Tema 4 - Determinantes

Ramon Ceballos

27/2/2021

Cálculo de los determinantes

1. Adjuntos y menores complementarios

Para facilitar el cálculo de los determinantes se emplena los adjuntos y menores complementarios.

Dada $A = (a_{ij})_{n\times n},\ n \geq 2$. Sea a_{ij} el elemento que ocupa la fila i y la columna j de la matriz A. Si suprimimos la fila i y la columna j de A obtendremos una matriz cuadrada de orden $n-1$.

1.1 Definiciones generales

Menor complementario. El menor complementario de a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que designábamos como α_{ij}.

Adjunto. El elemento $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ es el adjunto de a_{ij}

Matriz adjunta de A. Matriz (con mismo nº de filas y columnas que la matriz original) que tiene como coeficientes los adjuntos A_{ij} de los elementos a_{ij} de A. Se denota por $\mathrm{Adj}(A)$.

Ejemplo 8

Si partimos de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A será:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -15 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Cálculo de determinantes a partir de los adjuntos

El determinante de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$ se puede calcular desarrollando por los adjuntos de los elementos de cualquiera de sus filas o columnas.

Proposición. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Entonces se verifica:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Esto es el desarrollo de un determinante por los adjuntos de los elementos de una fila; y también se puede hacer para una columna cualquiera:

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Esto es el desarrollo de un determinante por los adjuntos de los elementos de una columna.

Ejemplo 9

El determinante siguiente:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Si se desarrolla por los elementos de la primera fila es:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-10) + 3 \cdot (-4) = -20$$

Y desarrollado por los elementos de la segunda columna es:

$$|A| = -(-1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) + 0 + 1 \cdot (-10) = -20$$

2.1. Truco para matrices de mayores dimensiones

Aplicando este último desarrollo a las matrices triangulares, tenemos que el determinante de una de estas matrices es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 10

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 40|10| = 400$$

Lo que hemos hecho ha sido hacer un desarrollo por los adjuntos de la primera columna en cada paso.