Tema 3 - Producto por bloques y factorizaciones triangulares

Ramon Ceballos

24/2/2021

Producto por bloques

1. Definicion general

En el `Tema 1` vimos como multiplicar matrices. Resumiéndolo, consistía en realizar productos de filas por columnas pertinentes.

En caso de tener matrices (no necesariamente cuadradas) de órdenes elevados, cuyo producto pueda llevarse a cabo, los cálculos pueden resultar mucho más sencillos si dividimos las matrices en bloques y realizamos el producto por bloques.

Para llevar esto a cabo, hay que dividir las dos matrices que queramos multiplicar, A y B, en bloques o submatrices, de forma que cada fila de bloques de la primera matriz sea multiplicable por cada columna de bloques de la segunda.

Es decir, sean A,B matrices las cuales hemos dividido del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} C & | & D \\ -- & | & -- \\ E & | & F \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} G & | & H \\ -- & | & -- \\ J & | & K \end{pmatrix}$$

Podremos multiplicar A por B por bloques de la siguiente forma, siempre que los productos de matrices indicados en la siguiente matriz puedan llevarse a cabo:

$$AB = \begin{pmatrix} CG + DJ & | & CH + DK \\ ----- & | & ----- \\ EG + FJ & | & EH + FK \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Supongamos que queremos multiplicar las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, sabemos que el producto puede llevarse a cabo.

No obstante, en vez de multiplicar a lo bruto, dividamos las matrices en bloques del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 & 4 \\ -2 & 0 & | & 5 & 5 \\ -- & -- & | & -- & -- \\ 1 & 1 & | & 2 & -3 \\ 2 & 3 & | & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 3 \\ 2 & -1 & | & 0 \\ -- & -- & | & -- \\ -3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que esta división es correcta ya que si nombramos a cada uno de los bloques tal y como se indica a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} C & | & D \\ -- & | & -- \\ E & | & F \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} G & | & H \\ -- & | & -- \\ J & | & K \end{pmatrix}$$

Tenemos que las submatrices $C, D, E, F, G, J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mientras que las submatrices $H, K \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Una vez comprobado que todos los productos de matrices pueden llevarse a cabo, hay que hacer las siguientes operaciones para finalmente obtener:

$$AB = \begin{pmatrix} CG + DJ & | & CH + DK \\ ------ & | & ------ \\ EG + FJ & | & EH + FK \end{pmatrix}$$

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$DJ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -15 & 15 \end{pmatrix}$$

$$CH = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$DK = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$EG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$FJ = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$EH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$FK = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$CG + DJ = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}$$

$$CH + DK = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$EG + FJ = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$EH + FK = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, obtenemos el producto de $A \cdot B$ a continuación:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -17 & 7 & 9 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Propiedades del producto por bloques

El producto por bloques resulta ser más interesante cuando alguna de las submatrices es muy sencilla con muchos 0's o bien es una matriz diagonal, una matriz identidad o directamente una matriz nula.

Ejemplo 2

Supongamos que las matrices A y B son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} I_n & | & C \\ -- & | & -- \\ 0 & | & I_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} I_n & | & D \\ -- & | & -- \\ 0 & | & I_n \end{pmatrix}$$

Donde $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e I_n representa la matriz identidad de orden n. Entonces tenemos que :

$$AB = \begin{pmatrix} I_n \cdot I_n + C \cdot 0 & | & I_n \cdot D + C \cdot I_n \\ -------- & | & -------- \\ 0 \cdot I_n + I_n \cdot 0 & | & 0 \cdot D + I_n \cdot I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & | & D + C \\ ---- & | & ---- \\ 0 & | & I_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, tenemos que $B \cdot A$ sería:

$$BA = \begin{pmatrix} I_n \cdot I_n + D \cdot 0 & | & I_n \cdot C + D \cdot I_n \\ -------- & | & -------- \\ 0 \cdot I_n + I_n \cdot 0 & | & 0 \cdot C + I_n \cdot I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & | & C + D \\ ---- & | & ---- \\ 0 & | & I_n \end{pmatrix}$$

Con lo cual, en este caso el producto de A y B es conmutativo para cualquier matriz C, D.

2.1 Cálculo de inversas

A la hora de calcular matrices inversas, tenemos casos de matrices por bloques en los cuales el cálculo de la inversa se simplifica considerablemente.

Proposición. Sea A una matriz cuadrada dividida en bloques del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} B & | & C \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D \end{pmatrix}$$

Donde $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}),\ D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Entonces, A es invertible si, y solo si, lo son B y D, y entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & | & -B^{-1}CD^{-1} \\ -- & | & ------- \\ 0 & | & D^{-1} \end{pmatrix}$$

En particular, si $C = 0$, A es invertible si, y solo si, lo son B y D, y entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & | & 0 \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D^{-1} \end{pmatrix}$$