Fuerzas centrales: Solución de la ecuación diferencial ordinaria por el método de Runge - Kutta del problema de dos cuerpos.

Rolando Duarte - Mejías*
Escuela de Física, Universidad de Costa Rica
(Dated: 12 de diciembre de 2020)

Resumen: Este trabajo de investigación de fuerzas centrales, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria, mediante el método de Runge - Kutta, logra demostrar que se obtienen resultados muy cercanos a la realidad, lo cual demuestra que este método es bastante robusto para la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias. Como era de esperarse, se obtienen las distintas secciones cónicas que se pueden esperar por el resultados analítico y este trabajo los muestra gráficamente para su mayor entendimiento.
Abstract: This research work on central forces, solving the ordinary differential equation, using the Runge - Kutta method, manages to show that results are very close to reality, which it shows that this method is quite robust for solving problems with ordinary differential equations. As expected, the different conic sections that can be expected from the analytical results are obtained and this work, it shows them graphically for better understanding.

Palabras claves: fuerzas centrales, secciones cónicas, integración númerica, Runge - Kutta.

1. INTRODUCCIÓN

En el propósito de tratar de explicar los fenómenos que nos rodea en el universo, se encuentran distintas ecuaciones que cuentan con su propia dificultad, es por ello, que la utilización del poder computacional se vuelve importante para la resolución de los problemas más complejos. Por dicho motivo, en este trabajo, se tratará de aproximar las trayectorias que sufre un cuerpo en presencia de un cuerpo masivo siguiendo un campo gravitacional usando el formalismo de la mecánica langragiana, ejemplos de esta relación son la Tierra - Sol o Tierra - Luna. Dicha aproximación se realizará mediante el método Runge - Kutta para la solucón de ecuaciones diferenciales ordinarias, con la principal idea de que finalmente sea un método confiable para la resolución de este problema en específico y poder establecerlo mediante la comparación con la solución analítica exacta, ya que este tipo de problemas sí cuenta con dicha solución analítica, por ende, este trabajo es de carácter demostrativo.

2. MARCO TEÓRICO

Como mencioné, este problema, con dos cuerpos, está resuelto, siguiendo el procedimiento del Taylor[1], usaremos el formalismo de la mecánica langragiana, donde definimos el langragiano de tal forma que :

$$\mathscr{L}(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,\dot{q},t) \tag{1}$$

Donde T es la energía cinética del sistema, V es la energía potencial y q se le llama coordenada generalizada, cuya funcionalidad es describir la posición del sistema y $\dot{q}$ es la derivada de la coordenada generalizada con respecto al tiempo.

La idea es minimizar el Langragiano, en general, hacer que dicho Langragiano sea estacionario, esto se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2}$$

En el contexto de una relación de un cuerpo mucho más masivo que otro, se establece un marco de referencia, de tal forma que el centro de masa, en ese marco de referencia, se mantiene estático, lo cual simplifica el problema y hace que la equación 1 se convierta en:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r) \tag{3a}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3b}$$

$$r = \|\vec{r}\| = \|\vec{r_1} - \vec{r_2}\| \tag{3c}$$

donde μ en 3b es la masa reducida de los dos cuerpos y en 3c es la distancia entre los dos cuerpos.

Introduciendo la equación 3 en la ecuación 2, se obtienen dos ecuaciones:

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^2 - \frac{dV}{dr}\,[Radial] \tag{4}$$

$$\mu r^2\dot{\phi} = const = \ell\,[Angular] \tag{5}$$

*Electronic address: rolando.duartemejias@ucr.ac.cr; URL: http://www.fisica.ucr.ac.cr

De la ecuación 5, el resultado obtenido es que se conserva el momento angular en el giro realizado por el cuerpo menos masivo.

