Variável aleatória discreta - Variância, propriedades e Desvio Padrão

A fim de introduzirmos esse novo conceito, consideremos o seguinte exemplo: sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas, tais que X: notas de estudantes da classe A e Y: notas de estudantes da classe B, tais que a distribuição de probabilidades de X e de Y são dadas a seguir:

X	P(X)
4	1/22
5	2/22
6	15/22
7	4/22
total	22/22

Y	P(Y)
2	1/21
3	5/21
4	2/21
5	1/21
6	2/21
7	2/21
8	3/21
9	4/21
10	1/21
total	21/21

Determinando o valor esperado dessas variáveis, temos que:

X	P(X)	X P(X)
4	1/22	4/22
5	2/22	10/22
6	15/22	90/22
7	4/22	28/22
total	22/22	**132/22**

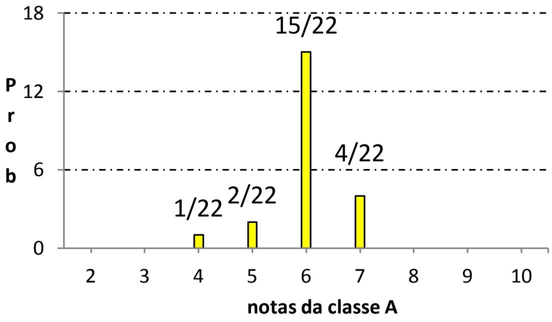
Y	P(Y)	Y P(Y)
2	1/21	2/21
3	5/21	15/21
4	2/21	8/21
5	1/21	5/21
6	2/21	12/21
7	2/21	14/21
8	3/21	24/21
9	4/21	36/21
10	1/21	10/21
total	21/21	**126/21**

Assim, temos que: $E(X) = \frac{132}{22} = 6$, ou seja, a nota média da classe A é 6

$E(Y) = \frac{126}{21} = 6$, ou seja, a nota média da classe B é 6

Embora seja visível, pela distribuição de probabilidades das notas das duas classes, que o aproveitamento é diferente, a média das duas classes é 6. Concluímos, portanto, que o valor esperado de uma variável é uma informação importante, porém, não suficiente, já que podemos ter duas variáveis com a mesma média, porém, com comportamentos distintos. Há, então, a necessidade de definir uma medida que possibilite a identificação dessa diferença.

Essa diferença pode ser visualizada na representação gráfica das duas vaiáveis aleatórias, como apresentada na sequência.



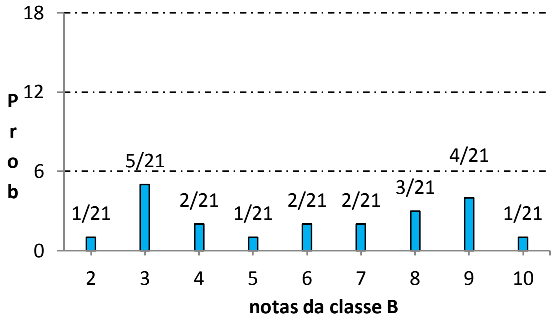
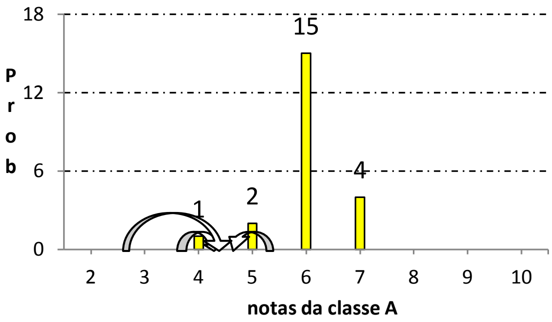


Gráfico 1. Notas da classe A *Gráfico 2. Notas da classe B*

Pode-se notar que, embora nas duas classes a média seja a mesma, existe uma diferença expressiva, em relação à distribuição das notas. Na classe A, as notas estão mais concentradas em torno da média 6, do que na classe B. O objetivo é encontrar um número que represente a dispersão dos dados, em torno da média, em ambos os casos.

