Tópico 2 - Produto escalar e produto vetorial

Tópico 2

Site:	[Moodle PUC-SP]
Curso:	2015.1 - Geometria Analítica (GA)
Livro:	Tópico 2 - Produto escalar e produto vetorial
Impresso por:	ANA LUIZA PORTELLO BASTOS
Data:	sábado, 11 Nov 2017, 03:01

Sumário

2. Produto escalar, vetorial e misto

2.1 Produto escalar
2.1.1 Aplicações do Produto Escalar
Exercícios de familiarização - produto escalar

2.2 Produto vetorial
Exercícios de familiarização - produto vetorial

2.3 Produto misto
2.3.1 Interpretação geométrica do produto misto
Exercícios de familiarização - produto misto

Avaliação 2 - Produtos escalar, vetorial e misto

Dúvidas

Geometria Analítica

Produto escalar e produto vetorial

Tópico 1 Tópico 2 Tópico 3 Tópico 4 Tópico 5
Tópico 6 Tópico E

2. Produto escalar, vetorial e misto

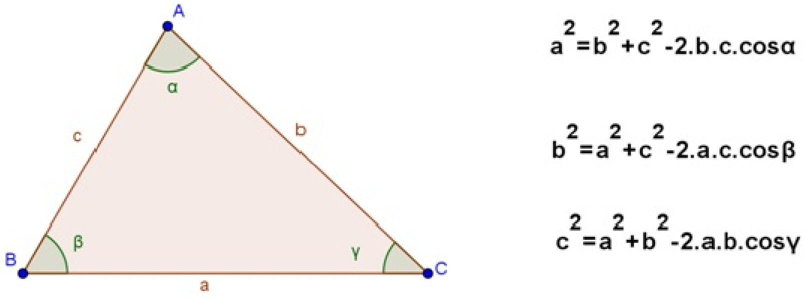
Neste tópico estudaremos o produto escalar, o produto vetorial e o produto misto entre vetores, tanto do ponto de vista algébrico, quanto do geométrico.Veremos também suas propriedades e aplicações.

As orientações são as mesmas apresentadas no tópico anterior.

2.1 Produto escalar

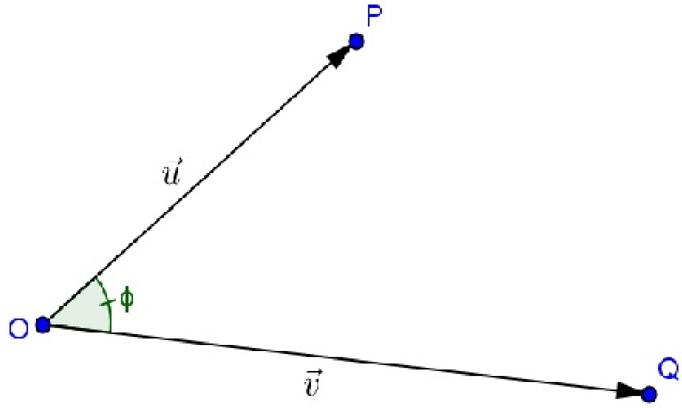
Lembrando que em um triângulo qualquer é válida a lei dos cossenos, ilustrada na figura 18.

Figura 18 - triângulo qualquer - lei dos cossenos



Consideremos os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, como mostra a figura 19.

Figura 19 - ângulo entre vetores



Seja Φ a medida do ângulo $P\widehat{O}Q$ com $0 \le \Phi \le \pi$.
O número Φ se chama medida em radianos do ângulo entre e $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Fixada uma base ortonormal $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ e tomando $\vec{u} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $\vec{v} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$. Se aplicarmos a lei dos cossenos no triângulo POQ, teremos $|QP|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\Phi \quad (1)$

Por outro lado,

$$|QP|^2 = |OP - OQ|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)|^2 =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 =$$
$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 =$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \qquad (2)$$

Comparando as equações (1) e (2) teremos:

