PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2016

TAREA 5

Publicación: Viernes 13 de Mayo.
Entrega: **Viernes 20 de Mayo hasta las 10:15 horas**.

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si esta en blanco).
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas a mano ni en otro sistema de composición de texto.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre en cada hoja de respuesta.
- Si usa más de una hoja para una misma pregunta corchetelas.
- Junte las respuestas a preguntas distintas usando un clip (no un corchete).
- Debe entregar una copia escrita durante la ayudantía asignada y una copia digital por el buzón del curso, ambas antes de la fecha/hora de entrega.
- **Se penalizará con 1 punto en la nota final de la tarea por cada regla que no se cumpla.**
- La tarea es individual.

Pregunta 1

Se define el conjunto de los x-términos como el menor conjunto T tal que:

- $x \in T$,
- si $t_1 \in T$ y $t_2 \in T$, entonces $f(t_1, t_2) \in T$.

Por ejemplo, x, $f(x, x)$ y $f(f(x, x), x)$ son x-términos.

1. Defina de manera inductiva la función largo: $T \to \mathbb{N}$ que entrega el largo de un x-término t, donde los símbolos x, f, (,) y ',' son considerados como un elemento de largo 1. Por ejemplo, $\text{largo}(x) = 1$, $\text{largo}(f(x, x)) = 6$ y $\text{largo}(f(f(x, x), x)) = 11$.
2. Defina de manera inductiva la función anidacion: $T \to \mathbb{N}$ que indica cuál es el mayor grado de anidación de la función f en un x-término t. Por ejemplo, $\text{anidacion}(x) = 0$, $\text{anidacion}(f(x, x)) = 1$, $\text{anidacion}(f(f(x, x), x)) = 2$ y $\text{anidacion}(f(f(x, x), f(x, f(x, x)))) = 3$.
3. Encuentre una función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo x-término t se tiene que $\text{largo}(t) \leq h(\text{anidacion}(t))$ y demuestre usando inducción estructural que la función h cumple esta propiedad.

Pregunta 2

Para un $n \geq 1$, sea $\{0,1\}^n$ el conjunto de todas las palabras de largo exactamente n. Dos palabras $u = a_1 a_2 \dots a_n$ y $v = b_1 b_2 \dots b_n$ en $\{0,1\}^*$ se dicen consecutivas si existe un $i \leq n$ tal que $a_i \neq b_i$ y $a_j = b_j$ para todo $j \neq i$. Es decir, u y v son consecutivas si difieren exactamente en un sólo símbolo. Por ejemplo, para $n = 5$ las palabras 01011 y 01111 son consecutivas porque solo difieren en el tercer dígito.

Demuestre usando inducción que para todo $n \geq 1$, uno puede hacer una secuencia de las palabras en $\{0,1\}^n$ de la forma:

$$u_0, u_1, \dots, u_{2^n}$$

tal que todas las palabras en $\{0,1\}^n$ aparecen en la secuencia, $u_0 = u_{2^n}$, y para todo $i < 2^n$ se cumple que u_i y u_{i+1} son palabras consecutivas.

Evaluación y puntajes de la tarea

Cada **item** de cada pregunta se evaluará con un puntaje de:

- 0 (respuesta incorrecta),
- 3 (con errores menores),
- 4 (correcta).

Todas las preguntas tienen la misma ponderación en la nota final.