TÓPICO 4: ESTUDODO PLANO

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE FAMILIARIZAÇÃO

Exercício 1: Escreva as equações vetorial, paramétrica e geral do plano que passa pelo ponto $A(2,1,3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(-3,-3,1)$ e $\vec{v}=(2,1,-2)$. Determine um ponto P qualquer desse plano.

vetorial - π : $\overrightarrow{OX}=(2,1,3)+\lambda(-3,-3,1)+\mu(2,1,-2)$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$

paramétricas $\begin{cases} x = 2-3\lambda+2\mu \\ y = 1-3\lambda+\mu \\ z = 3+\lambda-2\mu \end{cases}$

Para $\lambda = 2$ e $\mu = 3$ (pode escolher outros valores)

temos: $x = 2-3\times2+2\times3 = 2$

$y = 1-3\times2+3 = -2$ $\quad\therefore P(2,-2,-1)\in\pi$

$z = 3+2-2\times3 = -1$

geral: $[\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}]=0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-2).5-(y-1)4+(z-3).3=0.$$

$5x-10-4y+4+3z-9=0$

$5x-4y+3z-15=0.$

$P(2,-2,-1)\in\pi$?

$5\times2-4(-2)+3(-1)-15 =$

$= 10+8-3-15 = 0. \quad\therefore P\in\pi.$

Exercício 2: Determine as equações vetorial, paramétricas e geral do plano determinado pelos pontos $A(5,7,-2)$, $B(8,2,-3)$ e $C(1,2,4)$.

vetorial: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,-5,-1)$

$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-4,-5,6)$

uma equação possível é:

$\overrightarrow{OX}=(5,7,-2)+\lambda(3,-5,-1)+\mu(-4,-5,6)$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$

outras podem ser formadas.

paramétricas: $\begin{cases} x = 5+3\lambda-4\mu \\ y = 7-5\lambda-5\mu \\ z = -2-\lambda+6\mu \end{cases}$

geral: $\begin{vmatrix} x-5 & y-7 & z+2 \\ 3 & -5 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$(x-5)(-35)-(y-7)(14)+(z+2)(-35)=0$

$-35x-14y-35z+203=0$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-21-4+8+6-28+4) - y(-15-2+32+3-20+16) +$$
$$+ z(10+7+16-2-10-56) - 1(40-21-32+4+30-224) = 0$$
$$-35x - 14y - 35z + 203 = 0.$$

Exercício 3: Em cada caso, que lugar geométrico representa a equação dada?

a) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{v}$ se $m \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = \vec{0}$

a) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{v}$ se $m \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = \vec{0}$

O ponto A, pois sendo $\vec{v} = \vec{0}$, $m\vec{v} = \vec{0}$ e quando m percorre $\mathbb{R}$ temos sempre $\overrightarrow{OA} + \vec{0} = \overrightarrow{OA}$.

b) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + m\vec{v}$ se $m \in \mathbb{R}$ e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI

b) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + m\vec{v}$ se $m \in \mathbb{R}$ e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI.

Uma reta, pois podemos escrever

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{OA} + m\vec{w}$ em que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

c) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + t\vec{v}$ se $m, t \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$

c) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + t\vec{v}$ se $m, t \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$

Se $\vec{v} = \vec{0}$ temos o ponto A

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI temos um plano.

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $(\vec{u}, \vec{v})$ LD então temos $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e portanto $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m.\lambda\vec{v} + t\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \mu\vec{v}$ que representa uma reta em que $\mu = (m\lambda + t) \in \mathbb{R}$.

d) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + t\vec{v}$ se $m, t \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} // \vec{v}$

d) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m\vec{u} + t\vec{v}$ se $m, t \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} // \vec{v}$.

Uma reta pois se $\vec{u} // \vec{v}$ então $\vec{u} = h\vec{v}$, $h \in \mathbb{R}$

logo $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + m(h\vec{v}) + t\vec{v} = \overrightarrow{OA} + (mh + t)\vec{v} =$

$= \overrightarrow{OA} + p\vec{v}$ em que $p = mh + t$.

