Tópico 5 - Posições relativas de retas e planos

Tópico 5

Site:	[Moodle PUC-SP]
Curso:	2015.1 - Geometria Analítica (GA)
Livro:	Tópico 5 - Posições relativas de retas e planos
Impresso por:	ANA LUIZA PORTELLO BASTOS
Data:	sábado, 11 Nov 2017, 03:02

Sumário

Geometria Analítica

Posições relativas de retas e planos

Tópico 1 Tópico 2 Tópico 3 Tópico 4 Tópico 5 Tópico 6 Tópico E

5. Posição relativa entre retas e planos

Neste capítulo estudaremos as possíveis posições entre duas retas, entre retas e planos e entre planos.

5.1 Reta e reta

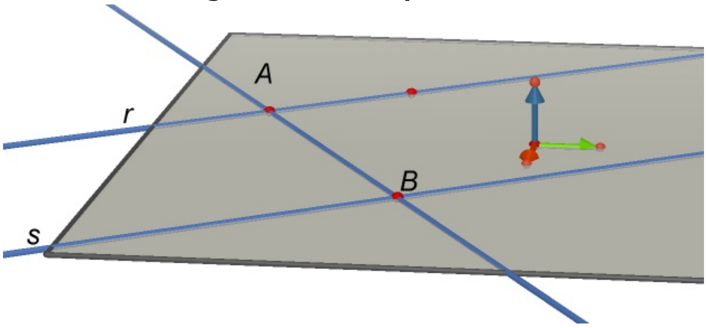
Duas retas no espaço podem ser:

1. **reversas**, quando nenhum plano as contém ou
2. **coplanares**, quando estão contidas em um mesmo plano. Neste caso, podem ser:
   a. **paralelas** distintas ou coincidentes ou
   b. **concorrentes** quando têm um ponto comum.

Fixado um sistema de coordenadas ortonormal do espaço e considerando uma reta r com vetor diretor $\vec{r} = (a,\ b,\ c)$, $(\vec{r}\ //\ r)$ e uma reta s com vetor diretor $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$, $(\vec{s}\ //\ s)$. Temos duas possibilidades para os vetores diretores ou $(\vec{r},\ \vec{s})$ é LD ou $(\vec{r},\ \vec{s})$ é LI.

i. se $(\vec{r},\ \vec{s})$ LD r e s são **paralelas** se, e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \lambda \vec{v}$. Para saber se as retas são **coincidentes**, ou não, basta escolher um ponto P de r e verificar se P pertence a s, se sim temos r = s, se não r e s são paralelas distintas, isto é $r \cap s = \emptyset$.

Figura 32 - retas paralelas

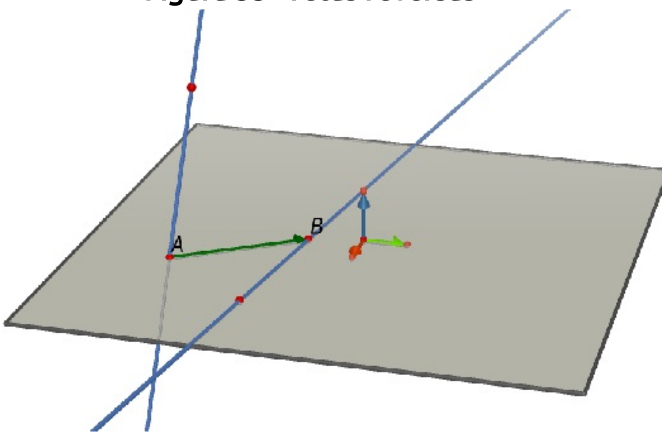


ii. Se $(\vec{r},\ \vec{s})$ LI as retas podem ser **reversas** ou **concorrentes**.

r e s são **reversas** se, e somente se, $(\vec{r},\ \vec{s},\ \overrightarrow{AB})$ LI, ou seja, se e só se $[\vec{r},\ \vec{s},\ \overrightarrow{AB}] \neq 0$, para qualquer $A(x_1,\ y_1,\ z_1) \in r$ e $B(x_2,\ y_2,\ z_2) \in s$.

