PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

GABARITO EXERCÍCIOS DE FAMILIARIZAÇÃO – PRODUTO VETORIAL

Fixada uma base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormal resolva:

1) Calcule o produto vetorial entre os seguintes vetores:

a) (1, 3, 5) e (1, 1, 1)

$(1,3,5)$ e $(1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-5)\vec{i} - (1-5)\vec{j} + (1-3)\vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(1,3,5) \times (1,1,1) = (-2,4,-2).$$

b) (0, 0, 0) e (2, 1, 7)

$(0,0,0)$ e $(2,1,7)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

c) (2, 4, 6) e (3, 6, 9)

$(2,4,6)$ e $(3,6,9)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

2) Sendo $\vec{u} = (2,4,1)$ e $\vec{v} = (1,2,3)$ achar o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ e verificar se é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$\vec{u} = (2,4,1)$ e $\vec{v} = (1,2,3)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 5\vec{j} + 0\vec{k}$$

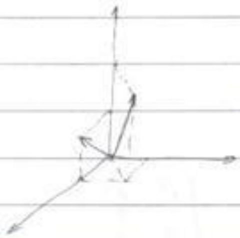
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (10,-5,0) \cdot (2,4,1) = 20 - 20 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (10,-5,0) \cdot (1,2,3) = 10 - 10 = 0$$

3) Determine o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

$\vec{u} = (1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1, 1, -1)$$



$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}$

$|\vec{u}| = \sqrt{6}$ e $|\vec{v}| = \sqrt{2}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$

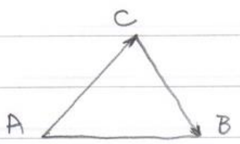
$\sqrt{3} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \theta$

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{2}$ como $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ temos $\theta = 30°$

4) Calcule a área do ΔABC, sabendo que em relação a uma base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ temos $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1, 1, 0)$.

ΔABC $\quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1, 1, 0)$



$A_\Delta = \dfrac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CB}|$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} = (-3, -3, 2)$$

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} |(-3, -3, 2)| = \frac{1}{2} \sqrt{9+9+4} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

5) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, -1)$, encontre o conjunto de vetores ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente. Determine um vetor unitário pertencente a esse conjunto.

$\vec{u} = (2, -2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, -1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} = (2, 4, 4)$$

$S = \{ m(2, 2, 4), \ m \in \mathbb{R} \}$

vetor unitário

$|(2, 4, 4)| = \sqrt{4+16+16} = 6$

$\pm \dfrac{1}{6}(2, 4, 4) = \pm \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3} \right)$

6) Determine o conjunto de vetores ortogonais a $\vec{u} = (2, -4, 3)$ e $\vec{v} = (2, -1, 0)$ simultaneamente. Quais desses vetores possuem módulo 15?

$\vec{u} = (2, -4, 3)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k} = (3, 6, 6)$$

$A = \{ \alpha (3, 6, 6),\ \alpha \in \mathbb{R} \}$

vetor de módulo 15

$|(3, 6, 6)| = \sqrt{9+36+36} = 9$

$\pm \frac{15}{9} \cdot (3, 6, 6) = \pm \frac{15}{9} \cdot 3(1, 2, 2) = \pm 5(1, 2, 2) =$

$= \pm (5, 10, 10)$

os vetores são $5\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$ ou $-5\vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k}$.

7) Determine $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ sendo:

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{k}$

$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$$

$\vec{v} \times \vec{u} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$