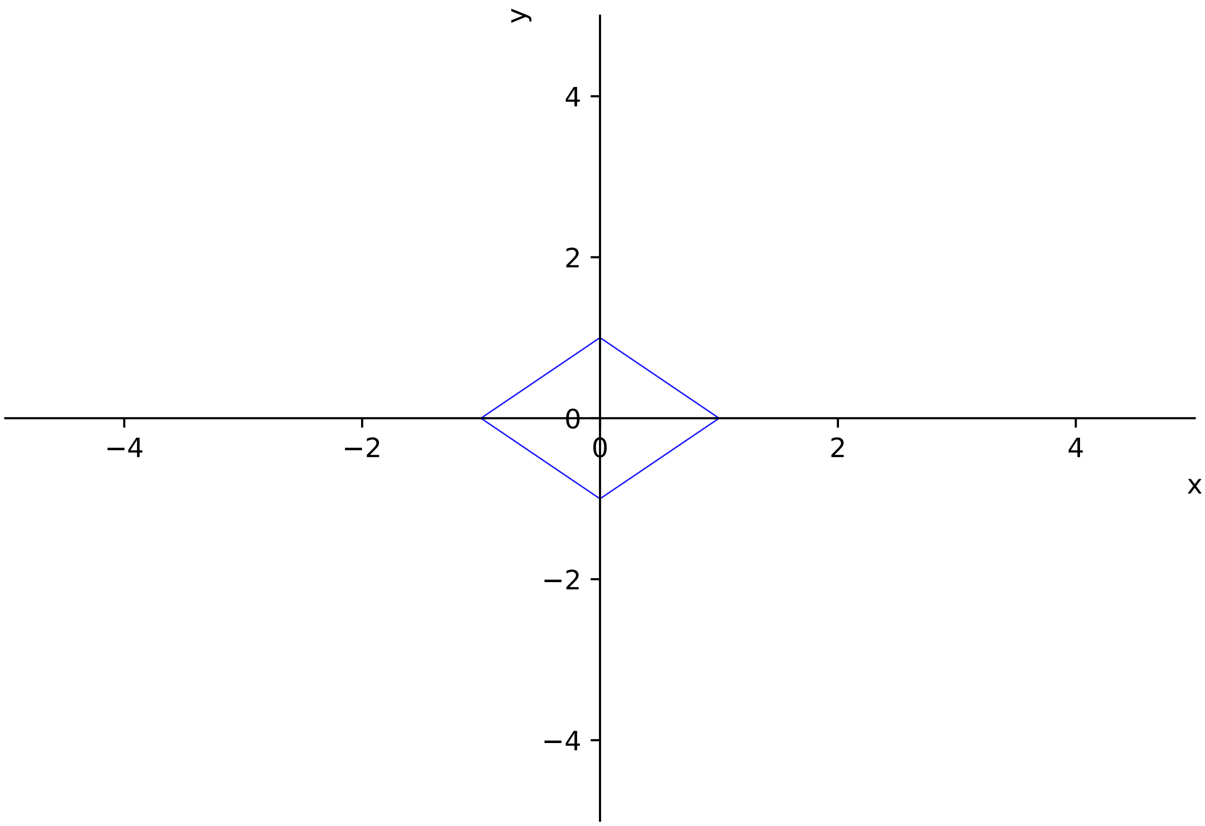
Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

