INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Introdução

Na definição de integral definida, consideramos a função integranda contínua num intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos: funções definidas em intervalos do tipo $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ou $(-\infty, +\infty)$, ou seja, para todo $x \geq a$ ou $x \leq b$ ou para todo $x \in R$, respectivamente.

As integrais destas funções são chamadas integrais impróprias. As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias, via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

Integrais Definidas em Intervalos Ilimitados

Antes de enunciar as definições estudemos o seguinte problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$ e o eixo dos x.

Primeiramente note que a região R é ilimitada e não é claro o significado de "área"de uma tal região.

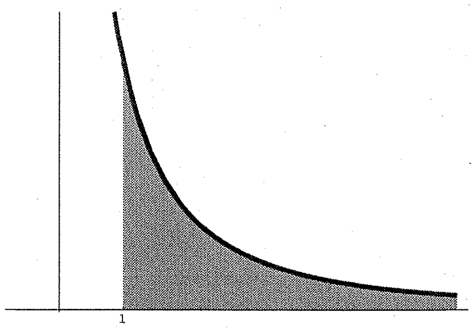

Figura Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq b$.

A área de R_b é:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

É intuitivo que para valores de b muito grandes a região **limitada** R_b é uma boa aproximação da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b),$$

quando o limite existe. Neste caso:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1\, u.a.$$

É comum denotar $A(R)$ por:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Esta integral é um exemplo de **integral imprópria** com limite de integração infinito. Motivados pelo raciocínio anterior temos as seguintes definições:

Definição

1. *Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

3. *Se f é uma função integrável em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\,dx}$$

INTEGRAIS DEFINIDAS EM INTERVALOS ILIMITADOS

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário são ditas divergentes.

Exemplo

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} arctg(x)\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} arctg(b) = \frac{\pi}{2}.$$

[2] $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

[3] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^{-x}\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{a \to -\infty} (-e^{-x})\Big|_a^0 + 1 = +\infty.$$

[4] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. Seja $u = x^2 + 1$; logo $du = 2\,x\,dx$:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2\,u} = -\frac{1}{2\,(x^2+1)}.$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Calcule a área da região limitada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e o eixo dos x.

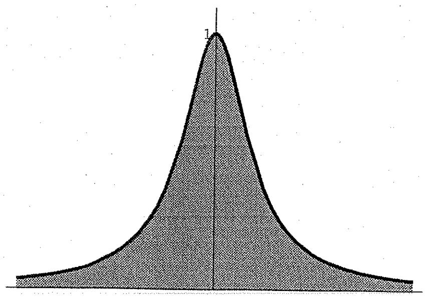

Figura 8.4: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned} A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1}. \\ &= \lim_{b \to -\infty} (-arctg(b)) + \lim_{b \to +\infty} arctg(b) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \, u.a. \end{aligned}$$

Muitas vezes não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria, mas, podemos indagar se uma integral imprópria converge ou diverge.

Aplicação

Uma função positiva integrável em $\mathbb{R}$ é chamada densidade de probabilidade se:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1}$$

Assim denotamos e definimos a probabilidade de um número x estar comprendido entre a e b $(a < b)$; por:

$$\boxed{P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx}$$

Analogamente definimos as outras possibilidades. Também podemos definir o valor esperado do número x, como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Exemplo

Seja $\alpha > 0$, a função

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

é de densidade de probabilidade. De fato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \alpha \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} (1 - e^{-\alpha b}) = 1.$$

Por outro lado,

$$P(0 < x < 1) = \alpha \int_{0}^{1} e^{-\alpha x}\, dx = 1 - e^{-\alpha}$$

e

$$E(x) = \alpha \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}.$$