MODELO NORMAL - continuação

Dando continuidade ao estudo da variável aleatória contínua Z, com função densidade de probabilidades dada pela lei:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,5z^2} \quad , \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

o próximo passo, da mesma forma que fizemos quando estudamos o Modelo Binomial, é a determinação da média, da variância e do desvio padrão.

Média

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,5z^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\; e^{-0,5z^2}\, dz = \otimes$$

Calculemos a integral indefinida:

$$\int z\, e^{-0,5z^2}\, dz = \otimes\otimes$$

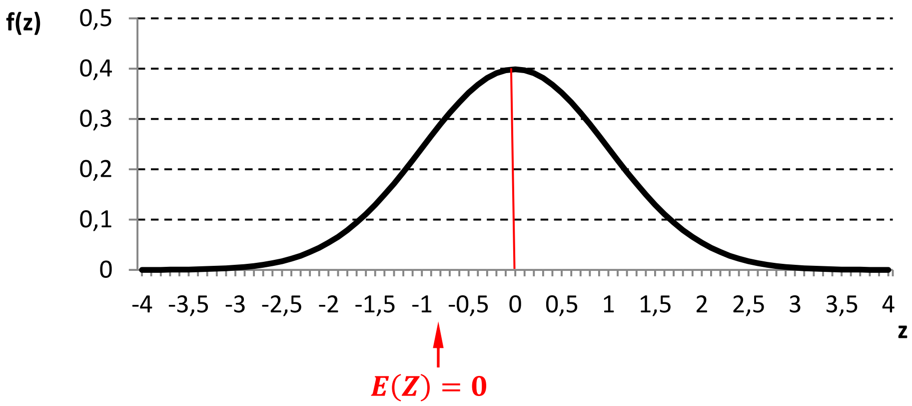
Façamos a seguinte substituição: $\boxed{u = -0,5z^2 \Rightarrow du = -0,5 \times 2zdz = -zdz}$

$$\otimes\otimes = \int e^u(-du) = -\int e^u du = -e^u = -e^{-0,5z^2}$$

Voltemos à nossa integral:

$$\otimes = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-0,5z^2}\right)_{-\infty}^{+\infty} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}\; e^{0,5z^2}}\right)_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{z\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\; e^{0,5z^2}} - \lim_{z\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\; e^{0,5z^2}} = 0$$

Assim, $E(Z) = 0$, ou seja, a média de Z é zero. Observe que esse resultado é evidente se observarmos a simetria da função densidade de probabilidades de Z em relação ao eixo $z = 0$. Como se pode concluir o "equilíbrio" se dá quando $z = 0$, conforme se pode constatar na representação a seguir.



Variância - Desvio Padrão

Lembrando que $Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$, calculemos $E(Z^2)$.

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-0,5z^2} \, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, e^{-0,5z^2} \, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \, ze^{-0,5z^2} \, dz = \otimes$$

Utilizemos integração por partes, considerando: $u = z$ e $dv = z\,e^{-0,5z^2}\,dz$. Teremos:

$$u = z \Longrightarrow du = dz$$

$dv = ze^{-0,5z^2}\,dz \Longrightarrow v = \int ze^{-0,5z^2}\,dz \Longrightarrow v = -e^{-0,5z^2}$ (conforme cálculo anterior)

Voltando à integral:

$$\otimes = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[z\left(-e^{-0,5z^2}\right)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-e^{-0,5z^2}\right) dz \right] == \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-z}{e^{0,5z^2}}\right)_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-0,5z^2}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-z}{e^{0,5z^2}}\right)_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-0,5z^2}\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-z}{e^{0,5z^2}}\right)_{-\infty}^{+\infty} + 1 = \otimes\otimes$$

(note que essa segunda integral é um porque é a área total sob a curva, conforme final da página 1)

$$\otimes\otimes = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{z\to+\infty} \left(\frac{-z}{e^{0,5z^2}}\right) - \lim_{z\to-\infty} \left(\frac{-z}{e^{0,5z^2}}\right) \right] + 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 - 0] + 1 = 1$$

