Teorema do Produto e de Bayes

Na definição de probabilidade condicional, vimos que, dados dois eventos A e B, diferentes do evento impossível, de um mesmo espaço amostra, temos que:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{e} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dessas duas igualdades temos que:

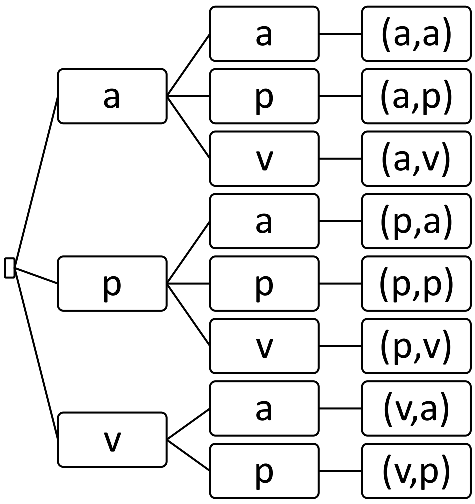
$\boldsymbol{P(A \cap B)} = \begin{cases} \boldsymbol{P(A).P_A(B)} \\ \\ \boldsymbol{P(B).P_B(A)} \end{cases}$, conhecido como **Teorema do Produto** para dois eventos.

Note que qualquer dos dois eventos pode "começar" no produto. Dependendo do contexto da situação, um deles pode ser mais conveniente que outro. Vejamos um exemplo em que se pode aplicar tal resultado.

Exemplo: Considere uma gaveta com 6 canetas azuis, 3 pretas e 1 vermelhas. Duas canetas são selecionadas, ao acaso, dessa gaveta, sem reposição. Determine a probabilidade de obtermos:

(a) a primeira caneta azul e a segunda vermelha;
(b) as duas canetas pretas;
(c) as duas canetas da mesma cor.

Como temos duas etapas nesse experimento, uma boa ferramenta que pode nos ajudar na determinação dos casos possíveis, como já estudamos, é a Árvore de Possibilidades:



O que queremos agora é introduzir as probabilidades.

Na escolha da primeira caneta temos: $P(a_1) = \frac{6}{10}$, $P(p_1) = \frac{3}{10}$ e $P(v_1) = \frac{1}{10}$

A probabilidade de escolha da segunda caneta depende da cor da primeira caneta selecionada, porque dependendo da cor da primeira caneta, o espaço amostra restrito (agora com 9 canetas) muda, o que significa que as probabilidades na escolha da segunda caneta são **condicionadas** ao resultado da primeira escolha.

Se a primeira caneta foi azul, teremos: $P_{a_1}(a_2) = \frac{5}{9}$, $P_{a_1}(p_2) = \frac{3}{9}$, $P_{a_1}(v_2) = \frac{1}{9}$ (note que a soma é um)

Se a primeira caneta foi preta, teremos: $P_{p_1}(a_2) = \frac{6}{9}$, $P_{p_1}(p_2) = \frac{2}{9}$, $P_{p_1}(v_2) = \frac{1}{9}$ (note que a soma é um)

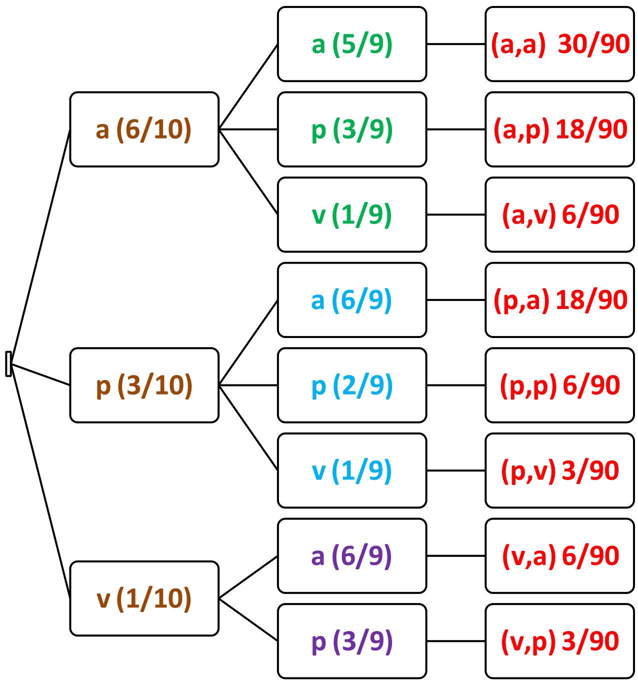
Se a primeira caneta foi vermelha, teremos: $P_v(a_2) = \frac{6}{9}$, $P_v(p_2) = \frac{3}{9}$ (note que a soma é um). Neste caso, note que não tem chance de sair a segunda caneta vermelha, porque na gaveta só tem uma caneta vermelha.