En un campo conservativo, como lo es las fuerzas centrales, podemos expresar la fuerza asociada a ella, con un potencial dependente, únicamente, de la componente radial, de la siguiente forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \tag{6}$$

Entonces la ecuación 5 y la ecuación 6 en la ecuación 4, obtenemos la siguiente ecuación, dependeiente de la variable radial:

$$\mu\ddot{r} = F(r) + \frac{\ell^2}{\mu r^3} \tag{7}$$

La forma de facilitar el procedimiento para encontrar la solución es usar esta relación dependiente de ϕ:

$$u = \frac{1}{r} \tag{8}$$

Con lo cual tenemos estas relaciones:

$$\dot{r} = -\frac{\ell}{\mu}\frac{du}{d\phi} \tag{9a}$$

$$\ddot{r} = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\phi^2} \tag{9b}$$

Con la ecuación 8 y la ecuación 9 en la ecuación 7, obtenemos la siguiente ecuación con la nueva varaible u y dependiente del ángulo ϕ:

$$\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\phi^2} = F + \frac{\ell^2 u^3}{\mu} \tag{10}$$

Simplificando la ecuación 10:

$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{\mu}{\ell^2 u(\phi)^2}F \tag{11}$$

En el caso gravitacional, que se estudiará en este trabajo, la fuerza la podemos expresar como $F = -ku^2$, lo cual obtenemos, finalmente, de la ecuación 11:

$$u'' = -u + \frac{k\mu}{\ell^2} \tag{12}$$

Es momento de presentar el método de Runge - Kutta, la cual es una técnica en el uso de un tiempo discreto para la obtención de los resulatados de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, en el caso de este trabajo, necesitamos la solución para ecuaciones diferenciales ordinarias[2]. En el caso particular para la solución de las ecuaciones de Newton o del formalismo de la mecánica langragiana, donde se otienen ecuaciones diferenciales ordianarias de segundo orden, como se puede ver, explícitamente, en la ecuación 12, se necesita el método de Runge - Kutta de cuarto orden, los pasos necesarios para realizar este calculo se procede de esta manera, primero debemos detener una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \tag{13}$$

Con lo cual debemos de saber las condiciones inciales, las cuales se establecen como:

$$y_0 = y(x_0) \tag{14a}$$

$$y_0' = y'(x_0) \tag{14b}$$

Entonces se realiza un cambio de variable ($w = \frac{dy}{dx}$), donde quedan dos ecuaciones acopladas

$$\frac{dy}{dx} = w = F_1(x, y, w) \tag{15a}$$

$$\frac{dw}{dx} = F_2(x, y, w) \tag{15b}$$

Tomando en cuenta que $x_m = x_0 + mh$, las soluciones gradualmente se otienen de la siguiente forma:

- $k_{11} = hF_1\left(x_m, y_m, u_m\right), \; k_{21} = hF_2\left(x_m, y_m, u_m\right)$
- $k_{12} = hF_1\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{11}, u_m + \frac{1}{2}k_{21}\right)$
- $k_{22} = hF_2\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{11}, u_m + \frac{1}{2}k_{21}\right)$
- $k_{13} = hF_1\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{12}, u_m + \frac{1}{2}k_{22}\right)$
- $k_{23} = hF_2\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{12}, u_m + \frac{1}{2}k_{22}\right)$
- $k_{14} = hF_1\left(x_m + h, y_m + k_{13}, u_m + k_{23}\right)$
- $k_{24} = hF_2\left(x_m + h, y_m + k_{13}, u_m + k_{23}\right)$
- $y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}\left(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}\right)$
- $u_{m+1} = u_m + \frac{1}{6}\left(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}\right)$

El principal objetivo de este trabajo es compara con la solución analítica de la ecuación 12, podemos ver que la forma que tiene, coincide con la forma que se necesita en la ecuación 13, lo cual podemos hacer las comparaciones pertinentes. Para simplicar este problema, podemos utilizar, sin pérdida de generalidad, la siguiente solución:

$$u(\phi) = Acos(\phi) \tag{16}$$

Donde A la podemos relacionar como $A = \frac{\epsilon k\mu}{\ell^2}$, donde ϵ es el término que nos ayudará a predecir las órbitas que sigue el cuerpo alrededor del cuerpo masivo, tal como se puede ver en la Figura 1.

