Ejemplos de factorización LU

Ramon Ceballos

25/2/2021

Ejemplo de factorización LU sin permutación

Encontremos la factorización LU de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Empecemos buscando su forma escalonada reducida por filas:

$$A \sim_{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_4-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{-\frac{1}{5}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_3+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{f_4+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim_{\frac{5}{17}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_4-\frac{17}{5}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim_{\frac{1}{3}f_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y con todo esto, ya tenemos a nuestra matriz U:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener U hemos llevado a cabo 8 operaciones elementales:

$$U = L_8 \cdot L_7 \cdots L_1 \cdot A$$
$$= F_4\left(\frac{1}{3}\right) \cdot F_{43}\left(-\frac{17}{5}\right) \cdot F_3\left(\frac{5}{17}\right) \cdot F_{42}(2) \cdot F_{32}(2) \cdot F_2\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot F_{41}(-1) \cdot F_{21}(-2) \cdot A$$

Multiplicando ahora por las inversas por la izquierda, lo que tenemos es:

$$A = L_1^{-1} \cdots L_8^{-1} \cdot U = F_{21}(2) \cdot F_{41}(1) \cdot F_2(-5) \cdot F_{32}(-2) \cdot F_{42}(-2) \cdot F_3\left(\frac{17}{5}\right) \cdot F_{43}\left(\frac{17}{5}\right) \cdot F_4(3) \cdot U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot U$$

Entonces:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{17}{5} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{17}{5} & 3 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que estas matrices obtenidas son las correctas:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{17}{5} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{17}{5} & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$