expr = abs(x)+abs(y) -1

p1 = sp.plot_implicit(expr)
```



b. $|x-1| = |y-1|$

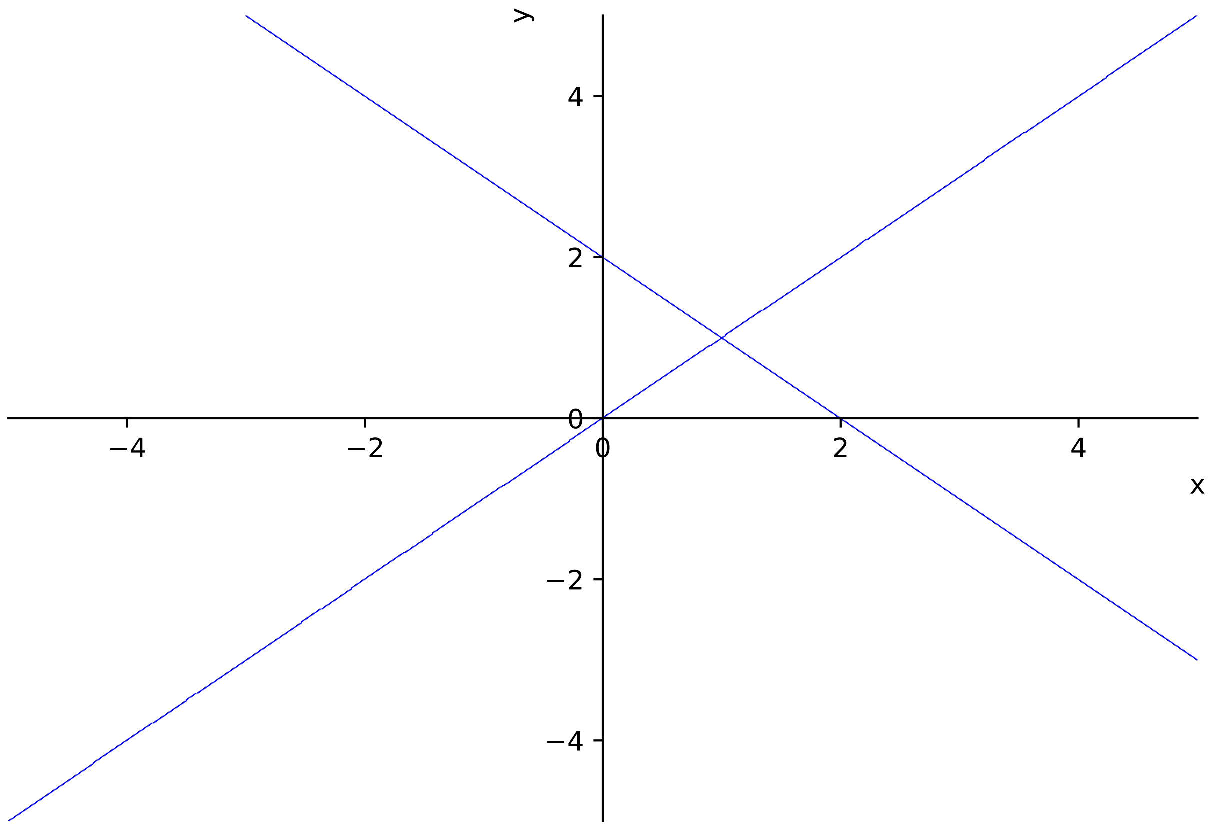
Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

expr = abs(x-1)-abs(y-1)

p1 = sp.plot_implicit(expr)
```