Então se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$ as retas r e s são reversas.

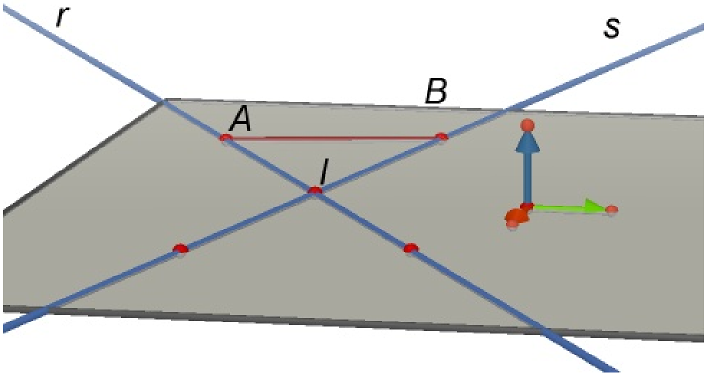
Figura 33 - retas reversas



r e s são **concorrentes** se, e somente se, $[\vec{r},\ \vec{s},\ \overrightarrow{AB}]=0$.

Então se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$ as retas r e s são concorrentes.

Figura 34 - retas concorrentes



A condição para que duas retas sejam **ortogonais** é que os vetores, não nulos, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ paralelos a elas sejam ortogonais, isto é, $\vec{r}\circ\vec{s}=0$. Se as duas retas são ortogonais e possuem um ponto comum denominam-se **perpendiculares**.

Exemplo 1

Verifique a relação de posição entre as retas $r\colon \overrightarrow{OX}=(1,\ 2,\ 3)+\lambda(0,\ 1,\ 3)$, com $\lambda\in\mathbb{R}$ e $s\colon \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \end{cases}$.

Observando a equação da reta r vemos que ela passa pelo ponto $A(1,\ 2,\ 3)$ e tem direção do vetor $\vec{r}=(0,\ 1,\ 3)$.

Da reta s precisamos tomar dois de seus pontos para obter a direção. Assim se fizermos $z=0$ obtemos o sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-4 \end{cases}$ cuja solução é $x=1$ e $y=5$. Logo, $B(1,\ 5,\ 0)$ pertence a s. Se fizermos $z=1$ obtemos o sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-3 \end{cases}$ que tem solução $x=1$ e $y=4$. Logo, $C(1,\ 4,\ 1)$ pertence a s.

Assim, a direção da reta s é dada por $\overrightarrow{BC}=\vec{s}=(0,\ -1,\ 1)$. Podemos ver que $(\vec{r},\ \vec{s})$ é LI. Tomando o vetor $\overrightarrow{AB}=(0,\ 3,\ -3)$ com $A\in r$ e $B\in s$ podemos verificar se os vetores $(\vec{r},\ \vec{s},\ \overrightarrow{AB})$ são coplanares (LD).

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$ significa que a terna de vetores é LD e, consequentemente, as retas r e s são concorrentes. Como $\vec{r}\circ\vec{s}\neq 0$ as retas não são perpendiculares.

Exemplo 2

Verifique a relação de posição entre as retas $r\colon\ \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{-z}{3}$ e $s\colon \begin{cases} x=2 \\ y=1-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ com $\lambda\in\mathbb{R}$.

Temos $\vec{r}=(2,\ 1,\ -3)$ e $\vec{s}=(0,\ -1,\ 1)$ que não são paralelos, logo as retas não são paralelas.

Vamos verificar se as retas são concorrentes. Para isso determinamos as equações paramétricas de r e s:

$r: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = -3\mu \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

Igualando os dois sistemas vem: $\begin{cases} 1 + 2\mu = 2 \\ \mu = 1 - \lambda \\ -3\mu = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0{,}5 \\ \lambda = 0{,}5 \\ -1{,}5 = 2{,}5 \ (falso) \end{cases}$.

Logo as retas não são concorrentes e, portanto, são reversas. Como $\vec{r} \circ \vec{s} \neq 0$ as retas não são ortogonais.

