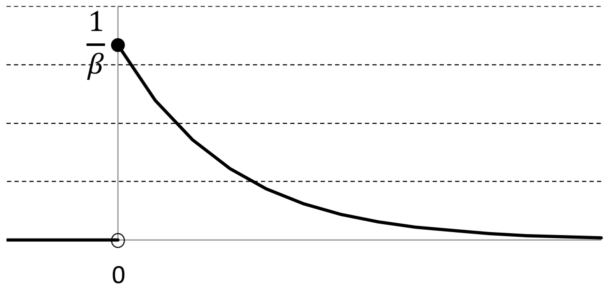
# Modelo Exponencial

Outro modelo importante e que tem aplicações em confiabilidade de sistemas é o Modelo Exponencial. Dizemos que uma variável aleatória contínua $X$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$, indicamos: $X \sim Exp(\beta)$, se a função densidade de probabilidades é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}} \ , \ x \geq 0 \\ 0 \ , \ x < 0 \end{cases}, \text{ para } \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

A representação gráfica dessa função é da forma:




Valendo-se do cálculo integral, se $X \sim Exp(\beta)$ com função densidade de probabilidades dada por: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}} \ , \ x \geq 0 \\ 0 \ , \ x < 0 \end{cases}$, para $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$, temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (área sob a curva igual a um). De fato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

Utilizando a substituição: $u = -\frac{x}{\beta}$, temos que: $u' = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\beta} \Rightarrow du = -\frac{1}{\beta}\ dx$. Assim, considerando a integral indefinida, teremos:

$$\int \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \int e^{-\frac{x}{\beta}} \frac{1}{\beta}dx = -\int e^{-\frac{x}{\beta}} \left(-\frac{1}{\beta}dx\right) = -\int e^{u}\, du = -e^{u} = -e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Voltando à nossa integral definida teremos:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^{+\infty} = \lim_{a \to \infty} \left(-e^{-\frac{a}{\beta}}\right) - \left(-e^{-\frac{0}{\beta}}\right) = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{1}{e^{\frac{a}{\beta}}}\right) - (-1) = 0 + 1 = 1$$

Para o cálculo da média da variável aleatória, temos que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\ 0\ dx + \int_{0}^{+\infty} x\ \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \int_{0}^{+\infty} x\ \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

A resolução dessa integral requer a utilização de integração por partes. Assim, considerando $u = x$ e $dv = \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx$ e utilizando que, na integração por partes: $\int_a^b u\ dv = [u\ v]_a^b - \int_a^b v\ du$, teremos:

$v = \int \frac{1}{\beta} \ e^{-\frac{x}{\beta}}dx = -e^{-\frac{x}{\beta}}$ $\qquad du = dx.$ $\qquad$ Logo,

$$\int_a^b u\,dv = \int_0^{+\infty} x\,\frac{1}{\beta}\;e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \left[x\left(-e^{-\frac{x}{\beta}}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-e^{-\frac{x}{\beta}}\right)dx =$$

$$= \left\{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{e^{\frac{n}{\beta}}}\right) - \left[0\left(-e^{-\frac{0}{\beta}}\right)\right]\right\} + \beta\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta}\;e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \blacksquare$$

Para levantar a indeterminação do limite anterior, utilizamos l'hospital, de onde se tem que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{e^{\frac{n}{\beta}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\frac{1}{\beta}e^{\frac{n}{\beta}}}\right) = 0$$

Voltando à nossa integral e utilizando esse resultado e o valor da integral já calculado antes, temos que:

$$\blacksquare = \{0 - [0\;(-1)]\} + \beta(1) = 0 + \beta = \beta$$

Assim, $E(X) = \beta$.

