Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2018

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación

Tarea 1 - Entrega Lunes 16 de Abril a las 18:00

Problema 1 Para una fórmula φ en $L(P)$, usamos $\mathrm{Var}(\varphi)$ para denotar al conjunto de proposiciones que usa φ (es decir, $\mathrm{Var}(\varphi) \subseteq P$).

Sea P un conjunto de proposiciones, y considere una fórmula φ en $L(P)$. Decimos que una fórmula ψ es una P-extensión de φ si para toda valuación $\tau : P \to \{0,1\}$ que satisface a φ, existe una valuación $\tau^* : P \to \{0,1\}$ tal que $\tau^*(p) = \tau(p)$ para todo $p \in \mathrm{Var}(\varphi)$ y que además satisface a ψ.

Para las siguientes preguntas asuma que todas las fórmulas mencionadas están construidas sobre un conjunto P de proposiciones.

a) Considere $P = \{p, q, r, s\}$ y $\varphi = p \to q$. De un ejemplo de una P-extensión para φ y un ejemplo de una fórmula en $L(P)$ que no sea una P-extensión de φ.

b Es cierto que si $\varphi \models \psi$ entonces ψ es una P-extensión para φ? Demuéstrelo, o de un contraejemplo.

c Es cierto que si ψ es una P-extensión para φ entonces $\varphi \models \psi$? Demuéstrelo, o dé un contraejemplo.

e Sean φ y χ fórmulas tales que $\mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(\chi) = \emptyset$. Determine una condición necesaria y suficiente para saber cuándo $(\varphi \wedge \chi)$ es una P-extension de φ.

Problema 2: Sea P un conjunto de proposiciones y Σ un conjunto de cláusulas en $L(P)$, y asuma que todas las variables de P aparecen en Σ. Sea ademas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ una demostración por resolución para mostrar que Σ es inconsistente (en particular, $\psi_n = \bot$).

a) Muestre como definir un DAG (grafo dirigido acíclico) para la demostración, a través de un grafo en el que los nodos son $\psi_1, \ldots, \psi_n$ y ψ_n es la raíz del DAG, y si ψ_j es el ancestro de $\{\psi_{\ell_1}, \ldots, \psi_{\ell_k}\}$ entonces $\{\psi_{\ell_1}, \ldots, \psi_{\ell_k}\} \models \psi_j$.

b) Muestre que cada valuación $\tau : P \to \{0,1\}$ determina un camino en este grafo, dado por todos los nodos en donde $\tau \not\models \psi_i$. Muestre que para cada valuación, el camino es único.

Problema 3: Sea P un conjunto infinito de proposiciones. Explique por qué es imposible construir una fórmula φ en $L(P)$ tal que para toda valuación τ para P se tenga que $\tau \models \varphi$ si y solo si la cantidad de proposiciones en las que $\tau(p) = 1$ es finita.

Problema 4: El conocido "juego de Einstein" dice así:

"En una calle hay 5 casas, ubicadas contiguamente y ordenadas una después de la otra. Cada casa está pintada de un color diferente: verde, blanca, amarilla, roja y azul. Se sabe que en cada casa vive una familia de nacionalidad distintas: Británica, Sueca, Danesa, Alemana y Noruega. Cada uno de los dueños de casa tiene una mascota distinta: perro, pájaro, gato, caballo y pescado. Cada uno de los dueños fuman una marca de tabaco distinta: Dunhill, Pall Mall, Prince, Blue Master y Blends. El trago favorito de cada dueño de casa es distinto: Agua, Te, Leche, Café y Cerveza.

Además se tienen las siguientes pistas:

- El Británico vive en una casa roja (*)
- El sueco tiene un perro
- El Danés toma té todo el día
- La casa verde esta justo antes de la casa blanca (*)
- El dueño de la casa verde toma café todo el día (*)
- La persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro
- El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill
- El dueño de la casa de al medio toma leche todo el día (*)
- El Noruego vive en la primera casa
- La persona que fuma Blends vive al lado del que tiene un gato
- La persona que tiene un caballo vive al lado de la persona que fuma Dunhill (*)
- La persona que fuma Blue Master toma cerveza
- El alemán fuma Prince
- El Noruego vive al lado de la casa azul
- El que fuma Blends vive al lado del que toma agua todo el día

La pregunta es: ¿Quién tiene un pez?

a) Indique como construir un conjunto P de proposiciones y un conjunto Σ de fórmulas en $L(P)$ tal que el alemán tiene un pez si y solo si Σ no es satisfacible. No necesita incluir toda la información anterior, pero debe ejemplificar su construcción modelando las pistas con un asterisco (*).

b) Explique como resolver este problema usando un sistema deductivo. Use resolución para deducir dos pistas nuevas sobre lo que pasa en la calle (puede que tenga que escribir en lógica un poco más del modelo que necesitó para la pregunta anterior, y puede que tenga que transformar sus fórmulas a CNF).