Tópico 4 - Estudo do plano

Tópico 4

Site:	[Moodle PUC-SP]
Curso:	2015.1 - Geometria Analítica (GA)
Livro:	Tópico 4 - Estudo do plano
Impresso por:	ANA LUIZA PORTELLO BASTOS
Data:	sábado, 11 Nov 2017, 03:02

Sumário

Geometria Analítica

Estudo do plano

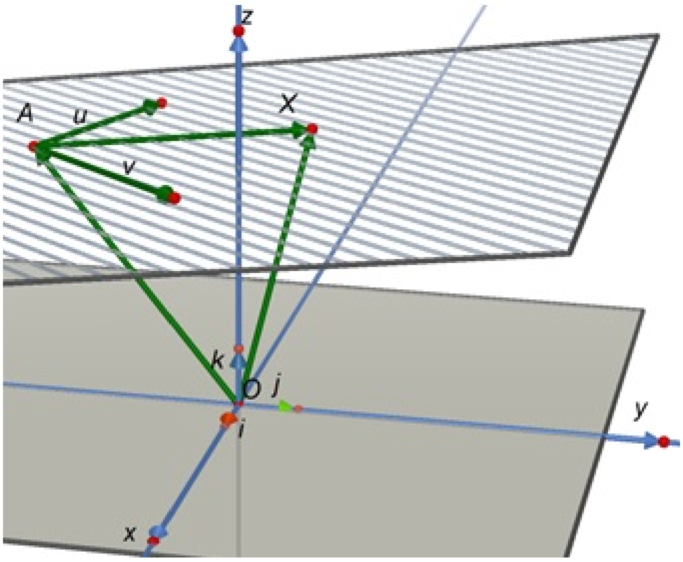
4. Estudo do plano

Nesta semana estudaremos as equações do plano em sua forma vetorial, paramétrica, geral e segmentária. Trataremos também de vetor normal a um plano e faremos a análise de algumas equações gerais especiais. As orientações continuam as mesmas: estude o conteúdo, faça os exercícios de familiarização e só então as tarefas de avaliação. Sempre que tiver dúvidas apresente-as no fórum.

4.1 Equação vetorial

Sejam um sistema de coordenadas ortonormal no espaço, X um ponto qualquer do plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ e $(\vec{u},\ \vec{v})$linearmente independente (LI) paralelos ao plano π, como mostra a figura 29.

Figura 29 - planos no espaço



Nessas condições os três vetores $\overrightarrow{AX},\ \vec{u}\ e\ \vec{v}$ são sempre linearmente dependentes (porque são coplanares) e, portanto, existe um único par de números reais λ e μ, tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ e como $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$, isto é $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$ vem que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Assim, quando λ e μ percorrem o conjunto dos números reais, o ponto X percorre o plano π. A igualdade $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ é chamada **equação vetorial** do plano π.

Exemplo 1

Dados o ponto $A(1,\ 0,\ 1)$ e os vetores $\vec{u} = (1,\ 1,\ -2)$ e $\vec{v} = (0,\ -1,\ -1)$, a equação vetorial do plano π que passa pelo ponto A e é paralelo às direções dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é: $\pi\text{:}\ \overrightarrow{OX} = (1,\ 0,\ 1)) + \lambda(1,\ 1,\ -2) + \mu(0,\ -1,\ -1)$.

Reciprocamente, o conjunto dos pontos X do espaço, que satisfazem a equação $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ e $(\vec{u},\ \vec{v})$ LI é um plano que passa pelo ponto A e é paralelo às direções dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

No caso de o plano π ser determinado por três pontos distintos A, B e C **não colineares**, a direção do plano π pode ser dada pelo par de vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, LI (porque os pontos não são colineares) e a **equação vetorial** do plano π é dada por $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB}) + \mu(\overrightarrow{AC})$ com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados vetores diretores do plano π.

Exemplo 2

Dados três pontos distintos e não colineares $A(2,\ 1,\ 1)$, $B(3,\ -1,\ 1)$ e $C(4,\ 1,\ -1)$ que nos dão os vetores diretores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,\ -2,\ 0)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2,\ 0,\ -2)$, então a equação vetorial do plano é dada por: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB}) + \mu(\overrightarrow{AC})$ ou seja, $\overrightarrow{OX} = (2,\ 1,\ 2) + \lambda(1,\ -2,\ 0) + \mu(1,\ -2,\ 0)$, com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Observe que outras equações equivalentes podem ser determinadas.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

4.2 Equações paramétricas

Sejam π um plano que passa pelo ponto $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e tem vetores diretores $(\vec{u},\ \vec{v})$ LI de coordenadas $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ e $\vec{v}=(m,\ n,\ p)$ e um ponto genérico do plano $X=(x,\ y,\ z)$.