Falta agora determinar uma fórmula para a variância. Lembremos que: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\;0\;dx + \int_0^{+\infty} x^2\;\frac{1}{\beta}\;e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \int_0^{+\infty} x^2\;\frac{1}{\beta}\;e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

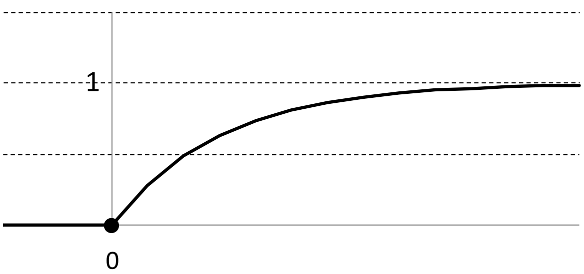
Novamente precisamos utilizar a integração por partes. A diferença é que agora precisaremos integrar duas vezes por partes, ou, utilizar o resultado do valor esperado $E(X)$.

Não apresentaremos a dedução, mas, chegamos a $E(X^2) = 2\beta^2$

Assim, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\beta^2 - [\beta]^2 = \beta^2$. Logo, $Var(X) = \beta^2$ e $DP(X) = \beta$.

A **função distribuição acumulada de probabilidades**, será dada por:

$$F(t) = \begin{cases} o\,, \qquad t \le 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{t}\frac{1}{\beta}\;e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \left(-e^{-\frac{x}{\beta}}\right)_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\;, \qquad t > 0 \end{cases}$$




Como observado em outros modelos contínuos, a utilização da função acumulada na determinação de probabilidades é bem mais simples do que no caso das variáveis discretas, já que nas variáveis contínuas a probabilidade da variável aleatória contínua assumir um valor exato é igual a zero.

Dessa forma, temos que:

$$P(a < X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

A distribuição exponencial é uma distribuição contínua que, geralmente, é usada para modelar o tempo que decorre antes de o evento acontecer. Geralmente esse tempo é denominado **tempo de espera**. Um exemplo comum é o tempo de vida de um componente, que é o tempo que decorre antes de o componente falhar.

Além disso, existe uma conexão próxima entre a distribuição exponencial e a distribuição Poisson. Se considerarmos repetições independentes de um experimento, em intervalos de tamanho **t**, em que se quer observar a variável $\boldsymbol{W}$: número de ocorrências de um evento no intervalo $\boldsymbol{t}$, cuja média por unidade de tempo é $\boldsymbol{\lambda}$, temos que a variável que conta o número de ocorrências, em cada intervalo de tamanho **t**, tem distribuição de Poisson com parâmetro $\boldsymbol{\lambda t}$, ou seja, $\boldsymbol{W \sim P(\lambda t)}$. Considerando a variável aleatória $\boldsymbol{X}$: tempo de vida (até o componente falhar), temos que $\boldsymbol{X \sim Exp(\beta)}$, em que $\boldsymbol{\beta}$ é o tempo de vida médio. Sendo $\boldsymbol{W \sim P(\lambda t)}$, então $\boldsymbol{P(W = 0)}$ é a probabilidade de nenhuma ocorrência (o componente não falhou) no intervalo de tamanho $\boldsymbol{t}$ e, por outro lado, sendo $\boldsymbol{X \sim Exp(\beta)}$, então $\boldsymbol{P(X > t)}$ é a probabilidade de que o tempo de vida é maior que $\boldsymbol{t}$.Assim, temos que: $\boldsymbol{P(W = 0) = P(X > t) \Rightarrow \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0\,!} = e^{-\frac{t}{\beta}} \Rightarrow e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{\beta}}}$**.** Como a função exponencial é injetora, temos que imagens iguais implica em elementos do domínio iguais, ou seja, temos que: $\boldsymbol{-\lambda t = -\frac{t}{\beta}}$**.** Sendo $\boldsymbol{t}$ o tamanho do intervalo, $\boldsymbol{t > 0}$ e, portanto, podemos cancelar $\boldsymbol{t}$ em ambos os membros da igualdade anterior, obtendo: $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{\beta}}$ ou, equivalentemente, $\boldsymbol{\beta = \frac{1}{\lambda}}$, estabelecendo, assim uma relação direta entre os parâmetros dos dois Modelos: Poisson e Exponencial; o primeiro contando o número de ocorrências de um evento em um intervalo de tamanho $\boldsymbol{t}$ e o segundo, o tempo de espera entre duas ocorrências desse evento.

