

Tarea 3

IMT2112 - Algoritmos Paralelos en Computación Científica

Elwin van 't Wout

7 de octubre de 2019

Introducción

Muchas de las ecuaciones diferenciales parciales solo se puede resolver con métodos numéricos. El método de diferencias finitas es uno de los métodos mas populares para aproximar la solución de una ecuación diferencial. En esta tarea consideramos el problema de Laplace en una cuadrada, dado por

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + 1 = f, & 0 < x, y < 1; \\ u = 0, & x = 0, x = 1, y = 0, \text{ or } y = 1; \end{cases} \quad (1)$$

para la función incógnita $u = u(x, y)$ y funciones conocidas $f = f(x, y)$ y $\alpha = \alpha(x, y)$. Para una malla rectangular, la versión estándar del método de diferencias finitas está dado por el *stencil*

$$\begin{bmatrix} & & -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & & \\ -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & + \frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}} + \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + 1 & -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \\ & & -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} & & \end{bmatrix} \quad (2)$$

en donde h_x y h_y son los pasos de la malla en la dirección x e y . La variable α se evalúa en los puntos del medio, por ejemplo $\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) = \alpha(ih_x, (j+\frac{1}{2})h_y)$. Las variables N_x y N_y son el número de nodos en la dirección x e y . Hay nodos en el borde del dominio.

El sistema lineal resultante se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en lo cual A es simétrica y positiva definida si $\alpha > 0$. Por lo tanto, se puede usar gradientes conjugados para resolver el sistema lineal.

Actividades

Para la tarea, se tiene que implementar CG en paralelo con la biblioteca MPI.

Se puede usar $\alpha(x, y) = x(x-1)y(y-1) + 1$ y el código debe funcionar para cualquier número de nodos en la malla y cualquier número de procesos en MPI.

1. Explica por qué se puede usar el método de CG para resolver el sistema lineal.

Sugerencia: usar el teorema de Gershgorin para demostrar que la matriz es positiva definida.

2. Para almacenar la matriz *sparse* A se tiene que usar el formato de *stencils*. El dominio se puede particionar en bloques horizontales, bloques verticales o bloques rectangulares según tu preferencia. Explica como se puede almacenar las variables (matrices, vectores y números) en una implementación de MPI. En tu respuesta, incluye los tamaños de cada variable.
3. Implementa el algoritmo de CG para este sistema lineal.
 - a) El algoritmo está dado en Figura 5.8 del libro de Eijkhout, en lo cual $K = I$ la identidad.
 - b) Se sugiere comenzar con la implementación de las operaciones básicas del algoritmo, es decir, suma de vectores, producto punto y multiplicación matriz-vector.
 - c) Se tiene que verificar la convergencia del método, es decir, la norma del residuo debe disminuirse.
 - d) Se puede elegir el vector f . Una opción es un modelo simple de un fuente puntual: el vector es cero salvo en un nodo de la malla en lo cual tiene valor uno.
 - e) En el informe, explica como has implementado la comunicación entre los procesos.
4. El código debe funcionar en el clúster de Mazinger. En el informe, incluye una grabación de pantalla del *output* de tu código en lo cual debe ser visible cuales nodos estas usando, es decir hagan un *print* de los nombres de los procesadores usados.

Reglamento

La tarea debe cumplir con las reglas siguientes.

- Mientras se puede trabajar junto a compañeros en la preparación de las tareas, el código y el informe deben ser elaborados de forma individual.
- No es permitido copiar código de fuentes externos, tampoco sacar código de internet. El código entregado debe ser programado por tu mismo.
- Entrega un archivo comprimido con el código de C++ y un informe corto, elaborado en \LaTeX , con las respuestas a las preguntas. Suben el archivo al cuestionario en Siding y usa como nombre del archivo `Tarea3_apellido.zip` en lo cual se tiene que reemplazar `apellido` con tu propio apellido.
- El plazo de entrega es detallado en el cuestionario correspondiente a este tarea en Siding. Es posible subir la tarea múltiples veces hasta el plazo del cuestionario.