TÓPICO 5: POSIÇÕES RELATIVAS DE RETAS E PLANOS

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE FAMILIARIZAÇÃO

Exercício 1: A reta r que passa pelos pontos $A(-3,4,2)$ e $B(5,-2,4)$ e a reta s que passa pelos pontos $C(-1,2,-3)$ e $D(-5,5,-4)$ são paralelas?

$\vec{r} = \vec{AB} = (8,-6,2) = (4,-3,1)$

$\vec{s} = \vec{CD} = (-4,3,-1)$

Como $\frac{4}{-4} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1}$ $(\vec{r},\vec{s})$ LD e $r // s$

$r: \vec{OX} = (-3,4,2) + \lambda(4,-3,1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$C \in r$, $C \in s$?

$$\begin{cases} -1 = -3 + 4\lambda \\ 2 = 4 - 3\lambda \Rightarrow 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 2/3 \\ -3 = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = -5 \end{cases}$$

$\therefore$ $r // s$ e são distintas, isto é, $r \cap s = \emptyset$

Exercício 2

Estude a posição relativa das retas nos seguintes casos:

a) $r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{cases}$

$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{cases}$

$x = \lambda$ e $z = -\lambda$

$A(0,-3,0)$ $\vec{r} = (1,2,-1)$ $\quad B(1,4,0)$ $\vec{s} = (-3,-6,3)$

$\vec{s} = -3\vec{r}$ $\therefore$ $(\vec{r},\vec{s})$ LD e $r // s$

$A(0,-3,0)$ $A \in r$

$1 - 3t = 0 \Rightarrow t = 1/3$

$4 - 6t = -3 \Rightarrow t = 7/6$

$\therefore$ $r // s$ e r e s distintas

b) $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$ e $s: \begin{cases} x = 2-4t \\ y = 2t \\ z = -2t+1 \end{cases}$

$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$ $\qquad s: \begin{cases} x = 2-4t \\ y = 2t \\ z = -2t+1 \end{cases}$ $B(2,0,1)$ $\vec{s}(-4,2,-2)$

$A(0,1,0)$ $\vec{r} = (2,-1,1)$

$\vec{s} = -2\vec{u}$ $\therefore$ $(\vec{r},\vec{s})$ LD e $r // s$.

$A(0,1,0)$ $A \in r$, $A \in s$?

$\begin{cases} 2-4t = 0 \Rightarrow t = 1/2 \\ 2t = 1 \Rightarrow t = 1/2 \\ -2t+1 = 0 \Rightarrow t = 1/2 \end{cases}$ $\therefore A \in r$ e $A \in s$ e $r = s$

c) $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ e $s: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-t \\ z = 7-2t \end{cases}$

$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-t \\ z = 7-2t \end{cases}$ $B(5,2,7)$ $\vec{s}(1,-1,-2)$

$A(2,0,5)$ $\vec{r}(2,3,4)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{4}{-2}$ $\therefore$ $(\vec{r},\vec{s})$ LI

$\vec{AB} = (3,2,2)$ $\quad [\vec{r},\vec{s},\vec{AB}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3\times 8 + 4\times 5 = 0$

$\therefore$ os três vetores são LD e r e s são concorrentes.

d) $r: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ e $s: x = y = z$

$r: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ $\qquad s: x = y = z$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x = y = z = \mu$.