Dessa forma, para obtermos as probabilidades dos pontos amostrais (elementos do espaço amostra, ou seja, resultados do experimento), podemos nos valer do resultado que deduzimos no início desse texto, ou seja, $P(A \cap B) = \begin{cases} P(A).P_A(B) \\ \\ P(B).P_B(A) \end{cases}$. Para tal, observemos que nossa representação na forma de par ordenado deve ser interpretada como: $P(a,a) = P(a_1 \cap a_2)$. Assim, teremos que:

$$P(a,a) = P(a_1 \cap a_2) = P(a_1).P_{a_1}(a_2) = \frac{6}{10}.\frac{5}{9} = \frac{30}{90}$$
$$P(a,p) = P(a_1 \cap p_2) = P(a_1).P_{a_1}(p_2) = \frac{6}{10}.\frac{3}{9} = \frac{18}{90}$$
$$P(a,v) = P(a_1 \cap v_2) = P(a_1).P_{a_1}(v_2) = \frac{6}{10}.\frac{1}{9} = \frac{6}{90}$$
$$P(p,a) = P(p_1 \cap a_2) = P(p_1).P_{p_1}(a_2) = \frac{3}{10}.\frac{6}{9} = \frac{18}{90}$$
$$P(p,p) = P(p_1 \cap p_2) = P(p_1).P_{p_1}(p_2) = \frac{3}{10}.\frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$
$$P(p,v) = P(p_1 \cap v_2) = P(p_1).P_{p_1}(v_2) = \frac{3}{10}.\frac{1}{9} = \frac{3}{90}$$
$$P(v,a) = P(v_1 \cap a_2) = P(v_1).P_{v_1}(a_2) = \frac{1}{10}.\frac{6}{9} = \frac{6}{90}$$
$$P(v,p) = P(v_1 \cap p_2) = P(v_1).P_{v_1}(p_2) = \frac{1}{10}.\frac{3}{9} = \frac{3}{90}$$

Note que a soma das probabilidades dos resultados também deve ser 1, porque esgota o espaço amostra, cuja probabilidade é um.

Nossa proposta é representar essas probabilidades no diagrama de árvore, de modo simplificado nas notações para não poluir o gráfico e, dessa forma, ele será um diagrama de Árvore de Probabilidades. Teremos, então:



Observe que, para determinar as probabilidades dos pontos amostrais (última "coluna"), segundo o resultado que deduzimos no início deste texto, basta efetuar os produtos das probabilidades, seguindo os ramos da árvore.

Respondendo aos itens do exemplo, que podem ser obtidos diretamente do diagrama:

(a) a primeira azul e a segunda vermelha: $P(v,a) = \frac{6}{90}$

(b) as duas canetas pretas: $P(p,p) = \frac{6}{90}$

(c) as duas canetas da mesma cor: $P[(a,a) \cup (p,p)] = P(a,a) + P(p,p) = \frac{30}{90} + \frac{6}{90} = \frac{36}{90}$

O resultado que deduzimos no início deste texto é conhecido como **Teorema do Produto** para dois eventos**. Note que o Teorema do Produto não diz que a probabilidade de dois eventos é produto das probabilidades, mas, que é o produto da probabilidade de um dos eventos, pela probabilidade condicional do outro evento, dado esse primeiro**.

Podemos ampliar esse teorema para qualquer número de eventos. Se considerarmos três eventos: A, B e C, teremos: $P(A \cap B \cap) = P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B)\ P_{A \cap B}(C) = P(A)\ P_A(B)\ P_{A \cap B}(C)$

Por indução finita, podemos obter o teorema do Produto para qualquer número finito de eventos.

No exemplo anterior, consideremos que se quer selecionar 3 canetas, sem reposição. Determinar a probabilidade de:

(a) a primeira ser vermelha, a segunda preta e a terceira azul:

$$P(v,p,a) = P(v_1 \cap p_2 \cap a_3) = P(v_1).P_{v_1}(p_2).P_{v_1 \cap p_2}(a_3) = \frac{1}{10}.\frac{3}{9}.\frac{6}{8} = \frac{18}{720}$$

(b) a primeira e a segunda serem azuis e a terceira vermelha:

$$P(a,a,v) = \frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{1}{8} = \frac{30}{720}$$

(c) todas da mesma cor:

$$P[(a,a,a) \cup (p,p,p)] = \frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8} + \frac{3}{10}.\frac{2}{9}.\frac{1}{8} = \frac{120}{720} + \frac{6}{720} = \frac{126}{720}$$

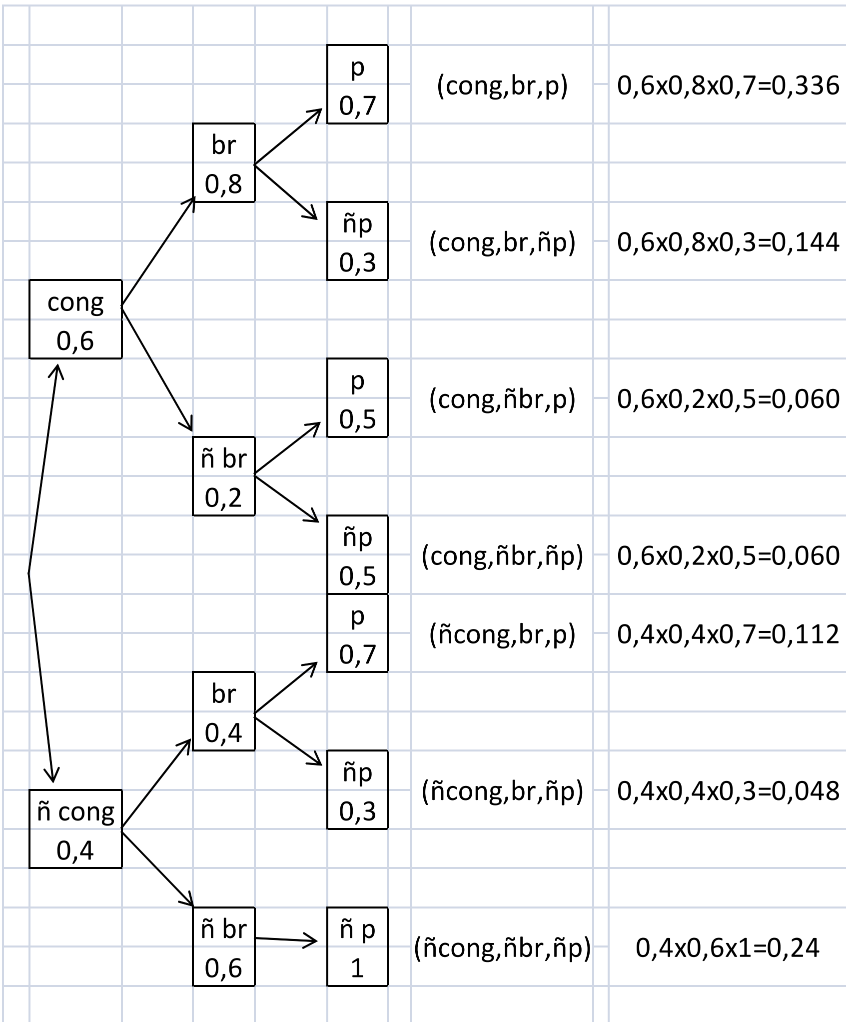
Da mesma forma, podemos ampliar para 4, 5, ..., até para qualquer número finito de eventos.

