Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
IMT2112/ Algoritmos paralelos en computación científica
Alumno: Tomás González

Tarea Nº3

1. Dado el stencil

$$\begin{bmatrix} & -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \\ -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}+\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2}+\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}+\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2}+1 & -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \\ & -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \end{bmatrix}$$

es claro que la matriz será pentadiagonal. Visualicemos la esquina superior de la matriz para convencernos:

$$\begin{bmatrix} C_{0,0} & O_{0,0} & 0 & \dots & N_{0,0} & \dots & 0 & 0 \\ E_{1,0} & C_{1,0} & O_{1,0} & 0 & \dots & N_{1,0} & \dots & 0 \\ 0 & E_{2,0} & C_{2,0} & O_{2,0} & \dots & \dots & N_{2,0} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ S_{0,1} & 0 & \dots & E_{0,1} & C_{0,1} & O_{0,1} & \dots & \dots \\ 0 & S_{1,1} & 0 & \dots & E_{1,1} & C_{1,1} & O_{1,1} & \dots \end{bmatrix}$$

donde N, S, E, O, C son respectivamente norte, sur, este, oeste y centro de los subindices correspondientes, y los subindices indican la posición en la malla enumerando por filas:

$$\begin{aligned} &(N_y, 0), (N_y, 1), ..., (N_y, N_x) \\ &(N_y - 1, 0), (N_y - 1, 1), ..., (N_y - 1, N_x) \\ &\vdots \\ &(1, 0), (1, 1), ..., (1, N_x) \\ &(0, 0), (0, 1), ..., (0, N_x) \end{aligned}$$

Para verificar que es diagonal, basta ver que $E_{i+1,j} = O_{i,j}$ y $S_{i,j+1} = N_{i,j}$. Pero tenemos: $E_{i+1,j} = -\frac{\alpha_{(i+1)-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} = -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} = O_{i,j}$ y $S_{i,j+1} = -\frac{\alpha_{i,(j+1)-\frac{1}{2}}}{h_y^2} = -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} = N_{i,j}$. Ahora veamos que es sdp. Notemos que los círculos de Gershgorin de la matriz tendrán como centros los elementos de la diagonal: $C_{i,j}$. Además, los radios serán la suma de los elementos de la fila que contiene ese centro, y en el peor caso el radio será $|S_{i,j}| + |E_{i,j}| + |O_{i,j}| + |N_{i,j}|$. Pero como $\alpha(x, y) > 0$, ya que los términos $(1 - x)(1 - y)$ y xy son ambos no negativos para $x, y \in [0, 1]$, se tiene que $|S_{i,j}|+|E_{i,j}|+|O_{i,j}|+|N_{i,j}| = -(S_{i,j}+E_{i,j}+O_{i,j}+N_{i,j})$. Además, $C_{i,j} = S_{i,j}+E_{i,j}+O_{i,j}+N_{i,j}+1 > 0$. Así,para todo i, j, el centro es positivo y mayor que el mayor radio posible, de donde los circulos de Gershgorin están completamente contenidos en el lado del plano que implica que las partes reales de los valores propios son positivas. Además, por la simetría de la matriz, estos valores propios son reales. Entonces, son positivos. Luego, la matriz es sdp.

Como la matriz es simétrica y sdp podemos usar CG.

2. a) Recordemos que el dominio era de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
(N_y,0),(N_y,1),....,(N_y,N_x) & \text{fila Ny} \\
(N_y-1,0),(N_y-1,1),....,(N_y-1,N_x) & \text{fila Ny-1} \\
\vdots & \\
(1,0),(1,1),....,(1,N_x) & \text{fila 1} \\
(0,0),(0,1),....,(0,N_x) & \text{fila 0}
\end{array}
$$

Lo particionaremos por filas, comenzando desde la fila 0. De esta forma, los primeros $p-1$ procesadores tienen $\lfloor \frac{N_y}{p} \rfloor$ filas cada uno, y el resto en el procesador p. Estos son bloques horizontales (de filas).

b) La matriz se puede almacenar float como 5 arrays. Por esto, la parte de la matriz que le corresponde a cada procesador es $N_x \times local\_height$, donde la altura local es la cantidad de filas de la malla que le tocaron a ese procesador. En el código están así:

float** Norte;

float** Sur;

float** Este;

float** Oeste;

float** Centro;

Los vectores sabemos que tendrán las mismas dimensiones que las representaciones del stencil $N_x \times N_y$, por lo tanto, localmente en cada profesor el tamaño de los vectores también es $N_x \times local\_height$.

Los números necesarios (β, δ, ρ,etc) son floats.

3. e) La comunicación es necesaria para calcular los productos punto y los matvecs. Para los productos puntos, hay una función 'parallel dot product' que, dados los productos puntos locales, comunica con un MPI Allreduce usando MPI sum y deja el producto punto global en cada procesador.

   Para el matvec, notamos que hacer $Ax = b$, se calcula de la siguiente forma:

   En el punto (i, j) de la malla, $(Ax)_{i,j} = S_{i,j}x_{i,j-1} + N_{i,j}x_{i,j+1} + O_{i,j}x_{i+1,j} + E_{i,j}x_{i-1,j} + C_{i,j}x_{i,j}$.

   Usando esto, notamos que por la partición por filas, $x_{i,j}, x_{i+1,j}, x_{i-1,j}$ están todos en el mismo procesador. Además, los N, S, E, O, C también, porque se calculan ahí desde el principio. Sólo hará falta enviar $x_{i,j+1}$, que es el punto del norte de $x_{i,j}$, cuando la fila j y $j+1$ estén en distintos procesadores. También, habrá que enviar $x_{i,j-1}$ cuando j y $j-1$ estén en distintos procesadores. Estos dos procesos los llamé en el código 'comunicación norte' y 'comunicación sur'.

   Asumí que hay al menos dos filas por procesador, lo cual es bastante realista suponiendo que $N_y >> p$. Esto fue para evitar programar casos rebuscados con muchos if/else.