Tema 2 - Ecuaciones y Sistemas Lineales

Ramon Ceballos

21/2/2021

EJEMPLO: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ \quad\; y + z + t = 1 \\ 2x + 2y = -2 \\ x - z + t = -1 \end{cases}$$

Tenemos que rg (A) = rg (A|B) y a su vez el valor de dicho rango, que es 3, es menor que el nº de incognitas (4).

La matriz ampliada del sistema es:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Realizamos las operaciones necesarias para obtener la matriz escalonada.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim f_3 - 2f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & | & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim f_4 - f_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & | & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \sim f_3 + 2f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \sim f_4 + 2f_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim f_3 \to f_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a una matriz escalonada que se corresponde con el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ \quad\; y + z + t = 1 \\ \quad\quad 2t = 1 \end{cases}$$

Con lo cual:

$$t = \frac{1}{2}$$

$$y + z + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} - z$$

$$x + 2\left(\frac{1}{2} - z\right) + z + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x - z + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = z - \frac{3}{2}$$

En definitiva, las infinitas soluciones de este sistema compatible indeterminado son:

$$\begin{cases} x = z - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} - z \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Con $z \in \mathbb{R}$.

Observad que las variables dependientes (las que se corresponden con los pivotes) son x, y, t; mientras que la única variable independiente es la z.