NOMBRE: Raimundo Herrera Sufán PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2016

Tarea 1 – Respuesta Pregunta 1

1. <u>PD</u> $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg p \leftrightarrow q$

$$
\begin{aligned}
\neg p \leftrightarrow q &\equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) && \text{(Implicación)}\\
&\equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) && \text{(Implicación)}\\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) && \text{(Distributividad)}\\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee 0 \vee 0 \vee (q \wedge \neg p) && \text{(Negación)}\\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) && \text{(Identidad)}\\
&\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) && \text{(Implicación)}\\
&\equiv \neg(p \leftrightarrow q) && \text{(Implicación)}
\end{aligned}
$$

■

2. Al encontrar las primeras fórmulas de la definición recursiva, se observa que de todos los términos pares para $i \geq 0$, se puede llegar una misma fórmula equivalente, y que de todos los términos impares, a otra equivalente. Los primeros términos pares son:

$\varphi_2 := ((p \to q) \to p) \to p$
$\varphi_4 := ((((p \to q) \to p) \to p) \to p) \to p$
$\varphi_6 := ((((((p \to q) \to p) \to p) \to p) \to p) \to p) \to p$

Estos términos se pueden todos reducir utilizando absorción, De Morgan e implicancia a una misma fórmula equivalente. Por ejemplo, tomando φ_4, se tiene:

$$
\begin{aligned}
((((p \to q) \to p) \to p) \to p) \to p &\equiv ((((\neg p \vee q) \to p) \to p) \to p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv (((\neg(\neg p \vee q) \vee p) \to p) \to p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv ((((p \wedge \neg q) \vee p) \to p) \to p) \to p && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv (((p) \to p) \to p) \to p && \text{(Absorción)}\\
&\equiv ((\neg p \vee p) \to p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv ((1) \to p) \to p && \text{(Negación)}\\
&\equiv (p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv p \to p
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que con cualquier fórmula φ par, es decir, para valores de i impares, se puede reducir a una equivalente $p \to p$. Por lo tanto no depende de los valores de p, y es una tautología.

Por otro lado las primeras fórmulas impares son:

$\varphi_1 := (p \to q) \to p$
$\varphi_3 := (((p \to q) \to p) \to p) \to p$
$\varphi_5 := (((((p \to q) \to p) \to p) \to p) \to p) \to p$

Estos términos se pueden reducir a una fórmula equivalente de forma similar. Por ejemplo, tomando φ_3, se tiene:

$$\begin{aligned}
(((p \to q) \to p) \to p) \to p &\equiv (((\neg p \vee q) \to p) \to p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv ((\neg(\neg p \vee q) \vee p) \to p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv (((p \wedge \neg q) \vee p) \to p) \to p && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv ((p) \to p) \to p && \text{(Absorción)}\\
&\equiv (\neg p \vee p) \to p && \text{(Implicación)}\\
&\equiv (1) \to p && \text{(Negación)}\\
&\equiv (p) && \text{(Implicación)}\\
&\equiv p
\end{aligned}$$

Nuevamente es fácil ver que con cualquier fórmula φ impar, es decir para valores de i pares, se puede reducir a una equivalente p. Por lo tanto depende de los valores de p, de modo que no es una tautología.

Esto se da por la cantidad de $p \to p$ que quedan luego de absorver q al ir reduciendo. Dependiendo del número de $p's$, se irá sucesivamente alternando entre $1 \to p$ y $p \to p$, de modo que en las fórmulas φ pares ($i \geq 0$ impar), existirá una cantidad impar de $p's$ por lo que se reducirá siempre a $p \to p$, en cambio, en las φ impares ($i \geq 0$ par), habrá una cantidad par de $p's$ y se podrá reducir siempre a p.

De este modo, se concluye que la definición recursiva da lugar a fórmulas proposicionales tautológicas, para valores de i impares y no tautológicas para valores de i pares, partiendo de $i = 0$ en ambos casos.

NOMBRE: Raimundo Herrera Sufán PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2016

Tarea 1 – Respuesta Pregunta 2

1. Si $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha \vee \beta$.

   En este caso, se tiene que, o bien α es consecuencia lógica de Σ, o β lo es. Es claro ver que si cualquiera de los dos es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas proposicionales, también lo es $\alpha \vee \beta$. Esto se debe a que todas las valuaciones de α están contenidas en $\alpha \vee \beta$, es, de cierto modo, una amplificación disyuntiva, ya que α siempre podrá ser amplificado a $\alpha \vee \varphi_i$, sin que se reduzca la cantidad de valuaciones en la que se cumple la consecuencia si esque $\Sigma \models \alpha$. Lo mismo ocurre para β.

