Tópico 3 - Estudo da reta

Tópico 3

Site:	[Moodle PUC-SP]
Curso:	2015.1 - Geometria Analítica (GA)
Livro:	Tópico 3 - Estudo da reta
Impresso por:	ANA LUIZA PORTELLO BASTOS
Data:	sábado, 11 Nov 2017, 03:02

Sumário

Tópico 1 Tópico 2 Tópico 3 Tópico 4 Tópico 5

Tópico 6 Tópico E

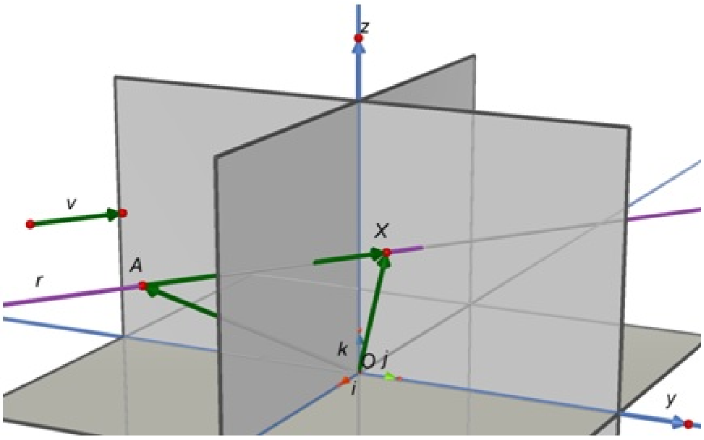
3. Estudo da reta

Neste tópico estudaremos os vários tipos de equações para retas no espaço: vetorial, paramétricas, simétrica ou normal e reduzida, bem como as relações entre elas.

3.1 Equação vetorial

Consideremos no espaço um sistema de coordenadas ortogonais $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ a reta r que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, como mostra a figura 28. O vetor $\vec{v}$ é denominado vetor diretor da reta r.

Figura 28 - reta no espaço



Para que um ponto *X* do espaço pertença à reta r é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\vec{v}$ sejam linearmente dependentes. Assim, para cada *X* tomado na reta teremos um vetor $\overrightarrow{AX}$. Fixando um desses pontos X, podemos dizer que o vetor $\overrightarrow{AX}$ e o vetor $\vec{v}$ têm mesma direção, logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v}$. Dessa forma, para cada ponto *X* da reta r tem-se um valor para λ e quando λ percorre o conjunto dos números reais, o ponto *X* percorre a reta r.

Como $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$ então da equação $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v}$ vem que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ é a equação da reta na **forma vetorial.**

Exemplo 1

A equação vetorial da reta que passa por $A(1,\ 1,\ 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2,\ 3,\ 4)$ é dada por $\overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 1) + \lambda(2,\ 3,\ 4)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fazendo $\lambda = -2$, por exemplo, teremos o vetor $\overrightarrow{OX} = (-3,\ -5,\ -7)$ com o ponto $X(-3,\ -5,\ -7)$ pertencente a reta r. Se fizermos $\lambda = 4{,}3$, por exemplo, obteremos o ponto $X(9{,}6;\ 13{,}9;\ 18{,}2)$ que também pertence a reta r.

Já o ponto $(7,\ -9,\ 10)$ não pertence à reta r porque não encontramos nenhum valor real para λ que satisfaça a equação $(7,\ -9,\ 10) = (1,\ 1,\ 1) + \lambda(2,\ 3,\ 4)$, pois:

$(7,\ -9,\ 10) = (1 + 2\lambda,\ 1 + 3\lambda,\ 1 + 4\lambda)$ conduz ao sistema:

$$\begin{cases} 7 = 1 + 2\lambda \\ -9 = 1 + 3\lambda \\ 10 = 1 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -\dfrac{10}{3} \\ \lambda = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

O que é absurdo, porque λ é único para cada ponto da reta.