Exercício 4: Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos:

a) $\pi_1: \overrightarrow{OX} = (1,2,1) + \lambda(1,-1,2) + \mu\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right)$ e

$\pi_2: \overrightarrow{OX} = (1,2,1) + \lambda(-1,1,-2) + \mu(-3,4,-6)$

a) Como $(1,-1,2) = -(-1,1,-2)$ vetores opostos e
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right) = \frac{1}{6}(-3,4,-6)$ vetores paralelos

os planos são coincidentes pois os vetores diretores de ambos são paralelos e os dois planos passam pelo mesmo ponto.

b) $\pi_1: \overrightarrow{OX} = (0,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,0)$ e $\pi_2: \overrightarrow{OX} = (1,1,0) + \lambda(1,2,1) + \mu(0,-1,1)$

b) π_1 é o plano xy (os vetores não tem componente em z, o que não ocorre com π_2)

$(1,1,0) \nparallel (1,2,1)$ e $(0,1,0) \nparallel (0,-1,1)$
logo $\pi_1 \neq \pi_2$.

Exercício 5

Dadas as equações paramétricas de um plano $\pi: x = -1 + 2\lambda - 3\mu,\ y = 1 + \lambda + \mu, z = \lambda$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ obtenha uma equação geral para esse plano.

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Se $z = \lambda$ então $y = 1 + z + \mu \Rightarrow \mu = y - 1 - z$

Logo $x = -1 + 2z - 3(y - 1 - z)$
$x = -1 + 2z - 3y + 3 + 3z$
$x + 3y - 5z + 2 = 0$

Exercício 6: Uma reta r é dada como intersecção de dois planos $r: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

Dê as equações paramétricas de r.

$$r: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Se $x = \lambda$ temos:

$$\begin{cases} y+z = 1-\lambda \\ y-z = -\lambda \end{cases}$$

$$2y = 1-2\lambda \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \lambda$$

Substituindo na 2ª equação vem

$$\frac{1}{2} - \lambda - z = -\lambda \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercício 7

Sendo $r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$ determine as equações de dois planos onde r é a intersecção deles.

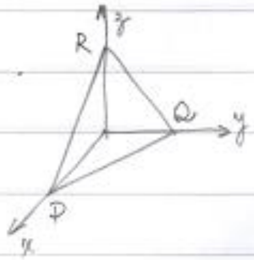
$$r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 3+\lambda \Rightarrow \lambda = z-3 \end{cases}$$

$$x = 1-z+3 \Rightarrow x = 4-z$$
$$y = 2+2(z-3) \Rightarrow y = -4+2z$$

$$r: \begin{cases} x+z-4=0 \\ y-2z+4=0 \end{cases}$$

r é a intersecç dos planos $\pi_1: x+z-4=0$ e $\pi_2: y-2z+4=0$.

Exercício 8: Determine a equação segmentaria do plano cuja equação geral é $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ e dê os pontos de intersecção desse plano com os eixos coordenados.



$$2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

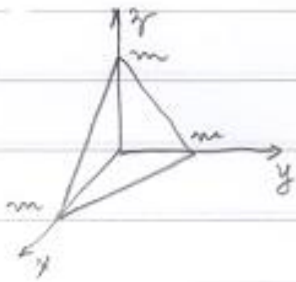
$$2x + 3y + 4z = 12$$

$$\frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} + \frac{4z}{12} = 1$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \quad \text{eq. segmentária}$$

$P(6,0,0) \quad Q(0,4,0) \quad R(0,0,3)$

Exercício 9: Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto $P(3,1,5)$ e que determina segmentos iguais nos eixos coordenados.



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m} = 1$$

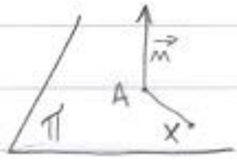
$$\therefore \quad x + y + z = m$$

Como $P \in \pi$ temos $3 + 1 + 5 = 9 = m$

Logo a equação geral desse plano é

$$x + y + z - 9 = 0.$$

Exercício 10: Determine uma equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1,0,2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1,-1,4)$.



$$\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x-1,\ y,\ z-2) \cdot (1,-1,4) = 0$$

$$x - 1 - y + 4z - 8 = 0 \Rightarrow x - y + 4z - 9 = 0.$$

Outra solução

Se $\vec{n} = (1,-1,4)$ então $x - y + 4z + d = 0$.

