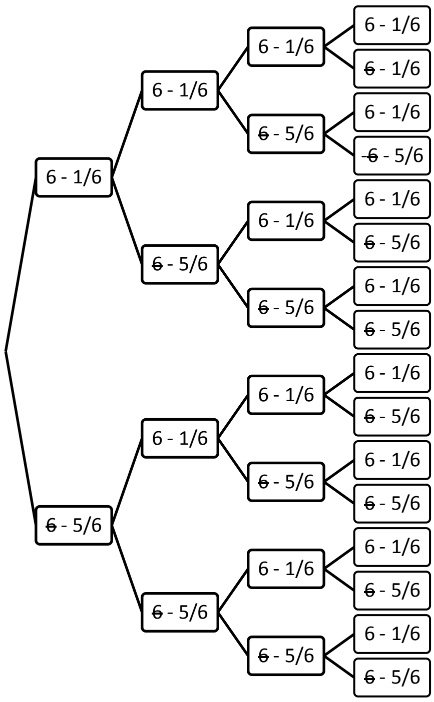
Modelo Binomial

Dando continuidade ao estudo das variáveis aleatórias discretas, o objetivo agora é fazer a modelagem matemática para várias situações com algumas características comuns. A fim de construir esse modelo e observar quais são essas características, consideremos o exemplo: *um dado é lançado 4 vezes e desejamos determinar a distribuição de probabilidades da variável aleatória X: número de vezes em que ocorre a face 6 nos 4 lançamentos.*

Conforme temos feito quando queremos determinar a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta, como é o caso do exemplo, inicialmente, precisamos construir o espaço amostra e as probabilidades dos pontos amostrais. Para tal, observando que o dado é lançado 4 vezes e que a v.a.d. X é definida como o número de vezes em que ocorre a face 6, nos 4 lançamentos, tem-se que, nesse experimento, interessa, apenas, se ocorre a face 6, cuja probabilidade é 1/6, ou, se não ocorre a face 6 ($\bar{6}$), cuja probabilidade é 5/6. Assim, o diagrama de árvore, será:



O espaço amostra associado a esse experimento é dado por:

$$\Omega = \{(\bar{6},\bar{6},\bar{6},\bar{6}),(6,\bar{6},\bar{6},\bar{6}),(\bar{6},6,\bar{6},\bar{6}),(\bar{6},\bar{6},6,\bar{6}),(\bar{6},\bar{6},\bar{6},6),(6,6,\bar{6},\bar{6}),(6,\bar{6},6,\bar{6}),(6,\bar{6},\bar{6},6),$$
$$(\bar{6},6,6,\bar{6}),(\bar{6},6,\bar{6},6),(\bar{6},\bar{6},6,6),(6,6,6,\bar{6}),(6,6,\bar{6},6),(6,\bar{6},6,6),(\bar{6},6,6,6),(6,6,6,6)\}$$

Faltam, agora, as probabilidades dos pontos amostrais.

$$P(\bar{6},\bar{6},\bar{6},\bar{6}) = P(\bar{6}\cap\bar{6}\cap\bar{6}\cap\bar{6}) = P(\bar{6})\times P(\bar{6})\times P(\bar{6})\times P(\bar{6}) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(6,\bar{6},\bar{6},\bar{6}) = P(6\cap\bar{6}\cap\bar{6}\cap\bar{6}) = P(6)\times P(\bar{6})\times P(\bar{6})\times P(\bar{6}) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(\bar{6},6,\bar{6},\bar{6}) = P(\bar{6}\cap 6\cap\bar{6}\cap\bar{6}) = P(\bar{6})\times P(6)\times P(\bar{6})\times P(\bar{6}) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Note que os demais pontos amostrais em que se tem exatamente uma vez o 6, a probabilidade é exatamente a mesma: $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$. Vejamos agora os casos em que se tem duas vezes o 6:

$$P(6,6,\bar{6},\bar{6}) = P(6\cap 6\cap \bar{6}\cap \bar{6}) = P(6)\times P(6)\times P(\bar{6})\times P(\bar{6}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(6,\bar{6},6,\bar{6}) = P(6\cap \bar{6}\cap 6\cap \bar{6}) = P(6)\times P(\bar{6})\times P(6)\times P(\bar{6}) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Note que os demais pontos amostrais em que se tem exatamente duas vezes o 6, a probabilidade é exatamente a mesma: $\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Podemos, então, pensar em determinar a probabilidade de cada ponto amostral que tenha três vezes o 6. Se tem três vezes o 6, na probabilidade tem-se $\left(\frac{1}{6}\right)^3$. Os demais casos, que é uma vez, não se tem o 6, ou seja, na probabilidade tem-se $\left(\frac{5}{6}\right)^1$. Assim, cada ponto amostral que tem três vezes o 6 e uma vez o "não 6" tem probabilidade igual a: $\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$.

