Tópico 1 – Introdução ao estudo de vetores

Tópico 1

Site:	[Moodle PUC-SP]
Curso:	2015.1 - Geometria Analítica (GA)
Livro:	Tópico 1 – Introdução ao estudo de vetores
Impresso por:	ANA LUIZA PORTELLO BASTOS
Data:	sábado, 11 Nov 2017, 02:59

Sumário

Geometria Analítica

Introdução ao estudo de vetores

Tópico 1 | Tópico 2 | Tópico 3 | Tópico 4 | Tópico 5 | Tópico 6

Tópico E

1. Introdução ao estudo de vetores

Neste tópico daremos início ao estudo de vetores e aqui você encontrará o conteúdo a ser estudado dividido em dois capítulos: ponto de vista geométrico e ponto de vista da Geometria Analítica. Estude-os e faça os exercícios de familiarização. Somente depois faça as tarefas de avaliação, escaneie-as e envie para serem avaliadas. Lembre-se que pode enviar suas dúvidas sempre que surgirem.

Nesta semana você deverá se dedicar, pelo menos, oito horas para desenvolver o conteúdo deste tópico.

1.1 Ponto de vista geométrico

Neste tópico estudaremos a noção de vetores do ponto de vista geométrico, ou seja não usaremos referencial cartesiano para representa-los, mas sim figuras. Trataremos de algumas noções preliminares que subsidiarão a definição de vetores geometricamente, além de suas operações e propriedades.

1.1.1 Noções Preliminares

Grandezas: escalares e vetoriais

A noção de grandeza é uma noção primitiva, isto é, intuitiva e, portanto, não definida. Classificamos as grandezas em:

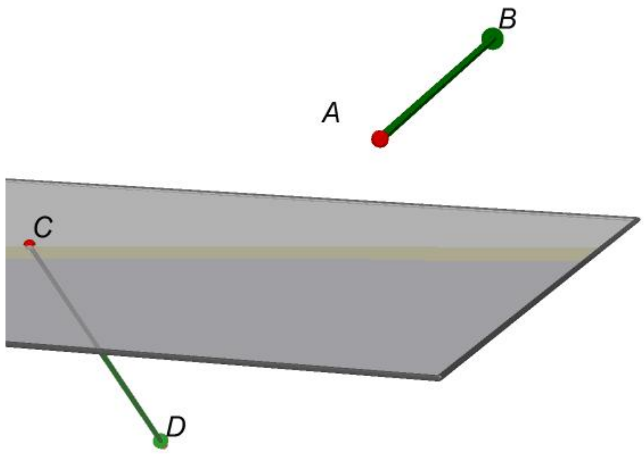
- **escalares:** caracterizadas por um valor numérico e a unidade de medida correspondente (comprimento, área, massa, tempo, ...);

- **vetoriais:** caracterizadas por um valor numérico e, também, por direção e sentido em que atua (força, velocidade, ...).

Segmentos orientados

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, em que o **primeiro** é chamado origem do segmento e o **segundo** de extremidade. Na figura 1 (A, B) é um segmento orientado em que A é origem e B a extremidade e (C,D) é um segmento orientado em que C é origem e D extremidade. Clique na figura para abrir o arquivo e manipule os pontos.

Figura 1 - Segmentos orientados



Note que: $(A,\ B) \neq (B,\ A)$ e como consequência:

a. se tivermos dois segmentos orientados (A, B) e (C, D), dizemos que eles são **iguais**, isto é, (A, B) = (C, D) se, e somente se, A = C e B = D;

b. chama-se segmento **nulo** aquele em que a origem coincide com a extremidade;

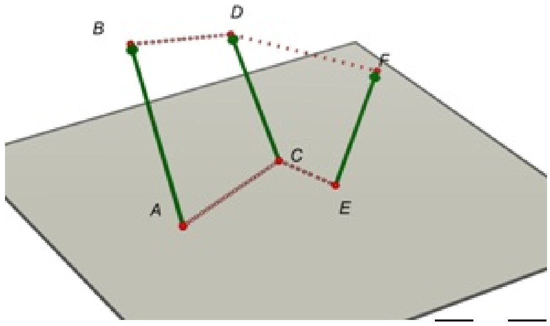
c. dado um segmento orientado (A, B) o segmento orientado (B, A) se diz oposto de (A, B);

d. o **comprimento** de um segmento orientado será a sua medida em relação a uma unidade de medida de comprimento escolhida.

Direção e Sentido

Considerando que a **direção** é o que existe de comum num feixe de retas paralelas, diremos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm mesma direção se $\overline{AB} // \overline{CD}$. A notação $\overline{AB}$ representa o segmento sem orientação, isto é, não tem origem e nem extremidade e, consequentemente, $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Assim, só podemos comparar os **sentidos** de dois segmentos orientados se eles têm mesma direção.

Figura 2 - direção e sentido



Veja na figura 2 que: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma direção e têm mesmo sentido, logo $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$ e $\overline{AB} // \overline{CD}$. Por outro lado, observando a figura, podemos ter pares de segmentos orientados, como $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, não paralelos, isto é com direções diferentes e que, portanto, nada podemos afirmar a respeito do sentido.

Convém observar também que:

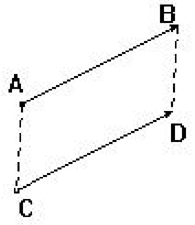
- (A, B) e (B, A), com $A \neq B$, têm mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário.

- O segmento nulo tem direção e sentido indeterminados e medida nula.

Segmentos Equipolentes

Dizemos que o segmento orientado (A, B) é equipolente ao segmento orientado (C, D) se (A, B) e (C, D) têm mesmo comprimento, direção e sentido, como mostra a figura 3. Indica-se por: $(A,\ B) \sim (C,\ D)$. Se dois segmentos orientados não nulos (A, B) e (C, D) são equipolentes e não são colineares (isto é, não estão contidos em uma mesma reta) então dizemos que (A, B) // (C, D). Como consequência, $\overline{AC} // \overline{BD}$, isto é, ABDC é um paralelogramo.

