Introducción a distribuciones de probabilidad

Ramon Ceballos

7/2/2021

Distribución Geométrica

1. Conceptos teóricos y matemáticos

Si X es variable aleatoria que mide el "número de repeticiones independientes del experimento (tipo Bernoulli) hasta haber conseguido el primer éxito", entonces diremos que X se distribuye como una Geométrica con un solo parámetro p. Otra forma de definir esta distribución es como el nº de intentos necesarios hasta conseguir éxito. Esta función depende de si se cuenta el nº de intentos o el nº de fracasos hasta obtener el éxito.

$$X \sim \text{Ge}(p)$$

En esta expresión, p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ es la probabilidad de fracaso.

Ejemplos de este tipo de distribuciones es cuando un borracho prueba a abrir la puerta de su casa teninedo un manojo de n llaves distintas, o la probabilidad de tener un hijo en función de los intentos(n intentos).

Vamos a definir algunas de las propiedades que tendrá una distribución Geométrica.

- El **dominio** de X será $D_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ (si contamos el nº de fracasos hasta obtener el primer éxito, por ello se incluye el 0) o bien $D_X = \{1, 2, \dots\}$ (aquí se cuentan el nº de intentos de ahí que se empiece por 1) en función de si empieza en 0 o en 1, respectivamente.
- La **función de probabilidad** vendrá dada por:

$$f(k) = (1-p)^k p \qquad \text{si empieza en 0}$$
$$f(k) = (1-p)^{k-1} p \qquad \text{si empieza en 1}$$

- La **función de distribución** vendrá dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-p)^{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

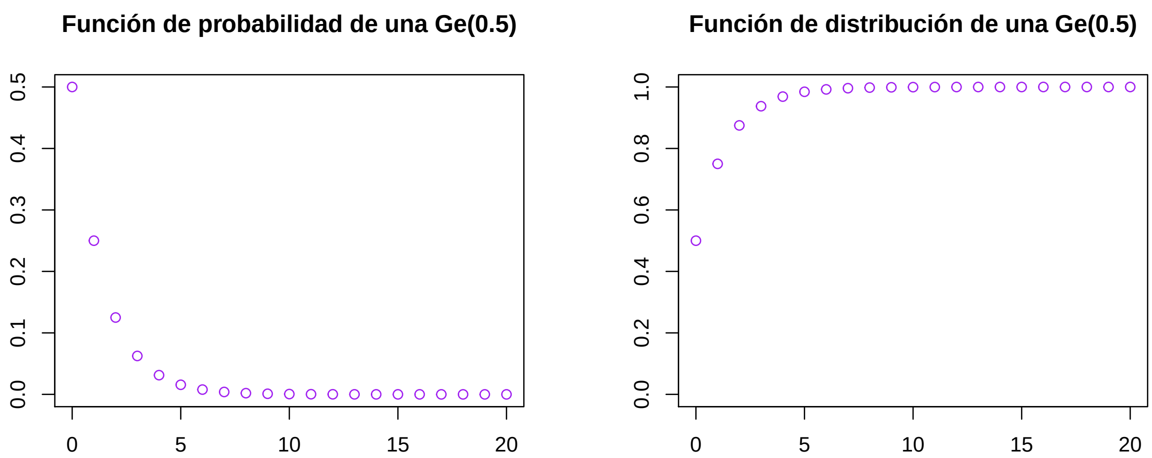
En este caso, dependerá de si se cuenta el nº de intentos o de fracasos. Cuando k tiende a infinito la probabilidad va bajando paulatinamente.

- **Esperanza**. $E(X) = \frac{1-p}{p}$ si empieza en 0 y $\text{E}(X) = \frac{1}{p}$ si empieza en 1.
- **Varianza**. $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- **Propiedad de la falta de memoria**. Si X es una v.a. $\text{Ge}(p)$, entonces:

$$p\{X \geq m+n :\ X \geq n\} = p\{X \geq m\}\ \forall m, n = 0, 1, \dots$$

En este caso, la probabilidad de éxito es independiente del nº de intentos.

```
par(mfrow = c(1,2))
plot(0:20, dgeom(0:20,0.5),col = "purple", xlab = "", ylab = "", main = "Función de probabilidad de una
plot(0:20, pgeom(0:20,0.5),col = "purple", xlab = "", ylab = "", main = "Función de distribución de una
```




```
par(mfrow= c(1,1))
```

2. Distribución Geométrica en `R` y `Python`

El código de la distribución Geométrica:

- En `R` tenemos las funciones del paquete `Rlab`: **`dgeom(x, prob)`**, **`pgeom(q, prob)`**, **`qgeom(p, prob)`**, **`rgeom(n, prob)`** donde `prob` es la probabilidad de éxito del experimento.
- En `Python` tenemos las funciones del paquete **`scipy.stats.geom`**: `pmf(k,p)`, `cdf(k,p)`, `ppf(q,p)`, `rvs(p, size)` donde `p` es la probabilidad de éxito del experimento.

