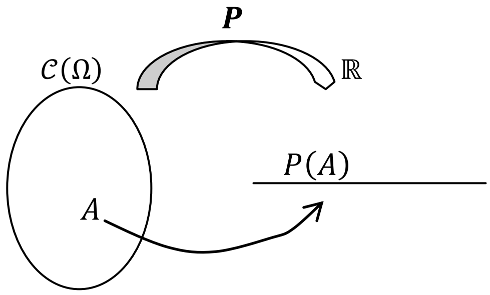
Função probabilidade – Espaços não equiprováveis

Considerando um experimento aleatório, o espaço amostra (ou amostral) Ω associado, a classe de eventos de Ω, $\mathcal{C}(\Omega)$, o próximo passo para a modelagem é associar um número real a cada evento de $\mathcal{C}(\Omega)$. Fazendo a analogia com os jogos, no espaço amostra temos todos os resultados do jogo e na classe de eventos, todas as apostas possíveis. O próximo passo corresponde a fazermos uma associação de cada aposta com a chance ganho, representando-a por um número real.

A ferramenta matemática que dispomos para fazer essa associação entre os dois conjuntos: $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathbb{R}$ é função. Note que, para ser função, temos duas condições importantes: não se pode ter um mesmo elemento do domínio com duas imagens e não se pode ter nenhum elemento do domínio que não tenha imagem (a imagem é subconjunto do contradomínio). No caso da analogia com os jogos, fica evidente que essas condições se ajustam perfeitamente, pois: não se pode ter uma mesma aposta com chances diferentes de ganho e toda aposta precisa ter associada a ela uma chance de ganho.

Essa função é denominada *função probabilidade* e será denotada por *P.* Temos, portanto que, para todo evento *A* de $\mathcal{C}(\Omega)$, a função probabilidade *P* é dada por:

$$P: \mathcal{C}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto P(A)$$



Devendo satisfazer os seguintes axiomas:

(I) $0 \leq P(A) \leq 1$

(II) $P(\Omega) = 1$

(III) Sendo X e Y eventos de $\mathcal{C}(\Omega)$, mutuamente exclusivos, $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

Dessa definição podem-se demonstrar os seguintes resultados:

R1. $P(\emptyset) = 0$

R2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

R3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

R4. $(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

R5. Sendo $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$ eventos exclusivos de $\mathcal{C}(\Omega)$, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_r) == P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_r)$

R6. Sendo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$, então $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + \ldots + P(\omega_n) = 1$

R7. Leis de Morgan:

$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_r}$ (complementar da união é a intersecção dos complementares)

$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_r}$ (complementar da intersecção é a união dos complementares)

Exercícios

1. Defina três funções probabilidade para o espaço amostra: $\Omega = \{\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3\}$.

2. Determine a probabilidade de sair face cara em uma moeda em que caras são cinco vezes mais prováveis que coroas.

3. Um dado é tal que a probabilidade de ocorrer cada face é diretamente proporcional ao número de bolinhas da face. Determine a probabilidade do evento A: ocorrer face par nesse dado.

4. Em uma final de um campeonato escolar de corrida, temos 6 finalistas, assim identificados: A, B, C, D, E e F. Determine a probabilidade de vitória de cada competidor, sabendo-se que o corredor C tem o dobro da chance de vitória que o competidor A, que por sua vez é três vezes mais provável que vença do que E, que probabilidade de vencer igual à de B, que tem um terço da chance de vencer do que D, cuja probabilidade de vitória é o quíntuplo da de F.

5. Em um determinado espaço, sabe-se que os eventos A e B são tais que:

$P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$, calcular:

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

(b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

(c) $P(\overline{A} \cap B)$

(d) $P(\overline{A} \cup B)$

6. Sejam A, B e C eventos tais que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}$, $A \cap B = \Phi$, $A \cap C = \Phi$ e $P(B \cap C) = \frac{1}{7}$. Calcule a probabilidade de:

(a) pelo menos um dos eventos A, B ou C ocorre

(b) nenhum evento ocorre

(c) exatamente um evento ocorre

(d) no máximo um evento ocorre