Tema 5 - Vectores

Ramon Ceballos

28/2/2021

Producto vectorial y producto mixto

Solo va a tene rsentido su aplicación en R^3.

1. Producto vectorial

Producto vectorial ($\vec{u} \wedge \vec{v}$). Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como el vector:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

1.1. Propiedades del producto vectorial

A. Ortogonalidad del producto vectorial con el producto escalar de cada vector que lo forma

Propiedades del producto vectorial. Si se multiplica escalarmente el producto escalar de $\vec{u}$ por el producto vectorial de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dará 0, y viceversa.

$$\langle \vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \rangle = 0$$
$$\langle \vec{v}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \rangle = 0$$

Donde se deduce que tanto $\vec{u}$ como $\vec{v}$ son ortogonales (perpendiculares) a su producto vectorial.

B. Área de un paralelogramo en el producto vectorial

Propiedades del producto vectorial. Geométricamente, el módulo del producto vectorial, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, representa el área del paralelogramo determinado por los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot h = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\alpha)$$

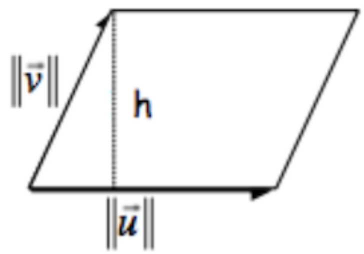

Figure 1: Interpretación geométrica del producto vectorial

C. Producto vectorial como determinante

Producto vectorial como determinante.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

D. Propiedades generales del producto vectorial

Propiedades del producto vectorial.

- Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Propiedad distributiva:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} (\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$$

- Propiedad asociativa de vectores y escalares:

$$\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha\vec{v}$$

- $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$

2. Producto mixto

Producto mixto. ($\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$) Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ distintos del 0. Entonces, el producto mixto de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ se define como el vector:

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

2.1. Vectores coplanarios

Vectores coplanarios. Si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$

Si el producto mixto da cero, tenemos que los vectores son coplanarios.

Esto ocurre porque si el determinante mostrado anteriormente vale 0, entonces tenemos que una de las filas es combinación lineal de las otras dos.

2.2. Propiedades del producto mixto

A. Generalidades

Propiedades del producto mixto.

- La fórmula del producto misxto será: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1$. Se obtiene aplicando la regla de Sarrus a la matriz anterior.
- Si se cambia una fila por otra, el determinante cambia de signo. Si se cambian dos filas, el determinante mantiene el signo. De esto se extrae lo siguiente: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\} = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} = -\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\} = -\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = -\{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$
- Si los tres vectores son coplanarios, entonces: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$
- Si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$, entonces o algún vector es $\vec{0}$ o los tres vectores son coplanarios.

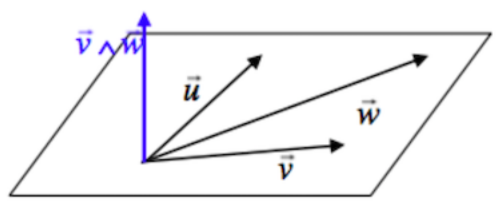

Figure 2: 3 vectores coplanarios

B. Volumen del paralelepípedo y producto mixto de vectores

Propiedades del producto mixto. Geométricamente, el producto mixto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores **u, v, w**.

Observación. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v} \wedge \vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$ donde $||\vec{v} \wedge \vec{w}||$ es el área de la base del paralelepípedo y $||\vec{u}|| \cos(\alpha)$ es la proyección escalar del vector $\vec{u}$ sobre la dirección perpendicular a la base, es decir, la altura del paralelepípedo. Esto da el volumen del paralelepípedo.

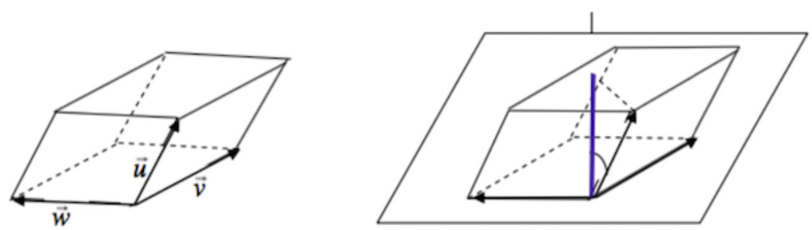

Figure 3: Interpretación geométrica del producto mixto