Figura 3 - segmentos equipolentes



Propriedades dos segmentos equipolentes

Observe na figura 4 as propriedades, sendo A, B, C, D, E e F pontos do espaço.

a. Reflexiva: $(A, B) \sim (A, B)$.

b. Simétrica: $(A, B) \sim (C, D)$ então $(C, D) \sim (A, B)$.

c. Transitiva: $(A, B) \sim (C, D)$ e $(C, D) \sim (E, F)$, então $(A, B) \sim (E, F)$

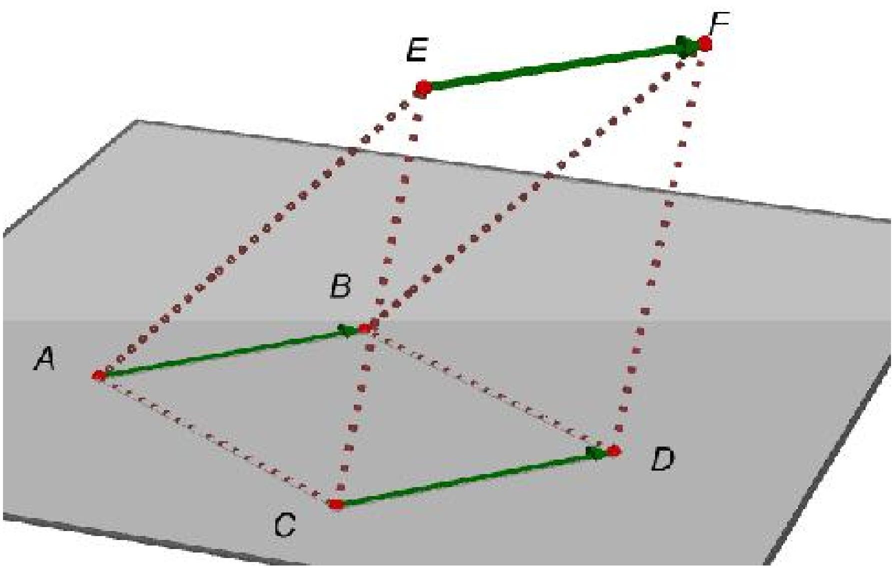
d. Dados o segmento orientado (A, B) e o ponto C, existe (C, D) tal que $(A, B) \sim (C, D)$.

e. Se (A, B) ~(C, D) então (B, A) ~(D, C).

f. Todos os segmentos nulos são equipolentes.

g. Se (A, B) ~ (C, D) então (A, C) ~ (B, D).

Figura 4 - propriedades segmentos equipolentes



Segmentos orientados coplanares

Dizemos que dois ou mais segmentos orientados são coplanares quando eles estão contidos em um mesmo plano. Na figura 4, (A, B) e (C, D) são segmentos orientados coplanares, porém (A, B), (C, D) e (E, F) não são segmentos orientados coplanares.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

1.1.2 Vetores

Definição

Chama-se **vetor** determinado por um segmento orientado (A, B) à classe de equipolência de (A, B), isto é, ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes à (A, B).

a. O vetor cujo representante é (A, B) será indicado por $\overrightarrow{AB}$. Em outras palavras um vetor $\overrightarrow{AB}$ é um objeto matemático que se define por uma direção, um sentido e um comprimento. Usa-se também a seguinte notação: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, ...

b. Se os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são **iguais**, isto é, os dois segmentos orientados representam um mesmo vetor $\vec{v}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, representado em posições distintas do espaço. Observe este fato na figura 4. Em outras palavras, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais, se e somente se, o quadrilátero ABDC é um paralelogramo.

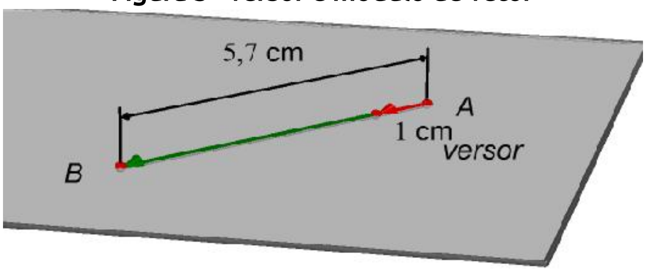
   Assim, dado um ponto A do espaço e um vetor $\vec{v} \in V^3$, existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

c. A **norma** (ou **módulo**) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. Indica-se a norma do vetor $\vec{x}$ por $|\vec{x}|$. Se $|\vec{x}| = 1$ o vetor $\vec{x}$ é dito **unitário**.

Versor

Chama-se **versor** de um **vetor** $\vec{v} \neq \vec{0}$ ao vetor $\overrightarrow{v_0}$ que tem mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$, mas que tem módulo 1, observe a figura 5. O versor é obtido por: $\overrightarrow{v_0} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. De fato, calculando o módulo do versor obtemos: $\left|\overrightarrow{v_0}\right| = \left|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$

Figura 5 - versor e módulo de vetor



Observação: O conjunto de todos os vetores do espaço será indicado por V^3.

OPERAÇÕES COM VETORES

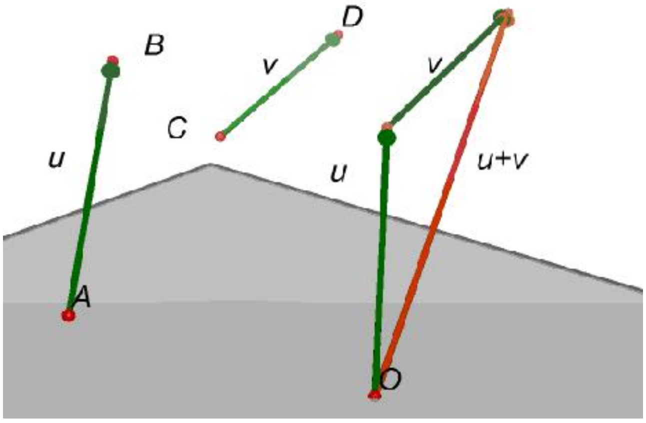
Adição

Em V^3, uma operação de **adição** faz corresponder a cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ o vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u} + \vec{v}$.

Relação de Chasles (fechamento do triângulo)

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ cujos representantes são $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, definimos a adição de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pela relação $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ de onde $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, como mostra a figura 6. Esta operação é sempre possível, pois podemos sempre deslocar o segundo vetor $\vec{v}$ para que sua origem coincida com a extremidade do vetor $\vec{u}$.