Portanto, $E(Z^2) = 1$ e, assim, $Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 1 - 0^2 = 1$

Logo $Var(Z) = 1$. Como $DP(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{1} = 1$, então $DP(Z) = 1$

Observemos que os dois pontos de inflexão encontrados quando fizemos o estudo de função, correspondem exatamente às abscissas -1 e $+1$, ou seja, os pontos de inflexão correspondem a um desvio padrão de cada lado da média. Conseqüentemente, -2 e $+2$ correspondem a dois desvios padrão de cada lado da média e -3 e $+3$, correspondem a três desvios padrão de cada lado da média.

Conforme encontramos no Exercício 1:

$$\mathrm{P}(-1 < Z < 1) = \mathbf{0,682690}$$

$$\mathrm{P}(-2 < Z < 2) = \mathbf{0,954500}$$

$$\mathrm{P}(-3 < Z < 3) = \mathbf{0,997300}$$

podemos dizer que, aproximadamente:

68% da área corresponde à média mais ou menos um desvio padrão

95% da área corresponde à média mais ou menos dois desvios padrão

99,7% da área corresponde à média mais ou menos três desvios padrão, o que justifica comentários que fizemos anteriormente.

Assim, a v.a.c Z com f.d.p. dada por: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,5z^2}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, tem média zero e variância 1. Dizemos que essa variável tem distribuição **normal padrão**, ou, **normal padronizada**, ou, **normal zero/um**. Indicamos por: $\boldsymbol{Z \sim N(0\,,1)}$. Note que o primeiro parâmetro da representação é a **média** e o segundo parâmetro é a **variância**.

Consideremos agora a seguinte situação:

Os depósitos efetuados no Banco Ribeira, durante o mês de janeiro, são distribuídos normalmente com média R$10.00,00 e desvio padrão R$1.500,00. Um depósito é selecionado, ao acaso, dentre todos os referentes ao mês em questão. Encontrar a probabilidade de que o valor do depósito:

(a) seja igual a R$10.000,00 ou menos;

(b) seja de pelo menos R$8.000,00;

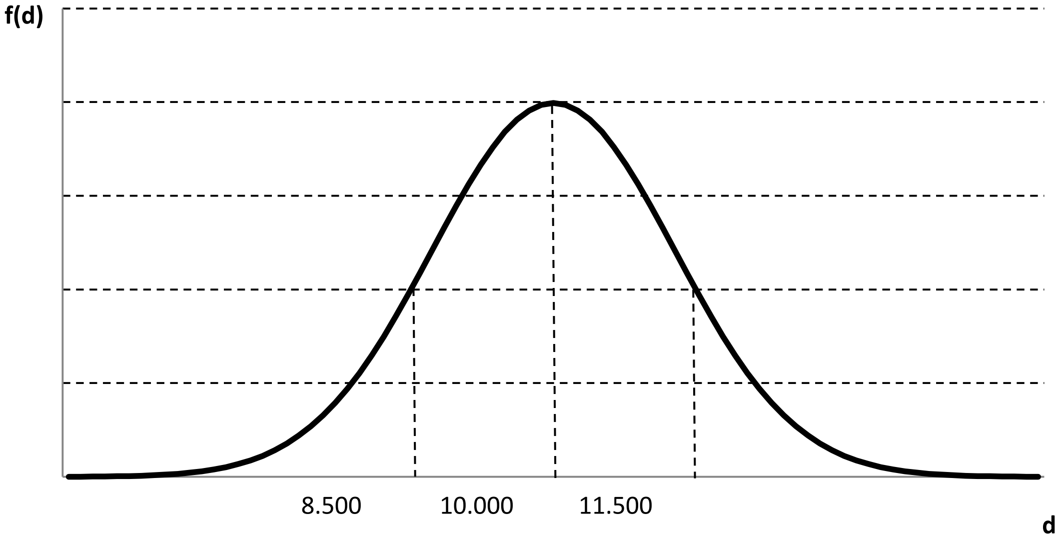
(c) esteja entre R$8.500,00 e R$11.500,00;

(d) esteja entre R$12.000,00 e R$15.000,00;

(e) seja maior que R$20.000,00.