Sabendo que $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ com $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$, em relação ao sistema fixado temos:

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+\lambda(a,\ b,\ c)+\mu(m,\ n,\ p)$$
$$(x,\ y,\ z)=(x_0+\lambda a+\mu m,\ y_0+\lambda b+\mu n,\ z_0+\lambda c+\mu p)$$

Dessa forma obtemos: $\begin{cases} x=x_0+\lambda a+\mu m \\ y=y_0+\lambda b+\mu n \\ z=z_0+\lambda c+\mu p \end{cases}$ com $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ que são denominadas **equações paramétricas** do plano π.

Reciprocamente, dado o sistema de equações lineares, nas condições do sistema acima, ele representa o plano π do espaço que contém o ponto $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e tem a direção dos vetores $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ e $\vec{v}=(m,\ n,\ p)$, em relação ao sistema de coordenadas fixado. Para outro sistema de coordenadas, as mesmas equações podem representar outro plano.

Exemplo 3

Dada a equação vetorial do plano do exemplo 1, π: $\overrightarrow{OX}=(1,\ 0,\ 1)+\lambda(1,\ 1,\ -2)+\mu(0,\ -1,\ -1)$ com $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ temos:

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 1)+\lambda(1,\ 1,\ -2)+\mu(0,\ -1,\ -1).$$

Logo: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda-\mu \\ z=1-2\lambda-\mu \end{cases}$

Analogamente, no caso do plano π ser determinado por três pontos A, B e C **distintos**, **não colineares,** de coordenadas $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ temos: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ e assim $\begin{cases} x=x_1+\lambda(x_3-x_1)+\mu(x_2-x_1) \\ y=y_1+\lambda(y_3-y_1)+\mu(y_2-y_1) \\ z=z_1+\lambda(z_3-z_1)+\mu(z_2-z_1) \end{cases}$ com $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ são as **equações paramétricas** de π.

Exemplo 4

Dados $A(2,\ 1,\ 1)$, $B(3,\ -1,\ 1)$ e $C(4,\ 1,\ -1)$, três pontos, distintos e não colineares do exemplo 2. A equação vetorial do plano é, tal como determinamos: $\overrightarrow{OX}=(2,\ 1,\ 1)+\lambda(2,\ 0,\ -2)+\mu(1,\ -2,\ 0)$ com $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$. As equações paramétricas, portanto, são: $\begin{cases} x=2+2\lambda+\mu \\ y=1-2\mu \\ z=1-2\lambda \end{cases}$

4.3 Equação geral

Sejam um sistema de coordenadas ortonormal do espaço e um plano π que passa pelo ponto $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e tem a direção dos vetores $\vec{u}=(r,\ s,\ t)$ e $\vec{v}=(m,\ n,\ p)$ LI. Para que um ponto $X(x,\ y,\ z)$ pertença ao plano π é necessário e suficiente que a sequência de vetores $(\overrightarrow{AX},\ \vec{u},\ \vec{v})$ seja LD (coplanares) e, portanto, que o produto misto deles seja nulo. Isto é, $[\overrightarrow{AX},\ \vec{u},\ \vec{v}]=0$. Logo, o determinante das coordenadas dos vetores deve ser igual a zero, ou seja: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$

Daí vem que: $$(x-x_0)\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}-(y-y_0)\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}z+\left[-x_0\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}+y_0\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}-z_0\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}\right]=0$$

Fazendo $a=\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}$, $b=\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}$ e $c=\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$ e $d=-x_0\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}+y_0\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}-z_0\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$ vem que : $ax+by+cz+d=0$ que é chamada **equação geral** do plano π com $a,\ b,\ c,\ d$ reais, nem todos nulos pois $(\vec{u},\ \vec{v})$ é LI.

Reciprocamente, o conjunto dos pontos $X(x,\ y,\ z)$ do espaço cujas coordenadas, em relação ao sistema fixado, satisfazem a equação $ax+by+cz+d=0$ com $a,\ b,\ c,\ d$ reais, nem todos nulos, representam um plano.

