Tema 5 - Vectores

Ramon Ceballos

28/2/2021

Operaciones con vectores

1. Suma de vectores

Primera forma

Suma de vectores. Dados $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, su suma es:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Geométricamente es el vector formado por la diagonal del paralelogramo que tiene los dos vectores sumandos como lados y origen el mismo que ambos:

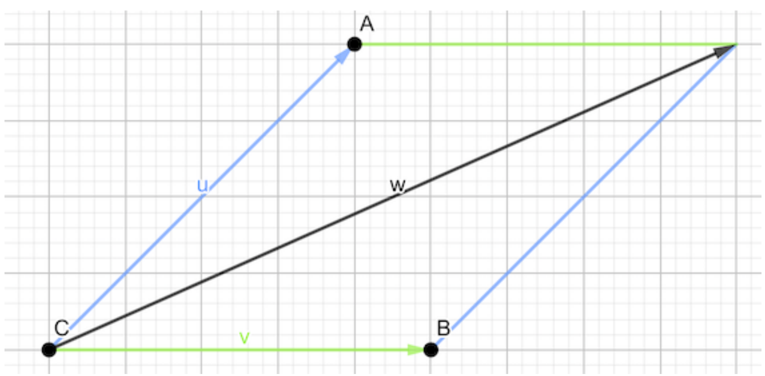

Figure 1: Suma de vectores

Segunda forma

O bien, el vector que une el origen del primer sumando con el extremo del último, habiendo colocado cada origen de los vectores sumandos sobre el extremo del vector sumando precedente.

Si se tuviesen que sumar más de dos vectores, resulta más útil la segunda forma que hemos mostrado,

Basta con colocar cada origen de los vectores sumandos sobre el extremo del vector sumando precedente.

2. Resta de vectores

Resta de vectores. Dados $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, su resta es:

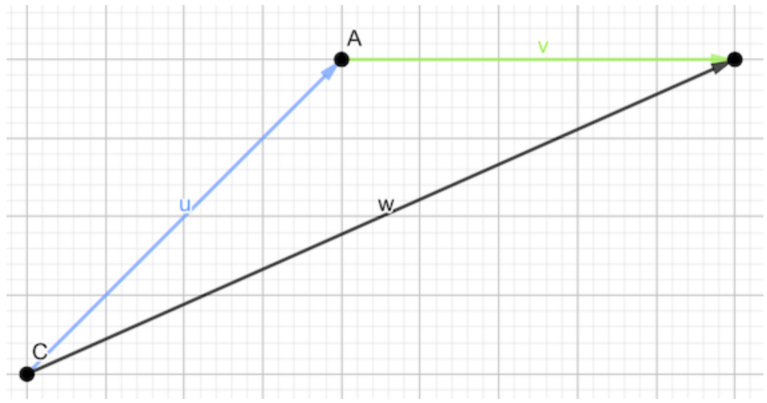

Figure 2: Suma de vectores

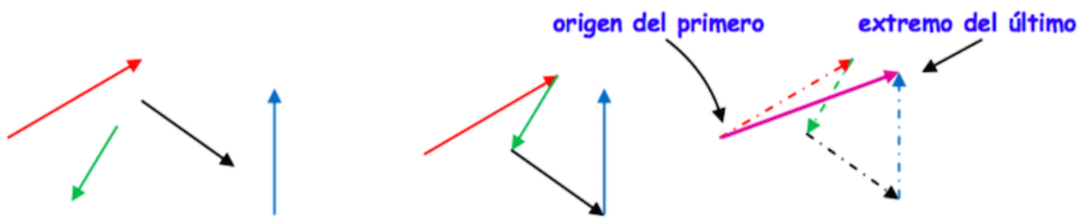

Figure 3: Suma de más de 2 vectores

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)$$

Geométricamente, se realiza la suma entre el vector minuendo y el opuesto del sustraendo.

Observación. Al realizar la resta $\vec{u} - \vec{v}$ se busca un vector $\vec{w}$ tal que si se le suma al sustraendo ha de dar el minuendo.

En definitiva, será:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$$

Si se tiene un vector $\vec{AB}$ obtenido a partir de los puntos A y B y se dibujan los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$.