c. $x \cdot y = 0$

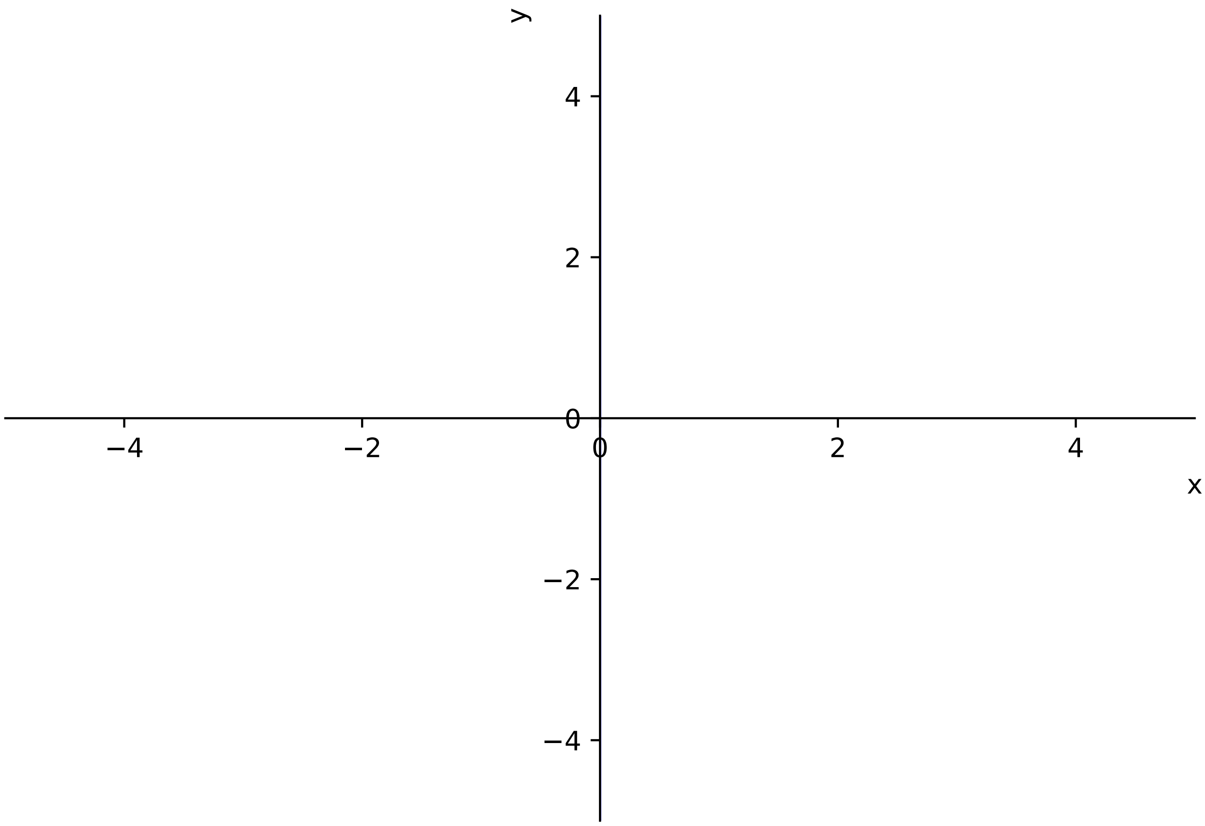
Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

expr = x*y

p1 = sp.plot_implicit(x*y, color="red",lw=5)
```



11. Representa graficamente los conjuntos de puntos (x, y) tales que:

a. $y = 2 - \frac{|x|}{x}$

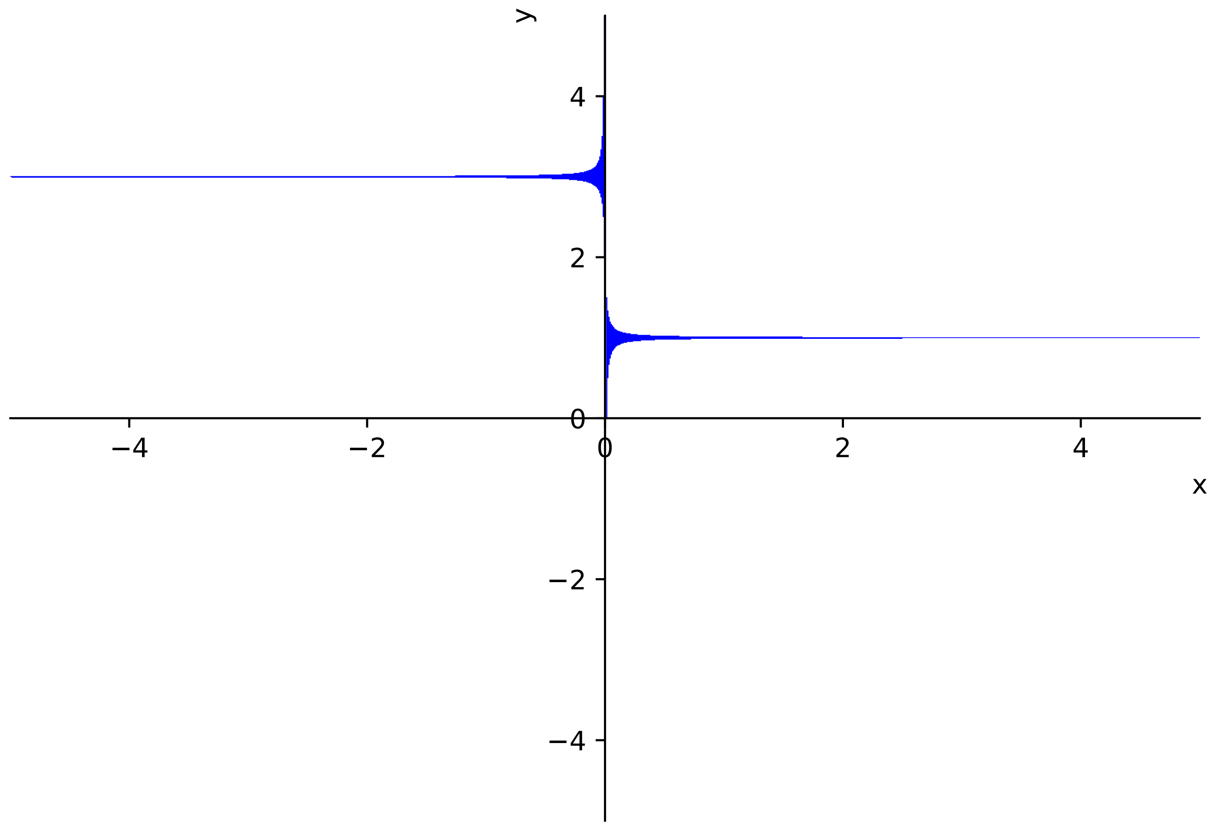
Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

expr = y-2+(abs(x)/x)

p1 = sp.plot_implicit(expr, color="red",lw=5)
```