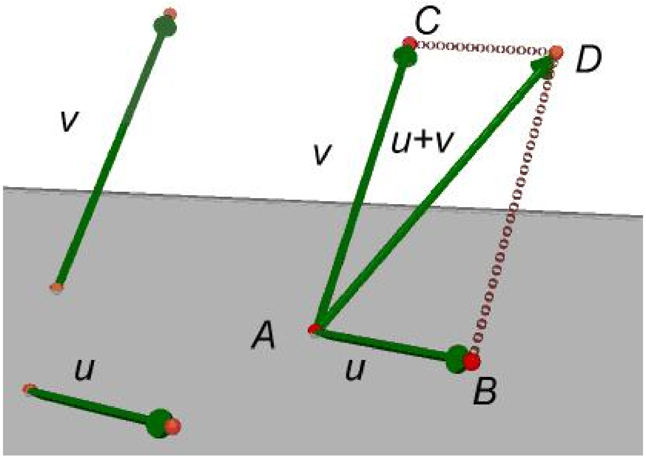
Figura 6 - adição de vetores - triângulo



Adição de dois vetores de mesma origem (regra do paralelogramo)

Observe na figura 7, que construindo-se representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com origens em um mesmo ponto A, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, tem-se o paralelogramo ABDC definido. O vetor $\overrightarrow{AD}$, dessa forma obtido, é o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$, ou seja $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$. Se ABDC é um paralelogramo então $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ de onde vem que $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Figura 7 - adição de vetores - paralelogramo



Propriedades da adição de vetores

Encontramos as mesmas propriedades na adição de dois vetores que na adição de dois números.

a. A adição de dois vetores é comutativa: $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in V^3, \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$. Esta propriedade permite mudar a ordem que se faz a adição.

b. A adição de três vetores é associativa: $\forall \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V^3, \left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$.

c. Existência do elemento neutro (vetor nulo): $\forall \vec{u} \in V^3, \exists \vec{0} \in V^3$, tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$. O vetor nulo vem do fato que se aplicamos a relação de Chasles à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$, que decide-se então chamar de vetor nulo e notar por $\vec{0}$.

d. Existência do elemento oposto: $\forall \vec{v} \in V^3,\ \exists(-\vec{v}) \in V^3$, tal que $\vec{v}+\left(-\vec{v}\right)=\vec{0}$. De onde vem a subtração de vetores: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$. Se $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ decide-se notar que $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Multiplicação por escalar

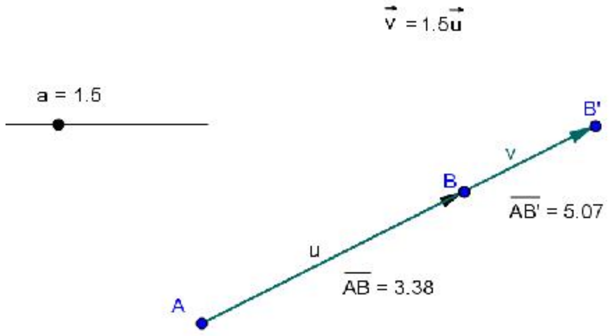
Dado $\vec{v} \in V^3$ e um número real λ define-se o produto $\lambda \cdot \vec{v}$ do escalar λ pelo vetor $\vec{v}$ por:

- Se $\lambda > 0$, $\lambda \cdot \vec{v}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{v}$ e seu comprimento é multiplicado por λ. Temos então que $\left|\lambda \cdot \vec{v}\right| = \lambda \cdot |\vec{v}|$.

- Se $\lambda < 0$, $\lambda \cdot \vec{v}$ tem a mesma direção e sentido inverso ao de $\vec{v}$ e seu comprimento é multiplicado por λ. Temos então que $|\lambda \cdot \vec{v}| = -\lambda \cdot |\vec{v}|$

- Se $\lambda = 0$ temos então $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Se $\vec{v} = \vec{0}$ então $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Reciprocamente, se $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$ então, $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Observe a figura 8.

Figura 8 - multiplicação por escalar



Propriedades da multiplicação por escalar

Para $\forall \alpha,\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in V^3$

a. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

b. $(\lambda + \alpha)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \alpha\vec{v}$

Estas duas propriedades nos permitem desenvolver expressões vetoriais como equações numéricas. Elas nos permitem então resolver equações vetoriais, e consequentemente, permitem com que a Geometria tenha acesso à performance da Álgebra.

c. $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

d. $\lambda(\alpha\vec{v}) = (\lambda\alpha)\vec{v}$

e. $(-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v})$

f. $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$

g. $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$

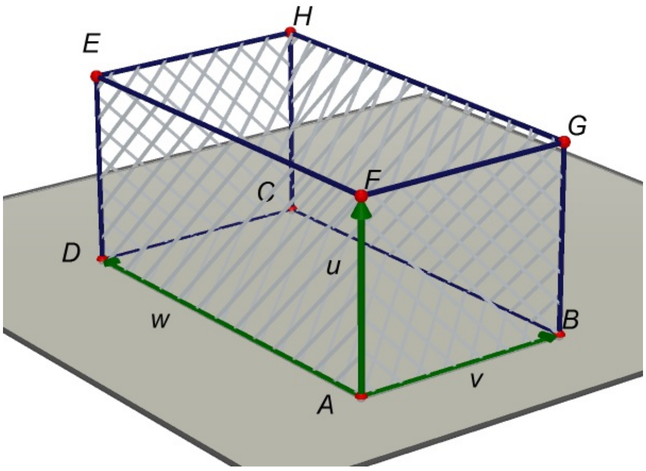
Vetores paralelos

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, em V^3 dizemos que eles são **paralelos** e indicamos por $\vec{u} // \vec{v}$, se existe um representante (segmento orientado equipolente) de $\vec{u}$ que é paralelo a um representante de $\vec{v}$. Por convenção, dizemos que o vetor nulo é paralelo a qualquer vetor de V^3.

Vetores ortogonais

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, em V^3 dizemos que eles são **ortogonais** e indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se existe um representante de $\vec{u}$ que é perpendicular a um representante de $\vec{v}$. Por convenção, dizemos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor de V^3. Na figura 9 um representante de $\vec{u}$ é $\overrightarrow{AF}$, que é perpendicular ao representante de $\vec{v}$, que é $\overrightarrow{AB}$, logo podemos dizer que $\overrightarrow{AF}$ é ortogonal aos vetores $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{BC}$, entre outros.

Figura 9 - vetores paralelos e ortogonais



*****O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

1.2 Ponto de vista da geometria analítica

Neste tópico representaremos os vetores estudados anteriormente em um referencial cartesiano e passaremos a representa-los também, a partir desse referencial por ternas ordenadas. Nessa representação trabalharemos também com as operações e suas propriedades.

