Tema 1 - Matrices

Ramon Ceballos

18/2/2021

MATRICES

1. Definiciones generales de matrices

¿Qué es una matriz?

Matriz. Sea $(\mathbb{K}, +, .)$ un cuerpo conmutativo y $m, n \geq 1$ enteros. Una matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ (o de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$) es una tabla formada por elementos de $\mathbb{K}$ dispuestos en m filas y n columnas de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K};\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Coeficientes de la matriz. Cada a_{ij} se denomina **término, coeficiente o entrada** de la matriz A. El primer subíndice, i, indica el número de la fila y el segundo, j, el de la columna que ocupa el término de la matriz.

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

A es una matriz de orden 2×3 ya que tiene 2 filas y 3 columnas

El elemento $a_{12} = 0$, el elemento $a_{23} = 11$

Ejercicio 1. ¿Cuáles serían los elementos a_{11} y a_{13}?

Es 5 y 3.

¿Dónde están las matrices?

Conjunto de matrices. Se denotará por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices de orden $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$.

Una matriz cualquiera de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se denotará indistintamente por A, $(a_{ij})_{m\times n}$ o (a_{ij}).

Cuando $m = n$, el conjunto de todas las matrices de orden $n \times n$, $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se denota simplemente por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Las matrices pertenecientes a este conjunto se dice que son de orden n en vez de $n \times n$.

¿Cuándo dos matrices son iguales?

Igualdad de matrices. Dadas dos matrices del mismo orden $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, son iguales si:

$$a_{ij} = b_{ij} \ \forall i = 1, \dots, m, \ \forall j = 1, \dots, n$$

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A y C son las únicas matrices que son iguales.

El resto de pares de matrices son diferentes porque tienen órdenes diferentes: $A, C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Tipos de Matrices

Matriz fila. Se denomina matriz fila a toda matriz que consta de una única fila.

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \cdots \ a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$$

Ejemplo 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 6}(\mathbb{R})$$

Es una matriz fila (llamado también vector).

Matriz columna. Se denomina matriz columna a toda matriz que consta de una única columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$$

Ejemplo 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Es una matriz columna.

Matriz nula. Se denota como O a la matriz nula, matriz con todos sus coeficientes nulos.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Matriz cuadrada. Se denomina matriz cuadrada de orden n a toda matriz que consta de n filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Es una matriz cuadrada de orden 2.

2.1 Matrices cuadradas

Dentro del ámbito de las matrices cuadradas caben las siguientes definiciones y tipos particulares de matrices:

Diagonal principal. Se denomina diagonal principal de una matriz cuadrada A a los elementos a_{ii} con $i = 1, \ldots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Matriz diagonal. Una matriz diagonal es aquella en la cual $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Es una matriz diagonal de orden 3.

Matriz escalar. Una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual $a_{ii} = \lambda,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo 7

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Es una matriz escalar con escalar $\lambda = 7 \in \mathbb{R}$ de orden 3.

Matriz identidad. Se denomina matriz unidad o matriz identidad de orden n, y se denota como I_n a la matriz escalar en la cual todos los elementos de la diagonal son 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo 8

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son las matrices identidad de orden 2 y 3, respectivamente

Matriz triangular superior. Se denomina matriz triangular superior a toda matriz en la cual $a_{ij} = 0,\ \forall i > j$. Es decir, todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Matriz triangular inferior. Se denomina matriz triangular inferior a toda matriz en la cual $a_{ij} = 0,\ \forall i < j$. Es decir, todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo 9

Esta es una matriz triangular superior de orden 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

y esta es una matriz triangular inferior también de orden 4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2 Caso general

Para matrices en general (no necesariamente cuadradas) se mantendrá la denominación de matriz triangular superior cuando $a_{ij} = 0, \forall\ i > j$. Más adelante se estudiarán en profundidad unos tipos especiales de estas matrices (las matrices escalonadas) que tendrán una importancia determinante en nuestros estudios.

