Factorizaciones LU con R

Ramon Ceballos

27/2/2021

Factorizaciones LU con R

1. Obtener las matrices LU en R

Para realizar una factorización LU con `R`, podemos utilizar la función `LU()` introduciendo por parámetro una matriz cuadrada.

Para su empleo se necesitan cargan las siguientes librerías.

```
library(Biodem)
library(matlib)
library(expm)
```

```
## Loading required package: Matrix
```

```
##
## Attaching package: 'expm'
```

```
## The following object is masked from 'package:Matrix':
##
##     expm
```

La función devolverá una lista con tres componentes: P, L y U.

Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo sin permutación de filas

Encontremos la factorización LU de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A = rbind(c(1,3,0,-1), c(2,1,-1,5), c(0,-2,3,-1), c(1,1,3,1))
luA = LU(A)
```

```r
luA$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0    0
## [2,]    0    1    0    0
## [3,]    0    0    1    0
## [4,]    0    0    0    1
```

En este caso, como no se han permutado filas, la matriz P es la matriz identidad.

Las matrices L y U son las siguientes.

```r
#Matriz L
luA$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1  0.0    0    0
## [2,]    2  1.0    0    0
## [3,]    0  0.4    1    0
## [4,]    1  0.4    1    1
```

```r
#mATRIZ u
luA$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3  0.0 -1.0
## [2,]    0   -5 -1.0  7.0
## [3,]    0    0  3.4 -3.8
## [4,]    0    0  0.0  3.0
```

Ejemplo con permutación entre filas

Encontremos ahora la factorización LU de la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

```r
A = matrix(c(0,1,3,1,3,-2,-3,-2,-1), byrow = T, nrow = 3, ncol = 3)
luA = LU(A)
```

```r
luA$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    0
## [2,]    1    0    0
## [3,]    0    0    1
```

En este caso, podemos ver como sí se han permutado filas, ya que la matriz P no es la matriz identidad.

Las matrices L y U son las siguientes.

```r
luA$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]   -3    7    1
```

```r
luA$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3   -2
## [2,]    0    1    3
## [3,]    0    0  -28
```

2. Resolver sistemas de ecuaciones con matrices LU en R

Finalmente, también podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando antes la factorización LU a la matriz de coeficientes.

Esto se lleva a cabo con la misma función utilizada hasta el momento: **`LU()`**, pero añadiendo un parámetro más (este parámetro debe de ser el vector de términos independientes del sistema). Lo que implica que además de las matrices P,L y U, la función nos devuelve dos vectores más: d y x.

- x es la solución del sistema.
- d es el vector solución del sistema $Ld = b$, que luego nos sirve para resolver $Ux = d$.

Ejemplo resolución de sistemas

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{cases}$$

```r
A = rbind(c(0,1,3), c(1,3,-2), c(-3,-2,-1))
b = c(1,3,-2)
sistema = LU(A,b)
```

```
## Warning in if (!backword) 1L:len else len:1L: la condición tiene longitud > 1 y
## sólo el primer elemento será usado
```

Vemos que hubo una permutación entre la 2ª y la 1ª fila.

```r
sistema$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    0
## [2,]    1    0    0
## [3,]    0    0    1
```

Matrices L y U.

```r
sistema$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]   -3    7    1
```

```r
sistema$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3   -2
## [2,]    0    1    3
## [3,]    0    0  -28
```

Matriz d que refiere a la solución de $Ux = d$; y la matriz x que e sla solución del sistema.

```r
sistema$d
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    1
## [3,]    0
```

```r
sistema$x
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    1
## [3,]    0
```