Inicialmente, pode-se pensar em calcular as **diferenças dos valores da variável, em relação à média**, considerando, obviamente, **a probabilidade** de cada valor, conforme representado a seguir:



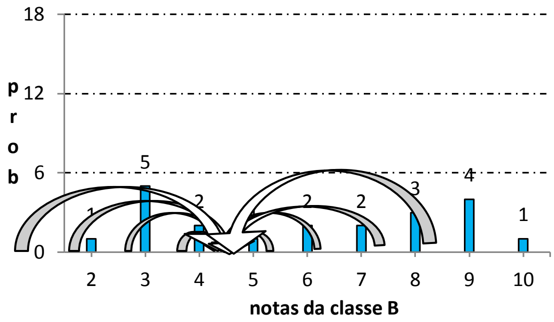


Gráfico 3. Notas da classe A *Gráfico 4. Notas da classe B*

Um número que possa representar essas diferenças seria a média (ou valor esperado) dessas diferenças. Como o valor esperado é o ponto de equilíbrio da variável, a **média das diferenças**, nos dois casos, dá **zero**.

Observando que o fato de ter zerado as médias das diferenças, se deve aos sinais positivos e negativos, dependendo se as notas estão à direita ou à esquerda da média 6 (em qualquer das duas classes), e ainda, considerando que nos interessa avaliar se os valores estão próximos da média, ou dispersos em relação a ela, a saída para resolver o impasse é considerar os módulos das diferenças, ou, o quadrado das diferenças. Como a função módulo tem algumas restrições, o que não ocorre com a função quadrática, adotaremos a média do **quadrado das diferenças**.

Tem-se, portanto:

X	P(X)	X P(X)	$[X-E(X)]^2P(X)$
4	1/22	4/22	4/22
5	2/22	10/22	2/22
6	15/22	90/22	0/22
7	4/22	28/22	4/22
total	22/22	**132/22**	**10/22**

Y	P(Y)	Y P(Y)	$[Y-E(Y)]^2P(Y)$
2	1/21	2/21	16/21
3	5/21	15/21	45/21
4	2/21	8/21	8/21
5	1/21	5/21	1/21
6	2/21	12/21	0/21
7	2/21	14/21	2/21
8	3/21	24/21	12/21
9	4/21	36/21	36/21
10	1/21	10/21	16/21
total	21/21	**126/21**	**136/21**

Considerando, então, **a média dos quadrados das distâncias**, dos valores da variável em relação à média, nos dois casos, teremos o conceito de **Variância**, que representaremos por:

$$Var(X) = \sum[\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}]^2\mathrm{P(X)} = \frac{10}{22} = 0{,}454545 \text{ e } Var(Y) = \sum[\mathrm{Y} - \mathrm{E(Y)}]^2\mathrm{P(Y)} = \frac{136}{21} = 6{,}476190$$

Observe que, também nesse caso, pode-se constatar que a classe B tem maior dispersão nas notas do que a classe A. Mas, qual a vantagem com essa "nova" medida? A vantagem é que essa medida envolve uma função do segundo grau, que permite fazer um estudo teórico da Variância. Deve-se observar que, ao utilizar o quadrado das distâncias, a unidade da Variância, acabou sendo $nota^2$, que não tem significado algum e, portanto, não pode ser interpretada no contexto da situação. O problema é facilmente resolvido, considerando-se a raiz quadrada. Define-se, então, **Desvio Padrão** de uma variável, como sendo a **raiz quadrada positiva da Variância**, que representaremos por:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{10}{22}} = \sqrt{0{,}454545} \cong 0{,}674200$$

$$DP(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\frac{136}{21}} = \sqrt{6{,}476190} \cong 2{,}544836$$

Note que o Desvio Padrão sempre será definido, porque sendo a Variância obtida por meio de média de quadrados, ela nunca será negativa. A vantagem do Desvio Padrão é que a unidade é a mesma da variável em estudo, permitindo que se faça uma interpretação no contexto da situação.

Uma primeira observação pode ser feita, tendo em vista os cálculos envolvidos na determinação da Variância e, consequentemente, do Desvio Padrão, é que, dependendo dos valores da variável, por conter muitos arredondamentos e, se estes forem no mesmo sentido, eles podem acarretar respostas distantes das exatas. Apresentamos a dedução de uma fórmula para calcular a Variância que, além de ser mais simples para a determinação do valor da Variância, envolve menos arredondamentos, tornando-se, então, mais precisa.

$$Var(X) = \sum [\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}]^2 \mathrm{P(X)} = \sum [X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2]\, P(X) =$$

$$= \sum X^2 P(X) - 2E(X) \sum X\, P(X) + [E(X)]^2 \sum P(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2(1) =$$

$$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Ou seja, a variância pode ser determinada por: $\boldsymbol{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$, isto é, o cálculo da variância, pode ser obtido fazendo-se: a média dos quadrados, menos o quadrado da média.