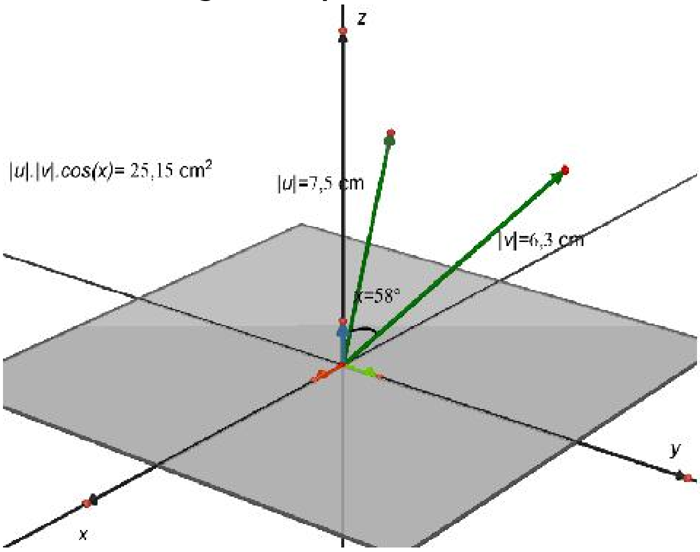
$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\Phi = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

Logo, $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\Phi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Definição

Dado $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ e sendo Φ a medida do ângulo entre os dois vetores, chama-se produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao número real $\vec{u} \circ \vec{v}$ dado por: $\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \Phi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, como mostra a figura 20.

Figura 20 - produto escalar



Convém observar que:

a. resulta da definição acima que se $\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \Phi$ então $\cos \Phi = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

b. $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\vec{u} \circ \vec{u} = x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$, logo $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}$.

Exemplo 1: calcule o produto escalar entre os vetores (1, 2, 3) e (4, 1, 2).

$$(1,\ 2,\ 3) \circ (4,\ 1,\ 2) = 1 \times 4 + 2 \times 1 + 3 \times 2 = 12$$

Exemplo2: determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1,\ 2,\ 2)$ e $\vec{v} = (1,\ -4,\ 8)$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3,\ |\vec{v}| = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9,\ \vec{u} \circ \vec{v} = 1 - 8 + 16 = 9$$

Como $\cos \Phi = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{9}{3 \times 9} = \dfrac{1}{3}$. Logo, $\Phi = arccos \dfrac{1}{3} \cong 71^\circ$.

Proposição

Dizemos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$, pois $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Essa propriedade nos permite caracterizar uma **base ortornormal.**

Se $B = \left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\right)$, B será uma base ortonormal se $\overrightarrow{e_i} \circ \overrightarrow{e_i} = 1$ e $\overrightarrow{e_i} \circ \overrightarrow{e_j} = 0$, com $i \neq j$ e $i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$ Isto é $\overrightarrow{e_i} \circ \overrightarrow{e_i} = 1$ para $i = 1,\ 2,\ 3$, $\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2} = 0$, $\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_3} = 0$ e $\overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_3} = 0$.

Propriedades do produto escalar

a. $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$

b. $\vec{u} \circ (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

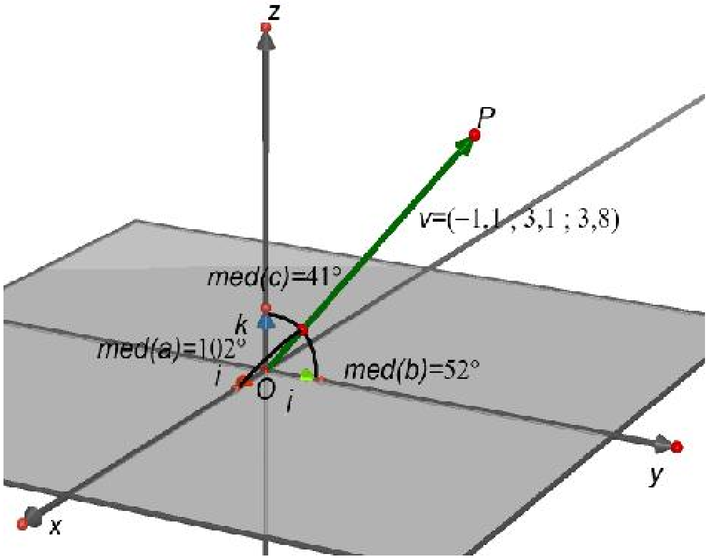
c. $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$

d. $\vec{u} \circ \vec{u} \geq 0, \quad \vec{u} \circ \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Aplicações do Produto Escalar

Cossenos diretores

Fixada uma base ortonormal $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ chamam-se cossenos diretores do vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ os cossenos dos ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores da base, como mostra a figura 21.



