Tema 4 - Determinantes

Ramon Ceballos

27/2/2021

Ejemplo: Determinante de Vandermonde

A continuación os presentamos el **determinante de Vandermonde** de orden 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Con todo lo que hemos visto hasta ahora, podemos resolverlo de forma sencilla:

En primer lugar, realizamos $f_4 - af_3$, obteniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & b^3 - ab^2 & c^3 - ac^2 & d^3 - ad^2 \end{vmatrix}$$

A continuación, $f_3 - af_2$, y se obtiene:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac & d^2 - ad \\ 0 & b^3 - ab^2 & c^3 - ac^2 & d^3 - ad^2 \end{vmatrix}$$

Ahora realizamos $f_2 - af_1$ y obtenemos:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac & d^2 - ad \\ 0 & b^3 - ab^2 & c^3 - ac^2 & d^3 - ad^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$$

El siguiente paso es desarrollar por la primera columna, obteniendo:

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

Hemos obtenido un determinante de Vandermonde de orden 3. Lo que implica seguir el mismo razonamiento anterior.

Empezamos realizando $f_3 - bf_2$, obteniendo:

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ 0 & c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix}$$

A continuación, $f_2 - bf_1$ y se obtiene:

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix}$$

Finalmente, desarrollando de nuevo por la primera columna y sacando factor común $(c-b)$ y $(d-b)$ de las dos últimas columnas obtenemos:

$$\det(A) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$