NOMBRE: Raimundo Herrera Sufán PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2016

Tarea 2 – Respuesta Pregunta 1

1. $\phi_x := \forall i.\exists j.A(i+j)$

   La fórmula ϕ_x lo que señala es que para toda letra en la posición i de la palabra infinita w, existe una letra posterior ubicada a una distancia cualquiera j, tal que esa letra es una a. De modo que hay infinitas a. Es posible decir lo mismo sin utilizar la suma al decir que para todo i existe un j mayor que i, tal que la letra en la posición j es una a. Esto es: $\phi_x := \forall i.\exists j.\ j \geq i \wedge \neg(j = i) \wedge A(j)$. En ambos casos, y los posteriores, con los índices (para este caso i, j) pertenecientes al $\mathcal{I}(Dom)$.

2. $\phi_x := A(0) \wedge B(1) \wedge C(2)$

   La fórmula ϕ_x restringe únicamente a las 3 primeras letras de w, imponiendo que estas sean a la vez a, b y c respectivamente. Como se pide un orden los valores son fijos: 0 para la primera letra, a, 1 para la segunda letra, b, y 2 para la tercera letra, c.

3. $\phi_x := \exists i.[A(i) \wedge \exists n.((\bigwedge_{j=i+1}^{n} B(j)) \wedge C(n+1))]$

   La fórmula ϕ_x señala en este caso que existe un i tal que la letra en esa posición es una a, tal que justo después de ella existe una cantidad $n - i$ de letras b seguidas y que finalmente hay una letra c ubicada justo después de esas letras b, es decir, en la posición $n + 1$.

4. $\phi_x := \forall i.(A(2i) \wedge B(2i+1))$

   La fórmula ϕ_x dice que para todo i la letra ubicada en $2i$ (posición par por definición en los naturales) será una a, y que la letra ubicada en $2i + 1$ (posición impar por definición) será una b. Es fácil comprobar su correctitud ya que i adquiere valores en los naturales, por lo que partiendo del cero se comprueba que los pares seran a y los impares b.

NOMBRE: Raimundo Herrera Sufán PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2016

Tarea 2 – Respuesta Pregunta 2

1. PD $(\exists x.\varphi(x)) \wedge (\exists x.\psi(x)) \equiv \exists y.\exists z.(\varphi(y) \wedge \psi(z))$

$$
\begin{aligned}
\exists y.\exists z.(\varphi(y) \wedge \psi(z)) &\equiv \exists y.(\varphi(y) \wedge \exists z.\psi(z)) && \text{Ya que } z \text{ no aparece en } \varphi\text{, es decir,} \\
&&& \text{utilizando la equivalencia} \\
&&& B \wedge \exists x.A(x) \equiv \exists x.(B \wedge A(x)) \\
&&& \text{donde B puede depender de cualquier variable} \\
&&& \text{distinta de } x\text{, como es el caso.} \\
&\equiv \exists y.(\varphi(y) \wedge \xi(z)) && \text{Donde } \xi(z) := \exists z.\psi(z) \\
&\equiv (\exists y.\varphi(y)) \wedge \xi(z) && \text{Por la misma equivalencia anterior,} \\
&&& \text{ya que } \xi \text{ no depende de } y. \\
&\equiv (\exists y.\varphi(y)) \wedge (\exists z.\psi(z)) && \text{Al reemplazar } \xi \\
&&& \text{Y como } y, z \text{ son otras variables,} \\
&&& \text{se tiene que, equivalentemente} \\
&\equiv (\exists x.\varphi(x)) \wedge (\exists x.\psi(x)) && \blacksquare
\end{aligned}
$$

2. PD Para toda formula φ, existe una formula φ' en FNP tal que $\varphi \equiv \varphi'$.

Para demostrar lo anterior, explicaré por que toda fórmula puede ser reducida a FNP, siendo la fórmula obtenida equivalente a la original. Para tener una fórmula en FNP, (1) no deben haber cuantificadores dentro de la fórmula ψ, y (2) fuera de esa fórmula solo pueden haber cuantificadores, sin negación. Es fácil ver que cualquier fórmula que no cumpla (2) se puede llevar a una que sí lo haga por medio de las equivalencias:

$$\neg\exists x.\alpha(x) \equiv \forall x.\neg\alpha(x)$$
$$\neg\forall x.\alpha(x) \equiv \exists x.\neg\alpha(x)$$

Luego, no es tan directo que (1) se pueda conseguir, pero análogamente a la equivalencia utilizada en el ejercicio anterior, se tiene que todo predicado que no depende de la variable del cuantificador de otra fórmula, puede ser embebido en dicha fórmula, esto es:

$$
\begin{aligned}
\beta(x_i) \wedge \exists x.\alpha(x_j) &\equiv \exists x.(\beta(x_i) \wedge \alpha(x_j)), && \text{con } x_i \neq x_j. \\
\beta(x_i) \vee \exists x.\alpha(x_j) &\equiv \exists x.(\beta(x_i) \vee \alpha(x_j)), && \text{con } x_i \neq x_j. \\
\beta(x_i) \wedge \forall x.\alpha(x_j) &\equiv \forall x.(\beta(x_i) \wedge \alpha(x_j)), && \text{con } x_i \neq x_j. \\
\beta(x_i) \vee \forall x.\alpha(x_j) &\equiv \forall x.(\beta(x_i) \vee \alpha(x_j)), && \text{con } x_i \neq x_j.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que β tiene la restricción de no depender de la misma variable cuantificada en la fórmula a la cual ingresa. Y para evitar confusiones, es bueno usar la equivalencia (3):

$$\forall x.\alpha(x) \equiv \forall y.\alpha(y)$$
$$\exists x.\alpha(x) \equiv \exists y.\alpha(y)$$

Por otro lado, se ve que las cuatro equivalencias antes mencionadas para ingresar un predicado a una fórmula cuantificada, fueron mostradas con los operadores $\vee$ y $\wedge$, y por extensión el operador $\neg$, por lo explicado anteriormente. Pero esto no reduce en nada el alcance de la demostración, ya que los otros operadores pueden ser reducidos a estos, porque, como se vió en la ayudantía, el conjunto $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es funcionalmente completo (4).

De este modo, como (1) es posible extraer todos los cuantificadores de las fórmulas ya que se pueden ir introduciendo los predicados a ellos, (2) es posible ir introduciendo las negaciones hacia las fórmulas cuantificadas, (3) cuidando la utilización de las variables y sustituyéndolas de ser necesario, y se tiene que (4) los operadores que se utilizaron en la demostración son funcionalmente completos, se demuestra que para toda formula φ, existe una formula φ' en FNP equivalente.

$\blacksquare$