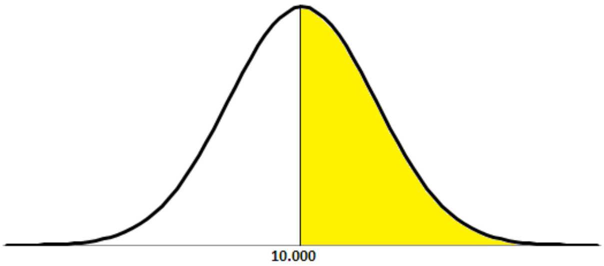
Note que a variável aleatória contínua, definida na situação é o valor dos depósitos efetuados naquele banco (D) e que ela tem **distribuição normal**, com **média** R$10.000,00 e **desvio padrão** R$1.500,00. Utilizando a notação que definimos anteriormente, temos que: $\boldsymbol{D \sim N(R\$10.000,00\ ;\ (R\$1.500,00)^2)}$, já que o segundo elemento da representação deve ser a variância.

Se a distribuição é normal, a função densidade de probabilidades tem representação semelhante à da normal padrão, ou seja, $Z \sim N(0,1)$. Como a média é R$10.000,00, a curva será centralizada no 10.000 e como o desvio padrão é R$1.500,00, as abscissas dos dois pontos de inflexão serão 1.500 depois da média (11.500) e 1.500 antes da média (8.500). A representação gráfica é apresentada a seguir:



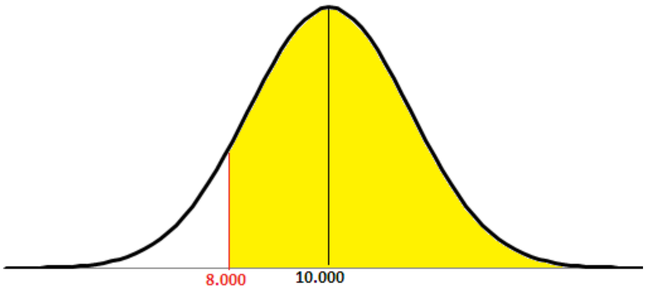
As propriedades da curva continuam valendo. Assim, a área total é um, a reta $d = 10.000$ é eixo de simetria e, portanto, cada metade da área vale 0,5.

O item (a) pede para calcular: $P(D \leq R\$10.000{,}00)$, que podemos representar por:



Nesse caso a resposta é bem simples: $P(D \leq R\$10.000{,}00) = 0{,}5$.

Já no item (b) devemos calcular: $P(D \geq R\$8.000{,}00)$, que podemos representar por:



Mas, como calcular essa área? Certamente não podemos usar diretamente a tabela da normal padrão como fizemos anteriormente, porque a curva é outra; muito menos criar uma tabela para cada curva normal que nos depararmos. Integrar a função densidade de probabilidades é possível? Qual a lei da função densidade de probabilidades dessa curva? As respostas dessas duas últimas perguntas é que não é possível integrar a função densidade de probabilidades dessa variável D, pelo mesmo motivo que não pudemos integrar a função densidade de probabilidades da variável Z, normal padrão, e a função densidade de probabilidade da variável $D \sim N(R\$10.000{,}00\ ;\ (R\$1.500{,}00)^2)$ é dada por:

$$f(d) = \frac{1}{1.500\sqrt{2\pi}}\ e^{-0,5\left(\frac{d-10.000}{1.500}\right)^2} \quad , \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Observe que essa função é semelhante àquela da variável aleatória contínua Z, normal padrão, bastando substituir 1.500, que é o desvio padrão, por um e 10.000, que é a média, por zero, já que $Z \sim N(0\,,1)$. Note que para Z a média é zero e a variância é um, acarretando que o desvio padrão também é igual a um.