Finalizando, o ponto amostral $(6,6,6,6)$, em que o 6 aparece quatro vezes, tem probabilidade igual a: $\left(\frac{1}{6}\right)^4$.

Determinado o espaço amostra e todas as probabilidades dos pontos amostrais, podemos determinar a distribuição de probabilidades da v.a.d. X: número de vezes que ocorre a face 6 nos cinco lançamentos desse dado. A tabela da distribuição de probabilidades de X é da forma:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P(X)					

Para obter as probabilidades, utilizaremos as probabilidades já determinadas. Assim, temos:

$$\boldsymbol{P(X=0)} = P(\bar{6},\bar{6},\bar{6},\bar{6}) = \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{4}}$$

$$\boldsymbol{P(X=1)} = P[(6,\bar{6},\bar{6},\bar{6})\cup(\bar{6},6,\bar{6},\bar{6})\cup(\bar{6},\bar{6},6,\bar{6})\cup(\bar{6},\bar{6},\bar{6},6)] =$$
$$= P(6,\bar{6},\bar{6},\bar{6}) + P(\bar{6},6,\bar{6},\bar{6}) + P(\bar{6},\bar{6},6,\bar{6}) + P(\bar{6},\bar{6},\bar{6},6) =$$
$$= \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\times\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{3}}$$

Pelo que acabamos de constatar, para determinar $P(X=2)$, já sabemos que a probabilidade de cada caso, em que se tem duas vezes o 6 e o restante "não seis", é $\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Para obtermos $P(X=2)$, basta determinarmos quantos pontos amostrais tem duas vezes o 6 e o restante "não seis", que é um problema de contagem. Note que esse número de casos é equivalente a encontrarmos o número de anagramas que se pode formar com as letras: AABB, em que AA equivale a duas vezes o 6 e BB equivale a duas vezes o "não seis". Assim, o número de casos é dado por: $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$. Portanto, $\boldsymbol{P(X=2)} = \frac{4!}{2!\,2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Analogamente, temos que: $\boldsymbol{P(X=3)} = \frac{4!}{3!\,1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$ **e** $\boldsymbol{P(X=4) = P(6,6,6,6)} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

Note que as probabilidades podem ser escritas de forma análoga (lembre que $0! = 1$):

$$\boldsymbol{P(X=0)} = \frac{4!}{0!\,4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \boldsymbol{P(X=1)} = \frac{4!}{1!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 \quad \boldsymbol{P(X=2)} = \frac{4!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\boldsymbol{P(X=3)} = \frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 \quad \boldsymbol{P(X=4)} = \frac{4!}{4!\,0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

Dessa forma, a tabela da distribuição de probabilidades da v.a.d. X é:

X	P(X)
0	$\frac{4!}{0!\ 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$
1	$\frac{4!}{1!\ 3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$
2	$\frac{4!}{2!\ 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$
3	$\frac{4!}{3!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$
4	$\frac{4!}{4!\ 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$

Note que a soma das probabilidades que deve ser igual a 1. De fato:

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$$

$$= \frac{4!}{0!\ 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{4!}{1!\ 3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{4!}{2!\ 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{4!}{3!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{4!}{4!\ 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

A soma anterior é, exatamente, o desenvolvimento do Binômio de Newton: $\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^4 = 1^4 = 1$.

