Tema 4 - Determinantes

Ramon Ceballos

27/2/2021

Aplicaciones de determinantes en el cálculo de matrices y sistemas

Los determinantes sirven para facilitar el cálculo con matrices y en la resolución de sistemas de ecuaciones.

1. Cálculo de la matriz inversa con determinantes

Teorema. Sean A y B matrices cuadradas de orden n, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

- A es invertible si, y solo si, $\det(A) \neq 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- si $\det(A) \neq 0$, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- si $\det(A) \neq 0$, entonces $A^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(A))^t}{\det(A)}$

Observación. La última propiedad nos da una nueva forma de calcular la matriz inversa de A.

Ejemplo 12

Calculemos la inversa de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, calculemos el determinante de A y veamos si es nulo o no. Por la Regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(A) = 0 + 0 + 0 - (6 - 10 + 0) = 4 \neq 0$$

Con lo cual, sabemos que A es invertible. Procedamos a calcular su inversa. En primer lugar, calculemos la matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Por tanto, la matriz adjunta será:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora, su transpuesta es:

$$(\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 10 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 10 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

2. Cálculo del rango de una matriz con determinantes

Otra aplicación de los determinantes se encuentra en el cálculo del rango de una matriz.

2.1. Definiciones generales

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y sea $k < m, n$ se define lo siguiente.

Menor de orden k de A. Determinante de cualquier matriz cuadrada de orden k obtenida suprimiendo $m-k$ filas y $n-k$ columnas de A.

Orlar un menor de orden k. Consiste en completarlo hasta un menor de orden $k+1$ de A con otra fila y otra columna de la matriz A dada.

Se pueden utilizar dichos menores para calcular el rango de una matriz A cualquiera.

2.2. Teorema

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $k < m, n$. Entonces, si se puede encontrar un menor de orden k no nulo y todos los de orden $k+1$ son 0, entonces $rg(A) = k$.

En otras palabras, el rango de la matriz A coincide con el orden del mayor "menor no nulo" obtenido a partir de A.

Otra forma de enunciar el `Teorema` anterior es la siguiente:

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $k < m, n$. Entonces, si se puede encontrar un menor de orden k no nulo y todas las posibles maneras de orlar dicho menor dan menores de orden $k+1$ nulos, entonces $rg(A) = k$.

Ejemplo 13

Calculemos el rango de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

El mayor menor de la matriz A es de orden 3. De hecho, esta matriz tiene $\binom{5}{3} = 10$ menores de orden 3 diferentes. Veamos si alguno de ellos es no nulo.

$$(c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 + 14 + 24 - (20 + 16 + 21) = 1 \neq 0$$

Como este menor de orden 3 ya no es nulo, por el Teorema anterior concluimos que la matriz tiene rango 3.

Ejercicio 4. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Regla de Cramer - Resolver sistemas de ecuaciones lineales con determinantes

Otra aplicación muy útil de los determinantes es la de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Dado el sistema $AX = b$ en su expresión matricial, siendo éste un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Sabemos que si $\det(A) \neq 0$ este sistema tiene solución única dada por $X = A^{-1}b$.

En estos casos, otra forma de encontrar esta solución única es a través de la **Regla de Cramer**.

3.1 Teorema

Teorema. Método de Cramer. Sea $AX = b$ la expresión matricial de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ con $\det(A) \neq 0$. Sea $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ la matriz que resulta de sustituir la columna i de la matriz de coeficientes A por el término independiente b. Entonces, la solución del sistema viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo de Sistema compatible determinado

Consideremos el sistema $AX = b$ descrito a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar fácilmente que el determinante es distinto de cero.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos un **sistema de Cramer con solución única** (sistema compatible determinado), cuya solución es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{1} = 0$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

Con lo cual, nuestra solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Demostrar que el sistema $AX = b$ dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tiene solución única y calcular dicha solución haciendo uso del Método de Cramer.

3.2 Regla de Cramer para Sistemas compatibles indeterminados

La regla de Cramer también sirve en el caso de **sistemas compatibles indeterminados**.

Lo que se debe hacer en estos casos es encontrar un menor no nulo que nos dé el rango del sistema y la submatriz el sistema correspondiente a este menor es una matriz cuadrada invertible a la que se le puede aplicar el Método de Cramer.

Entonces, las ecuaciones no correspondientes a este menor las podemos eliminar, pues son prescindibles.

