Tópico 6 - Ângulos e distâncias

Tópico 6

Site:	[Moodle PUC-SP]
Curso:	2015.1 - Geometria Analítica (GA)
Livro:	Tópico 6 - Ângulos e distâncias
Impresso por:	ANA LUIZA PORTELLO BASTOS
Data:	sábado, 11 Nov 2017, 03:03

Sumário

Geometria Analítica

Ângulos e distâncias

Tópico 1

Tópico 2

Tópico 3

Tópico 4

Tópico 5

Tópico 6

Tópico E

6. Ângulos e Distâncias

Nesta semana aplicaremos os conhecimentos dos produtos já estudados para determinar a medida do ângulo determinado por: duas retas, por uma reta e um plano e por dois planos. entre: reta e reta, entre reta e plano, entre plano e plano. Aprenderemos também a calcular a distância entre dois pontos, de um ponto a uma reta, de um ponto a um plano, entre duas retas e entre uma reta e um plano.

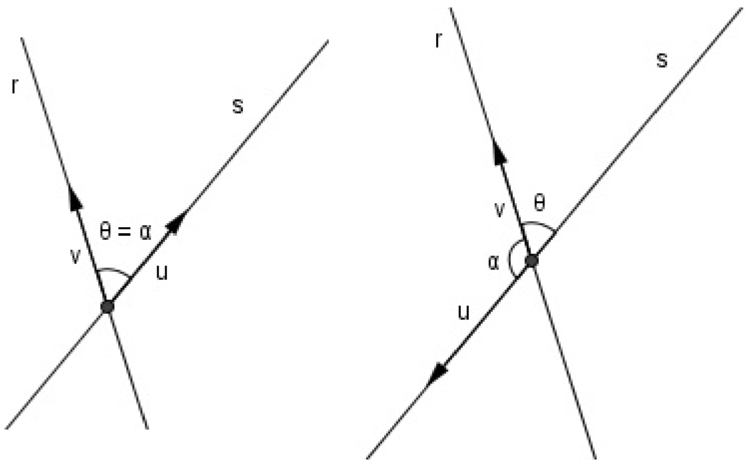
6.1 Ângulos

Neste tópico trataremos dos ângulos formados por duas retas, entre uma reta e um plano e entre planos.

6.1.1 Ângulos entre retas

Dadas as retas r e s (não ortogonais), $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, vetores paralelos a r e s, respectivamente, definimos o ângulo θ entre r e s como sendo o **ângulo agudo** entre elas.

Figura 39 - ângulo entre retas



Observe na figura 39 que se α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ele deve ter medida entre 0^0 e 90^0, ou seja, é o menor dos dois ângulos determinados por duas retas e α pode coincidir ou não com o ângulo θ.?

Sabemos que, sendo α o ângulo entre dois vetores, então $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ com $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

Se $\vec{u} \circ \vec{v} > 0$ então $\cos\alpha > 0$ com $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta = \alpha$ (figura da esquerda).

Se $\vec{u} \circ \vec{v} < 0$ então $\cos\alpha < 0$ com $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$ e $\theta + \alpha = \pi$ ou $\theta = \pi - \alpha$.

Logo, $\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ (figura da direita).

O que nos leva a concluir que o ângulo θ entre duas retas e dado por: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ com $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Exemplo 1

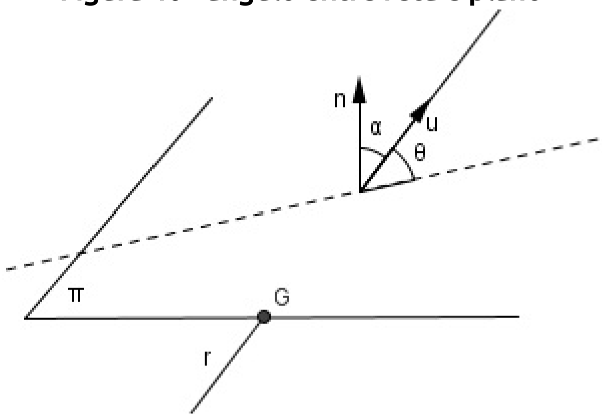
Determine o ângulo entre as retas: $r\colon\ \overrightarrow{OX} = (4,\ 1,\ 5) + m(1,\ 0,\ -1)\ \ (m \in \mathbb{R})$ e $s\colon\ \overrightarrow{OX} = (3,\ 1,\ 7) + t(0,\ 0,\ 1)\ \ (t \in \mathbb{R})$.