**Por exemplo**:

*Uma massa radioativa emite partículas com média de 15 partículas por minuto. Em algum instante um cronômetro é disparado. Qual é a probabilidade de decorrerem mais de 5 segundos antes da próxima emissão? Qual é o tempo médio de espera entre duas emissões?*

Seja $W_1$ o número de partículas emitidas por essa fonte, por segundo (isto porque a unidade da pergunta é segundo).

Como temos a informação de que ocorrem em média 15 emissões por minuto, por regra de três, temos que o número médio de emissões por segundo é dado por: $\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$. Ou seja, $W_1 \sim P\left(\frac{1}{4}\right)$. Dessa forma, a variável tempo de espera para ocorrer uma emissão (em segundos) tem distribuição exponencial com parâmetro $\frac{1}{1/4} = 4$. Ou seja, se $T$ é a variável tempo de espera, em segundos, para ocorrer uma emissão, tem distribuição exponencial com parâmetro 4, que representamos por: $T \sim Exp(4)$.

Assim, a probabilidade de decorrerem mais de 5 segundos até a próxima emissão, a partir do disparo do cronômetro é dada por:

$$P(T > 5) = \int_5^{+\infty} \frac{1}{4}\, e^{-\frac{t}{4}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t}{4}}\right]_5^{+\infty} = 0 - \left(-e^{-\frac{5}{4}}\right) = e^{-\frac{5}{4}} \cong 0{,}286505$$

Observe que essa pergunta também poderia ser resolvida usando o Modelo de Poisson. Quando se quer determinar a probabilidade de decorrerem mais de 5 segundos antes da próxima emissão, equivale a determinar a probabilidade de nenhuma emissão em um intervalo de 5 segundos. Assim, definindo a v.a. $W_5$: número de emissões em um intervalo de 5 segundos tem-se que o número médio de emissões em 5 segundos é $\lambda t = \frac{1}{4}5 = \frac{5}{4}$. Então, $W_5 \sim P\left(\frac{5}{4}\right)$ e $P(W_5 = 0) = \frac{e^{-\frac{5}{4}}\left(\frac{5}{4}\right)^0}{0\,!} = e^{-\frac{5}{4}} \cong 0{,}286505$

Mais fácil ainda, é fazer uso da Função distribuição de probabilidades acumulada (repartição), para determinar probabilidades no Modelo Exponencial.

No caso do exemplo, $T \sim Exp(4)$, a função repartição é dada por: $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{4}} & se \;\; t > 0 \\ 0 \quad\quad se & t \leq 0 \end{cases}$

Assim, $P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{5}{4}}\right] = e^{-\frac{5}{4}} \cong 0{,}286505$.

Além disso, o tempo médio de espera entre duas emissões daquela fonte é de 4 segundos.

Uma propriedade interessante do modelo exponencial é conhecida como **falta de memória**. Isto é, a probabilidade de se ter um tempo de espera de tamanho $\boldsymbol{t}$ é o mesmo em qualquer momento da vida do equipamento. Em outras palavras, um componente cujo tempo de vida segue uma distribuição exponencial, não mostra qualquer efeito da idade ou desgaste. Essa característica deve ser considerada sempre que formos utilizar esse modelo em aplicações de confiabilidade de sistemas, como mostra o exemplo a seguir.

**Por exemplo**:

*O tempo de vida de um transistor em um determinado circuito segue uma distribuição exponencial com média igual a 1,25 ano. Determine a probabilidade de o circuito durar mais de 2 anos.*

Seja $\boldsymbol{T}$ o tempo de vida do circuito (em anos). Assim, $T \sim Exp(1{,}25)$.

$$P(T > 2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{1{,}25}\, e^{-\frac{t}{1{,}25}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t}{1{,}25}}\right]_2^{+\infty} = 0 - \left(-e^{-\frac{2}{1{,}25}}\right) = e^{-\frac{2}{1{,}25}} \cong 0{,}201896518$$

