Resumo Geometria Analítica

Estudo da Reta

Considere um vetor no espaço. Este vetor determina uma direção no espaço, o que significa que existem infinitas retas paralelas no espaço que têm a mesma direção deste vetor. No entanto, dado um ponto no espaço, existe uma *única reta* passando por este ponto e que tem a mesma direção deste vetor.

Reta: Conjunto de pontos **P** que possui a mesma direção do **vetor diretor (v)** e passa pelo ponto **A**.

Equação vetorial

$$P = A * t * (\overline{v})$$
$$(x, y, z) = (x0, y0, z0) + t(a, b, c)$$

Os pontos pertencentes à reta são obtidos variando o parâmetro t.

Ex. Equação vetorial da reta r que possui como vetor diretor v = (3,5,9) e passa pelo ponto A = (-8, 5, 2)

r: (x,y,z) = (-8, 5, 2) + t * (3, 5, 9)

Equação paramétrica

Na equação paramétrica, separa-se os valores individuais das coordenadas x, y, z a partir da equação vetorial.

x = x0 + t*a
y = y0 + t*b
z = z0 + t*c

Ex. Equação paramétrica da reta r : (x, y, z) = (-8, 5, 2) + t * (3, 5, 9)

r: x = -8 + 3t
y = 5 + 5t
z = 2 + 9t

Os coeficientes do parâmetro são as coordenadas do vetor diretor

Equação simétrica

Na equação simétrica, coloca-se as equações paramétricas em função do parâmetro e todas são igualadas.

t = (x - x0)/a
t = (y - y0)/b
t = (z - z0)/c

$$\frac{(x-x0)}{a} = \frac{(y-y0)}{b} = \frac{(z-z0)}{c}$$

Ex. Equação simétrica da reta anterior.

$$\frac{(x-8)}{3} = \frac{(y-5)}{5} = \frac{(z-2)}{9}$$

Os denominadores são as coordenadas do vetor diretor

Ângulo entre duas retas

O ângulo θ formado por duas retas é o mesmo formado pelos vetores diretores (*u* e *v*) das mesmas.

$$cos\ \theta = \frac{|u * v|}{|u| * |v|}$$

Sendo |u * v| o produto escalar dos vetores u e v, calculado da seguinte forma:

$$|u * v| = (x_u * x_v) + (y_u * y_v) + (z_u * z_v)$$

Se $|u * v| = 0$, as retas são ortogonais (perpendiculares/90º)

E sendo |u| o módulo do vetor u, calculado da seguinte forma:

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como achar a reta que passa por dois pontos

Dados dois pontos M e N, a reta que passa por estes dois pontos tem como vetor diretor o próprio vetor $\overline{MN}$ e como ponto "A" da equação, o ponto M.

$$P = M + t * (\overline{MN})$$

Sendo $\overline{MN} = N - M = (x_n - x_m\ ; y_n - y_m ; z_n - z_m)$

Posição Relativa de Retas

Dadas duas retas no espaço, existem 4 possibilidades para as suas posições relativas:

- retas coincidentes (todos os pontos são iguais) ;
- retas concorrentes (possuem um único ponto como intersecção);
- retas reversas (não estão no mesmo plano, não se intersectam);
- retas paralelas(estão no mesmo plano, não se intersectam);

Como descobrir a posição relativa de duas retas

- Sendo as retas r e s, encontrar o vetor diretor de cada uma delas ($\bar{r}$ $\bar{s}$)
- Verificar se os vetores diretores das retas são paralelos, ou seja, se existe um número m tal que $\bar{r} = m * \bar{s}$

- *Se os vetores forem paralelos,* as retas podem ser coincidentes ou paralelas e, nesse caso, deve-se checar se um ponto A de r pertence à s.
    - Para tal, pega-se o ponto A da equação vetorial da reta r, e aplica-o na equação da reta s. Se a equação for válida as **retas são coincidentes**, se for falsa, as **retas são paralelas.**

- *Se os vetores não forem paralelos*, as retas podem ser reversas ou concorrentes e, nesse caso, deve-se verificar se há um ponto de intersecção entre elas;
    - Para tal, monta-se um sistema com 3 equações e 2 icógnitas igualando cada uma das equações paramétricas das duas retas e resolvendo-o para encontrar o valor dos parâmentros (t e h);
    - Neste processo, encontra-se uma solução para o sistema usando 2 das equações, e depois testa-se este resultado na terceira.
    - Se a solução não for válida na terceira equação, as retas não possuem ponto de intersecção e são **reversas**.
    - Se a solução for válida, as retas possuem um ponto de intersecção e são **concorrentes**;
    - Para achar este ponto de intersecção, basta substituir o valor de t ou h nas equações paramétricas da reta correspondente.

Intersecções

- Retas paralelas : $r // s \mid r \cap s = \oslash$
- Retas coincidentes: $r = s \mid r \cap s = r = s$
- Retas reversas: $r \cap s = \oslash$
- Retas concorrentes: $r \cap s = \{P\} = (x, y, z)$

Estudo do Plano

Conjunto de pontos *P* formado pelo plano que abrange dois vetores diretores ($\overline{u}$ e $\overline{v}$) e um ponto (*A*).

Equação vetorial

$$P = A + t * (\overline{u}) + h * (\overline{v})$$
$$P = (x0, y0, z0) + t * (e, f, g) + h * (p, q, r)$$

Os pontos pertencentes ao plano são obtidos variando os parâmetros t e h.