Sabemos que o vetor direção da reta r é $\vec{r} = (1,\ 0,\ -1)$ e que $|\vec{r}| = \sqrt{2}$. Para a reta s o vetor direção é $\vec{s} = (0,\ 0,\ 1)$ e que $|\vec{s}| = 1$. Como $\vec{r} \circ \vec{s} = (1,\ 0,\ -1) \circ (0,\ 0,\ 1) = -1$ temos então que $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo $\theta = arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ que nos dá $\theta = 45^\circ$ ou $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

6.1.2 Ângulo entre reta e plano

A medida θ do ângulo entre a reta r e o plano π é o complemento do ângulo $\alpha\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ entre a reta r e uma reta perpendicular ao plano (logo, o vetor diretor dessa reta é o vetor normal a π). como mostra a figura 40. Assim, $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. Dessa forma, calculando o ângulo entre essas duas retas (reta r e uma reta perpendicular ao plano) temos: $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}\circ\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$, mas como α e θ são complementares temos $\cos\alpha=sen\theta$ e então $sen\theta=\dfrac{|\vec{n}\circ\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$ com $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ onde θ é a medida do ângulo entre a reta r e o plano π.

Figura 40 - ângulo entre reta e plano



Exemplo 2

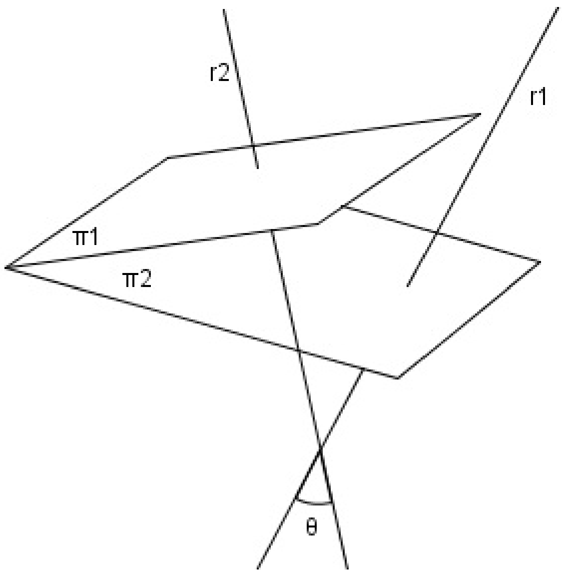
Determine a medida em radianos do ângulo entre $r\colon\ \overrightarrow{OX}=(0,\ 1,\ 0)+\lambda(-1,\ -1,\ 0)\ \ (\lambda\in\mathbb{R})$ e $\pi\colon\ y+z-10=0$.

O vetor direção da reta r é $\vec{r}=(-1,\ -1,\ 0)$ e $|\vec{r}|=\sqrt{2}$. Por outro lado, o plano tem vetor normal $\vec{n}=(0,\ 1,\ 1)$ e $|\vec{n}|=\sqrt{2}$. Além disso temos: $\vec{r}\circ\vec{n}=(-1,\ -1,\ 0)\circ(0,\ 1,\ 1)=-1$. Logo $sen\theta=\dfrac{|\vec{n}\circ\vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$ e portanto, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

6.1.3 Ângulo entre planos

A medida do ângulo θ entre os planos π_1 e π_2 é a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2, respectivamente, perpendiculares a π_1 e π_2, como mostra a figura 41. Observe que os vetores normais aos planos são vetores diretores dessas retas, ou seja, é dada por: $\cos\theta = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$ com $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Figura 41 - ângulo entre planos



Exemplo 3

Determine a medida θ entre os planos π_1: $2x-3y+5z-8=0$ e π_2: $3x+2y+5z-4=0$.