*Considere, agora, que o transistor tem 3 anos e ainda esteja funcionando. Determine a probabilidade de ele funcionar mais 2 anos.*

Observe que essa probabilidade é condicional:

$$P_{T>3}(T > 5) = \frac{P(T > 5 \cap T > 3)}{P(T > 3)} = \frac{P(T > 5)}{P(T > 3)} = \frac{e^{-\frac{5}{1{,}25}}}{e^{-\frac{3}{1{,}25}}} \cong \frac{0{,}018315639}{0{,}090717953} \cong 0{,}201896518$$

Que é exatamente a mesma probabilidade de antes. Ou seja, em qualquer momento da vida do componente, a probabilidade de durar certo tempo é a mesma, pelo modelo exponencial, que caracteriza que esse modelo não tem memória.

## Exercícios

**1.** Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50horas. A vida útil dessas lâmpadas é, em média, 8000h e pode ser considerada como seguindo um modelo exponencial. Determine:

**(a)** a porcentagem de trocas por defeito de fabricação;

**(b)** a porcentagem de tais lâmpadas com duração entre 7000 e 9500 horas, usando a função repartição.

**2.** Uma fábrica de tubos de TV determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial. Qual a probabilidade de que a fábrica tenha de substituir um tubo gratuitamente, se oferece garantia de 300horas de uso?

**3.** Certo tipo de fusível tem duração de vida modelada por uma distribuição Exponencial com vida média de 100horas.

**(a)** Qual a probabilidade de um fusível durar entre 50 e 100horas? Use a função acumulada.

**(b)** Qual a porcentagem de fusíveis que duram mais que 200horas? Use a função acumulada.

**4.** O tempo necessário para eliminar o perigo de contaminação de certo pesticida, após sua aplicação em um pomar, pode ser considerado como tendo distribuição Exponencial. Estima-se, também, que esse tempo é, em média, 0,5 ano. O maior ou menor tempo depende de fatores como chuva, vento e umidade da região. Tendo em vista esse comportamento, as autoridades sanitárias recomendam que o contato direto, ou indireto, com as frutas pulverizadas seja evitado por algum tempo após a aplicação.

**(a)** Calcule a probabilidade de uma fruta desse pomar, escolhida ao acaso, não estar mais contaminada após um ano da pulverização.

**(b)** Qual é a nossa "segurança" se aguardarmos dois anos para consumir essas frutas?

**5.** O tempo de utilização de um caixa eletrônico por cliente pode ser considerado como tendo uma distribuição exponencial. Sabe-se, de avaliações experimentais, que o tempo médio gasto por cliente no caixa eletrônico é 3 minutos.

**(a)** Determine a probabilidade de o tempo gasto no caixa por um cliente ser inferior a 1 minuto.

**(b)** Determine a probabilidade de o tempo gasto no caixa por um cliente ser superior a 1 minuto, sabendo que o tempo desse cliente foi inferior a 2 minutos.

**(c)** Determine o limite máximo de tempo gasto por 40% dos clientes em caixa eletrônico.

**6.** Os tempos entre solicitações a um servidor de web têm distribuição exponencial com média 0,5 segundos.

**(a)** Qual é o valor do parâmetro do modelo exponencial?

**(b)** Qual é desvio padrão do tempo entre as solicitações?

**(c)** Determine a probabilidade de decorrer mais de um segundo entre as solicitações?

**(d)** Se não houver solicitações nos últimos dois segundos, qual é a probabilidade de decorrer mais um segundo antes da próxima solicitação?

**7.** Uma massa radioativa emite partículas de acordo com um processo de Poisson, com uma taxa média de 2 por segundo. Seja $T$ o tempo de espera, em segundo, entre emissões.

**(a)** Qual é o tempo médio de espera?

**(b)** Determine $P(0{,}3 < T < 0{,}5)$.

**(c)** Se de correrem 3 segundos sem emissão, qual é a probabilidade de ocorrer uma emissão no próximo segundo?