Modelo Uniforme Discreto

A fim de construirmos esse modelo, consideremos a seguinte situação: no lançamento de um dado (honesto), seja X a v.a.d. definida por: número de bolinhas da face superior. Nesse caso, temos:

Distribuição de probabilidades de X

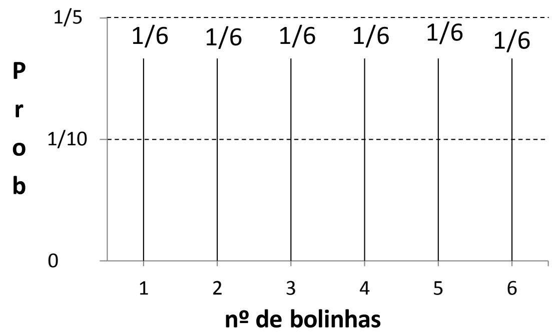
Por tabela:

X	1	2	3	4	5	6	total
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Por fórmula:

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \ , k = 1,2, \dots ,6$$

Por gráfico:



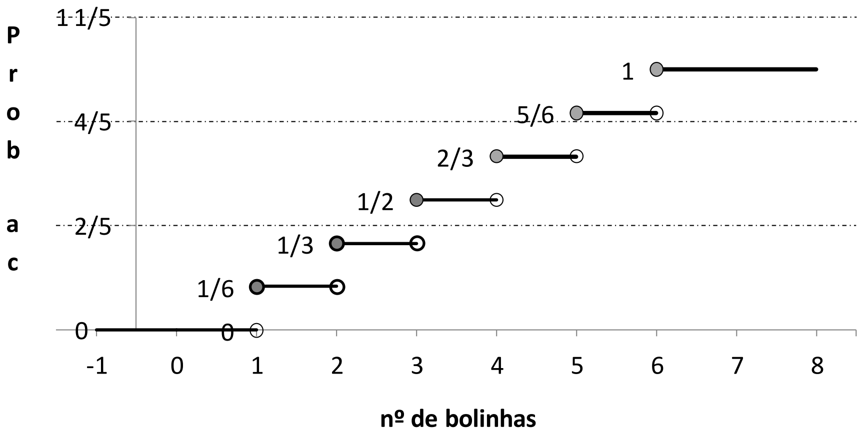
Distribuição de probabilidades acumulada de X (ou, repartição)

Por fórmula:

$F: \mathbb{R} \to [0\ ,1]$, definida por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 1 \\ {}^{1}/_{6} & se \quad 1 \le t < 2 \\ {}^{2}/_{6} & se \quad 2 \le t < 3 \\ {}^{3}/_{6} & se \quad 3 \le t < 4 \\ {}^{4}/_{6} & se \quad 4 \le t < 5 \\ {}^{5}/_{6} & se \quad 5 \le t < 6 \\ 1 & se \quad t \ge 6 \end{cases}$$ ou na forma: $$F(t) = \begin{cases} 0 & se & t < 1 \\ {}^{k}/_{6} & se & k \le t < k+1 \ para \ k = 1,2, \dots ,5 \\ 1 & se & t \ge 6 \end{cases}$$

Por gráfico:



Valor esperado de X (ou média, ou esperança):

$E(X) = \sum X \ P(X)$ Valendo-se da tabela, temos:

X	1	2	3	4	5	6	total
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
XP(X)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6

Assim, $E(X) = {}^{21}/_{6} = 3{,}5\ bolinhas$

Considerando que o valor esperado é ponto de equilíbrio dos valores da variável X, ponderados pelas probabilidades, e que essas probabilidades são iguais, temos que o valor esperado de X é o ponto médio do intervalo dos valores da variável, ou seja, $[1{,}6]$. Portanto,

$$E(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ bolinhas$$

Variância de X:

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ Valendo-se da tabela, temos:

X	1	2	3	4	5	6	total
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
XP(X)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6
X^2 P(X)	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	91/6

Assim, $Var(X) = {}^{91}/_{6} - (3{,}5)^2 = {}^{35}/_{12}\ (bolinhas)^2$

Desvio padrão de X:

$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{{}^{35}/_{12}} \cong 1{,}707825\ bolinhas$

