Tema 6 - Espacios vectoriales

Ramon Ceballos

6/3/2021

Bases de un espacio vectorial

1. Definición general

Base de E. Se define que un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in E$ son una base de E si:

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ es un sistema generador de E.
- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes.

2. Teorema y proposiciones

2.1 Teorema de cuando B es una base de E

Teorema. Sean E un $\mathbb{K}$-e.v. y $B \subseteq E$. Entonces, B es una base de E si, y solo si todo vector $\vec{u} \in E$ se puede expresar como una combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in B$ de manera única.

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}:\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

Ejercicio 13. Demostrar formalmente este Teorema.

De este teorema podemos extraer una propiedad o proposición muy importante que viene descrita a continuación.

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. finitamente generado y sea $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto de generadores. Entonces E tiene una base finita B de forma que $B \subseteq S$.

Ejercicio 14. Demostrar formalmente esta Proposición.

2.2 Teorema de Steinitz

Teorema de Steinitz. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v., sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de E y sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores linealmente independientes. Entonces, se pueden sustituir m vectores cualesquiera de la base B por los $v_1, \ldots, v_m$ obteniendo así una nueva base. En particular, necesariamente se tiene que $m \leq n$.

Ejercicio 15. Demostrar formalmente este Teorema.

2.3 Teorema

Teorema. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. Si E tiene una base finita, digamos $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, entonces todas las bases de E son finitas y tienen exactamente n elementos.

Ejercicio 16. Demostrar formalmente este Teorema.

Como hemos visto hasta ahora, un espacio vectorial tiene infinitas bases. En cada espacio vectorial, hay una que tiene características especiales. Esta no es otra que la **base canónica**.

Ejemplo 8. Base canónica

- En $\mathbb{R}^2$, la base canónica es $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ donde:

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \qquad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

- En $\mathbb{R}^3$, la base canónica es $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) \qquad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \qquad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

- En $\mathbb{R}^n$, la base canónica es $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ donde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, todas las componentes del vector son 0 a excepción de la $i-$ésima que vale 1.

3. Dimensión de un espacio vectorial

Como también hemos visto que el número de elementos de una base de un espacio vectorial E dado es único, tiene sentido definir la dimensión de E.

3.1 Dimensión finita

E **de dimensión finita.** Sea $E \neq \{0\}$ (no nulo) un $\mathbb{K}$-e.v. Diremos que E es de dimensión finita si existe $n \in \mathbb{Z}^+$ y una base de E (y, por tanto, todas) formada por n vectores (dimensión de n).

Dimensión de E**.** Es el número n de vectores que conforman cualquiera de sus bases. Lo denotamos $\dim(E)$.

Observación. Si $E = \{0\}$, no tendrá base, pero diremos que es de dimensión finita y con $\dim(E) = 0$. Es decir, solo tiene dimensión 0.

3.2 Dimensión infinita

E **de dimensión infinita.** Si E no tiene ninguna base finita. En este caso, lo denotaremos como $\dim(E) = +\infty$

Ejemplo 9. Ejemplos de Dimensión de un espacio vectorial

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ (vectores)
- $\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$ (polinomios de grado menor o igual que n)
- $\dim(\mathbb{K}[x]) = +\infty$ (polinomios en una variable)
- $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = m \times n$ (dimensión de las matrices la multiplicación mxn)

¡Ojo! Puede que a veces nos haga falta escribir la dimensión indicando sobre que cuerpo estamos trabajando. Entonces, lo que haremos será escribir $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Ejemplo 10. Dimensión de espacios vectoriales que relacionan diferentes cuerpos

- $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = +\infty$ (relación de los numeros reales en base a los racionales)
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ (relación de los reales respecto a los reales)
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, ya que $\{1, i\}$ es una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}-$e.v. (complejos)

3.3 Proposiciones

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita y sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de E, entonces:

1. Si $v_1, \ldots, v_n$ son L.I., entonces son base de E
2. Si $v_1, \ldots, v_n$ generan todo E, entonces son base de E
3. La dimensión de E, coincide con el máximo número de vectores LI y con el mínimo número de generadores
4. Todo conjunto de vectores LI de E se puede completar hasta una base de E
5. Si F es un sub-e.v. de E, entonces F también es de dimensión finita y $\dim(F) \leq \dim(E)$. Además, $\dim(F) = \dim(E)$ si, y solo si $F = E$

Ejercicio 17. Demostrar formalmente esta Proposición.

Consecuencia de la proposición (colorario) obtenemos lo siguiente:

Corolario. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. Entonces E es de dimensión infinita si, y solo si, podemos encontrar conjuntos de vectores LI de cardinal finito tan grandes como queramos.

Ejercicio 18. Demostrar formalmente este Corolario.

Corolario. Si E es un $\mathbb{K}$-e.v. y $E = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ entonces E es de dimensión finita y $\dim(E) \leq n$. Es decir, todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial finitamente generado es de dimensión finita menor o igual al número de generadores.

Ejemplo 11

Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

Todos los vectores de F se pueden escribir como $(x, x + z, z)$ variando x, z en $\mathbb{R}$ y, por tanto:

$$(x, x + z, z) = x \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1)$$

Es evidente que $u_1 = (1, 1, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 1)$ generan F. También son LI. Por lo tanto, forman una base de F.

Veamos ahora como completarla hasta una base de $\mathbb{R}^3$.

Siguiendo el Teorema de Steinitz, lo que haremos será ir introduciendo sucesivamente u_1, u_2 a una base conocida, como por ejemplo la base canónica $e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$.

- Como que $u_1 = (1, 1, 0) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$, podemos sustituir por ejemplo e_2 por u_1 obteniendo así una nueva base e_1, u_1, e_3

Para introducir u_2, primero lo escribimos como combinación lineal de la nueva base:

$$u_2 = (0, 1, 1) = -(1, 0, 0) + (1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (-1) \cdot e_1 + 1 \cdot u_1 + 1 \cdot e_3$$

Por tanto, podemos sustituir cualquiera de los restantes ya que todos los escalares son distintos a 0. Así, según el Teorema de Steinitz, u_1, u_2, e_3 es una base de $\mathbb{R}^3$ que evidentemente completa a la de F

4. Fórmula de Grassman

Teorema. Fórmula de Grassmann. Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita y sean F y G subespacios vectoriales de E. Entonces se verfica:

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Ejercicio 19. Demostrar formalmente este Teorema.

Observación. Notemos que si tenemos una suma directa, $F \oplus G$, tenemos que $F \cap G = \{0\}$, lo que equivale a decir $\dim(F \cap G) = 0$. Por tanto, por el `Teorema` anterior, tenemos:

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

4.1 Colorario

Corolario. Sean E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita y F, G sub-e.v. de E. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- F y G son complementarios ($E = F \oplus G$)
- $F \cap G = \{0\}$ y $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Corolario. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces todo subespacio vectorial F admite al menos un complementario.

Ejercicio 20. Demostrar formalmente este Corolario.