Se a reta r for determinada por dois pontos distintos ***A* e B,** a direção de r será dada pela direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$ e a equação vetorial da reta r será $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$ ou ainda por $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{BA}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$. Os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ ou $\overrightarrow{BA} = -\vec{v}$ são denominados vetores diretores da reta r.

Exemplo 2

A equação vetorial da reta que passa por $A(1,\ 2,\ 3)$ e $B(0,\ -1,\ 5)$ tem vetor diretor $\overrightarrow{AB}=(-1,\ -3,\ 2)$ ou $\overrightarrow{BA}=(1,\ 3,\ -2)$, isto é, $\overrightarrow{OX}=(1,\ 2,\ 3)+\lambda(-1,\ -3,\ 2)$ ou $\overrightarrow{OX}=(0,\ -1,\ 5)+\lambda(-1,\ -3,\ 2)$ ou $\overrightarrow{OX}=(1,\ 2,\ 3)+\lambda(1,\ 3,\ -2)$ ou ainda $\overrightarrow{OX}=(0,\ -1,\ 5)+\lambda(1,\ 3,\ -2)$ que são representações diferentes para a mesma reta r.

Os **ângulos diretores** de uma reta r são os ângulos diretores do vetor diretor dessa reta. Assim, os **cossenos diretores** de uma reta são os cossenos diretores do vetor diretor dessa reta, já estudados anteriormente.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

3.2 Equações paramétricas

Sejam $X(x,\ y,\ z)$ as coordenadas de um ponto genérico qualquer da reta r, $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ um ponto dado da reta r e $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ um vetor não nulo de direção paralela à reta r.

Da equação vetorial de r, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ vem:

$$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + \lambda(a,\ b,\ c)$$

$$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + (\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c)$$

$$(x,\ y,\ z) = (x_0 + \lambda a,\ y_0 + \lambda b,\ z_0 + \lambda c)$$

Logo, $r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ e *a*, *b*, *c* não todos nulos, pois $\vec{v} \neq \vec{0}$.

As equações assim definidas são chamadas **equações paramétricas** da reta r, em relação ao sistema de coordenadas fixado e λ é chamado parâmetro.

Exemplo 3

Da equação vetorial da reta r , $\overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 1) + \lambda(2,\ 3,\ 4)$, do exemplo 1, temos: $(x,\ y,\ z) = (1 + 2\lambda,\ 1 + 3\lambda,\ 1 + 4\lambda)$

Logo $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

No caso da reta r ser definida por dois pontos $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$ temos $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$ e as equações paramétricas de r serão:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases} \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}$$

Não esquecendo que para determinar essa equação também poderia ser utilizado o ponto B e ainda o vetor $\overrightarrow{BA}$.

Exemplo 4

Retomando o exemplo 2, dado anteriormente, temos $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(0,\ -1,\ 5)$ e $\overrightarrow{AB} = (-1,\ -3,\ 2)$.

Portanto, as equações paramétricas de r podem ser: $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cabe observar que: tanto a equação vetorial, quanto as equações paramétricas não são determinadas de modo único, pois dependem da escolha de A, de $\vec{v}$ e do sistema de coordenadas, o que significa que podemos ter equações diferentes para a mesma reta.

Exemplo 5

As equações paramétricas da reta r do exercício 4 poderiam ser obtidas utilizando o ponto B(0, -1, 5) com o mesmo vetor ficando: $r: \begin{cases} x = -\delta \\ y = -1 - 3\delta \\ z = 5 + 2\delta \end{cases}$ com $\delta \in \mathbb{R}$. Apesar de aparentemente diferente do obtido anteriormente, as equações paramétricas definem a mesma reta r. As equações poderiam ainda ser obtidas com os pontos A ou B e o vetor $\overrightarrow{BA}$.

3.3 Equação simétrica ou normal

Continuando o estudo das equações de um reta, temos outras formas de representação, uma delas é a equação na forma simétrica ou normal. Conforme obtido anteriormente, nas equações paramétricas de uma reta temos:

$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ em que $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ e $X(x,\ y,\ z)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a,\ b,\ c$ reais, nem todos nulos.