Exemplo 5

Dados $\vec{u}=(1,\ 1,\ -2)$, $\vec{v}=(0,\ -1,\ -1)$ e $A(1,\ 0,\ 1)$ determine a equação geral do plano que passa por A e é paralelo a esses vetores.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3x+y-z+4=0.$$

No caso do plano π ser definido por três pontos $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ **não colineares**, a direção do plano π será dada pelos vetores: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ e $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$ LI e para um ponto $X(x,\ y,\ z)$ pertencer ao plano π os vetores $(\overrightarrow{AX},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ devem ser LD.

Assim a **equação geral** do plano ficaria: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, aplicando-se algumas propriedades dos determinantes obtém-se o equivalente a: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ que é uma fórmula útil para se obter a equação de um plano conhecendo-se três de seus pontos não colineares, em relação ao sistema de coordenadas fixado.

Exemplo 6

Dados $A(2,\ 1,\ 1)$, $B(3,\ -1,\ 1)$ e $C(4,\ 1,\ -1)$, três pontos, distintos e não colineares, encontre a equação geral do plano determinado por estes pontos.

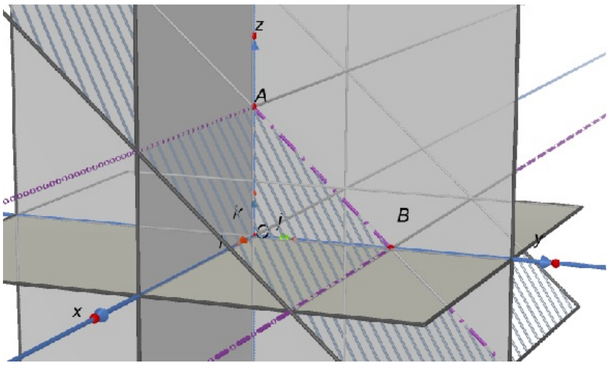
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x-2) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0 \Rightarrow 4x + 2y + 4z - 14 = 0$$

4.4 Equações gerais especiais

1. Análise da equação $ax + by + cz + d = 0$ quando $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$

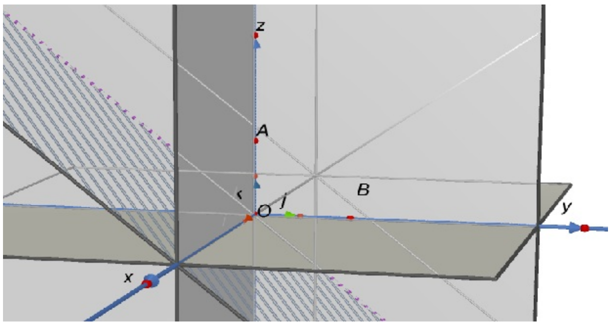
1º caso: $a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, plano $by + cz + d = 0$

$d \neq 0$



O plano é paralelo ao eixo x. Intercepta os eixos y e z não interceptando o eixo x. Um plano com uma equação sem termo em x é perpendicular ao plano yz

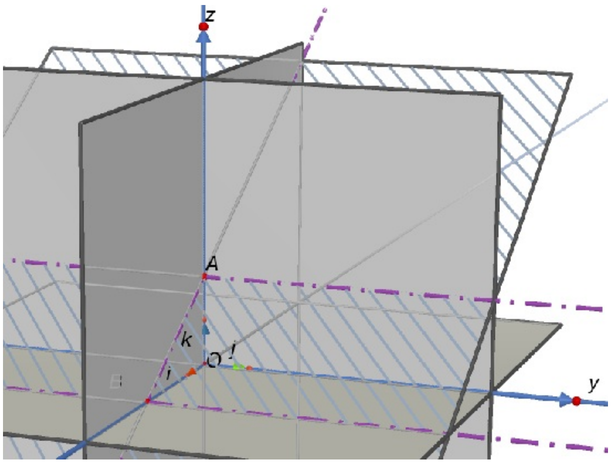
$d = 0$



O plano conterá o eixo x e terá equação *by*+*cz*=0.

