Questão 1.

r(A,B,C,D)

A	B	C	D
a1	b1	c1	d1
a1	b1	c2	d2
a1	b1	c2	d3
a1	b2	c1	d2
a2	b3	c3	d3
a3	b3	c2	d3
a4	b1	c2	d2
a2	b2	c1	d2
a4	b3	c2	d3
a3	b2	c2	d2
a4	b2	c2	d2
a2	b1	c1	d1
a2	b2	c3	d2
a4	b1	c2	d1
a2	b3	c1	d3
a2	b1	c3	d1
a3	b1	c2	d1

s(B,D)

B	D
b1	d1
b2	d2
b3	d3

r(A,B,C,D) ÷ s(B,D)

A	C
a2	c1
a2	c3
a3	c2
a4	c2

Observação: As cores indicam a tupla do resultado da divisão e as tuplas correspondentes de r(A,B,C,D).

Questão 2.

Para que a operação de divisão entre duas relações r(R) e s(S) seja possível é necessário que:

a) $S \subseteq R$
b) $S \neq R$

Se satisfeitas estas restrições, o esquema relacional do resultado é $R - S$.

Veja as expressões no outro arquivo.

Questão 3.

3a) 2ª FN. Dado um esquema relacional R e um conjunto de dependências funcionais F, dizemos que R está na 2ª FN se estiver na 1ª FN e não existe dependência funcional da forma:

$\alpha \rightarrow \beta \in F^+$

tal que

$\alpha \subseteq K$, $\alpha \neq K$, onde K é uma chave de R e
e os atributos de β não pertencem a nenhuma chave de R.

Observação importante (é um esclarecimento, não fazendo parte da resposta à questão): Cuidado ao se restringir à chave primária. Lembre-se que

1. Superchave é um subconjunto dos atributos de R que identifica univocamente cada elemento dentro conjunto. Ou seja, K é superchave de R se para quaisquer par de tuplas

   t_1 e $t_2 \in r(R)$, $t_1[K] \neq t_2[K]$.

Em termos de dependências funcionais, dizemos que K é superchave de R se e somente se

$K \rightarrow R$.

2. Chave candidata é qualquer superchave minimal (diferente de mínima), ou seja, K é uma chave candidata de R se não existe subconjunto próprio de K que seja também uma superchave. Em termos de conjuntos, é uma superchave minimal.

   A característica de ser minimal significa que tal superchave não contém como subconjunto próprio outra superchave. Escrevendo de forma mais rigorosa poderíamos dizer, entre outras maneiras, de duas formas abaixo:

   a) K é chave de R se:

   i) *K é superchave de R numa das formas escritas acima; e*
   ii) $\nexists\ K' \text{tal que } K' \subseteq K, K' \neq K \text{ e } K' \text{superchave de } R.$

   b) K é chave de R se:

   iii) *K é superchave de R numa das formas escritas acima; e*
   iv) $\nexists\ K' \text{tal que } K' \subseteq K, K' \neq K \text{ e } K' \text{não determina funcionamente } R.$

   É importante ressaltar que:

   i) Reforçando o que já foi citado, subconjunto minimal não é a mesma coisa que um subconjunto mínimo com relação a alguma propriedade;
   ii) Um esquema relacional pode ter várias chaves candidatas;
   iii) Quando não explicitado, estabelecemos que chave é sinônimo de chave candidata.

3. Chave primária é uma das chaves candidatas eleita pelo projetista como o principal meio de identificação dos elementos de um conjunto. Cada esquema relacional tem uma única chave primária que pode ter vários atributos.

3b) 3ª FN. Dado um esquema relacional R e um conjunto de dependências funcionais F, dizemos que R está na 3ª FN se estiver na 1ª FN (vide observação) e se toda dependência funcional:

$\alpha \rightarrow \beta \in F^+$

satisfaz a pelo menos uma das seguintes condições:

1. $\alpha \rightarrow \beta$ é uma dependência funcional trivial;
2. α é uma superchave de R;
3. Todo atributo em $\beta - \alpha$ está em alguma chave (candidata) de R.

Observação: A restrição de que deve estar na 1ª FN pode ser substituída, indistintamente, por 2ª FN porque a restrição adicional da 2ª FN, que impede dependência funcional parcial, está incluída na definição da 3ª FN.

Outra definição de terceira forma normal é a seguinte e é equivalente à apresentada acima. Essa equivalência é demonstrável.

Dizemos que R está na 3ª FN se estiver em 1ª FN e não existem dependências funcionais

$K \rightarrow \alpha$ e $\alpha \rightarrow A$

tais que

i) K é chave de R;
ii) α não é chave de R;
iii) $A \notin \alpha$;
iv) $A \notin$ a nenhuma chave candidata de R.

Observação: A segunda condição acima é necessária, pois, caso contrário, sendo chave, ficaria inconsistente com a definição anterior.

É possível também dizer da seguinte forma:

Dizemos que está R 3ª FN se estiver em 1ª FN e não existem dependências funcionais

$K \rightarrow \alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$

tais que

i) K é chave de R;
ii) α não é chave de R;
iii) $\alpha \rightarrow \beta$ não é trivial;
iv) Os atributos de $\beta - \alpha$ não pertencem a nenhuma chave candidata de R.

