Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

Actividad 9: *Metropolis - Hastings*

Tópicos Avanzados en Inteligencia de Máquina - IIC 3695

Profesor : Karim Pichara Baksai.
Ayudantes : Ignacio Becker, Francisco Pérez Galarce, Matías Vergara

Fecha : 30 de Abril de 2019

1 Introducción

En esta actividad se implementará el método *Metropolis-Hasting* para encontrar los parámetros de un modelo de series de tiempo. El estudio de series de tiempo es de interés de numerosas disciplinas, por dar algunos ejemplos: mercados financieros, agricultura, astronomía y ciencias médicas.

En particular, en esta actividad estimaremos los parámetros de un *continuous autoregressive model*. Adicionalmente, realizaremos predicciones y graficaremos el modelo resultante.

2 Instrucciones de la actividad

2.1 *CAR: Continous Autoregressive Model*

Solo a modo de contextualización, a continuación se presenta la *likelihood* del modelo de series de tiempo que se trabajará en esta actividad :

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}|b,\sigma_C,\tau) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{[2\pi(\Omega_i+\delta_i^2)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\hat{x}_i - x_i^*)^2}{\Omega_i+\delta_i^2}\right\} && (1)\\
x_i^* &= x_i - b\,\tau && (2)\\
\hat{x}_0 = 0 \quad &; \quad \Omega_0 = \frac{\tau\sigma_C^2}{2} && (3)\\
\hat{x}_i &= a_i\hat{x}_{i-1} + \frac{a_i\Omega_{i-1}}{\Omega_{i-1}+\delta_{i-1}^2}(x_{i-1}^* + \hat{x}_{i-1}) && (4)\\
\Omega_i &= \Omega_0(1-a_i^2) + a_i^2\Omega_{i-1}\left(1 - \frac{\Omega_{i-1}}{\Omega_{i-1}+\delta_{i-1}^2}\right) && (5)\\
a_i &= e^{-(t_i - t_{i-1})/\tau} && (6)
\end{aligned}
$$

La función de *likelihood* nos servirá como guía para llegar a las muestras deseadas de los parámetros que buscamos, en otras palabras, la función de *likelihood* será nuestra $P*$.

2.2 Preprocesamiento de los datos y gráfico inicial

- Importar la serie de tiempo (curva de luz) entregada
- Remover las muestras cuyo error sea estrictamente mayor a 3 veces la media de los errores.
- Estandarizar las variables de *magnitud* y *tiempo*.
- Plotear el gráfico de serie de tiempo de las muestras y la banda de error asociada.

2.3 Maximización de la función ***Likelihood*** por medio de Metropolis Hastings y gráfico

Por medio de *Metrópolis Hastings* generar muestras de la *target distribution(P*)* por medio de la *proposal distribution (Q)* y así poder estimar los parámetros τ y σ. Para ello. Deberán

- Como *proposal distribution (Q)* use una distribución normal bivariada y como *target distribution(P*)* utilice la estructura de la *likelihood* del modelo.
- Implemente el método $Metrópolis\_Hastings()$ que retorne las muestras generadas. Con las muestras usted obtenga la media de los parámetros τ y σ. Además, calcule el parámetro $b = \dfrac{mean(magnitude)}{\tau}$. A través de experimentación defina el "adecuado" *burning, sample_window* y el número de muestras
- Obtener las predicciones y la banda de error de estas mediante las expresiones:

$$E(X(t) \mid X(s)) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} X(s) + b\tau(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) \quad (7)$$

$$Var(X(t) \mid X(s)) = \frac{\tau\sigma^2}{2}\left[1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right] \quad (8)$$

- Graficar los datos, la predicciones y la banda de error de estas.