Como $A \in \pi$ então $1 \times 1 - 1 \times 0 + 4 \times 2 + d = 0 \Rightarrow d = -9$

$$\therefore \quad x - y + 4z - 9 = 0.$$

Exercício 11: Dadas as retas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ e $s: x-1 = y = z$ determine uma equação geral para o plano determinado por r e s.

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z \qquad s: x-1 = y = z$

$r: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \ (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases} \ (\mu \in \mathbb{R})$

$A \in r,\ A(1,0,0) \qquad B \in s,\ B(1,0,0)$

$\vec{r} = (2,2,1) \qquad \vec{s} = (1,1,1)$

$\therefore \overrightarrow{OX} = (1,0,0) + a(2,2,1) + b(1,1,1) \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) - y + z \times 0 = 0$$

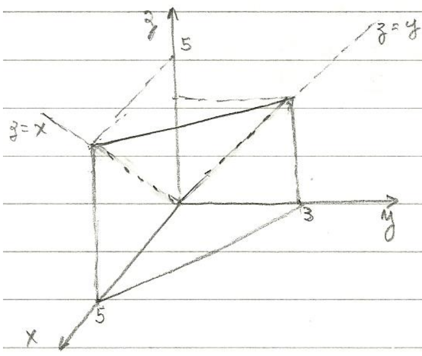
$$x - y - 1 = 0.$$

Exercício 12

Represente as superfícies dos sólidos delimitados por:

a) $z = x + y$ com $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 3$

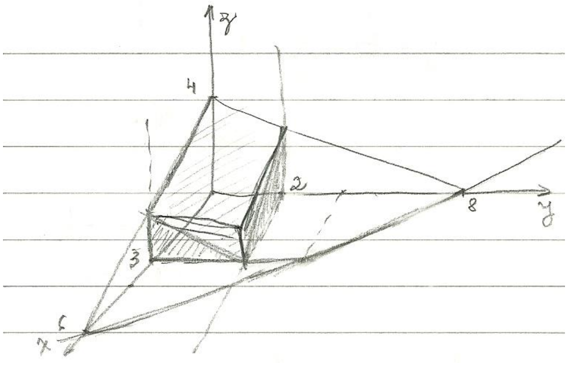
$z = x + y$

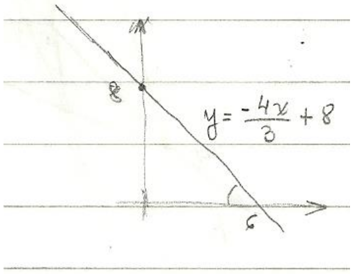


se $x = 0,\ z = y$

se $y = 0\ \ z = x$

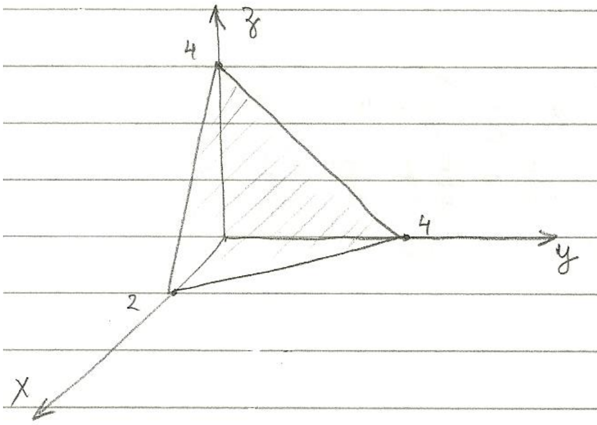
b) plano que intercepta os eixos em $x = 6$, $y = 8$, $z = 4$ e os planos $x = 3$ e $y = 2$.





se $x = 3,\ y = 4$

c) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + y + z = 4$.



$2x + y + z = 4$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$