TÓPICO 3: ESTUDO DA RETA

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE FAMILIARIZAÇÃO

1) Determine a equação vetorial e as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A=(1,3,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(3,4,-1)$.

Vetorial: $\overrightarrow{OX} = (1,3,0) + \alpha(3,4,-1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 3 + 4\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

2) Obtenha a equação vetorial e as equações paramétricas da reta determinada pelos pontos $A=(1,3,2)$ e $B=(5,2,2)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,-1,0)$

Vetorial: $\overrightarrow{OX} = (1,3,2) + \alpha(4,-1,0)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = 2 \end{cases}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

3) Determinar o ponto da reta r, dada por: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, que tem ordenada 5.

Encontrar também o vetor diretor de r.

$\begin{cases} x = 3 + t \implies x = 7 \\ 5 = 1 + t \implies t = 4 \\ z = 4 - t \implies z = 0 \end{cases}$ Portanto o ponto é (7, 5, 0) e o vetor diretor da reta é $\vec{r} = (1,1,-1)$

4) Determine a equação da reta determinada pelos pontos $A(2,0,3)$ e $B(6,8,4)$.
Encontre o ponto C (diferente de A e B) pertencente a essa reta. Verifique ainda se o ponto P(1, 2, 0) pertence àreta.

$$\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,8,1)$$

$$\overrightarrow{OX} = (2,0,3) + m(4,8,1), m \in \mathbb{R}$$

Determinação do ponto C.

Se m = 2 temos: $\overrightarrow{OC} = (2,0,3) + 2(4,8,1) = (10,16,5)$. Logo $P(10,16,5)$

Se P pertence à reta então

$$(1,2,0) = (2,0,3) + m(4,8,1), m \in \mathbb{R}$$

Ou seja: $\begin{cases} 1 = 2 + 4m \\ 2 = 8m \\ 0 = 3 + m \end{cases}$. Resolvendo o sistema vemos que não existe $m \in \mathbb{R}$ que satisfaça as três equações, logo o ponto P não pertence a essa reta.

5) O ponto $A=(0,b,c)$ pertence à reta determinada pelos pontos $P=(1,2,0)$ e $Q=(2,3,1)$. Determine o ponto A.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1,1,1)$

$r: \overrightarrow{OX} = (1,2,0) + \lambda(1,1,1)$

$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1+\lambda \\ b = 2+\lambda \\ c = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1, b = 1\ e\ c = -1$. Logo, $A(0, 1 - 1)$.

6) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(1, 5, 4)$ e:

a) é paralela à reta de equações paramétricas $x = 1-\lambda$, $y = 20 + 2\lambda$ e $z = \lambda$.

a direção da reta é dada por $(-1, 2, 1)$

$\overrightarrow{OX} = (1, 5, 4) + \alpha(-1, 2, 1) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$\begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 5+2\alpha \\ z = 4+\alpha \end{cases}$

b) é paralela à reta BC sendo $B(1,1,1)$ e $C(0,1,-1)$.

a direção da reta é dada pelo vetor $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-1, 0, -2)$

$\overrightarrow{OX} = (1, 5, 4) + \beta(-1, 0, -2) \quad (\beta \in \mathbb{R})$

$\begin{cases} x = 1-\beta \\ y = 5 \\ z = 4-2\beta \end{cases}$

7) A reta r passa pelo ponto $P=(1,2,0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3i + j - k$.

$r: \overrightarrow{OX} = (1,2,0) + \lambda(3,1,-1)$

8) Determine as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $P(0,-4,5)$ e $Q(1,-2,-2)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1,2,-7)$

$r: \overrightarrow{OX} = (0,-4,5) + \lambda(1,2,-7)$

$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -4+2\lambda \\ z = 5-7\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = x \Rightarrow \begin{cases} y = -4+2x \\ z = 5-7x \end{cases}$

9) Dadas as equações paramétricas de r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -5t \end{cases}$, com $t \in \mathbb{R}$. Obtenha as equações simétricas de r.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-5} = t$$

10) Verificar se os pontos $P = (4, 2, 0)$, $Q = (1, 0, -1)$ e $R = (2, 1, 3)$ pertencem à reta r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

P: $\frac{4-1}{3} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = 1$, portanto $P \in r$

Q: $\frac{0}{3} = \frac{0}{2} = \frac{0}{1} = 0$, portanto $Q \in r$

R: $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{4}{1}$, portanto $R \notin r$

11) Determine as equações normais da reta r que passa pelo ponto $P(3, 1, 2)$ e é paralela à reta s dada pelos pontos $M_1(4, 1, -1)$ e $M_2(5, 2, 1)$.

direção da reta r: $\vec{r} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = (1, 1, 2)$

$(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(1, 1, 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

r: $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad x - 3 = y - 1 = \frac{z-2}{2}$

12) Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P(2, 0, -4)$ e é paralela à reta $s: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

a direção da reta r é a mesma de s

$\vec{s} = (5, 3, -1)$

$(x, y, z) = (2, 0, -4) + \lambda(5, 3, -1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

r: $\begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$