Complementando a tabela a fim de determinar a esperança e a variância de X:

X	P(X)	X P(X)	X XP(X)
0	$\frac{4!}{0!\ 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$	0	0
1	$\frac{4!}{1!\ 3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$1 \times \frac{4!}{1!\ 3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cong 0{,}385802469$	$1 \times 0{,}385802469 \cong 0{,}385802469$
2	$\frac{4!}{2!\ 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{4!}{2!\ 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cong 0{,}231481482$	$2 \times 0{,}231481482 \cong 0{,}462962963$
3	$\frac{4!}{3!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$3 \times \frac{4!}{3!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 \cong 0{,}046296296$	$3 \times 0{,}046296296 \cong 0{,}138888889$
4	$\frac{4!}{4!\ 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$	$4 \times \frac{4!}{4!\ 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 \cong 0{,}003086420$	$4 \times 0{,}003086420 \cong 0{,}012345679$
total	**1**	0,666666667	1

Assim, E(X) = 0,666667

Assim, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \cong 1 - 0{,}66666667^2 \cong 0{,}555556$

$DP(X) = \sqrt{Var(X)} \cong \sqrt{0{,}555555556} \cong 0{,}745356.$

Em outra situação, podemos considerar que o dado foi lançado 8 vezes e que estamos interessados em estudar a v.a.d. *Y: número de vezes que ocorre a face 6 em 8 lançamentos do dado*.

Não é difícil constatar que a distribuição de probabilidades da v.a.d. *Y* é dada por: (já completando para determinar a esperança e a variância de *Y*):

Y	**P(Y)**	**Y P(Y)**	**Y YP(Y)**
0	$\frac{8!}{0!\ 8!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^8$	0	0
1	$\frac{8!}{1!\ 7!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^7$	$1 \times \frac{8!}{1!\ 7!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cong 0{,}37210886$	$1 \times 0{,}37210886 \cong 0{,}37210886$
2	$\frac{8!}{2!\ 6!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6$	$2 \times \frac{8!}{2!\ 6!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cong 0{,}52095241$	$2 \times 0{,}52095241 \cong 1{,}04190482$
3	$\frac{8!}{3!\ 5!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5$	$3 \times \frac{8!}{3!\ 5!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cong 0{,}31257144$	$3 \times 0{,}31257144 \cong 0{,}93771433$
4	$\frac{8!}{4!\ 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4 \times \frac{8!}{4!\ 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0{,}10419048$	$4 \times 0{,}10419048 \cong 0{,}41676193$
5	$\frac{8!}{5!\ 3!}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$5 \times \frac{8!}{5!\ 3!}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cong 0{,}02083810$	$5 \times 0{,}02083810 \cong 0{,}10419048$
6	$\frac{8!}{6!\ 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$6 \times \frac{8!}{6!\ 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cong 0{,}00250057$	$6 \times 0{,}00250057 \cong 0{,}01500342$
7	$\frac{8!}{7!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$7 \times \frac{8!}{7!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^1 \cong 0{,}00016670$	$7 \times 0{,}00016670 \cong 0{,}00116693$
8	$\frac{8!}{8!\ 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^0$	$8 \times \frac{8!}{8!\ 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^0 \cong 0{,}00000476$	$8 \times 0{,}00000476 \cong 0{,}00003810$
total	**1**	1,33333333	2,88888889

Assim, $E(Y) \cong 1{,}333333$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \cong 2{,}88888889 - 1{,}33333333^2 \cong 1{,}111111$$

$$DP(Y) = \sqrt{Var(Y)} \cong \sqrt{1{,}11111111} \cong 1{,}054093$$

Nosso intuito é identificar quais os tipos de situação que têm o mesmo "padrão de comportamento", isto é, a distribuição de probabilidades é semelhante à construída.

Não é difícil constatar que, assim como podemos lançar o dado, quatro vezes, oito vezes, etc., os tipos de situação que buscamos, apresentam um determinado número $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ de repetições de um mesmo experimento que se quer observar se ocorre, ou não, um determinado evento (no caso dos exemplos apresentados, esse evento era sair face 6 no dado). Note que, para garantir a repetição do mesmo experimento, ou seja, para que as probabilidades (de ocorrer, ou não o evento) sejam as mesmas, em qualquer repetição do experimento, é necessário que as repetições sejam **independentes** (a probabilidade do evento em uma repetição, não altera a probabilidade do evento em outra repetição).