Assim, para calcular a Variância de uma variável, **não será aceita a forma construída anteriormente, mas, faremos valer a fórmula que acabamos de deduzir**, porque é mais precisa e mais simples de ser obtida, ou seja:

X	P(X)	X P(X)	$(X)^2$P(X)
4	1/22	4/22	16/22
5	2/22	10/22	50/22
6	15/22	90/22	540/22
7	4/22	28/22	196/22
total	22/22	**132/22**	**802/22**

Y	P(Y)	Y P(Y)	$(Y)^2$P(Y)
2	1/21	2/21	4/21
3	5/21	15/21	45/21
4	2/21	8/21	32/21
5	1/21	5/21	25/21
6	2/21	12/21	72/21
7	2/21	14/21	98/21
8	3/21	24/21	192/21
9	4/21	36/21	324/21
10	1/21	10/21	100/21
total	21/21	**126/21**	**892/21**

(note que a quarta coluna pode ser obtida multiplicando-se a primeira e a terceira colunas)

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{802}{22} - \left(\frac{132}{22}\right)^2 = 0{,}454545 \Rightarrow DP(X) = \sqrt{0{,}454545} \cong 0{,}674200$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{892}{21} - \left(\frac{126}{21}\right)^2 = 6{,}476190 \Rightarrow DP(Y) = \sqrt{6{,}476190} \cong 2{,}544836$$

Observe que esses resultados são exatamente iguais aos encontrados anteriormente, quando não utilizamos a fórmula que deduzimos para o cálculo. Isso aconteceu porque não houve arredondamento durante os cálculos; os arredondamentos ocorreram apenas nas respostas finais.

Consideremos o exemplo da v.a.d. X: número de caras em três lances de uma moeda, que já estudamos. Vimos que ela tem a seguinte distribuição de probabilidades, já com as colunas para determinação da média de X e da média dos quadrados de X:

X	P(X)	X P(X)	X^2 P(X)
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8
3	1/8	3/8	9/8
total	1	12/8=1,5	24/8=3

Assim, lembrando que: $E(X) = \sum_i x_i \, p_X(x_i) = \sum XP(X)$ temos que a variância pode ser obtida fazendo-se:

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_i x_i^2 \, p_X(x_i) - [E(X)]^2 = \sum X^2 P(X) - \left[\sum XP(X)\right]^2}$$

Note que, na tabela construída, o total da terceira coluna é $E(X)$ e o total da quarta coluna é $E(X^2)$. Assim, em relação ao exemplo, teremos:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1{,}5^2 = 3 - 2{,}25 = 0{,}75$$

Logo, a variância do número de caras em três lances de uma moeda é 0,75 cara^2 (note que a unidade é ao quadrado, que não tem significado em relação à variável, número de caras).

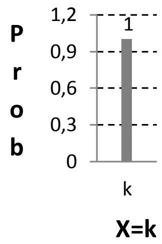
Consequentemente, o desvio padrão, no caso do exemplo, será:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}75} \cong 0{,}866025$$

Logo, o desvio padrão do número de caras em três lances de uma moeda é, aproximadamente, 0,866025 caras (note que a dispersão não chega a uma cara).

Assim como a média de uma variável aleatória tem algumas propriedades, a variância, por ser definida em função da média, também tem algumas propriedades que passaremos a introduzir e demonstrar valendo-se da definição de variância e das propriedades da média, já enunciadas (OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: só existem propriedades para a variância; não existem propriedades para o desvio padrão!).

1. $\boldsymbol{Var(K) = 0}$. De fato, $Var(K) = E(K^2) - [E(K)]^2 = k^2 - k^2 = 0$, que é simples de constatar, já que se uma variável é constante (assume sempre o mesmo valor, que coincide com a média), ela não tem dispersão em torno da média. Veja a representação gráfica de uma variável constante, isto é, assume um único valor k.



2. $\boldsymbol{Var(X + K) = Var(X)}$. De fato,

$Var(X + K) = E[(X + K)^2] - [E(X + K)]^2 =$

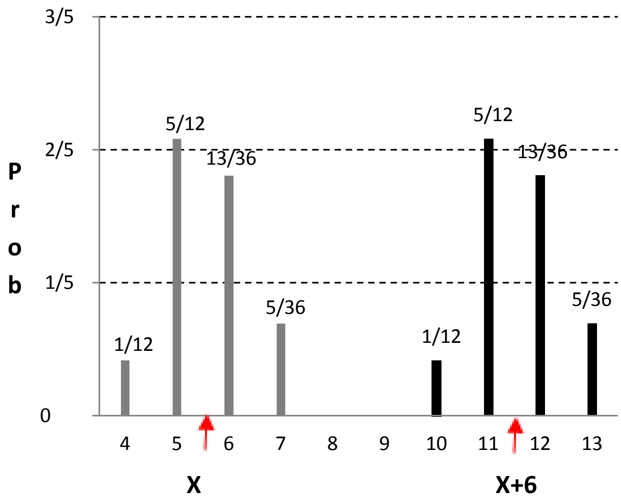
$= E(X^2 + 2XK + K^2) - [E(X) + E(K)]^2 =$