3. Ejemplos en código para la distribución Geométrica (R y Python)

Si el borracho tuviera 10 llaves entonces para modelizar la distribución geométrica la probabilidad debería de ser de 0.1.

Sea $X = Geom(p = 0.1)$ la distribución que modela la probabilidad de intentar abrir una puerta hasta conseguirlo. En este caso la función de probabilidad del nº de intentos sería:

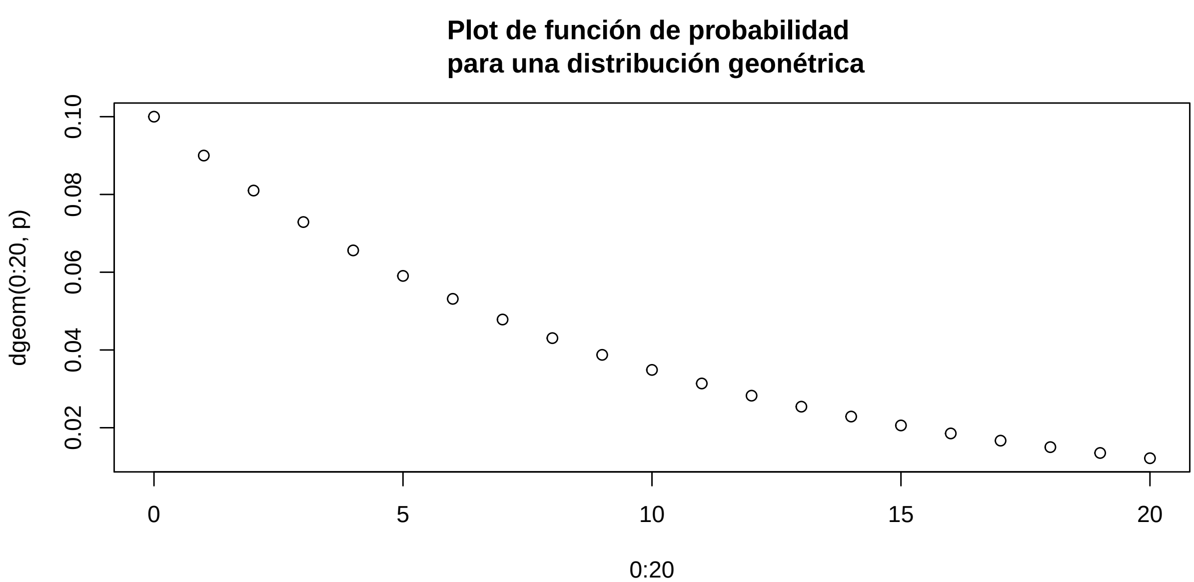
$$f(k) = (1-p)^{k-1}p$$

Ejemplo en R Empleamos las funciones anteriores.