Resumindo temos:

Retas paralelas

- Se $P \in s \ \ e \ \ P \in r$ então as paralelas são coincidentes

- Se $P \in s \ \ e \ \ P \notin r$ então as paralelas são distintas.

Retas não paralelas

- Se $r \cap s = \{P\}$ as retas são concorrentes. Se $\vec{r} \circ \vec{s} = 0$ as retas são concorrentes perpendiculares. Se $\vec{r} \circ \vec{s} \neq 0$ as retas são concorrentes não perpendiculares.

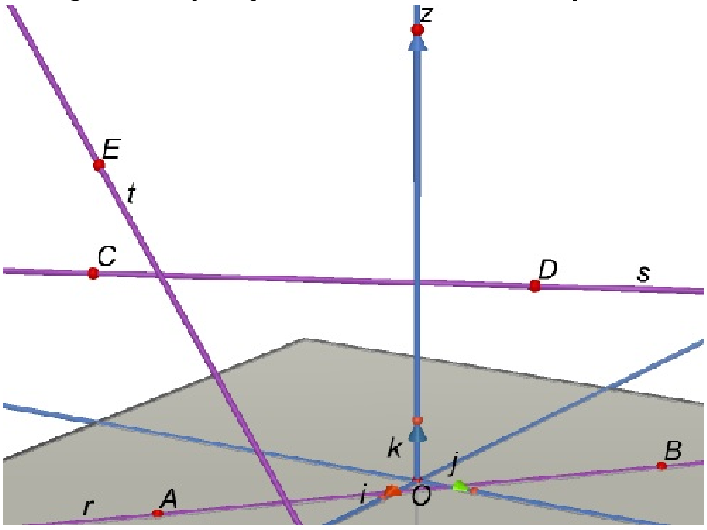
- Se $r \cap s = \emptyset$ as retas são reversas. Se $\vec{r} \circ \vec{s} = 0$ as retas são reversas ortogonais. Se $\vec{r} \circ \vec{s} \neq 0$ as retas são reversas não ortogonais.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

5.2 Reta e plano

Uma reta e um plano, no espaço, podem ocupar as seguintes posições: a reta pode estar **contida** no plano, ser **paralela** ao plano ou ser **transversal** ao plano, isto é, pode interceptar o plano em um único ponto. Veja na figura 35 exemplos dessas retas.

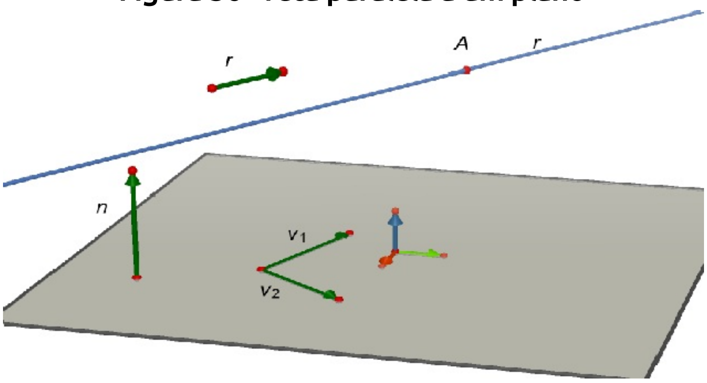
Figura 35 - posições relativas de retas e planos



Fixado um sistema de coordenadas ortonormal do espaço consideremos uma reta r que passa pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{r} \neq \vec{0}$ e o plano π que passa pelo ponto B e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ com $\left(\overrightarrow{v_1}, \ \overrightarrow{v_2}\right)$ LI que tem vetor normal $\vec{n}$.

