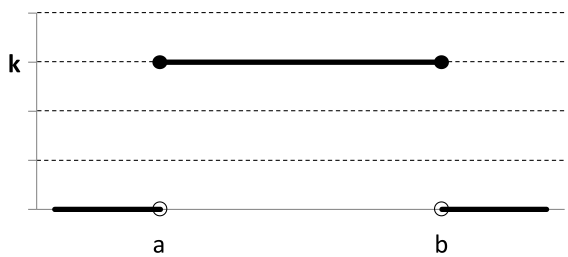
Modelo Uniforme Contínuo

Dentre os modelos de variáveis contínuas, o mais simples é o Uniforme. A diferença deste com o Uniforme Discreto é que a variável pode assumir qualquer valor real em um determinado intervalo.

Sendo X uma v.a.c. tal que a função densidade de probabilidades é dada por:

$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} k\,, & a\leq x\leq b \\ 0\,, outros\ valores \end{cases}}$, dizemos que X tem distribuição Uniforme contínua no intervalo $[a\,,b]$ e representamos por: $\boldsymbol{X\sim U_{[a,b]}}$. A representação gráfica dessa função é:



Como a área sob a curva deve ser um, temos que $k=\frac{1}{b-a}$

Dessa forma, a lei da função densidade de probabilidades é:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,, & a\leq x\leq b \\ 0\,, outros\ valores \end{cases}}$$

Lembrando que o valor esperado de uma variável corresponde ao equilíbrio dos valores, ponderado pelas probabilidades, temos que $\boldsymbol{E(X)=\frac{a+b}{2}}$

Para o cálculo de $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$, temos que: $\boldsymbol{Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}}$ e, $\boldsymbol{DP(X)=\frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)=$$

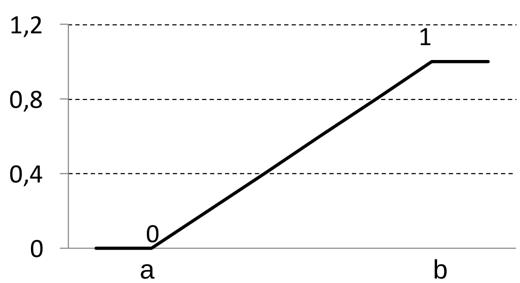
$$=\frac{(b-a)\,(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}=\frac{(b^2+ab+a^2)}{3}$$

Assim, $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b^2+ab+a^2)}{3}-\left[\frac{a+b}{2}\right]^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

A função distribuição de probabilidades acumulada (ou, função repartição) de $\boldsymbol{X\sim U_{[a,b]}}$ é: $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0\,,1]\subset\mathbb{R}$, definida por: $F(t)=P(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx$ (área acumulada até t). Assim, teremos:

$$F(t)=\begin{cases} 0\,, & se\ \boldsymbol{t\leq a} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_a^t\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^t dx=\frac{1}{b-a}\,x|_a^t=\frac{t-a}{b-a}\,, & se\ \boldsymbol{a}<t<b \\ 1\,, & se\ \boldsymbol{t\geq b} \end{cases}$$



Exercícios

1. A função densidade de probabilidade do tempo requerido (em segundos) para completar uma operação de montagem é dada por: $f(t) = k$, se $30 \leq t \leq 40$ e zero para outros valores.

(a) Determine o valor da constante *k*.

(b) Determine a proporção de montagem que requer mais de 38 segundos para ser completada.

(c) Que tempo é excedido por 90% das montagens?

(d) Determine o tempo médio de montagem e o desvio padrão.

(e) **U**sando a função distribuição acumulada, determine a probabilidade do tempo de montagem estar entre 33 e 38 segundos.

2. Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10 quilômetros, isto é, pode-se admitir que a ocorrência de pane se distribua uniformemente ao longo da rede elétrica desde sua origem até o final dos 10 quilômetros. O custo para conserto na rede depende da distância em que a pane ocorre, a partir da origem da rede. Considere que o custo é de 75 u.m. (unidades monetárias), quando a pane ocorre nos primeiros 1.500 m da rede, de 160 u.m., quando a pane ocorre nos próximos 3 km, de 340 u.m., quando a pane ocorre nos próximos 4 km e de 430 u.m., quando a pane ocorre nos quilômetros finais da rede. Nessas condições, determine o custo médio de conserto na tal rede elétrica.

3. A espessura de um filme foto resistente aplicado a pastilhas na fabricação de semicondutores em certa localização na pastilha pode ser considerada uma v.a.c. X, uniformemente distribuída entre 0,2050 e 0,2150 micrômetro.

(a) Que espessura é excedida por 10% das pastilhas?

(b) Determine a média e o desvio padrão da espessura do filme foto resistente.

(c) Determine a função distribuição acumulada de probabilidades da variável espessura do filme e determine: $P(X \geq 0{,}21)$ e $P(0{,}204 \leq X < 0{,}209)$.

4. A temperatura T (em ºC) de destilação do petróleo é crucial para a determinação da qualidade final do produto. Suponha que T possa ser considerada uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [150,300]. Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo seja 250 u.m. (unidades monetárias). Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a 200ºC, o produto é vendido a 520 u.m. e se a temperatura for superior a 200ºC, o produto é vendido a 670 u.m.

(a) Faça a representação gráfica da função densidade de probabilidades da variável T.

(b) Calcule o lucro médio por galão.

(c) Calcule o desvio padrão do lucro por galão.

(d) Determine a função distribuição acumulada de probabilidades da v.a. T e determine: $P(X > 200)$ e $P(180 < X < 290)$.