Tema 6 - Espacios vectoriales

Ramon Ceballos

10/3/2021

Construcción de espacios vectoriales

¿Cómo construimos nuevos espacios vectoriales a partir de otros conocidos?

Esto es lo que veremos a lo largo de este apartado.

1. Espacio vectorial producto

Espacio vectorial producto. Sean E, F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Definimos sobre el conjunto producto cartesiano $E \times F$ las siguientes operaciones:

$$\begin{gathered}(u, v)+(u', v')=(u+u', v+v') \\ \alpha \cdot (u, v)=(\alpha \cdot u, \alpha \cdot v)\end{gathered}$$

En donde $u, u' \in E$, $v, v' \in F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Es inmediato ver que con estas operaciones, el conjunto $(E \times F, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v. llamado **espacio vectorial producto** o **espacio vectorial suma directa de** E **y** F.

Lo denotaremos habitualmente por $E \oplus F$.

Observación. El elemento neutro del $\mathbb{K}$-e.v. será $(0,0)$, donde el primer 0 es el elemento neutro de E, mientras que el segundo, es el elemento neutro de F.

De forma análoga, el opuesto de cualquier elemento $(u, v) \in E \oplus F$ será $(-u, -v) \in E \oplus F$.

¡Atención! Anteriormente hemos hablado de suma directa de subespacios vectoriales y ahora de suma directa de espacios vectoriales. Ambos se denotan del mismo modo, $\oplus$.

Así pues, dados dos subespacios vectoriales F, G de un $\mathbb{K}$-e.v. E, tenemos que F, G pueden ser considerados también como $\mathbb{K}$-e.v. y, por tanto $F \oplus G$ denota a la vez dos objetos inicialmente diferentes:

- Suma directa de subespacios vectoriales de E:

$$F \oplus G=\{z \in E \mid z=x+y \text{ para ciertos } x \in F,\ y \in G\}$$

- Suma directa como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales:

$$F \oplus G=\{(x, y) \mid x \in F,\ y \in G\}$$

Lo indicado en la diapositiva anterior no lleva a ninguna confusión porque, como veremos más adelante, los dos conjuntos corresponden a $\mathbb{K}$-espacios vectoriales isomorfos, es decir, identificables desde el punto de vista de la estructura de espacio vectorial que manejamos.

La definición de espacio producto o espacio suma directa se puede generalizar a n sumandos.

Espacio vectorial producto. Sean $E_1, \ldots, E_n$ $\mathbb{K}$-e.v. cualesquiera. Definimos el $\mathbb{K}$-espacio vectorial producto o suma directa de $E_1, \ldots, E_n$ como:

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = \{(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \mid \vec{u}_i \in E_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n\}$$

Con las operaciones suma y producto por escalares definidas componente a componente

$$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) + (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \ldots, \vec{u}_n + \vec{v}_n)$$
$$\alpha \cdot (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = (\alpha \cdot \vec{u}_1, \ldots, \alpha \cdot \vec{u}_n)$$

En donde $\vec{u}_i, \vec{v}_i \in E_i,\ \forall i = 1, \ldots, n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

Ejemplo 12

De la definición anterior, deducimos que el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ lo podemos ver como la siguiente suma directa:

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}$$

1.1 Proposiciones y propiedades

Proposición. Sean $E, F, E_1, \ldots, E_n$ $\mathbb{K}$-e.v. entonces:

- Si E, F son de dimensión finita, entonces $E \oplus F$ también lo es y:

$$\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si todos los E_i son de dimensión finita y $\dim(E_i) = n_i\ \forall i = 1, \ldots, n$, entonces $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ también es de dimensión finita y:

$$\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n) = \sum_{i=1}^{n} n_i$$

Ejercicio 21. Demostrar formalmente esta Proposición.

2. Espacio vectorial cociente

Para hablar de espacio vectorial cociente, debemos de hablar en primer lugar de relaciones de equivalencia. Por ello vamos a definir la relación módulo F.

Relación módulo F. Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y F un subespacio vectorial de E cualquiera. Definimos sobre E la siguiente relación llamada relación módulo F del siguiente modo:

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x - y \in F$$

Esta expresión matemática significa que dos elementos (x, y) del espacio vectorial E se relacionan a través de F, si y solo si la resta de $x - y$ pertence a F. Según esta definición x e y poodrían no pertenecer a F pero su resta sí.