1.2.1 Noções preliminares

Base

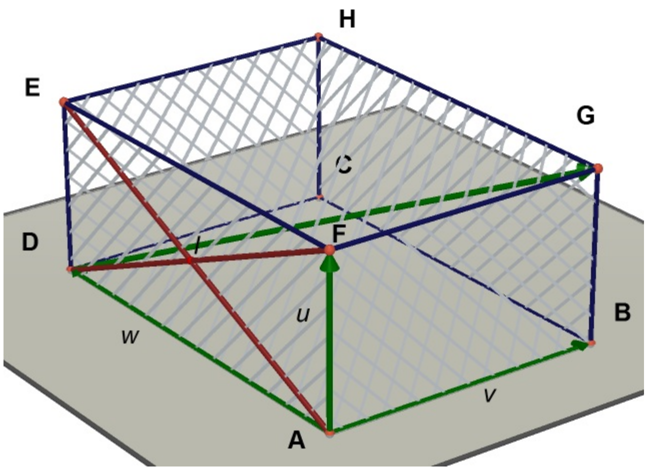
Antes de prosseguirmos em nosso estudo, é importante que tenhamos uma breve noção de **base**.

Definição 1

Dados os vetores $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{v_n} \in V^3$, em que $n \in \mathbb{N}^*$, dizemos que $\vec{v} \in V^3$ é **combinação linear** de $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{v_n}$, se existem escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ \ldots + \alpha_n\vec{v_n}$. Dizemos que o vetor $\vec{v}$ é **gerado** pelos vetores $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{v_n}$, ou ainda, que os vetores $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{v_n}$ são **geradores** de $\vec{v}$ (ou **geram** $\vec{v}$).

Considere a figura 10 e observe que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$, isto é, o vetor $\overrightarrow{DG}$ é combinação linear dos três vetores com os escalares todos iguais a 1. Ou ainda, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG}$ ou $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG}$. Temos também que $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FG}$.

Figura 10 - combinação linear



Nosso interesse é determinar uma sequência de vetores que possa gerar qualquer vetor do espaço $\mathbb{R}^3$, em outras palavras, queremos encontrar o mínimo de vetores necessários de modo a gerar qualquer vetor do espaço. Para determinar esse número mínimo precisamos definir sequência de vetores linearmente dependentes e linearmente independentes.

a. Uma sequência $(\vec{v})$ com um único vetor $\vec{v} \in V^3$, por convenção, é linearmente dependente (LD) se $\vec{v} = \vec{0}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ a sequência $(\vec{v})$ é linearmente independente (LI).

b. Uma sequência $(\vec{u},\ \vec{v})$ de vetores do V^3 é LD se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos (um é múltiplo do outro). Caso contrário, $(\vec{u},\ \vec{v})$ é LI. Note que dois vetores do espaço sempre são coplanares (situados em um mesmo plano), podendo ser paralelos ou não. Na figura 10 $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BG})$ é LI e $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC})$ é LD, por exemplo.

c. Uma sequência $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ de vetores de V^3 é LD se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares (situados em um mesmo plano). Caso contrário a sequência $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ é LI. Observe que, como dois vetores, não paralelos, sempre são coplanares, podemos ter o terceiro vetor no mesmo plano, ou não. Se ele estiver contido no mesmo plano dos outros dois, qualquer combinação linear dos três vetores resultará em um vetor no mesmo plano e, portanto, não poderá gerar qualquer vetor do espaço. Por outro lado, se o terceiro vetor não estiver contido no mesmo plano que os outros dois, podemos gerar qualquer vetor do espaço.

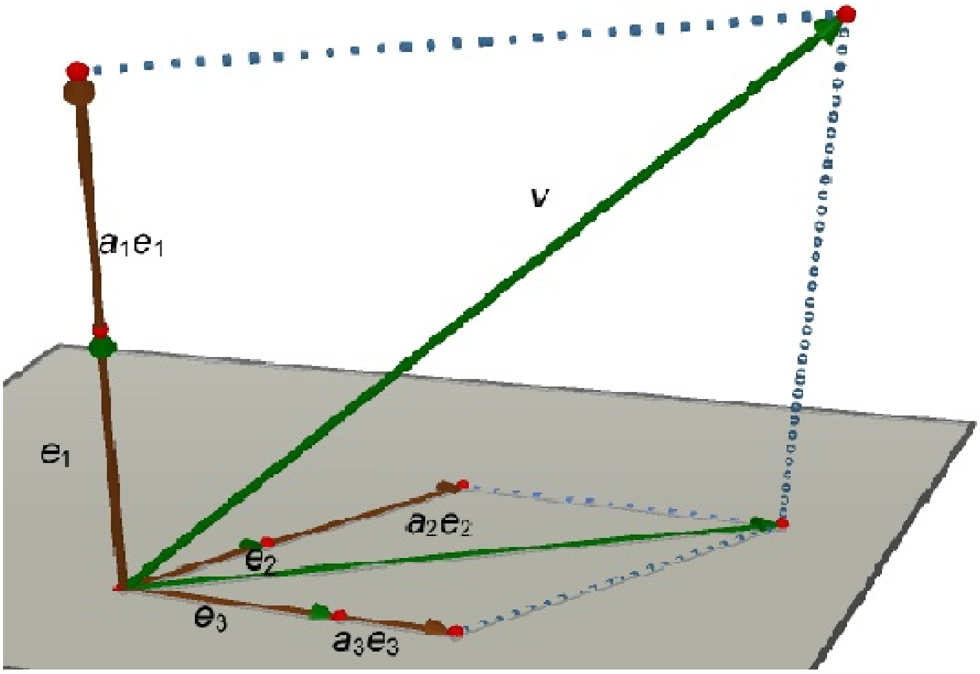
d. Qualquer outra sequência com quatro, ou mais, vetores de V^3 é LD.
Assim, se $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ é LI, todo vetor $\vec{x} \in V^3$, é gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isso quer dizer que para todo $\vec{x} \in V^3$ existem os números reais α, β e γ tais que $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Em outras palavras, $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Definição 2

Chama-se **base** de V^3 qualquer terna ordenada img align="middle" alt="E equals open parentheses stack e subscript 1 with rightwards arrow on top comma space stack e subscript 2 with rightwards arrow on top comma space stack e subscript 3 with rightwards arrow on top close parentheses" class="Wirisformula" data-mathml="$E = (\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$" src="http://moodle2014.pucsp.br/lib/editor/tinymce/plugins/tiny_mce_wiris/integration/showimage.php?

formula=02e6907c69e25c52f24e01c974e1c143.png" /> que seja linearmente independente. Como todo vetor $\vec{v}$ de V^3 pode ser gerado por $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, isto é, para todo $\vec{v} \in V^3$ existem escalares a_1, a_2, a_3 tais que $\vec{v} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$. No espaço qualquer conjunto de três vetores que não sejam coplanares constitui uma base, como pode ser observado na figura 11.