Sabemos que a normal do plano π_1 é $\overrightarrow{n_1}=(2,\ -3,\ 5)$ com $\left|\overrightarrow{n_1}\right|=\sqrt{38}$ e o vetor normal ao plano π_2 é $\overrightarrow{n_2}=(3,\ 2,\ 5)$ com $\left|\overrightarrow{n_2}\right|=\sqrt{38}$. Como $(2,\ -3,\ 5)\circ(3,\ 2,\ 5)=25$ vem que $\cos\theta=\dfrac{25}{38}$ e que $\theta = arccos\dfrac{25}{38}$.

6.2 Distâncias

Neste capítulo estudaremos as distâncias determinadas por dois pontos, por um ponto e uma reta, um ponto e um plano, duas retas, reta e plano e dois planos.

6.2.1 Distância entre dois pontos

Seja um sistema de coordenadas ortonormal do espaço $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ e os pontos $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ e $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$. Chamamos de distância entre A e B ao comprimento do segmento AB e portanto ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$. Isto é: $d(A,\ B) = |\overrightarrow{AB}| = |(x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exemplo 4

Calcule a distância entre os pontos $A(7,\ 3,\ 4)$ e $B(1,\ 0,\ 6)$.

$\overrightarrow{AB} = (-6,\ -3,\ 2)$ e $d(A,\ B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+9+4} = 7$.

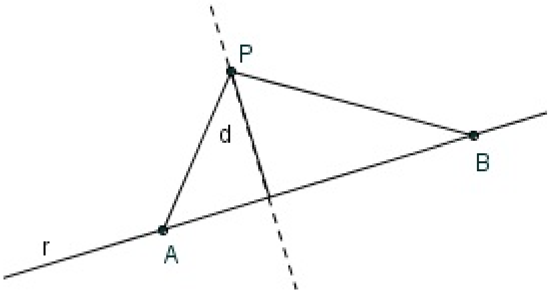
Logo, a distância entre os pontos A e B é 7u.c.

6.2.2 Distância de ponto a reta

Chamamos de distância do ponto P à reta r, ao segmento da perpendicular conduzida por P à reta r. Sejam A e B dois pontos quaisquer da reta r com $A \neq B$, como mostra a figura 42. Sabemos que a medida da área do $\triangle APB$ é $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|$ e que, por outro lado, $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot d$, em que d é a altura do triângulo. Comparando as duas equações vem: $|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot d$ o que nos fornece $d(P,\ r) = d = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.

Como A e B são pontos arbitrários de r podemos ter $\overrightarrow{AB}$ como um vetor diretor qualquer de r. Isto é, $d(P,\ r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$.

Figura 42 - distância de ponto a reta



Exemplo 5

Calcule a distância do ponto $P(5,\ 5,\ 7)$ à reta $r:\ \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 3) + m(1,\ 2,\ 2) \quad (m \in \mathbb{R})$.
Da equação de r podemos dizer que $\vec{r} = (1,\ 2,\ 2)$, $|\vec{r}| = 3$ e que $A(1,\ 2,\ 3) \in r$. Tomando o vetor $\overrightarrow{AP} = (4,\ 3,\ 4)$ podemos calcular $\overrightarrow{AP} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ e

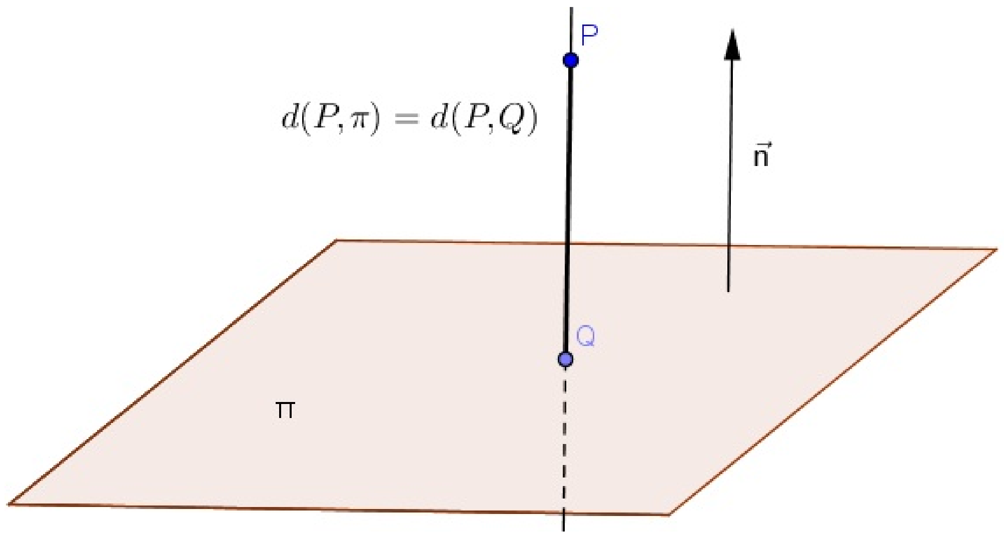
$$d(P,\ r) = \frac{\sqrt{4 + 16 + 25}}{3} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}.$$

