1_2_线性时不变系统（LTI系统）

1. 线性时不变系统的判定

线性时不变系统是数字信号处理的理论基石，它具有优良的数学性质，便于分析和设计。

1.1 🔍 线性系统的判定

- 线性系统必须同时满足两个条件：**可加性**和**齐次性**。

  数学定义

  对任意输入 $x_1[n]$，$x_2[n]$ 和任意常数a_1，a_2，系统$T\{\cdot\}$满足：

  $$T\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1T\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$$

  通俗理解

  - **可加性**：两个输入同时作用的结果 = 各自单独作用的结果之和
  - **齐次性**：输入放大多少倍，输出也放大同样的倍数

1.2 ⏱ 时不变系统的判定

- **数学定义**

  对任意输入$x[n]$和任意整数时移 n_0，系统$T\{\cdot\}$满足：

  $$\mathrm{T}\{x[n-n_0]\}=y[n-n_0]$$

  其中 $y[n]=T\{x[n]\}$是对原输入的响应。

  通俗理解

  - 今天输入一个信号得到的响应，和明天输入同样的信号得到的响应完全一样
  - 系统的特性不随时间改变

2. 生活化类比 🛒

想象一个**猪肉摊位的计价系统**：

- **线性**：1斤20元，2斤40元，3斤60元...（成比例变化）
- **时不变**：今天猪肉20元/斤，明天还是20元/斤（价格不随时间变）

3. 判断线性时不变系统的小技巧 💡

在判断系统是不是线性时不变系统时，常将复杂运算分解为基本运算，以便利用**物理直觉**、**公式计算**判断系统性质。以系统 $y[n]=a\cdot x[n-2n_0]+b$（其中 a、b、n_0）为例：

3.1 线性检验

令$x_1[n]$和$x_2[n]$为任意输入，对应的输出$y_1[n]$、$y_2[n]$为：

$$y_1[n]=a\cdot x_1[n-2n_0]+b,\ y_2[n]=a\cdot x_2[n-2n_0]+b$$

那么$y_1[n]+y_2[n]$为：

$$y_1[n]+y_2[n]=a\cdot(x_1[n-2n_0])+a\cdot x_2[n-2n_0]+2b$$

考虑到$x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$，系统输出为：

$$y_3[n]=a\cdot(x_1[n-2n_0])+(x_2[n-2n_0])+b=a\cdot(x_1[n-2n_0])+a\cdot x_2[n-2n_0]+b$$

当$b\neq 0$时，$y_3[n]\neq y_1[n]+y_2[n]$，系统不满足叠加性，因此不是线性系统。

3.2 运算分解步骤

其运算可分解为三个基本步骤：

1. **移位**：将输入序列右移 $2n_0$个单位，得到 $x[n-2n_0]$。
2. **标量乘法**：将移位后的序列乘以常数 a，得到$a\cdot x[n-2n_0]$。
3. **常数加法**：叠加常数b，*得到最终输出*$a\cdot x[n-2n_0]+b$。

3.3 物理直觉

常数加法相当于在输出上叠加直流偏置（如静态工作点），这会破坏齐次性和叠加性，导致系统非线性。移位和标量乘法本身是线性运算，但加上常数后整体不再保持线性。

3.4 时不变性检验

对于任意整数延迟n_d，考虑输入$x_d[n]=x[n-n_d]$输出为：

$$y_d[n]=a\cdot x[n-n_d-2n_0]+b$$

而$y[n-n_d]=a\cdot x[n-n_d-2n_0]+b$，两者相等，故系统是时不变的。

4. 典型线性时不变系统

以下是三种常见的LTI系统，它们在信号处理中应用广泛：

4.1 累加器

对输入序列从过去到现在进行累加求和：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

- **应用**：积分运算的离散版本
- **特点**：记忆所有历史输入

4.2 滑动平均滤波器

对最近的M个样本取平均值：

$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$$

- **应用**：平滑数据、去除随机噪声
- **特点**：只记忆最近M个样本

4.3 差分器

计算相邻样本的差值：

类型	数学表示	特点
前向差分	$y[n] = x[n+1] - x[n]$	用后一个减当前
后向差分	$y[n] = x[n] - x[n-1]$	用当前减前一个

- **应用**：边缘检测、速度/加速度计算
- **特点**：高通特性，突出信号的变化部分

5. 理解检查 📝

练习：判断系统性质

判断以下系统是否为线性时不变系统：

1. $y[n] = 3x[n] + 2$
2. $y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$
3. $y[n] = sin(x[n])$
4. $y[n] = x[2n]$
5. $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]$

提醒：这些系统都对信号做了什么？有哪些基本运算？

6. 本章关联性 🔄

理解线性时不变系统是学习后续内容的关键：

- **下一节卷积**：所有LTI系统都可以用卷积描述
- **傅里叶变换**：LTI系统在频域分析中特别简单
- **滤波器设计**：基于LTI系统理论

> **关键洞察**：线性时不变系统之所以重要，是因为它们有完美的数学描述工具（卷积、傅里叶变换、Z变换），并且绝大多数实际系统都可以近似为LTI系统进行分析。

掌握了线性时不变系统的概念后，我们就可以进入数字信号处理的核心工具——卷积运算了！