Figura 11 - base



Todo vetor $\vec{v} \in V^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base: $\vec{v} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ onde $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ são os **componentes** de $\vec{v}$ em relação à base $E = (\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$. A notação utilizada para indicar que b_1, b_2, b_3 são componentes de $\vec{v}$ na base E é: $\vec{v} = (b_1,\ b_2,\ b_3)_E$. Reciprocamente, dada uma terna $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ de números reais, existe um único vetor cujas componentes são a_1, a_2, a_3 em relação à base E.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

1.2.2 Vetores

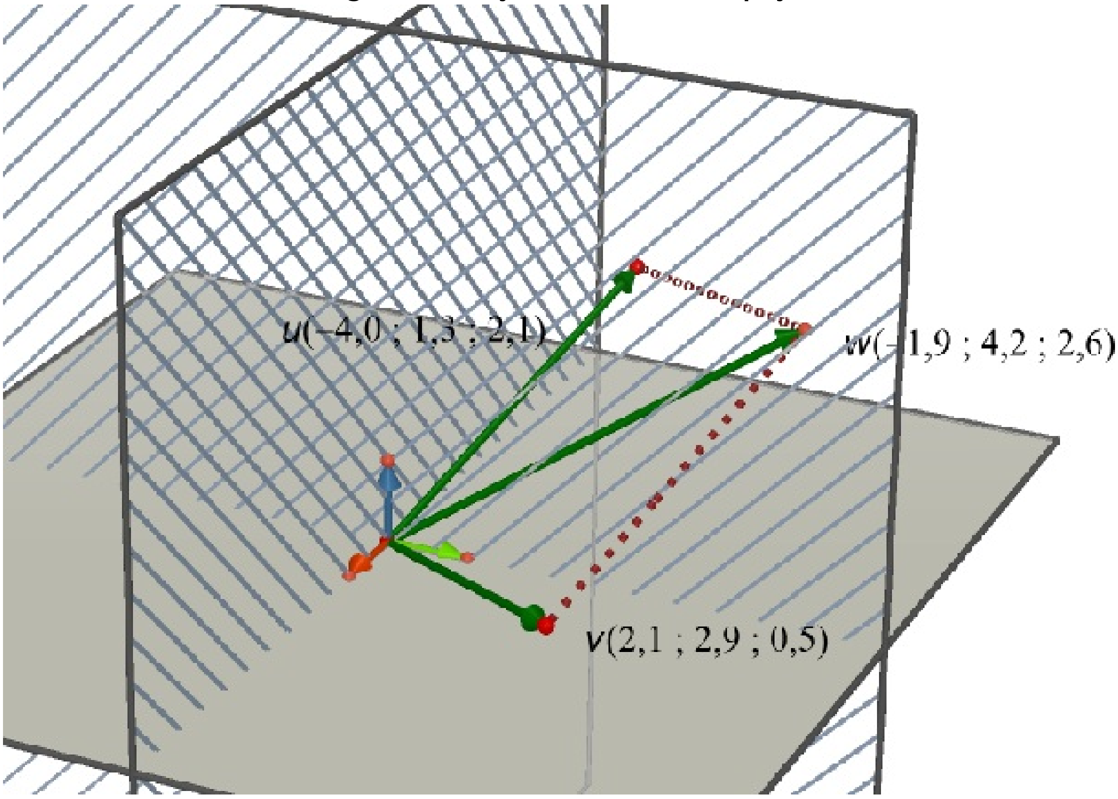
a) Igualdade de vetores

Dois vetores $\vec{u} = (a_1,\ a_2,\ a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1,\ b_2,\ b_3)_E$ são iguais se, e somente se, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$.

b) Adição de vetores

Se $\vec{u} = (a_1,\ a_2,\ a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1,\ b_2,\ b_3)_E$ então $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$. Para a adição de vetores, em Geometria Analítica vale a relação de Chasles e a regra do paralelogramo já estudadas, como mostra a figura 12.

Figura 12 - adição de vetores no espaço



c) Multiplicação por escalar

Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (a_1,\ a_2,\ a_3)_E$ então $\lambda\vec{u} = (\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3)_E$.

Proposição 1

Dados os vetores $\vec{u} = (a_1,\ a_2,\ a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1,\ b_2,\ b_3)_E$, $(\vec{u},\ \vec{v})$ é LD se, e somente se, $a_1,\ a_2,\ a_3$ são proporcionais a $b_1,\ b_2,\ b_3$, isto é: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Proposição 2

Dados os vetores $\vec{u} = (a_1,\ a_2,\ a_3)_E$, $\vec{v} = (b_1,\ b_2,\ b_3)_E$ e $\vec{w} = (c_1,\ c_2,\ c_3)_E$ em relação a uma determinada base E, $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ é LI se, e somente se: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Definição 3

1. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** se um deles é nulo ou admitirem representantes perpendiculares.

2. Uma base é ortogonal quando seus vetores são dois a dois ortogonais.

3. Uma base $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ é **ortonormal** quando os seus vetores são dois a dois ortogonais e unitários.
   Assim, para passar de uma base ortogonal para uma base ortonormal basta calcular o versor de cada vetor da base ortogonal. Esse processo é chamado de **ortonormalização** de uma base.