Chamando-se de a, b e c as medidas dos ângulos que $\vec{v}$ forma com $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente, e sendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ temos:

$\cos a = \dfrac{\vec{i} \circ \vec{v}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{x}{|\vec{v}|}$, $\cos b = \dfrac{\vec{j} \circ \vec{v}}{|\vec{j}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{y}{|\vec{v}|}$ e $\cos c = \dfrac{\vec{k} \circ \vec{v}}{|\vec{k}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{z}{|\vec{v}|}$.

Os ângulos de medidas *a*, *b* e *c* são os ângulos diretores do vetor $\vec{v}$.

Exemplo 3: determine os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
Primeiro calcularemos o módulo de $\vec{v}$: $|\vec{v}| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

Agora temos que calcular as medidas dos ângulos. $\cos a = \dfrac{x}{|\vec{v}|} \Rightarrow \cos a = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = \arccos\dfrac{1}{3} \cong 71^{\circ}$.

$$\cos b = \frac{y}{|\vec{v}|} \Rightarrow \cos b = \frac{-2}{3} \Rightarrow b = \arccos\frac{-2}{3} = 132^{\circ}$$

$$\cos c = \frac{z}{|\vec{v}|} \Rightarrow \cos c = \frac{2}{3} \Rightarrow c = \arccos\frac{2}{3} = 48^{\circ}$$

Logo os ângulos diretores são, aproximadamente, 71°, 132° e 48°.

Propriedades

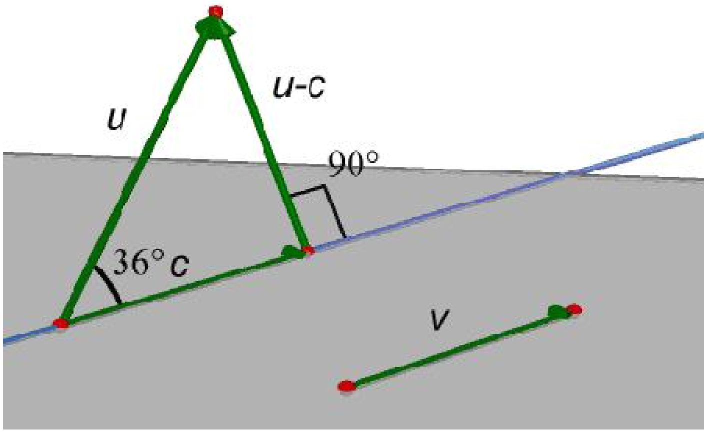
a. Como o versor de $\vec{v}$ é dado por $\overrightarrow{v_0} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\dfrac{x}{|\vec{v}|},\ \dfrac{y}{|\vec{v}|},\ \dfrac{z}{|\vec{v}|}\right)$ então $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\cos a,\ \cos b,\ \cos c\right)$. Logo os cossenos diretores são, precisamente, as componentes do versor do vetor.

b. b) Como o versor de $\vec{v} = \left(x,\ y,\ z\right)$ é um vetor unitário tem-se que $\left|\overrightarrow{v_0}\right| = 1$ ou seja $\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$. O que nos dá $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, isto é, a soma dos quadrados dos cossenos diretores é sempre 1.

Vetor componente ou vetor projeção

Um problema de muita aplicação na Física é o de determinar o vetor componente ou o vetor projeção de um vetor dado em uma direção dada, ou ainda, a decomposição de um vetor em dois vetores.

Figura 22 - vetor projeção



Na figura 22 temos o vetor $\vec{c}$, chamado vetor componente ou vetor projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v} \neq \vec{0}$ e indica-se por $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{c}$. Para obtermos o vetor $\vec{c}$ a partir de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conhecidos, basta observar que:

a. a) $\vec{c}\,//\,\vec{v}$ se, e somente se, $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{c} = \lambda\vec{v}$;

b. $(\vec{u} - \vec{c}) \perp \vec{v}$ se, e somente se, $(\vec{u} - \vec{c}) \circ \vec{v} = 0$. Isto é, como $\vec{c} = \lambda\vec{v}$, temos: $(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{u} \circ \vec{v}) - \lambda(\vec{v} \circ \vec{v}) = 0$ então $(\vec{u} \circ \vec{v}) = \lambda(\vec{v} \circ \vec{v})$.
   Logo, $\lambda = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\vec{v} \circ \vec{v}} = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$. Assim, $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{c} = \lambda\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$.