Observação: A segunda condição acima é necessária, pois, caso contrário, sendo chave, ficaria inconsistente com a definição anterior.

3c) FNBC. Dado um esquema relacional R e um conjunto de dependências funcionais F, dizemos que R está na Forma Normal de Boyce-Codd se estiver na 1ª FN e toda dependência funcional

$\alpha \rightarrow \beta \in F^+$

satisfaz a pelo menos uma das seguintes condições:

1. $\alpha \rightarrow \beta$ é uma dependência funcional trivial;
2. α é uma superchave de R.

Observação:

Algumas pessoas definiram a Forma Normal de Boyce-Codd da seguinte forma:

Dizemos que um esquema relacional R está na FNBC com respeito a um conjunto de dependências funcionais F se:

i) R Está na terceira forma normal;
ii) Todo atributo não primo (não pertence a nenhuma chave) depende funcionalmente da chave;

Veja que isto não é suficiente. Siga o exemplo abaixo:

R = (A,B,C)
F = { $AB \rightarrow C$, $C \rightarrow A$ }

i) AB é superchave e chave de R. Demonstre.
ii) C não é chave.
iii) A primeira condição (i) está satisfeita, ou seja, R está na 3ª FN. (A parte que está um pouco oculta é que o atributo A pertence à chave).
iv) O único atributo não primo é C e é obvio que depende chave.

v) Levando em conta a suposta definição, o esquema estaria na FNBC com respeito a F. No entanto, não está por causa da dependência funcional $C \rightarrow A$.

vi) A suposta definição não impõe nenhuma restrição sobre um atributo primo depender funcionalmente de atributos que não formam uma chave.

vii) Seria necessário acrescentar outra restrição, algo como:
$\nexists\ dependência\ funcional\ \beta \rightarrow A\ tal\ que\ \beta\ \text{não é}\ chave\ e\ A\ \text{é}\ primo.$

Questão 4. Defina superchave em termos de dependências funcionais.

Em termos de dependências funcionais, dizemos que K é superchave de R se e somente se

K → R.

Isto responde a questão. Como observações importantes, veja comentários da questão 3a.

Questão 5. Considere o esquema relacional
R= (A ,B, C, D, E) e o conjunto de dependências funcionais
F= {AB → BC, C → DE, AB → E}.

a) ABC é chave (candidata) de R?
b) AB é chave candidata de R? Explique. Se não for, encontre uma chave candidata para R;
c) R está na 2ª FN? Explique.
d) R está na 3ª FN? Explique.
e) Considere R_1= (A,B,C) e R_2 = (C,D,E). Mostre que a decomposição de R em R_1 e R_2 é sem perda na junção.
f) Mostre que a decomposição do item anterior preserva as dependências funcionais.

5a) ABC é chave (candidata) de R?

Para mostrar que ABC é uma chave candidata, precisamos verificar, primeiramente, se é uma superchave. Para isto, basta verificar se

ABC → R.

Utilizando o algoritmo para cálculo de ABC^+, obtemos:

```
Resultado temporário = ABC      (Início)
                     = ABCDE    (Aplicando C →   DE)
Resultado final para ABC+ = ABCDE
```

```
Como ABC+ = R, ABC é uma superchave.
```

```
Para que ABC seja uma chave dela precisa ser uma superchave minimal de modo que precisamos verificar se
ABC não contém uma supercharve, pois somente assim, seria uma chave. Vamos verificar a condição de AB
com relação a esta propriedade. Calculando AB+, obtemos:
```

```
Resultado temporário = AB       (Início)
                     = ABC      (Aplicando AB  →  BC)
                     = ABCDE    (Aplicando C   →  DE)
Resultado final para AB+ = ABCDE
```

Logo, AB também é uma superchave. Consequentemente, ABC não é uma chave candidata, embora seja uma superchave.

5b) AB é chave candidata de R? Explique. Se não for, encontre uma chave candidata para R.

No item anterior, mostramos que AB é uma superchave. Repetindo o mesmo raciocínio, para verificar se é uma chave, vamos calcular A^+ e B^+. Seguindo os passos do algoritmo, obtemos:

Cálculo de A^+

```
Resultado temporário = A
Nenhum atributo ascrescentado
Resultado final para A+ = A
```

Cálculo de B^+

```
Resultado temporário = B
Nenhum atributo ascrescentado
Resultado final para B+ = B
```

Concluimos então que A e B separadamente não são superchaves. Logo, AB é uma superchave minimal, ou seja, uma chave candidata.

Observação: É importante pesquisar por demais chaves (candidatas) presentes no esquema. Neste exemplo a única chave é AB. Isto não foi pedido no exercício.

5c) R está na 2ª FN? Explique.

Precisamos procurar por dependências funcionais que violam a condição de 2ª FN. A primeira característica delas é que o lado esquerdo é um subconjunto próprio de uma chave. Ou seja, precisamos procurar por dependências funcionais cujo lado esquerdo seja A ou B, separadamente.