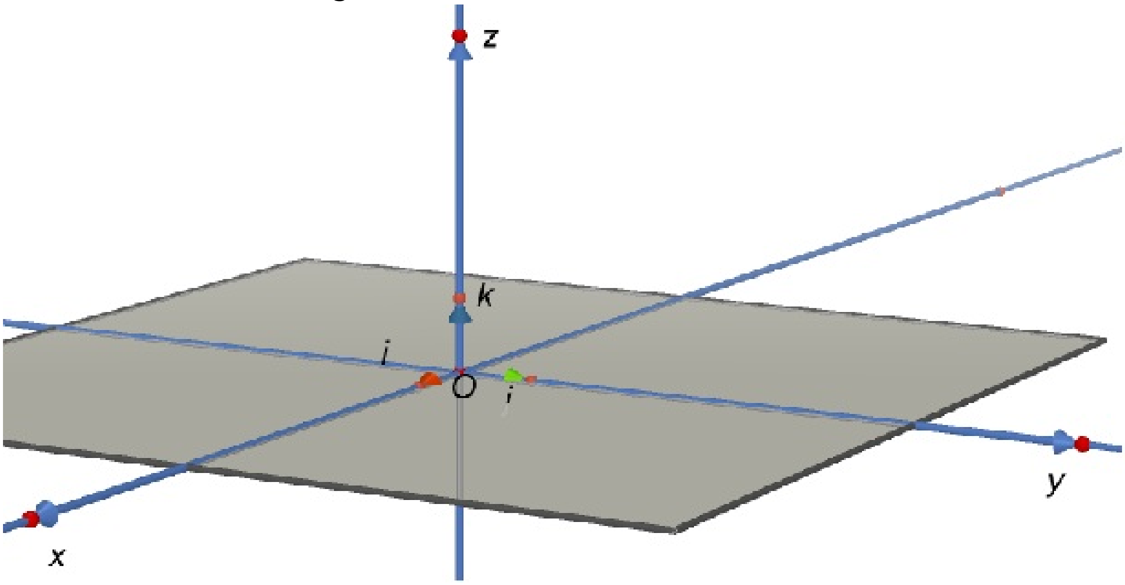
Sistema de Coordenadas

No espaço um sistema referencial é formado por um ponto O qualquer do espaço e por uma base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\right)$ e representamos por $\left(O,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\right)$, o ponto O é denominado origem do sistema.

O sistema $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ é chamado **sistema cartesiano ortonormal.**

Nesse sistema a reta com a direção do versor $\vec{i}$ é o eixo das abscissas, a reta com a direção do versor $\vec{j}$ é o eixo das ordenadas e a reta com a direção do versor $\vec{k}$ é o eixo das cotas, como mostra a figura 13.

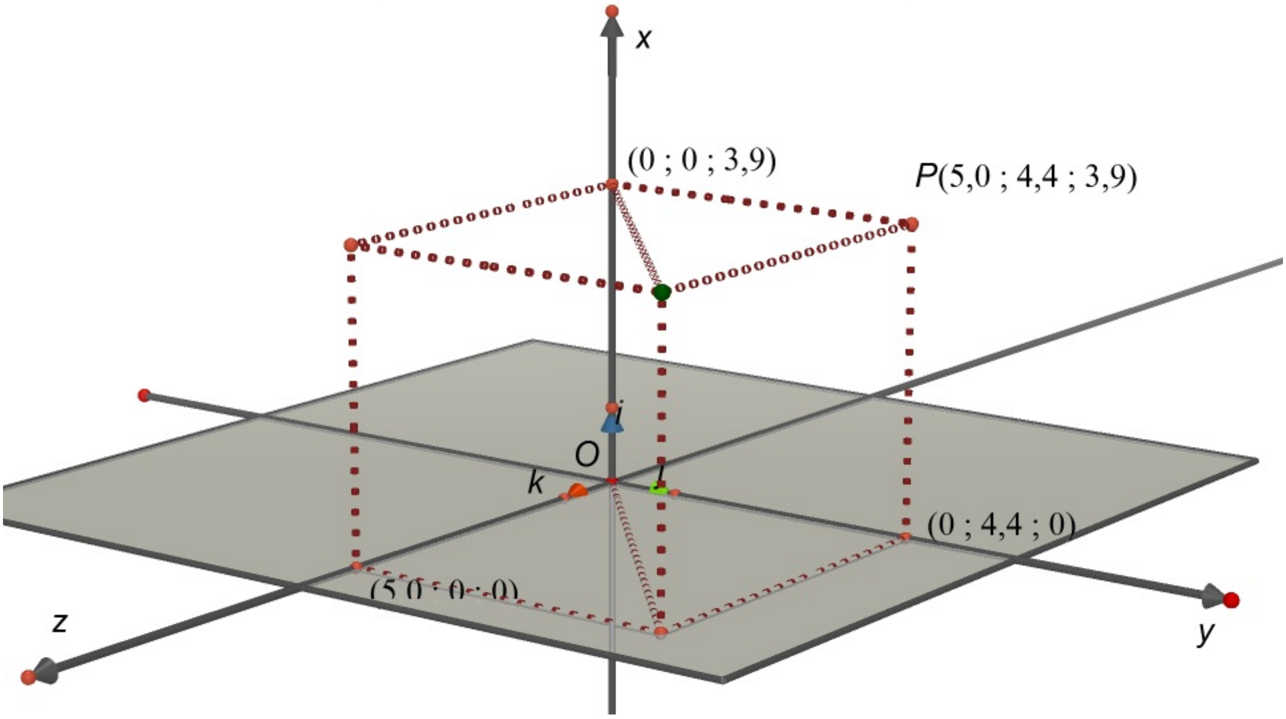
Figura 13 - sistema cartesiano ortonormal



Coordenadas de um ponto

Pata todo ponto P do espaço temos que $\overrightarrow{OP} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ onde $\left(a,\ b,\ c\right)$ são as coordenadas do ponto P nesse sistema. Considerando o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$, $\left(a,\ b,\ c\right)$ são as componentes do vetor posição de P. Observe a figura 14.

