

PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

GABARITO EXERCÍCIOS DE FAMILIARIZAÇÃO – PRODUTO MISTO

Fixada uma base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormal resolva:

1) Calcule o produto misto dos vetores:

a) $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(15) - 3(-14) + 5(-9) = 30 + 42 - 45 = 27$$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 6, 4)$ e $\vec{c} = (2, 5, 5)$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 2(2) + 3(-2) = 10 - 4 - 6 = 0$$

c) $\vec{m} = (2, 1, 0)$, $\vec{n} = (1, 0, 2)$ e $\vec{p} = (0, 2, 1)$

$$\vec{m} \times \vec{n} \cdot \vec{p} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-4) - 1 = -8 - 1 = -9$$

2) Verifique se os vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$ são coplanares.

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1) + 1(2) + 4(-1) = -3 + 2 - 4 = -5$$

Como $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ os vetores não são coplanares

3) Calcule a medida do volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores: $\vec{u} = (2, -3, 4)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ e $\vec{w} = (3, -2, -2)$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 3 - 32 = -41$$

$$V_p = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = |-41| = 41 \text{ unidades cúbicas}$$

4) Calcule a medida do volume do tetraedro cujos vértices são $A(1, 2, 1)$, $B(7, 4, 3)$, $C(4, 6, 2)$ e $D(3, 3, 3)$

$$\vec{AB} = B - A = (6, 2, 2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (3, 4, 1)$$

$$\vec{AD} = D - A = (2, 1, 2)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 42 - 8 - 10 = 24$$

$$V = \frac{1}{6} \times 24 = 4 \text{ u.v.}$$

5) Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, calcular o valor de x para que a medida do volume do paralelepípedo determinado por esses vetores seja igual a 24 u.v.

$$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 24$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 5(-4) = x + 20$$

$$|x + 20| = 24$$

$$x + 20 = 24 \Rightarrow x = 4$$

ou

$$-x - 20 = 24 \Rightarrow x = -44$$

6) Calcule a medida do volume do tetraedro ABCD dados $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (0, 0, 1)$ e $\vec{AD} = (-4, 0, 0)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad (\text{produto misto dos vetores})$$

$$V_t = \frac{1}{6} |-4| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

Logo a medida do volume do tetraedro é $0,67 \text{ u.v.}$