Tema 6 - Espacios vectoriales

Ramon Ceballos

6/3/2021

Dependencia e Independencia Lineal de vectores

1. Combinaciones lineales

Recordemos la definición de Combinación Lineal (CL).

Combinación lineal. Dados p vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ y los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, una combinación lineal de esos p vectores es un vector dado por una expresión de la forma:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$$

Ejemplo 7

Expresar el vector $(2, -4)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(-2, 0)$.

Necesitamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(2, -4) = \alpha(1, 1) + \beta(-2, 0)$$

Con lo cual, se trata de resolver el sistema:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha = -4 \end{cases}$$

Así pues, ya tenemos que $\alpha = -4$. Con lo cual:

$$2\beta = \alpha - 2 = -6 \Rightarrow \beta = -3$$

Entonces, la combinación lineal que buscábamos es:

$$(2, -4) = (-4)(1, 1) + (-3)(-2, 0)$$

2. Dependencia lineal de vectores

Dependencia lineal. Dados los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$, diremos que son linealmente dependientes (LD) si la ecuación vectorial es:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

Para tener dependencia lineal ésta tiene infinitas soluciones y, por tanto, los escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pueden tomar valores no nulos.

Dependencia lineal. Dados los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$, diremos que son linealmente dependientes (LD) si alguno de ellos se puede expresar como una combinación lineal del resto:

$$\exists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

3. Independencia lineal de vectores

Independencia lineal. Dados los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$, diremos que son linealmente independientes (LI) si la ecuación vectorial es:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

Para tener independencia lineal, esta expresión tiene como única solución la solución trivial. Es decir, $\alpha_i = 0 \; \forall i = 1, 2, \ldots, p$

Independencia lineal. Dados los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$, diremos que son linealmente independientes (LI) si no es posible expresarlos como una combinación lineal del resto.

$$\nexists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

En el caso de un conjunto $S \neq \emptyset$, $S \subseteq E$ finito o no, diremos que S es linealmente independiente si cualquier subconjunto finito de S lo es.

Es dedir, si cualquier combinación lineal de un número finito de elementos de S es igual a 0, implica que todos los escalares deben ser 0.

De forma análoga, diremos que S es linealmente dependiente si existen un número finito de elementos de S y una combinación suya igual a 0 donde no todos los escalares son 0.

4. Resultados de la Dependencia e Independencia Lineal de vectores

4.1 Proposición

PROPOSICIÓN 1

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ son linealmente dependientes si, y solo si, uno de ellos es combinación lineal del resto.

Observación. Como habréis notado, nosotros habíamos dado como definición alternativa de dependencia lineal esta proposición. En muchos casos es así y en otros muchos se toma como propiedad. Por eso aquí hemos incluído ambas opciones.

Ejercicio 11. Demostrar formalmente esta proposición.

PROPOSICIÓN 2

Proposición. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto linealmente independiente. Si $u \notin \langle S \rangle$, entonces $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 12. Demostrar formalmente esta proposición.