$x = \lambda, y = 3, z = 2\lambda$ $\qquad B(0,0,0)$ $\vec{s} = (1,1,1)$

$A(0,3,0)$ $\vec{r} = (1,0,2)$

$\vec{AB} = (0,-3,0)$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3 \neq 0$

Como $(\vec{r},\vec{s})$ LI e $[\vec{r},\vec{s},\vec{AB}] = -3 \neq 0$ então r e s são reversas.

e) $r: \overrightarrow{OX} = (1,2,3) + \alpha(0,1,3),\ (\alpha \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (0,1,0) + \beta(1,1,1),\ (\beta \in \mathbb{R})$

$r: \overrightarrow{OX} = (1,2,3) + \alpha(0,1,3)$ $\quad A(1,2,3)$ $\quad \vec{r} = (0,1,3)$

$s: \overrightarrow{OX} = (0,1,0) + \beta(1,1,1)$ $\quad B(0,1,0)$ $\quad \vec{s} = (1,1,1)$

$(\vec{r}, \vec{s})$ LI $\quad \overrightarrow{AB} = (-1,-1,-3)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ LI e r e s são reversas.

f) $r: \overrightarrow{OX} = (1,2,3) + a(0,1,3),\ (a \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (1,3,6) + b(0,2,6),\ (b \in \mathbb{R})$

$\vec{r} = (0,1,3)$ $\quad \vec{s} = (0,2,6)$

Como $\vec{s} = 2\vec{r}$ $\quad (\vec{r}, \vec{s})$ LD logo $r \parallel s$

$A(1,2,3) \in r$, $A \in s$?

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 3 + 2\mu \Rightarrow \mu = -1/2 \\ 3 = 6 + 6\mu \Rightarrow \mu = -1/2 \end{cases}$$

$\therefore$ $A \in s$ e r e s são coincidentes.

Exercício 3

Verifique, em cada caso, se as retas são ortogonais e, em particular, se são perpendiculares.

a) $r: \overrightarrow{OX} = (1,1,0) + m(1,0,1),\ (m \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (1,2,3) + h(2,1,4),\ (h \in \mathbb{R})$

$\vec{r} = (1,0,1)$ $\quad \vec{s} = (2,1,4)$

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1,0,1) \cdot (2,1,4) = 2 + 4 = 6$

$\therefore$ r e s não são ortogonais.

b) $r: \overrightarrow{OX} = (1,1,1) + h(1,2,-1),\ (h \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (2,3,4) + t(1,1,3),\ (t \in \mathbb{R})$

$\vec{r} = (1,2,-1)$ $\quad A(1,1,1) \in r$

$\vec{s} = (1,1,3)$ $\quad B(2,3,4) \in s$

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1,2,-1) \cdot (1,1,3) = 0$

$\therefore$ r e s são ortogonais

$\overrightarrow{AB} = (1,2,3)$

Se r e s forem coplanares então são perpendiculares

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 3 - 6 + 1 - 6 = -4 \neq 0$$

as retas são reversas.

c) $r: \overrightarrow{OX} = (2,3,4) + p(1,1,1),\ (p \in \mathbb{R})$ e $s: \overrightarrow{OX} = (2,0,4) + q(1,-2,1),\ (q \in \mathbb{R})$

$\vec{r} = (1,1,1) \qquad \vec{s} = (1,-2,1)$

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1,1,1).(1,-2,1) = 1-2+1 = 0$

$\therefore$ r e s são ortogonais

$\overrightarrow{AB} = (0,-3,0)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3+3 = 0 \quad \therefore$ r e s são perpendiculares

A intersecç de r e s é:

$\begin{cases} 2+p = 2+q \Rightarrow p = q \\ 3+p = -2q \Rightarrow p = -1 \\ 4+p = 4+q \rightarrow 4-1 = 4-1 \therefore p = q = -1 \end{cases}$

$P(1,2,3) = r \cap s$

Exercício 4

Em cada um dos casos abaixo verifique se a reta e o plano são concorrentes, paralelos ou se a reta está contida no plano. No caso da reta ser transversal ao plano determine o ponto comum.

a) $r: \overrightarrow{OX} = (3,4,1) + m(1,2,3),\ (m \in \mathbb{R})$ e $\pi: 5x + 2y - 3z - 20 = 0$

$\vec{r} = (1,2,3) \qquad A(3,4,1) \in r$

$\vec{n} = (5,2,-3)$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = (1,2,3).(5,2,-3) = 5+4-9 = 0$