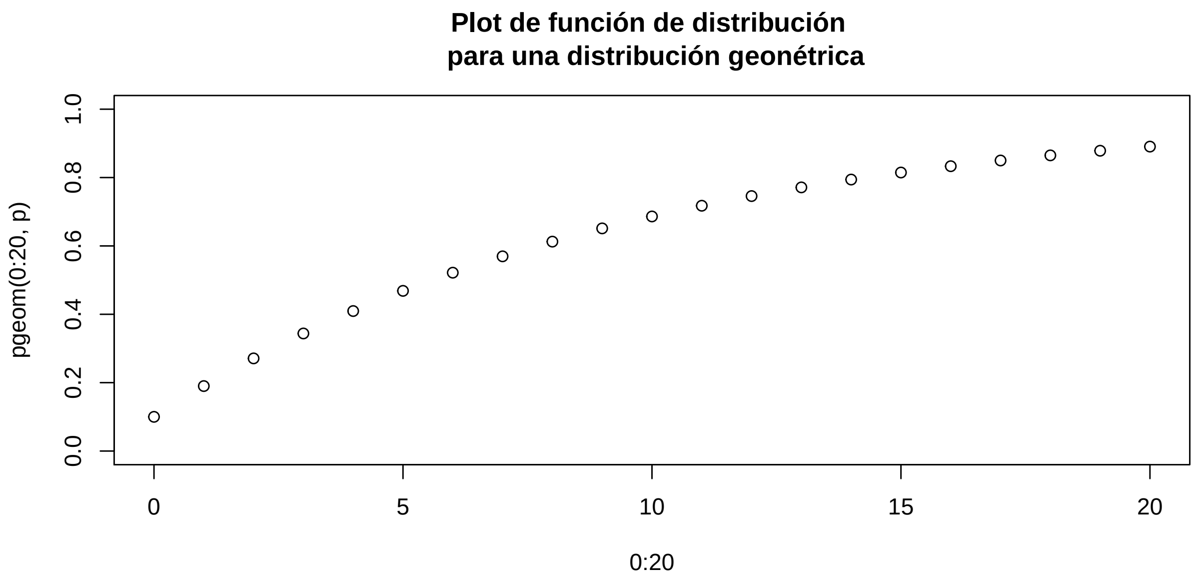
```r
library(Rlab)
```

```
## Rlab 2.15.1 attached.

##
## Attaching package: 'Rlab'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
##     dexp, dgamma, dweibull, pexp, pgamma, pweibull, qexp, qgamma,
##     qweibull, rexp, rgamma, rweibull

## The following object is masked from 'package:datasets':
##
##     precip
```

```r
#defino la proabilidad
p = 0.1

#Función de probabilidad para 20 intentos
plot(0:20, dgeom(0:20, p),
     title("Plot de función de probabilidad \n para una distribución geonétrica"))
```




```r
#Función de distribución para 20 intentos
plot(0:20, pgeom(0:20, p),
     ylim = c(0,1), #Acaba en 1 siempre
     title("Plot de función de distribución \n para una distribución geonétrica"))
```



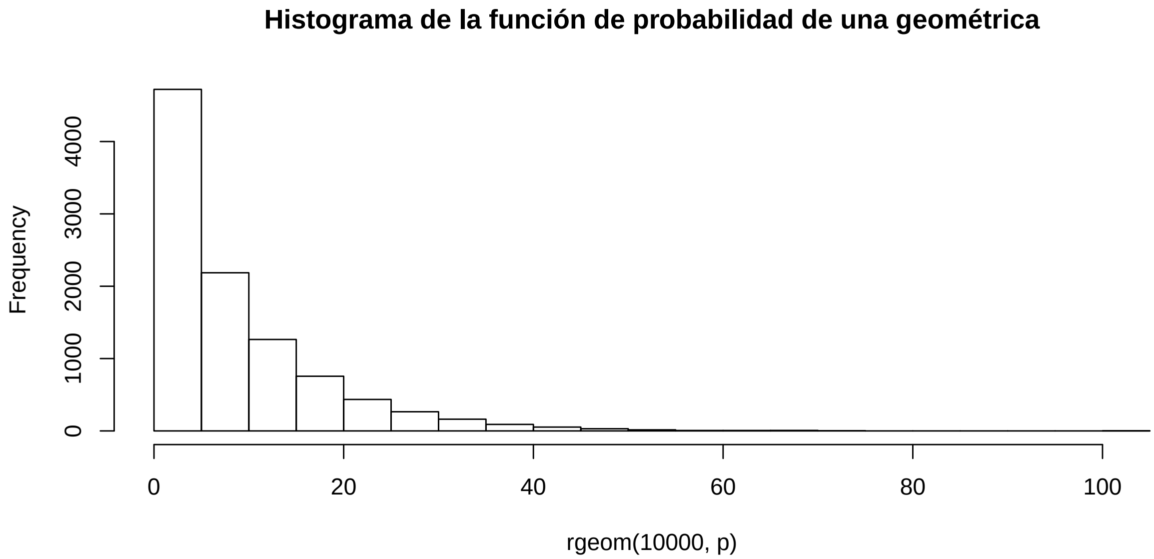

```r
#La mediana
qgeom(0.5, p)
```

```
## [1] 6
```

```r
#El cuantil 0.75
qgeom(0.75, p)
```

```
## [1] 13
```

```r
#Valores aleatorios generados con rgeom
#Representación en histograma
hist(rgeom(10000, p),
     main = "Histograma de la función de probabilidad de una geométrica")
```



Ejemplo en Python Vete al script de Python del presente tema 7.