

1_2 线性时不变系统 (LTI系统)

1. 线性时不变系统的判定

线性时不变系统是数字信号处理的理论基石，它具有优良的数学性质，便于分析和设计。

1.1 🔎 线性系统的判定

- 线性系统必须同时满足两个条件：**可加性和齐次性**。

数学定义

对任意输入 $x_1[n], x_2[n]$ 和任意常数 a_1, a_2 ，系统 $T\{\cdot\}$ 满足：

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

通俗理解

- **可加性**：两个输入同时作用的结果 = 各自单独作用的结果之和
- **齐次性**：输入放大多少倍，输出也放大同样的倍数

1.2 ⏳ 时不变系统的判定

• 数学定义

对任意输入 $x[n]$ 和任意整数时移 n_0 ，系统 $T\{\cdot\}$ 满足：

$$T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

其中 $y[n] = T\{x[n]\}$ 是对原输入的响应。

通俗理解

- 今天输入一个信号得到的响应，和明天输入同样的信号得到的响应完全一样
- 系统的特性不随时间改变

2. 生活化类比

想象一个猪肉摊位的计价系统：

- **线性**：1斤20元，2斤40元，3斤60元…（成比例变化）
- **时不变**：今天猪肉20元/斤，明天还是20元/斤（价格不随时间变）

3. 判断线性时不变系统的小技巧 💡

在判断系统是不是线性时不变系统时，常将复杂运算分解为基本运算，以便利用**物理直觉、公式计算**判断系统性质。以系统 $y[n] = a \cdot x[n - 2n_0] + b$ （其中 a, b, n_0 ）为例：

3.1 线性检验

令 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 为任意输入，对应的输出 $y_1[n], y_2[n]$ 为：

$$y_1[n] = a \cdot x_1[n - 2n_0] + b, y_2[n] = a \cdot x_2[n - 2n_0] + b$$

那么 $y_1[n] + y_2[n]$ 为：

$$y_1[n] + y_2[n] = a \cdot x_1[n - 2n_0] + a \cdot x_2[n - 2n_0] + 2b$$

考虑到 $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$, 系统输出为：

$$y_3[n] = a \cdot (x_1[n - 2n_0]) + (x_2[n - 2n_0]) + b = a \cdot x_1[n - 2n_0] + a \cdot x_2[n - 2n_0] + b$$

当 $b \neq 0$ 时, $y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$, 系统不满足叠加性, 因此不是线性系统。

3.2 运算分解步骤

其运算可分解为三个基本步骤：

1. 移位：将输入序列右移 $2n_0$ 个单位，得到 $x[n - 2n_0]$ 。
2. 标量乘法：将移位后的序列乘以常数 a ，得到 $a \cdot x[n - 2n_0]$ 。
3. 常数加法：叠加常数 b ，得到最终输出 $a \cdot x[n - 2n_0] + b$ 。

3.3 物理直觉

常数加法相当于在输出上叠加直流偏置（如静态工作点），这会破坏齐次性和可加性，导致系统非线性。移位和标量乘法本身是线性运算，但加上常数后整体不再保持线性。

3.4 时不变性检验

对于任意整数延迟 n_d ，考虑输入 $x_d[n] = x[n - n_d]$ 输出为：

$$y_d[n] = a \cdot x[n - n_d - 2n_0] + b$$

而 $y[n - n_d] = a \cdot x[n - n_d - 2n_0] + b$ ，两者相等，故系统是时不变的。

4. 典型线性时不变系统

以下是三种常见的LTI系统，它们在信号处理中应用广泛：

4.1 累加器

对输入序列从过去到现在进行累加求和：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

- 应用：积分运算的离散版本
- 特点：记忆所有历史输入

4.2 滑动平均滤波器

对最近的 M 个样本取平均值：

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n - k]$$

- 应用：平滑数据、去除随机噪声
- 特点：只记忆最近 M 个样本

4.3 差分器

计算相邻样本的差值：

类型	数学表示	特点
前向差分	$y[n] = x[n + 1] - x[n]$	用后一个减当前
后向差分	$y[n] = x[n] - x[n - 1]$	用当前减前一个

- **应用：**边缘检测、速度/加速度计算
- **特点：**高通特性，突出信号的变化部分

5. 理解检查

练习：判断系统性质

判断以下系统是否为线性时不变系统：

1. $y[n] = 3x[n] + 2$
2. $y[n] = x[n] \cdot x[n - 1]$
3. $y[n] = \sin(x[n])$
4. $y[n] = x[2n]$
5. $y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]$

提醒：这些系统都对信号做了什么？有哪些基本运算？

6. 本章关联性

理解线性时不变系统是学习后续内容的关键：

- **下一节卷积：**所有LTI系统都可以用卷积描述
- **傅里叶变换：**LTI系统在频域分析中特别简单
- **滤波器设计：**基于LTI系统理论

关键洞察：线性时不变系统之所以重要，是因为它们有完美的数学描述工具（卷积、傅里叶变换、Z变换），并且绝大多数实际系统都可以近似为LTI系统进行分析。

掌握了线性时不变系统的概念后，我们就可以进入数字信号处理的核心工具——卷积运算了！