A reta r será paralela ao plano π se, e somente se, os vetores $\vec{r}$, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ forem coplanares, isto é, se $\left(\vec{r}, \ \overrightarrow{v_1}, \ \overrightarrow{v_2}\right)$ for LD. Considerando a equação geral do plano π, $ax + by + ca + d = 0$, $\vec{n} = (a, \ b, \ c)$ seu vetor normal e $\vec{r} = (m, \ n, \ p)$ a direção de r, conforme mostra a figura 36

Figura 36 - reta paralela a um plano



Podemos dizer que a reta r será **paralela** ao plano π quando $\vec{n} \perp \vec{r}$, isto é, quando $\vec{n} \circ \vec{r} = 0$ o que significa que $am + bn + cp = 0$. Para decidir se $r \subset \pi$ ou $r // \pi$ basta verificar se um ponto P qualquer de r pertence a π. Se sim concluímos que $r \subset \pi$, se não, temos que $r // \pi$.

Caso $am + bn + cp \neq 0$ a reta r **interceptará** o plano π em um ponto P e para obter esse ponto basta resolver o sistema formado por suas equações. Se tivermos dois vetores $\overrightarrow{v_1} = (d, \ e, \ f)$ e $\overrightarrow{v_2} = (g, \ h, \ i)$ LI, paralelos a π e $\vec{r} = (m, \ n, \ p)$ um vetor diretor da reta r, uma condição necessária e suficiente para que r seja **transversal** a π é que $\left(\vec{r}, \ \overrightarrow{v_1}, \ \overrightarrow{v_2}\right)$ seja LI, isto é $\left[\vec{r}, \ \overrightarrow{v_1}, \ \overrightarrow{v_2}\right] \neq 0$.

Sejam a reta r: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{r}$ e um plano π: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}$ $(t, \ \lambda, \ \mu \ \in \mathbb{R})$. Para que a reta r seja **perpendicular** ao plano π os pares de vetores $\left(\vec{r},\ \overrightarrow{v_1}\right)$ e $\left(\vec{r},\ \overrightarrow{v_2}\right)$ devem ser ortogonais, isto é $\vec{r} \circ \overrightarrow{v_1} = 0$ e $\vec{r} \circ \overrightarrow{v_2} = 0$. Observe que o par formado pelo produto vetorial $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ e o vetor $\vec{r}$ deve ser LD, então existe um único número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \alpha\left(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right)$.

Se, em relação a um sistema de coordenadas ortonormais, o plano π for dado por sua equação geral $ax + by + cz + d = 0$ sendo $\vec{n} = \left(a,\ b,\ c\right)$ um vetor normal a π, então basta verificar se $\vec{r}$ (vetor direção de r) é paralelo a $\vec{n}$.

Em resumo

- Se $\vec{r} \circ \vec{n} = 0$ e $P \in r$ e $P \in \pi$ a reta está contida no plano, mas se $P \in r$ e $P \notin \pi$ a reta é paralela ao plano.

- Se $\vec{r} \circ \vec{n} \neq 0$ e $\vec{r}$ não é paralela a $\vec{n}$ então a reta é transversal ao plano, mas se $\vec{r}$ for paralela a $\vec{n}$ então a reta é perpendicular ao plano.

Exemplo 2

Verifique a posição relativa entre o plano π: $\overrightarrow{OX} = \left(1,\ 1,\ 3\right) + \lambda\left(1,\ -1,\ 1\right) + \mu\left(0,\ 1,\ 3\right)$, $\left(\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\right)$ e a reta r: $\overrightarrow{OX} = \left(1,\ 1,\ 1\right) + \alpha\left(3,\ 2,\ 1\right)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

A reta r tem direção $\vec{r} = \left(3,\ 2,\ 1\right)$ e o plano π tem a direção dos vetores $\overrightarrow{v_1} = \left(1,\ -1,\ 1\right)$ e $\overrightarrow{v_2} = \left(0,\ 1,\ 3\right)$. Verifiquemos se essa terna de vetores é LI ou LD.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3-1) - 2(3) + 1 = -17 \neq 0$. Logo a terna é LI e a reta r é transversal ao plano π.

