Tema 6 - Espacios vectoriales

Ramon Ceballos

11/3/2021

Rango de un conjunto de vectores. Coordenadas en una base.

1. Rango de un conjunto de vectores

Rango de un conjunto de vectores. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cualquiera, se llama rango de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in E$ a la dimensión del subespacio vectorial que generan. Matemáticamente:

$$\text{rg}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} = \dim(\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \rangle)$$

Así, coincide con el número máximo de vectores LI que se pueden extraer del conjunto $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Otra definición de rango sería la siguiente.

Rango de un conjunto de vectores. Dados $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in E$, se dice que tiene rango $r \leq n$ (n es el nº de vectores) si existe como mínimo un subconjunto de r vectores LI entre ellos y no existe ninguno de $r+1$ que sea LI.

En otras palabras, como bien se dijo anteriormente, es el número máximo de vectores LI que pueden extraerse del conjunto.

2. Coordenadas en una base

El rango de n vectores está relacionado con el rango de una matriz tal y como veremos a continuación.

En primer lugar, recordemos que dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base cualquiera de E, todo vector $x \in E$ se escribe de manera única como combinación lineal de la base B de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i = \alpha_1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$$

Por tanto, podemos dar la siguiente definición:

Coordenadas de un vector en base B. Son los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la combinación lineal anterior.

Más formalmente:

Coordenadas en una base. Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E con una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y un vector $u \in E$, se sabe que existen unos únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$$

Estos escalares se denominan coordenadas del vector u en la base B.

$$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_B$$

2.1 Proposición

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. Sean $u_1, \ldots, u_m \in E$ vectores de forma que cada u_j tiene coordenadas en la base B dadas por:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i = a_{1j} \cdot e_1 + \cdots + a_{nj} \cdot e_n$$

Entonces:

- $u_1, \ldots, u_m$ son LI si, y solo si, $\mathrm{rg}(A) = m \leq n$. La letra m refiere al nº de vectores que tenemos y $\mathrm{rg}(A)$ es el rango de los coeficientes (coordenadas).
- $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_m) = \mathrm{rg}(A)$

Ejercicio 25. Demostrar formalmente esta Proposición.

Por la proposición anterior, un método para calcular el rango de un conjunto de vectores consiste en construir una matriz utilizando los vectores como columnas (o filas) y definir el rango de la matriz como el rango de sus vectores columna (o fila).

Observación. Si se nos facilitan las coordenadas de un vector sin especificar la base, se sobreentiende que se trata de la base canónica.

También reciben el nombre de **coordenadas cartesianas** y son las que en temas anteriores hemos definido como las componentes de un vector.