Exemplo 4: determine a projeção do vetor $\vec{w} = (1,\ -1,\ 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (3,\ -1,\ 1)$.
$|\vec{v}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$ e $\vec{w} \circ \vec{v} = 3+1+2 = 6$
$proj_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{c} = \dfrac{6}{11}(3,\ -1,\ 1) = \left(\dfrac{18}{11},\ \dfrac{-6}{11},\ \dfrac{6}{11}\right)$.

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

Exercícios de familiarização - produto escalar

Exercício 1

Calcule

a. $(1,\ 0,\ 1) \circ (-2,\ 10,\ 2)$

b. $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \bullet (\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k})$

c. $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \bullet (1, 2, 7)$

d. $(0, 0, 0) \bullet (-1,\ -9,\ 10)$

e. $(\sqrt{3},\ 1, 0) \bullet (1, 3,\ -7)$

f. $(2,\ 1,\ 1) \bullet (1,\ -4,\ 2)$

Exercício 2

Calcule o ângulo entre os vetores

a. $\vec{u} = (1,\ 2,\ 1)\ e\ \vec{v} = (1,\ -4,\ 8)$

b. $\vec{r} = (4,\ -1,\ 3)\ e\ \vec{s} = (1,\ 1,\ -1)$

Exercício 3

Qual o valor de m para que os vetores sejam ortogonais?

a. $\vec{u} = (m,\ 2,\ 3)\ e\ \vec{v} = (2,\ -1,\ 2)$

b. $\vec{r} = (m,\ 3,\ 4)\ e\ \vec{s} = (m,\ -2,\ 3)$

Exercício 4

Determine os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

Exercício 5

Determine a medida, em radianos, do arco determinado pelo ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos seguintes casos:

a. $\vec{u} = (1,\ 0,\ 1)\ e\ \vec{v} = (-2,\ 10,\ 2)$

b. $\vec{u} = (3,\ 3,\ 0)\ e\ \vec{v} = (2,\ 1,\ -2)$

c. $\vec{u} = (-1,\ 1,\ 1)\ e\ \vec{v} = (1,\ 1,\ 1)$

d. $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\ e\ \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}\right)$

e. $\vec{u} = (300,\ 300,\ 0)\ e\ \vec{v} = (-2000,\ -1000,\ 2000)$

Exercício 6

Determine x para que $\vec{u} \perp \vec{v}$ nos casos:

a. $\vec{u} = (x,\ 0,\ 3)\ e\ \vec{v} = (1,\ x,\ 3)$

b. $\vec{u} = (x+1,\ 1,\ 2)$ e $\vec{v} = (x-1,\ -1,\ -2)$

Exercício 7

Determine a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v}$ nos casos:

a. $\vec{w} = (-1,\ 1,\ 1)$ e $\vec{v} = (-2,\ 1,\ 2)$

b. $\vec{w} = (1,\ 3,\ 5)$ e $\vec{v} = (-3,\ 1,\ 0)$

Exercício 8

Decomponha $\vec{w} = (-1,\ -3,\ 2)$ como soma de dois vetores $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ de tal forma que $\overrightarrow{w_1}$ seja paralelo ao vetor (0, 1, 3) e $\overrightarrow{w_2}$ seja ortogonal a este último.

Exercício 9

Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais, o vetor $\vec{c}$ forma com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ângulos iguais a $\dfrac{\pi}{3}$.

Sabendo-se que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ e $|\vec{c}| = 8$, calcule:

1. $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \circ (\vec{b} + 3\vec{c})$ b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$ c) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$

