Tema 6 - Espacios vectoriales

Ramon Ceballos

5/3/2021

Subespacios vectoriales

1. Definición general

Subespacio vectorial. Sea $F \subseteq E$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que F es un subespacio vectorial de E si, y solo si, se verifica:

- La suma de dos elementos de F es otro elemento de F:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$$

- El producto de un escalar por un elemento F es otro elemento de F:

$$\forall \vec{x} \in F,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \vec{x} \in F$$

1.1. Subespacios triviales

Cualquier espacio vectorial siempre va a tener dos subespacios vectoriales triviales.

Subespacios triviales. Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se verifica siempre que E y $\{0\}$ (conjunto cero, en el que solo consta el elemento neutro) son subespacios vectoriales de E. Estos se denominan **subespacios vectoriales triviales de E o impropios**.

De lo anterior, se deduce fácilmente la siguiente proposición.

Proposición. Si F es un subespacio vectorial de E, entonces:

- $\vec{0} \in F$. Cualquier subespacio vectorial debe de contener el vector $\vec{0}$ del espacio.
- Si $\vec{x} \in F$, entonces $-\vec{x} \in F$. Debe estar presente en el subespacio vectorial cualquier elemento opuesto de cada elemento contenido.

Una gran utilidad de esta proposición es que si se comprueba que $\vec{0} \notin F$, entonces este conjunto no puede ser nunca un espacio vectorial.

Ejercicio 3. Demostrar formalmente esta proposición.

2. Proposiciones para un subespacio vectorial

2.1 Proposiciones generales

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. (espacio vectorial) y F un subconjunto no vacío, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- F es un subespacio vectorial
- F es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las mismas operaciones de E restringidas a F
- F verifica $ax + by \in F \quad \forall a, b \in \mathbb{K}$ y $\forall x, y \in F$
- Cualquier combinación lineal de vectores de F es un vector de F, es decir, $\sum a_i x_i \in F \quad \forall a_i \in \mathbb{K}$ y $\forall x_i \in F$

Ejercicio 4. Demostrar formalmente esta proposición.

2.2 Proposición de intersección y suma de familia de suespacios vectoriales

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial si:

- Si $(F_i)_{i \in I}$ es una familia cualquiera de subespacios vectoriales de E, entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ (la intersección de todas las familias, es decir, los vectores que pertenecen a la vez a todos los subespacios vectoriales) es un subespacio vectorial de E contenido en todos los F_i con $i \in I$. Este será el subespacio vectorial más grande contenido a la vez en todos y cada uno de los F_i.

- Si $F_1, \ldots, F_n$ son subespacios vectoriales de E, entonces la suma de todos los subespacios:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_i + \cdots + F_n = \{x_1 + \cdots + x_n \mid x_i \in F_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

Esta suma es un subespacio vectorial de E llamado **subespacio vectorial suma** que contiene todos los F_i con $i = 1, \ldots, n$. Este será el subespacio vectorial más pequeño que contiene a todos y cada uno de los F_i.

Ejercicio 5. Demostrar formalmente esta proposición.

Lo que nos dice la proposición anterior, en otras palabras, es que la **intersección** infinita de subespacios vectoriales, es a su vez un subespacio vectorial.

No obstante, la **unión** (finita o arbitraria) de subespacios vectoriales no es subespacio vectorial.

Por su parte, una **suma finita** de subespacios vectoriales sí es subespacio vectorial y sus elementos son de la forma descrita anteriormente.

Ejemplo 3

En el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, consideremos los subespacios vectoriales F, G dados por los ejes de coordenadas cartesianas. Así pues:

$$F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Entonces, es fácil ver que $F \cap G = \{(0, 0)\}$ y que $F + G = \mathbb{R}^2$, que son efectivamente subespacios vectoriales (de hecho son los impropios).

En cambio, si hacemos la unión, tenemos $F \cup G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ o } y = 0\}$, que no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, ya que tomando los elementos $(1, 0), (0, 1) \in F \cup G$, tenemos que su suma, $(1, 1) \notin F \cup G$

3. Suma directa de subespacios vectoriales

En un subespacio vectorial, la suma $F+G$ tiene una particularidad ya que en este nuevo subespacio vectorial, la expresión de cada elemento como suma de un elemento de F más un elemento de G no tiene por qué ser única y, por lo general, no lo es.

En este sentido, podemos dar las siguientes definiciones:

1. **Suma directa para dos subvectores.** Sean E un $\mathbb{K}$-e.v. y F, G subespacios vectoriales de E. Entonces, si cada elemento del subespacio vectorial suma $F+G$ se escribe de manera única como suma de un elemento de F más un elemento de G, se dice que la suma de F y G es directa y se denota por $F \oplus G$
2. **Complementarios en E.** Si además de tener $F \oplus G$ se verifica $E = F \oplus G$, se dice que F y G son complementarios en E.

Proposición. Sean F y G dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{K}$-e.v. E. Entonces, la suma de F y G es directa si, y solo si, $F \cap G = \{0\}$ (la intersección entre F y G es el vector 0).

Ejercicio 6. Demostrar formalmente esta proposición.

Consecuencia de esta proposición surge el concepto de colorario que viene definido a continuación.

Corolario. Sean E un $\mathbb{K}$-e.v. y F, G subespacios vectoriales de E. Los subespacios F, G serán complementarios si verifican:

- $\forall x \in E, \exists y \in F,\ z \in G\ :\ x = y + z$. Indica que para cualquier vector $\vec{x}$ del espacio E, existe un vector $\vec{y}$ del subespacio F y un vector $\vec{z}$ del subespacio de G de modo que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
- $F \cap G = \{0\}$. La intersección entre F y G es el vector nulo $\vec{0}$.

