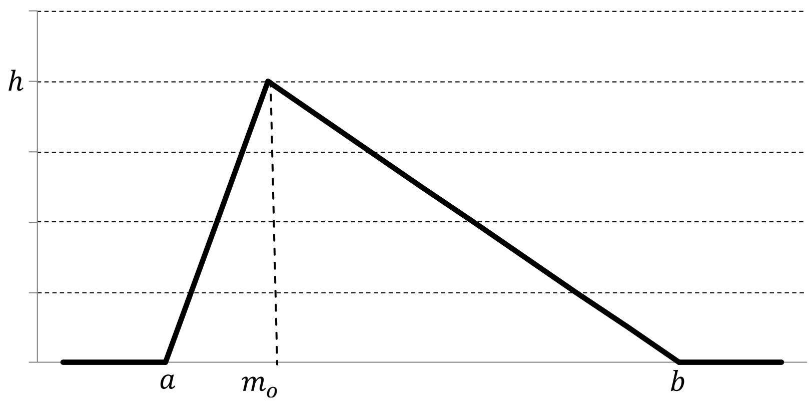
Modelo Triangular

Como o próprio nome já estabelece, a variável aleatória contínua X tem distribuição triangular, quando a representação gráfica da função densidade de probabilidades é um triângulo, como representado a seguir.



A abscissa do ponto de máximo da função densidade de probabilidades é conhecida como $moda$ (m_o) da variável com distribuição triangular. Dessa forma, para definirmos uma variável aleatória com distribuição triangular, precisamos conhecer o valor de a (que é o mínimo valor assumido pela variável), a m_o e o valor de b (que é máximo valor da variável). Indicaremos, portanto, $X \sim Tri(a, m_o, b)$, que se lê: X tem distribuição triangular com parâmetros: a, m_o, b.

Em cada situação, a determinação das equações que definem tal função densidade de probabilidades, depende da determinação das equações das retas suporte dos dois seguimentos. Para determinar a equação de uma reta, como sabemos, é necessário conhecermos as coordenadas de dois de seus pontos. Assim, é preciso determinar, anteriormente, o valor da constante h, facilmente obtido, considerando que a área sob a curva da função densidade deve ser um (impondo que a medida da área do triângulo é igual a um).

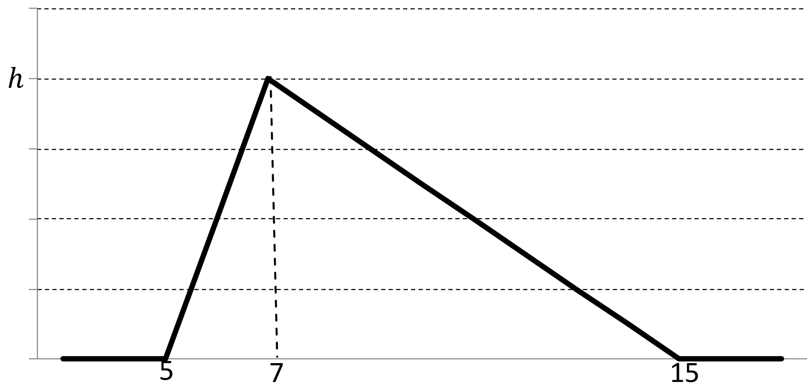
Teremos: $A_{\Delta} = \frac{(b-a)\,h}{2} = 1 \Rightarrow h = \frac{2}{(b-a)}$

Dessa forma, a equação da reta crescente, suporte do "primeiro" segmento será determinada pelos pontos: $(a, 0)$ e $\left(m_o, \frac{2}{(b-a)}\right)$ e a equação da reta decrescente, suporte do "segundo" segmento será determinada pelos pontos: $\left(m_o, \frac{2}{(b-a)}\right)$ e $(b, 0)$.

Os cálculos da média, variância e desvio padrão devem ser feitos valendo-se das definições apresentadas em variável aleatória contínua e efetuados em cada caso, assim como a função repartição, ou função cumulativa. Qualquer formalização é complexa e não acrescenta nenhuma vantagem, diferentemente de outros modelos.

Por exemplo: Seja a v.a.c. X, tal que $X \sim Tri(5,7,15)$. Determine: (a) a representação gráfica e a lei que define a função densidade de probabilidades; (b) o valor esperado de X; (c) a variância de X; (d) o desvio padrão de X; (e) a lei que define a função cumulativa; (f) $P(6 < X < 10)$, usando a função cumulativa.

(a)



Inicialmente, considerando a medida da área do triângulo igual a um, obtemos $h = 0{,}2$.

Considerando: $(5{,}0)$ e $(7;\ 0{,}2)$, obtemos a equação da reta suporte do 1º segmento: $y = 0{,}1x - 0{,}5$.

Considerando: $(7; 0{,}2)$ e $(15{,}0)$, obtemos a equação da reta suporte do 1º segmento: $y = -0{,}025x + 0{,}375$.

Dessa forma, a f.d.p. é dada pela lei: $f(x) = \begin{cases} 0\ ,\ se\ x \leq 5 \\ 0{,}1x - 0{,}5\ ,\ se\ 5 \leq x \leq 7 \\ -0{,}025x + 0{,}375\ ,\ se\ 7 \leq x \leq 15 \\ 0\ ,\ se\ x \geq 15 \end{cases}$

(b) $E(X) = \int_5^7 x(0{,}1x - 0{,}5)\,dx + \int_7^{15} x(-0{,}025x + 0{,}375)\,dx =$

$$= 0{,}1\int_5^7 x^2dx - 0{,}5\int_5^7 xdx - 0{,}025\int_7^{15} x^2dx + 0{,}375\int_7^{15} xdx =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}218 - \frac{0{,}5}{2}24 - \frac{0{,}025}{3}3032 + \frac{0{,}375}{2}176 = 9$$

(c) $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = \int_5^7 x^2(0{,}1x - 0{,}5)\,dx + \int_7^{15} x^2(-0{,}025x + 0{,}375)\,dx =$$

$$= 0{,}1\int_5^7 x^3dx - 0{,}5\int_5^7 x^2dx - 0{,}025\int_7^{15} x^3dx + 0{,}375\int_7^{15} x^2dx =$$

$$= \frac{0{,}1}{4}1776 - \frac{0{,}5}{3}218 - \frac{0{,}025}{4}48224 + \frac{0{,}375}{3}3032 \approx 85{,}666667$$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \approx 85{,}666667 - (9)^2 \approx 4{,}666667$

(d) $DP(X) = \sqrt{Var(X)} \approx \sqrt{4{,}666667} \approx 2{,}160247$

(e) A lei da função cumulativa é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0\,, & se\ t < 5 \\ 0{,}05t^2 - 0{,}5t + 1{,}25\,, & se\ 5 \le x \le 7 \\ -0{,}0125t^2 + 0{,}375t - 1{,}8125\,, & se\ 7 \le x \le 15 \\ 1\,, & se\ x \ge 15 \end{cases}$$

$P(6 < X < 10) = F(10) - F(6) =$

$= (-0{,}0125(10)^2 + 0{,}375(10) - 1{,}8125\ ) - (0{,}05(6)^2 - 0{,}5(6) + 1{,}25\,) = 0{,}6375$

Exercícios

1. Seja X uma variável contínua, tal que $X{\sim}Tri(12{,}14{,}20)$, determine:

a) a lei que define $f(x)$;

b) $E(X)$;

c) $Var(X)$;

d) $DP(X)$

e) Função distribuição acumulada de X;

f) Calcule as probabilidades a seguir, usando a função repartição:

(i) $P(X > 13)$;(ii) $P(X < 17)$; (iii) $P(13 < X < 17)$

2. Seja X o tempo durante o qual um equipamento elétrico é usado em carga máxima, em certo período de tempo, em minutos. A função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1500^2}\,x\,, & se\quad 0 \le x \le 1.500 \\ \frac{1}{1500^2}\,(3.000 - x)\,, & se\quad 1.500 \le x \le 3.000 \end{cases}$$

a) Calcule o tempo médio em que o equipamento será utilizado em carga máxima.

b) Determine a probabilidade de o tempo de uso estar entre 1.200 e 1.850 minutos, usando a função distribuição acumulada de probabilidades.

3. Seja X uma variável contínua, tal que $X{\sim}Tri(-2{,}0{,}4)$, determine:

a) a lei que define $f(x)$;

b) $E(X)$;

c) $Var(X)$;

d) $DP(X)$.

e) Função distribuição acumulada de X;

f) Calcule as probabilidades a seguir, usando a função repartição:

(i) $P(X > 1)$; (ii) $P(X < 2)$; (iii) $P(-1 < X < 3)$