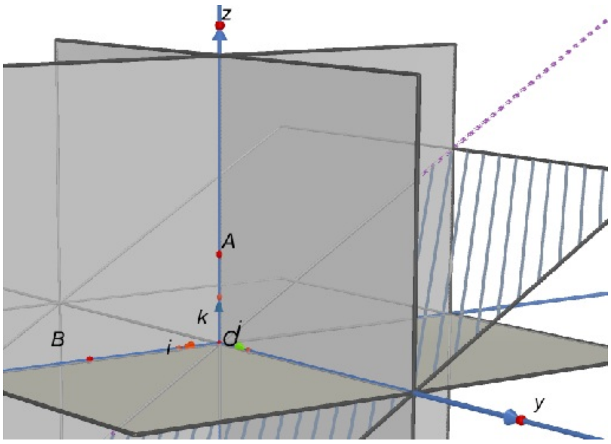
2º caso: $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$, plano $ax + cz + d = 0$

$d \neq 0$



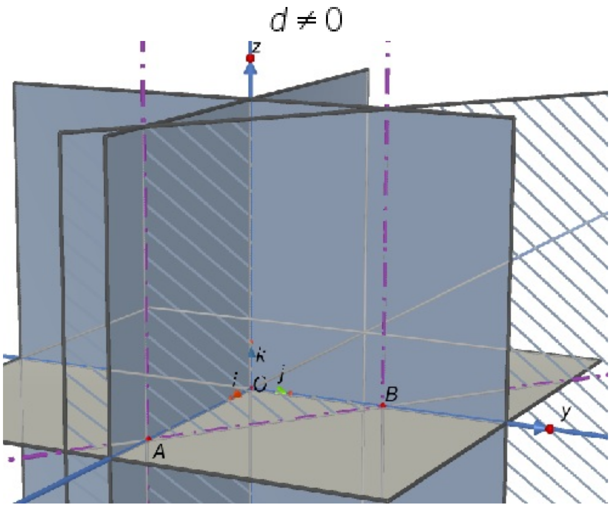
O plano é paralelo ao eixo y. Intercepta os eixos x e z não interceptando o eixo y. Esse plano é perpendicular ao plano xz.

$d = 0$

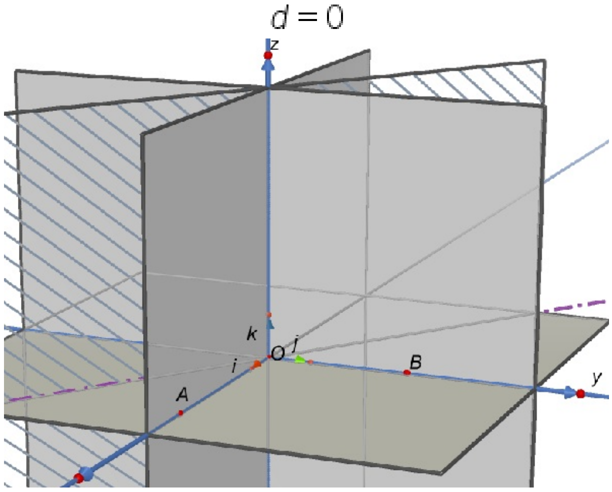


O plano conterá o eixo y e tem equação *ax*+*cz*=0.

3º caso: $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$, plano $ax + by + d = 0$

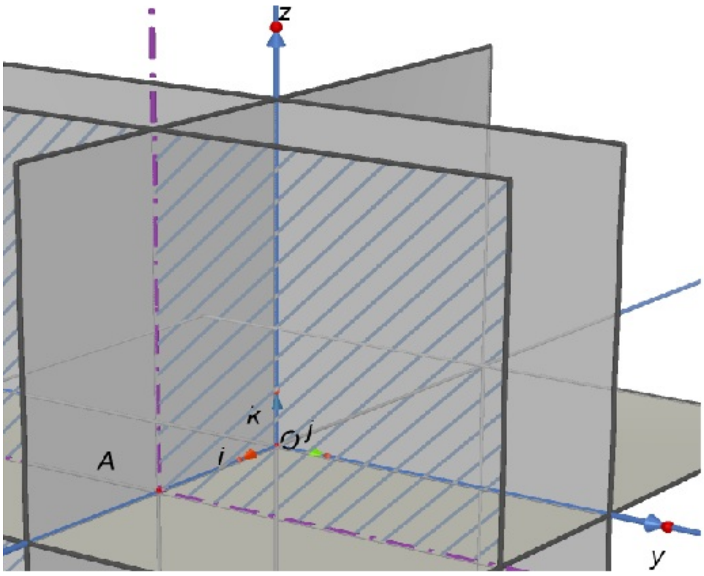


O plano é paralelo ao eixo z. Intercepta os eixos x e y não interceptando o eixo z. Esse plano é perpendicular ao plano xy.