b. $(x-1)^2 + (y-3)^2 < 1$

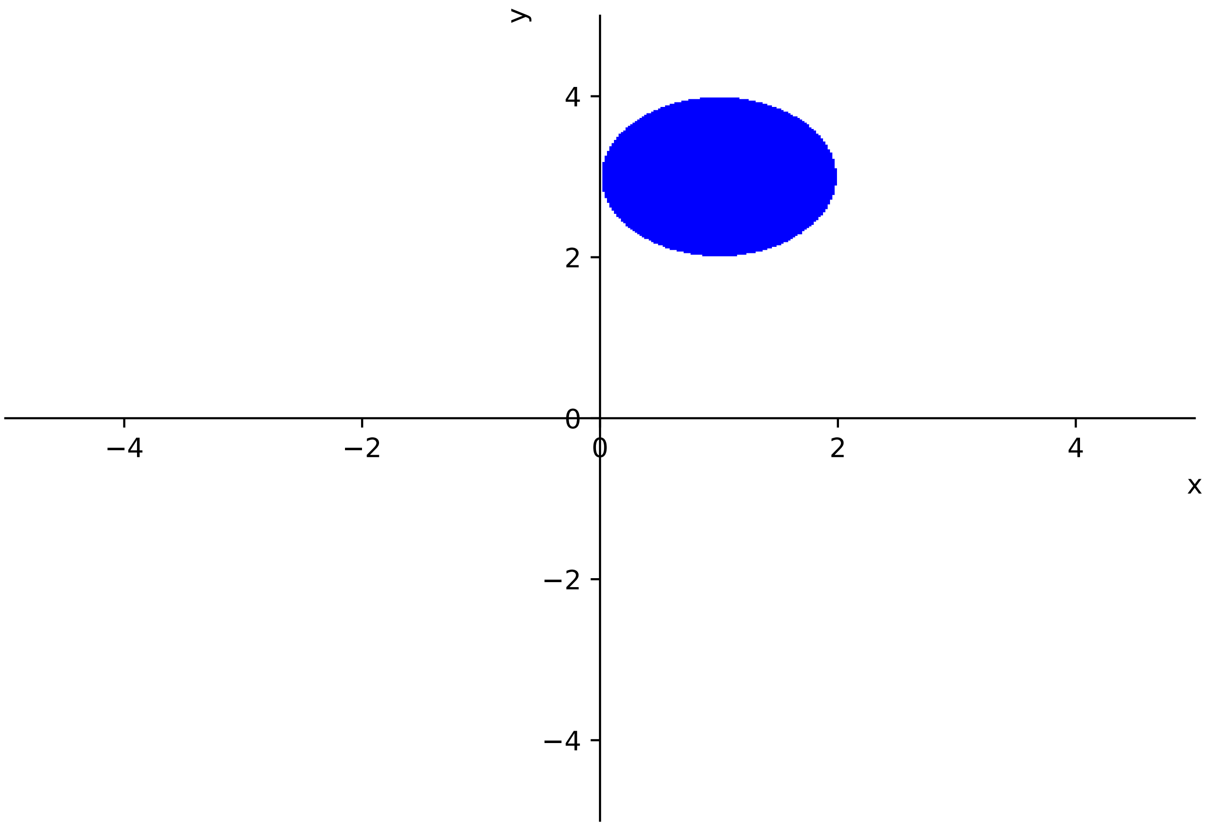
Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

