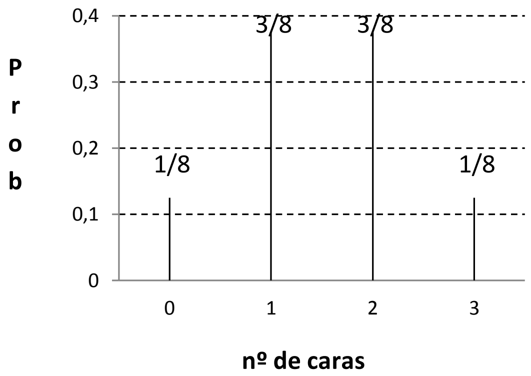
Valor esperado de variável aleatória discreta - propriedades

Dada uma v.a.d., queremos definir a média dessa variável, ou seja, um valor que equilibra os valores da variável, ponderada pelas probabilidades. Voltemos ao exemplo do lançamento de três moedas, em que a variável aleatória discreta X foi definida como sendo o número de caras obtidas. A distribuição de probabilidades, na forma gráfica, é reapresentada a seguir.



A média é, portanto, o equilíbrio dos valores de X, ou seja, 0, 1,2,3, com os respectivos pesos: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8 (nesse caso, os pesos são as probabilidades). Observando a representação gráfica, como o gráfico é simétrico em relação ao eixo $x = 1{,}5$ temos que a média da variável X é 1,5 caras. Mas, como determinar esse valor, quando o gráfico não tem um eixo de simetria? Basta fazer a média aritmética dos valores da variável, ponderados pelas respectivas probabilidades, como apresentado a seguir.

X	$P(X)$	$X\,P(X)$
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	3/8	6/8
3	1/8	3/8
total	1	12/8=1,5

Observe que a média ponderada é obtida multiplicando-se cada valor pelo respectivo peso, somando-se esses valores e depois dividindo pela soma dos pesos. No caso de variáveis aleatórias, como os pesos são as probabilidades, a soma dos pesos será SEMPRE um; dessa forma, não precisa dividir pela soma dos pesos, porque sempre será dividir por um. Logo, para calcular a média de uma variável aleatória, basta multiplicar os valores da variável pelos respectivos pesos e somar. A definição é apresentada a seguir.

Seja X uma v.a.d. com função distribuição de probabilidades p_X. Chamamos média de X, ou, valor esperado de X, ou esperança de X, indicamos $E(X)$, o número real dado por: $E(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$. Podemos representar por: $E(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i) = \sum XP(X)$

Um aspecto é importante de ser observado: o valor esperado de uma variável aleatória é um número real e representa o equilíbrio dos valores da variável, ponderados pelas respectivas probabilidades. Em momento algum ele precisa ser um possível valor da variável. Observe que no exemplo, o valor esperado do número de caras em três lances da moeda é 1,5 caras. Ninguém vai lançar três moedas e esperar que ocorram 1,5 caras! Isso representa que, se repetirmos muitas vezes (mais de 100) esse experimento de lançar três moedas e contar o número de caras obtidas e anotarmos em um papel, para depois calcularmos a média desses valores, isto é, somar todos os valores obtidos e dividirmos pelo número de repetições, essa média estará próximo de 1,5; tanto mais próximo quanto mais vezes repetirmos o experimento. Em outras palavras, não se deve arredondar a média para número inteiro, só porque a média assume valores inteiros.

Exercício 1. Em um cassino, um jogador lança dois dados, cujas probabilidades são proporcionais aos valores das faces. Se sair soma 7, ganha R$50,00, se sair soma 11, ganha R$100,00 e se sair soma 2, ganha R$200,00. Qualquer outro resultado, ele não ganha nada. Qual é o ganho médio do jogador em uma única jogada?

Exercício 2. Uma caixa tem três bolas brancas e uma bola vermelha. Alexandra vai retirar as bolas, uma a uma, até encontrar a bola vermelha. Seja N: o número de tentativas necessárias até ela encontrar a bola vermelha. Determine o número esperado de tentativas necessárias.