Exercício 10

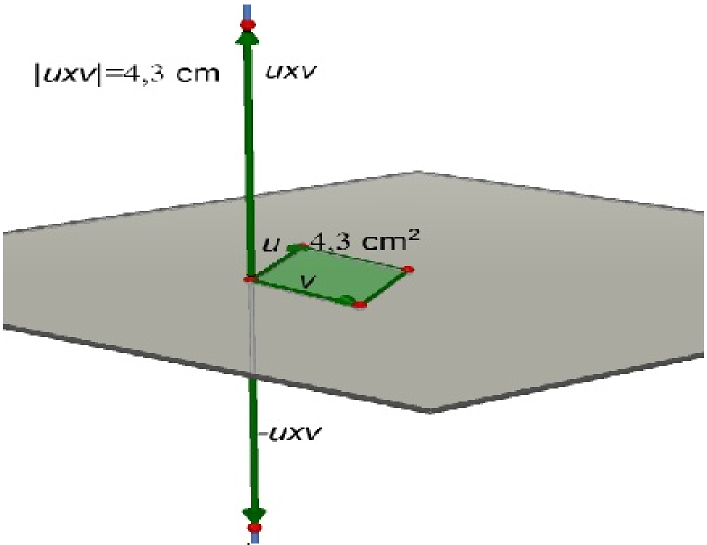
O ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ mede 120^0. Sendo $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, reto ou obtuso?

2.2 Produto vetorial

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode-se definir um novo vetor a partir deles chamado produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que indicaremos por $\vec{u} \times \vec{v}$ que é definido da seguinte maneira:

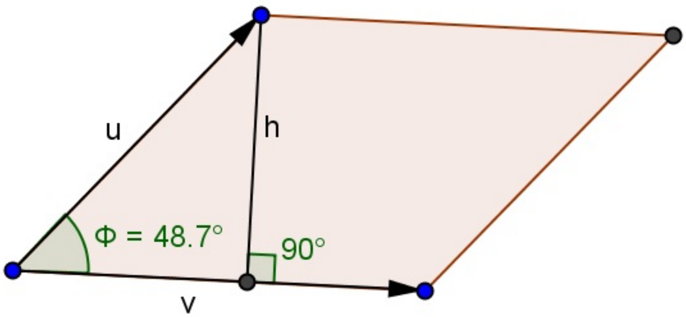
1. Se $\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$ é LD então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
2. Se $\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$ é LI então $\vec{u} \times \vec{v}$ será um vetor com as seguintes características
    1. $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal à $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
    2. $\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} \times \vec{v}\right)$ é base de V^3;
    3. $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$ é igual a medida da área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Veja na figura 23.

Figura 23 - produto vetorial



Observando a figura 24 vemos que $sen\Phi = \dfrac{h}{|\vec{u}|}$, ou seja $h = |\vec{u}| \cdot sen\Phi$. Por outro lado, podemos dizer que $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot sen\Phi$ onde Φ é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Figura 24 - paralelogramo



Proposição

Sendo $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ uma base ortonormal, $\vec{u} = \left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ e $\vec{v} = \left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$ em relação a essa base, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pelo seguinte determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemplo 1

Calcule o produto vetorial entre os vetores $\vec{u} = (1,\ 3,\ 5)$ e $\vec{v} = (1,\ 2,\ -1)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 3, 5) \times (1, 2, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3-10)\vec{i} - (-1-5)\vec{j} + (2-3)\vec{k} = -13\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$$

$\vec{u} \times \vec{v} = (1,\ 3,\ 5) \times (1,\ 2,\ -1) = (-13,\ 6,\ -1)$ que é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e seu móduto é igual à medida da área do paralelogramo formado por esses vetores.

Propriedades do produto vetorial

a. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ (determinante com duas linhas iguais)

b. associativa com um número real: $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

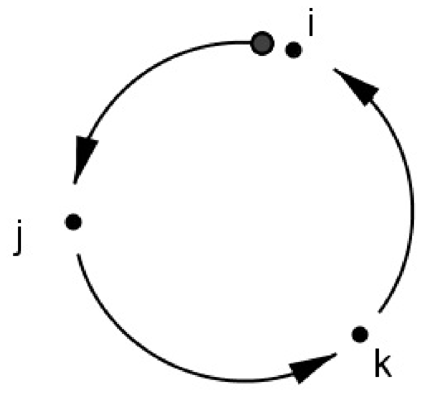
c. anti comutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

d. distributiva: $\vec{u} \times (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \vec{u} \times \overrightarrow{v_1} + \vec{u} \times \overrightarrow{v_2}$

e. Se $0 < \Phi < \pi$ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos: $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \circ \vec{v})^2$ **(Identidade de Lagrange).**

Convém observar que o produto vetorial **não é comutativo nem associativo.**

Dada a base $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ de um sistema ortonormal temos que:

	$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$	$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$	$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{0} = \vec{0}$ Como $\vec{i} \neq \vec{0}$ então $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} \neq \vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$.