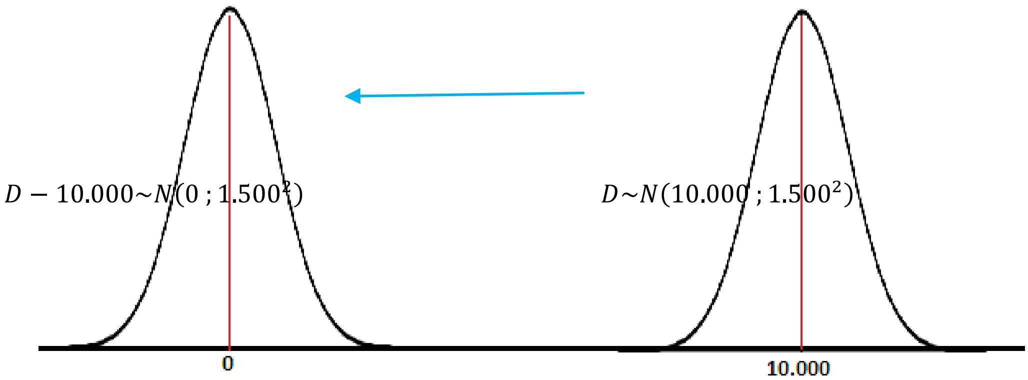
Entretanto, não precisaremos de nada disso. Vamos utilizar o que sabemos: propriedades da média e da variância, além de transformações do plano que vocês já viram em Álgebra Linear.

O objetivo, ao utilizarmos "o que sabemos" é transformar essa curva na normal padrão, de modo que a área seja mantida, para depois utilizarmos a tabela, que já conhecemos.

Inicialmente, queremos *transladar* a curva para que ela fique centralizada no zero, como a normal padrão. Quando fazemos a translação, todos os pontos do plano sofrem a mesma transformação, conservando a área que nos interessa. No caso dessa situação, a translação a ser feita é $D - 10.000$. Observe que a nova curva tem agora média 9ou valor esperado) zero. De fato, utilizando as propriedades de média, temos:

$$E(D - 10.000) = E(D) - 10.000 = 10.000 - 10.000 = 0$$

Graficamente fizemos o seguinte:



O próximo passo é acertar a variância, dessa nova variável que foi contruída, $D - 10.000 \sim N(0\,,1.500^2)$para que seja igual a um a fim de podermos utilizar a tabela da normal padrão.

Essa transformação é a homotetia. Vamos multiplicar nossa variável pelo inverso do desvio padrão. Teremos a variável:

$$\frac{D - 10.000}{1.500}$$

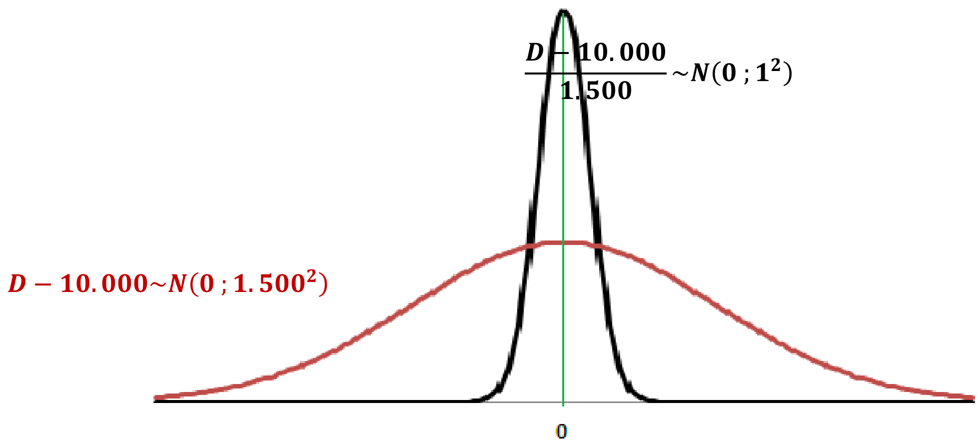
A variável que acabamos de criar é tal que:

$$E\left(\frac{D-10.000}{1.500}\right)=\frac{1}{1.500}E(D-10.000)=\frac{1}{1.500}[0]=0$$