Essa variável aleatória discreta diz-se ter Distribuição Uniforme no intervalo $[\mathbf{1},\mathbf{6}]$, que representamos por: $\boldsymbol{X \sim U_{[1,6]}}$

Generalização desse Modelo: $\boldsymbol{X \sim U_{[1,n]}}$

Essa variável assume, então, os valores: $1, 2, \dots, n$. Como as probabilidades são todas iguais, a **distribuição de probabilidades**, por meio de fórmula, será dada por:

$$P(X = k) = \frac{1}{n}\ ,\ k = 1, 2, 3, \dots, n$$

A **função repartição**, por fórmula, será dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \quad se & t < 1 \\ {}^{k}/_{n} \quad se & k \le t < k+1\ para\ k = 1,2,\dots,n-1 \\ 1 \quad se & t \ge n \end{cases}$$

Valor esperado de X (que é o ponto médio do intervalo: $[\mathbf{1}, \boldsymbol{n}]$**:**

$\boldsymbol{E(X)} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n} = \frac{(1+n)n}{2\,n} = \boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$ No exemplo do dado: $\boldsymbol{\frac{n+1}{2}} = \frac{\mathbf{6+1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{3,5}$

Observação: utilizamos a soma dos n primeiros números inteiros, cuja demonstração é apresentada a seguir.

Sejam: $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$ e

$S = n + (n-1) + (n-2) + \ \ldots + 3 + 2 + 1$

Somando-se membro a membro essas igualdades, temos:

$$2S = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \ \ldots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)$$

$$2S = (1+n) + (1+n) + (1+n) + \ \ldots + (1+n) + (1+n) + (1+n)$$

$$2S = n(1+n) \Rightarrow S = \frac{(1+n)n}{2}$$

Variância de X:

$$\boldsymbol{Var(X)} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \ldots + \ n^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,n} - \frac{n^2+2n+1}{4} = \boldsymbol{\frac{n^2-1}{12}}$$

Nota: voltando ao exemplo do dado, se fizermos $n = 6$, obtemos:

$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}, \text{ como encontrado anteriormente.}$$

Observação: utilizamos a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros, cuja demonstração é apresentada a seguir.

Seja $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \ldots + \ n^2$. Para encontrar essa soma, usaremos um artifício:

$$(1+b)^3 = (1+b)\,(1+b)^2 = (1+b)(1^2 + 2b + b^2) = 1^3 + 3b + 3b^2 + b^3$$

Consideremos os seguintes cubos das somas:

$$2^3 = (1+1)^3 = 1 + 3 \times 1 + 3 \times 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (1+2)^3 = 1 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2 + 2^3$$

$$4^3 = (1+3)^3 = 1 + 3 \times 3 + 3 \times 3^2 + 3^3$$

....

$$(1+n)^3 = 1 + 3n + 3n^2 + n^3$$

Somando-se membro a membro essas igualdades, temos:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + \ \ldots + n^3 + (1+n)^3 =$$

$$= (1+1+1+\cdots+1) + 3(1+2+3+\cdots+n) + 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \ldots + \ n^2\right)$$

$$+ \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \ldots + \ n^3\right)$$

de onde se obtém:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + \ ... + n^3 + (1+n)^3 = n + 3\frac{(1+n)n}{2} + 3S + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + \ n^3$$

cancelando os termos iguais nos dois membros, temos:

$$(1+n)^3 = n + 3\frac{(1+n)n}{2} + 3S + 1^3$$

isolando a soma (S) que buscamos, temos:

$$S = \frac{2n^3 + n + 3n^2}{6} = \frac{n(2n^2 + 1 + 3n)}{6} = \frac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{6} = \frac{n[2n(n+1) + n + 1]}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Por exemplo: consideremos que um número inteiro é sorteado no intervalo $[1\,,10]$, ou seja, a v.a.d. X: número sorteado tem distribuição uniforme nesse intervalo: $X \sim UD_{[1\ ,10]}$. Assim, a distribuição de probabilidades, a função repartição, o valor esperado de X, a variância e o desvio padrão de X podem ser obtidos diretamente, usando as fórmulas que acabamos de obter.