*****O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

Exercícios de familiarização - produto vetorial

Fixada uma base $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ ortonormal resolva:

Exercício 1

Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ para os seguintes vetores:

a. $\vec{u} = (1,\ 3,\ 5)$ e $\vec{v} = (1,\ 1,\ 1)$

b. $\vec{u} = (0,\ 0,\ 0)$ e $\vec{v} = (2,\ 1,\ 7)$

c. $\vec{u} = (2,\ 4,\ 6)$ e $\vec{v} = (3,\ 6,\ 9)$

Exercício 2

Sendo $\vec{u} = (2,\ 4,\ 1)$ e $\vec{v} = (1,\ 2,\ 3)$ determine o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ e verifique se é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 3

Determine o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1,\ 1,\ 2)$ e $\vec{v} = (1,\ 0,\ 1)$.

Exercício 4

Calcule a medida da área do triângulo ABC sabendo que em relação a uma base ortonormal $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ temos $\overrightarrow{AC} = (1,\ 1,\ 3)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1,\ 1,\ 0)$.

Exercício 5

Dados os vetores $\vec{u} = (2,\ -2,\ 1)$ e $\vec{v} = (2,\ 0,\ -1)$ encontre o conjunto de vetores ortogonais $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente. Determine um vetor unitário pertencente a esse conjunto.

Exercício 6

Determine o conjunto de vetores ortogonais a $\vec{u} = (2,\ -4,\ 3)$ e $\vec{v} = (2,\ -1,\ 0)$ simultaneamente. Quais desses vetores possuem módulo 15?

Exercício 7

Determine $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ para os seguintes vetores:

a. $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{k}$

b. $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$

2.3 Produto misto

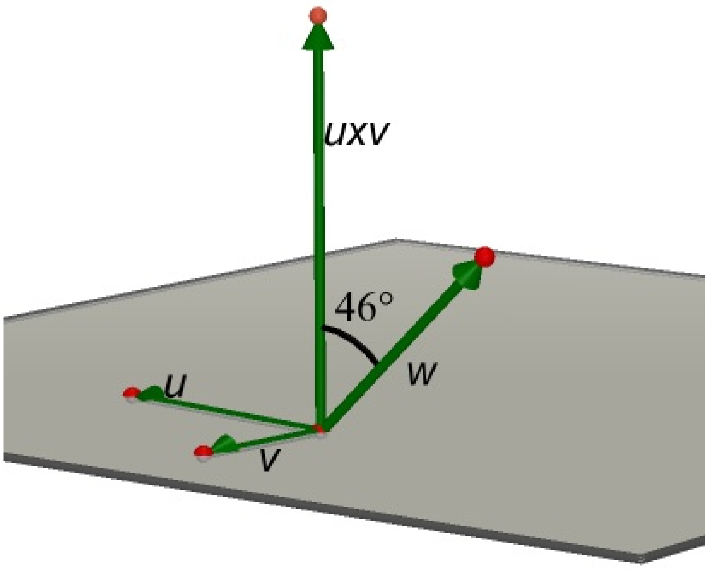
Dados os vetores $\vec{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ e $\vec{w}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$chamamos de **produto misto** desses vetores e indicamos por $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]$ ao número real dado por $\vec{u}\times\vec{v}\circ\vec{w}$, que pode ser obtido da seguinte forma:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}\circ\vec{w}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]$$

O produto misto pode resultar em um número positivo se $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ou em um número negativo se $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ sendo θ o ângulo entre o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ e o vetor $\vec{w}$, como mostra a figura 25.

Figura 25 - produto misto



Propriedades do produto misto

a. $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

b. Quando trocamos a posição de dois vetores o resultado será o oposto do número obtido anteriormente, isto é $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=-[\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{w}]$. Como consequência temos que $(\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}=\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})$.

c. $[\vec{u}+\vec{x},\ \vec{v},\ \vec{w}]=[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]+[\vec{x},\ \vec{v},\ \vec{w}]$

d. Se $\alpha\in\mathbb{R}$ então $\alpha[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=[\alpha\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=[\vec{u},\ \alpha\vec{v},\ \vec{w}]=[\vec{u},\ \vec{v},\ \alpha\vec{w}]$

Exemplo 2

Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ e $\vec{w}=4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(12+15+36)-(60-18-6)=63-36=27$$