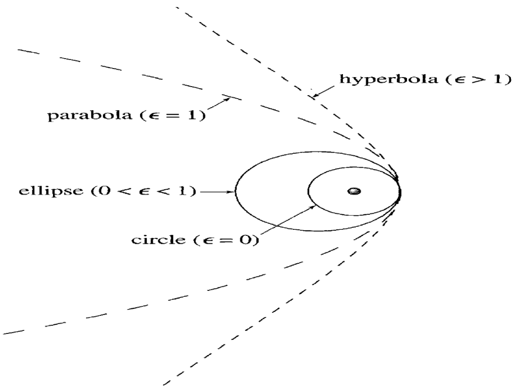

Figura 1: Diferentes valores de epsilon predice las diferentes órbitas que puede poseer un cuerpos girando alrededor de otro cuerpo masivo en presencia de una fuerza central[1].

3. METODOLOGÍA

La forma en que se resolverá este problema es mediante un programa básico en C, el cual hará los cálculos necesarios, utilizando, donde cambiará las letras usadas en la ecuación 13, ”y” y ”x” por ”u” y ”s”, respectivamente, el código realizado es el siguiente:

```c
/*Este codigo fue elaborado por Rolando Jesus
    Duarte Mejias para el
curso FS0733 - Topicos de Metodos Matematicos de
    Fisica: Fisica
computacional en C de la Escuela de Fisica de la
    Universidad de
Costa Rica.*/

#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*s_m se refiere al angulo, u a la variable que
    es el inverso del radio y
v_m derivada de u*/

double function_one(double s_m, double u_m,
    double v_m){
    double result = v_m;
    return result;
}

double function_two(double s_m, double u_m,
    double v_m){
    double m = 1.0;     /*masa*/
    double l = 1.0;     /*momento angular*/
    double k = 1.0;     /*constante
        gravitacional*/

    double result = - u_m + k * m / pow(l, 2);
    return result;
}

void k_matrix(double matrix[2][4], double h,
    double s_m, double u_m, double v_m){
    /*Matriz de los valores de k 2x4*/
    matrix[0][0] = h * function_one(s_m, u_m,
        v_m);
    matrix[1][0] = h * function_two(s_m, u_m,
        v_m);
    matrix[0][1] = h * function_one(s_m + (h /
        2), u_m + (matrix[0][0] / 2), v_m + (
        matrix[1][0] / 2));
    matrix[1][1] = h * function_two(s_m + (h /
        2), u_m + (matrix[0][0] / 2), v_m + (
        matrix[1][0] / 2));
    matrix[0][2] = h * function_one(s_m + (h /
        2), u_m + (matrix[0][1] / 2), v_m + (
        matrix[1][1] / 2));
    matrix[1][2] = h * function_two(s_m + (h /
        2), u_m + (matrix[0][1] / 2), v_m + (
        matrix[1][1] / 2));
    matrix[0][3] = h * function_one(s_m + (h),
        u_m + matrix[0][2], v_m + matrix[1][2]);
    matrix[1][3] = h * function_two(s_m + (h),
        u_m + matrix[0][2], v_m + matrix[1][2]);
}

void create_file(char name[32], double v_m){
    /*Funcion para crear los archivos necesarios
        segun el nombre que se le de con las
        condicion necesaria
    para calcular las distintas secciones
        conicas que se da en este problema*/
    double matrix[2][4]; /*matriz de los valores
        k para la solucion*/
    double h = 0.001;
    double s_m = M_PI_2;
    double u_m = 0.1;
    char c[100];
    FILE* file;
    file = fopen(name, "wt");
    k_matrix(matrix, h, s_m, u_m, v_m);

    double x = cos(s_m) / u_m;
    double y = sin(s_m) / u_m;
    sprintf(c, "%f %f\n", x, y);
    fputs(c, file);
    for (int i = 0; i<200; i++){
        u_m = u_m + (matrix[0][0] + 2 * matrix
            [0][1] + 2 * matrix[0][2] + matrix
            [0][3]) / 6;
        v_m = v_m + (matrix[1][0] + 2 * matrix
            [1][1] + 2 * matrix[1][2] + matrix
            [1][3]) / 6;
        s_m = s_m + (i + 1) * h;
        x = cos(s_m) / u_m;
        y = sin(s_m) / u_m;
        sprintf(c, "%f %f\n", x, y);
        fputs(c, file);
        k_matrix(matrix, h, s_m, u_m, v_m);
    }
    fclose(file);
    printf("Proceso Terminado\n");
}

int main(){
    create_file("data_circle.txt", 0.0); /*
        Circular*/
    create_file("data_ellipse.txt", -0.4); /*
        Elipse*/
    create_file("data_parabole.txt", -1.0); /*
        Parabola*/
    create_file("data_hyperbole.txt", -10.0); /*
        Hiperbola*/
    return 0;
}
```

Para obtener las diferentes secciones cónicas que se pueden obtener de este problemas, se calcula la condición inicial en $\frac{\pi}{2}$, por conveniencia, donde se sigue que en la derivada:

$$u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_0 = -A = -\frac{\epsilon k \mu}{\ell^2} \tag{17}$$

Como se puede ver en el código, los valores de k, μ, ℓ son la unidad, por lo que $v_0 = -\epsilon$, por eso, usando los datos presentados en la Figura 1, sabemos para que nos de una forma circular, $v_0 = 0$, para una elipse, debemos usar $-1{,}0 < v_0 < 0$, un parábola, basta con que $v_0 = -1{,}0$ y, finalmente, para una hipérbola, se debe cumplir que $v_0 < -1$.

4. RESULTADOS

Usando las condiciones iniciales propuestas en la metodología de este trabajo, se obtienen las siguientes figuras:

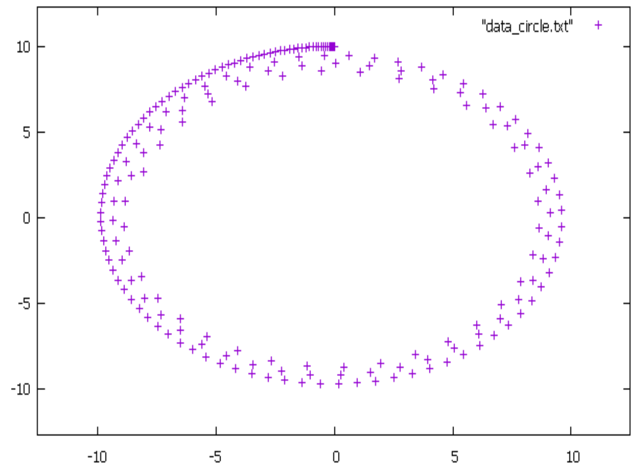

Figura 2: Trayectoria obtenida con $v_0 = 0$, caso circular.

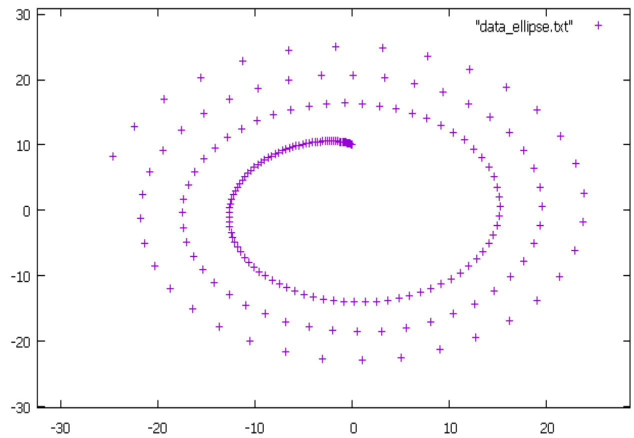

Figura 3: Trayectoria obtenida con $-1{,}0 < v_0 < 0$, caso elipse.