$\therefore r \parallel \pi$ ou $r \subset \pi$

$A \in \pi$? $5 \times 3 + 2 \times 4 - 3 \times 1 - 20 = 23 - 23 = 0$

Como $A \in \pi$ então $r \subset \pi$.

b) $r: \overrightarrow{OX} = (1,1,2) + t(2,5,0),\ (t \in \mathbb{R})$ e $\pi: 5x - 2y + z - 7 = 0$

$\vec{r} = (2,5,0) \qquad A(1,1,2) \in r$

$\vec{n} = (5,-2,1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = (2,5,0).(5,-2,1) = 0$

Logo $r \parallel \pi$ ou $r \subset \pi$

$A \in \pi$? $5 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times 2 = 5 \neq 0 \therefore A \notin \pi$

Logo $r \parallel \pi$.

c) $r: \overrightarrow{OX} = (2,1,0) + h(1,3,5)$, $(h \in \mathbb{R})$ e $\pi: x + y + z + 15 = 0$

$A(2,1,0)$ $\vec{r} = (1,3,5)$

$\pi: x + y + z + 15 = 0$ $\vec{n} = (1,1,1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = (1,3,5)\cdot(1,1,1) = 1+3+5 \neq 0$

$\therefore$ r é transversal ao plano π e $r \cap \pi = \{P\}$

$$\begin{cases} x+y+z+15=0 \\ x = 2+h \\ y = 1+3h \\ z = 5h \end{cases} \Rightarrow 2+h+1+3h+5h+15=0$$

$9h = -18 \Rightarrow h = -2$,

$\therefore$ $x = 0$, $y = -5$ e $z = -10$ $P(0,-5,-10)$

Exercício 5: Determine os valores de *m* e *n* para que a reta r esteja contida no plano π sendo

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases} \text{ e } \pi: mx + ny + 2z - 1 = 0.$$

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases} \qquad \pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$$

$\vec{n} = (m, n, 2)$

$A(2,1,-3)$ $\vec{r}(1,1,-2)$

Para que $r \subset \pi$ $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \in \pi$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = (1,1,-2)\cdot(m,n,2) = m + n - 4 = 0$

Como $A \in \pi$ vem $2m + n - 6 - 1 = 0$

$$\begin{cases} m + n = 4 \\ 2m + n = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n = -4 \\ 2m + n = 7 \end{cases} \Rightarrow m = 3 \text{ e } n = 1.$$

Exercício 6: Dados o plano e a reta r, estude a posição relativa entre eles.

a) $\pi: \overrightarrow{OX} = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,0,3)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ e

$r: \overrightarrow{OX} = (2,2,1) + \alpha(3,3,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\pi: \overrightarrow{OX} = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,0,3)$ $\vec{u}_1 = (1,1,1)$ e $\vec{u}_2 = (0,0,3)$

$\vec{r} = (3,3,0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$ Logo ou $r \subset \pi$ ou $r \parallel \pi$

$A(2,2,1) \in r$

$A \in \pi$? $(2,2,1) = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,0,3)$

$$\begin{cases} 2 = 1 + \lambda \\ 2 = \lambda \\ 1 = 1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Como o sistema é impossível $r \parallel \pi$.

b) $\pi: x + y - z + 2 = 0$ e $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

$\pi: x + y - z + 2 = 0 \qquad \vec{n} = (1, 1, -1)$

$\vec{r} = (1, -1, 1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = (1, -1, 1) \cdot (1, 1, -1) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$

logo r é transversal a π

Exercício 7: Verifique, em cada caso, se a reta e o plano são perpendiculares:

a) $\pi: 3x + 6y + 9z - 5 = 0$ e $r: \overrightarrow{OX} = (1,2,0) + t(2,4,6)$, $(t \in \mathbb{R})$