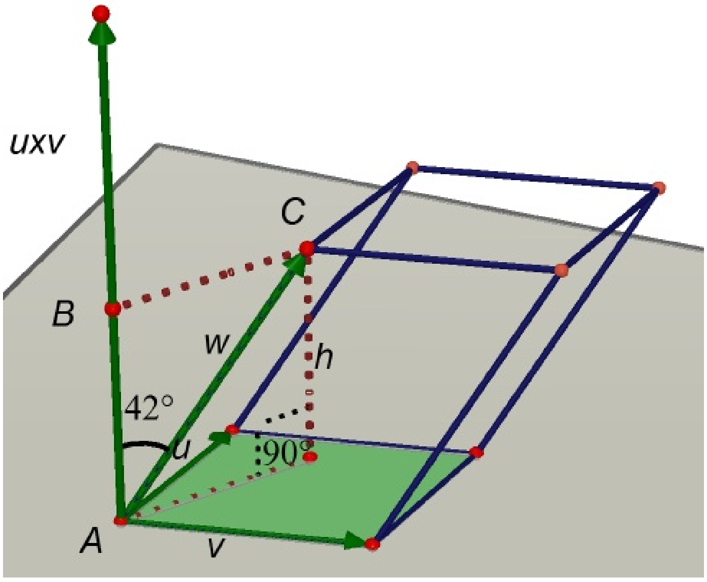
***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

2.3.1 Interpretação geométrica do produto misto

Volume do paralelepípedo

Verificaremos que o **módulo do produto misto** de três vetores é igual à medida do volume do paralelepípedo cujas arestas são representadas por esses vetores, como mostra a figura 26.

Figura 26 - volume do paralelepípedo



Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI e $0 < \theta < \pi$ o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$. Sabemos que a medida do volume do paralelepípedo é dado por $V_p = S \cdot h$ em que S representa a medida da área da base, dada por $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ e h representa a medida da altura do paralelepípedo.

Por outro lado, no triângulo ABC temos que $\cos\theta = \dfrac{h}{|\vec{w}|}$ o que nos dá $h = |\vec{w}||\cos\theta|$. Consideramos o módulo do cosseno porque o ângulo pode ser obtuso e, nesse caso, o cosseno é um número negativo. Logo podemos concluir que a medida do volume do paralelepípedo é obtida por: $S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\cos\theta| = |\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}| = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$. Assim, a medida do volume do paralelepípedo é o módulo do produto misto dos vetores que o determinam.

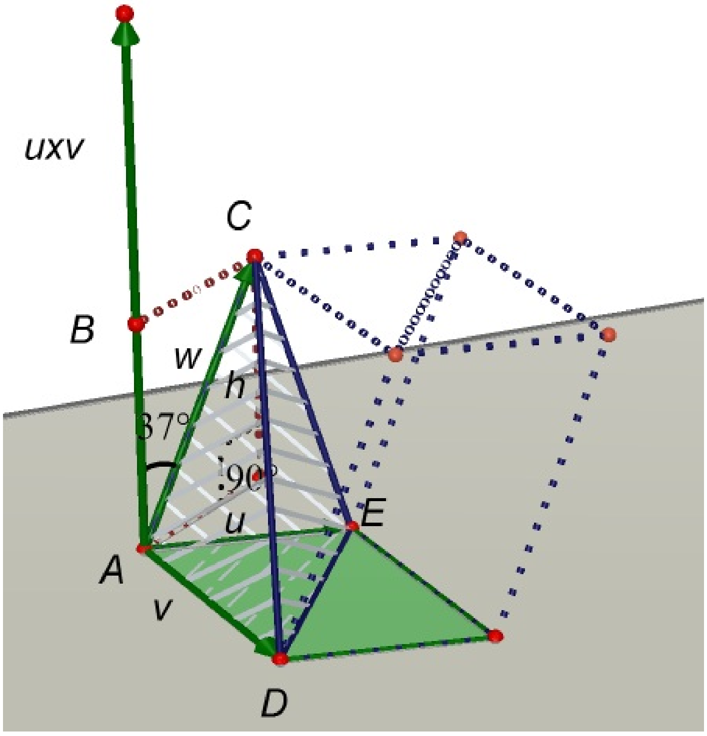
Exemplo 3

Tomando os vetores do exercício 2 temos que a medida do volume do paralelepípedo determinado por eles é de 27u.v. (unidades de volume).

