Introducción a distribuciones de probabilidad

Ramon Ceballos

8/2/2021

Variable aleatoria continua

1. Conceptos generales

Variable aleatoria continua. Una v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua cuando su función de distribución (la acumulada) $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ es continua.

En este caso, $F_X(x) = F_X(x^-)$ y, por este motivo, la probabilidad de tomar cualquier valor tiende a cero (baja probabilidad):

$$p(X = x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Pero esto no significa que sean sucesos imposibles, ya que la probabilidad del suceso existe.

2. Función de densidad

Función de densidad. Función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

- $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Nunca puede tomar un valor negativo.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Es decir, el área bajo la curva es 1.

Una función de densidad puede tener puntos de discontinuidad.

Toda variable aleatoria X con una función de distribución del siguiente tipo (para cualquier densidad f es una v.a. continua):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La expresión de arriba se defino como la integral entre $-\inf$ y x de la densidad ($f(t)dt$). Esto significa que la función de distribución ($F(x)$) acumula el área bajo la densidad desde $-\inf$ a x, es decir, dado un pto cualquiera x es el área que hay bajo la curva hasta ese momento.

Para cualquier densidad f es una v.a. continua.

Diremos entonces que f es la función de densidad de X.

A partir de ahora, considerareos solamente las v.a. X continuas que tienen función de densidad.

3. Esperanza

Esperanza de una v.a. continua. Sea X v.a. continua con densidad f_X. La esperanza de X es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

Si el dominio D_X de X es un intervalo de extremos $a < b$, entonces (se integra desde a hasta b):

$$E(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f_X(x)dx$$

Sea $g : D_X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (función g(x)). Entonces:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

Si el dominio D_X de X es un intervalo de extremos $a < b$, entonces:

$$E(g(X)) = \int_{a}^{b} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

4. Varianza

Varianza de una v.a. continua. Se define como en el caso de la variable aleatoria discreta:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

Y se puede demostrar que:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

5. Desviación típica

Desviación típica de una v.a. continua. Como en el caso discreto:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$