Se $X \sim UD_{[1\ ,10]}$ então: $P(X = k) = \frac{1}{10}\ \ ,\ k = 1, 2, 3, ..., 10$

$$F(t) = \begin{cases} 0 \quad se & t < 1 \\ k/_{10} \quad se \quad k \leq t < k+1 \ para \ k = 1,2, ...,9 \\ 1 \quad se & t \geq 10 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$$

$Var(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{10^2-1}{12} = \frac{99}{12} = 8{,}25$ e $DP(X) = \sqrt{Var(X)} \cong 2{,}872281$

A função repartição pode ser utilizada para calcular probabilidades, como por exemplo:

$$P(3 < X < 8) = F(8) - F(3) - P(X = 8) = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} - [F(8) - F(7)] = \frac{5}{10} - \left[\frac{8}{10} - \frac{7}{10}\right] = \frac{4}{10}$$

$$P_{(X \leq 8)}(X > 5) = \frac{P(X > 5 \cap X \leq 8)}{P(X \leq 8)} = \frac{P(5 < X \leq 8)}{P(X \leq 8)} = \frac{F(8) - F(5)}{F(8)} = \frac{3}{8}$$

$$P(X > 8 \cup X \leq 3) = P(X > 8) + P(X \leq 3) - P(X > 8 \cap X \leq 3) =$$

$$= [1 - P(X \leq 8)] + F(3) - P(\emptyset) = [1 - F(8)] + F(3) - [0] = 1 - \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$$

Outro exemplo: Um número inteiro será sorteado, aleatoriamente, de 10 a 15. Sendo Z a variável aleatória discreta definida por: número sorteado aleatoriamente de 10 a 15, temos que $Z \sim UD_{[10\ ,15]}$. Isso significa que a distribuição de probabilidades da v.a.d. Z é dada por:

Z	10	11	12	13	14	15	total
P(Z)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Assim, para determinarmos E(Z) e Var(Z), basta observamos que se $X \sim UD_{[1\ ,6]}$ temos:

X	1	2	3	4	5	6	total
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Dessa forma podemos escrever que: $\boldsymbol{Z = X + 9}$

Assim, valendo-se da propriedade do valor esperado, temos:

$E(Z) = E(X + 9) = \frac{6+1}{2} + 9 = \frac{25}{2} = 12{,}5 = \frac{10+15}{2}$, já que o valor esperado é o ponto médio.

Podemos obter, também, a variância de Z : $Var(Z) = Var(X + 9) = Var(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$, como já era esperado, porque as duas variáveis: Z e X têm a mesma dispersão dos dados. Observe, ainda, que a variável Z assume 6 valores, ou seja, $n = 6$ e que, portanto, $Var(Z) = \frac{\boldsymbol{n^2-1}}{\boldsymbol{12}}$ vale.

A função repartição será dada por: $F(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 10 \\ \frac{(k-9)}{6} & se \quad k \le t < k+1 \ para\ k = 10, 11, \dots, 14 \\ 1 & se \quad t \ge 15 \end{cases}$

Exercícios

Exercício 1. Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem a maior probabilidade de ganhar?

Exercício 2. Sendo X uma variável seguindo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto {1, 2, 3, ..., 16}, pede-se:

a) distribuição de probabilidades de X, por fórmula;
b) valor esperado de X;
c) variância e desvio padrão de X;
d) distribuição de probabilidades acumulada (função repartição) de X, por fórmula;
e) as probabilidades a seguir, usando função acumulada:

I. $P[X \ge 7]$
II. $P[5 < X \le 13\,]$
III. $P[X < 6\ \cup\ X \ge 12]$
IV. $P[X \ge 5\ \cup\ X > 15]$
V. $P[X > 4\ \cap\ X < 11]$
VI. $P[X \le 13 | X \ge 5]$

Exercício 3. Uma manufatura deve escolher 1 funcionário por semana para fazer inspeção em suas máquinas antes de cada turno de trabalho. Nesse caso poderá haver repetição, ou seja, um mesmo funcionário pode ser escolhido em semanas consecutivas. Se há 8 funcionários nesse setor, qual é a probabilidade de algum funcionário ser escolhido para fazer a inspeção?