expr = (x-1)**2 + (y-3)**2

p1 = sp.plot_implicit(expr<1, color="red")
```



c. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

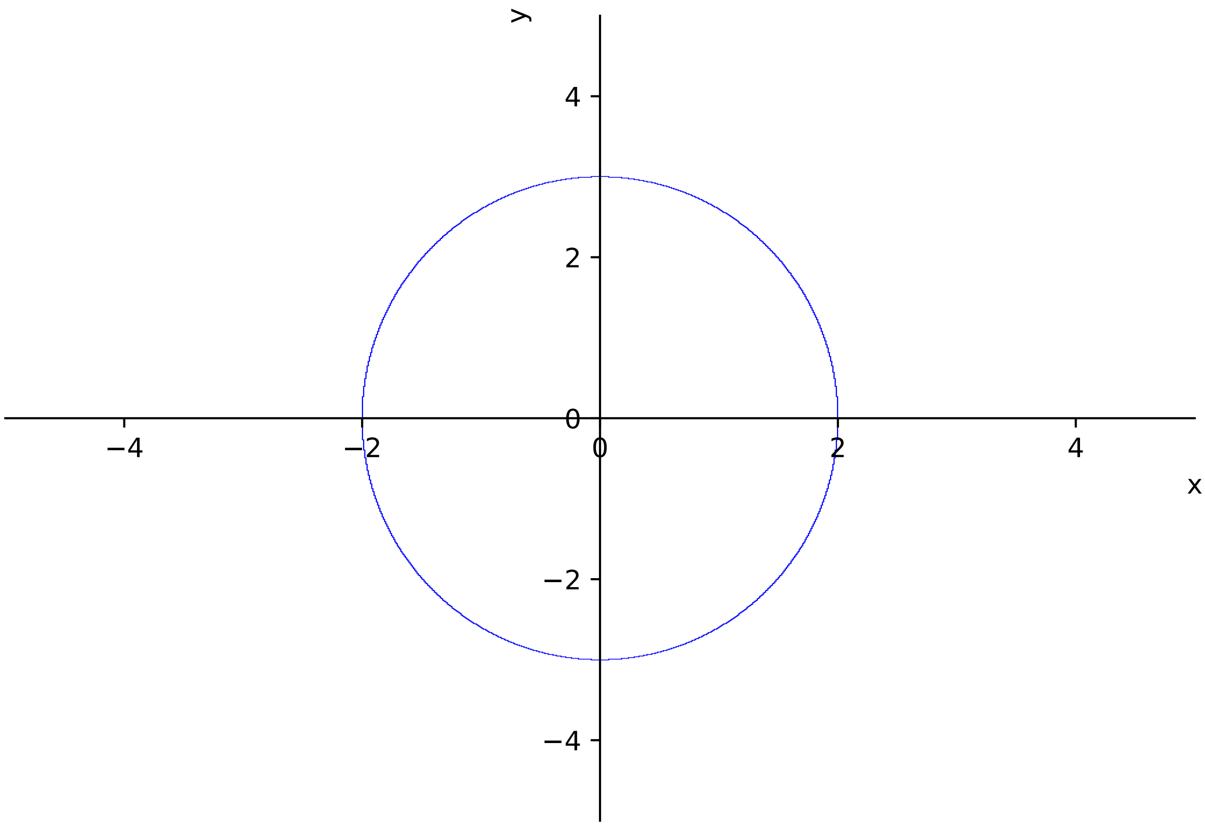
Vamos a determinar su resolución a través de código Python.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols("x")
y = sp.symbols("y")

expr = ((x**2)/4) + ((y**2)/9) - 1

p1 = sp.plot_implicit(expr, color="red")
```


y
4
2
0
−4
−2
0
2
4
x
−2
−4