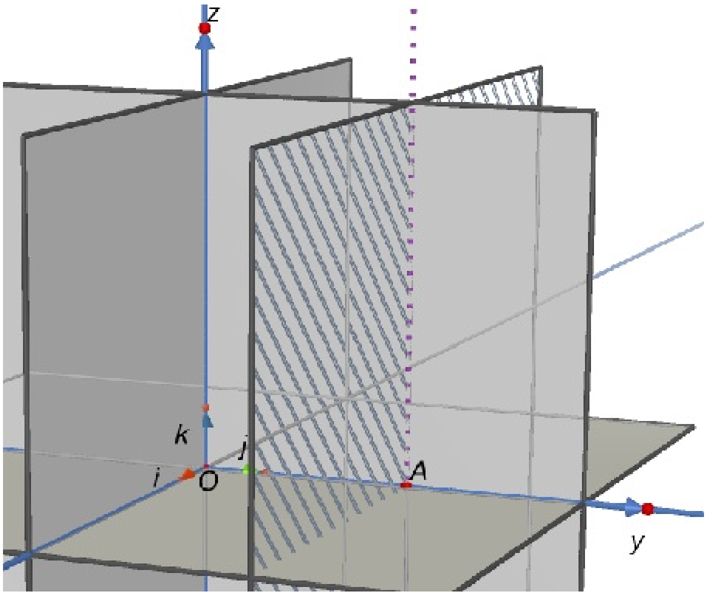
O plano conterá o eixo z e tem equação *ax*+*by*=0.

4º caso: ,$a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$ **plano** $ax + d = 0$ **com** $d \neq 0$



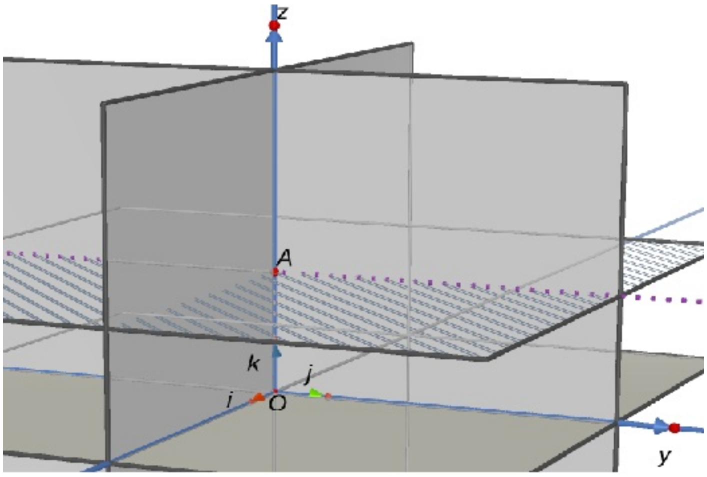
O plano intercepta o eixo x não interceptando os eixos y e z.
Se $d = 0$, isto é, $ax = 0$ ou simplesmente $x = 0$ é a equação do plano yz.

5º caso: $a = 0,\ b \neq 0,\ c = 0$**, plano** $by + d = 0$ **,** $d \neq 0$



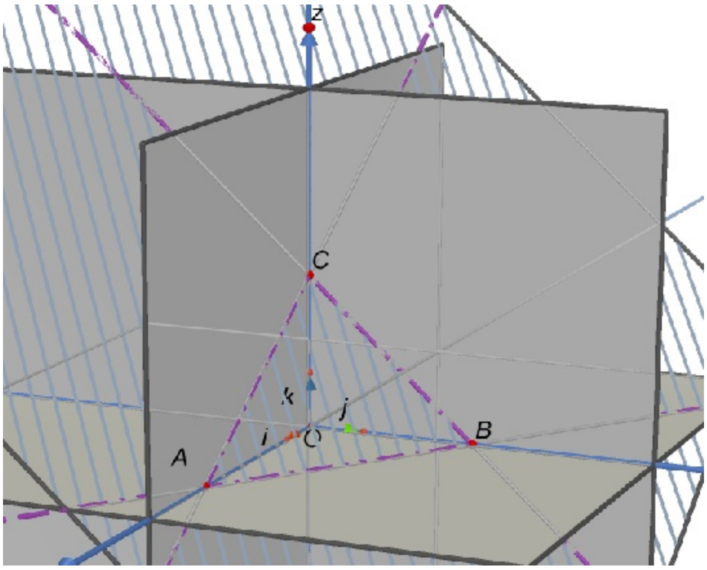
O plano intercepta o eixo y não interceptando os eixos x e z.
Se $d = 0$, isto é $by = 0$ ou $y = 0$ é a equação do plano xz.

