PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2016

TAREA 2

Publicación:	Viernes 26 de Marzo.
Entrega:	**Viernes 1 de Abril hasta las 10:15 horas**.

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si esta en blanco).
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas a mano ni en otro sistema de composición de texto.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre en cada hoja de respuesta.
- Si usa más de una hoja para una misma pregunta corchetelas.
- Junte las respuestas a preguntas distintas usando un clip (no un corchete).
- Debe entregar una copia escrita durante la ayudantía asignada y una copia digital por el buzón del curso, ambas antes de la fecha/hora de entrega.
- **Se penalizará con 1 punto en la nota final de la tarea por cada regla que no se cumpla.**
- La tarea es individual.

Pregunta 1

Una *palabra infinita* w sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ es una secuencia de la forma: $w = x_0x_1x_2x_3\ldots$ donde $x_i \in \{a, b, c\}$ para todo $i \geq 0$. Por ejemplo, la siguiente es una palabra infinita:

$$u = aabaccabaacccaabaacaacbaaacaacaa\ldots$$

Considere los símbolos de predicados $\leq$, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ con A, B, y C símbolos unarios. Toda palabra infinita $w = x_0x_1x_2x_3\ldots$ es posible representarla como una interpretación $\mathcal{I}_w$ con dominio $\mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{I}_w(dom) & := & \mathbb{N} \\
\mathcal{I}_w(\leq) & := & \text{orden sobre los naturales.} \\
\mathcal{I}_w(A) & := & A(i) = 1 \text{ si, y solo si, } x_i = a. \\
\mathcal{I}_w(B) & := & B(i) = 1 \text{ si, y solo si, } x_i = b. \\
\mathcal{I}_w(C) & := & C(i) = 1 \text{ si, y solo si, } x_i = c.
\end{array}$$

En otras palabras, la interpretación $\mathcal{I}(w)$ usa los naturales y su orden para codificar las posiciones de la palabra infinita w, y los predicados A, B y C para codificar las posiciones w que tiene la letra a, b y c, respectivamente. Por ejemplo, la interpretación $\mathcal{I}_u$ para la palabra infinita u del ejemplo cumple que $A(0), A(1), B(2), A(3), C(4), C(5), \ldots$ son verdaderos y todos los otros casos son falsos.

Sea w una palabra infinita cualquiera y $\mathcal{I}_w$ la interpretación que representa w. Para cada propiedad X de más abajo usted debe escribir una formula φ_X en lógica de predicados tal que la palabra infinita w cumple la propiedad X si, y solo si, $\mathcal{I}_w \models \varphi_X$. Para cada propiedad y formula, explique brevemente su correctitud.

1. La palabra infinita contiene una cantidad infinita de letras a.
2. Las tres primeras letras de la palabra infinita son a, b y c (en ese orden).
3. La palabra infinita contiene la subpalabra finita de la forma $abb\ldots bc$, esto es, una letra a seguido de una secuencia finita de una o más letras b y terminada en una c.
4. En cada posición par, la palabra infinita tiene una letra a y, en cada posición impar, la palabra infinita tiene una letra b.

Pregunta 2

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos formulas en lógica de predicados.

1. Demuestre la siguiente equivalencia lógica:

$$(\exists x.\, \varphi(x)) \wedge (\exists x.\, \psi(x)) \;\equiv\; \exists y. \exists z.\, (\varphi(y) \wedge \psi(z))$$

   donde y, z no son variables libres en $\varphi(x)$ o $\psi(x)$. En otras palabras, y, z son variables nuevas no mencionadas en $\varphi(x)$ o $\psi(x)$.

2. Una fórmula φ en lógica de primer orden está en Forma Normal Prefija (FNP) si:

$$\varphi \quad = \quad Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \, \psi,$$

   donde $Q_i = \exists$ o $Q_i = \forall$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, y ψ es una fórmula sin cuantificadores. Por ejemplo, la fórmula $\forall x \exists y \, (R(x,y) \wedge \neg T(y,x,z))$ está en FNP, mientras que la fórmula $\forall x (P(x) \to \exists y \, R(x,y))$ no lo está.

   Demuestre que para toda formula φ, existe una formula φ' en FNP tal que $\varphi \equiv \varphi'$.

Evaluación y puntajes de la tarea

Cada **item** de cada pregunta se evaluará con un puntaje de:

- 0 (respuesta incorrecta),
- 3 (con errores menores),
- 4 (correcta).

Todas las preguntas tienen la misma ponderación en la nota final.