

Tema 1 - Matrices

Ramon Ceballos

20/2/2021

MATRICES CUADRADAS

Nótese que la transposición, en el caso de matrices cuadradas, es una operación interna.

Transposición como operación interna. La transpuesta de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es otra matriz cuadrada $A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Demostración

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \equiv A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

Por lo tanto, tienen sentido las siguientes definiciones.

1. Tipos de matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada.

- **Matriz simétrica.** A es simétrica si coincide con su transpuesta. Esto causa la simetría de la matriz respecto a su diagonal.

$$A \text{ simétrica} \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

Ejemplo 32

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica.

Ejercicio 19. Calculad A^t y veréis que $A^t = A$.

- **Matriz antisimétrica.** A es antisimétrica si su transpuesta coincide con su opuesta, lo cual exige que la diagonal esté compuesta únicamente por ceros y que los elementos simétricos sean opuestos entre sí.

$$A \text{ antisimétrica} \Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$$

Ejemplo 33

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 0 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz antisimétrica.

Ejercicio 20. Calculad A^t y veréis que $A^t = -A$.

- **Matriz regular.** A es invertible o regular si existe otra matriz cuadrada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Cuando existe esta matriz A^{-1} es siempre única, con la propiedad mencionada y se llama **matriz inversa** de A .

Observación. Nótese que no basta con cumplir solo $AA^{-1} = I_n$ (o solo $A^{-1}A = I_n$) ya que el producto no es en general conmutativo. Por tanto, la matriz inversa ha de verificar que los resultados de los dos productos son la matriz identidad.

Ejemplo 34

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es una matriz regular cuya inversa es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21. Comprobad que efectivamente $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

- **Matriz singular.** A es singular si no tiene inversa, es decir, cuando no es regular.

Ejemplo 35

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

es una matriz singular. Más adelante, cuando hablemos de determinantes, veremos el por qué.

- **Matriz ortogonal.** A es ortogonal si es regular y además su inversa coincide con su transpuesta. Dicho de otra manera:

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow AA^t = A^tA = I_n$$

Ejemplo 36

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ya que:

$$AA^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$$

Ejercicio 22. Comprobad que $A^tA = I_3$

Proposición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces si A y B son invertibles, también lo es su producto y se cumple:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Ejercicio 23. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobad que $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ donde $(AB)^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Demostración

Para probar $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, lo que haremos será ver que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

Por un lado, por la propiedad asociativa y como B^{-1} es la inversa de B , tenemos:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1}$$

ya que, recordemos, la matriz identidad I_n actúa como elemento neutro del producto de matrices. Ahora, como A^{-1} es la inversa de A , se tiene que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I_n$$

tal y como queríamos demostrar.

Ejercicio 24. Acabar la demostración siguiendo como modelo la parte que se ha llevado a cabo hasta el momento.

RESUMEN GENERAL DE MATRICES

Las operaciones anteriores conforman el llamado **álgebra matricial**. Este nombre es adecuado ya que gracias a ellas es posible realizar la manipulación habitual de ecuaciones con matrices igual que se hace con los números reales siempre y cuando se tenga precaución con aquellas propiedades que no se verifican, vistas todas ellas anteriormente.

Por ejemplo, en una ecuación con matrices todo lo que esté sumando pasa al otro término restando y viceversa.

De esta manera, se pueden resolver ecuaciones del tipo: encuentre una matriz X tal que $A + \lambda X = \mu B$ donde A y B son matrices conocidas y $\lambda \neq 0$ y μ son valores de \mathbb{K} también conocidos. La solución será $X = \frac{1}{\lambda}(\mu B - A)$.

Nótese sin embargo que las ecuaciones de la forma $AX = B$ no se pueden manipular de la forma habitual a no ser que la matriz A sea cuadrada e invertible. Entonces se tendrá $X = A^{-1}B$. Nótese que valdría multiplicar a la izquierda por A^{-1} pero no valdría hacerlo a la derecha. Si la ecuación que tiene es de la forma $XA = B$ entonces, si A es invertible, será $X = BA^{-1}$, multiplicando a la derecha por A^{-1} .

Se pueden calcular también las potencias n -ésimas de las matrices de la forma habitual $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (n veces). Nótese que el binomio de Newton para calcular $(A + B)^n$ solo se verifica en los casos en que A y B conmuten. Por ejemplo:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Si A y B conmutan, entonces $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$