La relación definida anteriormente sobre E es siempre una relación de equivalencia cualquiera que sea el subespacio vectorial F, ya que cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad Reflexiva, significa que todo elemento se relaciona consigo mismo. En este caso, para x pertenecerá a F como el vector 0, que a su vez pertenece a todo espacio vectorial. Matemáticamente: $\forall x \in E$, tenemos que $x \sim_F x$ ya que $x - x = 0 \in F$ por ser F subespacio vectorial.
- Propiedad Simétrica, significa que para todo $x - y$ habrá un $y - x$ opuesto en F, siendo la relación simétrica. Matemáticamente: $\forall x, y \in E$, si $x \sim_F y$, tenemos que $x - y \in F$ y, por tanto, su opuesto también pertenece a F, $y - x \in F$. Es decir, tenemos $y \sim_F x$.
- Propiedad Trasitiva, significa que tanto y como x se relacionan con z, ya que x se relaciona con y, de este modo x se relaciona en F con z. Matemáticamente: Si tenemos $x, y, z \in E$ tales que $x \sim_F y$ y $y \sim_F z$, entonces $x - y, y - z \in F$. Por tanto, su suma también es de F, es decir:

$$(x - y) + (y - z) = x - z \in F \Leftrightarrow x \sim_F z$$

En estas relaciones de equivalencia podemos considerar el **conjunto cociente**, denotado como E/F formado por todas las clases de equivalencia módulo F. Su definición viene comentada a continuación.

Clase de equivalencia módulo F. Dado $x \in E$, su clase de equivalencia módulo F la denotamos por $[x]_F$ y viene dada por:

$$[x]_F = \{y \in E \mid y \sim_F x\} = \{y \in E \mid y - x = z \in F\}$$
$$= \{y \in E \mid y = x + z,\ z \in F\} = \{x + z \mid z \in F\} = x + F$$

Esto significa que para x de E , la clase de equivalencia módulo F será la relación de todos los elementos y de E tal que la resta de $y - x$ da un elemento z que pertenece a F. Finalmente se concluye que la clase de equivalencia mófulo F de un elemento x del espacio vectorial E ($[x]_F$) se puede escribir como la suma de dicho elemento x más cualquier otro vector del subespacio vectorial F.

Observación. La clase del 0 coincide con el propio subespacio vectorial F, expresándose del siguiente modo:

$$[0]_F = \{0 + z \mid z \in F\} = F$$

De hecho, más generalmente tenemos:

$$[x]_F = [0]_F \Leftrightarrow x \sim_F 0 \Leftrightarrow x \in F \text{ y en estos casos } [x]_F = F$$

2.1 Variedad lineal

Estas clases de equivalencia se denominan **variedades lineales**. La definición aparece a continuación.

Variedad lineal. Es la suma de un vector y un subespacio vectorial.

Como hemos visto, las variedades lineales solamente son subespacios vectoriales cuando $x \in F$, o equivalentemente, cuando la variedad contiene el $0 \in E$, coincidiendo en estos casos con el propio subespacio vectorial F.

En particular, dentro del conjunto cociente $E/F = \{[x]_F \mid x \in E\}$ (formado por todas las clases de equivalencia) podemos definir las siguientes operaciones de clases de equivalencia, a través de sus representantes:

$$[u]_F + [v]_F = [u+v]_F$$

$$\alpha \cdot [u]_F = [\alpha \cdot u]_F$$

2.1.1 Operaciones de clases de equivalencia

Veamos que las operaciones anteriores están bien definidas. En otras palabras, comprobemos que no dependen del representante elegido:

- **SUMA**: Supongamos que $[x]_F = [x']_F$ y que $[y]_F = [y']_F$. Queremos ver que si sumamos a través de los representantes x, y o x', y', el resultado es el mismo. Como era de esperar:

$$[x]_F = [x']_F \Leftrightarrow x \sim_F x' \Leftrightarrow x - x' \in F$$

$$[y]_F = [y']_F \Leftrightarrow y \sim_F y' \Leftrightarrow y - y' \in F$$

Y consecuentemente sumando obtenemos que:

$$x + y - (x' + y') \in F \Leftrightarrow (x+y) \sim_F (x'+y') \Leftrightarrow [x+y]_F = [x'+y']_F$$