   Esta amplificación es, dicho de otra manera, una operación monótona. Visto en una tabla de verdad, se observa que las valuaciones verdaderas de $\alpha \vee \beta$ siempre se condicen con aquellas verdaderas de α o de β, o hay más, pero nunca menos. Para las tablas de verdad se considera que α o β son consecuencias lógicas del conjunto $\Sigma(\varphi_0, ..., \varphi_n)$ respectivamente, por lo que las filas con "..." indicaran valuaciones que hacen cierto el hecho de la consecuencia lógica antes establecida.

α	β	φ_0	...	φ_n	α	$\alpha \vee \beta$
0	0	...	...	...	0	0
0	1	...	...	...	0	1
1	0	...	...	...	1	1
1	1	1	1	1	1	1

α	β	φ_0	...	φ_n	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	...	...	...	0	0
0	1	...	...	...	1	1
1	0	...	...	...	0	1
1	1	1	1	1	1	1

   Es claro que para los casos donde se da la consecuencia lógica para α, también se da para $\alpha \vee \beta$ (lo mismo sucede con β), por lo explicado anteriormente y lo explicitado en las tablas presentadas.

2. Si $\Sigma \models \alpha \vee \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$.

   Si se toma el conjunto $\Sigma(\varphi_1, \varphi_2)$ con $\varphi_1 := \alpha \vee \gamma$ y $\varphi_2 := \neg\gamma \vee \beta$, con γ una fórmula proposicional cualquiera, se tiene la siguiente tabla de verdad.

α	γ	β	$\alpha \vee \gamma$	$\neg\gamma \vee \beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Se observa que para cada fila en que φ_1 y φ_2 son verdaderas, $\alpha \vee \beta$ se hace verdadero, por lo tanto cumple con ser consecuencia lógica (resolución).

Sin embargo, al realizar la misma tabla de verdad para α y para β, en vez de $\alpha \vee \beta$, se observa lo siguiente:

α	γ	β	$\alpha \vee \gamma$	$\neg\gamma \vee \beta$	α
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

α	γ	β	$\alpha \vee \gamma$	$\neg\gamma \vee \beta$	β
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Y se ve que para ambos casos existe una fila en la que, si bien ambas proposiciones del conjunto Σ son verdaderas, α o β no lo es, de modo que no cumple el requisito de consecuencia lógica, por lo tanto $\Sigma \models \alpha \vee \beta$, pero $\Sigma \not\models \alpha$ y $\Sigma \not\models \beta$.

De este modo, por medio del contraejemplo se muestra que existe un conjunto Σ en el que se cumple que $\Sigma \models \alpha \vee \beta$ pero no se cumple ni $\Sigma \models \alpha$ ni $\Sigma \models \beta$.

3. Si $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\} \models \beta$.

Para este caso, si se considera que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, se tiene que la consecuencia es la validación de ambas fórmulas, α y β, por lo tanto α tiene como única posibilidad ser verdadero para una valuación donde se cumpla la premisa enunciada, al mismo tiempo que β tiene que ser verdadero si α lo es.

Así, una vez introducido α al conjunto, considerando que se cumple lo anterior, β tiene que seguir siendo verdadero.

Visto de otra forma, como se explicó en clases, por definición:

Si $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\} \models \varphi$, entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_m, \vartheta\} \models \varphi$ para toda formula ϑ.

De modo que, aplicado al problema, como $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\} \models \alpha \wedge \beta$, lo que significa que por consiguiente, también es consecuencia lógica de β, por lo explicado previamente.

Además, como se señaló en una demostración anterior, la consecuencia β, es decir, cuando es una valuación verdadera, ocurre en igual cantidad o más ocasiones que $\alpha \wedge \beta$, por lo que no habrán casos en los que el nuevo conjunto sea consecuencia lógica únicamente de $\alpha \wedge \beta$ y no de β. En la tabla a continuación se explicita.

α	β	φ_0	...	φ_n	α	$\alpha \wedge \beta$	β
0	0	...	...	...	0	0	0
0	1	...	...	...	0	0	1
1	0	...	...	...	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

4. Si $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\} \models \beta$, entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$.

   Si se toma un conjunto cualquiera de la forma $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\}$, tal como $\{\neg\alpha \vee \beta, \alpha\}$, es claro que β es consecuencia lógica de ese conjunto. En la tabla se ve más claramente:

α	β	$\neg\alpha \vee \beta$	α	β
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

   Ahora, es evidente que no se cumple lo buscado en el enunciado, ya que $\alpha \wedge \beta$ no es consecuencia lógica de, en este caso, $\{\neg\alpha \vee \beta\}$, la tabla en cuestión es:

α	β	$\neg\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

   Ya que muestra filas donde las valuaciones del conjunto de proposiciones son verdaderas, pero β no lo es. Por lo que si bien $\{\neg\alpha \vee \beta, \alpha\} \models \beta$, ocurre que $\{\neg\alpha \vee \beta\} \not\models \alpha \wedge \beta$.

   Así, se concluye con el contraejemplo, que no necesariamente se cumple $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, si $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\} \models \beta$.