Tema 2 - Ecuaciones y Sistemas Lineales

Ramon Ceballos

21/2/2021

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Definiciones generales

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Es un sistema de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$

Incógnitas. $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Coeficientes del sistema. $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Términos independientes. b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$

2. Sistema homogéneo

Sistema homogéneo. Sistema de ecuaciones lineales donde $b_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales. $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes (del sistema). A

Matriz de términos independientes. B

Matriz de incógnitas. X

Matriz ampliada del sistema. Dado el sistema matricial $AX = B$, se define la matriz ampliada del sistema como $(A|B)$.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Cada fila representa la ecuación correspondiente del sistema.

4. Solución de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

Solución de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Conjunto de n valores $s_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que al sutituir cada $x_i = s_i$, cada una de las m ecuaciones se convierten en identidades.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $AX = B$, podemos clasificar los sistemas según tengan o no solución y, en caso de tener, según cuántas tienen:

Sistema compatible. Si tiene al menos una solución. Dsitinguimos entre:

- **Sistema compatible determinado.** Si la solución es única.
- **Sistema compatible indeterminado.** Si tiene infinitas soluciones.

Sistema incompatible. Si no tiene solución.

Observación. Notemos que un sistema homogéneo, $AX = 0$, del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siempre tiene, al menos, la **solución trivial**. Es decir, la solución $(0, 0, \ldots, 0)$.

Con lo cual, el sistema homogéneo siempre es compatible.

4.1. Teorema de Rouché-Frobenius

Permite discernir si un sistema de ecuaciones lineales es compatible (determinado o indeterminado) o incompatible.

Teorema de Rouché-Frobenius. Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, $AX = B$, es compatible si, y solo si, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = r$ y, en este caso:

- Si $r = n$, el sistema es determinado.
- Si $r < n$, el sistema es indeterminado.

Si rg(A) <rg($A|B$), entonces el sistema es incompatible.

Ejemplo 2

Comprobemos si el siguiente sistema lineal tiene solución:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Observemos que se trata de un sistema $m = 3$ de ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Para averiguar de qué tipo de sistema se trata, calculemos rg(A) y rg($A|B$), donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & 4 & -3 & | & 1 \\ 3 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que rg(A) =rg($A|B$) = 3. Por lo tanto, por el Teorema de Rouché-Frobenius, concluimos que el sistema es compatible determinado

5. Sistemas equivalentes

Sistemas equivalentes. Los sistemas $AX = B$ y $A'X = B'$ son equivalentes si tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones.

De este modo, para resolver sistemas de la forma $AX = B$, empezaremos comparando los rangos de las matrices A y $(A|B)$. A continuación, en caso de que ambos rangos sean iguales, procederemos a encontrar una solución utilizando el **método de Gauss**.