Portanto essa variável tem média zero, e, ainda,

$$Var\left(\frac{D-10.000}{1.500}\right)=\frac{1}{1.500^2}Var(D-10.000)=\frac{1}{1.500^2}Var(D)=\frac{1}{1.500^2}1.500^2=1$$

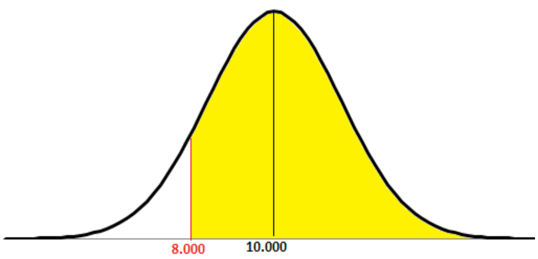
Portanto, essa variável tem média zero e variância um. A representação das duas variáveis é apresentada a seguir. Observe que a variável $D-10.000$ tem dispersão (variância $=1.500^2$) bem maior que a da variável $\frac{D-10.000}{1.500}$ (variância $=1^2$), mesmo com uma representação bem menos acentuada do que é na realidade, para que pudéssemos observar.



Em outras palavras, a variável $\frac{D-10.000}{1.500}$ tem distribuição normal padrão e podemos utilizar a tabela que temos para calcular probabilidades.

Voltando à probabilidade que queremos determinar:

$P(D\geq R\$8.000{,}00)$

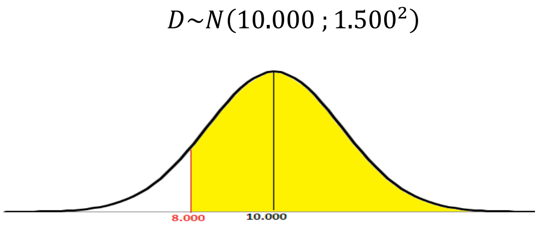


A fim de utilizar a tabela, precisamos transformar essa variável, fazendo a translação e a homotetia que já desenvolvemos a fim de que ela se transforme em uma variável com distribuição normal padrão. Lembre que a translação, corresponde a subtrair a média e a homotetia, corresponde a dividir pelo desvio padrão. Teremos, então:

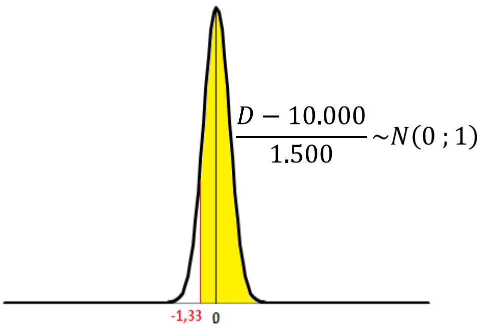
$$P(D\geq R\$8.000{,}00)=P\left(\frac{D-10.000}{1.500}\geq\frac{8.000-10.000}{1.500}\right)=P(Z\geq -1{,}33)$$

Note que as mesmas transformações que aplicamos à variável D, precisam ser aplicadas ao 8.000 para que a desigualdade continue igual à anterior.

Observe, ainda, que: como probabilidade é área sob a curva da função densidade, temos que as duas áreas a seguir têm exatamente a mesma medida.



$P(D \geq R\$8.000{,}00)$



$P(Z \geq -1{,}33)$

Assim, consultando a tabela da distribuição normal padrão, o valor correspondente a 1,33 é 0,408241.

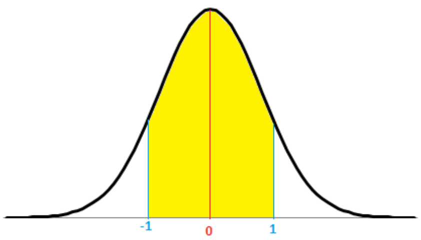
Portanto, $P(D \geq R\$8.000{,}00) = P(Z \geq -1{,}33) = 0{,}5 + 0{,}408241 = 0{,}908241$

Vamos ao próximo item.