Incógnitas principales. Las incógnitas involucradas en la submatriz.

Incógnitas secundarias. Las incógnitas que no son principales.

De este modo, el sistema con las incógnitas principales y solo las ecuaciones correspondientes al menor no nulo, tiene solución única dada por el Método de Cramer en función de las incógnitas secundarias.

Ejemplo Sistema compatible indeterminado

Consideremos el sistema $AX = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar el determinante de A da cero:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ -8 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Esto se debe a que la primera columna es el doble de la segunda.

Por este motivo, consideremos el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Orlando este menor con la columna de los términos independientes, lo que obtenemos es:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, concluimos que $rg(A) = 2$. Además, tenemos que el sistema es compatible indeterminado.

Así pues, las incógnitas principales serán y, z porque recordemos que el menor de orden 2 no nulo está formado por las dos últimas columnas de A.

Por otro lado, la tercera ecuación, al no haberla considerado en el menor de orden 2, ya no nos es necesaria. Así, nuestro sistema lo podemos reescribir como:

$$\begin{cases} 12x & + & 6y & + & 8z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \end{cases}$$

O, equivalentemente:

$$\begin{cases} 6y & + & 8z & = & 1 - 12x \\ 2y & + & 4z & = & 2 - 4x \end{cases}$$

Esto es un sistema de Cramer de $A'X' = b'$ con:

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} 1 - 12x \\ 2 - 4x \end{pmatrix}$$

Y este sistema tiene solución única en función de x dada por:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 12x & 8 \\ 2 - 4x & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-16x - 12}{8} = -2x - \frac{3}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 - 12x \\ 2 & 2 - 4x \end{vmatrix}}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

De este modo, nuestra solución es $X = \begin{pmatrix} x \\ -2x - \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}$.

4. Transformaciones lineales vs Determinantes

A la hora de calcular el rango de una matriz, calcular la inversa de una matriz regular o de resolver un sistema de ecuaciones lineales podemos hacerlo de dos formas:

- A través de transformaciones lineales (método de Gauss).
- Utilizando determinantes.

La primera tiene la ventaja de la implementación en ordenadores ya que requiere de muchas menos operaciones.

En cambio, los determinantes permiten más flexibilidad en las operaciones, la cual es de agradecer cuando el estudio a hacer **depende de uno o más parámetros**.

Ejercicio 6

Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{cases}$$

Solución

Vayamos a ver de qué tipo puede ser este sistema.

En primer lugar, calcularemos el rango de la matriz de coeficientes del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

y lo haremos mediante determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$$

Ahora, la pregunta es: ¿Cuándo este determinante vale 0?

Pues cuando

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ y } a = -2$$

Entonces, tenemos 3 casos:

- $a \neq 1$ y $a \neq -2$
- $a = 1$
- $a = -2$

El primer caso, $a \neq 1$ y $a \neq -2$, es el más sencillo ya que al ser el determinante de A no nulo, lo que tenemos es que tanto A como la matriz ampliada del sistema tienen rango 3. Esto nos lleva a concluir que se trata de un sistema compatible determinado por el Teorema de Rouché-Frobenius.

Ahora, ¿qué ocurre cuando $a = 1$? Pues, en primer lugar, que el rango de A es estrictamente menor a 3, con lo cuál, veamos si es 2 o 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todas las filas y todas las columnas son iguales, el rango de A es 1, ya que no hay ningún menor de orden 2 en esta matriz que sea no nulo.

Veamos qué ocurre con la ampliada:

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pues ocurre exactamente lo mismo: todas las filas y todas las columnas son iguales. Entonces, el rango es 1. En este caso, por el Th. Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un sistema compatible indeterminado.

Finalmente, si $a = -2$, tenemos lo siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si tomamos el menor de orden 2 formado por las 2 primeras filas y las dos primeras columnas, tenemos que es no nulo

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

con lo cual, el rango de la matriz de coeficientes del sistema es 2. ¿Qué ocurre ahora con el rango de la matriz ampliada?

Si orlamos el menor anterior, que ya hemos visto que no era nulo, con la última fila y la cuarta columna, lo que obtenemos es

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 - (-2 - 2 + 1) = 9 \neq 0$$

Por tanto, acabamos de ver que el rango de la ampliada es 3, lo que nos lleva a concluir que, al ser los rangos diferentes, el sistema es incompatible