Entonces se puede ver como $\vec{AB}$, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ forman un triángulo vectorial que cumple las relaciones siguientes:

$$\vec{OA} + \vec{AB} - \vec{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

3. Producto de un vector por un escalar

Producto por escalar. Dados $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, su producto es:

$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$$

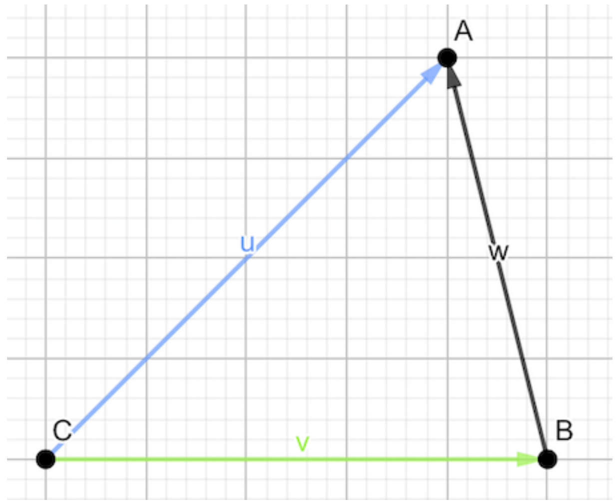

Figure 4: Resta de vectores

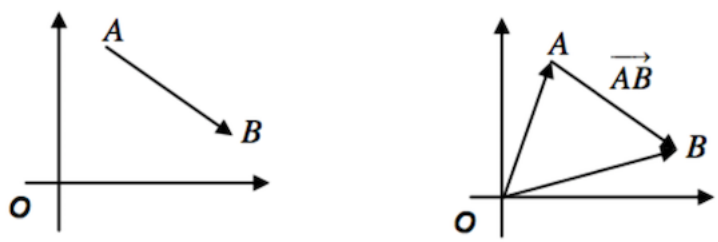

Figure 5: Obtención de las componentes de un vector

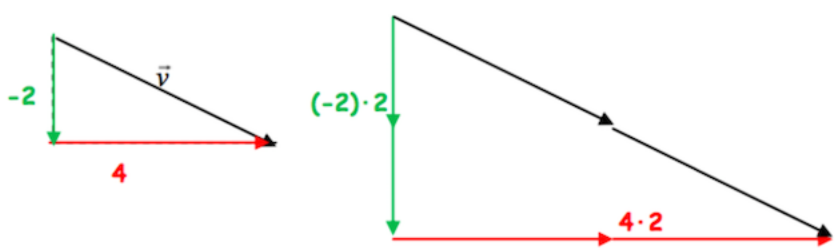

Figure 6: Producto por escalar

El resultado de multiplicar un escalar $\lambda \neq 0$ por un vector $\vec{u}$ es otro vector $\vec{v}$ de la misma dirección que $\vec{u}$, de sentido igual o contrario dependiendo del signo del escalar (positivo o negativo, respectivamente) y de módulo igual a λ veces el de $\vec{u}$.

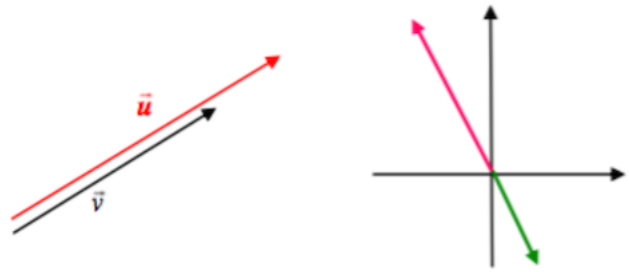

Figure 7: Producto por escalar λ

3.1. Vectores paralelos

Vectores paralelos. Dos vectores $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ son paralelos (o proporcionales) si existe un valor $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

Serán del mismo sentido si $\lambda > 0$ y de sentidos opuestos si $\lambda < 0$.

4. Combinación lineal de vectores

Combinación lineal de vectores. Dados $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{K}^n$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ se define la combinación lineal de los vectores de V como el vector $\vec{w}$ tal que:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k$$

La combinación lineal de vectores no es una operación nueva, sino que reune en un mismo lugar la suma de vectores y el porducto por escalares.

Para poder hacer combinaciones lineales de vectores, es necesario que todos ellos tengan el mismo número de componentes y el resultado será otro vector de estas mismas características.

Ejemplo 5

¿Es el vector $(2, 3)$ combinación lineal de $(3, 1)$ y $(-6, -2)$?

En otras palabras, ¿existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(2, 3) = a(3, 1) + b(-6, -2)$?

Si lo pensamos de otra forma, lo anterior equivale a probar si existe solución al sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} 3a & - & 6b & = & 2 \\ a & - & 2b & = & 3 \end{cases}$$

Veamos de qué tipo de sistema se trata haciendo uso del Teorema de Rouché-Frobenius.

En primer lugar, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Sin embargo, si sustituimos la segunda columna por el vector de términos independientes, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Con lo cual, acabamos de ver que $rg(A) = 1$ mientras que $rg(A|B) = 2$. Por tanto, el sistema es incompatible, lo que nos lleva a concluir que no, $(2, 3)$ no es combinación lineal de $(3, 1)$ y $(-6, -2)$.