Outra solução

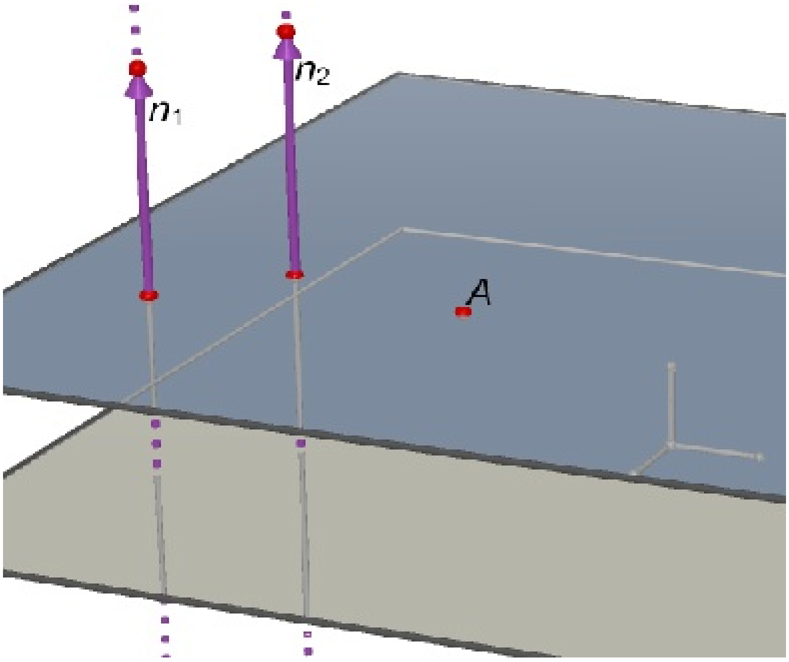
Determinando o vetor normal ao plano, fazendo o produto vetorial dos dois vetores diretores do plano, obtemos $\vec{n} = \left(-4,\ -3,\ 1\right)$. Calculando $\vec{r} \circ \vec{n} = -12 - 6 + 1 = -17 \neq 0$ significa que a reta é transversal ao plano, mas como o vetor diretor da reta não é paralelo ao vetor normal ao plano concluimos que ela não é perpendicular.

***O** plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

5.3 Plano e plano

Dois planos no espaço podem ser **paralelos**, coincidentes ou distintos, ou ainda, serem **transversais** com a intersecção sendo uma reta.
Fixado um sistema de coordenadas ortonormal do espaço, sejam $\pi_1\colon\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $\pi_2\colon\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

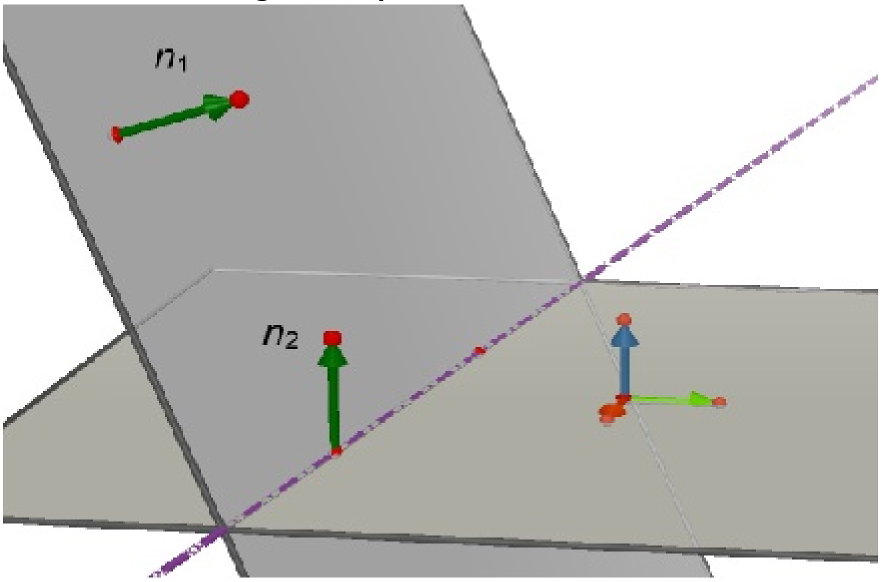
Figura 37 - planos paralelos



a. uma condição necessária e suficiente para que os planos π_1 e π_2 sejam **paralelos distintos** é que $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$. Isto significa que os planos devem possuir mesma direção normal, ou seja, $\left(\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\right)$ é LD (ver figura 37) e, para decirdir se são **coincidentes**, basta verificar se um ponto pertence aos dois planos ou ainda se a razão $\frac{d_1}{d_2}$ é igual às outras razões.