$= E(X^2) + 2kE(X) + E(K^2) - \{[E(X)]^2 + 2E(X)E(K) + [E(K)]^2\} =$

$= E(X^2) + 2kE(X) + k^2 - [E(X)]^2 - 2E(X)k - [k]^2 =$

$= E(X^2) - [E(X)]^2 = Var(X)$, que é fácil de entender, porque ao somar uma constante à variável, estamos fazendo uma translação de toda distribuição e, portanto, a dispersão em torno da média continua a mesma. Embora a média tenha se deslocado com essa constante, todos os valores da variável também tiveram o mesmo deslocamento (note que a constante pode ser negativa).

Por exemplo, o gráfico a seguir apresenta as distribuições de probabilidades da variável X e da variável X+6. As setas indicam os valores das médias: 5,555556 e 11,555556, correspondentemente. Observe que, tanto em um caso, como no outro, a dispersão dos valores em torno da média é a mesma.

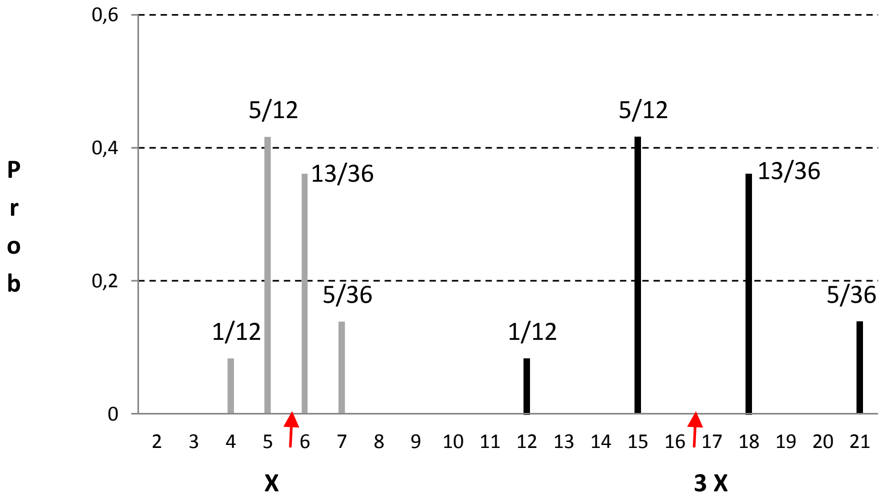


3. $\boldsymbol{Var(KX) = k^2 Var(X)}$. De fato,

$Var(KX) = E[(KX)^2] - [E(KX)]^2 = E(K^2X^2) - [kE(X)]^2 =$

$= k^2E(X^2) - k^2[E(X)]^2 = k^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} = k^2Var(X)$

Nesse caso, não é tão simples constatar que a dispersão aumenta com o quadrado da constante, quando se multiplica uma variável por uma constante. O exemplo a seguir ilustra que ela aumenta "bastante", mas, a determinação de que ela aumenta proporcionalmente ao quadrado da constante é possível determinar algebricamente.



Observe que as médias de X e de 3X são respectivamente: 5,555556 e 16,555556 e que, a dispersão dos valores da variável 3X, em torno da média (16,555556) é bem maior que a dispersão dos valores da variável X, em torno da média (5,555556). Porém, determinar que a variância de 3X ficou 9 vezes maior que a de X, é difícil de se perceber, simplesmente observando a representação gráfica.

Voltando ao exemplo da v.a.d. X: número de caras em três lances de uma moeda, determinemos **(a)** $\boldsymbol{Var(-3X^2+7)}$ e **(b)** $\boldsymbol{DP(4X-3X^2-7)}$.

(a) $\boldsymbol{Var(-3X^2+7)} = Var(-3X^2) = (-3)^2 Var(X^2) = 9\{E[(X^2)^2] - [E(X^2)]^2\} =$
$= 9\{E(X^4) - [E(X^2)]^2\}$

Devemos, portanto, calcular $E(X^4)$ e $E(X^2)$, para depois substituir no resultado acima.