No cálculo de A^+ e B^+ , obtivemos as seguintes dependências funcionais parciais em relação à chave candidata de R que é AB:

$A \rightarrow A$
$B \rightarrow B$

Agora, precisamos verificar a segunda característica das dependências funcionais que violam a 2ª FN que é o fato dos atributos do lado direito não pertencerem a nenhuma chave de R. As duas que listamos não violam a condição da segunda forma normal, porque os lados direitos pertencem à chave candidata.

Portanto, o esquema relacional R está na segunda forma normal. Rigorosamente, precisaríamos verificar se R não possui outras chaves candidatas porque a violação à condição pode ocorrer sob o ponto de vista de outras chaves candidatas, mas uma observação atenta mostra que existe somente uma chave candidata.

Observação: É claro que se todas as chaves de um esquema forem de um único atributo, ele estará em 2ª FN.

5d) R está na 3ª FN? Explique.

O esquema relacional R não está na terceira forma normal por que a dependência funcional $C \rightarrow DE$ tem as seguintes propriedades:

i. $C \rightarrow DE$ não é trivial;
ii. C não é uma superchave de R;
iii. Os atributos {D, E} não pertencem a nenhuma chave (candidata) de R.

Portanto, concluímos que $C \rightarrow DE$ viola a condição da 3ª FN e, consequentemente, o esquema R não está na 3ª Forma Normal.

5e) Considere R_1=(A,B,C) e R_2 =(C,D,E). Mostre que a decomposição de R em R_1 e R_2 é sem perda na junção.

Antes de responder objetivamente a questão, vamos explicar.

Suponha a relação r(R) e relações $r_1(R_1)$ e $r_2(R_2)$ que são resultantes da decomposição e obtidas da seguinte maneira:

$r_1(R_1) = \pi_{R1}(r(R))$ e
$r_2(R_2) = \pi_{R2}(r(R))$

Dizemos que uma decomposição é sem perda na junção se

$r_1(R_1) \bowtie r_2(R_2) = r(R)$

Esta é a definição, mas não é a maneira mais prática de se verificar se a decomposição é sem perda na junção à medida que as tuplas das relações se modificam. No entanto, sabemos que a condição suficiente para que uma decomposição de R em R_1 e R_2 seja sem perda na junção é que a seguinte condição seja atendida:

$R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1$ ou
$R_1 \cap R_2 \rightarrow R_2$.

Agora, retornando à questão específica, neste caso, $R_1 \cap R_2$ = {C}. Além disso, temos a dependência funcional C → DE. Facilmente, seja pelo algoritmo, seja pelos axiomas, podemos concluir que C → CDE, ou seja, C → R2. Portanto, a decomposição de R em R_1 e R_2 é sem perda na junção.

5f) Mostre que a decomposição do item anterior preserva as dependências funcionais.

Dado que:

i) F= {AB → BC, C → DE, AB → E},
ii) R_1=(A,B,C) e
iii) R_2 =(C,D,E).

Obtemos F_1 = { AB → BC } e F_2 = { C → CDE }, os conjuntos de dependências funcionais válidas em R_1 e R_2, respectivamente. Seja F' = F1 ∪ F2 = { AB → BC, C → CDE}.

Para responder a questão, basta fazer o que está em vermelho no final desta questão. A explicação seguinte é para seu estudo.

Para mostrar que a decomposição de R em R_1 e R_2 preserva as dependências funcionais, basta mostrar que $F^+ = F'^+$, com F' = {AB → BC, C → DE}. Calcular F^+ e F'^+ pode ser exaustivo porque teríamos de calcular todo o conjunto de dependências funcionais implicadas por F e F', respectivamente.

No entanto, para mostrar que $F^+ = F'^+$ basta mostrar que todas as dependências funcionais de F podem ser obtidas de F' e vice-versa, ou seja, F e F' são equivalentes. Se isto for conseguido, podemos afirmar que a decomposição preserva as dependências funcionais.

Temos F={AB → BC, C → DE, AB → E} e F' = {AB → C, C → DE}.

i. F => F'. Basta mostrar que de F podemos obter {AB → BC, C → DE}.

   É claro que F implica em F' porque, neste caso, F' é um subconjunto de F.

ii. F' => F. É necessário mostrar que as dependências funcionais que existem em F, mas não em F' podem ser obtidas a partir de F1'.

   Objetivamente, para responder à questão:

Precisamos mostrar que a dependência funcional AB → E (presente em F e ausente em F') pode ser obtida a partir das dependências funcionais de F'.

A maneira mais fácil é calcular AB^+, pelo método que estudamos, utilizando as dependências funcionais de F'. Pois então calculemos AB^+, utilizando somente F'. Neste caso, é uma repetição do que já fizemos:

```
Resultado temporário = AB       (Início)
                     = ABC      (Aplicando AB  →  BC)
                     = ABCDE    (Aplicando C   →  DE)
Resultado final para AB+ = ABCDE
```

Como AB → ABCDE, concluímos que AB → E.

Ou seja, utilizando as dependências funcionais de F – { AB → E } conseguimos reconstituir F. Logo, a decomposição preserva as dependências funcionais

Junho/2016.
Prof. Satoshi Nagayama.