Prova P2 de A3 – Curso C.C. – Profa. Lydia – 24.11.2014

Nome____Assin.____________________________________

1) Verificar se os operadores lineares abaixo são isomorfismos. Justificar.

$a)\ F:\Re^3 \to \Re^3$ tal que $F(x,,y,z) = (x-y,\ x+y,\ 0)$.

$N(F) = \{(x,y,z) \mid (x-y,\ x+y,\ 0) = (0,0,0)\} =$

$= \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$N(F) = [(0,0,1)]$ e $\dim N(F) = 1$

F não é injetora

F não é isomorfismo

Observação: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

b) $F: R^3 \to R^3$ dada pela matriz, na base canônica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 5z \\ 2x + 3y \\ -y \end{pmatrix}$$

$F(x,y,z) = (x+5z,\ 2x+3y,\ -y)$

$N(F) = \{(x,y,z) \mid (x+5z,\ 2x+3y,\ -y) = (0,0,0)\} =$

$= \{(0,0,0)\}$.

$\dim N(F) = 0 \Rightarrow$ F é bijetora $\Rightarrow$ F é isomorfismo

Observação $\begin{cases} x + 5z = 0 \Rightarrow 5z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

2) Determinar os autovalores e os autovetores da transformação linear T cuja matriz com relação à base canônica do R² é: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$T(x, y) = (4x + 2y, -x + y).$$

$$(4x + 2y, -x + y) = (\lambda x, \lambda y).$$

$$\begin{cases} (4-\lambda)x + 2y = 0 \\ -x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0$$

$$4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \quad \begin{matrix} 2 = \lambda_1 \\ 3 = \lambda_2. \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \quad 2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x. \text{ ou } x = -y$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow \quad (4 - 3)x + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{2} \text{ ou } x = -2y.$$

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow (x, -x)$ é autovetor associado a $\lambda = 2$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow \left(x, -\frac{x}{2}\right)$ é autovetor associado a $\lambda = 3$

$$S_1 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \left\{\left(x, -\frac{x}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}.$$

3)Determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das transformações lineares F:

a) $F: R^2 \to R^2$ dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$

$N(F) = \{(x,y) \mid (2x, x+y) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$.

$\dim N(F) = 0$

$\dim Im(F) = 2$ $\quad B(Im_F) = \{(1,0), (0,1)\}$

$Im(F) = R^2$.

Observação $\begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + y = 0 \Rightarrow 0 + y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

b) $F: R^3 \to R^4$ dada por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$

$N(F) = \{(x,y,z) \mid (x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y) = (0,0,0,0)\}$

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ $\quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x + z = 0 \Rightarrow z = 0$

$\dim Im(F) = 3$

$B = \{(1,1,2,0), (-1,1,-1,-1), (-1,1,1,0)\}$.

Observação:

$(x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y) =$
$= x(1,1,2,0) + y(-1,1,-1,-1) + z(-1,1,1,0)$.

4) Seja $F(x,,y,z)=(4x+2y,-x+y,y+2z)$

a) Calcular F(0,0,3) e F(-2,1,1).

$F(0,0,3)=(0,0,6)$.

$F(-2,1,1)=(-6,3,3)$.

b) u=(0,0,3) é autovetor de F? Por quê?

$(0,0,6)=2(0,0,3)$

autovetor associado a $\lambda=2$

c) v=(-2,1,1) é autovetor de F? Por quê?

$(-6,3,3)=3(-2,1,1)$.

autovetor associado a $\lambda=3$

5) Seja $T:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ uma transformação linear cujo núcleo tem dimensão 1. Então, pode-se afirmar que:

(A) *T* é injetora. (..F....)

(B) *T* é sobrejetora.(..F....)

(C) a imagem de *T* tem dimensão 1.(..F....)

(D) a imagem de *T* tem dimensão 2.(..V....)

(E) o vetor nulo é o único vetor cuja imagem por *T* é nula.(..F....)

$\dim \mathbb{R}^3=\dim N(T)+\dim Im(T)$

$3=1+\dim Im(T) \Rightarrow \dim Im(T)=2$

$\dim N(T)=1 \Rightarrow$ T não é injetora; T não é sobrejetora e vetor nulo não é o único cuja imagem por T é nula.