Outro exemplo:

Uma família viaja ao litoral para passar um fim de semana. A probabilidade de congestionamento na estrada é de 0,6. Havendo congestionamento, a probabilidade dos seus dois filhos brigarem no carro é de 0,8 e, sem congestionamento, a briga pode aparecer com probabilidade 0,4. Quando há briga, com ou sem congestionamento, a probabilidade do pai perder a paciência com os filhos é de 0,7. É claro que havendo congestionamento o pai pode perder a paciência com os filhos mesmo sem brigas, o que aconteceria com probabilidade 0,5. Quando não há nem congestionamento, nem briga, o pai dirige tranquilo e não perde a paciência. Determine a probabilidade de:

a) não ter havido congestionamento, se o pai não perdeu a paciência com seus filhos;

b) ter havido briga, dado que perdeu a paciência.



(a)

$$P_{\overline{p}}(\overline{cong}) = \frac{P(\overline{cong} \cap \overline{p})}{P(\overline{p})} =$$

$$= \frac{P\left[(\overline{cong}, br, \overline{p}) \cup \left(\overline{cong}, \overline{br}, \overline{p}\right)\right]}{P\left[(\overline{cong}, br, \overline{p}) \cup \left(\overline{cong}, \overline{br}, \overline{p}\right) \cup \left(cong, \overline{br}, \overline{p}\right) \cup (cong, br, \overline{p})\right]} =$$

$$= \frac{0{,}048 + 0{,}24}{0{,}048 + 0{,}24 + 0{,}060 + 0{,}144} = \frac{0{,}288}{0{,}492} = \frac{24}{41} \cong 0{,}585366$$

(b)

$$P_p(br) = \frac{P(br \cap p)}{P(p)} = \frac{P[(cong, br, p) \cup (\overline{cong}, br, p)]}{P\left[(cong, br, p) \cup \left(cong, \overline{br}, p\right) \cup (\overline{cong}, br, p)\right]} =$$

$$= \frac{0{,}336 + 0{,}112}{0{,}336 + 0{,}060 + 0{,}112} = \frac{0{,}448}{0{,}508} = \frac{112}{127} \cong 0{,}881890$$

Exercícios

1. Uma urna contém 3 bolas azuis e 2 brancas. Duas bolas são retiradas da urna, sem reposição. Qual a probabilidade de a 2ª bola retirada ser branca?

2. Em um lote de 20 peças, 5 são defeituosas. Sorteando-se 3 peças desse lote, ao acaso, sem reposição, qual a probabilidade de que nenhuma delas seja defeituosa?

3. As estatísticas de anos passados mostram que 80% dos alunos de um curso são aprovados e 20% vão para recuperação. Dos alunos que vão para recuperação, apenas 40% conseguem ser aprovados. Sabendo-se que um aluno foi aprovado, qual a probabilidade de ele ter ido para recuperação?

4. Duas bolas são retiradas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas azuis, 4 brancas e 5 verdes. Determine a probabilidade de:

a) a 1ª bola ser verde e a 2ª ser branca?;

b) as duas bolas serem da mesma cor;

c) a 2ª bola ser azul, se a 1ª foi branca;

d) a 1ª bola ser verde, se a 2ª foi azul.

5. Peças produzidas por uma máquina são classificadas como defeituosas (D), recuperáveis (R) ou boas (B). De lote com 20 peças, das quais 15 são boas, 4 recuperáveis e uma defeituosa, foram sorteadas, ao acaso, sem reposição, duas peças. Calcule a probabilidade de:

a) as duas peças sorteadas serem recuperáveis;

b) pelo menos uma delas ser boa;

c) sendo a 1ª defeituosa, a 2ª seja boa.

6. Os fixadores usados na fabricação de aviões são ligeiramente tortos para evitar afrouxarem com a vibração. Suponha que 95% de todos os fixadores passem na inspeção inicial. Dos 5% com falhas, 20% possuem defeitos tão sérios que devem ser sucateados. Os fixadores restantes são enviados para retrabalho, onde 40% não podem ser salvos e são descartados. Os 60% restantes são corrigidos pelo processo de ondulação e passam na inspeção final.

a) Qual é a probabilidade de um fixador, selecionado ao acaso, passar na inspeção inicial ou final?

b) Dado que um fixador tenha passado na inspeção, qual é a probabilidade de ele ter passado na inspeção inicial?