- **PRODUCTO por escalares**: De forma similar, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $[x]_F = [x']_F$, tenemos que $x - x' \in F$ y, entonces:

$$\alpha \cdot (x - x') \in F \Leftrightarrow \alpha \cdot x - \alpha \cdot x' \in F \Leftrightarrow [\alpha \cdot x]_F = [\alpha \cdot x']_F$$

2.2 Definición de un espacio vectorial cociente

Con todo lo visto hasta el momento, es fácil ver que el conjunto cociente E/F junto con estas operaciones es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Espacio vectorial cociente. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. y F un sub-e.v. de E cualquiera. Definimos el espacio vectorial cociente de E por F al $\mathbb{K}$-espacio vectorial dado por $(E/F, +, \cdot)$ con las operaciones:

$$[u]_F + [v]_F = [u+v]_F$$
$$\alpha \cdot [u]_F = [\alpha \cdot u]_F$$

En donde $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$

2.2.1 Proposiciones

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita, $\dim(E) = n$ y sea F un subespacio vectorial. Entonces, E/F es también de dimensión finita y:

$$\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$$

Ejercicio 22. Demostrar formalmente esta Proposición.

3. Cociente por múltiplos de un polinomio

En *dimensiones infinitas*, la fórmula anterior ($\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$) ya no sería válida. Un ejemplo de ello es el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{K}[x]$.

Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ es un polinomio no constante cualquiera, y consideramos el subconjunto de los múltiplos de $p(x)$ (los polinomios que son múltiplos de p(x)), que denotamos por:

$$F = (p(x)) = \{p(x)q(x) | q(x) \in \mathbb{K}[x]\}$$

Esto indica que los múltiplos de $p(x)$ se pueden obtener al multiplicar $p(x)$ por otro polinomio $q(x)$ perteneciente a $\mathbb{K}[x]\}$.

Se puede demostrar fácilmente que $F = (p(x))$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$, ya que la suma de múltiplos de $p(x)$ es múltiplo de $p(x)$ y el producto de un escalar por un múltiplo de $p(x)$ también es múltiplo de $p(x)$. Además es de dimensión infinita ya que podemos demostrar que no puede tener un número finito de generadores como ocurría con el caso de $\mathbb{K}[x]$.

En este caso podemos definir **el $\mathbb{K}$-espacio vectorial cociente** $\mathbb{K}[x]/F$ **con** $F = (p(x))$ donde la relación módulo F sería:

$$a(x) \sim_F b(x) \Longleftrightarrow a(x) - b(x) \in F = (p(x))$$

Proposición. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio no constante y de grado $\deg(p(x)) = n \geq 1$. Entonces, dentro de cada clase no nula de un polinomio $a(x) \in \mathbb{K}[x]$, $[a(x)]_F$ hay un representante de grado menor a n.

La idea es que frente a un polinomio cualquiera, este se puede expresar como un múltiplo de $p(x)$ más otro polinomio. Al hacer la división de un polinomio de $\mathbb{K}[x]\}$ entre $p(x)$, da lugar a un cociente y al resto (este resto tendrá un grado menor o igual a n).

Ejercicio 23. Demostrar formalmente esta Proposición.

Proposición. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio no constante (que sea de grado superior a cero) de grado $\deg(p(x)) = n \geq 1$. Entonces, las clases $[1], [x], [x^2], \ldots, [x^{n-1}]$ forman una base de $\mathbb{K}[x]/(p(x))$, y, por lo tanto:

$$\dim(\mathbb{K}[x]/(p(x))) = n = \deg(p(x))$$

Ejercicio 24. Demostrar formalmente esta Proposición.

Observación. En el caso en que hiciésemos $\mathbb{K}[x]/(p(x))$ donde $p(x)$ fuese un polinomio constante (grado 0), entonces tendríamos que $(p(x)) = \mathbb{K}[x]$ ya que las constantes son invertibles y todo polinomio se puede poner como múltiplo de una constante cualquiera (ya que $p(x) = k(1/k \cdot p(x))$ $\forall k \in \mathbb{K}^*$)

De este modo, $\mathbb{K}[x]/(p(x))$ sería el $\mathbb{K}$-espacio vectorial trivial, el 0.