Tema 2 - Ecuaciones y Sistemas Lineales

Ramon Ceballos

21/2/2021

EJEMPLO: SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Recordemos el sistema del ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Habíamos concluido que era un sistema compatible determinado. Por tanto, ahora nos interesa calcular su solución, la cual sabemos que es única.

Por otro lado, tenemos que la matriz ampliada del sistema es:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & 4 & -3 & | & 1 \\ 3 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo ahora es utilizar el Método de Gauss para encontrar un sistema equivalente mucho más sencillo de resolver. Para ello, mediante operaciones elementales aplicadas a la matriz ampliada, obtendremos una matriz escalonada por filas de la matriz ampliada del sistema. A continuación vienen los pasos que debemos de realizar.

1. Eliminamos los coeficientes correspondientes a las variables x_1 de las dos últimas filas:

- A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por -2.
- A la última fila le sumamos la primera multiplicada por -3.

Realizando las operaciones anteriores, obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 2 & -7 & | & -17 \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{pmatrix}$$

2. Eliminamos los coeficientes respectivos a la variable x_2 de la última fila:

- A la última fila de la matriz que acabamos de obtener, le sumamos la segunda multiplicada por $-\frac{3}{2}$.

Así, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccc}1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 2 & -7 & | & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

Esta última matriz ampliada que acabamos de obtener es equivalente a la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales inicial y, lo más interesante de todo, se puede resolver de forma inmediata.

El sistema equivalente que acabamos de obtener es:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ & & 2x_2 & - & 7x_3 & = & -17 \\ & & & - & \frac{1}{2}x_3 & = & -\frac{3}{2} \end{array}$$

De la última ecuación podemos aislar x_3 y obtenemos:

$$x_3 = 3$$

Sustituyendo el valor de x_3 en la segunda ecuación y aislando x_2 obtenemos:

$$2x_2 - 21 = -17$$
$$x_2 = 2$$

Finalmente, sustituyendo $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$ en la primera ecuación y aislando x_1, obtenemos:

$$x_1 + 2 + 6 = 9$$
$$x_1 = 1$$

Con lo cual, la única solución del sistema siguiente que es compatible determiando es $s = (1, 2, 3)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

La solución es $s = (1, 2, 3)$.

Ejercicio 2

Resolved paso a paso el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

La solución es $s = (1, 2, 3)$.

Con lo cual, podemos concluir que los sistemas son equivalentes, ya que tienen el mismo conjunto de soluciones: $\{(1, 2, 3)\}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$