PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

TÓPICO 3 – ALGUMAS APLICAÇOES DAS INTEGRAIS

As aplicações de integral abrangem diversas áreas do conhecimento. Nas próximas atividades são propostas questões referentes a algumas delas.

Agora serão explorados alguns exemplos de cálculo de trabalho, utilizando integral. Trabalho é uma medida da energia consumida por uma força para mover uma partícula de um ponto a outro. Em geral, o trabalho é denotado pela letra w que é a inicial da palavra work (trabalho em inglês).

Se a força for medida em dina e a distância em centímetro, então o trabalho é medido em dina por centímetro.(Obs.: Uma dina-centímetro de trabalho se chama erg.).

Se a força for medida em newtons e a distância em metros, o trabalho é medido em newton por metro. (Obs.: Um newton-metro de trabalho se chama joule. Um joule equivale a 10^7 ergs e um newton, a 10^5 dinas).

Se a força for expressa em libras e a distância em pés, o trabalho se expressa em libras-pé. Denotando-se por $W_a^b(f)$ o trabalho realizado por uma função força f para mover uma partícula de ***a*** a ***b***, tem-se que: $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx$. Vejamos um exemplo:

Uma partícula se move sobre o eixo x, sob a ação de uma força f(x) = x^2 + 2 N quando a partícula está a x metros da origem. Encontrar o trabalho realizado quando esta partícula se move do ponto x = 1 ao ponto x = 3.

Solução: W = $\int_1^3 (x^2+2)dx = \frac{x^3}{3} + 2x \,\Big|_1^3 = (9+6) - \left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{38}{3}$ J

Atividades 3.1

1. Uma partícula se move ao longo do eixo x impulsionada por uma força f(x)=$3x^2$ + 4x newtons. Calcule quantos joules de trabalho se realizam com essa força para transladar a partícula:

Atividades elaboradas pelo Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva

(A) De x = 0 a x = 5m

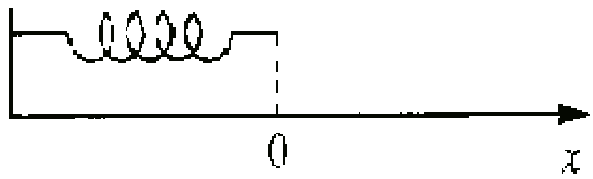
(B) De x = 2 a x = 5m

2. Determinar o trabalho realizado ao empurrar um automóvel por uma distância de 6m ao longo de uma estrada plana, exercendo a força de 400N.

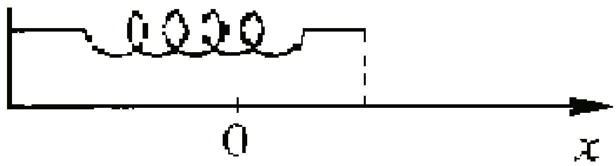
3. Na Física é conhecida uma lei relacionada à elasticidade de um corpo, chamada Lei de Hooke. Afirma ela que a força necessária para se manter uma mola esticada x unidades além de seu comprimento normal é diretamente proporcional a x, isto é, f(x) = kx, onde k é um número positivo chamado constante elástica. Analisemos o seguinte problema:

Para manter uma mola esticada do seu comprimento de 20cm para o comprimento de 25cm, é necessária uma força de 30N. Qual é o trabalho realizado quando se estica a mola de 18cm para 25cm?

Solução: Primeiro lembre-se que f(x) = kx. Queremos saber o valor de k. A quantidade esticada é 5cm = 0,05m. Então f(0,05) = 0,05k = 30, portanto k = $\frac{30}{0{,}05} = 600$. Dessa forma f(x) = 600x N é a força necessária. Observe ainda:



Posição natural da mola



Posição esticada da mola

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Agora é com você! Resolva o problema calculando qual é o trabalho realizado quando se estica a mola de 18cm para 25cm.

(Tarefa para entregar) 4. Uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x) = (4x - 1)^2$ dinas, quando a partícula está a x cm da origem. Encontre o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto x = 1 ao ponto x = 4.