Figura 14 - coordenadas de um ponto do espaço



Vetor definido por dois pontos

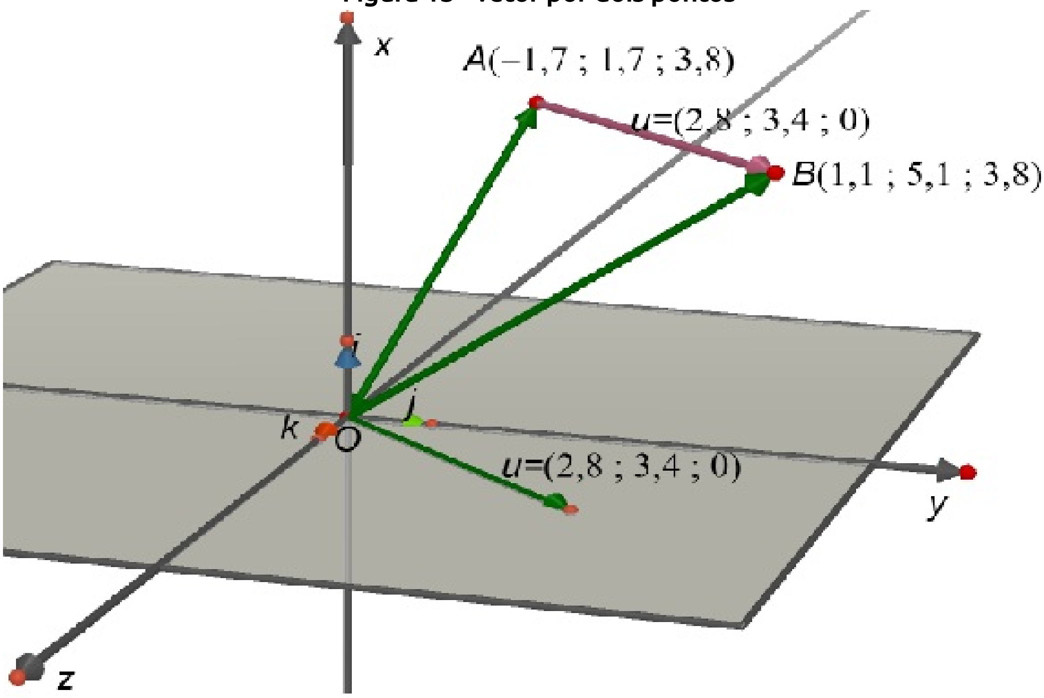
Dados os pontos $A = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ e $\vec{B} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, como mostra a figura 15, temos que $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \ \overrightarrow{AB}$ (relação de Chasles) ou que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, isto é:

vamos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$. Observe na figura 16 que $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \ \overrightarrow{AB}$ (pelo fechamento do triângulo) ou que $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \ \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ =

$$\overrightarrow{AB} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} - \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}$$

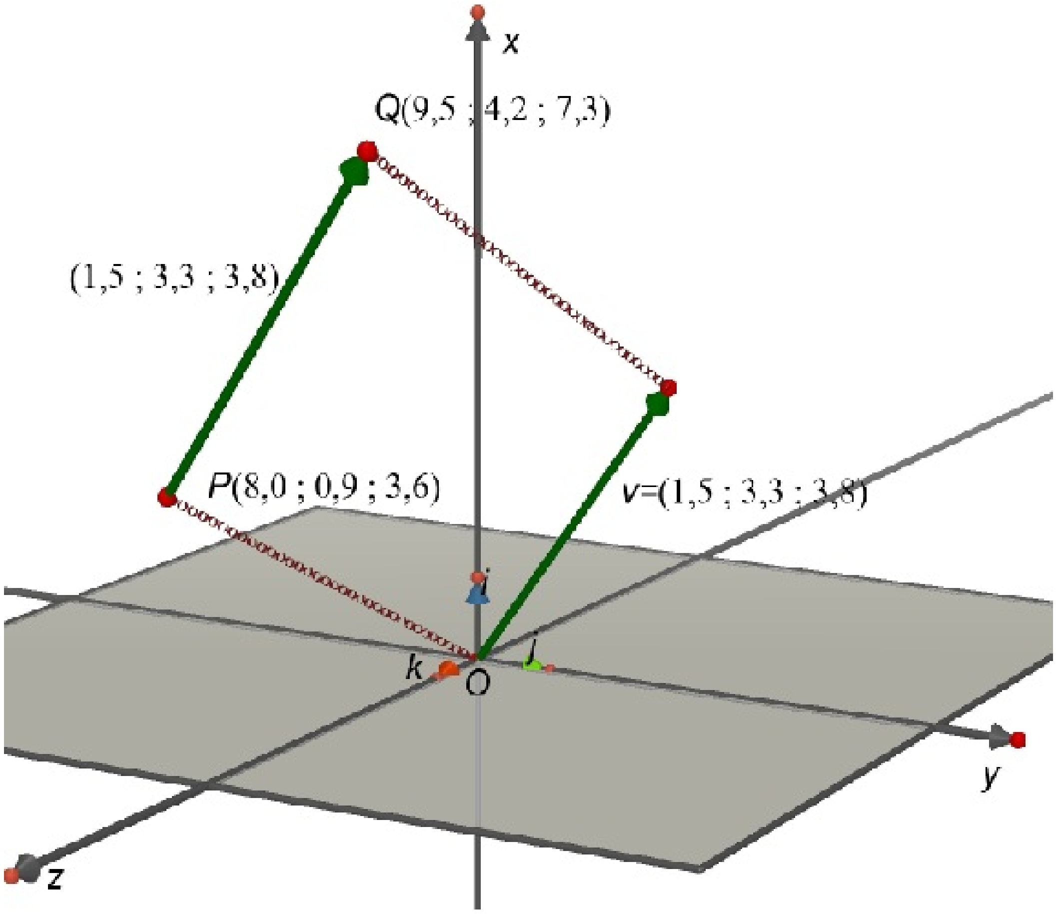
Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$

Figura 15 - vetor por dois pontos



Dessa forma, dado um vetor $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\vec{k} \ = (a,\ b,\ c)$ e um ponto $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$ existe um ponto Q tal que $\overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ sendo $Q(a + x_1,\ b + y_1,\ c + z_1)$, como mostra a figura16.