Ex. Equação vetorial do plano π que passa pelo ponto (1, 2, 3) e tem como vetores diretores (4, 5, 6) e (7, 8, 9).

P = (1, 2, 3) + t * (4, 5, 6) + h * (7, 8, 9)

Equação paramétrica

Assim como nas retas, as equações paramétricas do plano são obtidas separando individualmente os valores de cada coordenada a partir da equação vetorial.

$$x = x0 + t * e + h * p$$
$$y = y0 + t * f + h * q$$
$$z = z0 + t * g + h * r$$

Ex. Equações paramétricas do plano π que possui a equação vetorial
P = (1, 2, 3) + t * (4, 5, 6) + h * (7, 8, 9).

x = 1 + 4t + 7h
y = 2 + 5t + 8h
z = 3 + 6t + 9h

Os coeficientes dos parâmetros são as coordenadas dos vetores diretores

Vetores normais

Vetores perpendicular ao plano π, da forma n = (a * i ; b * j ; c * i) e calculados através do produto vetorial dos vetores diretores ($\overline{u}$ e $\overline{v}$) de π .

Este produto vetorial pode ser obtido através do cálculo do determinante da matriz formada pelos parâmetros (i, j, k), o primeiro vetor diretor $\overline{u}$ (e, f, g) e o segundo vetor diretor $\overline{v}$ (p, q, r).

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ e & f & g \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Um jeito fácil de se calcular os coeficientes de i, j, k é, para cada um deles, eliminar a linha e a coluna na qual o parâmetro está contido e fazer o determinante de uma matriz 2x2 com o restante. <u>Lembrando que o coeficiente do j terá o sinal trocado.</u>

Determinante 2x2 = Produto da diagonal principal (\ ) - Produto da diagonal secundária (/)

Ex. Vetor normal do plano π P = (1, 2, 3) + t * (4, 5, 6) + h * (7, 8, 9)

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a * i - b * j + c * k$$

a = (5*9) - (6*8) = -3
b = (4*9) - (6*7) = -6
c = (4*8) - (5*7) = -3

$\overline{n}$ = (-3i , +6j , -3k)

Ou seja, os vetores normais do plano π são da forma (-3i, 6j, -3k).
Igualando todos os parâmetros à 1, temos que um destes vetores é (-3, 6, -3).

Equação Geral do Plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

Formulada através do vetor normal do plano.
Os coeficientes de x, y, z são os mesmos coeficientes de i, j, k encontrados através do produto vetorial.

Para encontrar o valor de d ao final, basta substituir o valor de um ponto qualquer que esteja contido no plano (normalmente, o ponto A da equação vetorial) na equação e resolvê-la.

Ex. Equação geral do plano π P = (1, 2, 3) + t *(4, 5, 6) + h * (7, 8, 9)

Como já foi resolvido anteriormente, o vetor normal deste plano é da forma (-3i, 6j, -3k), logo sua equação geral será:

-3x + 6y -3z + d = 0

Aplicando o ponto A (1, 2, 3) na fórmula, temos:

(-3)*1 + 6 * 2 + (-3)*3 + d = 0
-3 + 12 - 9 + d = 0
d = 0 *\/*coincidência, d nem sempre dá zero*\/*

Logo,
-3x + 6y -3z + 0 = 0

Como encontrar a equação do plano que passa por 3 pontos

Dados 3 pontos não colineares M, N, O, para encontrar a fórmula do plano que passa por todos, basta escolher um dos pontos para ser o ponto “A” da equação vetorial e os vetores diretores serão o vetores formados pela junção deste com os demais pontos.

Por exemplo, fixando-se o ponto M como “A”, temos que os vetores diretores serão $\overline{MN}$ e $\overline{MO}$.

$$P = M + t * (\overline{MN}) + h * \overline{MO}$$
$$P = M + t * (N - M) + h * (O - M)$$

Posição Relativa Reta x Plano

Dados uma reta e um plano, existem 3 possibilidades para as suas posições relativas:

- reta é paralela ao plano (não possuem ponto em comum);
- reta está contida no plano (todos os pontos da reta pertencem também ao plano)
- reta é concorrente ao plano (possuem um ponto em comum)

Como descobrir a posição relativa entre uma reta e um plano

- Dados a reta r e o plano π, encontrar o vetor diretor $\overline{u}$ de r e o vetor normal $\overline{n}$ de π;
- Calcular o produto escalar entre $\overline{u}$ e $\overline{n}$;

- *Se o produto escalar for igual a zero*, a reta pode estar contida ou ser paralela ao plano. Nesse caso, testa-se se um ponto qualquer de r (normalmente o ponto A de sua equação vetorial) satisfaz a equação de π;
    - Se o ponto A satisfazer a equação de π, a reta está **contida** no plano;
    - Se o ponto A não satisfazer a equação de π, a reta é **paralela** ao plano;

- *Se o produto escalar for diferente de zero,* a reta é **concorrente** ao plano, e, se solicitado, deve-se encontrar o ponto de intersecção entre eles.
    - Para tal, pode-se substituir as equações paramétricas de r nas equações paramétricas de π e encontrar a solução do sistema para t e h;
    - Substituindo os valores de t e h nas equações, encontra-se as coordenadas do ponto de intersecção entre r e π.

Intersecções

- Retas paralela ao plano : $r \,//\, \pi \mid r \cap \pi = \oslash$
- Retas contida no plano: $r \subset \pi \mid r \cap \pi = r$
- Reta concorrente ao plano: $r \cap \pi = \{P\} = (x, y, z)$