Isolando λ em cada uma das equações teremos: $\lambda = \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ que são denominadas equações da reta r na **forma simétrica (ou normal)**.

Observe que as igualdades $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ representam duas equações que devem valer simultaneamente, ou seja, são equivalentes, por exemplo, ao sistema: $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$

Exemplo 6

Observe que, a partir dos exemplos 3 e 4 podemos obter as sequintes equações na forma simétrica:

No exemplo 3 teremos: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 1}{3} = \dfrac{z - 1}{4} = \lambda$.

No exemplo 4 teremos: $1 - x = \dfrac{2 - y}{3} = \dfrac{z - 3}{2} = \lambda$.

Casos particulares para a equação simétrica

a. a) Se um dos números *a*, *b* ou *c* é zero, por exemplo, se $a = 0$ e $b \cdot c \neq 0$ as equações devem ser representadas por:

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} = \lambda \end{cases} \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se b ou c for igual a zero, procede-se analogamente.

Exemplo 7

Se as equações simétricas de uma reta forem: $r: \begin{cases} x = 2 \\ \dfrac{y - 1}{2} = z + 3 = \lambda \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, então temos

$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$ e a equação vetorial dessa reta será $\overrightarrow{OX} = (2,\ 1,\ -3) + \lambda(0,\ 2,\ 1)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Se dois dos números *a, b, c* são nulos, por exemplo $a = b = 0$ e $c \neq 0$ as equações serão: $r: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ \dfrac{z - z_0}{c} = \lambda \end{cases}$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 8

Se as equações simétricas de uma reta forem: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ \dfrac{z-2}{4} = \lambda \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, então temos r: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases}$ e a equação vetorial dessa reta será $\overrightarrow{OX} = (2,\ -3,\ 2) + \lambda(0,\ 0,\ 4)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.4 Equação reduzida

Considerando uma reta r de equações paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e supondo-se $c \neq 0$ podemos, por exemplo, calcular λ em função de z e substituir nas duas primeiras equações. Assim, teremos: $\lambda = \dfrac{z - z_0}{c}$ e, substituindo-se esse valor nas duas primeiras equações obteremos:

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(\dfrac{z - z_0}{c}\right)a \\ y = y_0 + \left(\dfrac{z - z_0}{c}\right)b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 - \dfrac{az_0}{c} + \dfrac{az}{c} \\ y = y_0 - \dfrac{bz_0}{c} + \dfrac{bz}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \left(x_0 - \dfrac{az_0}{c}\right) + \left(\dfrac{a}{c}\right)z \\ y = \left(y_0 - \dfrac{bz_0}{c}\right) + \left(\dfrac{b}{c}\right)z \end{cases}$$

Podemos escrever então: $\begin{cases} x = p + qz \\ y = m + nz \end{cases}$ com $p,\ q,\ m,\ n \in \mathbb{R}$, denominadas **equações reduzidas** da reta r.

Observe que nessa forma de representação da reta, duas das variáveis, neste caso, x e y são dadas em função de z. Assim, nas equações reduzidas de uma reda, duas das variáveis podem ser dadas em função da terceira, isto é, podemos ter x e y em função de z, ou x e z em função de y (supondo $b \neq 0$), ou ainda, y e z em função de x (supondo $a \neq 0$).

Exemplo 9

Observe que, a partir da equação vetorial de uma reta, podemos obter as quatro formas de representação correspondentes já estudadas: equação vetorial, equações paramétricas, equações simétricas e equação na forma reduzida.