X	P(X)	X^2 P(X)	X^4 P(X)
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	12/8	48/8
3	1/8	9/8	81/8
total	1	24/8	132/8

Logo, $E(X^2) = \frac{24}{8}$ e $E(X^4) = \frac{132}{8}$. Substituindo na igualdade anterior, teremos:

$$\boldsymbol{Var(-3X^2+7)} = 9\{E(X^4) - [E(X^2)]^2\} = 9\left\{\frac{132}{8} - \left[\frac{24}{8}\right]^2\right\} = 9\left\{\frac{480}{64}\right\} = 7{,}5$$

(b) $\boldsymbol{DP(4X - 3X^2 - 7)} = \sqrt{Var(4X - 3X^2 - 7)} = \sqrt{Var(4X - 3X^2)}$

Calculemos, então, $Var(4X - 3X^2)$. Note que não existe propriedade da variância em relação à diferença (ou soma). Assim, precisamos aplicar a definição de Variância. Teremos:

$$Var(4X - 3X^2) = E[(4X - 3X^2)^2] - [E(4X - 3X^2)]^2 =$$
$$= E(16X^2 - 24X^3 + 9X^4) - [4E(X) - 3E(X^2)]^2 =$$
$$= 16E(X^2) - 24E(X^3) + 9E(X^4) - [4E(X) - 3E(X^2)]^2$$

Precisamos, então, calcular: $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$, $E(X^4)$ e substituir acima.

X	P(X)	X P(X)	X^2 P(X)	X^3 P(X)	X^4 P(X)
0	1/8	0	0	0	0
1	3/8	3/8	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8	24/8	48/8
3	1/8	3/8	9/8	27/8	81/8
total	1	12/8	24/8	54/8	132/8

Substituindo os valores teremos:

$$Var(4X - 3X^2) = 16E(X^2) - 24E(X^3) + 9E(X^4) - [4E(X) - 3E(X^2)]^2 =$$
$$= 16\frac{24}{8} - 24\frac{54}{8} + 9\frac{132}{8} - \left[4\frac{12}{8} - 3\frac{24}{8}\right]^2 = \frac{276}{8} - \frac{576}{64} = \frac{1632}{64} = 25{,}5$$

Assim, teremos:

$$\boldsymbol{DP(4X - 3X^2 - 7)} = \sqrt{Var(4X - 3X^2)} = \sqrt{25{,}5} \cong 5{,}049752$$

A seguir, apresentamos algumas situações para resolver.

Exercício 1. Em um cassino, um jogador lança dois dados, cujas probabilidades são proporcionais aos valores das faces. Se sair soma 7, ganha R$50,00, se sair soma 11, ganha R$100,00 e se sair soma 2, ganha R$200,00. Qualquer outro resultado, ele não ganha nada. Quais são a variância e o desvio padrão do ganho do jogador?

Exercício 2. Uma caixa tem três bolas brancas e uma bola vermelha. Alexandra vai retirar as bolas, uma a uma, até encontrar a bola vermelha. Seja N: o número de tentativas necessárias até ela encontrar a bola vermelha. Determine a variância e o desvio padrão do número de tentativas necessárias.

Exercício 3. Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair face 6 tem um desconto de 30% sobre o total de sua conta, se sair 5, o desconto é de 20%, se sair 4 é de 10% e se ocorrerem faces 1, 2 ou 3, o desconto é de 5%. Determine a variância e o desvio padrão do desconto concedido pelo supermercado.

Exercício 4. A Empresa Equilibra S.A. vende três produtos, cujos lucros e probabilidades de venda estão representados na tabela a seguir. Determine a variância e o desvio padrão do lucro total obtido pela Empresa, em um mês em que forem vendidos 5.000 produtos.

Produto	*A*	*B*	*C*
lucro unitário (R$)	*15*	*20*	*10*
P(venda)	*0,2*	*0,3*	*0,5*

Exercício 5. Sendo V e W variáveis aleatórias discretas com distribuições de probabilidades dadas pelas tabelas a seguir, determine, usando as propriedades de variância (e de valor esperado):

(a) $\mathrm{Var}(2V + 5)$;

(b) $\mathrm{DP}(4V^2 - 3)$;

(c) $DP(4W^4 + 9)$.

V	*-2*	*0*	*1*	*5*
P(V)	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,4*

W	*-1*	*0*	*1*
P(W)	*0,2*	*0,5*	*0,3*