Responda a questão, salve o arquivo como atividade3_1*seunome*.doc e envie pela tarefa do tópico 3.

Atividades 3.2

Com esta atividade veremos como a integral pode ser utilizada para se calcular o volume de sólidos de revolução.

Ao se fazer uma região plana dar uma volta completa em torno de uma reta, obtém-se um sólido chamado sólido de revolução. Por exemplo, ao se girar um semi-círculo (com o diâmetro apoiado no eixo x) em torno do eixo x, o sólido resultante é uma esfera de mesmo raio do semi-círculo.

Se a região for delimitada pelo gráfico de uma função contínua f, pelo eixo x e pelas retas verticais x = a e x = b, então o volume do sólido gerado pela revolução dessa região em torno do eixo x é:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Vejamos um exemplo dessa situação:

Inicialmente, lembremos que a circunferência de centro na origem e raio r é dada por $x^2 + y^2 = r^2$, a semicircunferência superior é descrita por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ao fazer girar em torno do eixo x, o semi-círculo limitado por ela obtém-se uma esfera de centro na origem do espaço tri-dimensional e raio r. Calculemos seu volume:

$$V = \pi\int_{-r}^{r}(y)^2 dx \ = \ \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \ = \ \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx \ = \ \left(\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} \ =$$

$$\left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}\right) - \left(-\pi r^3 + \frac{\pi r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ u.v.}$$

(Tarefa para entregar)

1. Por meio de integração, calcule o volume do cone reto obtido pela revolução em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico da função f definida por f(x) = 2x e esse eixo, no intervalo $0 \le x \le 5$. Qual é o raio do cone? E a altura?

2. Escreva uma integral que fornece o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas abaixo, em torno do eixo x. Não calcule o volume.

(A) $y = \ln x$; $y = 1$, $x = 1$

(B) $y = \sqrt{x-1}$; $y = 0$, $x = 5$

Responda as questões 1 e 2, salve o arquivo como atividade3_2*seunome*.doc e envie pela tarefa do tópico 3.

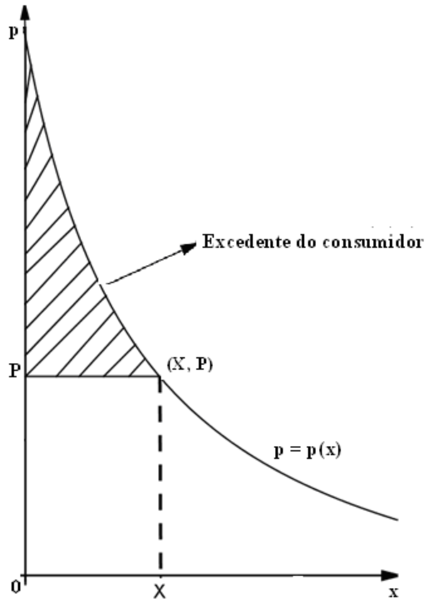
Atividades 3.3

Nesta atividade apresentamos dois exemplos de aplicação de integral na área da Economia, extraídos do livro de Cálculo, volume 1 de James Stewart.

A função demanda p(x) descreve o preço que uma companhia cobra para vender x unidades de um produto. Como para vender maiores quantidades é necessário baixar os preços, a função demanda é decrescente.

Chama-se *excedente do consumidor* a quantidade de dinheiro economizada pelos consumidores ao comprar um produto pelo preço P, correspondente a uma quantidade demanda X. Na figura abaixo, está representado o excedente do consumidor como sendo a área sob a curva da demanda e acima da reta p = P

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO



O excedente do consumidor pode ser calculado por: E. C.

$$\int_0^X (p(x) - P)\,dx$$

1. A demanda por um produto é dada por $p(x) = 1200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2$. Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas é X = 500.

(Tarefa para entregar)

2. A função demanda para um certo produto é $p(x) = 5 - \frac{x}{10}$. Calcule o excedente do consumidor quando o nível de venda é 30. Ilustre desenhando a curva de demanda e identificando o excedente do consumidor com uma área.

Responda a questão 2, salve o arquivo como atividade3_3*seunome*.doc e envie pela tarefa do tópico 3.