Logo, a distância do ponto P à reta r é $\sqrt{5}$ u.c.

6.2.3 Distância de ponto a plano

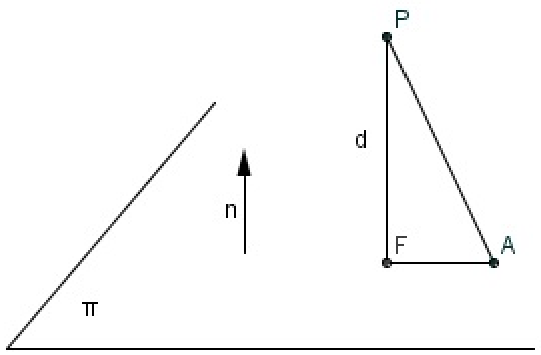
Sejam P um ponto qualquer do espaço e um plano π. A distância do ponto P ao plano será indicada por: $d(P,\ \pi)$., como mostra a figura 43. Inicialmente construímos uma reta r, passando por P e perpendicular ao plano π. Observe que se a reta é perpendicular ao plano, o vetor normal ao plano, $\vec{n}$, é o vetor diretor da reta r. Seja Q o ponto de intersecção da reta r com o plano π, ou seja, $r \cap \pi = \{Q\}$. Dessa forma, temos que $d(P,\ \pi) = d(P,\ Q)$. No caso, particular em que $P \in \pi$, teremos $P = Q$ e $d(P,\ \pi) = 0$.

Figura 43 - distância de ponto a plano



Outra maneira de calcular a distância de um ponto P a um plano π é escolher um ponto arbitrário A desse plano e projetar ortogonalmente o vetor $\overrightarrow{AP}$ sobre o plano em relação ao vetor $\vec{n}$, vetor normal do plano, como mostra a figura 44. O módulo do vetor projeção será a distância procurada. Assim, $d(P,\ \pi) = \left|proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \circ \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$.

Figura 44 - distância de ponto a plano por projeção



Por outro lado, se $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\pi:\ ax + by + cz + d = 0$ e $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ é o ponto escolhido do plano π, temos $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ um vetor normal a ele e $\overrightarrow{AP} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$.Logo,

$$\overrightarrow{AP} \circ \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) =$$

$$= ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 \ + d$$

pois $A \in \pi$ e $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$. Assim, $d(P,\ \pi) = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exemplo 6

Calcule a distância do ponto $P(4,\ 5,\ 4)$ ao plano $\alpha:\ x + 2y + 2z - 4 = 0$. Temos que o vetor normal ao plano é $\vec{n} = (1,\ 2,\ 2)$, consideremos então a reta $r:\ \overrightarrow{OX} = (4,\ 5,\ 4) + \lambda(1,\ 2,\ 2)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, cujo vetor diretor é o vetor normal ao plano e que contém o ponto P. Calculando a intersecção de r e α, obtemos o ponto Q. Em r temos $x = 4 + \lambda$, $y = 5 + 2\lambda$ e $z = 4 + 2\lambda$. Substituindo-se esses valores na equação geral do plano α, obtemos

$(4+\lambda)+2(5+2\lambda)+2(4+2\lambda)-4=0$. Dessa igualdade tem-se que $\lambda=-2$. Substituindo o valor de λ na equação da reta, obtemos o ponto $Q(2,\ 1,\ 0)$. Calculando a distância entre os pontos P e Q, temos: $d(P,\ Q)\ =\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{36}=6$. Assim,$d(P,\ \alpha)=6$ u.c..

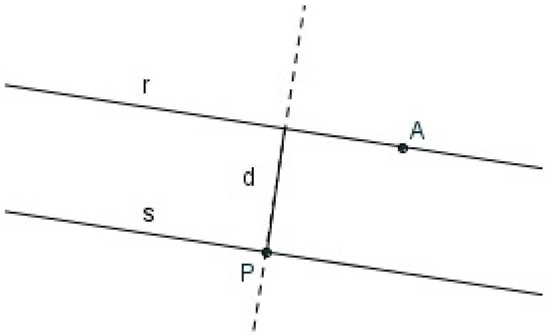
Outra solução

Considerando na equação do plano que $y=z=0$ temos $x=4$ e portanto $A(4,\ 0,\ 0)\in\alpha$. Assim $\overrightarrow{AP}=(0,\ 5,\ 4)$ e $d(P,\ \alpha)=\dfrac{|(0,\ 5,\ 4)\circ(1,\ 2,\ 2)|}{3}=\dfrac{18}{3}=6$.

6.2.4 Distância entre duas retas

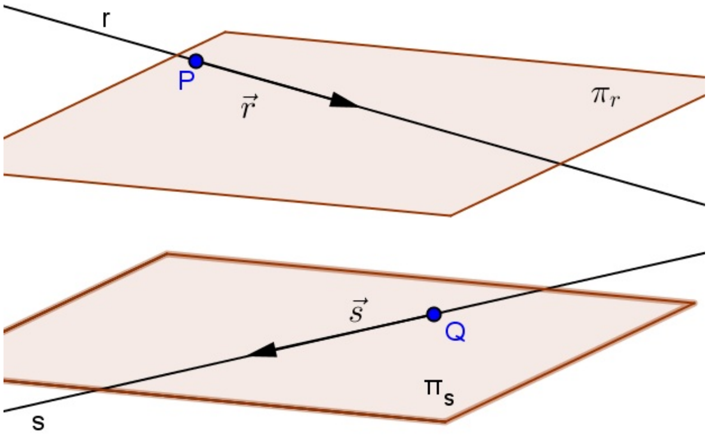
1. Se r e s são concorrentes então, por definição, $d(r,\ s) = 0$.
2. Se r e s são paralelas, como mostra a figura 45, a distância entre elas é a distância de um ponto qualquer P de uma delas à outra reta. Se $P \in s$, então $d(r,\ s) = d(P,\ r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$ em que A é um ponto qualquer de r. Pode ser também $d(r,\ s) = d(P,\ s)$ se $P \in r$. Esse estudo foi feito na distância de ponto a reta.

Figura 45 - distância entre duas retas paralelas



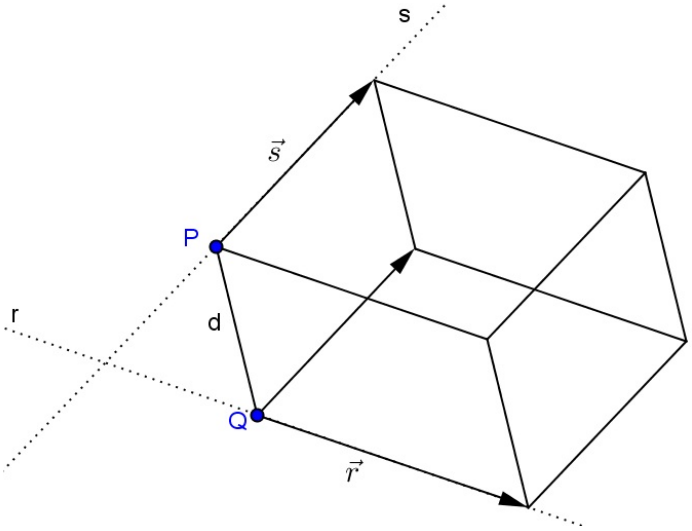
3. Se r e s são reversas, como mostra a figura 46, consideremos P um ponto da reta r e $\vec{r}$ o vetor diretor da reta r, e ainda Q um ponto da reta s e $\vec{s}$ o vetor diretor da reta s. Vamos construir dois planos, um plano π_r que contém a reta r e é paralelo à reta s, isto é π_r: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$ com $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. E um plano π_s que contém a reta s e é paralelo à reta r, isto é π_s: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \omega\vec{r} + \rho\vec{s}$ com $\rho,\ \omega\ \in \mathbb{R}$. Dessa forma a distância entre as retas r e s é igual à distância entre os dois planos. Para calcular essa distância, basta considerar um ponto de um deles e calcular a distância até o outro plano, teoria já desenvolvida. Por exemplo, podemos considerar o ponto $P \in \pi_r$ e calcular a distância até o plano π_s. Dessa forma, $d(r,\ s) = d\left(\pi_r,\ \pi_s\right) = d(P, \pi_s)$.

Figura 46 - distância entre retas reversas



Podemos também considerar um paralelepípedo determinado pelos vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, como mostra a figura 47, em que d é a distância procurada. Sabemos que o volume desse paralelepípedo é dado por $V = |\vec{r} \times \vec{s}| \cdot d$ e, por outro lado, sabemos que $V = |[\vec{r},\ \vec{s},\ \overrightarrow{PQ}]|$ pelo produto misto. Comparando as duas vem $|\vec{r} \times \vec{s}| \cdot d = |[\vec{r},\ \vec{s}, \overrightarrow{PQ}]|$. Logo, $d(r,\ s) = \dfrac{|[\vec{r},\ \vec{s},\ \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{r} \times \vec{s}|}$.

Figura 47 - distância entre retas reversas por paralelepípedo



Exemplo 7

Calcule a distância entre as retas r: $\begin{cases} y = -2x+3 \\ z = 2x \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 1+4t \\ z = -3-4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Na equação de r se fizermos $x = \lambda$ temos r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda+3 \\ z = 2\lambda \end{cases}$ o que nos dá $\vec{r} = (1,\ -2,\ 2)$ e $Q(0,\ 3,\ 0) \in r$.

Da equação de s temos $\vec{s} = (-2,\ 4,\ -4)$ e $P(-1,\ 1,\ -3) \in s$. Dos vetores diretores vemos que $\vec{s} = -2\vec{r}$ o que significa que $r//s$. Logo $d(r,\ s) = d(Q,\ s) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$.

$\overrightarrow{PQ} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -20\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ e $|\overrightarrow{PQ} \times \vec{s}| = \sqrt{400+4+64} = \sqrt{468} = 6\sqrt{13}$

Como $|\vec{s}| = 6$ temos que $d(r,\ s) = \dfrac{6\sqrt{13}}{6} = \sqrt{13}$ u.c..

6.2.5 Distância entre reta e plano e entre planos

Distância entre reta e plano

- Se r intercepta o plano π então $d(r,\ \pi) = 0$, por definição.

- Se r é paralela à π, a distância entre r e π é igual a distância de um ponto de r ao plano, que já calculamos anteriormente.

Distância entre planos

- Se π_1 e π_2 são secantes então $d(\pi_1,\ \pi_2) = 0$, por definição.

- Se π_1 e π_2 são paralelos basta calcular a distância de um ponto de π_1 ao plano π_2 ou vice versa. Também já calculamos essa distância, no caso particular em que os planos são iguais (paralelos coincidentes), a distância é zero.

Exemplo 8:

Determine a distância entre a reta $r\colon\ \overrightarrow{OX} = (2,\ 0,\ 0) + \lambda(-4,\ 1,\ 2)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ e o plano $\pi\colon\ x + 2y + z = 0$. Para saber se a reta é paralela ou concorrente com o plano, basta calcular o produto escalar entre o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano. Se o produto for zero é porque a reta é paralela ao plano, caso contrário, a reta e o plano são concorrentes.

$\vec{r} = (-4,\ 1,\ 2)$ e $\vec{n} = (1,\ 2,\ 1)$. Assim, $\vec{r} \circ \vec{n} = (-4,\ 1,\ 2) \circ (1,\ 2,\ 1) = 0$. Logo a reta r é paralela ao plano π.

