Tema 1 - Matrices

Ramon Ceballos

20/2/2021

1. MATRICES DIAGONALES Y TRIANGULARES

Proposición. Sean A, B dos matrices cuadradas de orden n.

- Si A, B son matrices diagonales, entonces A y B conmutan y la matriz producto $AB = BA$ también es diagonal.
- Si A, B son matrices triangulares superiores (inferiores) entonces el producto AB es también una matriz triangular superior (inferior).

Ejercicio 13. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

comprobad que AB y BA son matrices diagonales.

Ejercicio 14. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

comprobad que AB y BA son matrices triangulares superiores.

2. MATRIZ TRANSPUESTA

Transpuesta de una matriz. Sea $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denomina transpuesta de la matriz A y se denota como A^t a la matriz $A^t = (a_{ji})_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Es decir, la matriz obtenida a partir de A intercambiando filas por columnas.

Ejemplo 30

La matriz transpuesta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1 Propiedades matriz transpuesta

Entre las propiedades de las matrices transpuestas destacan las siguientes

- Idempotencia. Para toda matriz A, $(A^t)^t = A$.

Ejemplo 31

Teníamos que lLa matriz transpuesta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Pues la matriz transpuesta de A^t es

$$(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Demostración

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad A = (a_{ij}) \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}), \quad A^t = (a_{ji}) \Rightarrow (A^t)^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}), \quad (A^t)^t = (a_{ij}) = A$$

- Transpuesta de una suma. Si A y B son matrices del mismo orden $m \times n$, entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$. Es decir, la transpuesta de una suma de matrices es la matriz obtenida por la suma de sus respectivas transpuestas. Además, el resultado se puede generalizar a r sumandos y se tiene que si A_i son todas del mismo orden, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)^t = \sum_{i=1}^{r} A_i^t$$

Ejercicio 15. Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad

Ejercicio 16. Comprobar que dadas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B + C)^t = A^t + B^t + C^t$$

- Transpuesta de un producto. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, entonces la traspuesta del producto de A por B es el producto de las traspuestas pero con orden cambiado, es decir:

$$(AB)^t = B^t A^t \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$$

Ejercicio 17. Probad que $(AB)^t = B^t A^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad