Taller 1

Curso Álgebra Lineal

La presentación y redacción de todos los ejercicios llega a sumar hasta 1 punto del total del taller.

Ejercicio 1

Halla el cociente y el resto de la división de $p(x) = (x+1)^7$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$.

Solución

```r
library(polynom)

#Definimos los polinomios
p = polynomial(coef = c(1,1))^7
q = polynomial(coef = c(1,1,1))
p
```

```
1 + 7*x + 21*x^2 + 35*x^3 + 35*x^4 + 21*x^5 + 7*x^6 + x^7
```

```r
q
```

```
1 + x + x^2
```

```r
#Calculamos el cociente y el resto
cociente = p/q
resto = p%%q
cociente
```

```
6*x + 15*x^2 + 14*x^3 + 6*x^4 + x^5
```

```r
resto
```

```
1 + x
```

```r
#Comprobamos que la solución es correcta
q*cociente + resto == p
```

```
[1] TRUE
```

Ejercicio 2

Halla el módulo y el árgumento del número complejo $\frac{(1+i)^7}{1-i}$.

Solución

```r
#Definimos el número complejo
z = ((1+1i)^7)/(1-1i)

#Calculamos su módulo
Mod(z)
```

```
[1] 8
```

```r
#Calculamos el argumento principal
Arg(z)
```

```
[1] 0
```

Ejercicio 3

Halla el valor de la matriz X para que se verifique

$$A \cdot X \cdot A^t = \sqrt{5} \cdot A$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

En primer lugar, comprobamos si la matriz A tiene inversa

```r
A = matrix(c(1, 1, 1,
             0, -1, -1,
             -1, 0, 1),
           nrow = 3, byrow = T)
det(A)
```

```
[1] -1
```

Como $\det(A) \neq 0$, sabemos que existe A^{-1}. Entonces, podemos multiplicar la ecuación dada en el enunciado por la matriz A^{-1} por la izquierda. Así, lo que obtenemos es lo siguiente

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t = A^{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot A$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot A^t = \sqrt{5}(A^{-1} \cdot A)$$
$$\Leftrightarrow I_3 \cdot X \cdot A^t = \sqrt{5} \cdot I_3$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. De este modo, lo que nos queda es

$$X \cdot A^t = \sqrt{5} \cdot I_3$$

Entonces, $X = \sqrt{5} \cdot (A^t)^{-1}$. Fijaos que A^t es invertible ya que $\det(A^t) = \det(A) \neq 0$

```r
X = sqrt(5)*solve(t(A)) #Calculamos X
X
```

```
         [,1]      [,2]     [,3]
[1,] 2.236068 -2.236068 2.236068
[2,] 2.236068 -4.472136 2.236068
[3,] 0.000000 -2.236068 2.236068
```

Ejercicio 4

Resuelve aplicando el método de Gauss y clasifica según corresponda el sistema de ecuaciones lineal siguiente:

$$\begin{cases} x & - & y & + & z & + & t & = & 4 \\ 2x & + & y & - & 3z & + & t & = & 4 \\ x & - & 2y & + & 2z & - & t & = & 3 \\ x & - & 3y & + & 3z & - & 3t & = & 2 \end{cases}$$

Solución

```r
library(matlib)

#Definimos la matriz, el vector de términos independientes y la matriz ampliada  del sistema
A = matrix(c(1, -1, 1, 1,
             2, 1, -3, 1,
             1, -2, 2, -1,
             1, -3, 3, -3),
           nrow = 4, byrow = T)
b = c(4, 4, 3, 2)
AB = cbind(A,b)

echelon(AB, verbose = T) #Utilizamos el método de Gauss
```

```
Initial matrix:
                b
[1,] 1 -1  1  1 4
[2,] 2  1 -3  1 4
[3,] 1 -2  2 -1 3
[4,] 1 -3  3 -3 2

row: 1

 exchange rows 1 and 2
                b
[1,] 2  1 -3  1 4
[2,] 1 -1  1  1 4
[3,] 1 -2  2 -1 3
[4,] 1 -3  3 -3 2

 multiply row 1 by 0.5
                      b
[1,] 1  0.5 -1.5  0.5 2
[2,] 1 -1.0  1.0  1.0 4
[3,] 1 -2.0  2.0 -1.0 3
[4,] 1 -3.0  3.0 -3.0 2

 subtract row 1 from row 2
                      b
[1,] 1  0.5 -1.5  0.5 2
[2,] 0 -1.5  2.5  0.5 2
[3,] 1 -2.0  2.0 -1.0 3
```

```
[4,] 1 -3.0  3.0 -3.0 2

 subtract row 1 from row 3
                      b
[1,] 1  0.5 -1.5  0.5 2
[2,] 0 -1.5  2.5  0.5 2
[3,] 0 -2.5  3.5 -1.5 1
[4,] 1 -3.0  3.0 -3.0 2

 subtract row 1 from row 4
                      b
[1,] 1  0.5 -1.5  0.5 2
[2,] 0 -1.5  2.5  0.5 2
[3,] 0 -2.5  3.5 -1.5 1
[4,] 0 -3.5  4.5 -3.5 0

row: 2

 exchange rows 2 and 4
                      b
[1,] 1  0.5 -1.5  0.5 2
[2,] 0 -3.5  4.5 -3.5 0
[3,] 0 -2.5  3.5 -1.5 1
[4,] 0 -1.5  2.5  0.5 2

 multiply row 2 by -0.2857143
                           b
[1,] 1  0.5 -1.500000  0.5 2
[2,] 0  1.0 -1.285714  1.0 0
[3,] 0 -2.5  3.500000 -1.5 1
[4,] 0 -1.5  2.500000  0.5 2

 multiply row 2 by 0.5 and subtract from row 1
                            b
[1,] 1  0.0 -0.8571429  0.0 2
[2,] 0  1.0 -1.2857143  1.0 0
[3,] 0 -2.5  3.5000000 -1.5 1
[4,] 0 -1.5  2.5000000  0.5 2

 multiply row 2 by 2.5 and add to row 3
                           b
[1,] 1  0.0 -0.8571429 0.0 2
[2,] 0  1.0 -1.2857143 1.0 0
[3,] 0  0.0  0.2857143 1.0 1
[4,] 0 -1.5  2.5000000 0.5 2

 multiply row 2 by 1.5 and add to row 4
                      b
[1,] 1 0 -0.8571429 0 2
[2,] 0 1 -1.2857143 1 0
[3,] 0 0  0.2857143 1 1
[4,] 0 0  0.5714286 2 2

row: 3
```

```
 exchange rows 3 and 4
                         b
[1,] 1 0 -0.8571429 0 2
[2,] 0 1 -1.2857143 1 0
[3,] 0 0  0.5714286 2 2
[4,] 0 0  0.2857143 1 1

 multiply row 3 by 1.75
                             b
[1,] 1 0 -0.8571429 0.0 2.0
[2,] 0 1 -1.2857143 1.0 0.0
[3,] 0 0  1.0000000 3.5 3.5
[4,] 0 0  0.2857143 1.0 1.0

 multiply row 3 by 0.8571429 and add to row 1
                             b
[1,] 1 0  0.0000000 3.0 5.0
[2,] 0 1 -1.2857143 1.0 0.0
[3,] 0 0  1.0000000 3.5 3.5
[4,] 0 0  0.2857143 1.0 1.0

 multiply row 3 by 1.285714 and add to row 2
                            b
[1,] 1 0 0.0000000 3.0 5.0
[2,] 0 1 0.0000000 5.5 4.5
[3,] 0 0 1.0000000 3.5 3.5
[4,] 0 0 0.2857143 1.0 1.0

 multiply row 3 by 0.2857143 and subtract from row 4
                     b
[1,] 1 0 0 3.0 5.0
[2,] 0 1 0 5.5 4.5
[3,] 0 0 1 3.5 3.5
[4,] 0 0 0 0.0 0.0

row: 4
```

Obtenemos pues que se trata de un sistema compatible indeterminado cuya solución es

$$(5-3t, 4.5-5.5t, 3.5-3.5t, t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5

Considera el sistema de ecuaciones lineal

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & (a-1)(a+2) \\ x & + & ay & + & z & = & (a-1)^2(a+2) \\ x & + & y & + & az & = & (a-1)^3(a+2) \end{cases}$$

1. Indicar para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado, indeterminado o bien incompatible.

Solución

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

Lo que se ha hecho anteriormente ha sido utilizar las propiedades de los determinantes para simplificar su cálculo. El primer paso ha sido sumar a la primera columna las dos restantes. A continuación, se ha sacado factor común $(a+2)$. Finalmente se han conseguido ceros en el primer elemento de las dos últimas filas y con ello se ha obtenido una matriz triangular superior, el determinante de la cuál es el producto de los elementos de la diagonal.

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado

Si $a = -2$, tenemos que $\det(A) = 0$, con lo cuál ya tenemos que $\text{rg}(A) < 3$. ¿Qué ocurre si cogemos el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

con lo cuál el rango de A es 2. ¿Qué pasa ahora con el rango de la matriz ampliada? Sabemos que como mucho puede ser 3. Además, como ya tenemos un menor de orden 2 no nulo, podemos orlarlo con la última fila y la cuarta columna para ver si la ampliada es de rango 3 o no:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Acabamos de obtener que el determinante es nulo. Ello conlleva que el rango de la ampliada es 2. Así, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado. Observad que no hubiese hecho falta orlar puesto que se trata de un sistema homogéneo y ya sabemos que los sistemas homogéneos siempre son compatibles.

Finalmente, si $a = 1$, tenemos de nuevo que $\det(A) = 0$, pero en este caso el rango de A es 1 ya que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no tiene ningún menor de orden mayor a 1 no nulo. Ahora, lo que tenemos es que la matriz ampliada como mucho tiene rango 2. Análogamente al caso anterior, el rango de la matriz ampliada es también 1, ya que de nuevo se trata de un sistema homogéneo. Entonces, cuando $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

En resumen,

- Si $a \neq -2, a \neq 1$, el sistema es compatible determinado
- Si $a = -2$ o $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado

2. Resolver el sistema cuando $a = 1$.

Solución

```
#Resolvemos para caso a = 1
A = matrix(c(1, 1, 1,
             1, 1, 1,
             1, 1, 1),
```

```r
             nrow = 3, byrow = 3)
b = c(0,0,0)
Solve(A, b, fractions = T)
```

```
x1 + x2 + x3  =  0
           0  =  0
           0  =  0
```

Entonces, la solución es

$$x = -y - z, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

3. Resolver el sistema cuando $a = -2$.

Solución

```r
#Resolvemos para caso a = -2
A = matrix(c(-2, 1, 1,
               1, -2, 1,
               1, 1, -2),
             nrow = 3, byrow = 3)
Solve(A, b, fractions = T)
```

```
x1    - 1*x3  =  0
  x2 - 1*x3  =  0
          0  =  0
```

Entonces, la solución es

$$x = y = z, \quad z \in \mathbb{R}$$