Ayudante: Rudyard Jerez 5 de noviembre de 2020

Tarea 3

IMT2112

Alumno: Alex P. Medina J. *Profesor: Elwin van't Wout*

Complemento a la parte ptráctica, donde se explican los detalles utilizados.

1. ¿Por qué se puede usar el metodo de CG para resolver el sistema lineal?

Para poder usar el método de gradiente conjugado para resolver un sistema lineal $Ax = b$ se necesita que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Debido a que la forma del stencil es de la forma (evitando)

$$\begin{bmatrix} & -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \\ -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}+\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} + \frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}+\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + 1 & -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \\ & -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \end{bmatrix}$$

El cuál da un sistema simétrico. Para ver que es definido positivo, vemos que las diagonales serán la parte central del *stencil*, y el resto se dispondrá a lo largo de la fila (o columna, según el caso). Según la teoría de Gershgorin, los valores propios estarán en la union de los 'Discos de Gershgorin' en el plano complejo, los cuales podemos crear, para un par arbitrario (i, j) como: Para cada fila (o columna)

- centro = elemento en la diagonal:

$$\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} + \frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}} + \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + 1$$

- radio = suma de los valores absolutos de las entradas en la fila que no son la diagonal (recordando que $\alpha > 0$):

$$\left| -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} \right| + \left| -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} \right| + \left| -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \right| + \left| -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \right|$$
$$= \frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} + \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2}$$

Por lo tanto, el menor valor que podría tener un valor propio real (y debe ser real porque es simétrica con entradas reales), se obtiene al restar el centro y el radio, lo que da 1>0, por lo tanto, todos los valores propios serán positivos estrictos, asi la matriz es definida positiva. Cumpliendose las condiciones podemos usar gradiente conjugado.

2. Almacenamiento de A en formato stencils

2.1. [Particionamiento del dominio]

2.2. ¿Cómo se puede almacenar las variables (matrices, vectores y numeros) en una implementacion de MPI?

Recordemos que la cantidad de columnas y filas de esta matriz dependerá de la cantidad de nodos en la malla ($cols = N_x \times N_y = rows$). Además, será sparse, pues cada fila solo tendrá 5 elementos. Ya que la matriz es definida totalmente por el stencil, y este se evalua en cada nodo a medida que es requerido, en cada procesador se puede tener la "función stencil", la cual evalúa el stencil en la posición pedida, sin necesidad de mantener una cantidad innecesaria de matrices, vectores o bloques guardados en principio.

Los vectores por otro lado, deberan ser particionados o mantenidos enteros en cada procesador (lo que no es muy eficiente), estos tendrán un largo de $N_x \times N_y$. Lo que se podría hacer es que uno de los procesadores mantenga todo el vector y, al momento de hacer una operación local, se envian los segmentos correspondientes al procesador que lo necesite. Como la separacion máxima entre dos elementos de la fila es $2N_x$ (o $2N_y$, dependiendo de la forma de la malla).

2.3. [Caso de un stencil con todos sus elementos iguales]

3. Implementando CG

3.1. [Considere preacondicionador K = I]

3.2. [Implementación de operaciones básicas]

3.3. [Verificar convergencia]

3.4. [Se puede elegir f como algún vector canónico]

3.5. Comunicación entre procesos

NaN