Volume do tetraedro

Uma pirâmide é um sólido em que a base é um polígono e as demais faces são triângulos. Para calcular a medida do volume de uma pirâmide utilizamos a fórmula $V = \dfrac{1}{3} S \cdot h$ em que S representa a medida da área da base e h a medida da altura da pirâmide. Um tetraedro é uma pirâmide em que a base também é um triângulo.

Figura 27 - volume do tetraedro



A todo tetraedro podemos asssociar um paralelepípedo, como mostra a figura 27, de modo que tenham em comum três arestas e, portanto, a mesma altura h. Esse paralelepípedo pode ser dividido em dois prismas triangulares de mesmas medidas e volume, e ainda, que um prisma de base triangular pode ser trisseccionado em pirâmides de mesmo volume, sendo uma o tetraedro ADEC.

Assim, a medida do volume do tetraedro será dada, em termos vetoriais por: $V_T = \frac{1}{3} S_T \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_P \cdot h = \frac{1}{6} V_P$ em que S_T representa a medida da área da base do tetraedro, V_T representa a medida do volume do tetraedro e V_P a medida do volume do paralelepípedo. Portanto, a medida do volume do tetraedro determinado por três vetores é igual a um sexto da medida do volume do paralelepípedo determinado por tais vetores, o que nos permite concluir que a medida do volume de tal tetraedro é um sexto do módulo do produto misto de tais vetores, isto é $V_T = \frac{1}{6} \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right|$.

Em termos dos vértices ADEC podemos dizer que $V_T = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}) \bullet \overrightarrow{AC} \right|$.

Exemplo 4

Ainda no exemplo anterior a medida do volume do tetraedro determinado pelos três vetores é $\frac{1}{6} 27$, ou seja 4,5 u.v. (unidades de medida de volume).

***O plugin do software Cabri é um recurso externo ao Ambiente Virtual de Aprendizagem da PUC-SP, **não faz parte da plataforma Moodle**. Informações sobre instalação, manutenção e padrões de uso devem ser esclarecidas diretamente com a empresa fornecedora. Para mais detalhes sobre o software acesse: http://www.cabri.com/es e/ou http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html.

Exercícios de familiarização - produto misto

Exercício 1

Calcule o produto misto dos vetores:

a. $\vec{u} = (2,\ 3,\ 5)$, $\vec{v} = (-1,\ 3,\ 3)$ e $\vec{w} = (4,\ -3,\ 2)$

b. $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b} = (2,\ 6,\ 4)$ e $\vec{c} = (2,\ 5,\ 5)$

c. $\vec{m} = (2,\ 1,\ 0)$, $\vec{n} = (1,\ 0,\ 2)$ e $\vec{p} = (0,\ 2,\ 1)$

Exercício 2

Verifique se os vetores $\vec{u} = (3,\ -1,\ 4)$, $\vec{v} = (1,\ 0,\ -1)$ e $\vec{w} = (2,\ -1,\ 0)$ são coplanares.

Exercício 3

Calcule a medida do volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores $\vec{u} = (2,\ -3,\ 4)$, $\vec{v} = (1,\ 2,\ -1)$ e $\vec{w} = (3,\ -2,\ -2)$.

Exercício 4

Calcule a medida do volume do tetraedro cujos vértices são $A(1,\ 2,\ 1)$, $B(7,\ 4,\ 3)$, $C(4,\ 6,\ 2)$ e $D(3,\ 3,\ 3)$.

Exercício 5

Dados os vetores $\vec{u} = (x,\ 5,\ 0)$, $\vec{v} = (3,\ -2,\ 1)$ e $\vec{w} = (1,\ 1,\ -1)$ calcule o valor de x para que a medida do volume do paralelepípedo determinado por esses vetores seja igual a 24 u.v.

Exercício 6

Calcule a medida do volume do tetraedro ABCD dados $\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,\ 0,\ 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-4,\ 0,\ 0)$.

Avaliação - Produtos escalar, vetorial e misto

O próximo passo é resolver os exercícios que preparamos para esse tópico. Clique na atividade para acessá-la e resolver os exercícios propostos.

Avaliação 2

Responda sucintamente às questões. Poste as respostas até o final da segunda semana.

Dúvidas

Dúvidas e outras questões poderão ser esclarecidas por meio do Fórum de dúvidas.