É usual utilizarmos o termo **sucesso**, quando o evento que se quer observar ocorre, e **fracasso**, quando esse evento não ocorre. Também é usual utilizarmos a letra $\boldsymbol{p}$ (minúscula) para representar a probabilidade de **sucesso,** em cada repetição do experimento, e $\boldsymbol{q}$ para representar a probabilidade de **fracasso**. Obviamente, $p + q = 1$.

Valendo-se dessa nomenclatura, podemos dizer que toda v.a.d. definida por: ***X número de sucessos em n repetições independentes de um mesmo experimento do tipo sucesso/fracasso*** tem distribuição de probabilidades "semelhante" às que construímos. Considerando $P(sucesso) = p$ e $P(fracasso) = q$, temos:

X	P(X)
0	$\frac{n!}{0!\ n!}\ p^0 q^n$
1	$\frac{n!}{1!\ (n-1)!}\ p^1 q^{n-1}$
2	$\frac{n!}{2!\ (n-2)!}\ p^2 q^{n-2}$
3	$\frac{n!}{3!\ (n-3)!}\ p^3 q^{n-3}$
4	$\frac{n!}{4!\ (n-4)!}\ p^4 q^{n-4}$
...	...
k	$\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\ p^k q^{n-k}$
...	...
n	$\frac{n!}{n!\ (n-n)!}\ p^n q^{n-n}$

A representação em tabela, com esses "pontinhos" pelo meio, não é adequada. Em lugar disso, costumamos utilizar uma fórmula (basta considerar o termo geral da tabela).

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}\ p^k\ q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n \ \ \textbf{em que}: n \in \mathbb{N};\ p, q \in \mathbb{R}, 0 \leq p, q \leq 1, p + q = 1$$

Observe que a soma das probabilidades (coluna da direita na tabela) é um! De fato:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k) + \ \dots + P(X = n) =$$
$$= \frac{n!}{0!\ n!}\ p^0 q^n + \frac{n!}{1!\ (n-1)!}\ p^1 q^{n-1} + \cdots + \frac{n!}{k!\ (n-k)!}\ p^k q^{n-k} + \cdots + \frac{n!}{n!\ (n-n)!}\ p^n q^{n-n} =$$
$$= \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^n + \ \dots + \binom{n}{k} p^k q^n + \ \dots + \binom{n}{n} p^n q^n = (p + q)^n = 1^n = 1$$

Vejamos o que acontece, quando calculamos o valor esperado da v.a.d. X:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\,p^k\,q^{n-k}=0\binom{n}{0}\,p^0\,q^{n-0}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\,p^k\,q^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k\,q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\,\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k+1-1)!}\,\mathrm{p}\,p^{k-1}\,q^{(n-k+1-1)}=$$

$$=n\ p\sum_{k-1=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\,p^{k-1}\,q^{(n-1)-(k-1)}$$

Fazendo, na somatória: $k-1=a$ e $n-1=m$, tem-se:

$$E(X)=n\ p\sum_{a=0}^{m}\frac{m!}{a!\,(m-a)!}\,p^a\,q^{m-a}=n\,p\,(p+q)^m=n\,p1=np$$

Concluindo, para determinarmos a média da variável *X*, nesse tipo de situação, não precisamos fazer todos aqueles cálculos; basta fazermos: $n\times p$.

Essa conclusão só vai diminuir nosso trabalho de cálculo, se existir alguma forma, diferente do que fizemos, para calcular a variância. Ela existe e está demonstrada a seguir.

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}\,p^k\,q^{n-k}=0^2\binom{n}{0}\,p^0\,q^{n-0}+\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}\,p^k\,q^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\left[k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k\,q^{n-k}\right]=\sum_{k=1}^{n}k\left[k\,\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k+1-1)!}\,\mathrm{p}\,p^{k-1}\,q^{(n-k+1-1)}\right]=$$

$$=n\ p\sum_{k-1=0}^{n-1}(k-1+1)\left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\,p^{k-1}\,q^{(n-1)-(k-1)}\right]=$$

$$=n\,p\sum_{k-1=0}^{n-1}\left\{(k-1)\left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\,p^{k-1}\,q^{(n-1)-(k-1)}\right]+1\left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\,p^{k-1}\,q^{(n-1)-(k-1)}\right]\right\}=$$

$$=n\,p[(n-1)p+1]=n\,p[np-p+1]=n\,p[n\,p+q]=(n\,p)^2+n\,p\,q$$

Logo, $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(n\,p)^2+n\,p\,q-(n\,p)^2=n\,p\,q$

Concluindo, para determinarmos a variância da variável *X*, nesse tipo de situação, não precisamos fazer todos aqueles cálculos; basta fazermos: $n\times p\times q$.