b. se $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ podemos concluir que os planos se interceptam e sua intersecção é uma reta. Neste caso $\left(\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\right)$ é LI, como mostra a figura 38. Para encontrar a reta r de intersecção de π_1 e π_2 devemos resolver o seguinte sistema linear, com duas equações e três incógnitas: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$.

Figura 38 - planos concorrentes



Se o sistema for impossível os planos **não** têm ponto comum, logo são paralelos distintos. Se o sistema for possível e indeterminado, tendo uma variável "livre" os planos são concorrentes e a solução do sistema será a equação da reta comum aos dois planos. Tendo duas variáveis "livres" os planos serão coincidentes e a solução do sistema será a equação desses planos.

Observação

Esse sistema nunca será determinado porque a intersecção de dois planos nunca pode ser um único ponto.

Sejam dois planos, π_1 e π_2 e $\overrightarrow{n_1}$ o vetor normal ao plano π_1 e $\overrightarrow{n_2}$ o vetor normal ao plano π_2. Os planos π_1 e π_2 são **perpendiculares** se, e somente se, os seus vetores normais forem ortogonais, isto é $\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = 0$. Dessa forma se dois planos são perpendiculares então $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_1} // \pi_2$ e $\overrightarrow{n_2} // \pi_1$.

Em resumo

- Se $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$, $P \in \pi_1$ e $P \in \pi_2$ então os planos são **paralelos coincidentes**, mas se $P \in \pi_1$ e $P \notin \pi_2$ os planos são **paralelos distintos**.

- Se $\overrightarrow{n_1}$ não é paralelo a $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = 0$ então os planos são perpendiculares, mas se $\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} \neq 0$ então os planos são **transversais**.

Exemplo 3

Verifique a relação de posição entre os planos π_1: $\overrightarrow{OX} = (1,\ 0,\ 1) + \lambda(1,\ 1,\ 1) + \mu(0,\ 1,\ 0)$ $(\lambda,\ \mu\ \in \mathbb{R})$ e π_2: $\overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 0) + \alpha(1,\ 0,\ 1) + \beta(-1,\ 0,\ 3)$ $(\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R})$.

Para resolver buscamos as equações gerais de cada um deles:

Equação geral de π_1: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) + (z-1) = 0$ que nos dá $x - z = 0$ e,, portanto, um vetor normal desse plano é $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ -1)$.

Equação geral de π_2: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4y = 0$ que nos dá $y = 0$ (plano xz) e, portanto, um vetor normal desse plano é $\overrightarrow{n_2} = (0,\ 1,\ 0)$.

Como $\left(\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\right)$é LI e $\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = 0$ temos que π_1 e π_2 são **perpendiculares**. A reta intersecção desses planos é obtida com a solução do sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Temos então: $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ que é indeterminado (tem infinitas soluções, que são os pontos da reta procurada). Considerando $z = 0$, temos que (0, 0, 0) é um ponto da reta e considerando $z = 1$ temos que (1, 0, 1) é outro ponto da reta. Logo, $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = \lambda \end{cases}$ são as equações paramétricas da reta intersecção dos dois planos.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

Exercícios de familiarização

Exercício 1

A reta r que passa pelos pontos $A(-3,\ 4,\ 2)$ e $B(5,\ -2,\ 4)$ e a reta s que passa pelos pontos $C(-1,\ 2,\ -3)$ e $D(-5,\ 5,\ -4)$ são paralelas?