El concepto de suma directa lo podemos generalizar a n sumandos del siguiente modo.

Suma directa para n subvectores. Sean E un $\mathbb{K}$-e.v. y $F_1, \ldots, F_n$ subespacios vectoriales de E. Entonces, diremos que la suma $F_1 + \cdots + F_n$ es directa si cada elemento de $F_1 + \cdots + F_n$ se escribe de manera única como suma de elementos de $F_1, \ldots, F_n$. Se denota por $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$

Ejemplo 3 (colorario)

Recordemos el `Ejemplo 3`. En el $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^2$ habíamos considerado:

$$F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

También, habíamos visto que $F + G = \mathbb{R}^2$ y que $F \cap G = \{0\}$.

Con lo cual, tenemos que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$

Ejercicio 7

Se puede demostrar de forma parecida al caso $n = 2$, que la suma $F_1 + \cdots + F_n$ es directa si, y solo si, para todo $i = 2, \ldots, n$ se tiene que el único punto en común para cada F_i sea el vector $\vec{0}$.

$$F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1}) = \{0\}$$

4. Subespacio vectorial generado por S

En ocasiones disponemos de un subconjunto S de E que no es subespacio vectorial, pero estamos interesados en buscar el subespacio vectorial más pequeño (con respecto a la inclusión de todos los elementos del subconjunto S) que contiene este subconjunto S.

Este subespacios siempre existe ya que solo debemos considerar la familia de todos los subespacios vectoriales de E que contienen a S y entonces sabemos que su intersección es otro subespacio vectorial que, evidentemente, contiene a S y este será el más pequeño con la propiedad.

Subespacio vectorial generado por S. Será el subespacio más pequeño que contiene a todos los vectores del conjunto S. Lo denotamos por $\langle S \rangle$

Diremos también que S es un conjunto o sistema generador o que S genera a $\langle S \rangle$.

En definitiva, hemos visto que el subespacio vectorial generado por S será la intersección de todos los subespacios F de E que contienen a S. Esto se expresa del siguiente modo:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{S \subseteq F \\ F \text{ subespacio}}} F$$

De forma más general, definimos sistema generador del siguiente modo.

- **Sistema generador.** Dado un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in E$ (estos son los elementos del conjunto S), se dice que forman un sistema generador del espacio vectorial E si cualquier vector $\vec{u} \in E$ se puede expresar como una combinación lineal de ellos. Es decir:

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}:\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

4.1 Proposiciones

PROPOSICIÓN 1

Proposición. Sea S un subconjunto cualquiera de un $\mathbb{K}$-e.v. E. Entonces, el subespacio vectorial generado por S ($\langle S \rangle$) será las combinaciones lineales posibles de los elementos del conjunto S. Es decir:

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+;\ x_i \in S;\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Es decir, $\langle S \rangle$ es el subespacio formado por todas las combinaciones lineales posibles de elementos de S.

Ejercicio 8. Demostrar formalmente esta proposición.

Observación. A partir de la caracterización de un subespacio generado por un subconjunto, queda claro que si tenemos dos subconjuntos de E de forma que $S \subseteq S'$ (S está contenido en S'), entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$.

En el caso en que S es finito, $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces se puede escribir:

$$\langle S \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \{\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n \mid \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Ejemplo 4

Los vectores $(1, 0, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, 0, \ldots, 0),\ (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$ forman un sistema generador de $\mathbb{K}^n$.

Por lo tanto, podemos decir que $\mathbb{K}^n$ está finitamente generado.

Ejemplo 5

Análogamente, los vectores $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ forman un conjunto de generadores del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}_n[x]$, que es por lo tanto finitamente generado.

En cambio, $\mathbb{K}[x]$ es un $\mathbb{K}$-e.v. que no es finitamente generado. Si suponemos que $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ forma un conjunto finito de generadores de este espacio vectorial, considerando $n = \max(\deg(p_1), \ldots, \deg(p_k))$, todo polinomio de grado superior a n no podría ser expresado como combinación lineal de los $p_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$. Llegamos así a contradicción. Observemos pues que $\mathbb{K}[x]$ tiene un conjunto infinito (numerable) de generadores: $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$

Ejemplo 6

Dentro de $\mathbb{R}^3$ consideramos el subconjunto $F = \{(x, y, z) \mid 5x - y + 3z = 0\}$.

Entonces, está claro que F es un subespacio vectorial y que además, todo elemento de F es de la forma $(x, 5x + 3z, z)$ variando $x, z \in \mathbb{R}$. Así, todo elemento de F se escribe de la forma:

$$u = x \cdot (1, 5, 0) + z \cdot (0, 3, 1)$$

Por tanto, los vectores $(1, 5, 0)$ y $(0, 3, 1)$ generan todo F.

Ejercicio 9

- Demostrar que F es un subespacio vectorial de E
- Detallar por qué los elementos de F tienen esa forma

PROPOSICIÓN 2

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. y $S \subseteq E$ (S es un subconjunto de E). Si $u \in \langle S \rangle$, entonces se tiene $\langle S \cup \{u\} \rangle = \langle S \rangle$

Lo que nos viene a decir esta proposición es que un mismo espacio o subespacio vectorial puede tener conjuntos de generadores diferentes.

Ejercicio 10. Demostrar formalmente esta proposición.