IMT2112
Tarea 3

Elwin van 't Wout

November 5, 2020

Introducción

Muchas de las ecuaciones diferenciales parciales solo se puede resolver con métodos numéricos. El método de diferencias finitas es uno de los métodos mas populares para aproximar la solución de una ecuación diferencial. En este tarea consideramos el problema de Laplace en una cuadra, dado por

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + u = f, & 0 < x, y < 1; \\ u = 0, & x = 0, x = 1, y = 0, \text{ or } y = 1; \end{cases} \tag{1}$$

para la función incognita $u = u(x, y)$ y funciones conocidas $f = f(x, y)$ y $\alpha = \alpha(x, y)$. Para una malla rectangular, la versión estandar del método de diferencias finitas está dado por el *stencil*

$$\begin{bmatrix} & -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \\ -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}+\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} + \frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}+\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + 1 & -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \\ & -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \end{bmatrix} \tag{2}$$

en donde h_x y h_y son los pasos de la malla en la dirección x e y. La variable α se evalúa en los puntos del medio, por ejemplo $\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) = \alpha(ih_x, (j + \frac{1}{2})h_y)$. Los constantes N_x y N_y son el número de nodos en la dirección x e y. Hay nodos en el borde del dominio.
El sistema lineal resultante se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en lo cual A es simétrica y positiva definita si $\alpha > 0$. Por lo tanto, se puede usar gradientes conjugados para resolver el sistema lineal.

Actividades

Para la tarea, se tiene que implementar CG en paralelo con la biblioteca MPI. Se puede usar $\alpha(x, y) = x(x-1)y(y-1) + 1$ y el código debe funcionar para cualquier número de nodos en la malla y cualquier número de procesos en MPI.

1. Explica por qué se puede usar el método de CG para resolver el sistema lineal.
   Sugerencia: usar el teorema de Gershgorin para demostrar que la matriz es positiva definita.

2. Para almacenar la matriz *sparse* A tienen que usar el formato de *stencils*.

   (a) El dominio pueden particionar en bloques horizontales, bloques verticales o bloques rectangulares según tu preferencia.

   (b) Expliquen como se puede almacenar las variables (matrices, vectores y números) en una implementación de MPI. En tu respuesta, incluye los tamaños de cada variable.

   (c) En el caso de todos los elementos de un *stencil* son iguales, igualmente tienen que crear y llenar el stencil completo, y utilizar los elementos correctos en el algoritmo de CG.

3. Implementa el algoritmo de CG para este sistema lineal.

   (a) El algoritmo está dado en Figura 5.8 del libro de Eijkhout, en lo cual $K = I$ la identidad.

   (b) Se sugiere comenzar con la implementación de las operaciónes básicas del algoritmo, es decir, suma de vectores, producto punto y multiplicación matriz-vector.

   (c) Tienen que verificar la convergencia del método, es decir, la norma del residuo debe disminuirse.

   (d) Se puede eligir el vector f. Una opción es un modelo simple de un fuente puntual: el vector es cero salvo en un nodo de la malla en lo cual tiene valor uno.

   (e) En el informe, expliquen como han implementado la comunicación entre los procesos.

4. El código debe funcionar en el clúster de Mazinger. En el informe, incluye una grabación de pantalla del *output* de tu código en lo cual debe ser visible cuales nodos estan usando, es decir hagan un *print* de los nombres de los procesadores usados.

Evaluación

Entreguen un archivo comprimido con el código de C++ y un informe corto, elaborado en LaTeX, con las respuestas a las preguntas.

Los reglamientos del curso se puede encontrar en Canvas.