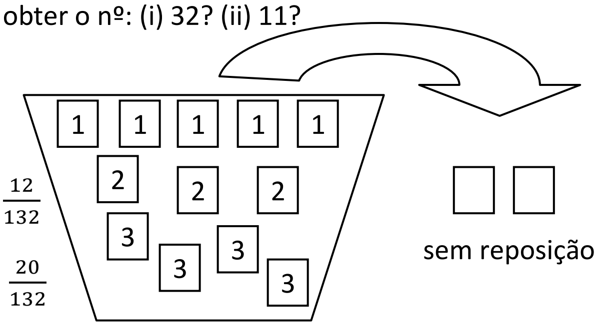
Independência e Teorema do Produto para eventos independentes

Em nosso estudo, definimos eventos mutuamente exclusivos, ou seja, dois eventos associados a um mesmo espaço amostra com nenhum resultado em comum. Esse conceito interfere diretamente no cálculo da probabilidade da união de eventos. Se dois, ou mais, eventos são exclusivos, a probabilidade da união desses eventos é, simplesmente, a soma das probabilidades desses eventos, coisa que não é tão simples se eles não forem exclusivos, assunto esse já tratado anteriormente (precisa tirar as intersecções...).

O conceito a ser tratado agora, interfere no cálculo da probabilidade da intersecção de eventos, aspecto esse já desenvolvido quando estudamos Probabilidade Condicional e Teorema do Produto (e de Bayes). Para tal, consideremos a situação apresentada a seguir.

1. Uma caixa contém cinco cartas com o nº 1, três cartas com o nº 2 e quatro cartas com o nº 3.
(a) cartas são sorteadas, **sem reposição**, dessa caixa.

(I) Se sortearmos duas cartas, qual a probabilidade de se obter o nº: (i) 32? (ii) 11?
A situação pode ser representada da seguinte forma:



Dessa forma, temos que:

(i) $P(32) = P(3_{1^a} \cap 2_{2^a}) = P(3_{1^a}).P_{3_{1^a}}(2_{2^a}) = \frac{4}{12}.\frac{3}{11} = \frac{12}{132}$

(ii) $P(11) = P(1_{1^a} \cap 1_{2^a}) = P(1_{1^a}).P_{1_{1^a}}(1_{2^a}) = \frac{5}{12}.\frac{4}{11} = \frac{20}{132}$

(II) Se sortearmos três cartas, qual a probabilidade de se obter o nº: (i) 213? (ii) 222? (iii) 122?
Analogamente, ao que fizemos para duas cartas, teremos:

(i) $P(213) = P(2_{1^a} \cap 1_{2^a} \cap 3_{3^a}) = P(2_{1^a}).P_{2_{1^a}}(1_{2^a}).P_{2_{1^a} \cap 1_{2^a}}(3_{3^a}) = \frac{3}{12}.\frac{5}{11}.\frac{4}{10} = \frac{60}{1320}$

(ii) $P(222) = P(2_{1^a} \cap 2_{2^a} \cap 2_{3^a}) = P(2_{1^a}).P_{2_{1^a}}(2_{2^a}).P_{2_{1^a} \cap 2_{2^a}}(2_{3^a}) = \frac{3}{12}.\frac{2}{11}.\frac{1}{10} = \frac{6}{1320}$

(iii) $P(122) = P(1_{1^a} \cap 2_{2^a} \cap 2_{3^a}) = P(1_{1^a}).P_{1_{1^a}}(2_{2^a}).P_{1_{1^a} \cap 2_{2^a}}(2_{3^a}) = \frac{5}{12}.\frac{3}{11}.\frac{2}{10} = \frac{30}{1320}$

(b) cartas são sorteadas, **com reposição**, dessa caixa.

(I) se sortearmos duas cartas, qual a probabilidade de se obter o nº: (i) 32? (ii) 11?

(i) $P(32) = P(3_{1^a} \cap 2_{2^a}) = P(3_{1^a}).P_{3_{1^a}}(2_{2^a}) = \frac{4}{12}.\frac{3}{12} = \frac{12}{144}$

(ii) $P(11) = P(1_{1^a} \cap 1_{2^a}) = P(1_{1^a}).P_{1_{1^a}}(1_{2^a}) = \frac{5}{12}.\frac{5}{12} = \frac{25}{144}$

(II) se sortearmos três cartas, qual a probabilidade de se obter o nº: (i) 213? (ii) 222? (iii) 133?

(i) $P(213) = P(2_{1^a} \cap 1_{2^a} \cap 3_{3^a}) = P(2_{1^a}).P_{2_{1^a}}(1_{2^a}).P_{2_{1^a} \cap 1_{2^a}}(3_{3^a}) = \frac{3}{12}.\frac{5}{12}.\frac{4}{12} = \frac{60}{1728}$

(ii) $P(222) = P(2_{1^a} \cap 2_{2^a} \cap 2_{3^a}) = P(2_{1^a}).P_{2_{1^a}}(2_{2^a}).P_{2_{1^a} \cap 2_{2^a}}(2_{3^a}) = \frac{3}{12}.\frac{3}{12}.\frac{3}{12} = \frac{27}{1728}$

(iii) $P(122) = P(1_{1^a} \cap 2_{2^a} \cap 2_{3^a}) = P(1_{1^a}).P_{1_{1^a}}(2_{2^a}).P_{1_{1^a} \cap 2_{2^a}}(2_{3^a}) = \frac{5}{12}.\frac{3}{12}.\frac{3}{12} = \frac{45}{1728}$

No item (b) desse exemplo, temos uma particularidade ocorrendo, diferentemente do que ocorreu no item (a). Essa particularidade é que, devido à retirada das cartas com reposição, as probabilidades não se alteram, isto é, deixa de existir a probabilidade condicional da segunda etapa em diante, porque as cartas são repostas na urna e, portanto, a configuração da urna é sempre a mesma; não há restrição do espaço amostra. Assim, a probabilidade de se sortear uma carta com determinado número, da segunda etapa em diante, não se altera, qualquer(quaisquer) que seja(m) a(as) carta(s) selecionada(s) anteriormente, ou seja, a segunda carta **não depende** da primeira carta selecionada, bem como a terceira carta **independe** da primeira e segunda cartas selecionadas. Essa particularidade pode ser enunciada da seguinte forma.

Definição: dados dois eventos A e B (diferentes do evento impossível) de um mesmo espaço amostra, dizemos que esses eventos são **mutuamente independentes,** quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade do outro. Em outras palavras, $P_B(A) = P(A)$, ou, $P_A(B) = P(B)$.

Um resultado decorrente da concepção de eventos mutuamente independentes pode ser obtido, utilizando o **Teorema do Produto para dois eventos**. Temos, então:

$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A).P_A(B) = P(A).P(B) \\ \\ P(B).P_B(A) = P(B).P(A) \end{cases}$, ou seja, temos que: $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$, conhecido como **Teorema do produto para dois eventos independentes**.Observe que a probabilidade da intersecção é o produto das probabilidades dos eventos, somente quando esses eventos são independentes!

O Teorema do Produto para dois eventos independentes pode ser ampliado para três eventos independentes, quatro eventos independentes, ... , até qualquer número finito de **eventos independentes**:
$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2) \ldots .P(A_n)}$

Definição: dados três eventos A, B e C (diferentes do evento impossível) de um mesmo espaço amostra, dizemos que esses eventos são estatisticamente **independentes,** quando eles são dois a dois mutuamente independentes e ainda vale o Teorema do Produto para os três eventos, isto é:

$$\textbf{A, } \boldsymbol{B} \textbf{ e } \boldsymbol{C} \textbf{ são independentes} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)} \\ \boldsymbol{P(A \cap C) = P(A).P(C)} \\ \boldsymbol{P(B \cap C) = P(B).P(C)} \\ \boldsymbol{P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)} \end{cases}$$

Exemplo: Em uma urna há 4 bolas assim numeradas: 000, 011, 101, 110. Selecione uma bola ao acaso dessa urna. Considere os eventos:

A_1: *a bola selecionada tem o nº* 1 *na posição das centenas*

A_2: *a bola selecionada tem o nº* 1 *na posição das dezenas*

A_3: *a bola selecionada tem o nº* 1 *na posição das unidades*

(a) Calcule $P(A_1)$, $P(A_2)$ e $P(A_3)$
(b) Mostre que dois a dois os eventos são mutuamente independentes
(c) Mostre que os três eventos **não** são independentes

Temos, portanto: (a) $P(A_1) = \frac{2}{4}$ $\quad P(A_2) = \frac{2}{4}$ $\quad P(A_3) = \frac{2}{4}$

(b) $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$ e $P(A_1).P(A_2) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, logo, A_1 e A_2 são mutuamente independentes
$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ e $P(A_1).P(A_3) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, logo, A_1 e A_3 são mutuamente independentes

$P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ e $P(A_2).P(A_3) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, logo, A_2 e A_3 são mutuamente independentes

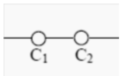
(c) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{0}{4} = 0$ e $P(A_1).P(A_2).P(A_3) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{8}{64} \neq 0$, logo, A_1, A_2 e A_3 **não** são independentes.

Exercícios

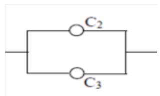
1. Em determinada classe, 20% dos alunos foram reprovados em Química, 30% em Matemática e 40% em Física. Sabe-se também que 5% dos alunos foram reprovados em Química e em Matemática, 8% em Química e Física e 12% em Matemática e Física. Sabendo-se que 2,4% dos alunos foram reprovados nas 3 disciplinas, verifique se a reprovação em Química, Matemática e Física são eventos independentes. Determine dentre os três tipos de reprovações, se tem reprovações mutuamente independentes.

2. A Teoria da Confiabilidade estuda sistemas e seus componentes como, por exemplo, sistemas mecânicos, eletrônicos, biológicos, etc. O objetivo dessa Teoria é estudar as relações entre o funcionamento dos componentes (confiabilidade dos componentes) e o funcionamento do sistema (confiabilidade do sistema).

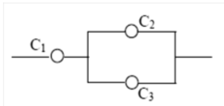
(a) Considerando um sistema com dois componentes em série (C_1 e C_2), que funcionam independentemente um do outro, em que a confiabilidade do C_1 é 0,9 e do C_2 é 0,95, qual será a confiabilidade do sistema?



(b) Considerando que o sistema tem esses mesmos dois componentes em paralelo, qual será a confiabilidade do sistema?



3. Na figura ao lado, temos um sistema com 3 componentes funcionando independentemente um do outro, com confiabilidades: 0,9 de C_1, 0,92 de C_2 e 0,95 de C_3. Determine a confiabilidade do sistema.



4. A probabilidade de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são 1/3 , 1/4 , e 1/5 , respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber em uma festa, qual a probabilidade de:

(a) todos os três motoristas sofrerem acidente?

(b) pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo?

5. Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior que a de sair coroa. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, determinar a probabilidade de:

(a) sair uma cara; **(b)** sair pelo menos uma cara; **(c)** dois resultados iguais.

6. Um sistema é composto de três componentes A, B e C, com confiabilidade 0,9 ; 0,8 e 0,7 , respectivamente. O componente A é indispensável ao funcionamento do sistema; se B ou C não funciona, o sistema funciona com um rendimento inferior. A falha simultânea de B e C implica o não funcionamento do sistema. Supondo que os componentes funcionam independentemente;

(a) calcular a confiabilidade do sistema (probabilidade do sistema funcionar);

(b) calcular a probabilidade do componente C não ter falhado, se o sistema funcionou.

7. As chances de três atacantes, de um time de futebol, marcar um gol de falta são: 3/5, 5/7 e 3/8. Se cada um deles bater uma falta, independentemente dos demais, isto é, em seus respectivos times no próximo domingo, qual a probabilidade de serem marcados:

(a) nenhum gol? **(b)** pelo menos dois gols? (c) exatamente um gol?