Tema 3 - Producto por bloques y factorizaciones triangulares

Ramon Ceballos

25/2/2021

Aplicaciones de las factorizaciones LU

1. Resolución de sistema de ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones que tienen las factorizaciones triangulares (o factorizaciones LU) se ve en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Con las factorizaciones $A = LU$ o $PA = LU$ tendremos que hacer los cálculos solamente una vez y finalmente, resolver los sistemas triviales para cada término independiente.

En primer lugar, tendremos el sistema $AX = b$, el cual es equivalente a $LUX = b$.

Ahora, consideremos el sistema $Y = UX$, de forma que $LY = b$. Este sistema tiene solución inmediata, pues L es triangular inferior.

Por último, resolvemos $UX = Y$, que también tendrá solución inmediata ya que U es triangular superior.

En caso de que el sistema admita factorización $PA = LU$ es exactamente igual ya que $AX = b$ es equivalente a $PAX = Pb$, puesto que solamente hemos permutado filas.

Ejemplo 4

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{cases}$$

Podemos escribir el sistema en su forma matricial, $AX = b$ del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Observad que la matriz A es la del `Ejemplo de factorización con permutación`, la cual sabemos que admite factorización $PA = LU$.

Evidentemente, los sistemas $AX = b$ y $PAX = Pb$ tendrán las mismas soluciones ya que de un sistema a otro solamente hemos permutado filas.

Dicho esto, sabemos que $PAX = Pb$ es equivalente a $LUX = Pb$.

Consideremos $Y = UX$. Con lo cual, buscamos Y tal que:

$$LY = Pb \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución inmediata: $y_1 = 3,\ y_2 = 1,\ y_3 = \frac{-3y_1+7y_2+2}{28} = 0$

Ahora ya solo nos queda resolver el sistema $UX = Y$. Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema vuelve a tener solución inmediata: $x_3 = 0, x_2 = 1 - x_3 = 1,\ x_1 = 3 - 3x_2 + 2x_3 = 0$

Con lo cual, en nuestro sistema inicial:

$$\begin{cases} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{cases}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Observación. Observad que por mucho que cambiemos los términos independientes, ello no afecta a la factorización LU, ya que ésta seguirá siendo la misma puesto que la matriz de coeficientes A no está siendo modificada.