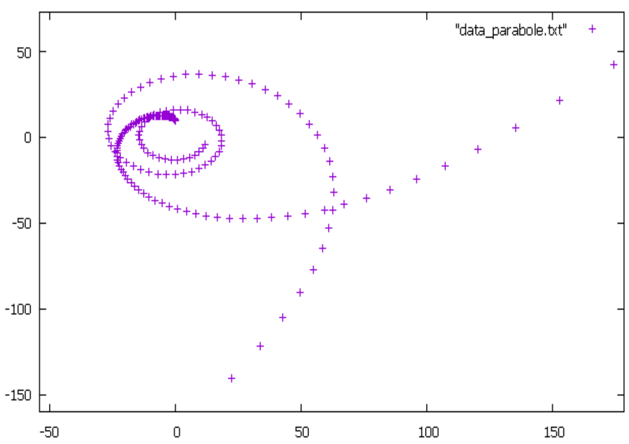

Figura 4: Trayectoria obtenida con $v_0 = -1{,}0$, caso parabólico.

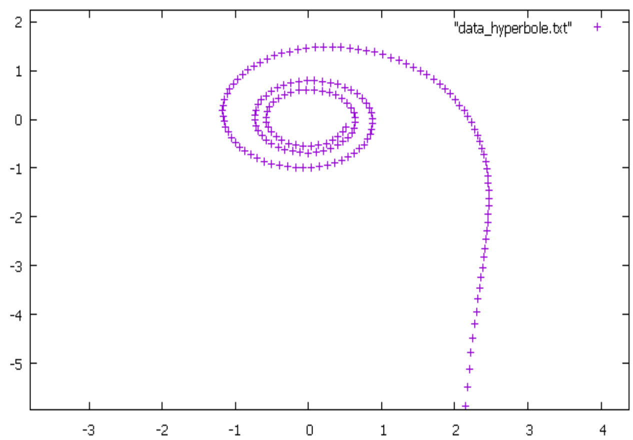

Figura 5: Trayectoria obtenida con $-1{,}0 > v_0$, caso hiperbólico.

Se puede observar que en el caso circular, Figura 2, es muy similar a lo esperado, donde existe una órbita casi cerrada, hay que recordar que todos los calculos se han realizado centrados en el origen de marco de referencia. Por otro lado, en la Figura 3, se puede observar una especie de espiral que se va alejando, la idea de esta figura es que demostrara una elipse, pero se puede deber algún error de programa o divergencia de resultados, aunque hay que recordar que esto es más parecido en la realidad, donde los objetos se van alejando, un caso cercano, la luna se aleja una cierta distancia por año. En la Figura 4, se puede observar que los giros que puede realizar ese planeta esmpiezan muy cercanos al origen, pero se va alejando en el tiempo y, por último, en la Figura 5, podemos ver que el objeto tiene tanta velocidad, que en cierto momento sale éxpedido haciaafuera del sistema orbital, provocando que no vuelva a girar más sobre el centro.

5. CONCLUSIÓN

Este trabajo de investigación obtuvo resultados muy sastifactorios, demostrando la utilidad del método de Runge - Kutta para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, en este caso aplicado al formalismo de la mecánica langragiana en el contexto de fuerzas centrales en el problema de dos cuerpos en presencia de una fuerza gravitacional. Aunque presenta un error en la Figura 3, que se puede deber al programa o divergencia de resultados, pienso que se puede comparar con lo que pasa en la realidad donde los cuerpos se van alejando y acercanco en el tiempo, aunque la naturaleza de esos eventos se deben a otros motivos, pero en general, el trabajo cumple con su fin demostrativo de lo que puede ayudar el poder computacional para solución de este tipo de problemas.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor David Solano, con su curso de FS0733 - Tópicos de Métodos Matemáticos de Física: Física computacional en C, donde se puede aprender este mundo maravilloso de la programación, además, de poder aprender a darle utilidad en la solución de problemas que pueden aparecer en nuestras labores dentro de la carrera de física.

[1] J. Taylor, *Classical mechanics.* (University Science Books, 2005).

[2] K. D. Gottlieb, S. and C. Shu, *Strong Stability Preserving Runge-Kutta And Multistep Time Discretizations.* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011).