Exercício 2

Estude a posição relativa das retas nos seguintes casos:

a. $r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{cases}$

b. $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z$ e $s: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2t \\ z = -2t + 1 \end{cases}$

c. $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ e $s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$

d. $r: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ e $s: x = y = z$

e. $r: \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 3) + \alpha(0,\ 1,\ 3)\ (\alpha \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (0,\ 1,\ 0) + \beta(1,\ 1,\ 1)\ (\beta \in \mathbb{R})$

f. $r: \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 3) + a(0,\ 1,\ 3)\ (a \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (1,\ 3,\ 6) + b(0,\ 2,\ 6)\ (b \in \mathbb{R})$

Exercício 3

Verifique, em cada caso, se as retas são ortogonais e, em particular, se são perpendiculares.

a. $r: O\vec{\ }X = (1,\ 1,\ 0) + m(1,\ 0,\ 1)\ (m \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 3) + h(2,\ 1,\ 4)\ (h \in \mathbb{R})$

b. $r: \overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 1) + h(1,\ 2,\ -1)\ (h \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (2, 3, 4) + t(1, 1, 3),\ (t \in \mathbb{R})$

c. $r: \overrightarrow{OX} = (2,\ 3,\ 4) + p(1,\ 1,\ 1)\ (p \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (2,\ 0,\ 4) + q(1,\ -2,\ 1)\ (q \in \mathbb{R})$

Exercício 4

Em cada um dos casos abaixo verifique se a reta e o plano são concorrentes, paralelos ou se a reta está contida no plano. No caso da reta ser transversal ao plano determine o ponto comum.

a. $r: \overrightarrow{OX} = (3,\ 4,\ 1) + m(1,\ 2,\ 3)\ (m \in \mathbb{R})$ e $\pi: 5x + 2y - 3z - 20 = 0$

b. $r: \overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 2) + t(2,\ 5,\ 0)\ (t \in \mathbb{R})$ e $\pi: 5x - 2y + z - 7 = 0$

c. $r: \overrightarrow{OX} = (2,\ 1,\ 0) + h(1,\ 3,\ 5)\ (h \in \mathbb{R})$ e $\pi: x + y + z + 15 = 0$

Exercício 5

Determine os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano, sendo: $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ e

$\pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$

Exercício 6

Dados o plano e a reta r, estude a posição relativa entre eles.

a. $\pi: \overrightarrow{OX} = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 0, 3) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ e $r: \overrightarrow{OX} = (2, 2, 1) + \alpha(3, 3, 0) \ (\alpha \in \mathbb{R})$

b. $\pi: x + y - z + 2 = 0$ e $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Exercício 7

Verifique, em cada caso, se a reta e o plano são perpendiculares.

a. $\pi: 3x + 6y + 9z - 5 = 0$ e $r: \overrightarrow{OX} = (1, 2, 0) + t(2, 4, 6) \ (t \in \mathbb{R})$

b. $\pi: x + y + 2z + 10 = 0$ e $r: \overrightarrow{OX} = (0, 7, 1) + h(3, 1, 1) \ (h \in \mathbb{R})$

c. $r: \overrightarrow{OX} = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 3) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ e $\pi: \overrightarrow{OX} = (3, 4, 5) + \lambda(6, 7, 8) + \mu(9, 10, 11)$

d. $r: \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ e $\pi: x + 2z - 14 = 0$

Exercício 8

Determine equações na forma simétrica da reta r que passa por $P(-1, 3, 5)$ e é perpendicular ao plano $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$

Exercício 9

Estude a posição relativa dos seguintes planos.

a. $\pi_1: 2x - y + z - 1 = 0$ e $\pi_2: x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 9 = 0$

b. $\pi_1: x + 10y - z = 4$ e $\pi_2: 4x + 40y - 4z = 16$

Exercício 10

Considere os planos $\alpha: x + y + z - 4 = 0$ e $\beta: x + 2y + 3z + 6 = 0$ e determine a equação geral do plano φ que passa por $P(2, 1, 1)$ e é perpendicular aos planos dados.

Avaliação

Clique na atividade para acessá-la e resolver os exercícios propostos.

Avaliação 5

Responda sucintamente às questões propostas

Dúvidas

Dúvidas e outras questões poderão ser esclarecidas por meio do Fórum de dúvidas.