6º caso: $a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$**, plano** $cz + d = 0$**,** $d \neq 0$



O plano intercepta o eixo z, não interceptando os eixos x e y.
Se $d = 0$, isto é $cz = 0$ ou $z = 0$ é a equação do plano xy.

7º caso: $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$**, plano** $ax + by + cz + d = 0$ **com** $d \neq 0$

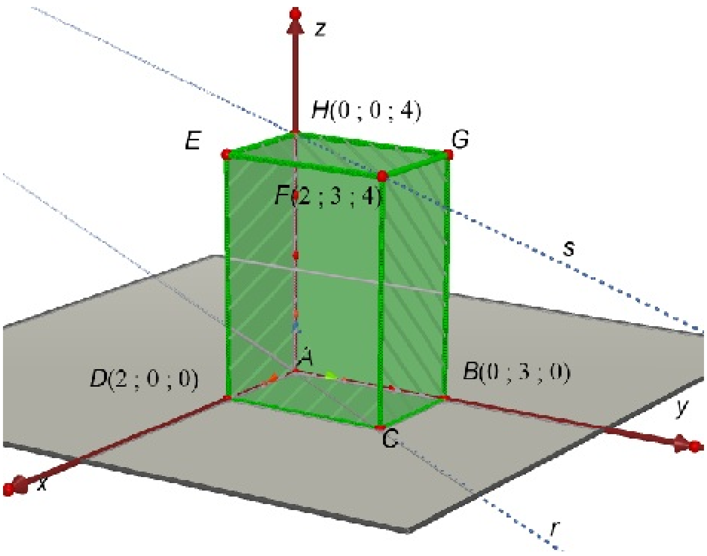


O plano intercepta os três eixos.

Se $d = 0$ o plano $ax + by + cz = 0$ passa pela origem, não contendo e nem interceptando nenhum dos eixos.

Exemplo 1

Observe a representação do ponto F (2,3,4) e identifique as equações dos planos que contém as faces do prisma representado e as equações das retas r e s.



Plano (DCE): $x = 2$

Plano (GBC): $y = 3$

plano (HEG): $z = 4$

Plano (HAB): $\overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 0) + \lambda(0,\ 1,\ 0) + \mu(0,\ 0,\ 1)$ com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

Plano (HAD): $\overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 0) + a(1,\ 0,\ 0) + b(0,\ 0,\ 1)$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$

Plano (ADC): $\overrightarrow{OX} = (2,\ 0,\ 0) + m(1,\ 0,\ 0) + n(0,\ 1,\ 0)$ com $m,\ n \in \mathbb{R}$

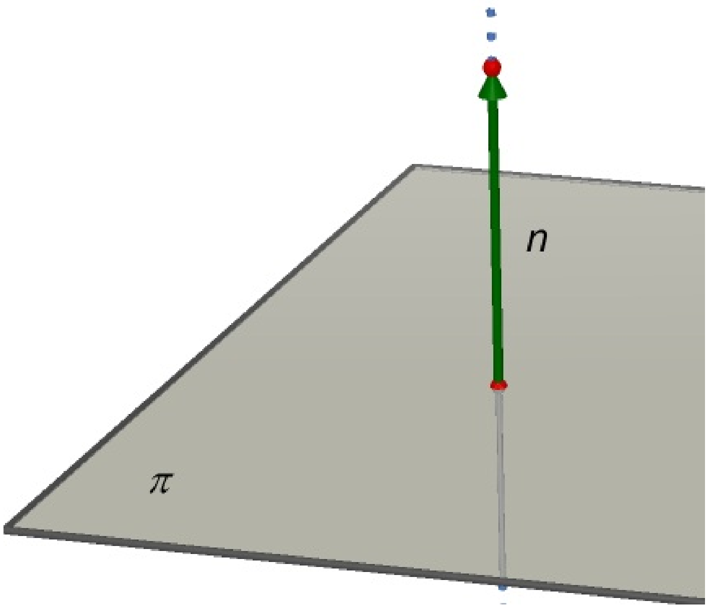
r: $\overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 0) + \alpha(2,\ 3,\ 0)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$

s: $\overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 4) + \beta(2,\ 3,\ 0)$ com $\beta \in \mathbb{R}$

