Tema 1 - Matrices

Ramon Ceballos

20/2/2021

OPERACIONES ELEMENTALES Y MATRICES ESCALONADAS

1. Matrices escalonadas

Vamos a introducir ahora un tipo especial de matrices triangulares superiores (o inferiores), las llamadas **matrices escalonadas por filas (o por columnas)**.

A. **Matriz escalonada por filas.** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por filas cuando se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- El primer elemento no nulo de cada fila, denominado **pivote**, está a la derecha del pivote de la fila superior.
- Las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.

Ejemplo 37

Estas matrices son escalonadas por filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

B. **Matriz escalonada reducida por filas.** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es escalonada reducida por filas si es escalonada y además cumple los siguientes requisitos:

- Los pivotes son todos 1's.
- Todos los elementos que están en la misma columna del pivote son nulos.

Ejemplo 38

Estas matrices son escalonadas reducidas por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

C. **Matriz escalonada por columnas.** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por columnas cuando se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- El primer elemento no nulo de cada columna (denominado **pivote**) está una o más filas abajo del pivote de la columna anterior.
- Las columnas no nulas están en la parte izquierda de la matriz.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

D. **Matriz escalonada reducida por columnas.** Es una matriz que aparte de ser escalonada por columnas, todos los pivotes son 1's y todos los elementos que están en la misma fila que el pivote son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones elementales de una matriz

Operaciones elementales por filas. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Las operaciones que se llaman operaciones elementales por filas de la matriz A son las siguientes:

a. Multiplicar una fila por un $\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0$ (escalar).
b. Intercambiar dos filas.
c. Sumar un múltiplo de una fila a otra.

De manera análoga se pueden definir las operaciones elementales por columnas.

3. Matrices equivalentes

Matrices equivalentes por filas. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes por filas (por columnas) si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante un número finito de operaciones elementales por filas (o columnas).

TEOREMA

- Toda matriz es equivalente por filas (o columnas) a una matriz escalonada por filas (o columnas).
- Toda matriz es equivalente por filas (columnas) a una única matriz escalonada reducida por filas (columnas).

La demostración la haremos de manera constructiva. Es decir, hallaremos un algoritmo (**Método de Gauss**) para encontrar la matriz escalonada en este caso.

DEMOSTRACIÓN

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces procederemos de la siguiente manera:

1. Si $a_{11} \neq 0$, se divide la primera fila por a_{11} y se obtiene una matriz equivalente en la que $a_{11} = 1$. Entonces este nuevo a_{11} será el primer pivote. Ahora, se resta a cada fila i la primera fila multiplicada por a_{i1}. Así, la primera resta de elementos de la primera columna será 0 y se pasa al punto 4.

2. Si $a_{11} = 0$, se busca el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$. Entonces, se intercambian la primera fila y la i obteniendo una matriz equivalente con un nuevo $a_{11} \neq 0$. A partir de aquí, volvemos al punto 1 y repetimos el proceso.

3. Si $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces dejamos esta primera columna de ceros y aplicamos el algoritmo del paso 1 a la matriz resultante de eliminar la primera columna.

4. Se repite el proceso a la matriz obtenida de eliminar la primera fila y la primera columna de nuestra matriz.

Nótese que con el método de la demostración se obtiene la única matriz escalonada equivalente por filas cuyos pivotes son todos unos.

Para obtener la matriz escalonada reducida, si hay algún elemento a_{ij} distinto de cero por encima de algún determinado pivote, se resta a la fila de este elemento (la fila i), la fila del pivote multiplicada por a_{ij}.

Se repite el paso anterior tantas veces como sea necesario y se llega así a la matriz escalonada reducida equivalente.

Ejercicio 26

Considerad la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculad su matriz escalonada y su escalonada reducida por filas.

Solución

$$A \sim_{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_3+2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix} \sim_{f_3-4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix}$$

Una matriz escalonada equivalente a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz escalonada reducida, debemos seguir realizando operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix} \sim_{\frac{1}{11}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix} \sim_{f_2+\frac{3}{2}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_1-3f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{56}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix} \sim f_1 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{91}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix}$$

Con lo cual, la matriz reducida equivalente a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{91}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27

Considerad la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculad su matriz escalonada y su escalonada reducida por filas.