Las matrices triangulares superiores, si no son cuadradas, se corresponden con los siguientes casos, dependiendo si $m < n$ o $n < m$ respectivamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 10

Estas son matrices triangulares superiores de orden 4×6 y 5×3 respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Operaciones con matrices

3.1 Suma

Suma de matrices. La suma de dos matrices A y B solo es posible si ambas son del mismo orden $m \times n$, entonces se suman término a término. Es decir, dadas $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se define la suma de A y B como la matriz:

$$C = (c_{ij})_{m\times n} \text{ donde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, \ldots, m\ \forall j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 11

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la suma es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2 Producto de un escalar por matriz

Producto por un escalar. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define el producto λA como una nueva matriz de orden $m \times n$ dada por:

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m\times n}$$

Ejemplo 12

Dados $\lambda = 3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\lambda A = 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

3.3 Producto de matrices

Producto de matrices. Para poder realizar el producto de una matriz A por una matriz B, el número de columnas de A ha de coincidir con el número de filas de B, entonces cada entrada ij de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B y sumando los números resultantes.

Concretamente, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, el producto AB es una matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ definida como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

con $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Nótese que $A_{m\times \mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}\times p} = C_{m\times p}$.

Ejemplo 13

Dadas:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el producto de A por B es una matriz cuadrada de orden 2:

$$AB = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 0 & -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Mientras que el producto de B por A es una matriz de orden 4:

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 + 1\cdot(-2) & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 0\cdot 2 + 2\cdot(-2) & 0\cdot 3 + 2\cdot 1 & 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ -1\cdot(-1) + 3\cdot 3 & -1\cdot 2 + 3\cdot(-2) & -1\cdot 3 + 3\cdot 1 & -1\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot(-2) & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Traza de una matriz

Traza. Es la suma de los elementos de la diagonal principal. Solo existe para matrices cuadradas.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4. Propiedades características de matrices

Siempre que tengan sentido las operaciones indicadas (es decir, que las matrices son de los órdenes adecuados para poder realizarlas) se satisfacen las siguientes propiedades.

4.1 Propiedades de la suma de matrices

- Propiedad conmutativa. $A + B = B + A$

Ejemplo 14

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = B + A$$

Demostración

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, queremos demostrar que:

$$A + B = B + A$$

Por un lado, $A + B = C$ donde $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$

Por otro lado, $B + A = D$ donde $D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$

Pero $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ ya que $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo.

Por lo tanto:

$$c_{ij} = d_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow C = D$$

- Propiedad asociativa de la suma. $(A + B) + C = A + (B + C)$

Ejemplo 15

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 13 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 11 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = A+(B+C)$$

Demostración

Dadas las matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ queremos demostrar que:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

Por un lado, $(A+B)+C = D$ donde $D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} \quad \forall i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$

Por otro lado, $A+(B+C) = E$ donde $E = (e_{ij})$ con $e_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \quad \forall i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$

Pero $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ ya que $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo.

Por lo tanto:

$$d_{ij} = e_{ij} \quad \forall i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n \Leftrightarrow D = E$$

- **Elemento neutro de la suma o elemento nulo.** $A+O = O+A = A$

Ejemplo 16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A+O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = A$$

$$O+A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Demostración

Dadas las matrices $A, O \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A = (a_{ij})$ y O la matriz nula, queremos demostrar que:

$$A+O = A$$

Sabemos que, $A+0 = B$ donde $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ij}+0 \quad \forall i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$

Pero $a_{ij}+0 = a_{ij}$ ya que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo y 0 es el elemento neutro para la suma.

Por lo tanto:

$$A+O = A$$

- **Matriz opuesta.** $\forall\ A = (a_{ij})_{m\times n}$ existe $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$ tal que:

$$A+(-A) = (-A)+A = O$$

Ejemplo 17

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Demostración

Dadas las matrices $A, -A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A = (a_{ij}),\ -A = (-a_{ij})$, queremos demostrar que:

$$A + (-A) = 0$$

Sabemos que, $A + (-A) = B$ donde $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) \quad \forall i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$.

Pero $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$ ya que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo y $-a_{ij}$ es el elemento opuesto de a_{ij}.

Por lo tanto:

$$A + (-A) = 0$$

4.2 Propiedades del producto de matrices

- Propiedad asociativa del producto. $(AB)C = A(BC)$

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$.

Se puede realizar el producto AB, el resultado será una matriz $m \times p$ que se podrá multiplicar por C y el producto $(AB)C$ será una matriz $m \times q$.