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

4.5 Vetor normal a um plano

Chama-se vetor normal a um plano π , qualquer vetor não nulo, **ortogonal** a π, como mostra a figura 30.



Assim, $\vec{n} \neq \vec{0}$ é um vetor normal ao plano π se, e somente se, $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor paralelo a π. Então, dado um plano π por sua equação vetorial $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ um vetor normal a esse plano é dado por $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Vejamos como obter uma equação geral do plano π, conhecendo um ponto $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e um vetor $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ normal a π, Qualquer que seja $X(x,\ y,\ z)$, $X \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AX} \perp \vec{n}$, logo $X \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AX} \circ \vec{n} = 0$. Assim:

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \circ (a,\ b,\ c) = 0$$
$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$
$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

Chamando $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ temos: $ax + by + cz + d = 0$. Nessa equação vemos que os coeficientes de x, y e z são as **coordenadas do vetor normal** ao plano, na ordem adequada e sendo *d* dado como acima.

Reciprocamente, se o plano for dado pela sua expressão geral $ax + by + cz + d = 0$ um vetor normal a esse plano será $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$. O produto escalar entre $\vec{n}$ e um vetor $\vec{v}$ qualquer paralelo ao plano é nulo, isto é, $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ ou ainda $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0,\ \forall A,\ B \in \pi$.

Assim, sendo $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ se $A \in \pi$ temos $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ e se $B \in \pi$ temos $ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$. Subtraindo-se membro a membro temos: $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0$.

Exemplo 2

Sejam $\vec{n} = (-1,\ 3,\ 2)$ um vetor normal ao plano π e $A(0,\ 2,\ 1) \in \pi$. A equação geral do plano será dada por $ax + by + cz + d = 0$. Assim, temos: $(-1)x + 3y + 2z + d = 0 \Rightarrow -x + 3y + 2z + d = 0$.

Como $A(0,\ 2,\ 1) \in \pi$ temos que $(-1)0 + 3 \times 2 + 2 \times 1 + d = 0$, logo $d = -8$.

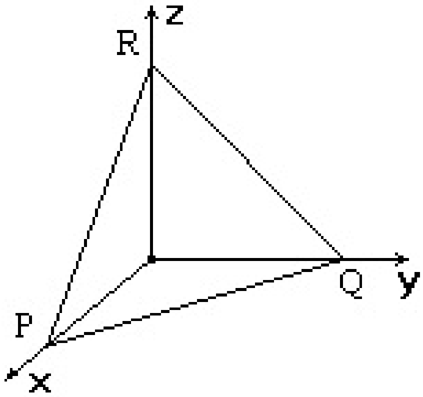
Portanto, a equação geral do plano π é: $-x + 3y + 2z - 8 = 0$.

*****O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

4.6 Equação segmentária

Consideremos um plano α cuja equação geral é $ax+by+cz+d=0$ com $a,\ b,\ c,\ d\neq 0$. Os pontos onde o plano intercepta os eixos coordenados, como mostra a figura 31 são: $P(p,\ 0,\ 0)$, $Q(0,\ q,\ 0)$ e $R((0,\ 0,\ r)$ que substituídos na equação geral nos dão:

Figura 31 - Plano interceptando os eixos coordenados



$$P\in\alpha\Rightarrow ap+d=0\Rightarrow p=-\frac{d}{a}$$

$$Q\in\alpha\Rightarrow bq+d=0\Rightarrow q=-\frac{d}{b}$$

$$R\in\alpha\Rightarrow cr+d=0\Rightarrow r=-\frac{d}{c}$$

Diremos que *p*, *q* e *r* são as medidas algébricas dos segmentos que o plano determina nos três eixos coordenados. Vamos agora explicitar p, q e r na equação geral do plano:

$$ax+by+cz+d=0\Rightarrow ax+by+cz=-d$$

$$\frac{ax}{-d}+\frac{by}{-d}+\frac{cz}{-d}=1\Rightarrow\frac{x}{-\frac{d}{a}}+\frac{y}{-\frac{b}{d}}+\frac{z}{-\frac{c}{d}}=1\Rightarrow\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