A variável aleatória discreta *X: número de sucessos em n repetições independentes de um experimento do tipo sucesso/fracasso,* que acabamos de modelar (fizemos uma modelagem matemática desses tipos de situação) se diz ter distribuição binomial, com parâmetros *n* e *p.* Representamos: $X\sim B(n,p)$. Esse modelo é, portanto, denominado Modelo Binomial.

Em relação à função distribuição de probabilidades acumulada (ou repartição), o conceito é o mesmo estudado antes: $F(t)=P(X\leq t)$, para $\forall\ t\in\mathbb{R}$.

Exercícios de aplicação

***Exercício 1**. Uma organização de testes deseja avaliar o peso de determinado produto e verificar se está em acordo com as especificações da embalagem. Para tal, seleciona uma amostra de 10 embalagens do produto no estoque de supermercados em que o produto é comercializado. Sabe-se que esse mesmo produto já fora avaliado e constatou-se que 2% deles apresentaram peso inferior ao especificado na embalagem. Se a empresa que fabrica o tal produto não tomou nenhuma medida para melhorar a qualidade de seus produtos, qual a probabilidade de:*

(a) a marca ser considerada aprovada se, para isso, a organização de testes exige que na amostra coletada não deva existir nenhum produto com peso inferior ao especificado?

(b) a amostra conter no máximo um produto rejeitado (peso inferior ao especificado)?

(c) a amostra conter mais de sete produtos aprovados?

***Exercício 2**. Se 30 dentre os 40 alunos de uma turma dizem estar satisfeitos com o professor de Estatística, qual a probabilidade de, em uma amostra de 15 alunos, estarem satisfeitos:*

(a) no máximo sete? *(b) entre 8 e 12 alunos?*

***Exercício 3**. Porque nem todos os passageiros de aviões comparecem na hora de embarcar, uma companhia aérea vende 125 bilhetes para um vôo que suporta somente 120 passageiros. A probabilidade de que um passageiro não compareça ao embarque é 0,10. Admitindo que os passageiros se comportem de modo independente, em relação ao comparecimento para embarque,*

(a) qual a probabilidade de que cada passageiro que compareça possa embarcar?

(b) qual a probabilidade de que o vôo decole com assentos vazios?

(c) quais são a média e o desvio padrão do número de passageiros que comparecem ao embarque na tal companhia aérea?

***Exercício 4**. Em uma cidade é selecionada uma amostra de 60 adultos e a esses indivíduos é pedido para opinarem se são a favor, ou contra, determinado projeto. Como resultado obtido observou-se 40 adultos a favor. Se na realidade as opiniões pró e contra são igualmente divididas, qual é a probabilidade de se ter obtido tal resultado?*

***Exercício 5**. Cada amostra de ar tem 10% de chance de conter certa molécula rara. Considere que as amostras sejam independentes em relação à presença da tal molécula. Encontre a probabilidade de que nas próximas 18 amostras, contenham a molécula rara:*

(a) exatamente duas; *(b) no mínimo quatro;* *(c) entre três e sete.*

***Exercício 6**. Certa doença pode ser curada por meio de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 7 pacientes que serão submetidos à cirurgia. (I) Determine a probabilidade de: (a) todos serem curados; (b) pelo menos dois não serem curados; (c) ao menos 5 ficarem livres da doença. (II) Determine a função repartição e, a seguir, as probabilidades do item (I) usando essa função.*

***Exercício 7**. Um grande lote de aparelhos GPS TOM TOM é recebido por uma empresa distribuidora. O fabricante garante que 99,5% dos aparelhos não apresentam defeito. A fim de avaliar o lote, a distribuidora decide testar 20 aparelhos, selecionados aleatoriamente do lote. Qual a probabilidade de: (a) mais do que um aparelho testado apresente defeito? (b) todos os aparelhos testados estarem funcionando adequadamente?*