Figura 16 - ponto e vetor

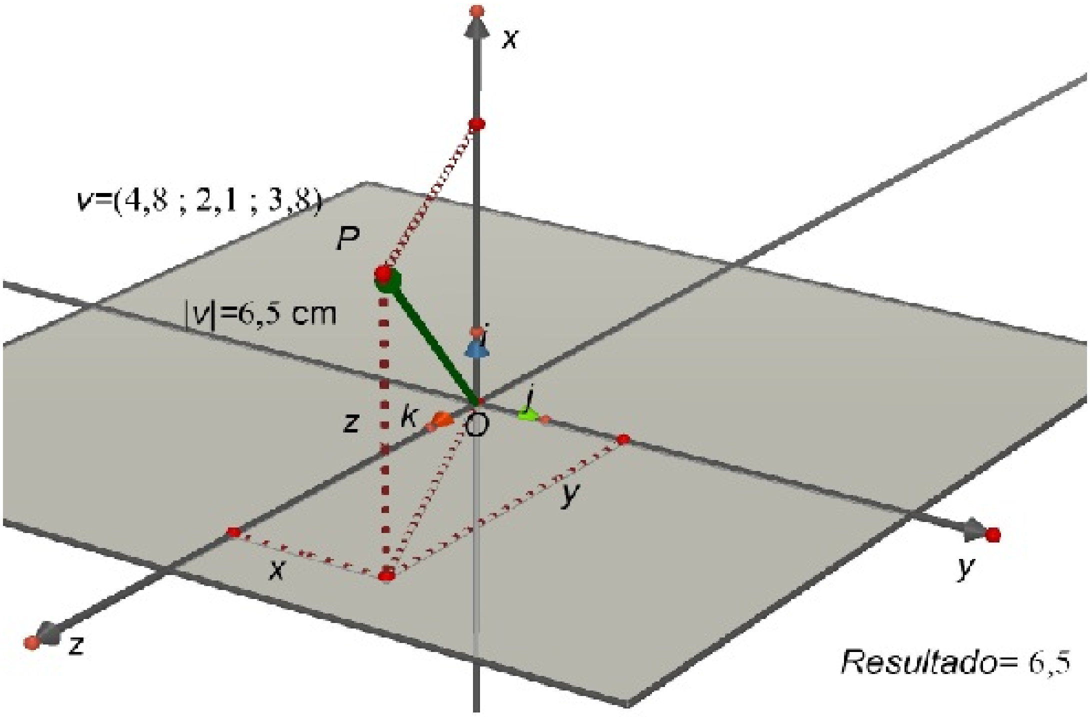


Módulo de um vetor

Se $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ é a base ortonormal usual e $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ então utilizando o teorema de Pitágoras, como podemos ver na figura 17, temos que $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Observação: O módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é definido como a distância entre os pontos A e B.

Figura 17 - módulo de vetor



Observação:O módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é definido como a distância entre os pontos A e B.

Proposição 3

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

*****O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

Exercícios de familiarização

Exercício 1

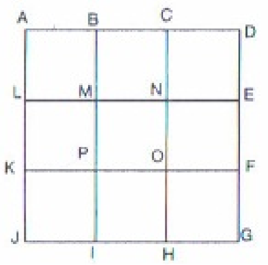
Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ determine o vetor $\vec{x}$ tal que:

a. $-\dfrac{\vec{x}-\vec{a}}{2}=\dfrac{\vec{b}-2\vec{x}}{3}$

b. $\dfrac{2\vec{x}}{3}-2(\vec{x}+\vec{a})-\vec{b}=\dfrac{\vec{a}-\vec{x}}{2}$

Exercício 2

A figura abaixo é constituída de nove quadrados congruentes. Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações justificando sua resposta.



a. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OF}$

b. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PH}$

c. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OF}$

d. $\overrightarrow{BL}=-\overrightarrow{MC}$

e. $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{ED}$

f. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{MG}$

g. $\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{FI}$

h. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HI}$

i. $\overrightarrow{JO}//\overrightarrow{LD}$

j. $\overrightarrow{AJ}//=\overrightarrow{FG}$

k. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{EG}$

l. $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BL}$

m. $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{EC}$

n. $\overrightarrow{PN}\perp\overrightarrow{NB}$

o. $\overrightarrow{PN}\perp\overrightarrow{AM}$

p. $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{FP}|$

q. $|\overrightarrow{IF}|=|\overrightarrow{MF}|$

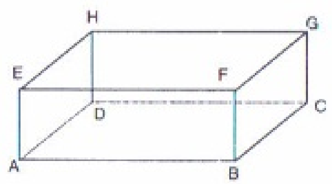
r. $|\overrightarrow{AJ}|=|\overrightarrow{AC}|$

s. $|\overrightarrow{AO}|=2|\overrightarrow{NP}|$

t. $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BL}|$

Exercício 3

A figura abaixo representa um paralelepípedo retangulo. Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.



a. $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BF}$

b. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{HG}$

c. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CG}$

d. $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BC}$

e. $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{HF}|$

g. $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{ED}$

h. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ são coplanares

i. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ são coplanares

j. $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{HF}$ são coplanares

l. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

m. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

n. $\overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC

o. $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao plano BCG

f. $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{DF}|$ k. $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{FG}$ são coplanares p. $\overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF

Exercício 4

Com base na figura do exercício 2 determine os vetores

a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ g. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AN}$

b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ h. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OE}$

c. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ i. $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$

d. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$ j. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{NP}$

e. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EO}$ k. $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF}$

f. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BL}$ l. $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$

Exercício 5

Utilizando a figura da atividade 3 determine os vetores

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

b. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$

c. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH}$

d. $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC}$

e. $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

f. $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB}$

g. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

h. $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FH}$

Exercício 6

Dados $\vec{u} = (2,\ -1,\ 1)$, $\vec{v} = (5,\ 0,\ 2)$ e $\vec{w} = (1,\ 2,\ 0)$ verifique se:

a. a) $(\vec{u},\ \vec{v})$ é LI

b. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos

c. $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ forma uma base

Exercício 7

Sejam os vetores $\vec{u} = (2,\ 1,\ 3)$, $\vec{v} = (0,\ 1,\ -1)$ e $\vec{w} = (4,\ 5,\ 3)$

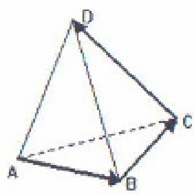
a. calcule $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$

b. Determine m e n de modo que $m\vec{u} + n\vec{v} = \vec{w}$

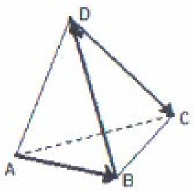
Exercício 8

Determine a soma dos vetores indicados na figura nos seguintes casos:

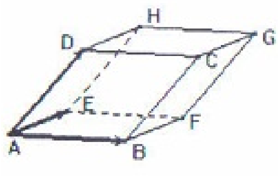
A



B

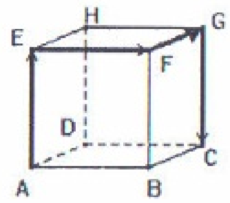


C



(paralelepípedo)

D



Exercício 9

Mostre que se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ então $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

Exercício 10

Dados $A(4,\ 4,\ 4)$ e $B(3,\ 3,\ 5)$ determine:

a. o módulo de $\overrightarrow{AB}$ e o módulo de $\overrightarrow{BA}$

b. o versor do vetor $\overrightarrow{AB}$

c. a distância entre A e B.

Avaliação 1 - estudo de vetores

O próximo passo é resolver os exercícios que preparamos para esse tópico. Clique na atividade para acessá-la e resolver os exercícios propostos.

Avaliação 1

Responda às questões propostas.

Dúvidas

Dúvidas e outras questões poderão ser esclarecidas por meio do Fórum de dúvidas.