Essa é a **equação segmentária** do plano α

Exemplo 3

No exemplo anterior a reta tem equação geral $-x+3y+2z-8=0$. A equação segmentária desse plano será dada por:

$$-x+3y+2z-8=0$$

$$-x+3y+2z=8$$

$$\frac{-x}{8}+\frac{3y}{8}+\frac{2z}{8}=1$$

$$\frac{x}{-8}+\frac{y}{\frac{8}{3}}+\frac{z}{4}=1$$

Essa equação nos diz que o plano intercepta o eixo x no ponto $(-8,\ 0,\ 0\ )$, o eixo y no ponto $\left(0,\ \frac{8}{3},\ 0\right)$ e o eixo z no ponto $(0,\ 0,\ 4)$.

Exercícios de familiarização

Exercício 1

Escreva as equações vetorial, paramétrica e geral do plano que passa pelo ponto $A(2,\ 1,\ 3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (-3,\ -3,\ 1)$ e $\vec{v} = (2,\ 1,\ -2)$, Determine também um ponto P qualquer desse plano.

Exercício 2

Determine as equações vetorial, paramétricas e geral do plano determinado pelos pontos $A(5,\ 7,\ -2)$, $B(8,\ 2,\ -3)$ e $A(1,\ 2,\ 4)$.

Exercício 3

Em cada caso, que lugar geométrico representa a equação dada?

a. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{v}$ se $m \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = \vec{0}$

b. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + m\vec{v}$ se $m \in \mathbb{R}$ e $(\vec{u},\ \vec{v})$LI

c. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + t\vec{v}$ se $m,\ t\ \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = \vec{0}$

d. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{v} + t\vec{v}$ se $m,\ t\ \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} // \vec{v}$

Exercício 4

Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos:

a.
$$\pi_1:\ \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 1) + \lambda(1,\ -1,\ 2) + \mu\left(-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -1\right) \text{ e}$$
$$\pi_2:\ \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 1) + \lambda(-1,\ 1,\ -2) + \mu(-3,\ 4,\ -6)$$

b.
$$\pi_1:\ \overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 0) + \lambda(1,\ 1,\ 0) + \mu(0,\ 1,\ 0) \text{ e}$$
$$\pi_2:\ \overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 0) + \lambda(1,\ 2,\ 1) + \mu(0,\ -1,\ 1)$$

Exercício 5

Dadas as equações paramétricas de um plano $\pi:\ x = -1 + 2\lambda - 3\mu, y = 1 + \lambda + \mu$ e $z = \lambda$ com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ obtenha uma equação geral para esse plano.

Exercício 6

Uma reta r é dada como intersecção de dois planos $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. Dê as equações paramétricas de r.

Exercício 7

Sendo $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$, determine as equações de dois planos onde r é a intersecção deles.

Exercício 8

Determine a equação segmentaria do plano cuja equação geral é $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ e dê os pontos de intersecção desse plano com os eixos coordenados.

Exercício 9

Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto $P(3,\ 1,\ 5)$ e que determina segmentos iguais nos eixos coordenados.

Exercício 10

Determine uma equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1,\ 0,\ 2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1,\ -1,\ 4)$.

Exercício 11

Dadas as retas $r\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ e $s\colon\ x - 1 = y = z$ determine uma equação geral para o plano determinado por r e s.

Exercício 12

Represente as superfícies dos sólidos delimitados por:

a. $z = x + y$ com $0 \leqslant x \leqslant 5$ e $0 \leqslant y \leqslant 3$.

b. plano que intercepta os eixos em $x = 6$, $y = 8$, $z = 4$ e os planos $x = 3$ e $y = 2$.

c. $x = 0, y = 0, z = 0$ e $2x + y + z = 4$.

Avaliação

O próximo passo é resolver os exercícios que preparamos para esse tópico. Clique na atividade para acessá-la e resolver os exercícios propostos.

Avaliação 4

Responda sucintamente às questões propostas

⬤ Dúvidas

Dúvidas e outras questões poderão ser esclarecidas por meio do Fórum de dúvidas.