

Ejemplos de factorización LU

Ramon Ceballos

25/2/2021

Ejemplo de factorización LU con permutación

Encontremos la factorización LU de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su matriz escalonada reducida equivalente de A:

$$A \sim_{f_2 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim_{f_3+3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \sim_{f_3-7f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} \sim_{-\frac{1}{28}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

En este caso hemos llevado a cabo una permutación de filas. Más concretamente, hemos cambiado la fila f_1 por la fila f_2 . Esto corresponde a multiplicar la matriz A por la matriz F_{12} por la izquierda. Con lo cual:

$$P = F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, lo que tenemos es que la matriz PA admite una factorización LU .

Las operaciones elementales llevadas a cabo sobre la matriz siguiente:

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener U han sido:

$$U = F_3 \left(-\frac{1}{28} \right) \cdot F_{32}(-7) \cdot F_{31}(3) \cdot PA$$

Con lo cual:

$$L = F_{31}(-3) \cdot F_{32}(7) \cdot F_3(-28) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que todo está bien:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = PA$$