Exercício 3. Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair face 6 tem um desconto de 30% sobre o total de sua conta, se sair 5, o desconto é de 20%, se sair 4 é de 10% e se ocorrerem faces 1, 2 ou 3, o desconto é de 5%. Determine o desconto médio concedido pelo supermercado.

O valor esperado de uma variável é uma transformação linear e, como tal, tem algumas propriedades, enunciadas a seguir.

1. Se uma v.a.d. assume um único valor k (constante real), então o valor esperado dessa variável é igual a esse valor, ou seja, $\boldsymbol{E(k) = k}$. Apenas para entender melhor essa propriedade, considere que uma pessoa, durante o ano todo, não teve seu salário alterado. Qual é o salário médio mensal? A resposta é que o salário médio mensal é o valor do salário mensal, já que ele foi sempre o mesmo; a variável assume um único valor que é o salário mensal com probabilidade um. Assim, o valor esperado do salário mensal é igual ao próprio salário mensal.

2. Quando se multiplica uma variável (X) por uma constante (k), a média da constante, vezes a variável é igual à constante, vezes a média da variável, ou seja, $\boldsymbol{E(kX) = kE(X)}$. Nesse caso, pode-se considerar que durante o ano o sujeito recebe um salário mensal correspondente a 1% das vendas que ele realiza (portanto, variável). Se a comissão que ele recebe aumentasse para 2%, o que aconteceria com seu salário médio mensal? Facilmente pode-se constatar que o seu salário médio mensal seria dobrado também. Essa propriedade, no caso de uma transformação linear F de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V, ambos sobre o mesmo corpo K, é enunciada como: $F(kx) = kF(x), \forall x \in U, \forall k \in K$.

3. Quando se soma uma constante (k) a uma variável, a média da variável mais a constante é igual à média da variável mais a constante, ou seja, $E(X + k) = E(X) + k$. Nesse caso, pode-se considerar que o sujeito trabalha por comissão, porém tem um fixo que recebe mensalmente. Assim, o seu salário médio mensal é o fixo mais a média mensal das comissões.

4. Quando se soma duas variáveis (X e Y), a média da soma das variáveis é igual à soma das médias das variáveis, isto é, $\boldsymbol{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$. Nesse caso, pode-se considerar que o sujeito trabalha em duas lojas, ganhando apenas comissão sobre as vendas que ele realiza, uma no período da manhã e outra no período da tarde. Assim, o seu salário médio mensal é a soma das médias mensais dos salários nas duas lojas. Essa propriedade, no caso de uma transformação linear F de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V, ambos sobre o mesmo corpo K, é enunciada como: $F(x+y) = F(x) + F(y), \forall x, y \in U$.

5. Quando se subtrai duas variáveis (X e Y), a média da diferença das variáveis é igual à diferença das médias das variáveis, isto é, $\boldsymbol{E(X-Y) = E(X) - E(Y)}$. Nesse caso pode-se considerar que o sujeito trabalha em uma loja ganhando comissão sobre as vendas que ele realiza (portanto, variável). Entretanto, todo mês ele gasta, sem controle (portanto, variável). Qual a situação financeira média mensal do sujeito? A situação média pode ser obtida, fazendo a diferença entre o salário médio das comissões e a quantia média que ele gasta mensalmente. Essa propriedade, no caso de uma transformação linear F de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V, ambos sobre o mesmo corpo K, é enunciada como:
$F(x-y) = F(x) - F(y), \forall x, y \in U$.

6. Quando se pretende determinar a média de uma potência da variável X, ou seja, calcular a média de X^k, que representamos $E(X^k)$, determina-se os valores da variável X^k e, a seguir, calculamos a média desses valores ponderados pelas probabilidades da variável X; não precisamos determinar as probabilidades de X^k. Assim, a média de X^k será dada por:

$$\boldsymbol{E\left(X^k\right) = \sum_i x_i^k\, p_X(x_i) = \sum X^k P(X).}$$

Essas propriedades podem ser demonstradas utilizando as propriedades de soma, que omitiremos, por serem simples. Entretanto, o seu entendimento, para que não sejam mais fórmulas sem significado a serem decoradas, é fundamental entendê-las para que possam ser aplicadas na resolução de problemas, sem que se tenha que determinar a distribuição de probabilidades de novas variáveis, como mostra o exemplo a seguir.

