

Tema 4 - Determinantes

Ramon Ceballos

27/2/2021

Determinante de una matriz cuadrada

Solo se puede hablar de determinante cuando exista una matriz cuadrada.

1. Definiciones generales

Determinante. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamaremos determinante de la matriz A y lo denotaremos por $\det(A)$ o $|A|$ a un elemento del cuerpo \mathbb{K} que se define por inducción del siguiente modo:

- si $n = 1$, $A = (a_{11})$ y entonces $\det(A) = a_{11}$
- si $n > 1$, $\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n}$

En estos casos, α_{1i} es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ que se obtiene en suprimir la primera fila y la columna i -ésima de la matriz A .

Ejemplo 1

Dada la matriz cuadrada de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\alpha_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}$$

$$\alpha_{12} = \det(a_{21}) = a_{21}$$

Así pues, el determinante es:

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 2

Dada la matriz cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante de A es:

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

En esta expresión del determinante de A , tenemos que:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Con lo cual, se deduce:

$$\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}; \quad \alpha_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}; \quad \alpha_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Así pues:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Lo obtenido anteriormente es exactamente lo que se obtiene con la Regla de Sarrus.

2. Regla de Sarrus

Regla de Sarrus. Es una regla nemotécnica utilizada para calcular determinantes de matrices cuadradas de orden 3:



Figure 1: Regla de Sarrus

Básicamente lo que dice la imagen es:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

3. Introducción a las propiedades del determinante

Propiedad. $\forall n \geq 1$, el determinante de la transpuesta de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ coincide con el determinante de dicha matriz,

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Ejercicio 1

- En primer lugar, probad que es cierto para los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$
- Demostrad formalmente este resultado para el caso general