$\vec{r} = (2, 4, 6) \qquad \vec{n} = (3, 6, 9)$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} \quad \therefore \quad \vec{r} \, // \, \vec{n}$ e r e π são perpendiculares

b) $\alpha: x + y + 2z + 10 = 0$ e $r: \overrightarrow{OX} = (0,7,1) + h(3,1,1)$, $(h \in \mathbb{R})$

$\vec{r} = (3, 1, 1) \qquad \vec{n} = (1, 1, 2)$

$\vec{r} \not\parallel \vec{n} \quad \therefore$ r e α não são perpendiculares.

c) $r: \overrightarrow{OX} = (0,1,0) + \lambda(1,1,3)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ e $\pi: \overrightarrow{OX} = (3,4,5) + \lambda(6,7,8) + \mu(9,10,11)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$\vec{n} = (6,7,8) \times (9,10,11) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = (77-80)\vec{i} - (66-72)\vec{j} + (60-63)\vec{k} =$$

$$= -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

$\vec{n} = (1, -2, 1) \qquad \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{3}{1} \quad \therefore \quad \vec{r} \not\parallel \vec{n}$

logo r não é perpendicular a π.

d) $r: \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ e $\pi: x + 2z - 14 = 0$

$r: \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad \vec{n}_1 = (2, -1, -1) \qquad \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \qquad \pi: x + 2z - 14 = 0 \qquad \vec{n} = (1, 0, 2)$

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{k} = (2, 0, 4)$$

$\vec{r} = 2\vec{n} \quad \therefore \quad \vec{r} \, // \, \vec{n}$ e π e r são perpendiculares

Exercício 8

Determine equações na forma simétrica da reta r que passa por $P(-1, 3, 5)$ e é perpendicular ao plano $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$.

$P(-1, 3, 5)$

$\pi: x - y + 2z - 1 = 0 \qquad \vec{n} = (1, -1, 2)$

$r: X = (-1, 3, 5) + \lambda(1, -1, 2)$

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases} \qquad \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{2}$$

Exercício 9

Estude a posição relativa dos seguintes planos:

a) $\pi_1: 2x - y + z - 1 = 0$ e $\pi_2: x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 9 = 0$

$\pi_1: 2x - y + z - 1 = 0 \quad$ e $\quad \pi_2: x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 9 = 0$

$$\frac{2}{1} = \frac{-1}{-1/2} = \frac{1}{1/2} \neq \frac{-1}{-9}$$

$\therefore$ π_1 e π_2 são paralelos distintos.

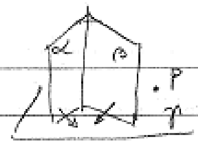
b) $\pi_1: x + 10y - z = 4$ e $\pi_2: 4x + 40y - 4z = 16$

$$\frac{1}{4} = \frac{10}{40} = \frac{-1}{-4} = \frac{4}{16}$$

Logo π_1 e π_2 são coincidentes

Exercício 10

Considere os planos $\alpha: x + y + z - 4 = 0$ e $\beta: x + 2y + 3z + 6 = 0$ e determine a equação geral do plano e que passa por $P(2, 1, 1)$ e é perpendicular aos planos dados.



$\alpha: x + y + z - 4 = 0 \qquad \vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$

$\beta: x + 2y + 3z + 6 = 0 \qquad \vec{n}_\beta = (1, 2, 3)$

$P(2, 1, 1)$

se $\gamma \perp \alpha \Rightarrow \gamma \parallel \vec{n}_\alpha$

se $\gamma \perp \beta \Rightarrow \gamma \parallel \vec{n}_\beta$

Logo $\gamma: X = P + h\,\vec{n}_\alpha + t\,\vec{n}_\beta$

$X = (2, 1, 1) + h(1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x-2) - (y-1)2 + (z-1) = 0$$

$x - 2 - 2y + 2 + z - 1 = 0$

$\therefore \gamma: x - 2y + z - 1 = 0.$