(c) esteja entre R\$8.500,00 e R\$11.500,00;

$$P(8.500 \leq D \leq 11.500) == P\left(\frac{8.500-10.000}{1.500} \leq \frac{D-10.000}{1.500} \leq \frac{11.500-10.000}{1.500}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}341345 + 0{,}341345 = 0{,}682690$$

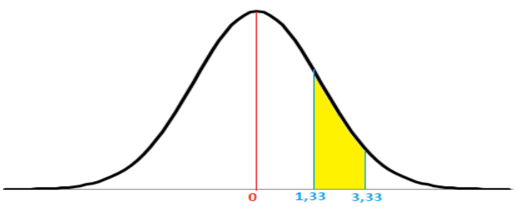


Note que a área corresponde a um desvio de cada lado da média, tanto em relação à variável D, como em relação à variável Z.

(d) esteja entre R\$12.000,00 e R\$15.000,00;

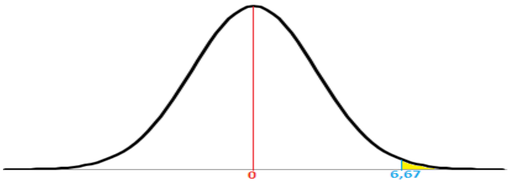
$$P(12.000 \leq D \leq 15.000) == P\left(\frac{12.000-10.000}{1.500} \leq \frac{D-10.000}{1.500} \leq \frac{15.000-10.000}{1.500}\right) =$$

$$= P(1{,}33 \leq Z \leq 3{,}33) = 0{,}499566 - 0{,}408241 = 0{,}091325$$



(e) seja maior que R\$20.000,00.

$$P(D \geq 20.000) = P\left(\frac{D - 10.000}{1.500} \geq \frac{20.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z \geq 6{,}67) = 0$$



A seguir apresentamos algumas situações para você aplicar o que foi estudado. Lembre-se de ler com atenção os enunciados e buscar interpretá-los para que possa encontrar a solução, antes de acessar as respostas.

Exercício 1. As vendas mensais de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média de 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada.

Exercício 2. O diâmetro X de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica é tal que $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0{,}6140}\,;\mathbf{0{,}0025^2})$*. O lucro T (em dezenas de reais) de cada rolamento depende de seu diâmetro. Assim,*

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\$\mathbf{0{,}10}$*, se o rolamento for bom, ou seja,* $(\mathbf{0{,}61} < X < 0{,}618)$*;*

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\$\mathbf{0{,}05}$*, se o rolamento for recuperável, ou seja,* $(\mathbf{0{,}608} < X < 0{,}61)$ *ou* $(\mathbf{0{,}618} < X <$ ***0,62****;*

$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{R}\$\mathbf{0{,}10}$*, se o rolamento for defeituoso, ou seja,* $(\boldsymbol{X} < 0{,}608)$ *ou* $(\boldsymbol{X} > 0{,}62)$*.*

Calcule: (a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos; (b) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T})$*.*

Exercício 3. Uma máquina automática de encher garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio líquido em cada garrafa seja de $\mathbf{1.000}\boldsymbol{cm}^{\mathbf{3}}$ *e o desvio padrão seja* $\mathbf{10}\boldsymbol{cm}^{\mathbf{3}}$*. Pode-se admitir que a variável volume de líquido em cada garrafa tenha distribuição normal. Qual a porcentagem de garrafas: (a) com volume líquido menor que* $\mathbf{990}\boldsymbol{cm}^{\mathbf{3}}$*? (b) em que o volume líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrão?*

Exercício 4. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma variável aleatória com distribuição normal, com média $\mathbf{0{,}1}\boldsymbol{cm}$ *e desvio padrão* $\mathbf{0{,}02}\boldsymbol{cm}$*. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que* $\mathbf{0{,}03}\boldsymbol{cm}$*, ele é vendido por R\$5,00; caso contrário, é vendido a R\$10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?*