Equação vetorial da reta r: $\overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 1) + \lambda(2,\ 3,\ 4)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equações paramétricas da reta r: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equações simétricas da reta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4} = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equação reduzida da reta r: considerando $\lambda = \dfrac{z-1}{4}$ teremos $\begin{cases} x = 1 + 2\left(\dfrac{z-1}{4}\right) \\ y = 1 + 3\left(\dfrac{z-1}{4}\right) \end{cases}$ e portanto, a forma reduzida será: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3z}{4} \end{cases}$

Equação vetorial da reta s: $\overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 3) + \lambda(-1,\ -3,\ 2)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equações paramétricas da reta s: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equações simétricas da reta s: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{2} = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equação reduzida da reta s: considerando $\lambda = \dfrac{z-3}{2}$ teremos $s: \begin{cases} x = 1 + (-1)\left(\dfrac{z-3}{2}\right) \\ y = 1 + (-3)\left(\dfrac{z-3}{2}\right) \end{cases}$ e, portanto, a forma reduzida será: $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} - \dfrac{z}{2} \\ y = \dfrac{13}{2} - \dfrac{3z}{2} \end{cases}$

Exemplo 10

Verifique se $P(1,\ -1,\ 2) \in r$ sendo $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ z = 1 + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

Para o ponto P pertencer à reta a expressão $\begin{cases} 1 = 2 - 3(-1) \\ 2 = 1 + \dfrac{1}{2}(-1) \end{cases}$ deve ser verdadeira.

Mas como $\begin{cases} 1 \neq 5 \\ 2 \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ podemos concluir que $P \notin r$

Exercícios de familiarização

Exercício 1

Determine a equação vetorial e as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(1,\ 3,\ 0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (3,\ 4,\ -1)$.

Exercício 2

Obtenha a equação vetorial e as equações paramétricas da reta determinada pelos pontos $A(1,\ 3,\ 2)$ e $B(5,\ 2,\ 2)$.

Exercício 3

Determine o ponto da reta r, dada por $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ com $t \in \mathbb{R}$, que tem ordenada 5. Encontre também o vetor diretor de r.

Exercício 4

Determine a equação vetorial da reta determinada pelos pontos $A(2,\ 0,\ 3)$ e $B(6,\ 8,\ 4)$. Encontre o ponto C (diferente de A e B) pertencente a essa reta. Verifique ainda se o ponto $P(1,\ 2,\ 0)$ pertence a reta.

Exercício 5

O ponto $A(0,\ b,\ c)$ pertence à reta determinada pelos pontos $P(1,\ 2,\ 0)$ e $Q(2,\ 3,\ 1)$. Determine o ponto A.

Exercício 6

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(1,\ 5,\ 4)$ e:

a. é paralela à reta de equações paramétricas: $x = 1 - \lambda,\ \ y = 20 + 2\lambda\ \ e\ \ z = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. é paralela à reta definida pelos pontos B e C sendo $B(1,\ 1,\ 1)$ e $C(0,\ 1,\ -1)$.

Exercício 7

A reta r passa pelo ponto $P(1,\ 2,\ 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Exercício 8

Determine as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $P(0,\ -4,\ 5)$ e $Q(1,\ -2,\ -2)$.

Exercício 9

Dadas as equações paramétricas de r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -5t \end{cases}$ com $t \in \mathbb{R}$, obtenha as equações simétricas de r.

Exercício 10

Verifique se os pontos $P(4,\ 2,\ 0)$, $Q(1,\ 0,\ -1)$ e $R(2,\ 1,\ 3)$ pertencem à reta r: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z + 1$.

Exercício 11

Determine as equações normais da reta r que passa pelo ponto $P(3,\ 1,\ 2)$ e é paralela à reta s dada pelos pontos $M_1(4,\ 1,\ -1)$ e $M_2(5,\ 2,\ 1)$.

Exercício 12

Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P(2,\ 0,\ -4)$ e é paralela à reta s: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$

Avaliação - Estudo da reta

O próximo passo é resolver os exercícios que preparamos para esse tópico. Clique na atividade para acessá-la e resolver os exercícios propostos.

Avaliação 3

Responda sucintamente às questões propostas

Dúvidas

Dúvidas e outras questões poderão ser esclarecidas por meio do Fórum de dúvidas.