Análogamente, se puede realizar el producto BC que dará una matriz $n \times q$ y se puede realizar el producto $A(BC)$ que dará una matriz $m \times q$.

Entonces, la propiedad se puede expresar como:

$$(AB)C = A(BC)$$

Ejemplo 18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 13 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Demostración

Dadas $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$ con $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$ tenemos que:

$$AB = D \Rightarrow d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$(AB)C = DC = E \Rightarrow e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}$$

Por otro lado:

$$BC = F \Rightarrow f_{jl} = \sum_{k=1}^{l} b_{jk} c_{kl}$$

$$A(BC) = AF = G \Rightarrow g_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right)$$

Ahora, la pregunta es $E = G$. De momento vamos bien ya que $E, G \in \mathcal{M}_{n \times q}$. Por su parte:

$$e_{il} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) = g_{il}$$

y esta cadena de igualdades es cierta por las propiedades del cuerpo $\mathbb{K}$ vistas en el `Tema 0`.

Ejercicio 3

Se consideran las matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que $(AB)C = A(BC)$.

En primer lugar:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual:

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, se ve que $(AB)C = A(BC)$.

- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma. $A(B + C) = AB + AC$

Ejemplo 19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 13 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 8 & -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

- Elemento neutro del producto o elemento unidad.

$$AI_n = A \qquad I_nB = B$$

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Se puede realizar el producto AI_n y el resultado será una matriz $m \times n$.

Análogamente, se puede realizar el producto I_nB y el resultado será una matriz $n \times p$.

Además, se puede comprobar que se verifica que:

$$AI_n = A \qquad \text{y} \qquad I_nB = B$$

Ejemplo 20

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ejercicio 5

Considerad las matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que:

$$AI_3 = A$$
$$I_3B = B$$

Ejercicio 6

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

Observación.Nótese que, en particular, para matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I_n es un elemento neutro del producto, es decir: $AI_n = I_nA = A$ para toda matriz cuadrada A de orden n.

Ejemplo 21

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 A$$

Ejercicio 7

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

4.3 Propiedades asociativas y distributivas de matrices

- Propiedad distributiva del producto por escalares respecto de la suma.

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,\ \ \lambda \in \mathbb{K}$$

Ejercicio 8

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

Ejemplo 22

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \qquad \lambda = 3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(A+B) = 3\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 6 & 15 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + \lambda B = \begin{pmatrix} 21 & 3 & 15 \\ -3 & -6 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 6 & 15 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

- Elemento neutro del producto por escalar. $1A = A$

Ejemplo 23

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 6 & 9 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1A = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 1\cdot(-5) & 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 7 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 & 1\cdot(-3) & 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 6 & 1\cdot 9 & 1\cdot(-5) & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 6 & 9 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Demostración

Por definición,

$$1A = (1\cdot a_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

ya que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ y 1 es el elemento neutro para el producto

- Propiedades distributiva del producto por matrices respecto de la suma de escalares.

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Ejercicio 9

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

Ejemplo 24

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 5, \mu = -7$$

$$(\lambda + \mu)A = -2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + \mu A = 5A + (-7)A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Propiedad asociativa del producto de escalares por una matriz.

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Ejercicio 10

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

Ejemplo 25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 5, \mu = -7$$

$$(\lambda\mu)A = -35A = \begin{pmatrix} -35 & 35 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\mu A) = 5(-7A) = 5 \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 35 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}$$

- Propiedad asociativa del producto de un escalar por dos matrices.

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

Ejemplo 26

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 3$$

$$(\lambda A)B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 27 & 39 \\ 27 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(AB) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 & 13 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 27 & 39 \\ 27 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

4.4 Excepciones de cumplimiento de propiedades

En general, no se cumplen las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa de productos de matrices. La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Ejemplo 27

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

- Ley de simplificación. No se cumple la ley de simplificación en un producto.

Ejemplo 28

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

satisfacen $AB = AC$, pero en cambio $B \neq C$

Ejercicio 12. Comprueba que efectivamente $AB = AC$

- Divisores de cero. Existen divisores de 0, es decir $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$.

Ejemplo 29

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

pero en cambio

$$AB = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$