

1_3_卷积：理解LTI系统的核心工具

1. 卷积的定义

对于两个离散序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ ，它们的卷积定义为：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

其中：

- $y[n]$: 卷积输出序列
- $x[n]$: 输入信号序列
- $h[n]$: 系统单位脉冲响应序列
- $*$: 卷积运算符号
- k : 求和变量，遍历所有可能的移位位置

物理意义：卷积描述了输入信号 $x[n]$ 经过系统 $h[n]$ 处理后的输出

2. 理解卷积的三种重要视角

2.1 线性时不变系统视角：延迟、倍率、叠加

核心思想：将输入信号分解为单位脉冲的加权和，分别求系统响应，再叠加。

数学表达：

输入信号 $x[n]$ 可以表示为：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

由于LTI系统的线性时不变特性，系统对每个延迟单位脉冲 $\delta[n-k]$ 的响应为 $h[n-k]$ 。因此，系统对输入 $x[n]$ 的总响应为：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

分解过程：

1. **延迟**：系统单位脉冲响应 $h[n]$ 延迟 k 个单位 $\rightarrow h[n-k]$
2. **倍率**：将延迟后的响应乘以输入值 $x[k]$ $\rightarrow x[k] \cdot h[n-k]$
3. **叠加**：对所有 k 的贡献求和 $\rightarrow \sum_k x[k] \cdot h[n-k]$

2.2 外积矩阵法：代数结构视角

核心思想：通过外积矩阵直观展示卷积的代数结构。

数学表达：

将两个序列展开为外积矩阵：

$$\begin{bmatrix} x[0]h[0] & x[0]h[1] & x[0]h[2] & \dots \\ x[1]h[0] & x[1]h[1] & x[1]h[2] & \dots \\ x[2]h[0] & x[2]h[1] & x[2]h[2] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

卷积结果 $y[n]$ 等于矩阵中反对角线 ($i + j = n$) 上所有元素的和:

$$y[n] = \sum_{i+j=n} x[i] \cdot h[j]$$

2.3 滑动窗口法：滑动加权平均视角

核心思想：一个序列反转后作为滑动窗口，与另一个序列进行滑动加权平均。

计算步骤：

1. **反转：**将 $h[k]$ 反转得到 $h[-k]$
2. **移位：**将反转后的序列 $h[-k]$ 向右平移 n 个单位得到 $h[n - k]$
3. **对应相乘：**将 $x[k]$ 与 $h[n - k]$ 对应位置相乘
4. **求和：**将所有乘积求和得到 $y[n]$

数学表达：

对于每个输出点 n :

1. 将 h 反转: $h[k] \rightarrow h[-k]$
2. 将反转后的 h 向右移动 n : $h[-k] \rightarrow h[n - k]$
3. 计算点积: $y[n] = \sum_k x[k] \cdot h[n - k]$

3. 卷积计算示例

示例：计算 $x = [1, 2, 3, 4]$ 与 $h = [5, 6, 7, 8]$ 的卷积

方法1：线性时不变系统视角

分过程：延迟、倍率、叠加

我们将输入序列的每个样本视为一个加权且延迟的单位脉冲，然后叠加这些响应:

- 当 $k = 0$, 输入 $x[0] = 1$ 产生的响应: $1 \cdot h[n - 0] = [5, 6, 7, 8]$ (从 $n = 0$ 开始)
- 当 $k = 1$, 输入 $x[1] = 2$ 产生的响应: $2 \cdot h[n - 1] = [0, 10, 12, 14, 16]$ (右移1位)
- 当 $k = 2$, 输入 $x[2] = 3$ 产生的响应: $3 \cdot h[n - 2] = [0, 0, 15, 18, 21, 24]$ (右移2位)
- 当 $k = 3$, 输入 $x[3] = 4$ 产生的响应: $4 \cdot h[n - 3] = [0, 0, 0, 20, 24, 28, 32]$ (右移3位)

然后叠加 (按 n 对齐相加) :

- $n = 0: 5 = 5$
- $n = 1: 6 + 10 = 16$
- $n = 2: 7 + 12 + 15 = 34$
- $n = 3: 8 + 14 + 18 + 20 = 60$
- $n = 4: 16 + 21 + 24 = 61$
- $n = 5: 24 + 28 = 52$
- $n = 6: 32 = 32$

因此, $y = [5, 16, 34, 60, 61, 52, 32]$ 。

方法2：外积矩阵法

构建外积矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 \times 5 & 1 \times 6 & 1 \times 7 & 1 \times 8 \\ 2 \times 5 & 2 \times 6 & 2 \times 7 & 2 \times 8 \\ 3 \times 5 & 3 \times 6 & 3 \times 7 & 3 \times 8 \\ 4 \times 5 & 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \\ 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix}$$

反对角线求和:

- $y[0] = 5$
- $y[1] = 10 + 6 = 16$
- $y[2] = 15 + 12 + 7 = 34$
- $y[3] = 20 + 18 + 14 + 8 = 60$
- $y[4] = 24 + 21 + 16 = 61$
- $y[5] = 28 + 24 = 52$
- $y[6] = 32$

方法3：滑动窗口法

具体动画演示详见附件: 滑动窗口法.mp4

将 h 反转得到 $h_{\text{rev}} = [8, 7, 6, 5]$, 然后从左向右滑动, 计算与 x 重叠部分的点积:

- $n = 0$: 对齐: h_{rev} 的最右端 (5) 与 $x[0] = 1$ 对齐, 重叠部分: 只有5和1 $\rightarrow 1 \times 5 = 5$
- $n = 1$: 将 h_{rev} 右移1位, 此时 h_{rev} 的窗口覆盖: 6与1对齐, 5与2对齐 $\rightarrow 1 \times 6 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16$
- $n = 2$: 右移2位: 7与1对齐, 6与2对齐, 5与3对齐 $\rightarrow 1 \times 7 + 2 \times 6 + 3 \times 5 = 7 + 12 + 15 = 34$
- $n = 3$: 右移3位: 8与1对齐, 7与2对齐, 6与3对齐, 5与4对齐 $\rightarrow 1 \times 8 + 2 \times 7 + 3 \times 6 + 4 \times 5 = 8 + 14 + 18 + 20 = 60$
- $n = 4$: 右移4位: 8与2对齐, 7与3对齐, 6与4对齐 $\rightarrow 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 6 = 16 + 21 + 24 = 61$
- $n = 5$: 右移5位: 8与3对齐, 7与4对齐 $\rightarrow 3 \times 8 + 4 \times 7 = 24 + 28 = 52$
- $n = 6$: 右移6位: 8与4对齐 $\rightarrow 4 \times 8 = 32$

4. 卷积的性质

4.1 交换律

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

即:

$$\sum_k x[k]h[n-k] = \sum_k h[k]x[n-k]$$

4.2 结合律

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

4.3 分配律

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

4.4 与单位脉冲的卷积

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

5. 卷积的应用

5.1 信号滤波

- 使用卷积实现低通、高通、带通滤波器
- 滑动平均滤波器: $h = [\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M}]$

5.2 系统识别

- 通过输入输出信号反推系统单位脉冲响应
- 系统辨识的基础工具

5.3 图像处理（滑动窗口法）

- 图像滤波: 边缘检测、模糊、锐化
- 特征提取: 卷积神经网络基础

6. 理解检查

练习1：计算卷积

计算以下序列的卷积:

1. $x = [2, 1, 3], h = [1, 2]$
2. $x = [1, -1, 1], h = [2, 3, 4]$

练习2：判断卷积长度

若 x 长度为 N , h 长度为 M , 卷积结果 y 的长度是多少?

练习3：物理意义

一个房间的混响效果可以建模为输入声音信号与房间脉冲响应的卷积。解释其物理意义。

思考一下，为什么卷积的三种视角为什么会有等价性呢？

练习4：其他人的讲解

在学习完本文档关于卷积的三种视角后，我强烈建议你观看以下视频，它们以视觉化、动态的方式解释了卷积，与本文档的文字和公式形成互补：

- **可交互的卷积演示（蜡烛与玻璃）**：这个视频通过蜡烛的生动比喻，直观展示了卷积，提到了“延迟、倍率、叠加”。
 - 视频链接：<https://www.bilibili.com/video/BV1JX4y1K7Dr>
- **3Blue1Brown的卷积讲解**：这个视频从信号处理的角度，深入浅出地讲解了卷积，提到了“滑动窗口”或“外积矩阵”。
 - 视频链接：<https://www.bilibili.com/video/BV1Vd4y1e7pj>
 - 对于视频里提到的快速卷积法，个人理解：从DTFT跟FFT的波形角度上思考，会更好一些，有一些栅栏效应的感觉，之后我会细致讲解这块。

观看建议：在观看时，请主动思考视频中的动画和讲解，对应本文档中提到的“延迟、倍率、叠加”、“滑动窗口”或“外积矩阵”等概念，加深对卷积多面性的理解。

7. 关键总结

视角	核心思想	优点
系统视角	延迟、倍率、叠加	物理意义明确，理解系统工作原理
矩阵视角	外积矩阵反对角线求和	代数结构清晰，便于数学分析
滑动窗口视角	反转、滑动、相乘、求和	计算直观，易于手工计算

重要结论：卷积是LTI系统的完全描述。只要知道系统的单位脉冲响应 $h[n]$ ，就能通过卷积计算系统对任意输入 $x[n]$ 的响应。

学习建议：动手计算几个卷积例子，分别用三种视角理解计算过程，体会它们的内在一致性。卷积的直观理解比公式记忆更重要！

掌握了卷积的概念后，我们就可以进入——采样定理的世界了！