Considerando $P(2,\ 0,\ 0) \in r$ e a reta que passa por P e tem a direção da normal do plano vem que $t\colon\ X = (2,\ 0,\ 0) + \alpha(1,\ 2,\ 1)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, vamos encontrar o ponto $\{Q\} = t \cap \pi$. Na reta r temos $x = 2 + \alpha$, $y = 2\alpha$ e $z = \alpha$ e substituindo esses valores na equação geral do plano vem que:

$(2 + \alpha) + 2(2\alpha) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{3}$, assim $Q\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

Logo, $d(r,\ \pi) = d(P,\ Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\dfrac{6}{9}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Exemplo 9

Determine a distância entre os planos $\pi_1\colon\ 2x - y + 3z + 8 = 0$ e $\pi_2\colon\ -6x + 3y - 9z - 6 = 0$.

Como $\overrightarrow{n_1} = (2,\ -1,\ 3)$ e $\overrightarrow{n_2} = (-6,\ 3,\ -9)$ são paralelos, $-3\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2}$, então os planos são paralelos e não são coincidentes porque $-3(2x - y + 3z + 8) \neq -6x + 3y - 9z - 6$.

Temos que $P(0,\ 8,\ 0) \in \pi_1$ e $t\colon\ \overrightarrow{OX} = (0,\ 8,\ 0) + \alpha(2,\ -1,\ 3)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Determinando $\{Q\} = t \cap \pi_2$, $t\colon \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 8 - \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \\ z = 3\alpha \end{cases}$

Substituindo na equação geral do plano temos:

$-6(2\alpha) + 3(8 - \alpha) - 9(3\alpha) - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{7}$.

Logo, $Q\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{53}{7},\ \dfrac{9}{7}\right)$.

Assim, $d(r,\ \pi) = d(P,\ Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\dfrac{126}{49}} = \dfrac{\sqrt{126}}{7}$ u.c..

Exercícios de familiarização

Exercício 1

Determine a medida em radianos do ângulo entre as retas.

a. $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ e $s: \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$

b. $r: \overrightarrow{OX} = (1,\ 1,\ 9) + \lambda(0,\ 1,\ -1)\ (\lambda \in \mathbb{R})$ e $s: \begin{cases} x - 1 = y \\ z = 4 \end{cases}$

Exercício 2

Determine os vértices B e C do triângulo equilátero *ABC*, sabendo que $A(1,\ 1,\ 0)$ e que o lado BC está contido **na reta r de equação**: $r: \overrightarrow{OX} = (0,\ 0,\ 0) + \lambda(0,\ 1,\ -1)\ (\lambda \in \mathbb{R})$

Exercício 3

Determine a medida do ângulo entre os planos $\pi_1: x - y + z = 20$ e $\pi_2: x + y + z = 0$.

Exercício 4

Calcule a distância entre os pontos $A(6,\ 5,\ 2)$ e $B(7,\ 3,\ 4)$.

Exercício 5

Calcule a distância do ponto $P(2,\ 0,\ 7)$ à reta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Exercício 6

Calcule a distância do ponto ao plano nos seguintes casos.

a. $P(-4,\ 2,\ 5)$ e $\pi: 2x + y + 2z + 8 = 0$

b. $P(1,\ 2,\ -1)$ e $\pi: 3x - 4y - 5z + 1 = 0$

Exercício 7

Calcule a distância entre as retas nos seguintes casos.

a. $r: \begin{cases} y = 1 \\ x + 2 = \dfrac{z-4}{-2} \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b. $r: \overrightarrow{OX} = (1,\ 2,\ 0) + t(1,\ 3,\ 1)\ (t \in \mathbb{R})$ e $s: \begin{cases} 3x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

c. $r: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = 2x \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Exercício 8

Calcule a distância entre os planos π_1: $3x - 2y + z - 2 = 0$ e π_2: $3x - 2y + z = 0$.

Exercício 9

Calcule a distância entre as retas paralelas r: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = z$ e s: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = z + 1$

Exercício 10

Determine a distância entre as retas reversas r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z$ e s: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5} = z \\ y = z - 1 \end{cases}$

Avaliação

O próximo passo é resolver os exercícios que preparamos para esse tópico. Clique na atividade para acessá-la e resolver os exercícios propostos.

Avaliação 6

Responda às questões propostas.

Dúvidas

Dúvidas e outras questões poderão ser esclarecidas por meio do Fórum de dúvidas.