Considere que o número de acertos X, em um teste de 10 questões, realizado por um grupo de sujeitos em uma competição, tem a seguinte distribuição de probabilidades:

X	*4*	*5*	*6*	*7*
P(X)	*0,4*	*0,2*	*0,3*	*0,1*

Sabendo-se que cada questão correta vale 15 pontos, na classificação dos sujeitos na competição, determine o número esperado de pontos obtidos pelos competidores no teste.

Considerando que Y é a variável aleatória discreta definida por: *número de pontos obtidos pelos competidores no teste*, devemos determinar $E(Y)$.

Sem o uso das propriedades que acabamos de enunciar, precisamos, inicialmente, determinar a distribuição de probabilidades de Y, para depois calcular $E(Y)$. Observando que a variável Y pode assumir os valores: 60, quando X assume o valor 4, 75, quando X é 5, 90, quando X é 6 e 105, quando X é 7, temos que a distribuição de probabilidades de Y e $E(Y)$ são assim determinados:

Y	*60*	*75*	*90*	*105*	*total*
P(Y)	*0,4*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*1*
Y P(Y)	*24*	*15*	*27*	*10,5*	*76,5*

O valor esperado do número de pontos obtidos pelos competidores no teste é 76,5 pontos.

Por outro lado, se observarmos que a variável aleatória Y é dada por: $Y = 15\,X$, temos que $E(Y) = E(15\,X) = 15\,E(X)$. Esse resultado permite que se determine a média da variável X, a fim de se determinar a média da variável Y, como apresentado a seguir.

X	*4*	*5*	*6*	*7*	*total*
P(X)	*0,4*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*1*
X P(X)	*1,6*	*1,0*	*1,8*	*0,7*	*5,1*

Dessa forma, $E(Y) = E(15\,X) = 15\,E(X) = 15 \times 5{,}1 = 76{,}5$. Note que, nesse caso, efetuamos o cálculo de multiplicar por 15 uma única vez, diferentemente do que foi feito sem a utilização da propriedade. Não resta dúvida que, nesse exemplo, que é simples, o trabalho que foi reduzido é quase insignificante, mas, em problemas mais elaborados, esse pode ser um ganho considerável, principalmente em casos que se têm arredondamentos a serem efetuados. Assim, quando as propriedades são utilizadas, as respostas são mais precisas, quando se têm arredondamentos e nos casos em que não se têm arredondamentos, ambas as soluções coincidem, como foi o caso do exemplo apresentado.

Exercício 4. A Empresa Equilibra S.A. vende três produtos, cujos lucros e probabilidades de venda estão representados na tabela a seguir. Determine o lucro total esperado pela Empresa, em um mês em que forem vendidos 5.000 produtos.

Produto	*A*	*B*	*C*
lucro unitário (R$)	*15*	*20*	*10*
P(venda)	*0,2*	*0,3*	*0,5*

Exercício 5. Sendo V e W variáveis aleatórias discretas com distribuições de probabilidades dadas pelas tabelas a seguir, determine, usando as propriedades de valor esperado:

(a): $\boldsymbol{E(2V - 3W + 5)}$; (b) $\boldsymbol{E(4V^2 - 3)}$; (c) $\boldsymbol{E(2W^4 + 5V^3)}$

V	*-2*	*0*	*1*	*5*
P(V)	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,4*

W	*-1*	*0*	*1*
P(W)	*0,2*	*0,5*	*0,3*

Exercício 6. Em uma aposta de dois jogadores, A e B, o jogador A paga a B R$50,00 ao jogador B e lança dois dados, nos quais as probabilidades de cada face são diretamente proporcionais aos números de pontos da face. Se sair soma 7, A ganha R$50,00 de B. Se sair soma 11, A ganha R$100,00 de B e se sair soma 2, A ganha R$200,00 de B.Nos demais casos, A não ganha nada. Qual a esperança de ganho (lucro) do jogador A em uma única jogada?